Algunos resultados del análisis sobre el campo de los números p-ádicos

Yesid Suárez García

Universidad Industrial de Santader
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2017

Algunos resultados del análisis sobre el campo de los números p-ádicos

Yesid Suárez García

Propuesta de trabajo de grado para optar al título de Matemático

Director

Edilberto José Reyes González
Magister en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2017

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios por haberme otorgado una familia maravillosa, quienes han creido en mi siempre dándome ejemplo de superación, humildad y sacrificio.

Gracias a mis padres por ser los principales promotores de mis sueños, gracias a ellos por cada dia confiar y creer en mi y en mis expectativas, gracias a mi hermano que siempre ha estado junto a mi brindandome su apoyo.

Gracias a todos los profesores de la Universidad Industrial de Santander quienes contribuyeron tanto a mi formación académica como a mi formación profesional. En particular, agradezco a mi director de tesis, Edilberto Reyes por su orientación, seguimiento y supervisión continúa de la misma.

Índice general

RESUMEN

TÍTULO: ALGUNOS RESULTADOS DEL ANÁLISIS SOBRE EL CAMPO DE LOS NÚMEROS P-ÁDICOS[1]

AUTOR: YESID SUÁREZ GARCÍA [2]

PALABRAS CLAVE: NÚMEROS P-ÁDICOS, ANÁLISIS P-ÁDICO.

DESCRIPCIÓN:

El campo de los números p-ádicos se puede obtener del campo de los números racionales a partir de un proceso de completación con respecto a una métrica inducida por la norma p-ádica, similar en muchos aspectos al valor absoluto usual, por tanto, a manera de introducción se presenta la completación de $\mathbb{Q}$ respecto a esta métrica, además de ciertas curiosidades topologicas del campo de los números p-ádicos.

El manejo y la utilización de los números p-ádicos presenta una mayor dificultad que el uso de los números reales, no obstante es posible el desarrollo de un análisis p-ádico con tratamiento de conceptos clásicos tales como sucesiones y series, series de potencias, continuidad, diferenciabilidad, funciones trascendentales, etc. Los resultados de este análisis p-ádico son más sencillos en algunos casos que el análisis sobre el campo de los números reales. Por tanto, en el segundo capítulo se intoducirán los conceptos de sucesiones y series en $\mathbb{Q}_p$, con el objetivo de presentar la versión p-ádica de las funciones exponencial y logarítmica.

En el tercer capítulo se abordarán las nociones de continuidad y diferenciabilidad de funciones p-ádicas haciendo hincapié en las similitudes y diferencias que tienen con sus contrapartes reales, , por ejemplo, un resultado importante en el análisis real es el teorema del valor medio pero este no es cierto para funciones p-ádicas.

[1] Tesis.

[2] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas Director: Edilberto Reyes G.

ABSTRACT

TITLE: SOME RESULTS OF ANALYSIS ON THE FIELD OF P-ADIC NUMBERS. [3]

AUTHOR: YESID SUÁREZ GARCÍA[4]

KEYWORDS: P-ADIC NUMBERS, P-ADIC ANALYSIS.

DESCRIPTION:

The field of p-adic numbers can be obtained from the field of rational numbers from a process of completion with respect to a metric induced by the p-adic norm, similar in many respects to the usual absolute value, by way of introduction we present the completeness of $\mathbb{Q}$ with respect to this metric, also, certain topological curiosities in the field of p-adic numbers are included.

The management and use of p-adic numbers presents a greater difficulty than the use of real numbers, however, it is possible to develop a p-adic analysis with treatment of classical concepts such as sequences and series, power series, continuity, diferentiability, transcendental functions, etc. The results of this p-adic analysis are simpler in some cases than the real-field analysis. Therefore, in the second chapter the concepts of sequences and series in $\mathbb{Q}_p$ will be introduced, with the aim of presenting the p-adic version of the exponential and logarithmic functions.

The third chapter will address the notions of continuity and differentiability of p-adic functions by emphasizing the similarities and differences they have with their real counterparts, for example, an important result in the real analysis is the mean value theorem but this does not Is true for p-adic functions.

[3]Bachelor Thesis

[4]Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas Director: Edilberto Reyes G

INTRODUCCIÓN

Los números p-ádicos fueron definidos por Kurt Hensel a finales del siglo diecinueve, aparentemente a partir de una analogía con el cuerpo de funciones racionales. Una de las grandes motivaciones para estudiar dicho sistema numérico es su particular topología, en donde por ejemplo, las bolas son conjuntos abiertos y cerrados, y, cualquier punto en ella puede ser su centro.

Al igual que se obtienen los números reales de los racionales, el campo de los números p-ádicos se obtiene completando el campo de los números racionales con respecto a una determinada métrica, la métrica p-ádica.

En este trabajo se estudian algunos conceptos del análisis en el campo de los números p-ádicos, y se comparan con los resultados conocidos del análisis sobre los números reales, por ejemplo, una serie converge, si y solo si, su término n-ésimo converge a cero, lo que no sucede en el caso de un serie real.

Finalmente, aparte del interés sobre el análisis p-ádico, el campo de los números p-ádicos son de particular interes e importancia en otras ramas de la matemática, tales como la teoría algebraica de números y la geometria algebraica. Además de tener un papel central en algunas ramas de la fisica gracias a la propiedad no arquimediana de la métrica p-ádica (ver [4]).

Capítulo 1

LOS NÚMEROS P-ÁDICOS

En este capitulo se presentan las definiciones y teoremas básicos sobre el conjunto de los números p-ádicos que se necesitan para desarrollar el tema central del trabajo. Las demostracciones de dichos resultados se pueden encontrar en su mayoria en [3] y [9].

1.1. CAMPO DE LOS NÚMEROS P-ÁDICOS

Definición 1.1.1. *Sea R un anillo con unidad. Una función*

$$N : R \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

se dice que es una norma sobre R, si para todo $x, y \in R$ se tiene que:

- $N(x) = 0$ *si y solo si* $x = 0$.
- $N(xy) = N(x)N(y)$.
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Si además se tiene que

$$N(x + y) \leq \text{máx}\{N(x), N(y)\},$$

decimos que N es una norma no arquimediana.

Si p un número primo fijo y a es un entero no nulo, por el teorema fundamental de la aritmética existe un único $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $a = p^n r$ donde $(p, r) = 1$ y p no divide a r, lo que permite definir la siguiente función:

Definición 1.1.2. *Sea p un número primo fijo y $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la función definida por*

- $v_p(x) = máx\,\{n \in \mathbb{Z} : p^n | x\}$, *si* $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- $v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$, *si* $x = a/b \in \mathbb{Q}$.
- $v_p(0) = \infty$

La función $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ es conocida como la valuación p-ádica de un número racional y note que está bien definida, pues si $a/b = a'/b'$ entonces $ab' = a'b$, y claramente $v_p(a) + v_p(b') = v_p(a') + v_p(b)$ de donde se obtiene $v_p(a/b) = v_p(a'/b')$.

Proposición 1.1.1. *Sean* $x, y \in \mathbb{Q}$, *entonces*

(a) $v_p(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$,

(b) $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$,

(c) $v_p(x + y) \geq min\,\{v_p(x), v_p(y)\}$, *y si* $v_p(x) \neq v_p(y)$ *se da la igualdad.*

(Ver [3], Proposición 2.4 pág 16).

Definición 1.1.3. *Si p es un número primo fijo, se define en $\mathbb{Q}$ la norma p-ádica por*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.1.1. *La función* $|\ \ |_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *satisface:*

- $|x|_p = 0$ *si y solo si* $x = 0$,
- $|xy|_p = |x|_p\,|y|_p$,
- $|x + y|_p \leq máx\left\{|x|_p\,, |y|_p\right\}$, *y si* $|y|_p \neq |x|_p$ *se da la igualdad,*

es decir, $|\ \ |_p$ es una norma no arquimedeana sobre $\mathbb{Q}$.

(Ver [10], Proposicion 24. pág 25).

Nota. La desigualdad del tercer item en el Teorema 1.1.1 se conoce como la desigualdad triangular fuerte.

Dado que todo espacio normado es un espacio métrico, se tiene la siguiente definición:

Definición 1.1.4. *Sea R un anillo con unidad y N una norma en R, la distancia entre $x, y \in R$ con respecto a N es*

$$d_N(x, y) = N(x - y) \in \mathbb{R}^+.$$

Se tiene que:

- $d_N(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
- $d_N(x, y) = d_N(y, x)$,
- $d_N(x + y) \leq d_N(x, z) + d_N(z, y)$ con $z \in R$.

Si N no es arquimediana

$$d_N(x + y) \leq max\{d_N(x, z), d_N(z, y)\} \quad para \quad todo \quad x, y \in R,$$

si $d_N(x, z) \neq d_N(z, y)$ se da la igualdad.

Por lo anterior, si p es primo y $| \ |_p$ es la norma p-ádica sobre $\mathbb{Q}$, $d(x, y) = |x - y|_p$ define una métrica sobre $\mathbb{Q}$. Además, note que la imagen de la función $| \ |_p$ es el conjunto $\{p^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$.

Ahora se puede definir sobre $(\mathbb{Q}, d_{| \ |_p})$ las nociones clásicas del análisis como convergencia de series, límites, etc.

Definición 1.1.5. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{Q}$. Se dice que $\{a_n\}$ converge a b con respecto a $| \ |_p$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad tal \quad que \quad si \quad n > M \Rightarrow |a_n - b|_p < \varepsilon.$$

Definición 1.1.6. *Una sucesión $\{a_n\}$ en $\mathbb{Q}$ se llama sucesión de Cauchy con respecto a $| \ |_p$, si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > M \Rightarrow |a_n - a_m|_p < \varepsilon$.*

Como en el análisis clásico, por ser $\mathbb{Q}$ normado se cumple que:

Teorema 1.1.2. *Una $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathbb{Q}$, si el $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe entonces la sucesión es de Cauchy.*

(Ver [3], Teorema 2.11. pág 17).

Definición 1.1.7. *Una sucesión $\{a_n\}$ en $\mathbb{Q}$ se dice nula con respecto a $| \ |_p$ si converge a cero, es decir, dado ε, $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que si $n > M$,*

$$|a_n|_p < \varepsilon.$$

El campo de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es completo respecto a $|\ |_p$, ya que toda sucesión de Cauchy no converge en $\mathbb{Q}$, para ver esto se requiere construir una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no tenga límite en $\mathbb{Q}$. Supóngase un primo $p \neq 2$ y escoja un $a \in \mathbb{Z}$ tal que

- a no es cuadrado en $\mathbb{Q}$;
- p no divide a a;
- a es un residuo cuadrático módulo p, es decir, la congruencia $x^2 \cong a\ (mod\, p)$ tiene solución.

Ahora se puede construir una sucesión de Cauchy de la siguiente manera. Elija un x_0 que sea solución de $x_0^2 \cong a\ (mod\, p)$, luego tome x_1 de tal forma que $x_1 \cong x_0\ (mod\, p)$ y $x_1^2 \cong a\ (mod\, p^2)$; en general, se tiene que $x_n \cong x_{n-1}\ (mod\, p^n)$ y $x_n^2 \cong a\ (mod\, p^{n+1})$.

El siguiente paso es verificar que es una sucesión de Cauchy. Como $|\ |_p$ es una norma no arquimediana, y por la construcción se tiene,

$$|x_{n+1} - x_n|_p = |\lambda p^{n+1}|_p \leq p^{-(n+1)} \to 0,$$

por tanto, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Por otra parte,

$$|x_n^2 - a|_p = |\beta p^{n+1}|_p \leq p^{-(n+1)} \to 0$$

lo que implica que $\{x_n^2\} \to a$, pero a no es un cuadrado, por tanto no puede haber ningún limite, lo que muestra que $\mathbb{Q}$ no es completo respecto a la norma p-ádica. Así con el proposito de construir su completado, se considerán los siguientes conjuntos:

- $C(\mathbb{Q}, |\ |_p)$ el conjunto de las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ con respecto a $|\ |_p$.
- $Null(\mathbb{Q}, |\ |_p)$ el conjunto de las sucesiones de Cauchy nulas en $\mathbb{Q}$ con respecto a $|\ |_p$.

Nota. De ahora en adelante se notará $C(\mathbb{Q}, |\ |_p)$ por $\mathcal{C}$ y el conjunto $Null(\mathbb{Q}, |\ |_p)$ por $\mathcal{N}$.

Note que $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$, y además se puede dotar de estructura de anillo a $\mathcal{C}$ usando las definiciones usuales para la suma y el producto de sucesiones. Los elementos $0_{\mathcal{C}} = \{0\}$ y $1_{\mathcal{C}} = \{1\}$ son los elementos neutros para la suma y el producto de $\mathcal{C}$.

Note que si $\{x_n\}$ es una sucesión que pertenece a $\mathcal{C}$ y no esta en $\mathcal{N}$, entonces el elemento unidad $1_{\mathcal{C}}$ esta en el ideal generado por $\{x_n\}$, por tanto se tiene el siguiente lema:

Lema 1.1.1. *$\mathcal{N}$ es un ideal maximal de $\mathcal{C}$.*

(Ver [10], Lema 35. pág 34).

Definición 1.1.8. *Se define el campo de los números p-ádicos como el cociente del anillo $\mathcal{C}$ por el ideal maximal $\mathcal{N}$; así*

$$\mathbb{Q}_p = \mathcal{C}/\mathcal{N}.$$

Los elementos de $\mathbb{Q}_p$ son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ con respecto a la extensión de la norma p-ádica $|\ |_p$.

Note que dos sucesiones constantes distintas nunca se diferencian por un elemento de $\mathcal{N}$ (su diferencia es simplemente otra sucesión constante). Por lo tanto, se tiene la inclusión

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$$

mediante el envío de $x \in \mathbb{Q}$ a las clases de equivalencia de la sucesión constante $\{x\}$.

Extendemos la norma p-ádica en $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}_p$ de la siguiente manera:

Lema 1.1.2. *Sea $\{x_n\} \in \mathcal{C}$, $\{x_n\} \notin \mathcal{N}$. La sucesión de números reales $|x_n|_p$ es eventualmente estacionaria, es decir, existe un N tal que $|x_n|_p = |x_m|_p$ para todo $m, n \geq N$.*

(Ver [10], Lema 37. pág 35).

Esto significa que la definición que se dará a continuación tiene sentido,

Definición 1.1.9. *Si λ es un elemento de $\mathbb{Q}_p$, y $\{x_n\}$ es cualquier sucesión representando λ, se define*

$$|\lambda|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p \,.$$

El límite anterior no depende de la elección de la sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en $\mathbb{Q}_p$.

Dado que cualquier bola abierta alrededor de un elemento $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ contiene un elemento de $\mathbb{Q}$, y, que cualquier sucesión de Cauchy converge en $\mathbb{Q}_p$, se tienen los siguientes resultados:

Proposición 1.1.2. *$\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{Q}_p$.*

(Ver [10], Proposicion 40. pág 36).

Proposición 1.1.3. *$\mathbb{Q}_p$ es completo con respecto a la norma $|\ |_p$.*

(Ver [10], Proposicion 41. pág 37).

1.2. ALGUNAS PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE CAMPO DE LOS NÚMEROS P-ÁDICOS

Definición 1.2.1. *El disco unitario alrededor de $0 \in \mathbb{Q}_p$ es el conjunto de enteros p-ádicos*

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p \leq 1 \right\}.$$

Observación 1.2.1. *Sea $x \in \mathbb{Q}_p$. Entonces $|x|_p < p$ si y solo si $|x|_p \leq 1$.*

A continuación se presentará un teorema que hará más simple la comprensión de $\mathbb{Q}_p$.

Teorema 1.2.1. *Cada clase de equivalencia $a \in \mathbb{Q}_p$, con $|a|_p \leq 1$ tiene exactamente un representante de la forma $\{a_n\}$ para el cual:*

- $0 \leq a_n < p^n$ *para cada* $n = 1, 2, ...$
- $a_n \cong a_{n+1}$ *mód* p^n *para cada* $n = 1, 2, ...$

(Ver [1], Teorema 1.2.2. pág 5).

Si $a \in \mathbb{Q}_p$ y $|a|_p > 1$, entonces $\frac{a}{|a|_p} = ap^{v_p(a)}$ tiene norma p-ádica menor o igual a 1, y por el Teorema 1.2.1, existe un representante $\{b_n\}$ con las condiciones del Teorema para $ap^{v_p(a)}$, así, a tiene como representante a $\{a_n\}$ donde $a_n = b_n p^{-v_p(a)}$. Escribiendo todos los b_n en la sucesión representante de $ap^{v_p(a)}$ en base p, la segunda condición, se traduce como, si

$$b_n = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + ... + c_{n-1} p^{n-1},$$

donde los c_i son números en $\{0, 1, ..., p-1\}$, entonces

$$b_{n+1} = c_0 + c_1 p + ... + c_{n-1} p^{n-1} + c_n p^n,$$

donde los digitos c_0 hasta c_{n-1} son los mismos que para b_n. De lo anterior, se sigue que

$$\frac{a}{|a|_p} = c_0 + c_1 p + ... + c_{n-1} p^{n-1} + c_n p^n + ...,$$

por tanto, se obtiene una forma de escribir cualquier $a \in \mathbb{Q}_p$, llamada la *expansión p-ádica de a*

$$a = c_0 p^{-n} + c_1 p^{-n+1} + ... + c_{n-1} p^{-1} + c_n + c_{n+1} p + c_{n+2} p^2 + ...$$

donde $n = v_p(a)$

Nota: La unicidad en el Teorema 1.2.1 es algo que no se tiene en el caso de los números reales, dado que existen varias representaciones decimales para un mismo número. Por ejemplo: $1,000... = 0,999...$, pero si dos expansiones p-ádicas convergen al mismo número en $\mathbb{Q}_p$, entonces ellas son iguales, es decir, todos sus dígitos son los mismos.

Observación 1.2.2. *Se define el conjunto de unidades de $\mathbb{Z}_p$ como*

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\},$$

ya que si $x \in \mathbb{Z}_p$ y $x^{-1} \in \mathbb{Z}_p$ entonces $|x|_p \leq 1$ y $|x|_p^{-1} \leq 1$, y, por lo tanto $|x|_p = 1$.

Proposición 1.2.1. *Sean $a, x \in \mathbb{Q}_p$, si $|x-a|_p < |a|_p$ entonces $|x|_p = |a|_p$.*

Demostración. Por la desigualdad triangular,

$$|x|_p = |x - a + a|_p \leq max\left(|x-a|_p, |a|_p\right) = |a|_p$$

Por otro lado

$$|a|_p = |a - x + x|_p \leq max\left(|x-a|_p, |x|_p\right)$$

Si $|x-a|_p > |x|_p$, implicaría que $|a|_p \leq |x-a|_p$, una contradicción. Por lo tanto $|x-a|_p \leq |x|_p$, y asi $|a|_p \leq |x|_p$, por lo tanto $|a|_p = |x|_p$. $\square$

Las siguientes proposiciones son consecuencia directa de la propiedad no arquimediana de $|\ |_p$.

Proposición 1.2.2. *Las bolas en $\mathbb{Q}_p$ son abiertas y cerradas.*

(Ver [10], Proposición 58. pág 53).

Proposición 1.2.3. *Si $b \in B(a,r)$, entonces $B(b,r) = B(a,r)$; en otras palabras, todo punto de la bola es un centro.*

(Ver [10], Proposición 59. pág 54).

Proposición 1.2.4. *Cualesquiera dos bolas abiertas son disjuntas o están contenidas una en la otra.*

(Ver [10], Proposición 60. pág 54).

El campo $\mathbb{R}$ es localmente compacto, es decir, cada punto esta contenido en un entorno compacto y también lo es $\mathbb{Q}_p$ como se verá a continuación.

Teorema 1.2.2. *$\mathbb{Z}_p$ es compacto, y $\mathbb{Q}_p$ es localmente compacto.*

Demostración. Dado que $\mathbb{Z}_p$ es una vecindad del cero, si se prueba que es compacto se sigue que $\mathbb{Q}_p$ es localmente compacto. Ya que $\mathbb{Z}_p$ es completo, porque es un conjunto cerrado de un campo completo, entonces solo falta probar que es totalmente acotado.

Note que

$$a + p^n\mathbb{Z}_p = \{a + p^n x : x \in \mathbb{Z}_p\} = \{y \in \mathbb{Z}_p : |y - a|_p \leq p^{-n}\} = \overline{B(a, p^{-n})}$$

son bolas en la topologia p-ádica y que a puede ser $0, 1, ..., p^{n-1}$, por lo tanto $\mathbb{Z}_p$ es cubierto por p^n bolas de radio p^{-n}, por lo tanto $\mathbb{Z}_p$ es compacto.

□

Cualquier intervalo en $\mathbb{R}$ es conexo, es decir, no se puede descomponer en una unión disjunta de dos conjuntos no vacíos los cuales son abiertos y cerrados. El siguiente teorema muestra lo que sucede en el caso p-ádico.

Teorema 1.2.3. *$\mathbb{Q}_p$ es totalmente disconexo.*

Demostración. Para cada $a \in \mathbb{Q}_p$ y cada $n \in N$ el conjunto

$$U_n(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < p^{-n}\}$$

es una vecindad abierta y cerrada de a.

Sea $A \subset \mathbb{Q}_p$, y supóngase que $a \in A$ de modo que $A \neq \{a\}$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n(a) \cap A \neq A$, por lo tanto se puede ver A de la siguiente manera:

$$A = (A \cap U_n(a)) \bigcup (A \cap \mathbb{Q}_p \setminus U_n(a))$$

donde $U_n(a)$ y su complemento son abiertos, lo que implica que A es disconexo y por lo tanto $\mathbb{Q}_p$ es totalmente disconexo.

□

Capítulo 2

ANÁLISIS P-ÁDICO BÁSICO

En este capitulo se abordarán los conceptos clásicos del análisis en $\mathbb{Q}_p$, tales como la convergencia de series y sucesiones, además, al igual que en el campo de los números reales, existen funciones que se pueden representar por series de potencia, por tanto, se presentará la versión p-ádica de algunas funciones elementales definidas a partir de series de potencia. Las demostracciones de los resultados que presentaremos, fueron obtenidas de los diferentes textos que se mencionan en la bibliografia, principalmente en [6] y [7].

2.1. SUCESIONES Y SERIES

Teorema 2.1.1. *Una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{Q}_p$ es de Cauchy, y por lo tanto convergente, si y solo si satisface*

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0. \tag{2.1}$$

Demostración. $\Rightarrow$) Si $\{x_n\}$ es de Cauchy, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m|_p < \varepsilon$ para todo $n, m > n_0$, en particular, si se escoge $m = n+1$ se obtiene (2.1).

$\Leftarrow$) Suponga que (2.1) es cierto, es decir, que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que si $n > N$ entonces

$$|x_{n+1} - x_n|_p < \varepsilon.$$

Por la propiedad no arquimediana, para cualquier $n > m > N$ se tiene

$$|x_m - x_n|_p = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + ... - x_n|_p$$

$$\leq máx\left\{|x_m - x_{m-1}|_p, |x_{m-1} - x_{m-2}|_p, ..., |x_{n+1} - x_n|_p\right\} < \varepsilon.$$

$\square$

Teorema 2.1.2. *Una serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *con* a_n *en* $\mathbb{Q}_p$ *es convergente si y solo si el* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, en tal caso*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right|_p \leq \max_n |a_n|_p . \tag{2.2}$$

Demostración. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ converge. Como $a_n = S_{n+1} - S_n$, se sigue del Teorema 2.1.1 que a_n tiende a cero si y solo si la serie converge.

Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y veamos la desigualdad (2.2). Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ no hay nada que demostrar. Si no, como $a_n \to 0$ existe un entero N tal que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right|_p = \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right|_p$$

y

$$\max\left\{|a_n|_p : 1 \leq n \leq N\right\} = \max_n |a_n|_p .$$

Por la desigualdad triangular fuerte

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right|_p = \max_n |a_n|_p$$

por tanto se tiene (2.2). □

Esta proposición es falsa en $\mathbb{R}$. El ejemplo más familiar es la serie armónica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ la cual diverge, mientras $\frac{1}{n} \to 0$.

Esto significa que es más fácil trabajar la convergencia de series en el contexto p-ádico que sobre $\mathbb{R}$. Esto tiene el efecto de hacer la teoría de series en $\mathbb{Q}_p$ generalmente más simple que en la teoría clásica.

Ejemplo 2.1.1. *Si se considera la sucesión* $a_n = np^n$*, se tiene lo siguiente*

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} np^n,$$

y

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)p^{n+1},$$

luego se obtiene

$$\left|(n+1)p^{n+1}\right|_p = |n+1|_p \left|p^{n+1}\right|_p \leq \frac{1}{p^{n+1}},$$

que claramente tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por el Teorema 2.1.1, S_n es convergente.

Esta serie diverge en $\mathbb{R}$ dado que $\lim_{n\to\infty} np^n \neq 0$.

Se estudiará en detalle un teorema acerca de series dobles y reordenamiento de términos. Considere una sucesión doble b_{ij} de números p-ádicos y la serie obtenida ya sea sumando primero en i y luego en j, o reciprocamente. Para que esto tenga sentido es necesario que b_{ij} tienda a cero cuando se fija uno de los índices.

Se puede decir que

$$\lim_{i\to\infty} b_{ij} = 0 \ \ uniformemente \ \ en \ \ j,$$

si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N que no depende de j tal que si $i > N$ entonces $|b_{ij}|_p < \varepsilon$. En otras palabras, para cada j la sucesión b_{ij} tiende a cero cuando $i \to \infty$.

Lema 2.1.1. *Sea $b_{ij} \in \mathbb{Q}_p$, y suponga que*

(i) para cada i, $\lim_{j\to\infty} b_{ij} = 0$,

(ii) $\lim_{i\to\infty} b_{ij} = 0$ uniformemente en j,

entonces dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero $N = N(\varepsilon)$ tal que si $máx\,(i,j) \geq N$ entonces $|b_{ij}|_p < \varepsilon$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por (ii) existe un entero positivo $N_0 = N_0(\varepsilon)$ que no depende de j, tal que $|b_{ij}|_p < \varepsilon$ si $i \geq N_0$. La condición (i) es más débil, dice que para cada i existe un $N_1(i)$ tal que si $j \geq N_1(i)$ entonces $|b_{ij}|_p < \varepsilon$. Ahora se define

$$N = N(\varepsilon) = máx\left\{N_0, N_1(0), N_1(1), ..., N_1(N_0-1)\right\}.$$

Si el $máx\,(i,j) \geq N$, como $i \geq N_0$ entonces $|b_{ij}|_p < \varepsilon$ independientemente de j, por tanto, solo se debe considerar cuando $i < N_0$ y $j \geq N$, en tal caso i debe ser igual a uno de los $0, 1, ..., N_0 - 1$ y j será el mas grande que el N_1 correspondiente, obteniendo $|b_{ij}|_p < \varepsilon$ de nuevo.

□

Observación 2.1.1. *El hecho de que $b_{ij} \to 0$ uniformemente en j, nos permite restringir a solo un número finito de casos, para los cuales se usa la otra condición.*

Ahora se puede probar el siguiente teorema de series dobles.

Teorema 2.1.3. *Sea $b_{ij} \in \mathbb{Q}_p$ y suponga que*

i) Para cada i, $\lim_{j\to\infty} b_{ij} = 0$,

ii) $\lim_{i\to\infty} b_{ij} = 0$ uniformemente en j,

entonces ambas series,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}\right) \quad y \quad \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_{ij}\right)$$

convergen y sus sumas son iguales.

Demostración. Por el Lema 2.1.1, dado $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que si $max(i,j) \geq N$ entonces $|b_{ij}|_p < \varepsilon$. En particular, b_{ij} tiende a cero para cada i cuando $j \to \infty$ y viceversa, lo que significa que las sumas internas ,

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} \quad y \quad \sum_{i=0}^{\infty} b_{ij},$$

convergen (la primera para todo i y la segunda para todo j). Además, para $i \geq N$ se sigue del Teorema 2.1.2,

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}\right|_p \leq \max_j |b_{ij}|_p < \varepsilon.$$

Similarmente para $j \geq N$ se tiene,

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} b_{ij}\right|_p < \varepsilon.$$

Luego, se deduce que,

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} = 0 \quad y \quad \lim_{j\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty} b_{ij} = 0,$$

de modo que ambas series convergen.

Queda por comprobar que las sumas son iguales. Para esto, se continuará utilizando los N y ε elegidos anteriormente, así que $|b_{ij}|_p < \varepsilon$ cuando $i \geq N$ o $j \geq N$.

Note que

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}\right)-\sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{j=0}^{N} b_{ij}\right)\right|_p=\left|\sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} b_{ij}\right)+\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}\right)\right|_p.$$

Ahora, si $j \geq N+1$, se tiene que $|b_{ij}|_p < \varepsilon$ para cada i, por la desigualdad triangular fuerte se sigue que $\left|\sum_{j=N+1}^{\infty} b_{ij}\right|_p < \varepsilon$ para cada i, aplicando de nuevo la desigualdad,

$$\left|\sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} b_{ij}\right)\right|_p < \varepsilon.$$

Similarmente, se obtiene la estimación para el otro sumando:

$$\left|\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}\right)\right|_p < \varepsilon.$$

Si se aplica una vez más la desigualdad se concluye que

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}\right)-\sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{j=0}^{N} b_{ij}\right)\right|_p < \varepsilon.$$

Si se invierten j e i, se encontrará de manera similar que

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_{ij}\right)-\sum_{j=0}^{N}\left(\sum_{i=0}^{N} b_{ij}\right)\right|_p < \varepsilon.$$

Dado que se pueden invertir el orden de los sumandos en la serie finita, se tiene

$$\sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{j=0}^{N} b_{ij}\right)=\sum_{j=0}^{N}\left(\sum_{i=0}^{N} b_{ij}\right),$$

entonces se concluye que

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}\right)-\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_{ij}\right)\right|_p < \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, se sigue que las dos series deben ser iguales. $\square$

2.2. SERIES DE POTENCIA

En el análisis real, las series de potencia son una manera apropiada de representar funciones tales como la exponencial, el logaritmo y algunas funciones racioanles. En las siguientes secciones enunciaremos algunos resultados encontrados en su mayoria en [6] y [7], donde se explorarán las principales ideas sobre las series de potencia en $\mathbb{Q}_p$, con el objetivo final, de presentar la versión p-adica del logaritmo y la exponencial.

Considere la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

con $x \in \mathbb{Q}_p$. Entonces esta serie converge si y solo si $|a_n x^n|_p \to 0$. Igualmente como ocurre en $\mathbb{R}$, el conjunto donde la serie converge es una bola, que es llamada la región de convergencia.

Como en el caso arquimediano, se define el radio de convergencia por

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|_p}}. \tag{2.3}$$

Observación 2.2.1. *El simbolo* $\limsup$ *representa el limite superior de una sucesión* $\{x_n\}$*, el cual se define como el "mayor" de los límites de las subsucesiones convergentes de* $\{x_n\}$*. Claramente, si la sucesión* $\{x_n\}$ *es convergente, entonces* $\limsup a_n = \lim a_n$.

Proposición 2.2.1. *Suponga que* $0 < \rho < \infty$*. Entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge si* $|x|_p < \rho$ *y diverge si* $|x|_p > \rho$.

Demostración. Dado que la región de convergencia es

$$\left\{ x \in \mathbb{Q}_p : \lim_{n\to\infty} |a_n x^n|_p = 0 \right\}$$

entonces, si $|x|_p < \rho$ se tiene que $|a_n x^n|_p = |a_n|_p |x|_p^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto la serie converge. Ahora, si $|x|_p > \rho$, se puede ver que $|a_n|_p |x|_p^n$ no puede tender a cero cuando n tiene a infinito, en efecto, la definición de ρ implica que para un número infinito de $n's$, $|a_n|_p$ esta cerca de $\frac{1}{\rho^n}$, y como $|x|_p > \rho$, entonces $\left(\frac{|x|_p}{\rho}\right)^n$ es arbitrariamente grande cuando n crece, por lo tanto la serie no converge. $\square$

En contraste con el caso clásico, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge o diverge para todo $x \in \mathbb{Q}_p$, tal que $|x|_p = \rho$.

Proposición 2.2.2. *Sea* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *y* ρ *el radio de convergencia donde* $0 \leq \rho \leq \infty$. *Se verifica*

i) *Si* $\rho = 0$, *entonces* $f(x)$ *converge solamente cuando* $x = 0$,

ii) *Si* $\rho = \infty$, *entonces* $f(x)$ *converge para cada* $x \in \mathbb{Q}_p$,

iii) *Si* $0 < \rho < \infty$ *y* $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p \rho^n = 0$, *entonces* $f(x)$ *converge si y solo si* $|x|_p \leq \rho$,

iv) *Si* $0 < \rho < \infty$ *y* $|a_n|_p \rho^n$ *no tiende a cero cuando* n *tiende a infinito, entonces* $f(x)$ *converge si y solo si* $|x|_p < \rho$.

Demostración.

i) Si $\rho = 0$, la región de convergencia se reduce a un solo punto, en este caso $x = 0$.

ii) Si $\rho = \infty$, entonces la región de convergencia es $\mathbb{Q}_p$, así $f(x)$ converge para todo $x \in \mathbb{Q}_p$.

iii) $\Rightarrow$) Suponga que $|x|_p > \rho$, entonces por la Proposición 2.2.1 $f(x)$ no converge, lo que genera una contradicción, así $|x|_p \leq \rho$.
$\Leftarrow$) Suponga que $|x|_p \leq \rho$,

- Si $|x|_p < \rho$, por la Proposición 2.2.1 $f(x)$ converge.
- Si $|x|_p = \rho$, entonces $|a_n x^n|_p = |a_n|_p |x|_p^n = |a_n|_p \rho^n$ y por la hipótesis se concluye que $|a_n x^n|_p \to 0$ cuando $n \to \infty$.

iv) $\Rightarrow$) Se razona por absurdo, suponga que $|x|_p \geq \rho$.

- Si $|x|_p > \rho$, por la Proposición 2.2.1 $f(x)$ no converge.
- Si $|x|_p = \rho$, entonces $|a_n x^n|_p = |a_n|_p |x|_p^n = |a_n|_p \rho^n$ y por la hipótesis se concluye que $|a_n x^n|_p$ no converge a 0 cuando $n \to \infty$.

Por lo tanto $|x|_p < \rho$.

$\Leftarrow$) Suponga que $|x|_p < \rho$, entonces por por la Proposición 2.2.1 $f(x)$ converge.

$\square$

Dadas dos series de potencia $f(x)$ y $g(x)$, se puede considerar su suma y producto. Como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

entonces se define

$$(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n,$$

$$(fg)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n.$$

Esto permite obtener la siguiente proposición de manera similar a $\mathbb{R}$, por tanto se omite su demostracción.

Proposición 2.2.3. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ series de potencia, y suponga que $x \in \mathbb{Q}_p$. Si $f(x)$ y $g(x)$ convergen, entonces:*

i) $(f+g)(x)$ converge y es igual a $f(x)+g(x)$.

ii) $(fg)(x)$ converge y es igual a $f(x)g(x)$.

Luego de haber definido la suma y multiplicación de series, se puede considerar su composición. Suponga que se tienen dos series de potencia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

y que $b_0 = 0$, es decir $g(0) = 0$. Si se realiza la composición de series, se obtiene

$$h(x) = a_0 + a_1 g(x) + a_2 g(x)^2 + ... + a_n g(x)^n + ...,$$

que se puede reorganizar en una serie de potencias. Como $g(x)$ no tiene término independiente, $g(x)^2$ empieza con el término de grado 2, $g(x)^3$ empieza con el término de grado 3, y así sucesivamente. Entonces, cuando se trata de obtener los coeficientes de $h(x) = f(g(x)) = \sum c_n x^n$, cada uno de ellos solamente requieren una cantidad finita de trabajo.

- El coeficiente cero es justamente $c_0 = a_0$.
- El primer coeficiente solo requiere de los dos primeros términos $a_0 + a_1 g(x)$, por lo tanto $c_1 = a_1 b_1$.
- El segundo coeficiente requiere de los tres primeros términos

  $$a_0 + a_1 g(x) + a_2 g(x)^2 = a_0 + a_1(b_1 x + b_2 x^2 + ...) + a_2(b_1^2 x^2 + ...),$$

  y así $c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2$.

- Para el tercer término,

$$a_0 + a_1 g(x) + a_2 g(x)^2 + a_3 g(x)^3$$

$$= a_0 + a_1(b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + ...) + a_2(b_1^2 x^2 + 2b_1 b_2 x^3 ...) + a_3(b_1^3 x^3 + ...),$$

así que $c_3 = a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3$.

- Del mismo modo, se puede encontrar c_n para cada n.

Ya que de la composición de series de potencias resulta otra serie, surge la pregunta acerca de su convergencia, la cual puede presentar incovenientes. El problema es que al evaluar un número x en la serie de potencias $h(x)$ puede dar una respuesta diferente a la que se obtiene evaluando primero x en $g(x)$ y después evaluar el resultado en $f(x)$. El incoveniente se puede presentar cuando se considera la cantidad de reordenamientos que suceden en la composición de las series. Por lo tanto, para evitar estos incovenientes se presenta el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. *Sean $f(x) = \sum a_n x^n$ y $g(x) = \sum b_n x^n$ series de potencia con $g(0) = 0$, tal que*

i) $g(x)$ converge;

ii) $f(g(x))$ converge (esto significa que evaluando el número al cual converge $g(x)$ en $f(x)$ da una serie convergente);

iii) para cada n, se tiene $|b_n x^n|_p \leq |g(x)|_p$ (en otras palabras, ningún término de la serie que converge a $g(x)$ es mas grande que su suma);

y sea $h = (f \circ g)$ su composición formal, entonces $h(x)$ converge y $f(g(x)) = h(x)$.

Demostración. Sea

$$g(x)^m = \sum_{n=m}^{\infty} d_{m,n} x^n,$$

donde $d_{m,n} = 0$ si $n < m$, y, para cualquier $n \geq m$,

$$d_{m,n} = \sum_{i_1+i_2+...+i_m=n} b_{i_1} b_{i_2} ... b_{i_m}.$$

(Esta fórmula toma todos los productos de las m-uplas de los b_i's cuyos índices suman n). Esto permite escribir $h(x)$ de la siguiente manera:

$$h(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

donde

$$c_n = \sum_{m=1}^{n} a_m d_{m,n}.$$

Ahora se verificará su convergencia. Ya que $g(x)$ converge, se puede usar la Proposición 2.2.3 para concluir que la serie $g(x)^m$ converge. Además, la afirmación (iii) para $g(x)$ se cumple para las series $g(x)^m$, es decir, para cada n, se tiene

$$|d_{m,n}x^n|_p \leq |g(x)^m|_p \,.$$

Para ver esto note que $|g(x)^m|_p = |g(x)|_p^m$, y al tomar el término general $|d_{m,n}x^n|_p$, si $n < m$ se tiene que $|d_{m,n}x^n|_p = 0$ y por tanto no hay nada que probar. Por otro lado, si $n \geq m$, la desigualdad triangular fuerte implica que,

$$|d_{m,n}x^n|_p \leq máx \left|b_{i_1}x^{i_1}\right|_p \cdot \left|b_{i_2}x^{i_2}\right|_p \cdots \left|b_{i_m}x^{i_m}\right|_p ,$$

donde de nuevo se toma el máximo sobre todas la m-uplas $(i_1, i_2, ..., i_m)$ tal que

$$i_1 + i_2 + ... + i_m = n.$$

Por la hipótesis en $g(x)$ se tiene que $\left|b_{i_j}x^{i_j}\right|_p \leq |g(x)|_p$ para cada i_j, si se multiplican todas estas desigualdades se obtiene $|d_{m,n}x^n|_p \leq |g(x)^m|_p$, que es la desigualdad que se quería demostrar.

Ahora se tiene que $g(x)$ y las potencias de $g(x)$ convergen, y que tanto la serie para $g(x)$ y $g(x)^m$ satisfacen la condición (iii) de que ningún término es mayor que la suma final. Además de las afirmaciones (i) y (ii) se tiene que $f(g(x))$ converge, esto es, $a_m(g(x))^m$ tiende a cero cuando $m \to \infty$.

Se tiene que

$$f(g(x)) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m g(x)^m = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\sum_{n=m}^{\infty} d_{m,n}x^n \right) \tag{2.4}$$

$$= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} a_m d_{m,n} x^n \tag{2.5}$$

y por otro lado,

$$h(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} a_m d_{m,n} \right) x^n$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} a_m d_{m,n} x^n. \tag{2.6}$$

Estas series se obtienen una de la otra invirtiendo el orden de los sumandos, por tanto, resta probar que ambas series tienen la misma suma. Para obtener esto, se aplicará el Teorema 2.1.3.

Veamos que el término general $a_m d_{m,n} x^n$ tiende a cero uniformemente. Como $g(x)^m$ es más grande que cualquier término de la serie, se puede acotar de siguiente manera

$$|a_m d_{m,n} x^n|_p \leq |a_m g(x)^m|_p .$$

Note que el lado derecho no depende de n, por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, como $a_m g(x)^m \to 0$, existe un entero positivo N tal que

$$|a_m d_{m,n} x^n|_p < \varepsilon$$

si $m \geq N$, por tanto,

$$\lim_{m\to\infty} a_m d_{m,n} x^n = 0 \quad uniformemente\ en\ n.$$

Por otra parte, para cada m la serie,

$$g(x)^m = \sum_{n=m}^{\infty} d_{m,n} x^n$$

converge, después de multiplicar por a_m, se sigue que para cada m,

$$\lim_{n\to\infty} a_m d_{m,n} x^n = 0,$$

así al aplicar el Teorema 2.1.3, tanto (2.5) y (2.6) convergen y sus sumas son iguales. $\square$

La afirmación (iii) en $g(x)$ es esencial, se discutirá un ejemplo importante de esto, que involucran el logaritmo y la exponencial, más adelante en este capítulo.

2.3. FUNCIONES DEFINIDAS POR SERIES DE POTENCIA

De igual manera que el caso clásico, las series de potencias, vistas como funciones, tienen un buen comportamiento, en el sentido de que son funciones continuas y derivables. Más aún, su función derivada es, otra vez, una serie de potencias.

Lema 2.3.1. *Sea $f(x) = \sum a_n x^n$ una serie de potencias con coeficientes en $\mathbb{Q}_p$, y sea $D \subset \mathbb{Q}_p$ su región de convergencia, es decir, el conjunto de los x para los cuales $f(x)$ converge. La función*

$$f : D \to \mathbb{Q}_p$$

definida por $x \to f(x)$ es continua en D.

Demostración. Sea $x \in D$. Si $|x-y|_p < \delta$ donde $\delta < |x|_p$, entonces por la Proposición 1.2.1 se tiene que $|x|_p = |y|_p$. Luego,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)|_p = |\sum a_n(x^n - y^n)|_p &\leq máx|a_n(x^n - y^n)|_p \\ &= máx|a_n(x-y)(\sum_{i=1}^{n} x^{n-i}y^{i-1})|_p \\ &\leq máx\left(|a_n|_p|x-y|_p|x^{n-i}y^{i-1})|_p\right) \\ &= máx\left(|a_n|_p|x-y|_p|x^{n-1}|_p\right), \end{aligned}$$

ya que $|x|_p = |y|_p$, entonces

$$|f(x) - f(y)|_p \leq máx\left(|a_n|_p|x-y|_p|x|_p^{n+1}\right) < \frac{\delta}{|x|_p}|a_n|_p|x|_p^n,$$

como $|a_n|_p|x|_p^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $x \in D$, se obtiene $|f(x)-f(y)|_p < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. □

Como en el caso clásico, se puede cambiar el centro de la expansión de la serie, es decir, se puede reescribir la serie de potencias en $(x-\alpha)$ para algún α en la región de convergencia. En el caso clásico la serie resultante puede tener una región de convergencia diferente a la serie original, pero esto no sucede en el contexto p-ádico.

Proposición 2.3.1. [6] *Sea $f(x) = \sum a_n x^n$ una serie de potencias con coeficientes en $\mathbb{Q}_p$ y sea $\alpha \in D$, donde D es la región de convergencia de f. Para cada $m \geq 0$ defina*

$$b_m = \sum_{n \geq m} \binom{n}{m} a_n \alpha^{n-m}, \tag{2.7}$$

y considere la serie de potencias

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-\alpha)^m. \tag{2.8}$$

Entonces

i) (2.7) converge para todo m, así b_m está bien definida para cualquier m;

ii) las series de potencia $f(x)$ y $g(x)$ tienen la misma región de convergencia, es decir $f(\lambda)$ converge si y solo si $g(\lambda)$ converge;

iii) para cualquier λ en la región de convergencia, se tiene $g(\lambda) = f(\lambda)$.

Demostración. Veamos la afirmación (i), como $\alpha \in D$ y $\binom{n}{m} \in \mathbb{Z}$ se obtiene

$$\left|\binom{n}{m} a_n \alpha^{n-m}\right|_p \leq \left|a_n \alpha^{n-m}\right|_p = \left|a_n \alpha^n \alpha^{-m}\right|_p = |\alpha|_p^{-m} \cdot |a_n \alpha^n|_p \to 0,$$

que dá la convergencia por el Teorema 2.1.2.

Para mostrar (ii) y (iii), se toma cualquier $\lambda \in D$, y se calcula

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \sum_n a_n(\lambda - \alpha + \alpha)^n &= \sum_n a_n(\alpha + (\lambda - \alpha))^n \\ &= \sum_n a_n \sum_{m \leq n} \binom{n}{m} \alpha^{n-m} (\lambda - \alpha)^m \\ &= \sum_n \sum_{m \leq n} \binom{n}{m} a_n \alpha^{n-m} (\lambda - \alpha)^m, \end{aligned}$$

que se asemeja a $g(\lambda)$ excepto que necesita ser reordenado. Sea

$$\beta_{nm} = \begin{cases} \binom{n}{m} a_n \alpha^{n-m} (\lambda - \alpha)^m & si \quad m \leq n \\ 0 & si \quad m > n. \end{cases}$$

Veamos que la sucesión β_{nm} satisface las condiciones en el Teorema 2.1.3. Note que

$$|\beta_{nm}|_p = \left|\binom{n}{m} a_n \alpha^{n-m} (\lambda - \alpha)^m\right|_p \leq \left|a_n \alpha^{n-m} (\lambda - \alpha)^m\right|_p,$$

de modo que el problema es limitar esta última expresión. Dado que la región de convergencia es una bola (cerrada o abierta) de radio ρ, y, que λ y α están en D, entonces existe un radio ρ_1 tal que

- La bola cerrada de radio ρ_1 está contenida en la región de convergencia, y
- $|\lambda|_p \leq \rho_1$ y $|\alpha|_p \leq \rho_1$.

Lo anterior se tiene sin importar que D sea una bola abierta o cerrada, en efecto, si D es una bola cerrada se puede tomar $\rho_1 = \rho$, y si es la bola abierta, se toma ρ_1 como el más grande de los valores absolutos de α y λ, así que $\rho_1 < \rho$, entonces se tiene

- $|\alpha|_p^{n-m} \leq \rho_1^{n-m}$, y
- $|\lambda - \alpha|_p^m \leq max\left\{|\lambda|_p, |\alpha|_p\right\}^m \leq \rho_1^m$ por la propiedad no arquimediana.

Al retomar los términos que se quieren estimar, se obtiene

$$|\beta_{nm}|_p \leq \left|a_n\alpha^{n-m}(\lambda-\alpha)^m\right|_p \leq |a_n|_p\,\rho_1^{n-m}\rho_1^m = |a_n|_p\,\rho_1^n,$$

que es independiente de m y tiende a cero cuando $n \to \infty$. Esto significa que dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un N para el cual $|\beta_{nm}| < \varepsilon$ si $n \geq N$. Esto muestra que β_{nm} tiende a cero uniformemente en m.
Para la otra condición, note que si $m > n$ entonces $\beta_{nm} = 0$, por lo tanto para cada n se tiene $\beta_{nm} \to 0$ cuando $m \to \infty$, por consiguiente, las condiciones en el Teorema refyes se satisfacen, y se puede invertir el orden de los sumandos, por lo tanto, si se cambia el orden de los sumandos en la expresión para $f(\lambda)$ se obtiene la expresión para $g(\lambda)$, es decir,

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \sum_n \sum_{m\leq n} \binom{n}{m} a_n\alpha^{n-m}(\lambda-\alpha)^m &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\beta_{nm} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{nm} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m\leq n}\binom{n}{m} a_n\alpha^{n-m}(\lambda-\alpha)^m = g(\lambda). \end{aligned}$$

Así al aplicar el Teorema 2.1.3 se concluye que $g(\lambda)$ converge y es igual a $f(\lambda)$. Esto muestra que g converge cuando f lo hace, y en este caso sus valores son iguales. Finalmente, note que si se cambian los roles de g y f en el argumento se obtiene el mismo resultado, es decir, esto muestra que la región de convergencia es la misma.

□

Ejemplo 2.3.1. *Sea $f(x)$ una serie de potencias que converge para $|x|_p < \rho$. Suponga que $|a|_p = 1$ y $|b|_p < \rho$, entonces la función $g(x) = f(ax+b)$ dada por una serie potencias converge para $|x|_p < \rho$.*

Como en la teoría clásica, las funciones que pueden expresarse como series de potencias son llamadas funciones analíticas. Funciones de este tipo, en general, tienen propiedades buenas, esto también es cierto en $\mathbb{Q}_p$.

Definición 2.3.1. *Una sucesión $\{x_m\}$ que converge a el límite L es estacionaria si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = L$ para todo $m \geq n$.*

Proposición 2.3.2. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ series de potencia, y suponga que existe una sucesión no estacionaria $\{x_m\}$ en $\mathbb{Q}_p$ que converge a cero tal que $f(x_m) = g(x_m)$ para cada m, entonces $f(x) = g(x)$ (es decir, $f(x)$ y $g(x)$ tienen los mismos coeficientes).*

Demostración. Si se reemplaza la sucesión $\{x_m\}$ por una subsucesión si es necesario, se puede asumir que $x_m \neq 0$ para todo m. Si se considera la diferencia

$$h(x) = f(x) - g(x) = \sum a_n x^n,$$

entonces se tiene $h(x_m) = 0$ para cada m. Se quiere mostrar que $a_n = 0$ para cada n. Suponga que no, entonces sea r el menor índice para el cual $a_r \neq 0$, así que

$$h(x) = a_r x^r + a_{r+1}x^{r+1} + a_{r+2}x^{r+2}... = x^r(a_r + a_{r+1}x + a_{r+2}x^2 + ...) = x^r h_1(x),$$

donde $h_1(0) = a_r \neq 0$. Como h_1 es una función definida por una serie de potencias, es continua, así $h_1(x_m) \to a_r$ cuando $m \to \infty$; en particular, $h_1(x_m)$ es diferente de cero para un m suficientemente grande. Se sigue que $h(x_m) = x_m^r h_1(x_m)$ es diferente de cero para un m suficientemente grande, lo cual es una contradicción. □

Definición 2.3.2. *Dada una serie de potencias $f(x) = \sum a_n x^n$ se define su derivada formal como $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$.*

Proposición 2.3.3. *Sea $f(x) = \sum a_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia diferente de cero, y sea $f'(x)$ su derivada formal. Sea $x \in \mathbb{Q}_p$. Si $f(x)$ converge, entonces $f'(x)$ también lo hace y se tiene,*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Demostración. Note que efectivamente existen elementos $h \to 0$ para los cuales $f(x+h)$ converge. Para ver esto, sea ρ el radio de convergencia, y como la región donde converge es una bola centrada en el origen (cerrada o abierta), entonces cuando $x = 0$ se pueden escoger los h tales que $|h|_p < \rho$, y si $x \neq 0$ funcionan los h tales $|h|_p < |x|_p$, ya que si $|h|_p < |x|_p$ entonces $|x+h|_p < |x|_p$, por lo tanto, el límite que aparece en la proposición tiene sentido.

Suponga que $f(x)$ converge, entonces por el Teorema 2.1.2 $a_n x^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si $x = 0$ es claro que $f'(x)$ converge. Si $x \neq 0$, note que

$$\left|n a_n x^{n-1}\right|_p \leq \left|a_n x^{n-1}\right|_p = \frac{1}{|x|_p} |a_n x^n|_p \to 0,$$

y otra vez se obtiene que $f'(x)$ converge.

Dado que $f(x)$ converge en la bola centrada en el origen y de radio ρ. Esta bola puede ser cerrada o abierta, en el primer caso se establece $\rho_1 = \rho$ y en el segundo caso se escoge ρ_1 de tal manera que $|x|_p \leq \rho_1 < \rho$. Como solo nos interesa cuando h está cerca de cero, se puede asumir, si $x \neq 0$, que $|h|_p < |x|_p \leq \rho_1$, y si, $x = 0$, que $|h|_p \leq \rho_1$. Ahora,

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{n-m} h^m,$$

luego, restando $f(x)$ y dividiendo esto por h, se obtiene

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} a_n \binom{n}{m} x^{n-m}h^{m-1}.$$

Como $|x|_p \leq \rho_1$ y $|h|_p \leq \rho_1$, se tiene

$$\left| a_n \binom{n}{m} x^{n-m}h^{m-1} \right|_p \leq |a_n|_p \rho_1^{n-1},$$

y como $\rho_1 < \rho$ se tiene que $|a_n|_p \rho_1^n \to 0$. Esto muestra que la serie converge uniformemente en h, es decir, converge independientemente de h. Ahora, al tomar el límite término a término y establecer $h = 0$ se obtiene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

□

Corolario 2.3.1. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ series de potencia tal que ambas series converjan para $|x|_p < \rho$. Si $f'(x) = g'(x)$ para todo $|x|_p < \rho$, entonces existe una constante $c \in \mathbb{Q}_p$ tal que $f(x) = g(x) + c$. En particular, $f(x)$ y $g(x)$ tienen la misma región de convergencia.*

Demostración. Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, y sean $f'(x)$ y $g'(x)$ sus derivadas formales. Como $f'(x) = g'(x)$ entonces $a_n = b_n$ para todo $n \geq 1$, por lo tanto $a_0 = b_0 + c$, esto implica que $f(x) = g(x) + c$. □

El siguiente teorema es un resultado fundamental acerca de los ceros de las funciones definidas por series de potencia.

Teorema 2.3.1. [6] *[Strassman]. Sea*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...,$$

una serie de potencias diferente de cero (es decir, una serie donde no todos sus coeficientes son cero) con coeficientes en $\mathbb{Q}_p$. Supóngase que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, así que $f(x)$ converge para todo $x \in \mathbb{Z}_p$. Sea N un entero definido por

- $|a_N|_p = \max_n |a_n|_p$,
- $|a_n|_p < |a_N|_p$ *para* $n > N$,

entonces la función $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ tiene a lo mas N ceros.

Observación 2.3.1. *La existencia del N se sigue del hecho que los coeficientes a_n tienden a cero, por tanto existe el mayor valor p-ádico, y N es el índice del mayor coeficiente para el cual el máximo es alcanzado.*

Demostración. Se usará inducción sobre $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Paso base Si $N = 0$, entonces $|a_0|_p > |a_n|_p$ para todo $n \geq 1$, y lo que se quiere probar en este caso es que no existen ceros, es decir, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}_p$. Para ver esto, suponga que $f(x) = 0$, entonces

$$0 = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...,$$

y como $x \in \mathbb{Z}_p$ se sigue que

$$|a_0|_p = \left|a_1 x + a_2 x^2 + ...\right|_p \leq \max_{n \geq 1} |a_n x^n|_p \leq \max_{n \geq 1} |a_n|_p \,,$$

pero esto contradice la suposición que $|a_0|_p > |a_n|_p$ para todo $n \geq 1$. Así que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}_p$.

Paso inductivo Para este paso, se usa una idea del álgebra de polinomios: un cero implica una factorización. Suponga que

$$|a_N|_p = \max_n |a_n|_p \quad y \quad |a_n|_p < |a_N|_p \quad para \quad n > N$$

y que $f(\alpha) = 0$ para algún $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, escoja cualquier $x \in \mathbb{Z}_p$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(\alpha) = \sum_{n \geq 1} a_n (x^n - \alpha^n) &= \sum_{n \geq 1} a_n (x - \alpha) \sum_{j=0}^{n-1} x^j \alpha^{n-1-j} \\ &= (x - \alpha) \sum_{n \geq 1} \sum_{j=0}^{n-1} a_n x^j \alpha^{n-1-j}. \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.1.3, se puede reordenar como una serie de potencias en x, definiendo $k = n - j - 1$, se obtiene,

$$f(x) = (x - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = (x - \alpha) g(x),$$

donde $g(x)$ es una serie de potencias con coeficientes,

$$b_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j+1+k} \alpha^k.$$

Como $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ se tiene que b_j converge para cada j, y así se obtiene,

$$|b_j|_p \leq \underset{k\geq 0}{máx} |a_{j+1+k}|_p \leq |a_N|_p$$

para cada j.

Note que

$$|b_{N-1}|_p = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}\alpha^k \right|_p = |a_N + a_{N+1}\alpha + a_{N+2}\alpha^2 + ...|_p = |a_N|_p$$

entonces, si $j > N$,

$$|b_j|_p \leq \underset{k\geq 0}{max} |a_{j+k+1}|_p \leq \underset{j\geq N+1}{máx} |a_j|_p < |a_N|_p = |b_{N-1}|_p .$$

Esto muestra que el número en la hípotesis cuando se aplica a $g(x)$ es $N-1$. Por la hipótesis de inducción, $g(x)$ tiene a lo mas $N-1$ ceros en $\mathbb{Z}_p$, lo que implica que $f(x)$ tiene a lo mas N ceros.

□

El Teorema de Strassman es uno de los teoremas más importantes sobre los ceros de funciones en $\mathbb{Q}_p$, definidas por series de potencia. A continuación se presentarán algunas consecuencias:

Corolario 2.3.2. *Sea $f(x) = \sum a_n x^n$ una serie de potencias diferente de cero que converge en $\mathbb{Z}_p$, y sean $\alpha_1, ..., \alpha_m$ raices de $f(x)$ en $\mathbb{Z}_p$, entonces existe una serie de potencias $g(x)$ que converge pero no tiene ceros en $\mathbb{Z}_p$, tal que,*

$$f(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m)g(x).$$

Demostración. Como en la demostración del Teorema 2.3.1, se puede escribir,

$$f(x) = (x-\alpha_1)g_1(x),$$

donde $g_1(x)$ converge en $\mathbb{Z}_p$ y tiene a lo mas $m-1$ ceros. Si se continua este proceso, al factorizar todos los m ceros de f se obtiene,

$$f(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m)g_m(x),$$

donde $g_m(x)$ converge y no tiene ceros en $\mathbb{Z}_p$, por lo tanto si se toma $g(x) = g_m(x)$ se concluye la prueba. □

Corolario 2.3.3. *Sea $f(x) = \sum a_n x^n$ una serie de potencias diferente de cero que converge en $p^m\mathbb{Z}_p$, para algún $m \in \mathbb{Z}$, entonces $f(x)$ tiene un número finito de ceros en $p^m\mathbb{Z}_p$.*

Demostración. Defina $g(x) = f(p^m x) = \sum a_n p^{mn} x^n$, como $f(x)$ converge en $p^m\mathbb{Z}_p$, $g(x)$ converge para $x \in \mathbb{Z}_p$, y al aplicar el Teorema de *Strassman* a $g(x)$ se obtiene que tiene un número finito de ceros en $p^m\mathbb{Z}_p$. $\square$

Ejemplo 2.3.2. *Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n$, se encontrará su región de convergencia y se estimará el número de ceros. El radio de convergencia ρ se calcula usando la fórmula (2.2) con $|a_n|_p = |p^n|_p = p^{-n}$, así,*

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{p^{-n}}} = p.$$

Si $|x|_p = p$, se tiene,

$$|p^n x^n|_p = |p^n|_p \, |x|_p^n = p^{-n} p^n = 1$$

no tiende a cero. Por tanto, la serie converge para

$$\left\{ |x|_p < p \right\} = \left\{ |x|_p \leq 1 \right\} = \mathbb{Z}_p.$$

La sucesión $|p^n|_p = p^{-n}$ es decreciente, como $p^0 = 1$ entonces $|p^0|_p$ tiene norma maximal. Una aplicación directa del Teorema de Strassman da $N = 0$, es decir, la serie de potencias $f(x)$ no tiene ceros en la región de convergencia.

Corolario 2.3.4. *Considere dos series p-ádicas,*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad y \quad g(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n,$$

que convergen en $p^m\mathbb{Z}_p$. Si existen infinitos números $\alpha \in p^m\mathbb{Z}_p$ tal que $f(\alpha) = g(\alpha)$, entonces $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$.

Demostración. Sea $h(x) = f(x) - g(x)$, como existen infinitos números $\alpha \in p^m\mathbb{Z}_p$ tal que $f(\alpha) = g(\alpha)$ entonces h tiene infinitos ceros. Dado que $h(x)$ converge en $p^m\mathbb{Z}_p$, por el Corolario 2.3.3, $h(x)$ representa una serie de potencias donde todos sus coeficientes son cero, por tanto todos los coeficientes de $f(x)$ y $g(x)$ son iguales, es decir, $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$.

$\square$

Corolario 2.3.5. *Suponga que la serie $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge en $p^m\mathbb{Z}_p$. Si la función definida por $f(x)$ es periódica, es decir, existe una constante $\tau \in p^m\mathbb{Z}_p$ tal que $f(x + \tau) = f(x)$ para todo $x \in p^m\mathbb{Z}_p$, entonces f es constante.*

Demostración. Defina $h(x) = f(x) - f(0)$, como $f(x)$ es periódica entonces $f(x+n\tau) = f(x+\tau+...+\tau) = f(x+\tau)$, por tanto $h(x+n\tau) = f(x+n\tau) - f(0) = 0$, así $f(x) - f(0)$ tiene ceros en τn para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como $\tau \in p^m\mathbb{Z}_p$, que es un ideal, implica que $n\tau \in p^m\mathbb{Z}_p$, por tanto, la función $f(x) - f(0)$ tiene una cantidad infinita de ceros en $p^m\mathbb{Z}_p$, lo que implica que $f(x) - f(0) = 0$, es decir, f es constante. $\square$

Esto ofrece una diferencia notable con el caso clásico, dado que las funciones seno y coseno son periódicas, la diferencia radica en que, en el caso clásico los múltiplos del periodo no están en el mismo intervalo acotado, mientras que en caso p-ádico la propiedad no arquimediana garantiza esto.

2.4. ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

El objetivo de esta sección es utilizar las series de potencia para definir funciones clásicas como la exponencial y la logarítmica de manera análoga a como se hace en el campo de los números reales. En contraste con el caso arquimediano, es el logaritmo el que tiene las mejores propiedades de convergencia.

Se comenzará con la serie de potencias usual para el logaritmo:

$$f(x) = \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...,$$

Ya que los coeficientes de esta serie de potencias son números racionales, tiene sentido pensar en esta serie, como una serie de potencias en $\mathbb{Q}_p$. El primer paso hacia la comprensión de esto, es calcular su radio de convergencia. Antes de llegar al cálculo del límite, note que en el caso clásico, todos los enteros en el denominador ayudan a la convergencia, ya que tienden a hacer los términos de la serie más pequeños, mientras que en el caso p-ádico sucede lo contrario. Lo que mantiene la convergencia en el caso de esta serie, es que en general n no siempre es divisible por p.

El siguiente lema determinará la región de convergencia del logaritmo p-ádico:

Lema 2.4.1. *La serie*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$$

converge para $|x|_p < 1$ *y diverge si* $|x|_p \geq 1$.

Demostración. Para calcular ρ, sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, así que

$$|a_n|_p = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right|_p = \left| \frac{1}{n} \right|_p = p^{v_p(n)}.$$

De esto, se obtiene

$$\sqrt[n]{|a_n|_p} = p^{\frac{v_p(n)}{n}} \to 1 \ \textit{cuando} \ n \to \infty,$$

por tanto, $\rho = 1$. Esto no decide si la convergencia sucede en la bola abierta o cerrada de radio 1. Entonces cuando $|x|_p = 1$, se tiene que

$$|a_n x^n|_p = |a_n|_p = |1/n|_p = p^{v_p(n)} \nrightarrow 0,$$

por tanto la serie converge en la bola abierta de radio 1.

□

La conclusión es que $f(x)$ define una función en la bola abierta $B(0,1)$ de radio 1 y centro 0. Por lo tanto se define el logaritmo de la manera obvia, así que $f(x) = \log(1+x)$.

Definición 2.4.1. *Sea* $B = B(1,1) = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : |x-1|_p < 1 \right\} = 1 + p\mathbb{Z}_p$, *se define el logaritmo p-ádico de* $x \in B$ *como*

$$\log_p(x) = \log(1 + (x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

El logaritmo p-ádico satisface la propiedad fundamental de los logaritmos, mas precisamente se tiene:

Proposición 2.4.1. *Suponga que* $a, b \in 1 + p\mathbb{Z}_p$, *entonces*

$$\log_p(ab) = \log_p(a) + \log_p(b).$$

Demostración. Sea

$$f(x) = \log_p(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

entonces por la Proposición 2.3.3, se tiene

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Ahora fijando $y \in p\mathbb{Z}_p$, se define

$$g(x) = \log_p((1+x)(1+y)) = f(y + (1+y)x),$$

por el ejemplo 2.3.1 esta serie de potencias converge para $|x|_p < 1$. Ahora se usa la regla de la cadena para calcular la derivada de g:

$$g'(x) = (1+y)f'(y+(1+y)x) = \frac{(1+y)}{1+y+(1+y)x} = \frac{1}{1+x} = f'(x).$$

Ya que $f(x)$ y $g(x)$ son definidas por series de potencia que convergen para $|x|_p < 1$, se sigue del corolario 2.3.1 que $g(x) = f(x) + c$. En $x = 0$ se tiene que $g(0) = f(y) = f(0) + c$, y como $f(0) = 0$ se concluye que $f(y) = c$. Por lo tanto se ha demostrado que $g(x) = f(x) + f(y)$, así se obtiene $\log_p((1+x)(1+y)) = \log_p(1+x) + \log_p(1+y)$. □

Luego de haber definido el logaritmo, se intentará definir la función exponencial.

En el caso clásico, la serie

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ...$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$ por que los coeficientes $\frac{1}{n!}$ tiende a cero con respecto al valor absoluto real. En el contexto p-ádico esto no suede por que $n!$ tiende a cero, así que $\frac{1}{n!}$ tiende a ser tan grande como n crece. Esto significa que no se puede esperar tener un radio convergencia tan grande. Por lo tanto se determinará el radio de convergencia, para ello se presentará el siguiente lema.

Lema 2.4.2. *Sea p un primo, entonces*

$$v_p(n!) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor < \frac{n}{p-1},$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función parte entera. En particular,

$$|n!|_p > p^{-\frac{n}{p-1}}.$$

Demostración. La fórmula,

$$v_p(n!) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor,$$

es bien conocida en la teoría de números. La desigualdad se sigue, porque $\lfloor x \rfloor \leq x$, así que,

$$v_p(n!) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n}{p^i} = \frac{n}{p-1},$$

por la fórmula usual para series geométricas. □

Observación 2.4.1. *Sea n un entero positivo y sea $n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_k p^k$ su expansión en base p. Sea $s = a_0 + a_1 + ... + a_k$ la suma de los dígitos en la expansión, entonces*

$$v_p(n!) = \frac{n-s}{p-1}.$$

Lema 2.4.3. *Sea*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...,$$

entonces $g(x)$ converge si y solo si $|x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$.

Demostración. Por el lema 2.4.2, se tiene

$$|a_n|_p = \left|\frac{1}{n!}\right|_p = p^{v_p(n!)} \leq p^{\frac{n}{p-1}}.$$

Note que,

$$p^{-\frac{1}{p-1}} \leq \frac{1}{p^{\frac{v_p(n!)}{n}}},$$

por lo que se obtiene $p^{-\frac{1}{p-1}} < \rho$, lo que implica que la serie converge para $|x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$.

Por otro lado, sea $|x|_p = p^{-\frac{1}{p-1}}$ y $n = p^m$ una potencia de p. En este caso, se tiene

$$v_p(n!) = v_p(p^m!) = 1 + p + ... + p^{m-1} = \frac{p^m - 1}{p-1},$$

entonces, ya que $v_p(x) = \frac{1}{p-1}$,

$$v_p\left(\frac{x^n}{n!}\right) = v_p\left(\frac{x^{p^m}}{p^m!}\right) = \frac{p^m}{p-1} - \frac{p^m-1}{p-1} = \frac{1}{p-1},$$

esto no depende de m, por lo tanto $x^n/n!$ no puede tender a cero, y la serie no converge. Como la región de convergencia es una bola, esto prueba el lema. □

Ahora se puede definir la *exponencial p-ádica*.

Definición 2.4.2. *Sea $D = B(0, p^{-\frac{1}{p-1}}) = \left\{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}\right\}$. La exponencial p-ádica es la función $\exp_p : D \to \mathbb{Q}_p$ definida por*

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Al igual que en el caso del logaritmo, la propiedad formal de la exponencial es preservada.

Proposición 2.4.2. *Si $x, y \in D$, se tiene que $x + y \in D$ y*

$$\exp_p(x+y) = \exp_p(x) + \exp_p(y).$$

Demostración. Esto esencialmente es un manejo de las series de potencia:

$$\begin{aligned}
\exp_p(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} \\
&= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right) \\
&= \exp_p(x) \exp_p(y)
\end{aligned}$$

□

En el caso real las funciones logaritmo y exponencial son inversas, es decir, se tiene la relación

$$\exp(\log(1+x)) = 1 + x.$$

A continuación se establecerá el resultado análogo en el caso p-ádico.

Teorema 2.4.1. *Si $|x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$ entonces*

$$\left|\exp_p(x) - 1\right|_p < 1,$$

así que $Im(\exp_p) \subseteq Dom(\log_p)$ y,

$$\log_p(\exp_p(x)) = x.$$

Por otro lado, si $|x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$ se tiene

$$\left|\log_p(1+x)\right|_p < p^{-\frac{1}{p-1}},$$

así que $Im(\log_p) \subseteq Dom(\exp_p)$ y,

$$\exp_p(\log_p(1+x)) = 1 + x.$$

Demostración. Note en primer lugar, que las dos identidades son ciertas cuando $x = 0$, así que se puede asumir $x \neq 0$.

Para calcular $\log_p(\exp_p(x))$, note primero que se esta evaluando $\exp_p(x) - 1$ en la serie $\log_p(1 + x)$, de manera que esta es la cantidad que se necesita estimar. Partimos de,

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|_p = |x|_p^n \cdot p^{v_p(n!)} < |x|_p^n \, p^{\frac{n}{p-1}},$$

que se obtiene del Lema 2.4.2. Dado que $|x|_p < p^{\frac{-1}{p-1}}$, entonces la estimación anterior es menor que 1, y se sigue,

$$|\exp(x) - 1|_p = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right|_p \leq \max_n \left|\frac{x^n}{n!}\right|_p < 1.$$

Para verificar la igualdad se tiene que comprobar las condiciones del Teorema 2.2.1. Suponga que $n \geq 2$, entonces por la observación 2.4.1 y el hecho de que $v_p(x) > \frac{1}{p-1}$ se obtiene,

$$v_p\left(\frac{x^{n-1}}{n!}\right) = (n-1)v_p(x) - v_p(n!) > \frac{n-1}{p-1} - \frac{n-s}{p-1} = \frac{s-1}{p-1} \geq 0,$$

donde s es la suma de los digitos en la expansión de n en base p (así que $s \geq 1$). Se sigue que,

$$\left|\frac{x^{n-1}}{n!}\right|_p < 1,$$

y entonces,

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|_p < |x|_p \, .$$

Esto implica que $|\exp(x) - 1|_p = |x|_p > \left|\frac{x^n}{n!}\right|_p$ para todo $n \geq 2$ de modo que la condición (iii) en el Teorema 2.2.1 se satisface. (Note que esto demuestra también que $|\exp(x) - 1|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$, una desigualdad más fuerte que la afirmada en el Teorema). Aplicando el Teorema 2.2.1 se puede concluir que si $|x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$ entonces,

$$\log_p(\exp_p(x)) = x.$$

Ahora se considerará la composición en el orden opuesto. Esta vez se esta evaluando $\log_p(1 + x)$ en $\exp_p(x)$, por lo que esta es la cantidad que se necesita estimar. Suponga que $|x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$, o en términos de valuación, que $v_p(x) > \frac{1}{p-1}$. Si $n > 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} v_p\left(\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right) - v_p(x) &= (n-1)v_p(x) - v_p(n) \\ &> \frac{n-1}{p-1} - v_p(n) = (n-1)\left(\frac{1}{p-1} - \frac{v_p(n)}{n-1}\right). \end{aligned}$$

Si se puede mostrar que la última expresión no es negativa, se sigue que la condición (iii) del Teorema 2.2.1 se satisface. Sea $n = p^m n'$ con n' no divisible por p y donde $m = v_p(n)$, entonces

$$\frac{v_p(n)}{n-1} = \frac{m}{p^m n' - 1} \leq \frac{m}{p^m - 1} = \frac{1}{p-1}\frac{m}{p^{m-1} + ... + p + 1} \leq \frac{1}{p-1},$$

por lo tanto, para $n > 1$ se tiene,

$$v_p\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\right) - v_p(x) > 0,$$

y se sigue que,

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\right|_p < |x|_p.$$

A partir del Teorema 2.1.2, se obtiene,

$$\left|\log_p(1+x)\right|_p = |x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}},$$

lo que demuestra que el $\log_p(1+x)$ está en el dominio de la exponencial y que la condición (iii) en el Teorema 2.2.1 se satisface. Esto implica que

$$\exp_p(\log_p(1+x)) = 1 + x$$

□

Las hipótesis del teorema son necesarias, porque si $|x|_p < 1$ pero $|x|_p \geq p^{-\frac{1}{p-1}}$, puede ser que el $\log(1+x)$ no pertenezca al dominio de la exponencial. Por otro lado, si $|x|_p < 1$ pero $|x|_p \geq p^{-\frac{1}{p-1}}$, y además se tiene que,

$$\left|\log_p(1+x)\right|_p < p^{-\frac{1}{p-1}},$$

se puede dar que,

$$\exp_p(\log_p(1+x)) \neq 1 + x.$$

Esto es debido al hecho, de que la condición (iii) en el Teorema 2.2.1 realmente importa, para ver esto concretamente, considere lo que sucede cuando se toma $p = 2$ y $x = -2$: en este caso, $1 + x = 1 - 2 = -1$, así que,

$$\log_2(1 + x) = \log_2(-1) = 0.$$

En efecto, note que $|-1 - 1|_2 = \frac{1}{2} < 1$ así que -1 esta en el dominio del logaritmo y como $\log_2(1) = 0$, se tiene,

$$0 = \log_2(1) = \log_2((-1)(-1)) = \log_2(-1) + \log_2(-1) = 2\log_2(-1),$$

lo que implica que $\log_2(-1) = 0$. Entonces cuando se evalua $\log_2(-1)$ en la serie para la exponencial se obtiene

$$\exp_2(\log_2(-1)) = \exp_2(0) = 1 \neq -1.$$

En otras palabras, la exponencial y el logaritmo p-ádico son inversas sólo dentro de los dominios restringidos especificados en la Teorema 2.4.1.

Capítulo 3

CONTINUIDAD Y DIFERENCIABILIDAD

En este capitulo se presentan las ideas básicas sobre las funciones continuas y diferenciables en el campo de los números p-ádicos, las cuales no varian mucho respecto al caso real ya que después de todo, soló depende de la estructura métrica. Las demostracciones de los resultados que presentaremos, fueron obtenidas de los diferentes textos que se mencionan en la bibliografia, principalmente en [9].

Se considerarán las funciones $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ definidas en $\mathbb{Z}_p$, el conjunto de los enteros p-ádicos. Incluso de manera más general, se considerarán funciones, $f : E \to \mathbb{Q}_p$ definidas en algún subconjunto de $\mathbb{Z}_p$.

Aquí son de particular importancia las funciones, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_p$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los enteros no negativos, tales funciones también pueden ser consideradas como sucesiones infinitas, $\{f(0), f(1), f(2), ...\}$ de números p-ádicos. Las funciones $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ pueden ser consideradas análogas a las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en el análisis real.

3.1. FUNCIONES CONTINUAS Y UNIFORMEMENTE CONTINUAS

Sea E un subconjunto de $\mathbb{Z}_p$ y $x_0 \in E$ un punto de acumulación de E. Ahora enumeraremos algunas propiedades de las funciones continuas sobre E.

Definición 3.1.1. *Sea $E \subseteq \mathbb{Z}_p$ y $x_0 \in E$. Una función f es continua en x_0 si para cada entero positivo s exite un segundo entero positivo $t = t(s; x_0)$ independientemente de x*

tal que ,

$$|f(x) - f(x_0)|_p \leq p^{-s} \;\; si \;\; x \in E \;\; y \;\; |x - x_0|_p \leq p^{-t} \;\; . \tag{3.1}$$

Teorema 3.1.1. *Sea $f : E \to \mathbb{Q}_p$, f es continua en $x_0 \in E$ si y sólo si* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ *para cada sucesión $\{x_n\}$ de E, que satisface,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0. \tag{3.2}$$

Demostración. Sea f continua en x_0 y $\{x_n\}$ una sucesión en E con límite x_0. Entonces, cuando n es suficientemente grande, $|x_n - x_0|_p \leq p^{-t}$ y por lo tanto, por (3.1), $|f(x_n) - f(x_0)|_p \leq p^{-s}$.
Aquí s puede ser arbitariamente grande, lo que muestra que la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene límite $f(x_0)$.
En segundo lugar, sea f discontinua en x_0, entonces existe un entero positivo s y una sucesión infinita $\{x_n\}$ de puntos de E tal que,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

mientras que al mismo tiempo,

$$|f(x_n) - f(x_0)|_p > p^{-s},$$

por lo tanto la propiedad (3.2) no es cierta. □

Teorema 3.1.2. *Sea $E \subseteq \mathbb{Z}_p$.*

i) Si las funciones $f : E \to \mathbb{Q}_p$ y $g : E \to \mathbb{Q}_p$ son continuas en $x_0 \in E$, entonces también lo son $f + g$, $f - g$ y fg. Si además $g(x_0) \neq 0$ entonces f/g es continua en x_0.

ii) Si las funciones $f : E \to \mathbb{Q}_p$ y $g : E \to \mathbb{Q}_p$ son continuas en E, entonces también lo son $f + g$,$f - g$ y fg.

Demostración. Sean $f : E \to \mathbb{Q}_p$ y $g : E \to \mathbb{Q}_p$ funciones continuas en $x_0 \in E$, entonces, por (3.2)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \quad y \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) \quad si \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0. \tag{3.3}$$

Por las propiedades de los límites se sigue

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = f(x_0) \cdot g(x_0) \quad si \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

donde $\cdot$ puede representar $+, -$ o $*$.

Por la definición de continuidad en E, la segunda condición es inmediata de la primera. $\square$

Ejemplo 3.1.1. *las funciones $f(x) = c$ donde c es una costante p-ádica y $f(x) = x$ son continuas en cada subconjunto E, como es claro de (3.2). Al aplicar esta propiedad iterativamente, se deduce de manera general que cada polinomio,*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

con a_i en $\mathbb{Q}_p$ es continua en cada conjunto E.

Ejemplo 3.1.2. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_p$ dada por la fórmula*

$$f(x) = \frac{1}{x-c},$$

donde $c \in \mathbb{Z}_p$. Si $c \notin \mathbb{N}$, entonces el denominador no se anula, y por el Teorema 3.1.2, f es continua en $\mathbb{N}$. Sin embargo, f no es limitada en $\mathbb{N}$. En efecto, ya que c es un entero p-ádico podemos encontrar elementos en $\mathbb{N}$ para los cuales $|x-c|_p$ es arbitrariamente pequeño, y por lo tanto, $|f(x)|_p$ es arbitrariamente grande. Si $c \in \mathbb{N}$ entonces f no es continua en el punto c.

El siguiente ejemplo no tiene análogo en el análisis real.

Ejemplo 3.1.3. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión nula de enteros p-ádicos tal que $a_n \neq 0$ para todo n. Asociamos a esta sucesión dos funciones $f_1 : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ y $f_2 : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ definida por,*

$$f_1(x) = \begin{cases} a_x & si \quad x \in \mathbb{N} \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{Z}_p \backslash \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} a_x & si \quad x \in \mathbb{N} \\ 1 & si \quad x \in \mathbb{Z}_p \backslash \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tanto f_1 y f_2 son discontinuas en todos los puntos de $\mathbb{N}$. En efecto, sea $x \in \mathbb{N}$ entonces el $\lim_{n\to\infty}(x + p^n) = x$, y

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x + p^n) = \lim_{n\to\infty} a_{x+p^n} = 0,$$

porque $x + p^n \in \mathbb{N}$ y $\{a_{x+p^n}\}$ es una subsucesión de una sucesión nula, sin embargo, $f_1(x) = a_x \neq 0$, y similarmente para f_2.

Se vera que f_1 es continua en todos los puntos $x \in \mathbb{Z}_p \backslash \mathbb{N}$. En efecto, como $x \in \mathbb{Z}_p \backslash \mathbb{N}$, entonces $f_1(x) = 0$, y sea cualquier sucesión $\{x_n\}$ con límite x, si $x_n \in \mathbb{N}$ entonces $\{a_{x_n}\}$ es subsusección de $\{a_n\}$ y por lo tanto $a_{x_n} \to 0$, así $f_1(x_n) \to f_1(x)$. Ahora si $x_n \notin \mathbb{N}$ se tiene que $f_1(x_n) = 0$, lo que concluye que $f_1(x_n) \to f_1(x)$.

La función f_2 es discontinua en todos los puntos de $\mathbb{Z}_p$. En efecto, sea $\{x_n\}$ con límite x, donde $x \in \mathbb{Z}_p$. Si $x_n \in \mathbb{N}$ entonces $f(x_n) \to 0$ y si $x_n \in \mathbb{Z}_p \backslash \mathbb{N}$ entonces $f(x_n) \to 1$.

Así se obtiene que f_1 es continua en todos los puntos de $\mathbb{Z}_p$ que no están en $\mathbb{N}$ y f_2 discotinua en todos los puntos de $\mathbb{Z}_p$.

Definición 3.1.2. *Sea $E \subseteq \mathbb{Z}_p$ y $x_0 \in E$. Una función f es uniformemente continua en E si para cada entero positivo s existe un segundo entero positivo $t = t(s)$ independientemente de x y x_0 tal que,*

$$|f(x) - f(x_0)|_p \leq p^{-s} \text{ si } x,\ x_0 \in E \text{ y } |x - x_0|_p \leq p^{-t}\ . \tag{3.4}$$

Dado que $\mathbb{Z}_p$ es compacto, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.1.3. *Cada función $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ continua en $\mathbb{Z}_p$ es uniformemente continua y acotada en $\mathbb{Z}_p$.*

Teorema 3.1.4. *Sea E un subconjunto de $\mathbb{Z}_p$ y $\overline{E}$ su clausura. Sea $f : E \to \mathbb{Q}_p$ una función uniformemente continua en E. Entonces existe una única función $F : \overline{E} \to \mathbb{Q}_p$ uniformemente continua y acotada en $\overline{E}$ tal que $F(x) = f(x)$ si $x \in E$.*

Demostración. Sea $x \in \overline{E}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subset E$ tal que,

$$x_n \to x \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty \tag{3.5}$$

(Solamente el caso cuando $x \notin E$ es interesante) Como f es uniformemente continua en E, para cualquier entero positivo s existe otro entero positivo $t = t(s)$ independiente de x y x_0 tal que satisface (3.4). Por (3.5) existe un entero $N = N(t)$ tal que $|x_n - x|_p \leq p^{-t}$ cuando $n \geq N$. Por lo tanto para $n, m \geq N$ se tiene

$$|x_m - x_n|_p = |(x_m - x) + (x - x_n)|_p \leq máx\left\{|x_m - x|_p, |x_n - x|_p\right\} \leq p^{-t},$$

y como f es uniformente continua,

$$|f(x_m) - f(x_n)|_p \leq p^{-s}.$$

Esto significa que $\{f(x_n)\}$ es una sucesión p-ádica de Cauchy. Sea,

$$L = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \tag{3.6}$$

este límite no depende de la sucesión $x_n \to x$. En efecto, sea x'_n otra sucesión tal que $x'_n \to x$, entonces $\{x_n - x'_n\}$ será una sucesión nula, por lo tanto existe $N' = N'(t) \in \mathbb{Z}^+$ tal que,

$$|x_n - x'_n|_p \leq p^{-t} \quad si \quad n \geq N'.$$

Por (3.4),

$$|f(x_n) - f(x'_n)|_p \leq p^{-s} \quad si \quad n \geq N',$$

lo que implica que $\{f(x_n) - f(x'_n)\}$ es una sucesión nula. Esto demuestra que,

$$L = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$$

así el límite (3.6) no depende de $x_n \to x$, por lo tanto la función $F : \overline{E} \to \mathbb{Q}_p$ dada por,

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

donde $x \in \overline{E}$ y $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ si $x_n \in E$ para todo n, esta bien definida. Es claro de la definición que $F(x) = f(x)$ cuando $x \in E$.
Ahora veamos que la función F es uniformente continua en $\overline{E}$. Sean x, x_0 dos puntos en $\overline{E}$ que satisfacen,

$$|x - x_0|_p \leq p^{-t}.$$

Se escogen y, y_0 en E de modo que,

$$|y - x|_p \leq p^{-t} \quad y \quad |y_0 - x_0|_p \leq p^{-t},$$

y

$$|f(y) - F(x)|_p \leq p^{-s} \quad y \quad |f(y_0) - F(x_0)|_p \leq p^{-s}.$$

Resulta que,

$$|y - y_0|_p = |(y - x) + (x - x_0) + (x_0 - y_0)|_p \leq p^- t,$$

de donde, por (3,4),

$$|f(y) - f(y_0)|_p \leq p^{-s},$$

por lo tanto,

$$|F(x) - F(x_0)|_p = |(F(x) - f(y)) + (f(y) - f(y_0)) + (f(y_0) - F(x_0))|_p \leq p^{-s}$$

Por lo tanto F es uniformemente continua en $\overline{E}$.

Finalmente F es acotado en $\overline{E}$. Suponga que no, entonces existe una sucesión infinita $\{x_n\}$ de $\overline{E}$ tal que,

$$\lim_{n\to\infty} |F(x_n)|_p = \infty. \tag{3.7}$$

Como E y $\overline{E}$ son subconjuntos del conjunto compacto $\mathbb{Z}_p$, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que el límite

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{n_k}$$

existe. Dado que lo términos de x_{n_k} estan en $\overline{E}$ y $\overline{E}$ es un conjunto cerrado, se tiene que $x_0 \in \overline{E}$. Ahora F es uniformemente continua en $\overline{E}$ y por lo tanto continua en x_0. Se sigue que,

$$\lim_{n\to\infty} |F(x_{n_k})|_p = F(x_0),$$

lo que contradice (3.7).

Para probar la unicidad de F, supongase F^* con las mismas propiedades. Entonces $F - F^*$ es uniformemente continua en $\overline{E}$ e identicamente 0 en E. Como E es denso en $\overline{E}$, por la continuidad de $F - F^*$ implica que es identicamente 0 en $\overline{E}$. Esto concluye la prueba. □

Teorema 3.1.5. *Sea $f : E \to \mathbb{Q}_p$ y $f^* : E \to \mathbb{Q}_p$ uniformemente continuas en E, un subconjunto de $\mathbb{Z}_p$, entonces también $f + g$, $f - g$ y fg son uniformemente continuas en E.*

Demostración. Sea E un subconjunto de $\mathbb{Z}_p$, y sean $f : E \to \mathbb{Q}_p$ y $f^* : E \to \mathbb{Q}_p$ dos funciones que son uniformemente continuas en E, entonces para cada entero positivo s existen otros dos enteros positivos $t = t(s)$ y $t^* = t^*(s)$ independientes de x y x_0 tal que,

$$|f(x) - f(x_0)|_p \leq p^{-s} \quad si \quad x, x_0 \in E \quad y \quad |x - x_0|_p \leq p^{-t} \tag{3.8}$$

y,

$$|f^*(x) - f^*(x_0)|_p \leq p^{-s} \quad si \quad x, x_0 \in E \quad y \quad |x - x_0|_p \leq p^{-t^*} \tag{3.9}$$

Denote por $T = T(s) = máx\{t, t^*\}$, además T es independiente de x y x_0, luego (3.8) y (3.9) se pueden combinar para,

$$|f(x) - f(x_0)|_p \leq p^{-s} \;\; y \;\; |f^*(x) - f^*(x_0)|_p \leq p^{-s} \tag{3.10}$$

$$si \;\; x, x_0 \in E \;\; y \;\; |x - x_0|_p \leq p^{-T}.$$

Por el Teorema 3.1.4 la hipótesis implica que f y f^* son acotadas en $\overline{E}$, por lo tanto, también en E que es subconjunto de $\overline{E}$, entonces existe un mayor entero positivo u tal que,

$$|f(x)|_p \leq p^u \quad y \quad |f^*(x)|_p \leq p^u \quad si \quad x \in E, \tag{3.11}$$

Ahora para $x, x_0 \in E$ y $|x - x_0|_p \leq p^{-T}$, por (3.10)

$$|(f(x) \pm f^*(x)) - (f(x_0) \pm f^*(x_0))|_p = |(f(x) - f(x_0)) \pm (f^*(x) - f^*(x_0))|_p \leq p^{-s},$$

Por (3.10) y (3.11)

$$|f(x)f^*(x) - f(x_0)f^*(x_0)|_p = |f(x)(f^*(x) - f^*(x_0)) + (f(x) - f(x_0))f^*(x_0)|_p \leq p^{-s+u}$$

Lo que concluye la prueba. $\square$

Ejemplo 3.1.4. *Las dos funciones $f(x) = c$ donde c es una constante p-ádica y $f(x) = x$ claramente son uniformemente continuas en cualquier subconjunto E de $\mathbb{Z}_p$. Por lo tanto cada polinomio,*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,$$

con $a_i \in \mathbb{Q}_p$ es uniformemente continua en E.

3.2. FUNCIONES LOCALMENTE CONSTANTE Y FUNCIONES PASO

Sea E un subconjunto de $\mathbb{Z}_p$ y $f : E \to \mathbb{Q}_p$ una función en E.

Definición 3.2.1. *Una función $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ es llamada localmente constante si para cada $x \in \mathbb{Z}_p$ existe una vecindad $U_x \ni x$ tal que f es constante en U_x.*

De forma equivalente se puede decir que $f : E \to \mathbb{Q}_p$ es llamada localmente constante en E si existe un entero positivo $s = s(x_0)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) \quad si \quad x \in E \quad y \quad |x - x_0|_p \leq p^{-s}.$$

Ejemplo 3.2.1. *Como el espacio $\mathbb{Z}_p$ es totalmente disconexo, la función caracteristica para cualquier bola $U \in \mathbb{Z}_p$*

$$\xi_U(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \quad U \\ 0 & si \quad x \notin \quad U, \end{cases}$$

es continua. Es claro porque la bola U y $\mathbb{Z}_p/U$ son abiertas.

Proposición 3.2.1. *Las funciones localmente constantes son continuas*

Demostración. Sea $f : E \to \mathbb{Q}_p$ una función localmente constante, si $x \in E$ existe un $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $|x - x_0| \leq p^{-t}$ entonces $f(x) = f(x_0)$, por lo tanto, para cualquier $s \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que $|f(x) - f(x_0)| \leq p^{-s}$, es decir, f es continua en E. $\square$

Proposición 3.2.2. *Sea $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ una función localmente constante. Entonces $\mathbb{Z}_p$ se puede escribir como la unión,*

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$$

de un número finito de bolas disjuntas tal que la función f es constante en cada una de estas bolas. En particular el conjunto $\{f(x) : x \in \mathbb{Z}_p\}$ de valores asumidos por f en Z_p tiene solamente un número finito de elementos distintos.

Demostración. De la definición de una función localmente constante, se tiene que para cada $x \in \mathbb{Z}_p$, existe una bola U_x donde f es constante. Note que $\{U_x : x \in \mathbb{Z}_p\}$ forma una cubierta de $\mathbb{Z}_p$. Como $\mathbb{Z}_p$ es compacto entonces existen $x_1, x_2, ..., k_k \in \mathbb{Z}_p$ tal que

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}.$$

Como dos bolas en $\mathbb{Q}_p$ son disjuntas o una esta contenida en la otra, si se eliminan las bolas que están contenidas en las otras bolas, se obtiene una cubierta finita de $\mathbb{Z}_p$ por bolas disjuntas. □

Corolario 3.2.1. *Cualquier función localmente constante en $\mathbb{Z}_p$ es uniformemente continua.*

Demostración. Sea f una función localmente constante. Por la Proposición 3.2.2 se tiene que $\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$, donde f es constante en cada U_{x_i}. Sea p^{-m_i} el radio de U_{x_i} para cada $i = 1, ..., k$ y defina $m = máx\{m_i\}$. Suponga que $|x - y|_p < p^{-m}$. Dado que $x \in \mathbb{Z}_p$ entonces $x \in U_{x_i}$ para algún $i \in \{1, ..., k\}$, y como cada punto de la bola es centro, se puede suponer $x = x_i$. Entonces $|x_i - y|_p < p^{-m} < p^{-m_i}$, lo que implica que $f(y) = f(x_i)$ y como $f(x) = f(x_i)$ entonces $f(x) = f(y)$. Así concluye la prueba. □

Definición 3.2.2. *Sea E un subconjunto de $\mathbb{Z}_p$ no necesariamente compacto. Una función $f : E \to \mathbb{Q}_p$ es llamada una **función paso** en E si existe un entero positivo t independiente de x y x_0 tal que,*

$$f(x) = f(x_0) \quad si \quad x, x_0 \in E \quad y \quad |x - x_0|_p \le p^{-t}.$$

El entero t más pequeño que cumple esta propiedad es llamado el **orden** de f.

Observación 3.2.1. *Es claro de la definición que una función paso en E es uniformemente continua y además localmente constante en E. Por otra parte, si E es compacto y f es localmente constante en E, entonces f es una función paso.*

Para cada entero positivo t se construye una partición explícita de E de la siguiente manera:

Sea $N_t = \{0, 1, 2, ..., p^t - 1\}$. Para cada $x \in \mathbb{Z}_p$ se escribe su expansión canónica,

$$x = x_0 + x_1 p + ... + x_{t-1} p^{t-1} + ...,$$

y sea

$$N_x = x_0 + x_1 p + ... + x_{t-1} p^{t-1} \tag{3.12}$$

entonces $N_x \in N_t$ y

$$|x - N_x|_p \leq p^{-t}. \tag{3.13}$$

Para cada $N \in N_t$, se expresa,

$$E(N) = E \cap U(N,t), \text{ donde } U(N,t) = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : |x - N|_p \leq p^{-t} < p^{-t+1} \right\}$$

Se ha visto que cualquier $x \in \mathbb{Z}_p$ pertenece a algún $U(N,t)$, y para cualquier $N, M \in N_t$ se tiene $|N - M|_p > p^{-t}$, de esto resulta que las bolas $U(N,t)$ son disjuntas, por lo tanto,

$$E = \bigcup_{N=0}^{p^t - 1} E(N), \tag{3.14}$$

es una partición de E. Con lo anterior se tienen herramientas para probar el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *Cualquier función paso en* $\mathbb{N}$ *o* $\mathbb{Z}_p$ *es periódica.*

Demostración. Sea $E = \mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}_p$, y $f : E \to \mathbb{Q}_p$ una función paso de orden t. Considere la partición (3.14). Si $x, y \in E(N)$ por la desigualdad triangular fuerte se tiene $|x - y|_p = |(x - N) + (N - y)|_p \leq \textit{máx} \left\{ |x - N|_p , |y - N|_p \right\} \leq p^{-t}$, por lo tanto $f(x) = f(y)$. Note que si $x \in E(N)$, entonces $x + p^t \in E(N)$. En efecto, si $x \in E(N)$ entonces $x \in E \cap U(N,t)$, por lo tanto $|x - N|_p \leq p^{-t}$. Como

$$\left| x + p^t - N \right| \leq \textit{máx} \left\{ |x - N|_p , \left| p^t \right|_p \right\} = \textit{máx} \left\{ |x - N|_p , p^{-t} \right\} = p^{-t},$$

se concluye que $x + p^t \in E(N)$. Por lo tanto,

$$f(x + p^t) = f(x) \quad \textit{para} \quad x \in E,$$

es decir, f es periódica. $\square$

En el análisis real las funciones continuas en intervalos cerrados pueden ser aproximados uniformemente y arbitrariamente por funciones paso. Un resultado similar es válido para funciones p-ádicas.

Teorema 3.2.2. [9] *Sea $E \subseteq \mathbb{Z}_p$. Una función $f : E \to \mathbb{Q}_p$ es uniformemente continua en E si y solo si para cada entero positivo s existe otro entero positivo $t = t(s)$ y una función paso $S : E \to \mathbb{Q}_p$ a lo sumo de orden t tal que,*

$$|f(x) - S(x)|_p \leq p^{-s} \ \textit{para cualquier} \ x \in E. \tag{3.15}$$

Demostración. Asuma que f y S satisfacen la condición (3.15). Si $x_0 \in E$ y,

$$|x - x_0| \leq p^{-t},$$

se tiene que,

$$S(x) = S(x_0), \ \ |f(x) - S(x)|_p \leq p^{-s}, \ \ |f(x_0) - S(x_0)|_p \leq p^{-s},$$

entonces

$$|f(x) - f(x_0)|_p = |(f(x) - S(x_0)) + (S(x_0) - f(x_0))|_p \leq p^{-s},$$

por lo tanto f es uniformemente continua.

Reciprocamente asuma que f es uniformemente continua en E, y denote por s y $t = t(s)$ dos enteros positivos tal que,

$$|f(x) - f(x_0)|_p \leq p^{-s} \quad si \quad x, \ x_0 \in E \quad y \quad |x - x_0|_p \leq p^{-t}. \tag{3.16}$$

Sea N_x como en (3.12) y defina una función por,

$$S(x) = f(N_x) \quad si \quad x \in E.$$

Entonces S es una función paso a lo sumo de orden t. Por (3.13) y (3.16),

$$|f(x) - S(x)|_p = |f(x) - f(N_x)|_p \leq p^{-s}.$$

□

3.3. DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES P-ÁDICAS

La derivada es un poco más interesantes, aunque sólo sea porque resultará que no funciona tan bien como en el caso clásico. Sin duda tiene mucho sentido definir la derivada de una función $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ de la forma habitual:

Definición 3.3.1. *Sea $U \subset \mathbb{Q}_p$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{Q}_p$ una función. Se dice que f es diferenciable en $a \in U$, si el $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ existe.*

Definición 3.3.2. *Si $f'(x)$ existe para cada $a \in U$ se dice que f es diferenciable en U, y se escribe $f' : U \to \mathbb{Q}_p$ para la función $x \to f'(x)$.*

Nótese que la definición de la derivada tiene sentido porque $\mathbb{Q}_p$ es un campo normado. La derivada posee las siguientes propiedades estándar:

- Las reglas para derivada como la suma, producto, cociente y composición (regla de la cadena) se transfieren de manera natural.
- Las funciones diferenciables son continuas.
- Las funciones racionales (cocientes de dos polinomios) son diferenciables.

Unos de los resultados mas importantes del análisis real es el teorema del valor medio, el cual es pieza clave en la teoría elemental de funciones diferenciables, si se trata de ver la versión p-ádica del teorema, se encuentra la inmediata dificultad de decidir como seria, después de todo el clásico teorema dice que para cada $a \neq b$ en el dominio de una función diferenciable, existe un número ε entre a y b tal que $f(b) - f(a) = f'(\varepsilon)(b - a)$.

El problema radica en el "*entre*", ya que no parece significar nada en el contexto p-ádico, dado que $\mathbb{Q}_p$ no es un cuerpo ordenado. Pero esta dificultad inicial es facilmente resuelta. En $\mathbb{R}$ se puede redefinir "*entre*" diciendo que ε está entre a y b si $\varepsilon = at + b(1 - t)$ para $0 \leq t \leq 1$.

Asi que el intento básico de la versión p-ádica del teorema del valor medio sería:

Si la función $f(x)$ es diferenciable en $\mathbb{Q}_p$, entonces para cualesquiera dos números a y b en $\mathbb{Q}_p$, existe un elemento $\varepsilon \in \mathbb{Q}_p$ de la forma $\varepsilon = at + b(1-t)$ para algún t con $|t|_p \leq 1$, para los que se tiene que

$$f(b) - f(a) = f'(\varepsilon)(b - a).$$

Pero esto no es cierto y se verá en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.1. *El teorema del valor medio p-ádico indicado es falso.*

Demostración. Sea $f(x) = x^p - x$, $a = 0$ y $b = 1$ entonces $f'(x) = px^{p-1} - 1$ y $f(a) = f(b) = 0$, por el teorema del valor medio debe existir un $\varepsilon \in \mathbb{Q}_p$ de la forma $\varepsilon = at + b(1-t) = (1-t)$ con $|t|_p < 1$ tal que $f(1) - f(0) = f'(\varepsilon)(1-0)$, por tanto,

$$f'(\varepsilon) = p\varepsilon^{p-1} - 1 = 0.$$

Como $\varepsilon = 1 - t$ y $|t|_p < 1$ entonces $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p$. Pero $p\varepsilon^{p-1} - 1$ es una unidad en $\mathbb{Z}_p$, en efecto, como $v_p(p\varepsilon^{p-1}) \neq v_p(-1)$ entonces,

$$v_p(p\varepsilon^{p-1} - 1) = min\left\{v_p(p\varepsilon^{p-1}), v_p(-1)\right\} = 0,$$

lo que implica,

$$\left|p\varepsilon^{p-1} - 1\right|_p = 1,$$

y por tanto es unidad, esto contradice que $p\varepsilon^{p-1} - 1 = 0$, así el teorema del valor medio p-ádico es falso. $\square$

Ejemplo 3.3.1. *Sea $E \subseteq \mathbb{Z}_p$ un subconjunto sin puntos aislados, y sea f una función localmente constante en E, entonces para cada $a \in E$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $x \in E$, satisface $|a - x|_p < \varepsilon$. Así*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \quad y \quad |a - x|_p < \varepsilon,$$

por lo tanto f es diferenciable en E y $f'(a) = 0$ para todo $a \in E$

Ejemplo 3.3.2. *Existe una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ (y por lo tanto no locamente constante) cuya derivada es cero. En efecto, sea $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Z}_p$ y establezcamos*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{2n}.$$

Ahora, si

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, \;\; y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n p^n \in \mathbb{Z}_p,$$

satisface que $|x - y|_p = p^{-j}$ para algún $j = 0, 1, 2, ...,$ entonces

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, ..., a_{j-1} = b_{j-1}, a_j \neq b_j.$$

Por lo tanto $|f(x) - f(y)|_p = p^{-2j}$. Asi se tiene,

$$|f(x) - f(y)|_p = |x - y|_p^2 \quad para \quad todo \quad x, y \in \mathbb{Z}_p.$$

Se llega a la conclusion que f es inyectiva y,

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right|_p = |x - y|_p \to 0 \quad cuando \quad y \to x.$$

Este ejemplo nos conduce la definición de ua función lipschitz.

Definición 3.3.3. *Sea $E \subset \mathbb{Z}_p$ y $\alpha > 0$. Una función $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ satisface la condición Lipschitz de orden α si existe una constante $M > 0$, llamada constante de Lipschitz, tal que para todo $x, y \in E$ se tiene*

$$|f(x) - f(y)|_p \leq M\, |x - y|_p^{\alpha}.$$

La función del ejemplo 3.3.2 es Lipschitz de orden 2. Note que en el análisis real si una función satisface la condición de Lipschitz de orden mayor que 1, entonces $f' = 0$, así que f es necesariamente constante.

Otra anomalía de funciones p-ádicas resulta cuando consideramos la invertibilidad local. En el análisis real, para estas funciones, si $f'(x_0) \neq 0$, entonces f es localmente invertible en una vecindad de x_0. Para funciones p-ádicas tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.3. *Existe una función diferenciable $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ tal que $f'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{Z}_p$, para la cual $f(p^n) = f(p^n - p^{2n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, asi que f no es inyectiva en una vecindad de 0.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \left\{x \in \mathbb{Z}_p : |x - p^n|_p < p^{-2n}\right\}$. Si $x \in B_n$, entonces,

$$|x - p^n|_p < p^{-2n} < p^{-n} = |p^n|_p,$$

y por la Proposición 1.2.1 se tiene que $|x|_p = |p^n|_p = p^{-n}$, por lo que los discos B_i son disjuntos dos a dos.

Defina,

$$f(x) = \begin{cases} x - p^{2n} & si \quad n \in \mathbb{N}, x \in B_n, \\ x & si \quad x \in \mathbb{Z}_p \backslash \bigcup_n B_n. \end{cases}$$

Ya que $p^n \in B_n$ se tiene $f(p^n) = p^n - p^{2n}$. Por otra parte $p^n - p^{2n}$ no están en B_m para todo $m \in \mathbb{N}$, esto se puede verificar por contradicción. Por lo tanto $f(p^n - p^{2n}) = p^n - p^{2n}$, es decir f no es inyectiva en una vecindad de 0.

Para probar que $f' = 1$. Considere la función $g(x) = x - f(x)$,

$$g(x) = \begin{cases} p^{2n} & si \quad n \in \mathbb{N}, x \in B_n, \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{Z}_p \backslash \bigcup_n B_n. \end{cases}$$

Como $g(x)$ es localmente constante en $\mathbb{Z}_p \backslash 0$, se tiene $g' = 0$ en $\mathbb{Z}_p \backslash 0$. Solamente falta comprobar que $g'(0) = 0$. Sea $x \in \mathbb{Z}_p$, $x \neq 0$, entonces

$$\left| \frac{g(x) - g(0)}{x} \right|_p = \begin{cases} \frac{|p^{2n}|_p}{|x|_p} = p^{-n} & si\ n \in \mathbb{N}, x \in B_n \\ 0 & si\ x \notin B_n,\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Por lo tanto $g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 0$. Entonces $f'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{Z}_p$.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, A. *Series de Poincaré Multivariable de singularidades de curvas algebraicas y análisis p-ádico*, Tesis Master. Medellín, Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, 2014.

Bachman, G. *Introduction to p-adic numbers and valuation theory*, Academic Press, New York-London, 1964.

Baker, A. *An Introduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis*, Glasgow, 2002.

Brekke, L. and Freund, P. *p-adic numbers in phisics.* Department of Physics, University of Illinois at Chicago, Chicago, 1993.

Flores, E. A. *Análisis y Geometria en* $\mathbb{Q}_p$, Tesis. Universidad de Panamá. Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología. Programa Centroamericano de Maestria en Matemática, 2008.

Gouvêa, F. Q. *P-adic Numbers: An Introduction*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Second Edition, Universitext, 2000

Katok, S. *Real and p-adic analysis, course notes*, Deparmet of Mathematicas, The Pennsylvania State University, 2001.

Lafuente, R.*Los Números p-ádicos y el Teorema de Hasse-Minkowski*, La Plata- Argentina, 2008.

Mahler, K. *P-adic numbers and their functions*, Department of Mathematics,Cambridge University Press, 1973.

Maldonado, D. *Introducción a los números p-ádicos y análisis p-ádico*, Trabajo de Grado Matemáticas. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas 2015.

Schikhof, W. *Ultrametric Calculus,An Introduction to p-ádic Analysis*, Cambridge University Press, 1984.