

UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS  
SUBESPACIOS COMPACTOS DE  $\mathbb{R}^2$  CON  
ALGUNAS TOPOLOGÍAS DISTINTAS DE LA  
USUAL  
(ANÁLISIS DE UN ARTÍCULO)

TILSON HUERTAS BRIÑEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2005

**UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS  
SUBESPACIOS COMPACTOS DE  $\mathbb{R}^2$  CON  
ALGUNAS TOPOLOGÍA DISTINTAS DE LA  
USUAL**

(ANÁLISIS DE UN ARTÍCULO)

**TILSON HUERTAS BRIÑEZ**

Trabajo presentado para optar el título de  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Directora

**SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA**

Doctora en ciencias matemáticas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**ESCUELA DE MATEMÁTICAS**

**BUCARAMANGA**

**2005**

# AGRADECIMIENTOS

## **Agradezco muy especialmente a:**

Dios por darme valor y fortaleza para alcanzar mis metas.

Mis padres Sol Maria y Rafael por su amor, comprensión y apoyo en cada instante de mi vida.

Mis hermanos Alixandra, Leonardo y Yady por su apoyo moral y afectivo.

La profesora Sonia Marleni Sabogal Pedraza por su colaboración, por su apoyo y sobre todo por esa gran calidad humana de la que es poseedora y nos permite a los demás disfrutar.

El profesor Gilberto Arenas por su paciencia y colaboración.

Mis amigos Luisa, Nancy, Jonh, Martha, Juanita, Isnardo, Freddy, Veronica, Sandra, Lucero y a muchos más por su apoyo y amistad incondicional.

Mis profesores por orientarme a lo largo de mi carrera.

Stefanny, Nathalia y Miladys.

La familia Quijano quienes siempre me brindaron calor de hogar.

**TITULO:** UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS SUBESPACIOS COMPACTOS DE  $\mathbb{R}^2$  CON ALGUNAS TOPOLOGÍAS DISTINTAS DE LA USUAL\*

**AUTOR:** TILSON HUERTAS BRÍÑEZ\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Topología, compacidad, Base para una topología, Pre-orden, S-Topologías.

### DESCRIPCIÓN

En el presente trabajo de monografía, se hace un análisis detallado del artículo: *Caracterización de los subespacios compactos de  $\mathbb{R}^2$  con algunas topologías distintas de la usual*; Ávila, J. A.

La monografía comprende tres capítulos: el capítulo uno (*Preliminares*) tiene como objetivo principal, proporcionar al lector un resumen de las definiciones y propiedades fundamentales de los números reales y la topología general, que son básicos en el desarrollo del trabajo.

El capítulo dos (*Algunas topologías sobre  $\mathbb{R}^2$  y caracterización de sus subespacios compactos*) se ha dividido en siete secciones; en cada una de ellas se describe una topología sobre  $\mathbb{R}^2$ , distinta de la usual; y se presenta una caracterización de la compacidad en  $\mathbb{R}^2$  con cada una de estas topologías.

En el capítulo tres (*S-Topologías, pre-órdenes y compacidad*), se observa lo estudiado en el capítulo dos, desde un punto de vista más general, para analizar la compacidad en términos de S-Topologías y Pre-órdenes. Este capítulo se ha dividido en cuatro secciones: en la primera sección se da la definición de lo que es una S-Topología y se presentan algunas propiedades importantes de este tipo de topologías. En la segunda sección se muestra cuáles de las topologías vistas en el capítulo dos, son S-topología y cuales no. En la sección tres se presenta la definición de pre-orden sobre un conjunto  $X$  y se establece una interesante relación entre las S-Topologías y los pre-órdenes sobre un conjunto  $X$ . En la cuarta sección se presenta una caracterización de los compactos en las S-Topologías, en términos topológicos y también en términos algebraicos. Finalmente se presenta una tabla que resume varios de los resultados importantes del trabajo.

---

\* Monografía

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas. Directora: Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

**TITLE:** CHARACTERIZATION OF THE  $\mathbb{R}^2$  COMPACT SUBSPACES WITH SOME TOPOLOGIES DIFFERENT FROM THE USUAL\*

**AUTHOR:** TILSON HUERTAS BRIÑEZ\*\*

**KEY WORDS:** Topology, compactity, base for a topology, pre-order, s-topologies..

### DESCRIPTION

In the present monograph work, it is realized a detailed analysis of the article: *characterization of the  $\mathbb{R}^2$  compact subspaces with some topologies different from the usual*; Ávila, J. A.

The monograph includes three chapters: the first chapter (preliminaries) has as main objective to give to the reader an abstract of the definitions and fundamental properties of the real numbers and general topology, which are basic in the development of the work. The second chapter (some topologies of  $\mathbb{R}^2$  and characterization of its compact subspaces) has been divided in seven sections: each one of them describes a topology of  $\mathbb{R}^2$ , different from the usual; and it is presented a characterization of the compactity in  $\mathbb{R}^2$  with each one of these topologies.

In the third chapter (S-topologies, pre-orders and compactity), it is observed what was studied in the second chapter from a mote general point of view to analyze the compactity in S-topologies and pre-orders terms. This chapter has been divided in four sections: the first section gives a definition of what a S-topology is and some important properties of this kind of topologies are presented. The second section shows which topologies seen before in the chapter two are S-topologies and which ones are not. The third section presents the definition of Pre-order on a  $X$  group and establishes an interesting relation between S-topologies and Pre-orders on a  $X$  group. The fourth section presents a characterization of the compacts in the S-topologies, in topological terms and also in algebraic terms.

Finally it is presented a table that summarizes several of the important results of the work.

---

\* Monograph

\*\* Faculty of sciences. Mathematics school. Director: Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

# CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	II
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>1</b>
1.1. $\mathbb{R}$ como campo ordenado y completo . . . . .	1
1.2. Conceptos básicos de topología general . . . . .	4
<b>2. ALGUNAS TOPOLOGÍAS SOBRE <math>\mathbb{R}^2</math> Y CARACTERIZACIÓN DE SUS SUBESPACIOS COMPACTOS</b>	<b>9</b>
2.1. Topología de colas a derecha en el plano. . . . .	9
2.2. Topología de las rectas verticales . . . . .	14
2.3. Topología de regiones angulares con pendiente fija . . . . .	17
2.4. Topología de cuadrados centrados en el origen . . . . .	22
2.5. Topología de complementos finitos . . . . .	30
2.6. Topología del punto incluido . . . . .	31
2.7. Topología del punto excluido . . . . .	32
<b>3. S-TOPOLOGÍAS, PRE-ÓRDENES Y COMPACIDAD</b>	<b>34</b>
3.1. S-topologías . . . . .	34
3.2. Ejemplos de S-topologías . . . . .	37
3.3. S-topologías y Pre-órdenes . . . . .	40
3.4. Compacidad en S-topologías . . . . .	46
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>50</b>

# INTRODUCCIÓN

El estudio de la compacidad es fundamental en las áreas de análisis y topología. El conocimiento de este tema nos proporciona bases indispensables para profundizar otros temas matemáticos.

En el presente trabajo de monografía, se hace un análisis detallado del artículo: *Caracterización de los subespacios compactos de  $\mathbb{R}^2$  con algunas topologías distintas de la usual*; Ávila, J. A. [1].

La monografía comprende tres capítulos: el capítulo uno (*Preliminares*) tiene como objetivo principal, proporcionar al lector un resumen de las definiciones y propiedades fundamentales de los números reales y la topología general, que son básicos en el desarrollo del trabajo.

El capítulo dos (*Algunas Topologías sobre  $\mathbb{R}^2$  y Caracterización de sus Subespacios Compactos*) se ha dividido en siete secciones; en cada una de ellas se describe una topología sobre  $\mathbb{R}^2$ , distinta de la usual; y se presenta una caracterización de la compacidad en  $\mathbb{R}^2$  con cada una de estas topologías, haciendo las demostraciones omitidas en las afirmaciones que se encuentran en [1]. De cada una de estas caracterizaciones, se muestran varios ejemplos de subespacios compactos y **no** compactos de  $\mathbb{R}^2$  haciendo énfasis en la **no** equivalencia entre compacto - cerrado y acotado; por ejemplo en la sección 2.1 se establece que con cierta topología de  $\mathbb{R}^2$ , todo compacto es no cerrado (Proposición 2.1.1), este resultado surgió durante el proceso de estudio del artículo, al analizar diversos ejemplos. Análogamente se obtiene la demostración de la Proposición 2.4.2.

En el capítulo tres (*S-Topologías, Pre-Órdenes y Compacidad*), se observa lo estudiado en el capítulo dos, desde un punto de vista más general, para analizar la compacidad

en términos de *S-topologías* y Pre-órdenes. Este capítulo se ha dividido en cuatro secciones: en la primera sección se da la definición de lo que es una *S-topología* y se presentan algunas propiedades importantes de este tipo de topologías. En la segunda sección se muestra cuáles de las topologías vistas en el capítulo dos, son *S-topología* y cuáles no. En la sección tres se presenta la definición de Pre-orden sobre un conjunto  $X$  y se establece una interesante relación entre las *S-topologías* sobre  $X$  y los Pre-órdenes sobre  $X$  (Proposiciones 3.3.1 y 3.3.2) pues esta relación permite obtener una estructura algebraica (un pre-orden) a partir de una estructura topológica (una *S-topología*) y recíprocamente. En esta sección se muestra además la relación de pre-orden que genera cada una de las *S-topología* vistas en la sección 3.2, esto se hace usando la relación entre Pre-órdenes y topologías, la cual permite obtener cada Pre-orden de una manera más clara y detallada a como se hizo en [1].

En la cuarta sección se presenta una caracterización de los compactos en las *S-topologías*, en términos topológicos (Teorema 3.4.1) y también en términos algebraicos (Teorema 3.4.2). Finalmente se presenta una tabla que resume varios de los resultados importantes del trabajo.

# CAPÍTULO 1

## PRELIMINARES

Este capítulo se dividirá en dos secciones: en la primera sección se presentarán aspectos importantes sobre el campo de los números reales y en la segunda sección se presentarán algunos conceptos, definiciones y teoremas de la topología general, que se van a necesitar en el desarrollo de los demás capítulos. Las definiciones presentadas, así como los teoremas y su respectivas demostraciones pueden encontrarse en textos clásicos de análisis o topología como por ejemplo Apóstol, Munkres o Willars entre otros.

---

### 1.1. $\mathbb{R}$ como campo ordenado y completo

---

En esta sección se estudiarán algunos aspectos básicos de los números reales, relacionados especialmente con los axiomas de campo, axiomas de orden y la propiedad de completéz. Empecemos recordando que una **operación binaria** sobre un conjunto  $X$ , es una función de  $X \times X$  en  $X$ . También admitiremos la existencia de un conjunto no vacío que se denotará por  $\mathbb{R}$  (el conjunto de los **números reales**) en el cual se han definido dos operaciones binarias: la **suma** y el **producto**, denotados por los símbolos  $+$ ,  $\cdot$  respectivamente; estas operaciones cumplen las siguientes propiedades, llamadas **axiomas de campo**,

( $AC_1$ ) para todo par de números  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$x + y = y + x.$$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

( $AC_2$ ) Existen en  $\mathbb{R}$  dos elementos diferentes:  $0, 1 \in \mathbb{R}$ , tales que para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

$$x + 0 = x = 0 + x$$

$$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x.$$

(AC<sub>3</sub>) Para todo número real  $x$ , existe un número real  $y = -x$  en  $\mathbb{R}$  tal que:

$$x + y = 0 = y + x.$$

Si  $x$  es un número real diferente de 0, existe un elemento  $y = x^{-1}$  en  $\mathbb{R}$ , tal que:

$$x \cdot y = 1 = y \cdot x.$$

(AC<sub>4</sub>) Para todo  $x, y, z$  en  $\mathbb{R}$ :

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(AC<sub>5</sub>) para todo  $x, y, z$  en  $\mathbb{R}$ :

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Ahora asumimos que existe un subconjunto de  $\mathbb{R}$  llamado el conjunto de los **números reales positivos**, este conjunto se denotara por:  $\mathbb{R}^+$ , el cual satisface los siguientes axiomas, denominados **axiomas de orden**:

(AO<sub>1</sub>) Dado un número real, se da exactamente una de las siguientes situaciones:

i)  $x = 0$ ;

ii)  $x$  es un número real positivo;

iii)  $-x$  es un número real positivo.

(AO<sub>2</sub>) Si  $x, y$  son números reales positivos, entonces:

$x + y$  es un número positivo

$x \cdot y$  es un número positivo.

Cualquier conjunto con dos operaciones binarias que satisfagan  $(AC_1)$  a  $(AC_5)$  que contenga un subconjunto que satisfaga  $(AO_1)$  y  $(AO_2)$ , se dirá un **campo ordenado**.

De los axiomas de orden, se tiene inmediatamente, que si  $x$  es distinto de cero, entonces  $x^2 \in \mathbb{R}^+$ .

En efecto: como  $x$  es distinto de cero,  $x \in \mathbb{R}^+ \vee -x \in \mathbb{R}^+$ . Como  $x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x)$ ; por el axioma  $(AO_2)$ ,  $x^2 \in \mathbb{R}^+$ . Si  $x$  es un número real tal que  $(-x)$  pertenece a  $\mathbb{R}^+$ , se dirá que  $x$  es un **número negativo**.

**1.1. Definición:** Dados dos números reales  $x, y$ , se dirá que  $x$  es **menor** que  $y$  ( $x < y$ ), si  $y - x$  pertenece a  $\mathbb{R}^+$ . Se dirá que  $x$  es **mayor** que  $y$  ( $x > y$ ), si  $y - x$  es un **número negativo**.

No es difícil demostrar que la relación  $\leq$  definida en  $\mathbb{R}$  por:

$$x \leq y \quad \text{si y solo si} \quad (x = y) \vee (x < y)$$

es una relación de orden en  $\mathbb{R}$ , es decir es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Obsérvese que si  $x \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $-x$  es un número negativo y por consiguiente  $x > 0$ . Si  $x > 0$ ,  $-x$  es un número negativo, lo cual quiere decir que  $x = -(-x)$  pertenece a  $\mathbb{R}^+$ , luego podemos decir que el conjunto de los números reales positivos, es igual al conjunto de los números reales mayores que cero y que el conjunto de los números reales negativos es igual al conjunto de los números reales menores que cero.

**1.2. Conjunto acotado superiormente:** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A$  se dice **acotado superiormente**, si existe un número real  $M$ , tal que para todo  $x$  en  $A$ ,  $x \leq M$

**1.3. Conjunto acotado inferiormente:** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A$  se dice **acotado inferiormente**, si existe un número real  $T$ , tal que para todo  $x$  en  $A$ ,  $T \leq x$

Cuando  $A$  es un conjunto acotado superiormente, existe un número real  $M$  tal que para todo  $x \in A$ ,  $x \leq M$ ;  $M$  es llamado **una cota superior de  $A$** . Si el conjunto  $A$  es acotado inferiormente, existe al menos un número real  $T$  tal que,  $T \leq x$  para todo  $x \in A$ ,  $T$  es llamado **una cota inferior de  $A$** . Además si el conjunto  $A$  es acotado tanto superiormente como inferiormente, decimos que  $A$  es un **conjunto acotado**.

**1.4. Definición:** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ , un conjunto acotado.

1. El número real  $\alpha$  se denomina **extremo superior** del conjunto  $A$  si cumple las siguientes propiedades:
  - i)  $\alpha$  es una cota superior del conjunto  $A$ .
  - ii) Si  $u$  es un número real menor que  $\alpha$ , entonces  $u$  **no** es cota superior del conjunto  $A$ .
  
2. El número real  $\beta$ , se llama **extremo inferior** del conjunto  $A$ , si satisface las siguientes propiedades:
  - i)  $\beta$  es una cota inferior del conjunto  $A$ .
  - ii) Si  $t$  es un número real mayor que  $\beta$ , entonces  $t$  **no** es cota inferior del conjunto  $A$ .

*Nota 1.1.* Si  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  y si el conjunto  $A$  tiene extremo superior, éste es único. Igualmente si tiene extremo inferior. Los extremos superior e inferior de un conjunto, son llamados también **supremo** e **ínfimo** del conjunto y se denotan por:  $\sup$  e  $\inf$  respectivamente.

**1.5. Axioma del extremo superior:** Todo subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$ , acotado superiormente tiene extremo superior.

Cualquier conjunto con una relación de orden que satisface el axioma anterior, se dice **completo**. Se sabe que  $\mathbb{R}$  es el único (salvo isomorfismos) campo ordenado y completo.

---

## 1.2. Conceptos básicos de topología general

---

**1.6. Espacio topológico:** sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{T}$  una familia de subconjuntos de  $X$  (es decir  $\mathcal{T} \subseteq P(X)$ ). Se dice que  $\mathcal{T}$  es una *topología* en  $X$ , si se cumplen los siguientes axiomas:

$$(ET_1) \quad \emptyset, X \in \mathcal{T}.$$

$$(ET_2) \quad \text{Si } A, B \in \mathcal{T} \text{ entonces } A \cap B \in \mathcal{T}.$$

$$(ET_3) \quad \text{Si } \{A_i\}_{i \in I} \text{ es una familia de elementos de } \mathcal{T}, \text{ entonces } \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}.$$

En tal caso el par  $(X, \mathcal{T})$  se llama *espacio topológico* y los elementos de  $\mathcal{T}$  se llaman *abiertos*.

*Nota 1.2.*  $(ET_2)$  significa que la intersección finita de abiertos es un abierto.

**1.7. Interior de un conjunto:**  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $A \subseteq X$ ,  $x \in A$ . Diremos que  $x$  es un *punto interior* de  $A$  si y solo si existe  $O \in \mathcal{T}$ , tal que  $x \in O \subseteq A$ .

El conjunto de los **puntos interiores** de  $A$  se llama el **interior** de  $A$  y se nota  $\overset{\circ}{A}$  o  $int(A)$ .

**1.8. Una caracterización de los conjuntos abiertos:**  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $A \subseteq X$ . Entonces  $A$  es abierto si y solo si  $A = \overset{\circ}{A}$ .

**1.9. Conjuntos cerrados:**  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico  $A \subseteq X$ . Diremos que  $A$  es *cerrado* si y solo si  $X - A \in \mathcal{T}$ , es decir, si  $X - A$  es abierto.

La familia de todos los conjuntos cerrados de un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  la llamaremos **cerradura** de  $X$  y la notaremos por:  $\overline{\mathcal{T}}$ .

Los conjuntos cerrados poseen las siguientes propiedades, “duales” de las propiedades de los abiertos: toda intersección de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado y toda reunión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

**1.10. Topología usual de  $\mathbb{R}$  ( $\mathcal{T}_u$ ):** sea  $X = \mathbb{R}$ , se tiene que:

$\mathcal{T}_u = \left\{ \bigcup_{\alpha} (a_{\alpha}, b_{\alpha}) \mid a_{\alpha}, b_{\alpha} \in \mathbb{R} \right\}$  es una topología sobre  $\mathbb{R}$ , llamada la *topología usual*.

**1.11. Topología discreta:**  $X$  conjunto y  $\mathcal{T} = P(X)$ ,  $\mathcal{T}$  es una topología sobre  $X$  llamada *topología discreta*.

**1.12. Topología indiscreta:**  $X$  conjunto y  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ ,  $\mathcal{T}$  es una topología sobre  $X$  llamada *topología indiscreta*.

**1.13. Base para alguna topología:**  $X$  conjunto y  $\mathfrak{B} \subseteq P(X)$  se dice que  $\mathfrak{B}$  es *base para alguna topología* sobre  $X$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

i)  $\bigcup \mathfrak{B} = X$

ii) Si  $B_1$  y  $B_2 \in \mathfrak{B}$  y  $x \in B_1 \cap B_2$ , entonces existe  $B_3 \in \mathfrak{B}$  tal que  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

En tal caso, la familia

$$\langle \mathfrak{B} \rangle = \{G \subseteq X \mid (\forall x \in G)(\exists B_x \in \mathfrak{B})(x \in B_x \subseteq G)\}$$

es una *topología* sobre  $X$ , llamada la *topología generada* por  $\mathfrak{B}$ .

Si  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  y  $r \in \mathbb{R}^+$ , la **bola** o **disco abierto** con centro  $(a, b)$  y radio  $r$ , es el conjunto:

$$B((a, b); r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}.$$

En el siguiente ejemplo se usa 1.13 y la noción de bola para definir la llamada **topología usual** del plano.

**Ejemplo 1.1.** En  $\mathbb{R}^2$  la familia de discos abiertos en el plano o bolas:

$$\mathfrak{F} = \{B((a, b); r) \mid a, b, r \in \mathbb{R}, \quad r \geq 0\} \cup \{\emptyset\}.$$

es base para una topología y en este caso la topología generada  $\langle \mathfrak{F} \rangle$  es precisamente la topología usual de  $\mathbb{R}^2$  la cual notaremos como:  $\mathcal{T}_u$ .

**1.14. Base para una topología:** Sea  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico y  $\mathfrak{B}$  una familia de abiertos (es decir  $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$ ). Se dice que  $\mathfrak{B}$  es *una base para  $\mathcal{T}$* , si todo elemento de  $\mathcal{T}$  es unión de elementos de  $\mathfrak{B}$ , equivalentemente si para cualquier  $O \in \mathcal{T}$  y  $x \in O$ , existe  $B_x \in \mathfrak{B}$  tal que:  $x \in B_x \subseteq O$ .

**1.15. Topología producto:** Sean  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(Y, \mu)$  espacios topológicos. La *topología producto* sobre  $X \times Y$  es la topología que tiene como base la colección  $\mathfrak{B}$  de todos los conjuntos de la forma  $U \times V$ , donde  $U$  es un conjunto abierto de  $X$  y  $V$  es un conjunto abierto de  $Y$ .

**1.16. Topología de Subespacio:**  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $Y \subseteq X$ , la familia:

$$\mathcal{T}_Y =: \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}$$

es una topología sobre  $Y$  llamada la *topología de subespacio*, el par  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  se llama *subespacio topológico* de  $(X, \mathcal{T})$ .

**1.17. Definición:** Supongamos que  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  son dos topologías sobre un conjunto dado  $X$ . Si  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ , diremos que  $\mathcal{T}'$  es **más fina** que  $\mathcal{T}$ . Si  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ , entonces  $\mathcal{T}'$  es **estrictamente más fina** que  $\mathcal{T}$ . Diremos que  $\mathcal{T}$  es comparable con  $\mathcal{T}'$  si  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$  o  $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ .

**1.18. Recubrimiento:** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Una colección  $\mathcal{A}$  de subconjuntos del espacio  $X$  se dice que es un **recubrimiento** de  $X$  o que  $\mathcal{A}$  **recubre** a  $X$ , si la unión de los elementos de  $\mathcal{A}$  coincide con  $X$ . Se dice que  $\mathcal{A}$  es **recubrimiento abierto** de  $X$  si es un recubrimiento de  $X$  formado por conjuntos abiertos de  $X$ .

**1.19. Recubrimiento por abiertos básicos:** sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $\mathfrak{B}$  una base para  $\mathcal{T}$ . Una colección  $\mathcal{A}$  de elementos de  $\mathfrak{B}$  es un **recubrimiento por abiertos básicos** de  $X$ , si la unión de los elementos de  $\mathcal{A}$  coincide con  $X$ .

**1.20. Espacio compacto:** Un espacio topológico  $X$  se dice que es **compacto** si de cada recubrimiento abierto  $\mathcal{A}$  de  $X$  podemos extraer una subcolección finita que también recubre a  $X$ .

**Ejemplo 1.2.**  $\mathbb{R}$  con la topología usual no es compacto, en efecto, si consideramos  $V_n = (-n, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , entonces la colección  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un recubrimiento de  $\mathbb{R}$  que no puede reducirse a un subrecubrimiento finito.

**Ejemplo 1.3.** En  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  todo intervalo cerrado y acotado es compacto; es decir  $A = [a, b]$  es compacto. Para ver una demostración de este hecho se puede consultar [5] o también [7]. Es conocido que en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$  los subespacios compactos son exactamente aquellos que son cerrados y acotados.

**Ejemplo 1.4.**  $\mathbb{R}^2$  con la topología usual, no es compacto, en efecto si consideramos  $\{(-n, n) \times (-n, n) | n \in \mathbb{N}\}$  es un recubrimiento abierto de  $\mathbb{R}^2$ , que no puede reducirse a uno finito.

La propiedad de ser compacto, no se hereda, es decir, si  $A$  es compacto y  $B \subset A$  entonces no se puede afirmar que  $B$  sea compacto.

**Ejemplo 1.5.** En  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ , sean  $A = [0, 1]$ ,  $B = (0, 1)$  es claro que,  $B \subset A$ ,  $A$  es compacto puesto que es cerrado y acotado, pero  $B$  no lo es, (pues  $\{(0, 1 - \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un recubrimiento abierto de  $B$  que no se puede reducir a un subrecubrimiento finito).

En el caso que el subespacio sea cerrado, tenemos la siguiente afirmación.

**Afirmación 1.2.1.** *Todo subespacio cerrado de un compacto, es también compacto*

La demostración de la anterior afirmación se puede ver en [7].

Un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  se dice acotado si existe una bola que lo contiene. Análogamente a como ocurre en  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ , se tiene la siguiente caracterización de los subespacios compactos de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ :

**Afirmación 1.2.2.** Sean  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$  y  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ . Entonces  $S$  es compacto si y solo si  $S$  es cerrado y acotado.

**Proposición 1.2.1.**  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $A \subseteq Y \subseteq X$ .  $A$  es compacto si y solo si  $A$  es compacto en  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ] Sea  $A \subseteq X$  compacto en  $(X, \mathcal{T})$  y sea  $\mathfrak{B}$  un recubrimiento por abiertos de  $\mathcal{T}_Y$  es decir  $A \subseteq \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$ ; para cada  $B \in \mathfrak{B}$  existe  $O_B \in \mathcal{T}$  tal que  $B = O_B \cap Y$ , entonces

$$A \subseteq \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} O_B \cap Y = \left( \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} O_B \right) \cap Y \subseteq \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} O_B$$

como  $A$  es compacto en  $(X, \mathcal{T})$ , entonces  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_{B_i}$  para algún  $i \in \mathbb{N}$  entonces  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (O_{B_i} \cap Y) = \bigcup_{i=1}^n B_i$  luego  $A$  es compacto en  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ .

$\Leftarrow$ ]  $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} O_\alpha$ ,  $O_\alpha \in \mathcal{T} \quad \forall \alpha \in \Delta$ , luego se tiene que  $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} (O_\alpha \cap Y)$  (porque  $A \subseteq Y$ );  $O_\alpha \cap Y \in \mathcal{T}_Y \quad \forall \alpha \in \Delta$ . Como  $A$  es compacto en  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  entonces existen  $O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \dots, O_{\alpha_n}$  tales que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (O_{\alpha_i} \cap Y) \implies A \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_{\alpha_i}$  ■

# CAPÍTULO 2

## ALGUNAS TOPOLOGÍAS SOBRE $\mathbb{R}^2$ Y CARACTERIZACIÓN DE SUS SUBESPACIOS COMPACTOS

En el desarrollo de este capítulo se analizará la sección dos del artículo [1], presentando algunas demostraciones allí omitidas, como por ejemplo la suficiencia de las condiciones que se plantean en las afirmaciones 1, 2 y 4 del artículo o la demostración de la afirmación 3 que es dejada como ejercicio para el lector. Además a manera de ilustración, presentaremos algunos ejemplos de subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^2$  con cada una de las topologías consideradas, y las compararemos dos a dos es decir estableceremos cuando cada una de estas topologías es más fina que otra.

---

### 2.1. Topología de colas a derecha en el plano.

---

Consideremos el espacio topológico  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$ , donde  $\mathcal{T}$  es la topología generada en  $\mathbb{R}$  por la base  $\mathfrak{B} = \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$  y  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$  es la correspondiente topología producto sobre  $\mathbb{R}^2$ . En primer lugar vamos a mostrar que  $\mathfrak{B}$  es en efecto base para una topología sobre  $\mathbb{R}$  es decir verifiquemos que se cumple:

i)  $\mathbb{R} = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$ .

ii) Si  $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$  y  $x \in B_1 \cap B_2$ , entonces existe  $B_3 \in \mathfrak{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

Sea  $x \in \mathbb{R}$ , entonces existe un  $B_x \in \mathfrak{B}$ , tal que  $B_x = [x, \infty)$ , claramente  $x \in B_x$  lo que implica,  $x \in \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$ , como  $x$  es arbitrario entonces  $\mathbb{R} \subset \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$ .

La otra contención  $\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B \subset \mathbb{R}$  es inmediata dado que  $\mathbb{R}$  es el conjunto “universal”.

Para la parte **ii)** veamos que  $B_3$  es la intersección de  $B_1 = [a_1, \infty)$  y  $B_2 = [a_2, \infty)$ .

Sea  $x \in B_1 \cap B_2$  entonces  $x \in B_1$  y  $x \in B_2$  es decir  $x \in [a_1, \infty)$  y  $x \in [a_2, \infty)$ , luego

$a_1 \leq x \wedge a_2 \leq x$ ; si hacemos  $a_3 = \max\{a_1, a_2\}$  entonces  $a_3 \leq x \quad \forall x \in B_1 \cap B_2$ , luego

tenemos que:  $x \in [a_3, \infty) = B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ ; por lo tanto  $\mathfrak{B}$  es base para una topología

sobre  $\mathbb{R}$ . Enseguida mostraremos que análogamente  $\mathfrak{B}^* = \{[a, \infty) \times [b, \infty) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

es base para una topología de  $\mathbb{R}^2$ , entonces veamos que se cumple:

$$\text{i) } \mathbb{R}^2 = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}^*} B.$$

Sea  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , entonces existe  $B_0 \in \mathfrak{B}^*$ , donde  $B_0 = [x, \infty) \times [y, \infty)$  tal que

$(x, y) \in B_0 \Rightarrow (x, y) \in \bigcup_{B \in \mathfrak{B}^*} B$ . La contención recíproca es inmediata dado que

$\mathbb{R}^2$  es el conjunto universal.

**ii)** Si  $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}^*$  y  $(x, y) \in B_1 \cap B_2$ , veamos que existe  $B_3 \in \mathfrak{B}^*$  tal que:

$$(x, y) \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Como  $B_1 \in \mathfrak{B}^*$  y  $B_2 \in \mathfrak{B}^*$  tenemos que  $B_1 = [a_1, \infty) \times [b_1, \infty)$  y

$B_2 = [a_2, \infty) \times [b_2, \infty)$  para algunos  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ . Dado que  $(x, y) \in B_1 \cap B_2$

entonces  $x \in [a_1, \infty) \cap [a_2, \infty)$ , e  $y \in [b_1, \infty) \cap [b_2, \infty)$ . Sean  $a_3 = \max\{a_1, a_2\}$  y

$b_3 = \max\{b_1, b_2\}$  y sea  $B_3 = [a_3, \infty) \times [b_3, \infty)$ , como  $a_1 \leq x$  y  $a_2 \leq x$  entonces

$x \in [a_3, \infty)$ , además  $b_1 \leq y$ ,  $b_2 \leq y$  entonces  $y \in [b_3, \infty)$ , luego  $(x, y) \in [a_3, \infty) \times [b_3, \infty)$ ;

es decir  $(x, y) \in B_3$ . Ahora veamos que  $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ . Si  $(u, v) \in B_3$  significa que

$(u, v) \in [a_3, \infty) \times [b_3, \infty) \Rightarrow a_3 \leq u$  y  $b_3 \leq v$  pero como  $a_3 = \max\{a_1, a_2\}$  entonces

$$a_1 \leq a_3 \leq u \quad \Rightarrow \quad a_1 \leq u \Rightarrow u \in [a_1, \infty)$$

$$a_2 \leq a_3 \leq u \quad \Rightarrow \quad a_2 \leq u \Rightarrow u \in [a_2, \infty)$$

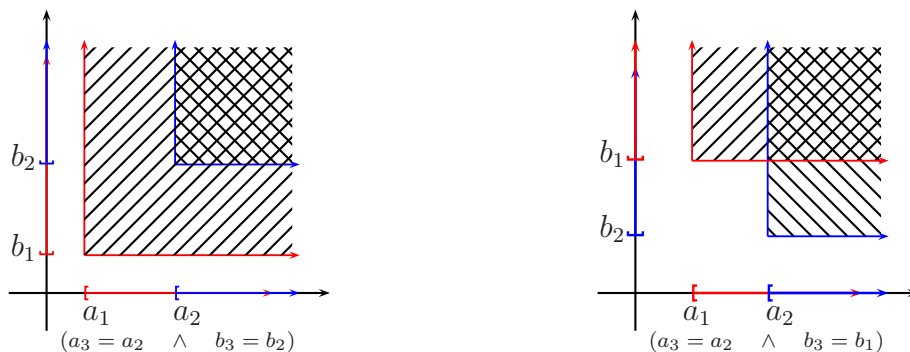
luego  $u \in [a_1, \infty) \cap [a_2, \infty)$  y como  $b_3 = \max\{b_1, b_2\}$  entonces

$$b_1 \leq b_3 \leq v \quad \Rightarrow \quad b_1 \leq v \Rightarrow v \in [b_1, \infty)$$

$$b_2 \leq b_3 \leq v \quad \Rightarrow \quad b_2 \leq v \Rightarrow v \in [b_2, \infty)$$

y así  $v \in [b_1, \infty) \cap [b_2, \infty)$  por lo tanto  $(u, v) \in B_1 \cap B_2$  y tenemos  $(u, v) \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ ;

obsérvese que en este caso se tiene que  $B_3 = B_1 \cap B_2$  (ver Figura **2.1.1**).

Figura 2.1.1: Intersección de dos abiertos básicos en  $\mathcal{T}_{cd}$ 

Luego  $\mathfrak{B}^*$  es base para una topología en  $\mathbb{R}^2$ . En lo que resta de este trabajo a esta topología la llamaremos **topología de colas a derecha en el plano** y la notaremos  $\mathcal{T}_{cd}$ . Consideremos entonces el espacio topológico  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cd})$ . La siguiente proposición establece una condición necesaria y suficiente para que un subespacio de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cd})$  sea compacto.

**Proposición 2.1.1.**  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  es compacto si y solo si existen puntos  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$  en  $A$ , tales que, para todo  $(a, b) \in A$ , existe un punto  $(a_i, b_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tal que  $a_i \leq a$  y  $b_i \leq b$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$  Los abiertos básicos de  $\mathcal{T}_{cd}$ , son de la forma  $[x, +\infty) \times [y, +\infty)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Entonces la familia

$$\{[a, +\infty) \times [b, +\infty)\}_{(a,b) \in A}$$

es un recubrimiento por abiertos básicos de  $A$ , es decir,

$$A \subseteq \bigcup_{(a,b) \in A} [a, +\infty) \times [b, +\infty).$$

Como  $A$  es compacto, este recubrimiento abierto se reduce a un subrecubrimiento finito, es decir,

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n [a_i, +\infty) \times [b_i, +\infty) \quad \text{con } (a_i, b_i) \in A, \text{ para todo } i.$$

Entonces se tiene que para todo  $(a, b) \in A$ ,  $(a, b) \in [a_{i_0}, +\infty) \times [b_{i_0}, +\infty)$ , para algún  $i_0$ ,  $1 \leq i_0 \leq n$ . Así,  $a_{i_0} \leq a$  y  $b_{i_0} \leq b$ .

⇐ Consideremos un recubrimiento por abiertos básicos de  $A$ , es decir;

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} [a_\alpha, \infty) \times [b_\alpha, \infty) \quad a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R},$$

entonces tenemos que existen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Delta$  tales que:

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) &\in [a_{\alpha_1}, \infty) \times [b_{\alpha_1}, \infty) \\ (a_2, b_2) &\in [a_{\alpha_2}, \infty) \times [b_{\alpha_2}, \infty) \\ &\vdots \\ (a_n, b_n) &\in [a_{\alpha_n}, \infty) \times [b_{\alpha_n}, \infty) \end{aligned}$$

afirmamos que:  $A \subseteq \bigcup_{j=1}^n [a_{\alpha_j}, \infty) \times [b_{\alpha_j}, \infty)$ . En efecto :

Sea  $(a, b) \in A$ , por hipótesis existe un punto  $(a_i, b_i)$  tal que  $a_i \leq a$  y  $b_i \leq b$ ,  $1 \leq i \leq n$ , entonces  $(a, b) \in [a_i, \infty) \times [b_i, \infty) \stackrel{?}{\subseteq} [a_{\alpha_i}, \infty) \times [b_{\alpha_i}, \infty) \subseteq \bigcup_{j=1}^n [a_{\alpha_j}, \infty) \times [b_{\alpha_j}, \infty)$ .

Sea  $(x, y) \in [a_i, \infty) \times [b_i, \infty) \implies a_i \leq x \wedge b_i \leq y$ . Como

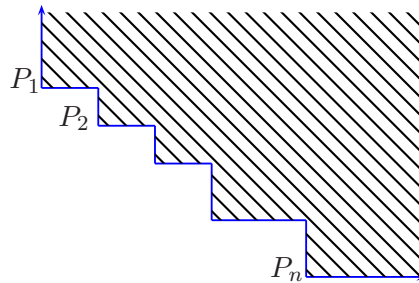
$$(a_i, b_i) \in [a_{\alpha_i}, \infty) \times [b_{\alpha_i}, \infty) \implies a_{\alpha_i} \leq a_i \leq x \wedge b_{\alpha_i} \leq b_i \leq y$$

$$\implies (x, y) \in [a_{\alpha_i}, \infty) \times [b_{\alpha_i}, \infty).$$

■

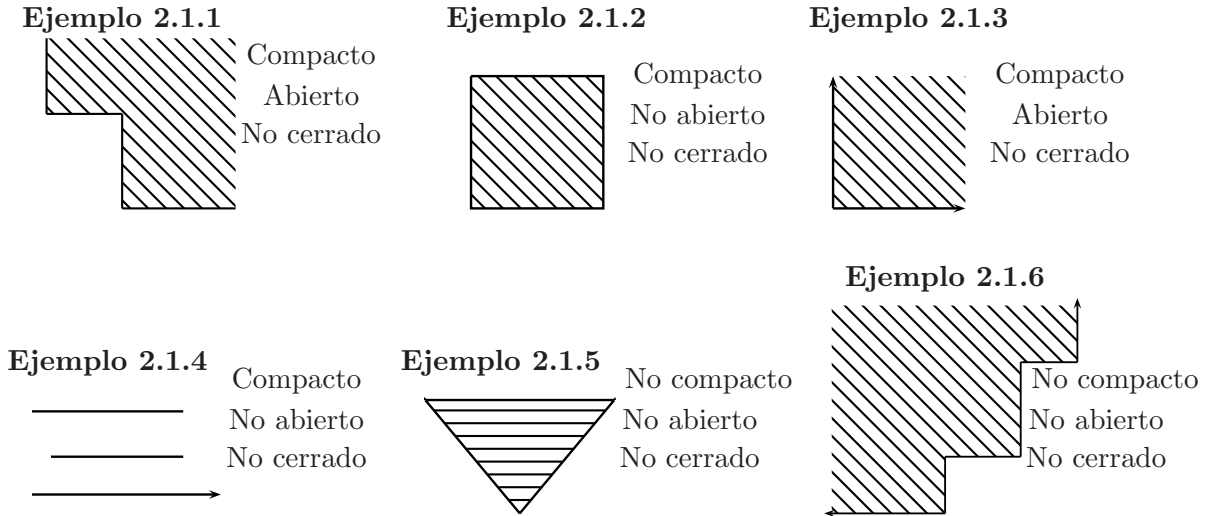
De la proposición anterior se podría decir de manera intuitiva e informal que en este espacio los subconjuntos compactos, son exactamente aquellos, que se pueden “encajar” en una unión finita de “colas a derecha” de  $\mathbb{R}^2$ , cuyos “vértices” pertenecen al subconjunto, es decir un conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  será compacto si y solo si esta contenido en una región como la de la figura 2.1.2 donde  $P_1, P_2, \dots, P_n$  son puntos de  $S$ .

Figura 2.1.2: Unión finita de “colas a derecha” de  $\mathbb{R}^2$



Ahora veamos gráficamente algunos ejemplos de conjuntos compactos de  $\mathbb{R}^2$ , con la topología producto definida, que hemos llamado **topología de colas a derecha sobre  $\mathbb{R}^2$** .

Figura 2.1.3: Ejemplos de conjuntos compactos y no compactos de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cd})$



Obsérvese que el Ejemplo 2.1.2 es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$ , no cerrado en esta topología; mientras que en la topología usual de  $\mathbb{R}^2$  es compacto y cerrado, nótese también que el Ejemplo 2.1.3 es un conjunto compacto, no cerrado en esta topología; mientras que en la topología usual de  $\mathbb{R}^2$  no es compacto pero si es un conjunto cerrado, además es no acotado. El Ejemplo 2.1.5 es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , no compacto con la topología de colas a derecha sobre  $\mathbb{R}^2$  pues si hacemos  $S$  igual al conjunto del Ejemplo 2.1.5, entonces tenemos que  $\{[a, \infty) \times [b, \infty) \mid (a, b) \in S\}$ , es un recubrimiento abierto de  $S$  que no puede reducirse a un subrecubrimiento finito; en cambio es claro que  $S$  con la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ , es un conjunto compacto.

Analizando un poco los ejemplos anteriores, se obtiene la siguiente proposición que establece una diferencia interesante entre lo que ocurre en esta topología de colas a derecha, y lo que ocurre en la topología usual del plano, en la cual “ser compacto” implica “ser cerrado”.

**Afirmación 2.1.1.** *Sea  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cd})$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  compacto, entonces  $A$  es no cerrado.*

*Demostración.*

Existen  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$  en  $A$  tales que:  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n [a_i, \infty) \times [b_i, \infty)$ . Si  $A$  es cerrado, entonces  $\mathbb{R}^2 - A$  es abierto. Sea  $a_k = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  y  $(x, b_k) \in \mathbb{R}^2$  con  $x < a_k$  entonces,  $(x, b_k) \notin A$ . (Si  $(x, b_k) \in A \implies (x, b_k) \in [a_{i_0}, \infty) \times [b_{i_0}, \infty)$  para algún  $i_0 \implies a_{i_0} \leq x < a_k \leq a_{i_0} \rightarrow \leftarrow$ ) por lo tanto  $(x, b_k) \in \mathbb{R}^2 - A$  y como este es abierto,

existe  $[a, \infty) \times [b, \infty)$  abierto básico tal que  $(x, b_k) \in [a, \infty) \times [b, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2 - A$ , entonces existe  $(a_k, b_k) : a \leq x < a_k \quad \wedge \quad b \leq b_k$  luego se tiene que:

$$(a_k, b_k) \in [a, \infty) \times [b, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2 - A \quad \text{de modo que} \quad (a_k, b_k) \notin A. \quad \rightarrow \leftarrow \quad \blacksquare$$

Nótese que el recíproco de la Afirmación 2.1.1 no se cumple, para lo cual basta observar la figura del Ejemplo 2.1.5.

---

## 2.2. Topología de las rectas verticales

---

Ahora consideremos el espacio topológico  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{rv})$ , donde  $\mathcal{T}_{rv}$  es la topología generada por la base  $\mathfrak{B} = \{\{x\} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\}$ .  $\mathcal{T}_{rv}$  se conoce como la **topología de las rectas verticales**. Veamos que en efecto  $\mathfrak{B}$  es base para una topología sobre  $\mathbb{R}^2$ , es decir que  $\mathfrak{B}$  verifica las siguientes condiciones:

- i)  $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$ ; donde  $B$  es una recta vertical en el plano para cada  $B \in \mathfrak{B}$ .
- ii) Si  $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ ,  $(x, y) \in B_1 \cap B_2$ , entonces existe  $B_3 \in \mathfrak{B}$  tal que  $(x, y) \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

Para la parte i) veamos que  $\mathbb{R}^2 \subset \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$  entonces, sea  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  y consideremos  $B_0 = \{x_0\} \times \mathbb{R}$ , tenemos que  $B_0 \in \mathfrak{B}$  y además  $(x_0, y_0) \in B_0$  luego  $(x_0, y_0) \in \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$  entonces,  $\mathbb{R}^2 \subseteq \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$ . La contención  $\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B \subseteq \mathbb{R}^2$  es inmediata dado que  $\mathbb{R}^2$  es el conjunto universal. Para la parte ii) por hipótesis tenemos que  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$  lo cual significa que  $B_1 = B_2$  puesto que si la intersección de dos rectas verticales no es vacía, entonces las rectas son iguales y basta tomar  $B_3 = B_1 = B_2 = B_1 \cap B_2$ . De i) y ii) se tiene que  $\mathfrak{B}$  es base para una topología sobre  $\mathbb{R}^2$ , que llamaremos la **topología de las rectas verticales sobre  $\mathbb{R}^2$** .

*Nota 2.2.1.* Obsérvese que la topología de las rectas verticales, es la misma topología producto de la topología discreta con la topología indiscreta.

**Proposición 2.2.1.**  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  es compacto en la topología de las rectas verticales, si y solo si existen puntos  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$  en  $A$  tales que,  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{a_i\} \times \mathbb{R}$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$  La familia  $\mathfrak{F} = \{\{x\} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\}$ , es un recubrimiento por abiertos básicos

de  $A$ , entonces  $A \subseteq \bigcup \mathfrak{F}$ . Como  $A$  es compacto, este recubrimiento se reduce a un subrecubrimiento finito, es decir, existen  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in A$  tales que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{a_i\} \times \mathbb{R}$ .

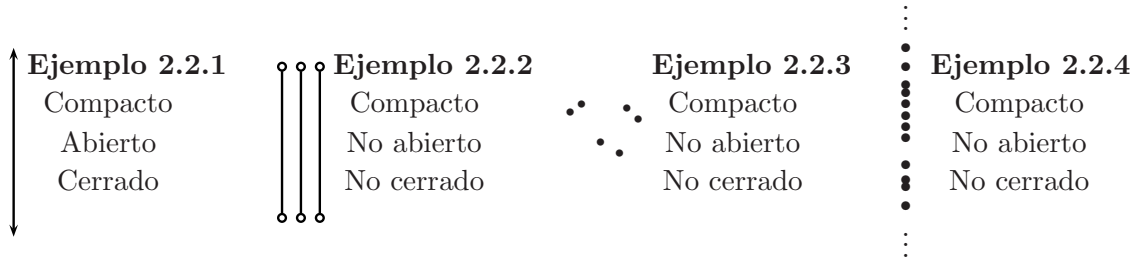
$\Leftarrow$  Sea  $\left\{ \{a_\alpha\} \times \mathbb{R} \right\}_{\alpha \in \Delta}$  un recubrimiento por abiertos básicos de  $A$ , es decir  $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} \{a_\alpha\} \times \mathbb{R}$ ; entonces tenemos que, existen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Delta$  tales que:

$$\left. \begin{array}{l} (a_1, b_1) \in \{a_{\alpha_1}\} \times \mathbb{R} \\ (a_2, b_2) \in \{a_{\alpha_2}\} \times \mathbb{R} \\ \vdots \\ (a_n, b_n) \in \{a_{\alpha_n}\} \times \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ lo que implica que } a_j = a_{\alpha_j} \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Afirmamos que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{a_{\alpha_i}\} \times \mathbb{R}$ : sea  $(a, b) \in A$ , por hipótesis existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $(a, b) \in \{a_i\} \times \mathbb{R} = \{a_{\alpha_i}\} \times \mathbb{R}$ . ■

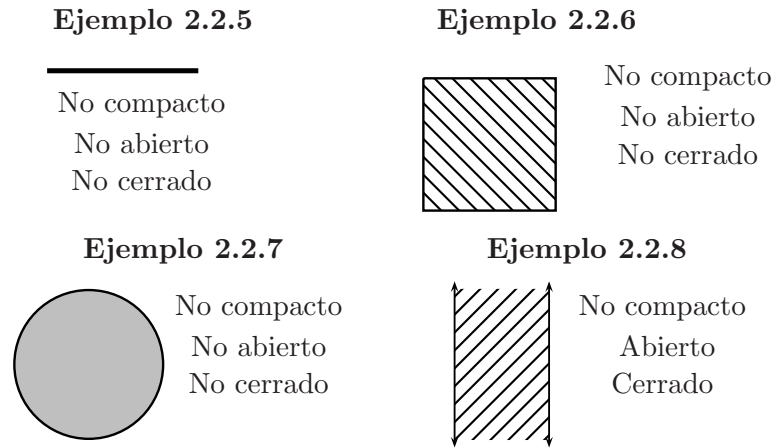
De esta manera un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  será compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{rv})$  si y solo si está contenido en la unión de un número finito de rectas verticales. Veamos unos ejemplos de subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^2$  con la topología de rectas verticales.

Figura 2.2.1: Ejemplos de conjuntos compactos de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{rv})$ .



Los ejemplos que se ven en la Figura 2.2.1 son subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^2$  con la topología de las rectas verticales. El ejemplo 2.2.1 representa una recta vertical en  $\mathbb{R}^2$ , obsérvese que con la topología de las rectas verticales es un conjunto aberrado (es decir abierto y cerrado), mientras que con la topología usual de  $\mathbb{R}^2$  no es un conjunto abierto ni compacto. El ejemplo 2.2.4 representa una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}^2$  con su punto limite ( o sin él) que esté sobre una vertical. A continuación mostraremos algunos ejemplos de conjuntos no compactos en  $\mathbb{R}^2$  con la topología de las rectas verticales.

Figura 2.2.2: Ejemplos de conjuntos no compactos de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{rv})$



Nótese que los ejemplos 2.2.6 y 2.2.7 son conjuntos cerrados y compactos en  $\mathbb{R}^2$  con la topología usual; mientras que con la topología de las rectas verticales no lo son. Podemos comparar las topologías  $\mathcal{T}_{cd}$  o topología de colas a derecha sobre  $\mathbb{R}^2$  y la topología de las rectas verticales  $\mathcal{T}_{rv}$ ; es decir veamos cual de las dos es más fina, esto lo vemos mejor de manera gráfica.

Figura 2.2.3

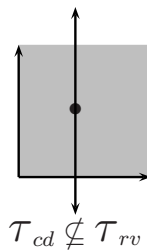
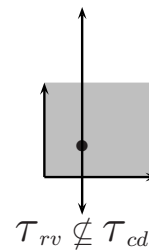


Figura 2.2.4



En la Figura 2.2.3 tomamos un abierto básico de  $\mathcal{T}_{cd}$  y un punto en el abierto; vemos que no es posible construir un abierto de  $\mathcal{T}_{rv}$  que contenga al punto y esté totalmente contenido en el abierto de  $\mathcal{T}_{cd}$ . Lo mismo sucede en la Figura 2.2.4 dada una recta vertical y un punto en ella, no es posible construir un abierto de la topología  $\mathcal{T}_{cd}$  que contenga al punto y esté totalmente contenido en la recta; luego estas dos topologías no son comparables. De manera parecida se puede concluir que ni  $\mathcal{T}_{cd}$  ni  $\mathcal{T}_{rv}$  son comparables con la topología usual del plano.

## 2.3. Topología de regiones angulares con pendiente fija

Fijemos un número real  $m > 0$  y consideremos la colección  $\mathfrak{B}_m = \{T_{b,c} \mid b, c \in \mathbb{R}\}$ , donde  $T_{b,c} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid mx + b \leq y, -mx + c \leq y\}$ .

Sea  $\mathcal{T}$  la topología generada por  $\mathfrak{B}_m$ . Como en los dos casos anteriores primero mostraremos que en efecto  $\mathfrak{B}_m$  es base para una topología sobre  $\mathbb{R}^2$ , entonces veamos que  $\mathfrak{B}_m$  cumple:

i)  $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{b,c \in \mathbb{R}} T_{b,c}$

ii) Si  $T_{b_1,c_1}, T_{b_2,c_2} \in \mathfrak{B}_m$  y  $(x, y) \in T_{b_1,c_1} \cap T_{b_2,c_2}$  entonces existe  $T_{b_3,c_3}$  tal que  $(x, y) \in T_{b_3,c_3} \subseteq T_{b_1,c_1} \cap T_{b_2,c_2}$

Para verificar i) basta ver que:

$$\mathbb{R}^2 \subseteq \bigcup_{b,c \in \mathbb{R}} T_{b,c}.$$

Sea  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ; existen  $b_0 = b - ma$  y  $c_0 = b + ma$  tales que  $(a, b) \in T_{b_0,c_0}$ . En efecto:  $b = b_0 + ma \implies b \geq ma + b_0$ , y,  $b = c_0 - ma \implies b \geq -ma + c_0$ , es decir  $(a, b) \in T_{b_0,c_0}$  por lo tanto  $(a, b) \in \bigcup_{b,c \in \mathbb{R}} T_{b,c}$ .

Verifiquemos ii); sean  $T_{b_1,c_1}, T_{b_2,c_2}$  que pertenecen a  $\mathfrak{B}_m$ , y  $(x, y) \in T_{b_1,c_1} \cap T_{b_2,c_2}$  entonces veamos que existe  $T_{b_3,c_3} \in \mathfrak{B}_m$ , tal que,  $(x, y) \in T_{b_3,c_3} \subseteq T_{b_1,c_1} \cap T_{b_2,c_2}$ . Como  $(x, y) \in T_{b_1,c_1} \cap T_{b_2,c_2}$  entonces  $(x, y) \in T_{b_1,c_1} \wedge (x, y) \in T_{b_2,c_2}$  es decir se tiene:

$$\begin{aligned} mx + b_1 \leq y, & \quad \wedge, & \quad mx + b_2 \leq y \\ -mx + c_1 \leq y, & \quad \wedge, & \quad -mx + c_2 \leq y \end{aligned}$$

sean  $b_3, c_3$  números reales tales que  $b_3 = \max\{b_1, b_2\}$  y  $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$ . Puesto que  $(b_3 = b_1 \vee b_3 = b_2) \wedge (c_3 = c_1 \vee c_3 = c_2)$  entonces, de las desigualdades anteriores podemos concluir que  $mx + b_3 \leq y, \wedge -mx + c_3 \leq y$  es decir  $(x, y) \in T_{b_1,c_1} \cap T_{b_2,c_2}$ . Ahora veamos que  $T_{b_3,c_3} \subseteq T_{b_1,c_1} \cap T_{b_2,c_2}$ . Sea  $(x, y) \in T_{b_3,c_3}$  significa que,  $mx + b_3 \leq y \wedge -mx + c_3 \leq y$ . Como  $b_3 = \max\{b_1, b_2\}$ , entonces:

$$\begin{aligned} mx + b_1 \leq mx + b_3 \leq y & \quad \Rightarrow & \quad mx + b_1 \leq y \\ mx + b_2 \leq mx + b_3 \leq y & \quad \Rightarrow & \quad mx + b_2 \leq y \end{aligned}$$

y como  $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$ , entonces:

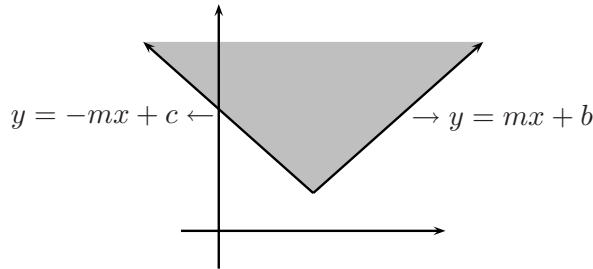
$$\begin{aligned} -mx + c_1 \leq -mx + c_3 \leq y & \quad \Rightarrow & \quad -mx + c_1 \leq y \\ -mx + c_2 \leq -mx + c_3 \leq y & \quad \Rightarrow & \quad -mx + c_2 \leq y \end{aligned}$$

luego  $(x, y) \in T_{b_1, c_1}$  y  $(x, y) \in T_{b_2, c_2} \Rightarrow (x, y) \in T_{b_1, c_1} \cap T_{b_2, c_2}$ .

De este modo  $\mathfrak{B}_m$  es base para una topología sobre  $\mathbb{R}^2$  que llamaremos **topología de regiones angulares con pendiente fija** y la notaremos así  $\mathcal{T}_{ra}$ .

Un abierto básico  $T_{b,c}$  de esta topología, representa una zona angular “hacia arriba”, con vértice en el punto de intersección de las rectas,  $y = mx + b \wedge y = -mx + c$ . A continuación presentamos gráficamente un abierto básico de esta topología.

Figura 2.3.1 Abierto básico de  $\mathcal{T}_{ra}$



**Proposición 2.3.1.**  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  es compacto en  $\mathcal{T}_{ra}$  si y solo si existen  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$  en  $A$ , tales que, para todo  $(p, q) \in A$ , existe un  $(a_{i_0}, b_{i_0})$ ,  $1 \leq i_0 \leq n$ , tal que  $m|p - a_{i_0}| + b_{i_0} \leq q$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ] Puesto que para cada  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  se tiene  $(a, b) \in T_{b-ma, b+ma}$ , entonces sea  $\left\{ T_{b-ma, b+ma} \right\}_{(a,b) \in A}$  recubrimiento por abiertos básicos de  $A$ , es decir;

$$A \subseteq \bigcup_{(a,b) \in A} T_{b-ma, b+ma}$$

Como  $A$  es compacto existen  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in A$  tales que,

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n T_{b_i - ma_i, b_i + ma_i}.$$

Sea  $(p, q) \in A \Rightarrow (p, q) \in \bigcup_{i=1}^n T_{b_i - ma_i, b_i + ma_i}$  luego existe  $(a_{i_0}, b_{i_0})$ , para algún  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $(p, q) \in T_{b_{i_0} - ma_{i_0}, b_{i_0} + ma_{i_0}}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow mp + b_{i_0} - ma_{i_0} &\leq q, & \wedge, & & -mp + b_{i_0} + ma_{i_0} &\leq q \\ \Leftrightarrow m(p - a_{i_0}) &\leq q - b_{i_0}, & \wedge, & & m(a_{i_0} - p) &\leq q - b_{i_0} \\ \Leftrightarrow m(p - a_{i_0}) &\leq q - b_{i_0}, & \wedge, & & -(q - b_{i_0}) &\leq m(p - a_{i_0}) \\ \Leftrightarrow -(q - b_{i_0}) &\leq m(p - a_{i_0}) &\leq q - b_{i_0} & & & \\ \Leftrightarrow |m(p - a_{i_0})| &\leq q - b_{i_0} & \Leftrightarrow & & m|p - a_{i_0}| + b_{i_0} &\leq q. \end{aligned}$$

⇐] Veamos que si se cumple:  $\exists(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$  en  $A$ , tales que,  $\forall(p, q) \in A$  existe un  $(a_{i_0}, b_{i_0})$ ,  $1 \leq i_0 \leq n$ :  $m|p - a_{i_0}| + b_{i_0} \leq q$ , entonces  $A$  es compacto.

Sea  $\{T_{b_\alpha, c_\alpha}\}_{\alpha \in \Delta}$  un recubrimiento por abiertos básicos de  $A$ . Tomemos un punto  $(p, q) \in A$ ; por hipótesis  $(p, q) \in T_{b_i - ma_i, b_i + ma_i}$  para algún  $i = 1, \dots, n$ . Para  $(a_i, b_i) \in A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} T_{b_\alpha, c_\alpha}$  se tiene  $(a_i, b_i) \in T_{b_{\alpha_i}, c_{\alpha_i}}$  para algún  $\alpha_i$ , ¿ $(p, q) \in T_{b_{\alpha_i}, c_{\alpha_i}}$ ?  
Tenemos:

$$mp + b_i - ma_i \leq q, \quad \wedge, \quad -mp + b_i + ma_i \leq q$$

y

$$ma_i + b_{\alpha_i} \leq b_i, \quad \wedge, \quad -ma_i + c_{\alpha_i} \leq b_i$$

Ahora sumando estas desigualdades tenemos que:

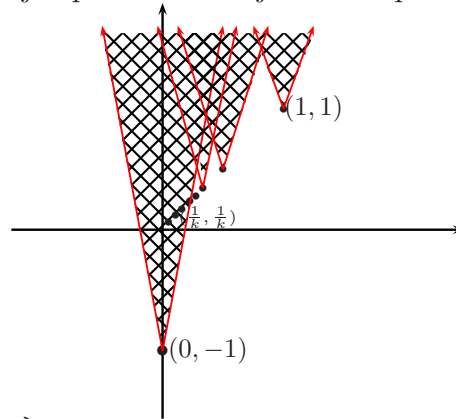
$$mp + b_{\alpha_i} \leq q, \quad \wedge, \quad -mp + c_{\alpha_i} \leq q$$

por lo tanto  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n T_{b_{\alpha_i}, c_{\alpha_i}}$  y  $A$  es compacto. ■

Obsérvese que la región angular  $T_{b - ma, b + ma}$  tiene como vértice el punto  $(a, b)$ , y que  $(x, y) \in T_{b - ma, b + ma}$  si y solo si  $m|x - a| + b \leq y$ . De nuevo, y como ocurrió con los casos de la topología de las rectas verticales, el criterio establecido en la proposición anterior, permite identificar los subconjuntos compactos de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{ra})$ , como aquellos conjuntos que se pueden “encajar” en una unión finita de regiones angulares como la de la figura 2.3.2 cuyos vértices pertenecen al conjunto. Veamos algunos ejemplos de subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^2$  con esta topología.

**Ejemplo 2.3.1.**

Figura 2.3.2: Ejemplo de un conjunto compacto de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{ra})$



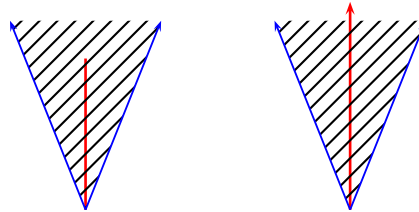
$A = \left\{ \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{ (0, -1) \}$ , es compacto, pues la región angular con vértice en  $(0, -1)$ , es decir  $T_{-1, -1}$ , solo deja “por fuera” un número finito de puntos de  $A$ ,

digamos  $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}), (\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1}), \dots, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 1)$ , de modo que los puntos  $(0, -1), (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}), \dots, (1, 1)$  satisfacen las condiciones de la proposición anterior.

### Ejemplo 2.3.2.

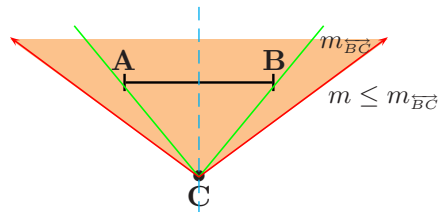
Todo segmento de recta vertical es un ejemplo, de subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$  con la topología de regiones angulares pues basta tomar el extremo inferior del segmento y ese solo punto satisface las condiciones la proposición 2.3.1. Análogamente toda semirecta vertical “hacia arriba”, es un compacto en la topología de regiones angulares.

Figura 2.3.3: Ejemplos de conjuntos compactos de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{ra})$



### Ejemplo 2.3.3.

Figura 2.3.4: Ejemplo de un conjunto compacto de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{ra})$

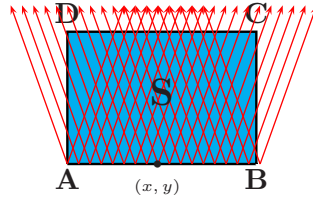


Sea  $S$  subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  formado por el segmento de recta horizontal  $\overline{AB}$  y el punto  $C$ , que se encuentra sobre la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$ , como se ve en la Figura 2.3.4. Entonces  $S$  es compacto si  $m$  es menor o igual a la pendiente de la recta que une a  $C$  con  $B$  es decir si  $m \leq m_{\overline{BC}}$ .

Ahora veamos un ejemplo de un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  no compacto con la topología de regiones angulares.

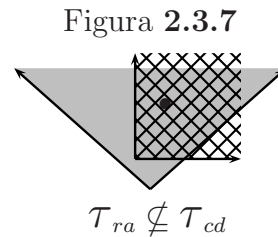
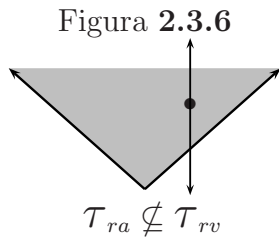
### Ejemplo 2.3.4.

Figura 2.3.5: Ejemplo de un conjunto no compacto de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{ra})$



Sea  $S$  igual al rectángulo de la Figura 2.3.5, entonces  $S \subset \mathbb{R}^2$ ,  $S$  no es compacto. En efecto si consideramos un recubrimiento por abiertos básicos tal que todo  $(x, y)$  que se encuentra sobre el segmento  $\overline{AB}$ , es el vértice de un abierto básico, entonces este recubrimiento no se puede reducir a un subrecubrimiento finito.

Comparando las topologías  $\mathcal{T}_{ra}$  y  $\mathcal{T}_{rv}$  tenemos que: si tomamos un abierto básico de la topología de regiones angulares y un punto, en este abierto básico no, es posible construir un abierto básico de la topología de las rectas verticales, tal que contenga el punto y esté totalmente contenido en la región angular; esto se puede observar en la Figura 2.3.6 por lo tanto  $\mathcal{T}_{ra} \not\subseteq \mathcal{T}_{rv}$ ; de manera parecida si tomamos una región angular y un punto en ésta, no es posible construir un abierto básico de la topología de colas a derecha en  $\mathbb{R}^2$  que contenga al punto y esté contenido en la región angular, de modo que  $\mathcal{T}_{ra} \not\subseteq \mathcal{T}_{cd}$  esto se observa en la Figura 2.3.7. Mediante razonamientos análogos se puede concluir que  $\mathcal{T}_u, \mathcal{T}_{cd}, \mathcal{T}_{rv}$ , y  $\mathcal{T}_{ra}$  no son comparables entre si.



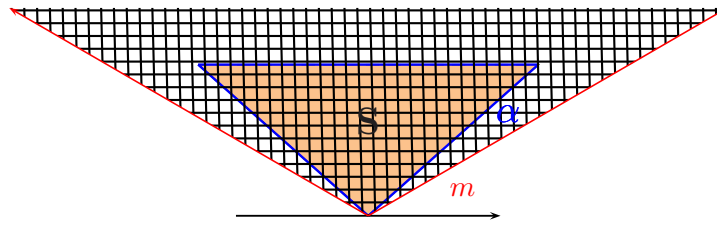
Para finalizar esta sección, consideremos una variante de la topología anterior, tomando ahora la pendiente  $m$  variable es decir los abiertos básicos de  $\mathcal{T}_{ra}^*$  son de la forma:

$$\mathcal{T}_{b,c}^m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid mx + b \leq y, \quad -mx + c \leq y\}$$

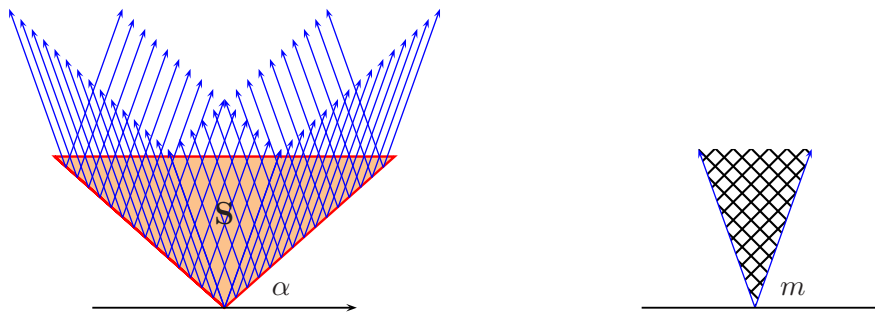
donde  $b, c, m \in \mathbb{R}, m > 0$ . Entonces se tiene que  $\mathcal{T}_{ra} \subseteq \mathcal{T}_{ra}^*$ , es decir  $\mathcal{T}_{ra}^*$  es más fina que  $\mathcal{T}_{ra}$  y por lo tanto todo subespacio compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{ra}^*)$  es compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{ra})$  pero no lo contrario. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

**Ejemplo 2.3.5.**

Figura 2.3.8



Sea  $S$  subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , formado por el triángulo sombreado que se ve en la Figura 2.3.8, entonces  $S$  es compacto si y solo si la pendiente  $\alpha$  de los segmentos laterales que forman el triángulo  $S$ , es mayor o igual a la pendiente  $m$ , que define la base  $\mathfrak{B}_m$  para la topología  $\mathcal{T}_{ra}$ ; mientras que en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{ra}^*)$   $S$  no es compacto para toda pendiente  $\alpha$ ; pues si consideramos un recubrimiento por abiertos básicos de  $\mathcal{T}_{ra}^*$ , para un  $m$  mayor que  $\alpha$ , tal que cada  $(x, y)$  que se encuentra sobre los segmentos que forman el triángulo  $S$ , es vértice de un abierto básico del recubrimiento, entonces es claro que este recubrimiento no se puede reducir a uno finito; luego  $S$  no es compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{ra}^*)$ , la Figura 2.3.9 muestra un bosquejo de lo que sucede en este caso.

Figura 2.3.9: Ejemplo de un conjunto no compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{ra}^*)$ 

## 2.4. Topología de cuadrados centrados en el origen

Ahora consideremos el espacio topológico  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ , donde  $\mathcal{T}$  es la topología generada por la base  $\mathfrak{B} = \{(-a, a) \times (-a, a) \mid a \in \mathbb{R}^+\}$ . Veamos que  $\mathfrak{B}$  en efecto una base para una topología de  $\mathbb{R}^2$ , es decir probemos que  $\mathfrak{B}$  cumple:

i)  $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} (-a, a) \times (-a, a)$ ;

ii) si  $A = (-a, a) \times (-a, a)$ ,  $B = (-b, b) \times (-b, b)$  y  $(x, y) \in A \cap B$ , entonces existe  $c \in \mathbb{R}^+$  tal que  $(x, y) \in (-c, c) \times (-c, c) \subseteq A \cap B$ .

Para probar la parte **i)** tomemos un punto  $(x, y)$  y  $\epsilon > 0$  entonces, si hacemos  $a_0 = \text{máx}\{|x|, |y|\} + \epsilon$ , podemos construir  $(-a_0, a_0) \times (-a_0, a_0)$  tal que  $(x, y) \stackrel{?}{\in} (-a_0, a_0) \times (-a_0, a_0)$ . En efecto:

$$|x| < a_0 \Leftrightarrow -a_0 < x < a_0 \Leftrightarrow x \in (-a_0, a_0)$$

$$|y| < a_0 \Leftrightarrow -a_0 < y < a_0 \Leftrightarrow y \in (-a_0, a_0)$$

entonces  $(x, y) \in (-a_0, a_0) \times (-a_0, a_0) \subseteq \bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} (-a, a) \times (-a, a)$

La contención  $\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} (-a, a) \times (-a, a) \subseteq \mathbb{R}^2$  es inmediata dado que  $\mathbb{R}^2$  es el conjunto universal. Ahora probemos la parte **ii)**:

como  $(x, y) \in (-a, a) \times (-a, a) \wedge (x, y) \in (-b, b) \times (-b, b)$  entonces tenemos:

$$-a < x < a \wedge -b < x < b \wedge -a < y < a \wedge -b < y < b$$

Sea  $c = \text{mín}\{a, b\}$  entonces  $-c < x < c$  y  $-c < y < c$  lo que significa que  $(x, y) \in (-c, c) \times (-c, c)$ . Veamos que  $(-c, c) \times (-c, c) = A \cap B$ .

Sea  $(p, q) \in (-c, c) \times (-c, c)$  entonces:

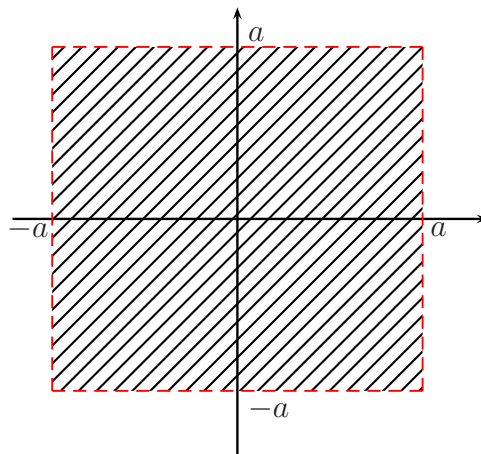
$$-a \leq -c < p < c \leq a \wedge -a \leq -c < q < c \leq a$$

$$-b \leq -c < p < c \leq b \wedge -b \leq -c < q < c \leq b$$

entonces  $(p, q) \in (-a, a) \times (-a, a)$  y  $(p, q) \in (-b, b) \times (-b, b) \Rightarrow (p, q) \in A \cap B$ .

La otra contención se prueba análogamente a como se hizo para el punto  $(x, y)$ ; por lo tanto  $\mathfrak{B}$  es base para una topología de  $\mathbb{R}^2$ . A esta topología la llamaremos, **topología de cuadrados centrados en el origen** y la notaremos por:  $\mathcal{T}_{cco}$ . Los abiertos básicos de  $\mathcal{T}_{cco}$  los podemos ver gráficamente así:

Figura 2.4.1: Abierto básico de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cco})$



Una caracterización de los compactos en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cco})$  es la que sigue:

**Proposición 2.4.1.**  *$A \subseteq \mathbb{R}^2$  es compacto en la topología de cuadrados centrados en el origen, si y solo si existe  $P = (a, b) \in A$ , tal que, para todo  $(x, y) \in A$ , se tiene que,*

**i)**  $|x| \leq |a|$  y  $|y| \leq |a|$  o **ii)**  $|x| \leq |b|$  y  $|y| \leq |b|$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$  Para  $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ , sea  $V_{\alpha, \epsilon} = (-\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) \times (-\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ . Para todo  $(x, y) \in A$ , sea  $m(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$ . Entonces la familia  $\{V_{m(x, y), \epsilon}\}$  es un recubrimiento por abiertos básicos de  $A$ . Como  $A$  es compacto, este recubrimiento se reduce a un subrecubrimiento finito, es decir,

$$A \subseteq V_{m(x_1, y_1), \epsilon} \cup \dots \cup V_{m(x_n, y_n), \epsilon}.$$

Como los  $V_{m(x, y), \epsilon}$  están encajados, existe alguno que contiene a todos, es decir,

$$A \subseteq V_{m(x_r, y_r), \epsilon} \quad \text{para algún } r, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Entonces tomando  $(a, b) = (x_r, y_r)$ , se tiene que para todo  $(x, y) \in A$ ,  $(x, y) \in V_{m(x, y), \epsilon}$ , es decir  $(x, y) \in (-m(x, y) - \epsilon, m(x, y) + \epsilon) \times (-m(x, y) - \epsilon, m(x, y) + \epsilon)$ .

Como  $m(a, b) = |a|$  ó  $|b|$  y  $\epsilon$  es arbitrario, se concluye que  $|x| \leq |a|$  y  $|y| \leq |a|$  ó  $|x| \leq |b|$  y  $|y| \leq |b|$ .

$\Rightarrow$  Sea  $\left\{(-a_\alpha, a_\alpha) \times (-a_\alpha, a_\alpha) \mid a_\alpha \in \mathbb{R}\right\}_{\alpha \in \Delta}$  un recubrimiento de  $A$  por abiertos básicos, es decir:

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} (-a_\alpha, a_\alpha) \times (-a_\alpha, a_\alpha).$$

Como  $P = (a, b) \in A$  entonces  $(a, b) \in (-a_{\alpha_0}, a_{\alpha_0}) \times (-a_{\alpha_0}, a_{\alpha_0})$  para algún  $\alpha_0 \in \Delta$  y tenemos que:

$$\begin{aligned} -a_{\alpha_0} < a < a_{\alpha_0} & \quad \text{y} & \quad -a_{\alpha_0} < b < a_{\alpha_0} \\ \Rightarrow -a_{\alpha_0} < -a & \quad \text{y} & \quad -a_{\alpha_0} < -b. \end{aligned}$$

Veamos que  $A \subseteq (-a_{\alpha_0}, a_{\alpha_0}) \times (-a_{\alpha_0}, a_{\alpha_0})$ . Sea  $(x, y) \in A$ , por hipótesis se tiene **i)  $\vee$  ii).**

Si **i)** entonces  $|x| \leq a \wedge |y| \leq a$  y por las desigualdades anteriores, se tiene:

$$-a_{\alpha_0} < -a \leq x \leq a < a_{\alpha_0} \quad \text{y} \quad -a_{\alpha_0} < -a \leq y \leq a < a_{\alpha_0}$$

luego  $-a_{\alpha_0} < x < a_{\alpha_0}$  y  $-a_{\alpha_0} < y < a_{\alpha_0}$  de modo que

$$(x, y) \in (-a_{\alpha_0}, a_{\alpha_0}) \times (-a_{\alpha_0}, a_{\alpha_0}).$$

Si **ii)** entonces  $|x| \leq b \wedge |y| \leq b$  y por las desigualdades anteriores, se tiene:

$$-a_{\alpha_0} < -b \leq x \leq b < a_{\alpha_0} \quad \text{y} \quad -a_{\alpha_0} < -b \leq y \leq b < a_{\alpha_0}$$

luego  $-a_{\alpha_0} < x < a_{\alpha_0}$  y  $-a_{\alpha_0} < y < a_{\alpha_0}$  de modo que

$$(x, y) \in (-a_{\alpha_0}, a_{\alpha_0}) \times (-a_{\alpha_0}, a_{\alpha_0}).$$

De esta manera el recubrimiento abierto inicial, se puede reducir a un subrecubrimiento finito (con solo un abierto!) y  $A$  es compacto. La otra implicación está demostrada en el artículo [1]. ■

Una caracterización geométrica de la afirmación anterior puede darse así:

**Afirmación 2.4.1.**  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  es compacto en la topología de cuadrados centrados en el origen, si y solo si  $M = \{ \|(a, b)\| \mid (a, b) \in A \}$  tiene máximo, donde  $\|(a, b)\| = \max\{|a|, |b|\}$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$  Por contradicción. Supóngase que  $A$  es compacto y  $M$  no tiene máximo. Hay dos posibilidades para  $M$ , si  $M$  no es acotado entonces  $A$  no es compacto.  $\rightarrow \leftarrow$

Si  $M$  es acotado entonces  $\sup M \notin M$ . Ahora para  $r \in \mathbb{R}$ , sea:

$$V_r = (-|r|, |r|) \times (-|r|, |r|),$$

se tiene que  $\{V_r \mid r < \sup M\}$  es un recubrimiento abierto de  $A$ , por tanto se reduce a subrecubrimiento finito, es decir,  $A \subseteq V_{r_1} \cup \dots \cup V_{r_n}$  y como estos abiertos están encajados se tiene que para algún  $t \in \{r_1, \dots, r_n\}$ ,  $A \subseteq V_t$ ,  $t < \sup M$ . Entonces para todo  $(a, b) \in A$ , se tiene que  $(a, b) \in V_t$ , es decir,  $\|(a, b)\| < t < \sup M$ .  $\rightarrow \leftarrow$

$\Leftarrow$ ] Sea  $T = \max M$ , entonces para todo  $(x, y) \in A$  se tiene que  $|x| \leq T \wedge |y| \leq T$ . Existe  $(a, b) \in A$  tal que  $T = \|(a, b)\|$  entonces para todo  $(x, y) \in A$  se cumple que  $\|(x, y)\| \leq T = \|(a, b)\| \iff \max\{|x|, |y|\} \leq T$ . Pero  $T = \max\{|a|, |b|\}$  y tenemos dos casos:

**i)** Si  $T = |a| \implies \max\{|x|, |y|\} \leq |a| \implies |x| \leq |a| \wedge |y| \leq |a|$

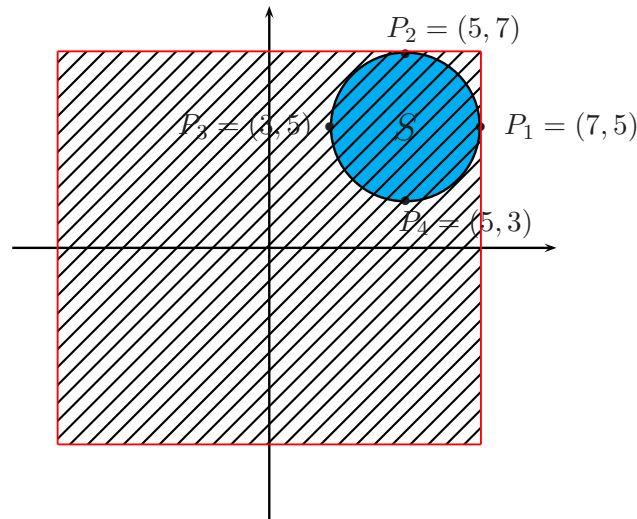
ii) Si  $T = |b| \implies \max\{|x|, |y|\} \leq |b| \implies |x| \leq |b| \wedge |y| \leq |b|$

entonces  $P = (a, b)$  cumple la condición de la Proposición 2.4.1, luego  $A$  es compacto. ■

De esta manera un subconjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  es compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cco})$ , si y solo si es posible encontrar un punto  $P = (a, b) \in A$ , tal que  $A$  queda contenido en el cuadrado **cerrado** de centro en el origen y lado  $2\|(a, b)\|$ . A continuación presentamos algunos ejemplos de subespacios compactos en esta topología.

### Ejemplo 2.4.1.

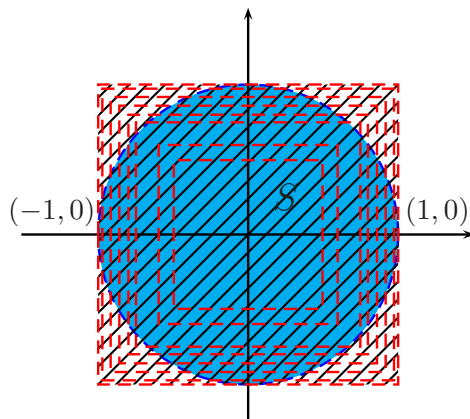
Figura 2.4.2: Ejemplo de un conjunto compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cco})$



Sea  $S$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  formado por una región circular, como la de la figura 2.4.2, disco cerrado de centro en  $P = (5, 5)$  y radio 2, es un conjunto compacto en la topología de cuadrados centrados en el origen, pues basta tomar el punto  $P_1$  (o también serviría  $P_2$ ) el cual cumple las condiciones de la Afirmación 2.4.1. Además  $S$  es un conjunto no abierto y no cerrado, mientras que  $S$  con la topología usual de  $\mathbb{R}^2$  es un conjunto cerrado.

### Ejemplo 2.4.2.

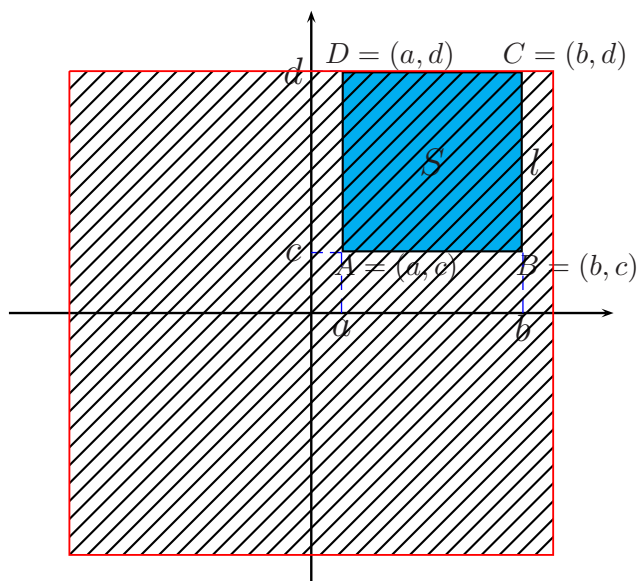
Si en el ejemplo anterior se tomara el disco “abierto”, es decir sin los puntos de la circunferencia, entonces  $S$  sería no compacto. Por ejemplo si  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , entonces  $\left\{(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}) \times (-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un recubrimiento abierto de  $S$  que no se puede reducir a un subrecubrimiento finito ver Figura 2.4.3.

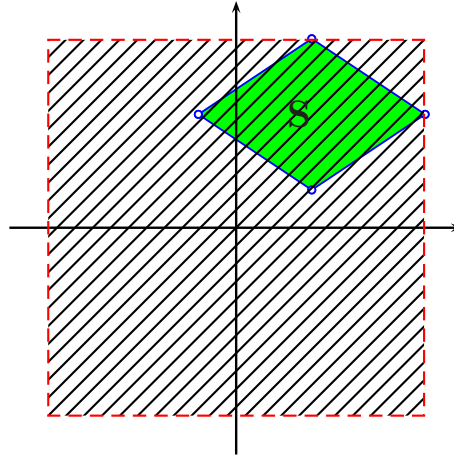
Figura 2.4.3: Ejemplo de un conjunto no compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cco})$ 

$$S \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = (-1, 1) \times (-1, 1)$$

**Ejemplo 2.4.3.**

Sea  $S$  el cuadrado sombreado que se ve en la figura 2.4.4, entonces  $S$  es un conjunto compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cco})$ , pues cualquier punto  $(x, y)$  que este sobre el segmento de recta  $\overline{DC}$  cumple las condiciones de la Afirmación 2.4.1.

Figura 2.4.4: Ejemplo de un conjunto compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cco})$ 

**Ejemplo 2.4.4.**Figura 2.4.5: Ejemplo de un conjunto no compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cco})$ 

Sea  $S$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  como se ve en la Figura 2.4.5,  $S$  no es compacto pues no se puede determinar un punto  $P \in S$  que satisfaga las condiciones de la Afirmación 2.4.1, es decir no existe el máximo del conjunto  $M = \{\|(a, b)\| \mid (a, b) \in S\}$ , tal que el cuadrado “cerrado” con centro en el origen y lado  $2\|P\|$  contenga a  $S$ , además  $S$  es un conjunto no cerrado en la topología  $\mathcal{T}_{cco}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Al igual que en la topología de colas a derecha en el plano, en este caso “ser compacto” implica “ser **no** cerrado”

**Proposición 2.4.2.** *En  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cco})$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $A$  compacto entonces  $A$  es no cerrado.*

*Demostración.*

Por hipótesis existe  $P = (a, b) \in A$  tal que  $\forall (x, y) \in A$  se tiene que

$$|x| \leq |a| \quad \wedge \quad |y| \leq |a| \quad \text{o} \quad |x| \leq |b| \quad \wedge \quad |y| \leq |b|$$

entonces podemos considerar los dos casos:

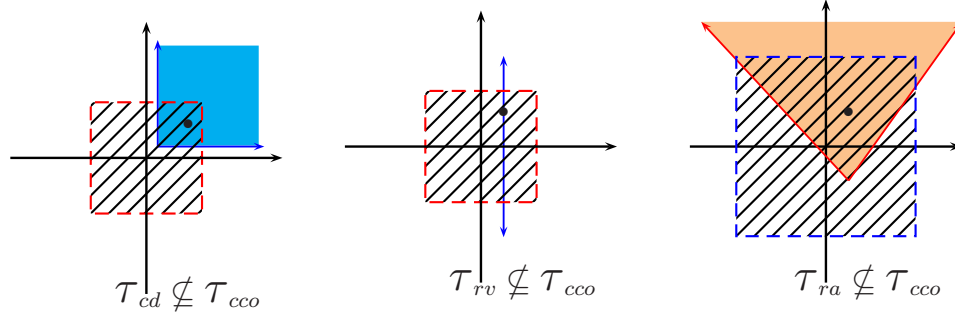
- i) Si  $|a| = \max\{\max\{|x|, |y|\} \mid (x, y) \in A\} \implies (x, y) \in [-|a|, |a|] \times [-|a|, |a|]$
- ii) Si  $|b| = \max\{\max\{|x|, |y|\} \mid (x, y) \in A\} \implies (x, y) \in [-|b|, |b|] \times [-|b|, |b|]$

Supongamos que  $A$  es cerrado y que tenemos el primer caso; entonces  $\mathbb{R}^2 - A$  es abierto. Sea  $(a, y) \in \mathbb{R}^2 - A$  tal que  $|a| < |y|$ . Existe  $t \in \mathbb{R}^+$ , tal que,

$(a, y) \in (-t, t) \times (-t, t) \subseteq \mathbb{R}^2 - A$  luego tenemos que  $|a| < t \wedge |b| \leq |a| < t$   
 $\implies (a, b) \in (-t, t) \times (-t, t) \subseteq \mathbb{R}^2 - A \implies (a, b) \notin A \rightarrow \leftarrow$ ,  
 luego  $A$  no es cerrado. Análogamente si se considera el segundo caso. ■

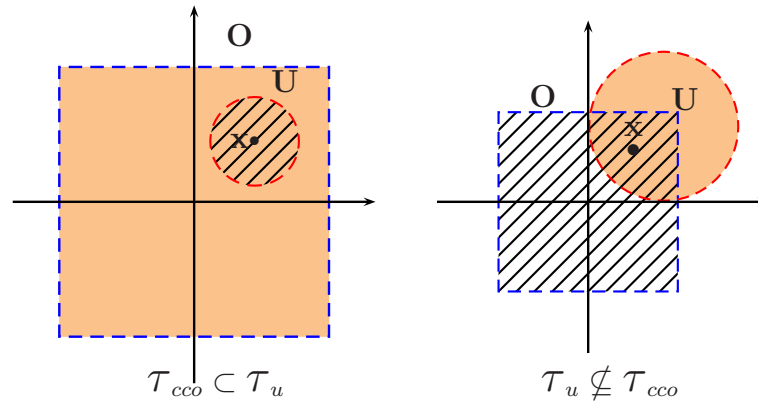
La anterior proposición nos muestra que en esta topología ningún subespacio cerrado es compacto. El recíproco no se tiene y el Ejemplo 2.4.4 nos ilustra esta situación. Ahora se comparan las topologías  $\mathcal{T}_{cd}$ ,  $\mathcal{T}_{rv}$ ,  $\mathcal{T}_{ra}$  con la topología  $\mathcal{T}_{cco}$  nuevamente esto se hará de forma gráfica para mayor entendimiento la Figura 2.4.6 muestra que estas topologías no son comparables dos a dos.

Figura 2.4.6: Comparando las topologías  $\mathcal{T}_{cd}$ ,  $\mathcal{T}_{rv}$ ,  $\mathcal{T}_{ra}$ , con  $\mathcal{T}_{cco}$



Obsérvese que la topología usual de  $\mathbb{R}^2$  es estrictamente más fina, que la topología de cuadrados centrados en el origen de  $\mathbb{R}^2$ , es decir  $\mathcal{T}_{cco} \subset \mathcal{T}_u$ , esto significa que dado un abierto  $O$  en la topología en  $\mathcal{T}_{cco}$  y un punto  $x \in O$ , siempre es posible encontrar un abierto  $U$  en  $\mathcal{T}_u$  tal que  $x \in U \subset O$ , veamos esto gráficamente.

Figura 2.4.7:  $\mathcal{T}_u$  es estrictamente más fina que  $\mathcal{T}_{cco}$



---

## 2.5. Topología de complementos finitos

---

Ahora consideremos el espacio topológico  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  donde

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 \mid A^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}.$$

$\mathcal{T}$  se conoce como la **topología de los complementos finitos** y en lo que resta de este trabajo la notaremos por:  $\mathcal{T}_{cof}$ . Con esta topología todo subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  es compacto; esta caracterización no exige la existencia de un subconjunto finito de puntos de  $A$  que cumpla alguna condición especial sobre los demás puntos de  $A$ ; es más esta caracterización no exige nada, basta ser subconjunto del espacio para ser compacto.

**Proposición 2.5.1.** *En  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cof})$  todo  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  es compacto.*

*Demostración.*

Si  $A = \emptyset$ ,  $A$  es compacto. Si  $A \neq \emptyset$ , sea  $\{G_i\}_{i \in I}$  un recubrimiento abierto de  $A$ , entonces para  $x \in A$ , existe un  $i_0 \in I$ , tal que,  $x \in G_{i_0}$ .

Ahora  $G_{i_0}^c = \{y_1, \dots, y_n\}$ , por lo tanto, si alguno de los  $y_i \in A$ , entonces, existe  $G_{i_j}$ , tal que  $y \in G_{i_j}$ , y se tendría entonces  $A \subseteq \bigcup_{j=0}^n G_{i_j}$ . ■

$\mathbb{R}^2$  es un ejemplo de conjunto compacto con la topología de complementos finitos; mientras que con la topología usual de  $\mathbb{R}^2$  no lo es y tampoco lo es con ninguna de las de las topologías vistas en las secciones anteriores. En esta topología podemos afirmar que si  $A \subsetneq \mathbb{R}^2$  es un conjunto compacto cerrado entonces es finito.

Es intuitivamente claro que un conjunto finito debe ser compacto (en cualquier topología). Veamos:

**Proposición 2.5.2.**  *$(X, \mathcal{T})$  espacio topológico. Entonces todo subespacio finito de  $X$  es compacto.*

*Demostración.*

Sea  $A \subseteq X$ ,  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ; si  $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} O_\alpha$ , donde  $O_\alpha \in \mathcal{T}$ , entonces para cada  $x_i \in A$  existe  $O_{\alpha_i}$ , para algún  $\alpha_i \in \Delta$ , tal que  $x_i \in O_{\alpha_i}$ , entonces  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_{\alpha_i}$  por lo tanto  $A$  es compacto. ■

Es claro que el recíproco de la proposición anterior no se cumple; sin embargo, existen espacios topológicos donde “ser compacto” es equivalente a “ser finito”, estos espacios

reciben el nombre de **anti-compactos** (ver [3]). La proposición que sigue muestra un ejemplo de esta situación.

**Proposición 2.5.3.** *Sea  $(X, \mathcal{T}_{discreta})$  espacio discreto, entonces  $A \subseteq X$  es compacto si y solo si  $A$  es finito.*

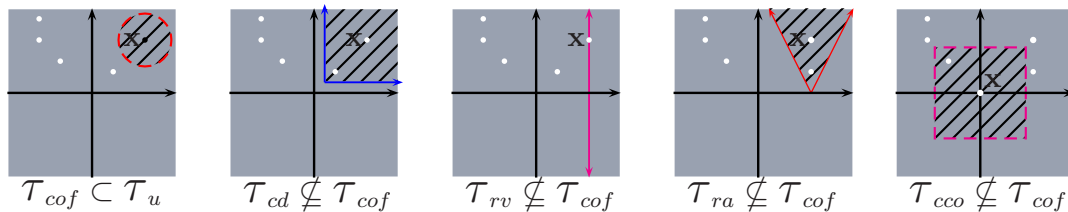
*Demostración.*

$\Rightarrow$ ] Sea  $A \subseteq X$ ,  $A \neq \emptyset$  compacto. Sea  $\{\{x\}\}_{x \in X}$  recubrimiento abierto de  $A$  es decir  $A \subseteq \bigcup_{x \in X} \{x\}$ . Como  $A$  es compacto existen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tales que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}$  entonces  $A$  es finito.

$\Leftarrow$ ] Se tiene por la proposición 2.5.2. ■

Al comparar  $\mathcal{T}_{cof}$  con las otras topologías vistas ( $\mathcal{T}_u$ ,  $\mathcal{T}_{cd}$ ,  $\mathcal{T}_{rv}$ ,  $\mathcal{T}_{ra}$ , y  $\mathcal{T}_{cco}$ ) se concluye que  $\mathcal{T}_{cof}$  es estrictamente menos fina que  $\mathcal{T}_u$  ( $\mathcal{T}_{cof} \subset \mathcal{T}_u$ ) mientras que con cada una de las otras es **no** comparable, las siguientes gráficas ilustran mejor esta situación.

Figura 2.5.1: Comparando  $\mathcal{T}_{cof}$  con las demás topologías.




---

## 2.6. Topología del punto incluido

---

Consideremos el espacio topológico  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_p)$ , donde  $\mathcal{T}_P = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p \in A\} \cup \{\emptyset\}$ ,  $\mathcal{T}_P$  se conoce como **topología del punto incluido**. Con esta topología  $\mathbb{R}^2$  es anti-compacto, es decir:

**Proposición 2.6.1.** *En  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_P)$  un conjunto  $A$  es compacto si y solo si  $A$  es finito.*

*Demostración.*

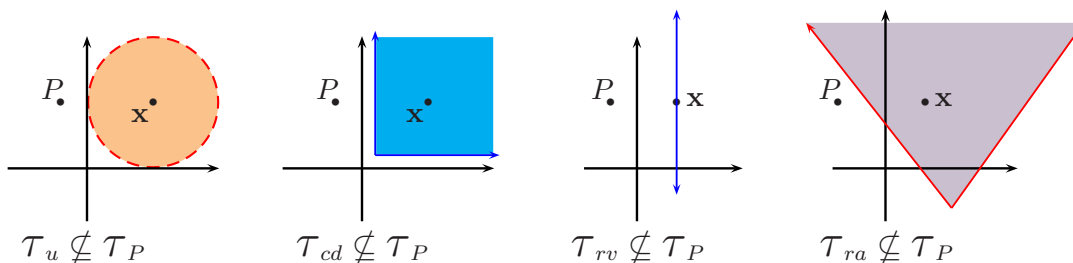
$\Rightarrow$ ] Por contradicción. Supóngase que  $A$  es compacto e infinito. La familia  $\{p, q\}_{q \in A}$  es un recubrimiento abierto de  $A$  y por tanto se reduce a un subrecubrimiento finito, es

decir,  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{p, q_i\}$  y ésto quiere decir que  $A$  es finito.  $\rightarrow\leftarrow$ .

La otra implicación se tiene como un caso particular de la proposición 2.5.2. ■

La topología del punto incluido no es comparable con ninguna de las topologías de las secciones anteriores, esto lo podemos ver en la Figura 2.6.1.

Figura 2.6.1: Comaprando  $\mathcal{T}_P$  con las demás topologías



## 2.7. Topología del punto excluido

Sea el espacio topológico  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^P)$ , donde  $\mathcal{T}^P = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 \mid P \notin A\} \cup \{\mathbb{R}^2\}$ .  $\mathcal{T}^P$  se conoce como **topología del punto excluido**.

La siguiente caracterización de los conjuntos compactos en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^P)$  involucra la existencia de un subconjunto finito de puntos del conjunto, pero esta vez sin ninguna condición especial sobre los demás puntos del conjunto.

**Proposición 2.7.1.** *En  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^P)$  un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  es compacto si y solo si  $P \in A$  o  $A$  es finito.*

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ] Por contradicción. Supóngase que  $A$  es compacto  $p \notin A$  y  $A$  es infinito. Como  $p \notin A$ , entonces  $A \subseteq \mathbb{R}^2 - \{p\}$  y la topología en este subespacio es la discreta, por lo tanto,  $A$  es finito.  $\rightarrow\leftarrow$ .

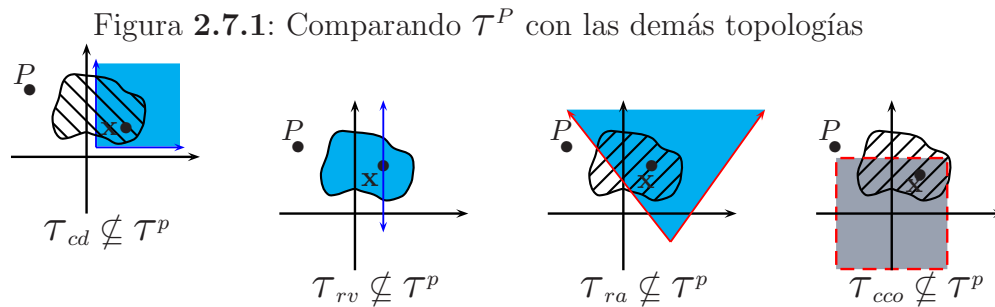
$\Leftarrow$ ] Si  $A$  es finito, entonces  $A$  es compacto por la Proposición 2.5.2. Si  $P \in A$ , veamos que  $A$  es compacto. Sea  $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  recubrimiento abierto de  $A$  entonces  $A \subseteq \bigcup_\alpha O_\alpha$  luego  $P \in O_{\alpha_0}$  para algún  $\alpha_0$ ; pero el único abierto en el cual está  $P$  es  $\mathbb{R}^2$ , por tanto  $O_{\alpha_0} = \mathbb{R}^2$  y claramente  $A \subseteq \mathbb{R}^2 = O_{\alpha_0}$ . ■

Puesto que los cerrados en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^P)$  son exactamente  $\emptyset$  y todos los conjuntos que contienen a  $P$ , entonces todo cerrado será compacto; sin embargo cualquier conjunto finito que no contenga a  $P$  será compacto pero no cerrado, es decir se tiene el siguiente:

**Corolario 2.7.1.** *En  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^P)$ :*

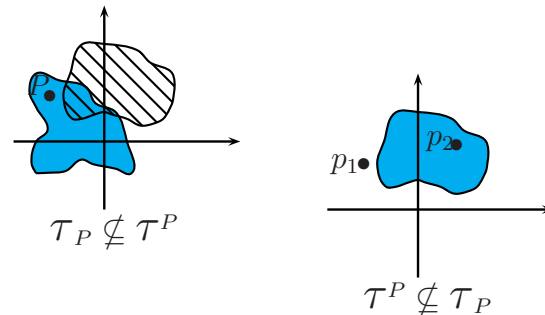
- i)  $\mathbb{R}^2$  es compacto.*
- ii) Todo cerrado es compacto pero no recíprocamente.*

Para concluir esta sección, solo nos resta comparar la topología del punto excluido con las demás topologías vistas en las secciones anteriores, nuevamente lo vamos a mostrar de manera gráfica como sigue.



Algunas gráficas muestran que las topologías  $\mathcal{T}_u$ ,  $\mathcal{T}_{cd}$ ,  $\mathcal{T}_{rv}$ ,  $\mathcal{T}_{ra}$ ,  $\mathcal{T}_{cco}$ ,  $\mathcal{T}_{cof}$ , y  $\mathcal{T}_P$  no son comparables con la topología del punto excluido; para comparar las topologías  $\mathcal{T}_P$ ,  $\mathcal{T}^P$  vamos a considerara dos casos, el primero, cuando el punto  $P$  coincide en las dos topologías y segundo cuando el punto  $P$  es distinto, la siguiente figura muestra las dos situaciones, y se ve que  $\mathcal{T}_P$  y  $\mathcal{T}^P$  no son comparables.

Figura 2.7.2:  $\mathcal{T}_P$  y  $\mathcal{T}^P$  **no** son comparables



# CAPÍTULO 3

## S-TOPOLOGÍAS, PRE-ÓRDENES Y COMPACIDAD

En el capítulo anterior, la caracterización de los subespacios compactos de los casos vistos en las Secciones: 2.1, 2.2 y 2.3, implicó la existencia de un conjunto finito de puntos del subespacio, que cumplieran una condición especial respecto a los demás puntos del conjunto. Ahora se analizará este hecho desde un punto de vista más general; se verá que las topologías  $\mathcal{T}_{cd}$ ,  $\mathcal{T}_{rv}$ , y  $\mathcal{T}_{ra}$  del capítulo anterior son ejemplos de cierta clase de topologías, llamadas *S-topologías* (topologías saturadas). Se establecerá entonces una caracterización de los subespacios compactos de  $\mathbb{R}^2$  con las *S-topologías*, Teorema 3.4.1.

---

### 3.1. S-topologías

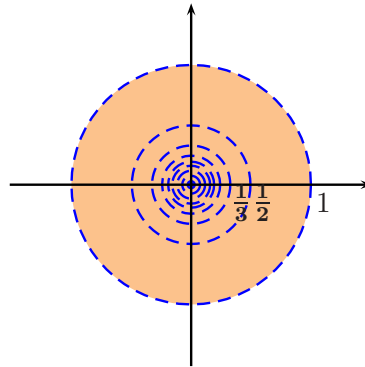
---

Se sabe que en general la intersección arbitraria de abiertos no necesariamente es un conjunto abierto, por ejemplo en el espacio  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$  la intersección de la familia de bolas:

$$\mathfrak{F} = \left\{ B\left((0, 0); \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\bigcap \mathfrak{F} = \{(0, 0)\}$  que no es un abierto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ .

Figura 3.1.1: La intersección de abiertos puede no ser un abierto



Sin embargo, existen espacios donde si se cumple que la intersección de abiertos es un abierto como por ejemplo el espacio  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cd})$  visto en la sección 2.1. A continuación daremos la definición de lo que es una *S-topología*.

**Definición 3.1.1.** Una topología  $\mathcal{T}$  sobre un conjunto  $X$  se dice *S-topología*, si la intersección arbitraria de abiertos es un abierto.

Estas topologías también se conocen como **topologías de Alexandrov, topologías principales, topologías MA o topologías saturadas** (la “S” hace referencia a “saturated” que significa en español “saturado”). Las siguientes proposiciones son consecuencias de la definición de *S-topología*.

Recordemos que si  $\mathcal{T}$  es una topología entonces  $\overline{\mathcal{T}}$  denota la familia de los cerrados de  $\mathcal{T}$ . El siguiente lema es una propiedad que se da en toda *S-topología*.

**Lema 3.1.1.**  $(X, \mathcal{T})$  una *S-topología*,  $\forall x \in X$ , existe el “menor abierto” que contiene a  $x$  (e.d. existe  $\mathcal{M}_x \in \mathcal{T}$ , tal que  $x \in \mathcal{M}_x$  y si  $O$  es abierto y  $x \in O \Rightarrow \mathcal{M}_x \subseteq O$ ).

*Demostración.*

Basta definir:

$$\mathcal{M}_x := \bigcap \{O \in \mathcal{T} \mid x \in O\}. \quad \blacksquare$$

**Proposición 3.1.1.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $\overline{\mathcal{T}}$  es topología si y solo si  $\mathcal{T}$  es *S-topología*.

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ] Sea  $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  una familia de elementos de  $\mathcal{T}$ , luego para cada  $\alpha \in \Delta$  se tiene que  $O_\alpha^c \in \overline{\mathcal{T}}$  y por tanto:

$$\bigcup_{\alpha \in \Delta} O_\alpha^c \in \overline{\mathcal{T}} \quad \text{entonces} \quad \left( \bigcup_{\alpha \in \Delta} O_\alpha^c \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Delta} O_\alpha \in \mathcal{T}$$

luego  $\mathcal{T}$  es *S-topología*.

$\Leftarrow$ ] Veamos que  $\overline{\mathcal{T}}$  cumple los axiomas de un espacio topológico:

(*ET*<sub>1</sub>) Se sabe que,  $\emptyset$  y  $X$  son conjuntos abiertos y cerrados en todo espacio topológico por lo tanto  $\emptyset, X \in \overline{\mathcal{T}}$ .

(*ET*<sub>2</sub>) Sean  $F_1, F_2 \in \overline{\mathcal{T}}$ , entonces veamos que la intersección  $F_1 \cap F_2 \in \overline{\mathcal{T}}$ . Como  $F_1^c \in \mathcal{T}$  y  $F_2^c \in \mathcal{T}$ , se tiene que  $F_1^c \cup F_2^c = (F_1 \cap F_2)^c \in \mathcal{T}$  luego,

$$\left( (F_1 \cap F_2)^c \right)^c = F_1 \cap F_2 \in \overline{\mathcal{T}}.$$

(*ET*<sub>3</sub>) Sea  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  una familia de elementos de  $\overline{\mathcal{T}}$ , para cada  $\alpha$  se tiene que,  $F_\alpha^c \in \mathcal{T}$  y como  $\mathcal{T}$  es *S-topología* entonces:

$$\bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha^c \in \mathcal{T} \quad \text{y como} \quad \left( \bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha^c \right) = \left( \bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \right)^c \in \mathcal{T} \Rightarrow \left( \left( \bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \right)^c \right)^c = \bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \in \overline{\mathcal{T}}.$$

Así la unión arbitraria de cerrados es cerrada, por lo tanto  $\overline{\mathcal{T}}$  es topología. ■

La anterior proposición nos dice que las *S-topologías* de un conjunto  $X$  son exactamente aquellas topologías para las cuales la familia de cerrados es también una topología de  $X$ . La siguiente proposición nos dice cuando la familia de cerrados es una *S-topología*.

**Proposición 3.1.2.**  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $\overline{\mathcal{T}}$  es *S-topología* si y solo si  $\overline{\mathcal{T}}$  es topología.

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ] Esta implicación es inmediata y se tiene, por la definición de *S-topología*; es decir ya se está asumiendo que  $\overline{\mathcal{T}}$  es topología.

$\Leftarrow$ ] Sea  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  una familia de elementos de  $\overline{\mathcal{T}}$ , como  $\overline{\mathcal{T}}$  es topología entonces  $\bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \in \overline{\mathcal{T}}$  y para todo  $\alpha \in \Delta$   $F_\alpha^c \in \mathcal{T}$  luego se tiene que:

$$\bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha^c = \left( \bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \right)^c \in \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad \left( \left( \bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \right)^c \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \in \overline{\mathcal{T}}$$

así la intersección arbitraria de elementos de  $\overline{\mathcal{T}}$  es nuevamente un elemento de  $\overline{\mathcal{T}}$ , por lo tanto  $\overline{\mathcal{T}}$  es *S-topología*. ■

En resumen:

**Corolario 3.1.1.**  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i)  $\mathcal{T}$  es *S-topología*;

(ii)  $\overline{\mathcal{T}}$  es *S-topología*;

(iii)  $\overline{\mathcal{T}}$  es topología.

**Proposición 3.1.3.**  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico y  $\mathfrak{B}$  una base para  $\mathcal{T}$ . Si la intersección de abiertos básicos es nuevamente un abierto, entonces la intersección de abiertos es abierto.

*Demostración.*

Sea  $\{O_i\}_{i \in I}$  una familia de abiertos, entonces  $O_i = (\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}^i)$  para cada  $i$ , donde  $A_{\alpha}^i$  es abierto básico, tenemos:

$$\bigcap_{i \in I} O_i = \bigcap_{i \in I} (\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}^i) = \bigcup_{\alpha} (\bigcap_{i \in I} A_{\alpha}^i)$$

en efecto:

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i \in I} (\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}^i) &\iff x \in \bigcup_{i \in I} A_{\alpha}^i \quad \forall i \in I \\ &\iff x \in A_{\alpha_0}^i \quad \text{para algún } \alpha_0, \quad \forall i \in I \\ &\iff x \in \bigcap_{i \in I} A_{\alpha_0}^i \quad \text{para algún } \alpha_0 \\ &\iff x \in \bigcup_{\alpha} (\bigcap_{i \in I} A_{\alpha}^i). \end{aligned}$$

Por hipótesis, para cada  $\alpha$  se tiene que  $\bigcap_{i \in I} A_{\alpha}^i \in \mathcal{T}$ , por tanto  $\bigcap_{i \in I} O_i$  es unión de abiertos. ■

---

## 3.2. Ejemplos de S-topologías

---

Ahora estamos en condiciones de probar que las topologías de las Secciones 2.1, 2.2 y 2.3 son *S-topologías* sobre  $\mathbb{R}^2$ , para lo cual probaremos que la intersección de

abiertos básicos es nuevamente un abierto básico y esto será suficiente en virtud de la Proposición 3.1.3.

**Afirmación 3.2.1.** *La topología  $\mathcal{T}_{cd}$  de colas a derecha en  $\mathbb{R}^2$  es una S-topología.*

*Demostración.*

Sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  una familia de abiertos básicos; veamos que  $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \in \mathcal{T}_{cd}$ , donde  $A_\alpha := [a_\alpha, \infty) \times [b_\alpha, \infty)$ ,  $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}$ . Consideremos los conjuntos  $H$  y  $T$  tales que,  $H = \{a_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  y  $T = \{b_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  entonces:

- i) Si  $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \neq \emptyset$  existe  $(x_0, y_0) \in A_\alpha \quad \forall \alpha \in \Delta$ , luego  $a_\alpha \leq x_0$  y  $b_\alpha \leq y_0 \quad \forall \alpha \in \Delta$ .  
Como  $H \neq \emptyset$  y  $T \neq \emptyset$  y acotados superiormente, existen  $\sup H$  y  $\sup T$  tales que:

$$\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha = [\sup H, \infty) \times [\sup T, \infty).$$

En efecto sea  $(x, y) \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \Rightarrow (x, y) \in [a_\alpha, \infty) \times [b_\alpha, \infty)$ ,  $\forall \alpha \in \Delta$   
 $\Rightarrow a_\alpha \leq x \wedge b_\alpha \leq y \quad \forall \alpha \in \Delta$ , luego  $x$  es cota superior de  $H$  e  $y$  es cota superior de  $T$ , entonces  $\sup H \leq x \wedge \sup T \leq y$  de modo que

$$(x, y) \in [\sup H, \infty) \times [\sup T, \infty).$$

Recíprocamente sea  $(x, y) \in [\sup H, \infty) \times [\sup T, \infty) \Rightarrow a_\alpha \leq \sup H \leq x$  y  $b_\alpha \leq \sup T \leq y \quad \forall \alpha \in \Delta \Rightarrow (x, y) \in A_\alpha \quad \forall \alpha \Rightarrow (x, y) \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ .

- ii) Si  $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha = \emptyset$  es inmediato por que  $\emptyset \in \mathcal{T}_{cd}$ . ■

Consideremos ahora el espacio topológico  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{rv})$  donde  $\mathcal{T}_{rv}$  es la topología de las rectas verticales, generada por la base  $\mathfrak{B} = \{\{x\} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

**Afirmación 3.2.2.**  *$\mathcal{T}_{rv}$  es S-topología sobre  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demostración.*

Sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  una familia de abiertos básicos, entonces veamos que  $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \in \mathcal{T}_{rv}$  donde:  $A_\alpha = \{a_\alpha\} \times \mathbb{R}$ ,  $a_\alpha \in \mathbb{R}$ .

- i) Si  $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \neq \emptyset$ , existe  $(x_0, y_0) \in A_\alpha$ ,  $\forall \alpha \in \Delta \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha = \{x_0\} \times \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{rv}$ .

- ii) Si  $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha = \emptyset$  ya está! ■

Sea  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{ra})$  espacio topológico, donde  $\mathcal{T}_{ra}$  es la topología de regiones angulares definida en el capítulo anterior. Veamos que  $\mathcal{T}_{ra}$  es una *S-topología* para  $\mathbb{R}^2$ .

**Afirmación 3.2.3.**  $\mathcal{T}_{ra}$  es *S-topología* sobre  $\mathbb{R}^2$ .

*Demostración.*

Sea  $\{T_{b_\alpha, c_\alpha}\}_{\alpha \in \Delta}$  una familia de abiertos básicos. Consideremos los conjuntos  $H, S$  donde,  $H = \{b_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  y  $S = \{c_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ .

Si  $\bigcap T_{b_\alpha, c_\alpha} \neq \emptyset$ , entonces existe  $(x_0, y_0) \in T_{b_\alpha, c_\alpha} \quad \forall \alpha \in \Delta$ .

Tenemos  $mx_0 + b_\alpha \leq y_0$ ,  $\wedge$ ,  $-mx_0 + c_\alpha \leq y_0$  de lo cual  $b_\alpha \leq y_0 - mx_0$  y  $c_\alpha \leq y_0 + mx_0$ ,  $\forall \alpha \in \Delta$ , luego  $H$  y  $S$  están acotados superiormente entonces existen  $\sup H$  y  $\sup S$ . Ahora afirmamos que:

$$\bigcap_{\alpha \in \Delta} T_{b_\alpha, c_\alpha} = T_{\sup H, \sup S}.$$

En efecto, sea  $(x, y) \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} T_{b_\alpha, c_\alpha}$  entonces  $mx + b_\alpha \leq y$ ,  $\wedge$ ,  $-mx + c_\alpha \leq y$  para todo  $\alpha$ , luego  $b_\alpha \leq y - mx$ ,  $\wedge$ ,  $c_\alpha \leq y + mx$  y se tiene que:

i)  $y - mx$  es una cota superior de  $H$ , entonces  $mx + \sup H \leq y$ .

ii)  $y + mx$  es una cota superior de  $S$ , entonces  $-mx + \sup S \leq y$

de i), ii) tenemos que  $(x, y) \in T_{\sup H, \sup S}$

Recíprocamente si  $(x, y) \in T_{\sup H, \sup S}$  tenemos que,

$$mx + \sup H \leq y, \wedge, -mx + \sup S \leq y;$$

además como  $\forall \alpha$ ,  $b_\alpha \leq \sup H$ ,  $\wedge$ ,  $c_\alpha \leq \sup S$  entonces es claro que,

$$mx + b_\alpha \leq y, \wedge, -mx + c_\alpha \leq y \quad \forall \alpha \in \Delta;$$

luego  $(x, y) \in T_{b_\alpha, c_\alpha}$  para todo  $\alpha$  de modo que  $(x, y) \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} T_{b_\alpha, c_\alpha}$ . Por lo tanto  $\mathcal{T}_{ra}$  es una *S-topología* para  $\mathbb{R}^2$ . ■

En  $\mathbb{R}^2$  las topologías  $\mathcal{T}_{cd}$ ,  $\mathcal{T}_{rv}$ , y  $\mathcal{T}_{ra}$  son ejemplos de *S-topologías* mientras que la  $\mathcal{T}_{cco}$  (topología de cuadrados centrados en el origen), no es *S-topología*, pues si consideramos la familia de abiertos básicos  $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \times (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ , tenemos :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{(0, 0)\} \quad \text{que no es un abierto en } (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cco}).$$

La topología usual de  $\mathbb{R}^2$  tampoco es *S-topología* por ejemplo si hacemos la intersección de la familia de bolas, con centro en el origen y radio  $\frac{1}{n}$  tenemos que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B((0,0); \frac{1}{n}) = \{(0,0)\}$$

el cual no es un abierto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ .

La topología  $\mathcal{T}_{cof}$  de complementos finitos **no** es *S-topología*, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $\mathbb{R}^2 - \{(n,n)\} \in \mathcal{T}_{cof}$ , pero

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^2 - \{(n,n)\}) = \mathbb{R}^2 - \mathbb{N} \times \mathbb{N} \notin \mathcal{T}_{cof}.$$

Otros ejemplos de *S-topologías* son las topologías  $\mathcal{T}_P$  y  $\mathcal{T}^P$  vistas en las Secciones 2.6 y 2.7 respectivamente. Veamos que en efecto  $\mathcal{T}_P$  y  $\mathcal{T}^P$  son *S-topologías*. Para  $\mathcal{T}_P$  consideremos,  $p \in \mathbb{R}^2$  y  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  una familia de elementos de  $\mathcal{T}_P$  veamos que  $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \in \mathcal{T}_P$ . Como para cada  $\alpha$  se tiene que  $p \in A_\alpha$  entonces  $p \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$  así,  $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \in \mathcal{T}_P$ , luego  $\mathcal{T}_P$  es *S-topología*. Análogamente si consideramos  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  una familia de elementos de  $\mathcal{T}^P$ , entonces veamos que la intersección de esta familia es nuevamente un elemento de  $\mathcal{T}^P$ . Para cada  $\alpha$  se tiene que  $p \notin A_\alpha$  (se puede asumir que  $A_\alpha \neq \mathbb{R}^2 \forall \alpha$ ) entonces  $p \notin \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$  luego  $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \in \mathcal{T}^P$  por lo tanto  $\mathcal{T}^P$  es una *S-topología*.

### 3.3. S-topologías y Pre-órdenes

Ahora se presentará otra forma de generar las topologías vistas en las secciones: 2.1, 2.2, 2.3, 2.6 y 2.7 del presente trabajo. En primer lugar se verá que si se tiene un conjunto  $X$  no vacío y una relación de pre-orden sobre  $X$  entonces esta relación genera una topología de  $X$ , más exactamente una *S-topología* sobre  $X$ .

**Definición 3.3.1.** Sea  $X$  un conjunto no vacío,  $\mathfrak{R}$  una relación en  $X$ , decimos que el par  $(X, \mathfrak{R})$  es un **pre-orden** si  $\mathfrak{R}$  es reflexiva y transitiva.

**Proposición 3.3.1.** Si  $(X, \mathfrak{R})$  es un pre-orden entonces  $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{R}(x) | x \in X\}$  es base para una topología  $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$  de  $X$ . Además  $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$  es una *S-topología*.

*Demostración.*

Veamos que si  $(X, \mathfrak{R})$  es un pre-orden, entonces  $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{R}(x) | x \in X\}$  es base para una topología de  $X$ , donde  $\mathfrak{R}(x) = \{y \in X | x \mathfrak{R} y\}$ . Entonces veamos que  $\mathfrak{B}$  cumple que:

i)  $X = \bigcup_{x \in X} \mathfrak{R}(x)$ .

ii) Si  $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ ,  $x \in B_1 \cap B_2$  entonces existe  $B_3 \in \mathfrak{B}$ , tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

Verifiquemos **i)**. Sea  $y \in X$  como  $\mathfrak{R}$  es reflexiva entonces  $y \in \mathfrak{R}(y)$ , luego  $y \in \bigcup_{x \in X} \mathfrak{R}(x)$ . La otra contención es inmediata, dado que  $X$  es el conjunto universal.

Para verificar que  $\mathfrak{B}$  cumple la condición **ii)** vamos a mostrar la siguiente igualdad equivalente

$$\mathfrak{R}(x) \cap \mathfrak{R}(y) = \bigcup_{z \in \mathfrak{R}(x) \cap \mathfrak{R}(y)} \mathfrak{R}(z)$$

$\subseteq$  Sea  $z \in \mathfrak{R}(x) \cap \mathfrak{R}(y)$ , como  $\mathfrak{R}$  es reflexiva,  $z\mathfrak{R}z \Rightarrow z \in \mathfrak{R}(z)$ , luego

$$z \in \bigcup_{z \in \mathfrak{R}(x) \cap \mathfrak{R}(y)} \mathfrak{R}(z)$$

$\supseteq$

$$\text{Sea } w \in \bigcup_{z \in \mathfrak{R}(x) \cap \mathfrak{R}(y)} \mathfrak{R}(z),$$

entonces  $w \in \mathfrak{R}(z)$  para algún  $z \in \mathfrak{R}(x) \cap \mathfrak{R}(y)$  y tenemos que:

1)  $z\mathfrak{R}w$ ,  $\wedge$ ,  $x\mathfrak{R}z$ , como  $\mathfrak{R}$  es transitiva entonces  $x\mathfrak{R}w \Rightarrow w \in \mathfrak{R}(x)$ ;

2)  $z\mathfrak{R}w$ ,  $\wedge$ ,  $y\mathfrak{R}z$ , como  $\mathfrak{R}$  es transitiva entonces  $y\mathfrak{R}w \Rightarrow w \in \mathfrak{R}(y)$ ;

de **1)** y **2)** se tiene que  $w \in \mathfrak{R}(x) \cap \mathfrak{R}(y)$  por lo tanto  $\mathfrak{B}$  es base para una topología de  $X$ . Esta topología la notaremos, como  $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$ ; y el par  $(X, \mathcal{T}_{\mathfrak{R}})$  es un espacio topológico donde  $\forall O \in \mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$ ,  $O = \bigcup_{\alpha} \mathfrak{R}(x_{\alpha})$ .

Ahora se mostrará que  $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$  es *S-topología*.

Sea  $\{\mathfrak{R}(x_{\alpha})\}_{\alpha \in \Delta}$  una familia de abiertos básicos; veamos que:

$$\bigcap_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{R}(x_{\alpha}) \in \mathcal{T}_{\mathfrak{R}}.$$

Sea  $y \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{R}(x_{\alpha}) \Rightarrow y \in \mathfrak{R}(x_{\alpha}) \forall \alpha$  y afirmamos que:

$$y \in \mathfrak{R}(y) \subset \bigcap_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{R}(x_{\alpha})$$

en efecto sea  $z \in \mathfrak{R}(y) \rightarrow y\mathfrak{R}z$ , como  $y \in \mathfrak{R}(x_{\alpha}) \forall \alpha \in \Delta \rightarrow x_{\alpha}\mathfrak{R}y \forall \alpha \wedge y\mathfrak{R}z \Rightarrow x_{\alpha}\mathfrak{R}z \forall \alpha$  entonces  $z \in \mathfrak{R}(x_{\alpha}) \forall \alpha \Rightarrow z \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{R}(x_{\alpha})$ . Por lo tanto  $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$  es *S-topología*. ■

De esta manera vemos que existe una estrecha relación entre el conjunto de las *S-topologías* de un conjunto  $X$  y el conjunto de todos los pre-órdenes sobre  $X$ . A continuación se presentará una proposición que permite determinar completamente esta relación. Ahora supongamos que se tiene una *S-topología* en  $X$ . Se definirá una relación  $\mathfrak{R}$  en  $X$ , de tal manera que, la relación determina el pre-orden que genera la *S-topología*.

Definimos la relación  $\mathfrak{R}$  por:

$$\forall x, y \in X, \quad x\mathfrak{R}y \iff \mathcal{M}_Y \subseteq \mathcal{M}_X$$

donde  $\forall z \in X$ ,  $\mathcal{M}_Z$  denota el menor abierto que contiene a  $z$ ;  $\mathfrak{R}$  es un pre-orden. En efecto si  $x \in X$ , como  $\mathcal{M}_X \subseteq \mathcal{M}_X \iff x\mathfrak{R}x$  y  $\mathfrak{R}$  es reflexiva.

Si  $x\mathfrak{R}y \wedge y\mathfrak{R}z$ :  $\mathcal{M}_Y \subseteq \mathcal{M}_X \wedge \mathcal{M}_Z \subseteq \mathcal{M}_Y \implies \mathcal{M}_Z \subseteq \mathcal{M}_X \implies x\mathfrak{R}z$  luego  $\mathfrak{R}$  es transitiva.

**Proposición 3.3.2.** *Si  $\mathcal{T}$  es una S-topología de  $X$ , entonces existe un pre-orden  $\mathfrak{R}$  en  $X$  tal que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$ .*

*Demostración.*

Para la prueba de esta Proposición veamos que:

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{R}} = \langle \{\mathfrak{R}(x) \mid x \in X\} \rangle = \mathcal{T}$$

i) Sea  $\mathfrak{R}(x)$  abierto básico de  $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$  y sea  $y \in \mathfrak{R}(x)$ . ( $\vdash \exists O \in \mathcal{T} : y \in O \subseteq \mathfrak{R}(x)$ ).

Como  $y \in \mathfrak{R}(x) \iff x\mathfrak{R}y \iff \mathcal{M}_Y \subseteq \mathcal{M}_X$  vemos que,  $y \in \mathcal{M}_Y \stackrel{?}{\subseteq} \mathfrak{R}(x)$ .

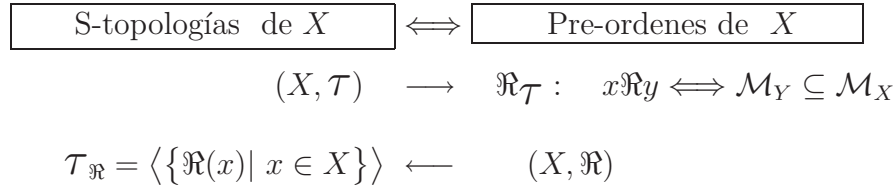
Sea  $z \in \mathcal{M}_Y$ , como  $\mathcal{M}_Y$  es un abierto que contiene a  $z \Rightarrow \mathcal{M}_Z \subseteq \mathcal{M}_Y$  y  $\mathcal{M}_Y \subseteq \mathcal{M}_X \Rightarrow \mathcal{M}_Z \subseteq \mathcal{M}_X \Rightarrow x\mathfrak{R}z$  y por tanto  $z \in \mathfrak{R}(x)$ .

ii) Sean  $G \in \mathcal{T}$  y  $x \in G$ . ( $\vdash \exists \mathfrak{R}(y) : x \in \mathfrak{R}(y) \subseteq G$ ). Veamos que,  $x \in \mathfrak{R}(x) \subseteq G$ .

Sea  $z \in \mathfrak{R}(x) \iff x\mathfrak{R}z \iff \mathcal{M}_Z \subseteq \mathcal{M}_X$ . Como  $x \in G$  y  $G$  es abierto entonces,  $\mathcal{M}_X \subseteq G$ , luego  $\mathcal{M}_Z \subseteq G$  y como  $z \in \mathcal{M}_Z \Rightarrow z \in G$ , así  $\mathfrak{R}(x) \subseteq G$ . ■

En este orden de ideas, si  $X$  es un conjunto provisto de una *S-topología*, entonces es posible encontrar la relación de pre-orden que la genera y viceversa es decir, si se tiene un pre-orden  $(X, \mathfrak{R})$ , donde  $\mathfrak{R}$  es la relación de pre-orden en  $X$ , entonces  $\langle \{\mathfrak{R}(x) \mid x \in X\} \rangle$  genera la *S-topología*  $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$  sobre  $X$ , obteniéndose ahora claramente una relación entre *S-topologías* y pre-órdenes, relación que se esquemática en el siguiente diagrama:

Figura 3.1.1



Obsérvese que en el diagrama de la Figura 3.1.1 se establece una interesante relación entre estructuras de tipo topológico ( las *S-topologías* ) y estructuras de tipo algebraico (los Pre-órdenes). En la Sección 3.2 se probó que las topologías  $\mathcal{T}_{cd}$ ,  $\mathcal{T}_{rv}$ ,  $\mathcal{T}_{cco}$ ,  $\mathcal{T}_P$  y  $\mathcal{T}^P$  son *S-topologías*; ahora veremos las relaciones de pre-orden sobre  $\mathbb{R}^2$  asociadas a cada una de estas topologías.

### Pre-orden asociado a $\mathcal{T}_{cd}$ :

Dado  $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  no es difícil probar que el menor abierto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cd})$  que contiene a  $P$  es  $\mathcal{M}_P = [a, \infty) \times [b, \infty)$ . De esta manera si  $X = (a_1, b_1)$  e  $Y = (a_2, b_2)$  se tendrá:  $\mathcal{M}_X = [a_1, \infty) \times [b_1, \infty)$ ,  $\mathcal{M}_Y = [a_2, \infty) \times [b_2, \infty)$  entonces:

$$\mathcal{M}_Y \subseteq \mathcal{M}_X \iff [a_2, \infty) \times [b_2, \infty) \subseteq [a_1, \infty) \times [b_1, \infty) \iff (a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \leq b_2).$$

Considerando el orden usual de  $\mathbb{R}$ , entonces para  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$  se define la relación  $\leq_1$  por:

$$(a_1, b_1) \leq_1 (a_2, b_2) \iff a_1 \leq a_2 \quad y \quad b_1 \leq b_2.$$

$\leq_1$  es una relación de orden sobre  $\mathbb{R}^2$  y como tal es pre-orden. Luego la topología asociada a  $\leq_1$  es la topología generada por los conjuntos:

$$\mathfrak{R}(X) = \{Y \in \mathbb{R}^2 \mid X \leq_1 Y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq x \wedge b_1 \leq y\} = [a_1, \infty) \times [b_1, \infty)$$

y esta topología coincide con la topología de colas a derecha en el plano; es decir  $\mathcal{T}_{cd}$  es generada por el pre-orden  $\leq_1$ .

**Pre-orden asociado a  $\mathcal{T}_{rv}$ :**

Dado  $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , el menor abierto que contiene a  $P$  en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{rv})$  es  $\mathcal{M}_P = \{P\} \times \mathbb{R}$ . De esta manera si  $X = (a_1, b_1)$ ,  $Y = (a_2, b_2)$  entonces

$$\mathcal{M}_Y \subseteq \mathcal{M}_X \iff \{a_2\} \times \mathbb{R} \subseteq \{a_1\} \times \mathbb{R} \iff a_2 = a_1$$

luego la relación  $\mathfrak{R}$  en  $\mathbb{R}^2$  definida por:

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad (a_1, b_1) \mathfrak{R} (a_2, b_2) \iff a_1 = a_2.$$

$\mathfrak{R}$  es una relación de pre-orden en  $\mathbb{R}^2$ ; y la topología generada por los conjuntos

$$\mathfrak{R}(X) = \{Y \in \mathbb{R}^2 | X \mathfrak{R} Y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = a_1\} = \{a_1\} \times \mathbb{R}$$

corresponde precisamente a la topología de rectas verticales  $\mathcal{T}_{rv}$ .

**Pre-orden asociado a  $\mathcal{T}_{ra}$ :**

Dado  $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , el menor abierto que contiene a  $P$  en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{ra})$  es la región angular con vértice en  $(a, b)$ , es decir  $\mathcal{M}_P = T_{b-ma, b+ma}$ . De esta manera, si  $X = (a_1, b_1)$  e  $Y = (a_2, b_2)$  entonces:

$$\mathcal{M}_Y \subseteq \mathcal{M}_X \iff T_{b_2-ma_2, b_2+ma_2} \subseteq T_{b_1-ma_1, b_1+ma_1}.$$

Para simplificar la notación escribiremos  $T_{b-ma, b+ma} = T_{(a,b)}$ . Se obtiene la relación  $\mathfrak{R}$  en  $\mathbb{R}^2$  así:

$$(a_1, b_1) \mathfrak{R} (a_2, b_2) \iff T_{(a_1, b_1)} \subseteq T_{(a_2, b_2)}$$

que define una relación de orden en  $\mathbb{R}^2$ , y la topología correspondiente es la de regiones angulares definida en la Sección 2.3 del presente trabajo.

**Pre-orden asociado a  $\mathcal{T}_P$** 

Para encontrar el pre-orden correspondiente a la topología del punto incluido  $\mathcal{T}_P$ , nuevamente se considera:  $X, Y \in \mathbb{R}^2$ :  $X \mathfrak{R} Y \iff \mathcal{M}_Y \subseteq \mathcal{M}_X$ . El menor abierto que contiene a  $Y$  en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_P)$  es:

$$\mathcal{M}_Y = \begin{cases} \{P\}, & \text{si } Y = P; \\ \{P, Y\}, & \text{si } Y \neq P. \end{cases}$$

Luego podemos considerar tres casos:

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in \mathbb{R}^2 : \quad \mathcal{M}_Y \subseteq \mathcal{M}_X &\longrightarrow X\mathfrak{R}Y. \\ \text{Si } X = P \wedge Y \neq P \text{ entonces } \{P, Y\} \not\subseteq \{P\} &\longrightarrow \neg(X\mathfrak{R}Y). \\ \text{Si } X \neq P \wedge Y = P \text{ entonces } \{P\} \subseteq \{X, P\} &\longrightarrow X\mathfrak{R}Y. \\ \text{Si } X \neq P \wedge Y \neq P \wedge X \neq Y \text{ entonces } \{Y, P\} \not\subseteq \{X, P\} &\longrightarrow \neg(X\mathfrak{R}Y). \end{aligned}$$

En resumen se tiene:

$$\begin{aligned} X\mathfrak{R}Y &\iff (X = Y) \vee (X \neq P \wedge Y = P) \\ &\iff (X = Y) \vee (Y = P). \end{aligned}$$

Si  $X = (a_1, b_1)$ ,  $Y = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$  se tiene entonces:

$$X\mathfrak{R}Y \iff (a_1, b_1)\mathfrak{R}(a_2, b_2) \iff (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \vee (a_2, b_2) = (p_1, p_2) = P.$$

Los abiertos básicos de la topología  $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$  son de la forma:

$$\mathfrak{R}(X) = \{Y \in \mathbb{R}^2 \mid X\mathfrak{R}Y\} = \{Y \in \mathbb{R}^2 \mid Y = X \vee Y = P\} = \{X, P\}.$$

Y se puede verificar que la familia  $\{\{X, P\} \mid X \in \mathbb{R}^2\}$  es en efecto una base para la topología  $\mathcal{T}_P$ .

### Pre-orden asociado a $\mathcal{T}^P$

Recordemos que la topología del punto excluido está dada por:

$$\{A \subseteq \mathbb{R}^2 \mid P \in A\} \cup \{\mathbb{R}^2\}.$$

De modo que dado un punto  $Z \in \mathbb{R}^2$  el menor abierto que contiene a  $Z$  en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^P)$  es:

$$\mathcal{M}_Z = \begin{cases} \{Z\} & \text{si } Z \neq P \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } Z = P. \end{cases}$$

Y se pueden distinguir tres casos:  $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2$ .

- Si  $X = Y \Rightarrow \mathcal{M}_X = \mathcal{M}_Y \Rightarrow X\mathfrak{R}Y$ ;
- si  $X = P \wedge Y \neq P \Rightarrow \mathcal{M}_X = \mathbb{R}^2 \wedge \mathcal{M}_Y = \{Y\} \Rightarrow \mathcal{M}_Y \subseteq \mathcal{M}_X \Rightarrow X\mathfrak{R}Y$ ;

- si  $X \neq P \wedge Y = P \Rightarrow \mathcal{M}_X = \{X\} \wedge \mathcal{M}_Y = \mathbb{R}^2 \not\subseteq \mathcal{M}_X \Rightarrow \neg(X\mathfrak{R}Y)$ .

En resumen:

$$X\mathfrak{R}Y \iff (X = Y) \vee (X = P \wedge Y \neq P) \iff (X = Y) \vee (X = P).$$

Si  $X = (a_1, b_1)$ ,  $Y = (a_2, b_2)$  se tiene:

$$X\mathfrak{R}Y \iff (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \vee (a_1, b_1) = (p_1, p_2) = P.$$

Los abiertos básicos de  $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$  son de la forma:

$$\mathfrak{R} = \begin{cases} \{X\} & \text{si } X \neq P \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } X = P. \end{cases}$$

Se puede verificar que la familia  $\{\{X\} | X \neq P\} \cup \{\mathbb{R}^2\}$  es en efecto base para la topología del punto excluido  $\mathcal{T}^P$ .

### 3.4. Compacidad en S-topologías

En esta sección se presentan dos caracterizaciones de la compacidad en una *S-topología*: una en términos topológicos (densidad) y otra en términos algebraicos (pre-órdenes). Antes de presentar los dos teoremas finales, se dará la siguiente definición.

**Definición 3.4.1.** Sean  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ .  $A$  se llama **denso** en  $X$  si y sólo si  $\overline{A} = X$ . Es decir si  $\forall O \in \mathcal{T}$ ,  $O \neq \emptyset$ ,  $O \cap A \neq \emptyset$ .

Sea  $TOP(X)$  la familia de todas las topología en un conjunto  $X$ .

**Teorema 3.4.1.**  $(X, \mathcal{T})$  un espacio provisto de una *S-topología*.  $X$  es compacto si y sólo si existe un subconjunto finito de  $X$ , el cual es denso con respecto a  $\overline{\mathcal{T}}$ , donde  $\overline{\mathcal{T}} = \{A \subseteq X | A^c \in \mathcal{T}\} \in TOP(X)$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ] Supongamos  $X$  compacto y sea  $\mathfrak{R}$  la relación de pre-orden que genera a  $\mathcal{T}$  (Proposición 3.3.2 y su demostración). Como  $X \subseteq \bigcup_{x \in X} \mathfrak{R}(x)$ ,  $\{\mathfrak{R}(x)\}_{x \in X}$  es un recubrimiento abierto de  $X$ , luego existe  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$  tal que  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{R}(x_i)$ .

Veamos que  $\overline{\{x_1, \dots, x_n\}}_{\overline{\mathcal{T}}} = X$ . Sea  $x \in X$  y sea  $F \in \overline{\mathcal{T}}$  tal que  $x \in F$ . Veamos que  $F \cap \{x_1, \dots, x_n\} \neq \emptyset$ . Como  $F^c \in \mathcal{T}$  entonces:

$$F^c = \bigcup_{\alpha} \mathfrak{R}(y_{\alpha}) \Rightarrow F = \left( \bigcup_{\alpha} \mathfrak{R}(y_{\alpha}) \right)^c = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{R}(y_{\alpha})^c.$$

$$\begin{aligned} \text{Supongamos que, } \forall i = 1, \dots, n \quad x_i \notin F &= \bigcap_{\alpha} \mathfrak{R}(y_{\alpha})^c \\ \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad x_i \notin \mathfrak{R}(y_{\alpha_i})^c &\quad \text{para algún } \alpha_i \\ \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad x_i \in \mathfrak{R}(y_{\alpha_i}) &\quad \text{para algún } \alpha_i \\ \Rightarrow \boxed{\forall i = 1, \dots, n \quad y_{\alpha_i} \mathfrak{R} x_i} &\quad \text{para algún } \alpha_i. \quad (1) \end{aligned}$$

Por otra parte como  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{R}(x_i) \Rightarrow x \in \mathfrak{R}(x_j)$  para algún  $j = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \boxed{x_j \mathfrak{R} x} \quad \text{para algún } j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Además, como  $x \in F \Rightarrow x \in \bigcap_{\alpha} \mathfrak{R}(y_{\alpha})^c \Rightarrow x \in \mathfrak{R}(y_{\alpha})^c, \forall \alpha \Rightarrow x \notin \mathfrak{R}(y_{\alpha}) \quad \forall \alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\neg(y_{\alpha} \mathfrak{R} x) \quad \forall \alpha.} \quad (3)$$

Si tomamos  $i = j$  en (1) entonces  $\boxed{y_{\alpha_j} \mathfrak{R} x_j} \quad (4)$ . Como  $\mathfrak{R}$  es transitiva, de (2) y (4) se tiene que,  $y_{\alpha_j} \mathfrak{R} x$  y esto contradice (3).

$\Leftarrow$ ] Por hipótesis tenemos que existe  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$  tal que:

$$\overline{\{x_1, \dots, x_n\}}_{\overline{\mathcal{T}}} = X.$$

Veamos que  $(X, \mathcal{T})$  es compacto. Sea  $\{\mathfrak{R}(y_{\alpha})\}_{\alpha \in \Delta}$  un recubrimiento de  $X$  por abiertos básicos, entonces:

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{R}(y_{\alpha}).$$

Para cada  $i = 1, \dots, n$  existe  $\alpha_i$  tal que,  $x_i \in \mathfrak{R}(y_{\alpha_i}) \Rightarrow \boxed{y_{\alpha_i} \mathfrak{R} x_i.} \quad (1)$ .

Afirmamos que  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{R}(y_{\alpha_i})$ . En efecto sea  $x \in X$  y supongamos que  $x \notin \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{R}(y_{\alpha_i}) \Rightarrow x \notin \mathfrak{R}(y_{\alpha_i}) \quad \forall i = 1, \dots, n$  luego  $x \in \mathfrak{R}(y_{\alpha_i})^c \quad \forall i = 1, \dots, n$  entonces  $\mathfrak{R}(y_{\alpha_1})^c \cap \dots \cap \mathfrak{R}(y_{\alpha_n})^c \in \overline{\mathcal{T}}$  y es no vacío. Como  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es denso en  $\overline{\mathcal{T}}$  entonces, existe  $x_j \in \mathfrak{R}(y_{\alpha_1})^c \cap \dots \cap \mathfrak{R}(y_{\alpha_n})^c$  para algún  $j \in \{1, \dots, n\}$  y por lo tanto

$$x_j \notin \mathfrak{R}(y_{\alpha_j}) \Leftrightarrow \neg(y_{\alpha_j} \mathfrak{R} x_j)$$

y esto contradice (1), luego  $X$  es compacto. ■

Finalmente se presenta una caracterización de la compacidad en términos de pre-órdenes.

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $X$  un conjunto no vacío con una relación de pre-orden  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$  la topología generada por la base  $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{R}(a) | a \in X\}$ , donde  $\mathfrak{R}(a) = \{x \in X | a\mathfrak{R}x\}$ .  $A \subseteq X$  es compacto si y sólo si existen  $p_1, \dots, p_n \in A$ , tales que, para todo  $x \in A$ , existe  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tal que,  $p_i\mathfrak{R}x$ .*

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ] Sea  $\{\mathfrak{R}(p) | p \in A\}$  un recubrimiento por abiertos básicos de  $A$ , es decir,  $A \subseteq \bigcup_{p \in A} \mathfrak{R}(p)$ . Como  $A$  es compacto, este recubrimiento se reduce a un subrecubrimiento finito, por lo tanto,  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{R}(p_i)$ , con  $p_i \in A$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Entonces se tiene que para todo  $x \in A$ ,  $x \in \mathfrak{R}(p_i)$ , para algún  $1 \leq i \leq n$ . Así  $p_i\mathfrak{R}x$ .

$\Leftarrow$ ] Sea  $\{\mathfrak{R}(y_\alpha)\}_{\alpha \in \Delta}$  un recubrimiento por abiertos básicos de  $A$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  existe  $y_{\alpha_i}$  tal que  $p_i \in \mathfrak{R}(y_{\alpha_i})$ , es decir  $\boxed{y_{\alpha_i}\mathfrak{R}p_i}$  (1). Afirmamos que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{R}(y_{\alpha_i}).$$

En efecto, sea  $x \in A$ . Por hipótesis existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\boxed{p_j\mathfrak{R}x}$  (2). De (1) y (2) y por la transitividad de  $\mathfrak{R}$  se concluye que  $y_{\alpha_j}\mathfrak{R}x$ , es decir  $x \in \mathfrak{R}(y_{\alpha_j})$  de modo que  $x \in \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{R}(y_{\alpha_i})$ . ■

TABLA DE RESUMEN

Topología	$i$ Es $S$ -topología ?	Pre-Orden que la genera	Compacidad: $S \subseteq \mathbb{R}^2$ es compacto si y solo si:
$\mathcal{T}_u$	NO	—	$S$ es cerrado y acotado.
$\mathcal{T}_{cd}$	SI	$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2, X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \leq b_2$	$S$ está contenido en una unión finita de colas a la derecha, cuyos vértices pertenecen a $S$ .
$\mathcal{T}_{rv}$	SI	$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2, X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow a_1 = a_2$	$S$ está contenido en una unión finita de rectas verticales.
$\mathcal{T}_{ra}$	SI	$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2 X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow T_X \subseteq T_Y$	$S$ está contenido en una unión finita de regiones angulares, cuyos vértices pertenecen a $S$ .
$\mathcal{T}_{cco}$	NO	—	$M = \{\ (a, b)\  \mid (a, b) \in S\}$ tiene máximo donde $\ (a, b)\  = \max\{ a ,  b \}$ .
$\mathcal{T}_{cof}$	NO	—	$S \subseteq \mathbb{R}^2$ todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es compacto.
$\mathcal{T}_P$	SI	$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2, X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow (X = Y) \vee (Y = P)$	$S$ es finito.
$\mathcal{T}^P$	SI	$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2, X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow (X = Y) \vee (Y = P)$	$P \in S$ o $S$ es finito.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] AVILA, Jesús. A. *Caracterización de los Subespacios Compactos de  $\mathbb{R}^2$  con algunas Topologías distintas de la Usual*. Boletín de Matemáticas Nueva Serie, Vol. VII 2, (2000), 29-38.
- [2] GUZMAN, Gildardo. *Notas de Clase de Análisis Matemático Uno*. Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Bucaramanga, 1986.
- [3] I. L Reilly & M. K. Vamanamurthy, G.N. *Some Topological Anti-properties*. Illinois Journal of Mathematics, 24, No. 3. (1980), 382-389.
- [4] Lorrain, F. *Notes on Topological Spaces with Minimum Neighborhoods*. American Mathematical Monthly, 76 (1969), 616-627.
- [5] MENDOZA, Nestor. *Espacios y Conjuntos Compactos*. Bucaramanga, 1997. Trabajo de Monografía. Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias.
- [6] MUNKRES, J.R. *Topología*. Segunda Edición. Prentice-Hall, Pearson. Madrid 2002.
- [7] RUBIANO, G.N. *Topología General*. Segunda Edición. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. 2002.
- [8] Tom M. Apostol. *Análisis Matemático*. Segunda Edición. Reverté, s.a. Barcelona 1979.
- [9] WILLARD, Stephen. *General Topology*. New York: Addison Wesley. Publishing Company. 1968.