

**GENERACIÓN DE VÓRTICES ÓPTICOS PERFECTOS CON  
MOMENTO ANGULAR ORBITAL MEDIANTE  
HOLOGRAMAS COMPUTARIZADOS**

**NELSON ANAYA CARVAJAL**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA**

**2016**

**GENERACIÓN DE VÓRTICES ÓPTICOS PERFECTOS CON  
MOMENTO ANGULAR ORBITAL MEDIANTE  
HOLOGRAMAS COMPUTARIZADOS**

**NELSON ANAYA CARVAJAL**

Trabajo de Grado como requisito para optar al título de Físico

Director

**CRISTIAN ACEVEDO CÁCERES**  
Ph.D. (c) en Ciencias Naturales-Física

Co-Director

**YEZID TORRES MORENO**  
Ph.D. Óptica y Tratamiento de la Señal

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA**

2016

# AGRADECIMIENTOS

---

---

*"...tan fácil es una vez resuelto  
lo que antes  
parecía imposible de resolver".*

Agradezco a todas las personas que han sido parte de este proceso estadístico de la vida en especial a compañeros que narraré sus nombres no dependiendo sino exclusivamente de la equidad y por carreras, así:

TRABAJO SOCIAL: Laura Peña, Raquel Maldonado, Angie Lorena Jaimes R.

DERECHO: Maria Fernanda Amaya, Diego Fernando Acelas, Angie V Amaya Alvarez.

SOCIOLOGÍA: Diana Vargas. Jairo Rivera Henker.

INGENIERÍA METALÚRGICA: Yesenia Caballero Carrillo.

INGENIERÍA AMBIENTAL: Leidy Tatiana Sepulveda, Ferney Estevez Vanegas, Luz Stella Cadena.

INGENIERÍA ELECTRÓNICA: Tania Lorena Fandiño H, Fabian Casanova.

QUÍMICA: Cristian Oliveros, Stefanny Yajaive Claro T, Laura M Cristancho Gonzalez, Jennifer Steffens Ariza, Karent Jinneth Fernandez L, Angie Melendez Mendez.

INGENIERÍA QUÍMICA: Jeffer Correa, Andrea Vega Martinez.

BIOLOGÍA: Liliana Santamaria

FILOSOFÍA: Diana Cristina Pinto C, Edward Sanchez.

GEOLOGÍA: Aidalid Pacheco Suarez, Nicolas Gomez, Nicolas Florez, Johan Acevedo.

INGENIERÍA ELÉCTRICA: Fabian Ortiz.

FÍSICA: Carolina Mendoza Luna, Edgar Mauricio Torres, David Velazco Villamizar, Cesar Augusto Agon, Mauricio Niño Ferro, Jesus Arrieta, Fabian Chacon, Alex Francisco Estupiñan, Yeison Fabian Santos, Jhon Fredy Carreño.

HISTORIA: Francisco Maldonado, Dayanna Oliveira.

Así mismo al director y al co-director del proyecto por sus constantes charlas sobre momento angular orbital, y al apoyo recibido a través del Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales GOTS.

En última instancia, a la Vicerrectoría de Investigación y Extensión VIE, de la Universidad Industrial de Santander mediante el proyecto: "Descripción general alternativa del momento angular total, orbital y de spin, en óptica no paraxial". A Colciencias por el apoyo a través del proyecto "Dispositivos ópticos de alta dimensionalidad QKD (Quantum Key Distribution) basados en el momento angular orbital de la luz", código: 110256934957.

# ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	16
1 DESCRIPCIÓN FÍSICA DE LOS VÓRTICES ÓPTICOS PERFECTOS	18
1.1 MOMENTO ANGULAR ORBITAL . . . . .	18
1.2 VÓRTICES ÓPTICOS PERFECTOS . . . . .	21
2 DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DEL MONTAJE EXPERIMENTAL	31
2.1 INTRODUCCIÓN . . . . .	31
2.2 MONTAJE EXPERIMENTAL PARA LA GENERACIÓN DE HACES BESSEL-GAUSS . . . . .	32
2.2.1 Generación experimental de haces Bessel-Gauss . . . . .	34
2.3 GENERACIÓN DE HOLOGRAMAS COMPUTARIZADOS TIPO AXICÓN	36
2.4 MONTAJE EXPERIMENTAL DE DETECCIÓN Y OBSERVACIÓN DE VÓRTICES ÓPTICOS PERFECTOS. . . . .	37
2.5 MONTAJE EXPERIMENTAL PARA LA DIFRACCIÓN DE UN VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO A TRAVÉS DE UNA ABERTURA TRIANGULAR EQUILÁTERA . . . . .	38
3 RESULTADOS Y DISCUSIÓN	39
3.1 INTRODUCCIÓN . . . . .	39

---

3.2	RESULTADOS EXPERIMENTALES DE INTENSIDAD DE UN VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO . . . . .	39
3.3	RESULTADOS EXPERIMENTALES DE LA DIFRACCIÓN DE VÓRTICES ÓPTICOS PERFECTOS A TRAVÉS DE UNA RENDIJA TRIANGULAR EQUILÁTERA . . . . .	45
4	CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	46
4.1	CONCLUSIONES . . . . .	46
4.2	PERSPECTIVAS . . . . .	48
5	PRODUCTOS ASOCIADOS	49
	APÉNDICES	51
	BIBLIOGRAFÍA	61
	BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA	65

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Torque sobre una lámina birrefringente . . . . .	18
Figura 2	Representación de frentes de onda con momento angular orbital . . . . .	20
Figura 3	Interacción de momento angular orbital y momento angular de espín alrededor de la materia . . . . .	20
Figura 4	Vórtices ópticos con patrón de intensidad y fase . . . . .	21
Figura 5	Vórtices ópticos tipo Bessel con patrón de intensidad y fase . . . . .	22
Figura 6	Haz sucesivo función delta de Dirac . . . . .	24
Figura 7	Haces de vórtices ópticos perfectos con fase . . . . .	26
Figura 8	Perfil de intensidad de vórtices ópticos perfectos . . . . .	26
Figura 9	Intersección de la curva exponencial y la de Bessel de primera especie . . . . .	27
Figura 10	Haces en campo lejano de vórtices ópticos . . . . .	30
Figura 11	Perfil de intensidad de vórtices ópticos en campo lejano . . . . .	30
Figura 12	Montaje experimental de filtrado y colimado del haz láser Helio-Neón . . . . .	33
Figura 13	Montaje experimental de generación de vórtices ópticos perfectos . . . . .	35
Figura 14	Hologramas computarizados tipo axicón . . . . .	36
Figura 15	Configuración experimental de captura de imágenes de vórtices ópticos perfectos . . . . .	37
Figura 16	Montaje experimental para la difracción de vórtices ópticos perfectos . . . . .	38
Figura 17	Resultados experimentales de vórtices ópticos perfectos . . . . .	40
Figura 18	Resultados analíticos de vórtices ópticos perfectos . . . . .	41
Figura 19	Resultado del radio promedio de un vórtice óptico perfecto . . . . .	42

---

Figura 20	Resultados experimental y analítico para la intensidad de vórtices ópticos perfectos en apertura triangular equilátera . . . . .	45
Figura 21	Esquema de multiplexación de información sobre una fibra óptica	48
Figura 22	Presentación póster Congreso ENO-CANCOA 2015 . . . . .	50

# ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1	Algunas especificaciones técnicas del láser Helio-Neón. . . . .	33
Tabla 2	Algunas especificaciones técnicas del modulador espacial de luz por amplitud. . . . .	34
Tabla 3	Algunas especificaciones técnicas de los polarizadores . . . . .	35
Tabla 4	Algunas especificaciones técnicas de la cámara CMOS . . . . .	38
Tabla 5	Valores de los radios teórico y experimental de vórtices ópticos perfectos para valores de carga topológica entera y su respectiva razón. . . . .	43
Tabla 6	Valores de los radios interno y externo promedio experimental de vórtices ópticos perfectos obtenidos para carga topológica entera y su anchura. . . . .	44

# APÉNDICES

---

---

	Página
Apéndice A :	51
Apéndice B :	53
Apéndice C :	56
Apéndice D :	57
Apéndice E :	59

# NOTACIÓN

---

---

En el presente trabajo de investigación se utilizan los siguientes acrónimos:

MAO	:	Momento angular orbital
MAS	:	Momento angular de espín
VO	:	Vórtice (s) óptico (s)
VOP	:	Vórtice (s) óptico (s) perfectos (s)
MEL	:	Modulador espacial de luz
P-MEL-P	:	Polarizador-Modulador espacial de luz-Polarizador
HGC	:	Holograma generado por computador
BG	:	Bessel-Gauss
CT	:	Carga topológica

**TÍTULO:** GENERACIÓN DE VÓRTICES ÓPTICOS PERFECTOS CON MOMENTO ANGULAR ORBITAL MEDIANTE HOLOGRAMAS COMPUTARIZADOS \*

**AUTOR:** Nelson Anaya Carvajal \*\*

## RESUMEN

**PALABRAS CLAVES:** Momento angular orbital, vórtices ópticos perfectos, holograma generado por computador y carga topológica.

La diversidad de cualidades asociadas al momento angular orbital de un haz luminoso y su relación intrínseca con la carga topológica, ha impulsado su estudio por sus potenciales aplicaciones, tanto en el procesamiento y transmisión de la información, así como en la manipulación de materia. De acuerdo a lo anterior, el presente trabajo muestra tanto de manera teórica como a nivel experimental la generación de vórtices ópticos perfectos con carga topológica entera, partiendo en primera instancia de la creación de un holograma generado por computador tipo axicón, el cual es generado previamente en un computador y desplegado en el modulador espacial de luz por transmisión, para la obtención de haces tipo Bessel-Gauss, el cual al disponerlo en un procesador por transformación óptica de Fourier genera los vórtices ópticos perfectos. Además, se demuestra la generación de este tipo de vórtices ópticos perfectos en el plano de Fourier, es decir haces con momento angular orbital que poseen invariancia de forma y mantienen iguales dimensiones geométricas sin importar el valor de la carga topológica del haz luminoso. Finalmente, el valor de la carga topológica se verificó de manera experimental, utilizando la difracción de Fraunhofer del vórtice óptico perfecto por una apertura triangular equilátera.

---

\*Trabajo de Grado

\*\*Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales. Escuela de Física. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Cristian Acevedo Cáceres, Ph.D (candidato); Yezid Torres Moreno, Doctor en Óptica y Tratamiento de la Señal.

**TITLE:** PERFECT OPTICAL VORTICES WITH ORBITAL ANGULAR MOMENTUM BASED ON COMPUTER GENERATED HOLOGRAMS \*.

**AUTHOR:** Nelson Anaya Carvajal \*\*.

## ABSTRACT

**KEY WORDS:** Orbital angular momentum, perfect optical vortex, computer-generated hologram and topological charge.

The diversity of physical qualities associated with the orbital angular momentum of a light beam and its intrinsic relationship with the topological charge, has boosted its study for their potential applications in both processing and transmission of information, as well as the manipulation of matter. According to above, this end degree work aims to show both theoretically and experimentally production of perfect optical vortices with integer topological charges. Starting with a hologram generated by computer like axicon for obtaining Bessel-Gauss beam, an optical Fourier transformation performed by a lens allows generate the perfect optical vortices. Finally, the generation of such perfect optical vortices on the back plane of the Fourier lens, means orbital angular momentum beams invariants in shape and in geometric dimension regardless of the topological charge value of the light beam. The value of the topological charge is experimentally verified using the Fraunhofer diffraction of the orbital angular momentum beam by a triangular equilateral opening.

---

\*Senior thesis project.

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Cristian Acevedo Cáceres (Director), Yezid Torres Moreno (Co-director)

# INTRODUCCIÓN

---

---

Poynting demostró que una onda electromagnética posee momento lineal y un flujo de energía bien definido, además estableció que una onda con polarización circular lleva un flujo de momento angular de  $\frac{\lambda}{2\pi}u$ , siendo  $\lambda$  y  $u$ , la longitud de onda y densidad de energía respectivamente. Posteriormente en 1936 Beth demuestra que un haz luminoso polarizado circularmente posee momento angular de espín [1], midiendo el torque ejercido por el haz sobre una lámina birrefringente suspendida sobre un espejo.

No obstante, aunque se conocía que un haz propagándose poseía un momento angular de espín debido a su polarización, sólo fue hasta el año 1992 con el trabajo de Allen et al. [2], y en el 2004 con el trabajo de Berry [3], cuando se explica por primera vez la propagación de un haz luminoso con momento angular orbital (MAO) y su superposición respectivamente; y se le asocia en ambos casos a la estructura de fase de la radiación electromagnética [4-5]. Desde el trabajo de Allen et al., el MAO ha sido materia de un intenso estudio teórico [6-7] y experimental [8-9], impulsado por sus potenciales aplicaciones en el campo de las comunicaciones [10-12] y la manipulación de materia [13].

La propagación de un haz luminoso con MAO está limitada por los efectos difractivos propios de la naturaleza intrínseca del campo electromagnético, ya que el diámetro del vórtice óptico depende del orden de momento angular orbital entero del haz. Esta característica de los haces con MAO entero ha generado limitaciones espaciales cuando múltiples haces con MAO son acoplados dentro de una fibra óptica con perfil anular[14]. Sin embargo, Ostrovsky et al., introdujeron el concepto de vórtice óptico perfecto como un haz con MAO entero cuyo diámetro es independiente del valor de la carga topológica (CT) transportada por el haz [15].

---

De acuerdo a lo anterior, surge el interés por comprender el evento físico que acontece bajo el reconocimiento de un vórtice óptico perfecto, es decir analizar utilizando conceptos de óptica electromagnética, las condiciones técnicas de instrumentación óptica para la generación de un VOP. Además de diseñar, construir e implementar un montaje experimental que permita verificar las predicciones surgidas del análisis teórico mediante la detección en intensidad de un VOP. De esta manera el presente trabajo se centra en analizar en detalle el desarrollo teórico y experimental obtenido para la generación de un VOP utilizando hologramas generados por computador tipo axicón. Para ello, el presente trabajo ha sido organizado en cinco capítulos. En el primer capítulo se describen las principales características del momento angular orbital y de los vórtices ópticos perfectos. En el segundo capítulo se hace una descripción del diseño e implementación del montaje experimental para evaluar las consideraciones obtenidas para la intensidad de un VOP y se utiliza un montaje difractivo empleando una rendija triangular para la verificación del MAO presente en el VOP. En el tercer capítulo se muestran, analizan y comparan los resultados obtenidos tanto a nivel teórico como experimental. Finalmente en el cuarto y quinto capítulo se muestran las conclusiones y productos asociados a este trabajo de grado, respectivamente.

# DESCRIPCIÓN FÍSICA DE LOS VÓRTICES ÓPTICOS PERFECTOS

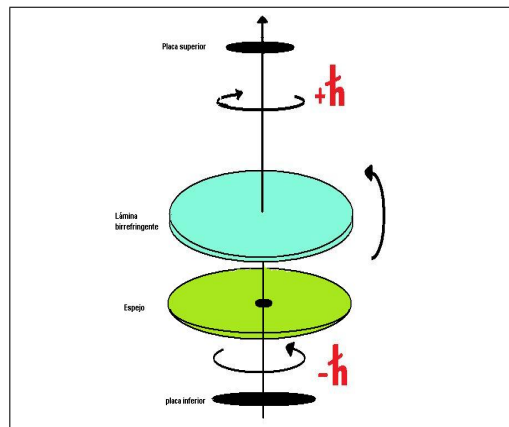
---

---

## 1.1 MOMENTO ANGULAR ORBITAL

En 1936 Beth demuestra experimentalmente que un haz luminoso polarizado circularmente posee momento angular de espín finito, midiendo el torque ejercido por un haz luminoso sobre una lámina birrefringente suspendida sobre un espejo [1], como se muestra en la Figura 1, mostrando de manera directa la interacción entre la cantidad de movimiento angular de la luz y la materia.

Figura 1: Torque ejercido por un haz polarizado circularmente a derecha sobre una lamina  $\lambda/2$ .



Por otra parte el momento angular orbital ha sido estudiado desde el mismo nacimiento de la mecánica cuántica debido a su proceso de cuantización [16], aunque sin ser estudiado para haces luminosos, particularmente en el régimen visible. Sin embargo a partir del año 1992 con los trabajos de Allen et al. [2], y en 1996 de Padgett et al. [5], se comienza a estudiar el momento angular orbital de ondas electromagnéticas en el régimen visible usando distribuciones de campo tipo Laguerre-Gauss [8, 17-18], mostrando teórica y experimentalmente que estos haces cumplen la ecuación de Helmholtz escalar:

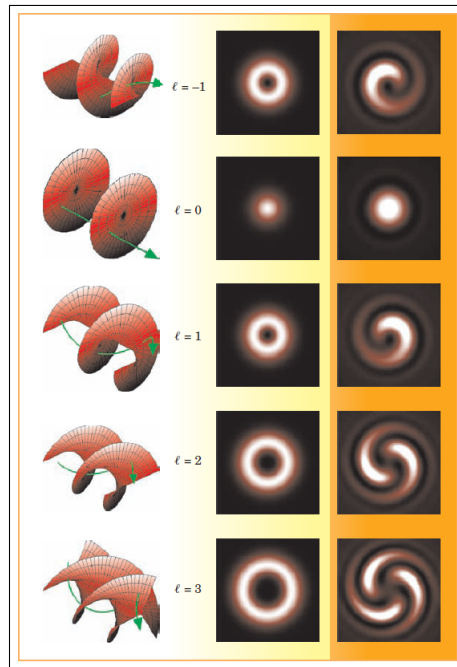
$$(\nabla^2 + k^2) \phi = 0; \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \nabla^2 = \text{laplaciano} \\ \phi = \text{función escalar} \\ k = \text{número de onda.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Además, Allen y Padgett demuestran que este tipo de haces poseen momento angular orbital bien definido por el valor del índice acimutal [2], dando inicio a la profundización y estudio de distribuciones de campo electromagnético con momento angular orbital cuantizado físicamente realizables, las cuales interactúan con la materia [4, 6].

El momento angular orbital de un haz luminoso se asocia a la estructura de fase de la radiación electromagnética [2], debido a las discontinuidades de fase en el frente de onda del haz por el factor  $\exp(il\theta)$ , donde  $l$  es un valor entero que define el MAO presente en el haz luminoso en la dirección de propagación [7-19], como se muestra en la Figura 2. Para haces luminosos con un valor bien definido de  $l$  en la parte acimutal también se dice que poseen un valor de carga topológica cuantizada [15], es decir, que el enrollamiento del frente de onda del haz es  $l$  veces sobre su longitud de onda. La Figura 2 muestra el valor de la CT de un haz luminoso (primera columna) junto a su intensidad (segunda columna) y su interferencia con una onda esférica (tercera columna). Esta característica de un frente de onda, con un valor de  $l$  bien definido, ha conducido a que el MAO de haces luminosos tenga potenciales aplicaciones en el campo de las comunicaciones tanto en el espacio libre como en espacio confinado[10-11].

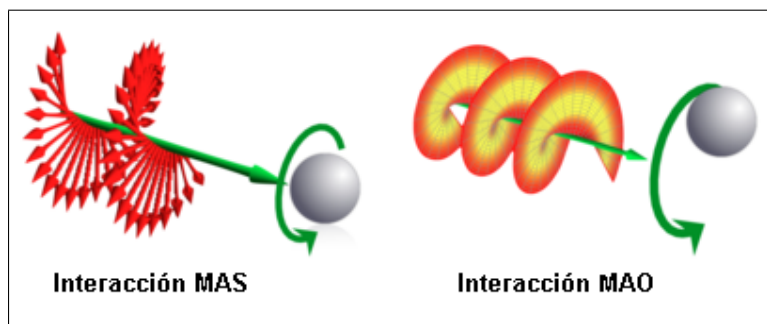
Figura 2: Representación del enrollamiento (primera columna), junto a la intensidad (segunda columna) y la respectiva interferencia con una onda esférica (tercera columna) de un haz con MAO entero.

Fuente: [20]



De manera que una onda con momento angular orbital al interactuar con una partícula producirá sobre esta un efecto de rotación sobre el eje de la partícula debido al momento angular de espín (MAS) y un efecto de rotación sobre el eje del haz debido al momento angular orbital (MAO) como se muestra en la Figura 3.

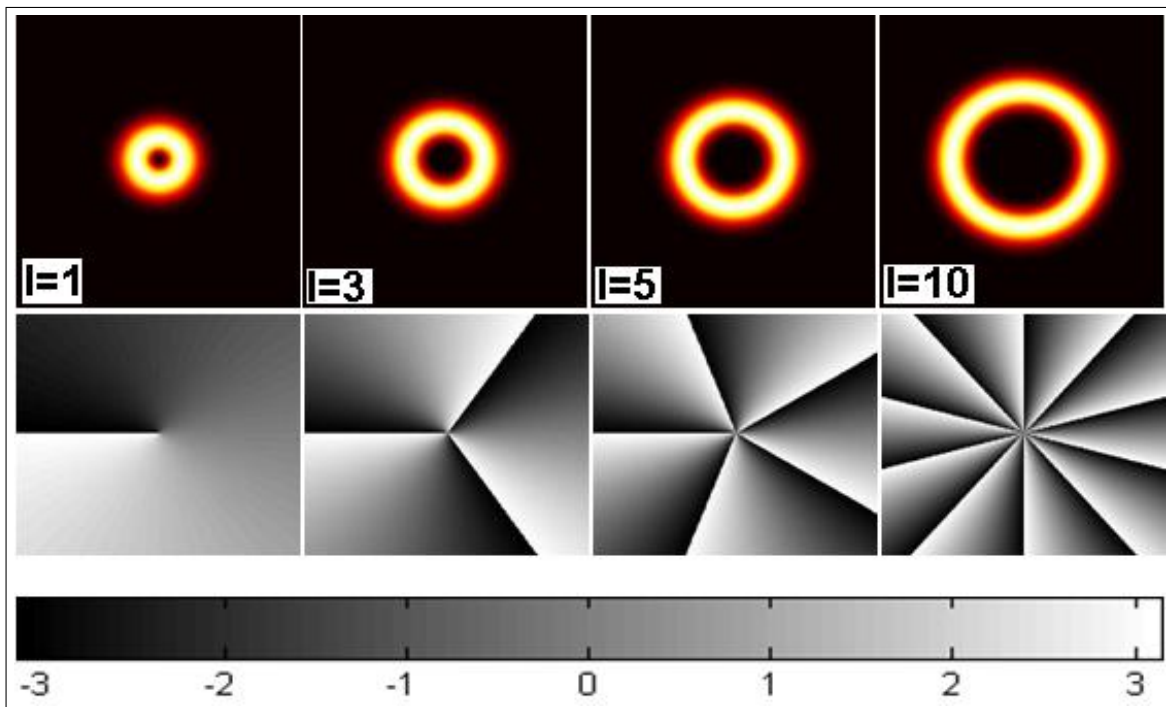
Figura 3: Interacción de MAS y MAO alrededor del eje de propagación del haz con la materia. Fuente: [21]



## 1.2 VÓRTICES ÓPTICOS PERFECTOS

La óptica singular esta basada en el estudio de las singularidades de fase asociadas a la radiación electromagnética [15, 22-23], es decir, puntos sobre los cuales la distribución de campo posee fase no definida e intensidad nula. La mayoría de estas dislocaciones de fase pueden ser generadas por la inclusión del término  $\exp(il\theta)$  en la estructura del campo electromagnético del vórtice óptico [7, 13, 24-25]. Por ejemplo, la Figura 4 muestra las distribuciones de intensidad y fase obtenidas para vórtices ópticos con valores de CT entera positiva  $l = 1, 3, 5$  y  $l = 10$ . Para estos patrones de intensidad se tiene que la singularidad de fase se encuentra en el centro de la distribución, de manera que en ese punto la intensidad es nula y la fase no se encuentra definida.

Figura 4: Resultados analíticos de la intensidad (primera fila) y la fase (segunda fila) de vórtices ópticos [9] con valores de carga topológica de izquierda a derecha  $l = 1, 3, 5$  y  $l = 10$ , respectivamente.



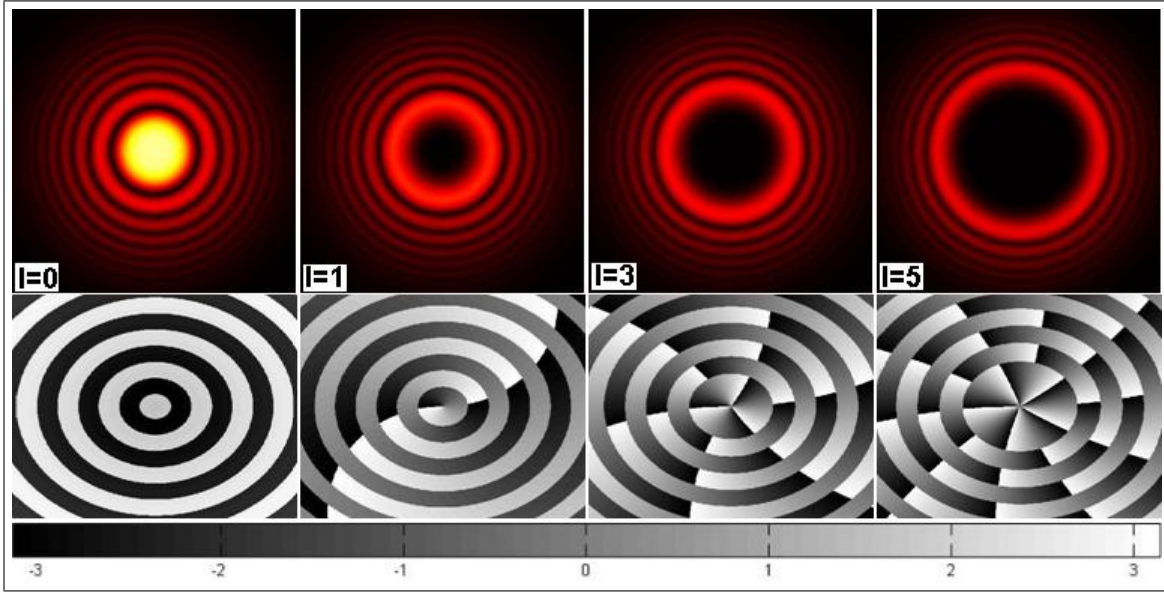
Sin embargo, de esta misma Figura 4 puede apreciarse cómo un aumento en el valor de la carga topológica provoca a su vez un aumento en el diámetro del vórtice respectivo. De esta manera puede verse, por ejemplo, cómo el vórtice con carga topológica  $l = 5$  tendrá un mayor

diámetro que el vórtice con valor  $l = 3$ . De acuerdo a lo anterior, surge la definición de vórtice óptico perfecto como un vórtice luminoso cuyo diámetro es independiente del valor de la CT [23]. Estos vórtices ópticos perfectos pueden ser obtenidos utilizando haces tipo Bessel con campo dado por:

$$E(\rho, \phi, z) = J_l(k_r \rho) \exp(il\phi + ik_z z), \quad (1.2)$$

donde  $J_l$  es la función de Bessel de orden  $l$  de primera especie [26],  $k_r$  y  $k_z$  son los números de onda radial y longitudinal respectivamente, además  $k = \sqrt{k_r^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda. La Figura 5 muestra algunos perfiles de intensidad y fase de haces Bessel para los valores de carga topológica  $l = 0, 1, 3$  y  $l = 5$  en  $z=0.0z_r$ , donde  $z_r = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$  es la distancia de Rayleigh.

Figura 5: Resultados analíticos de la intensidad (primera fila) y la fase (segunda fila) de haces Bessel sobre el plano  $z=0.0z_r$  para los valores de CT de izquierda a derecha  $l = 0, 1, 3$  y  $l = 5$ , respectivamente.



De manera que el campo eléctrico de un vórtice óptico perfecto es obtenido por la transformación óptica de Fourier [27] de un haz Bessel  $E(\rho, \phi)$  en el plano  $S(r, \theta)$  (ver Apéndice A) descrita mediante:

$$E(r, \theta) = \frac{k}{2\pi i f} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E(\rho, \phi) \exp\left(\frac{-ik}{f} \rho r \cos(\theta - \phi)\right) \rho d\phi d\rho. \quad (1.3)$$

Ahora, si se sustituye la ecuación 1.2 en 1.3, y se tiene en cuenta que la ubicación en el plano de Fourier esta en  $z = f$  ( $f$  es la distancia focal) se obtendrá que el campo es:

$$\begin{aligned} E(r, \theta) &= \frac{k}{2\pi i f} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} J_l(k_r \rho) \exp(il\phi) \exp \left( i \left( \overbrace{-\frac{k\rho r}{f}}^{l'} \cos(\theta - \phi) \right) \right) \rho d\phi d\rho, \\ &= \frac{k}{2\pi i f} \int_0^\infty J_l(k_r \rho) \rho d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \exp \left( il\phi + il' \cos(\theta - \phi) \right) d\phi}_U. \end{aligned} \quad (1.4)$$

La integral U en la parte acimutal de la ecuación 1.4 se puede desarrollar utilizando la identidad de Jacobi-Anger [28] dada como:

$$\exp(iz \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) \exp(in\theta) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos(n\theta), \quad (1.5)$$

obteniendo que (ver Apéndice B):

$$U = \int_0^{2\pi} \exp \left( il\phi - il' \cos(\theta - \phi) \right) d\phi = 2\pi i^l \exp(il\theta) J_l(l'); \quad l' = -\frac{k\rho r}{f}.$$

Por tanto, introduciendo el resultado anterior en la ecuación 1.4 y haciendo uso de la propiedad de paridad de las funciones de Bessel  $J(-l) = (-1)^l J_l$  [26] se obtiene que:

$$E(r, \theta) = (-1)^l \frac{k}{f} i^{l-1} \exp(il\theta) \int_0^\infty J_l(k_r \rho) J_l \left( \frac{kr\rho}{f} \right) \rho d\rho, \quad (1.6)$$

si se hace uso de la ortogonalidad de las funciones de Bessel [29]:

$$\int_0^\infty J_v(\alpha\rho) J_v(\alpha'\rho) \rho d\rho = \frac{1}{\alpha} \delta(\alpha - \alpha'); \quad v > -\frac{1}{2}, \quad (1.7)$$

donde se utiliza por comodidad la convención:  $\alpha' = k_r$  y  $\alpha = \frac{kr}{f}$ . Entonces se llega finalmente a la ecuación 1.8 descrita en términos de la función delta de Dirac:

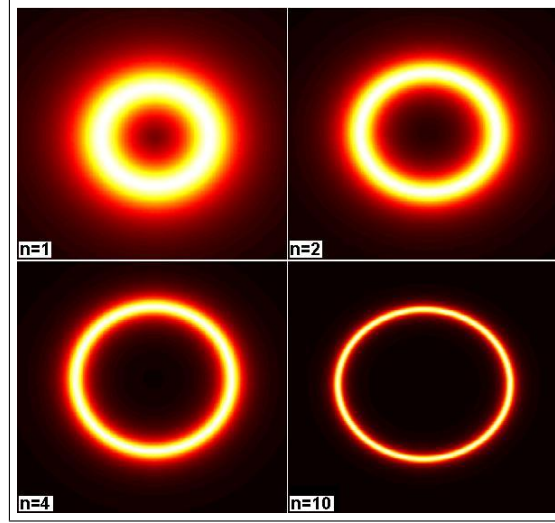
$$E(r, \theta) = (-1)^l \frac{i^{l-1}}{k_r} \exp(il\theta) \delta(r - r_r); \quad r_r = \frac{k_r r}{k} = \text{radio del anillo} \quad (1.8)$$

La función delta de Dirac de la ecuación anterior puede reescribirse como un límite [30] de la forma:

$$\delta(r - r_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2(r - r_r)^2}. \quad (1.9)$$

El perfil de intensidad simulado para el campo del vórtice perfecto obtenido mediante el haz Bessel corresponde a un anillo luminoso, junto a anillos secundarios de menor intensidad no deseados. Estos últimos anillos representan el truncamiento forzado del límite en la función delta, como se aprecia en la Figura 6. En esta figura puede notarse cómo a medida que crece el número de términos tomados del límite descrito por la ecuación 1.9, entonces los anillos secundarios extras van desapareciendo.

Figura 6: Resultados analíticos de vórtices ópticos perfectos obtenidos de la distribución delta de Dirac para CT  $l = 10$ . En el recuadro inferior izquierdo de cada figura se muestra el número de términos tomados del límite descrito por la ecuación 1.9.



En términos experimentales la realización práctica de la ecuación 1.8, supone un límite al infinito que trae como consecuencia los anillos extras mencionados anteriormente. Por esta razón en esta tesis se trabajará para obtener un vórtice óptico perfecto con una distribución de campo electromagnético más práctica y fácil de reproducir experimentalmente, es decir, un haz tipo Bessel-Gauss:

$$E(r, \phi) = J_l(k_r \rho) \exp(il\phi) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_g^2}\right), \quad (1.10)$$

donde  $w_g$  es la cintura del haz gaussiano. Entonces, sustituyendo la ecuación 1.10 en 1.3 se tiene:

$$E(r, \theta) = \frac{k}{2\pi i f} \int_0^\infty J_l(k_r \rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_g^2}\right) \rho d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \exp(il\phi) \exp\left(-\frac{ik\rho r}{f} \cos(\theta - \phi)\right) d\phi}_U. \quad (1.11)$$

Si se hace uso nuevamente de la identidad de Anger-Jacobi definida en la ecuación 1.5 para resolver la integral U (ver apéndice B), se tendrá que:

$$U = \int_0^{2\pi} \exp(il\phi) \exp\left(-\frac{ik\rho r}{f} \cos(\theta - \phi)\right) d\phi = 2\pi i^l \exp(il\theta) J_l(l').$$

Reemplazando este último resultado en la ecuación 1.11 y teniendo en cuenta la propiedad de paridad de las funciones de Bessel  $J(-l) = (-1)^l J(l)$  [26], se obtiene:

$$\begin{aligned} E(r, \theta) &= \frac{k}{f} i^{l-1} \exp(il\theta) \int_0^\infty J_l(k_r \rho) J_l\left(-\frac{kr\rho}{f}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_g^2}\right) \rho d\rho \\ &= (-1)^l \frac{k}{f} i^{l-1} \exp(il\theta) \underbrace{\int_0^\infty J_l(k_r \rho) J_l\left(\frac{kr\rho}{f}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_g^2}\right) \rho d\rho}_T. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Haciendo uso de las propiedades de las funciones de Bessel de primer y segundo orden junto a la función de tipo gaussiano para resolver la integral T [26] descrita en la ecuación 1.12:

$$\int_0^\infty \exp^{-m^2 x^2} J_l(\alpha x) J_l(\beta x) x dx = \frac{1}{2m^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4m^2}\right) I_l\left(\frac{\alpha\beta}{2m^2}\right); l > -1; \alpha, \beta > 0. \quad (1.13)$$

Entonces el resultado de la integral T (ver Apéndice C) es:

$$T = \frac{w_g^2}{2} \exp\left(-\frac{r_r^2 + r^2}{w_0^2}\right) I_l\left(\frac{2r_r r}{w_0^2}\right). \quad (1.14)$$

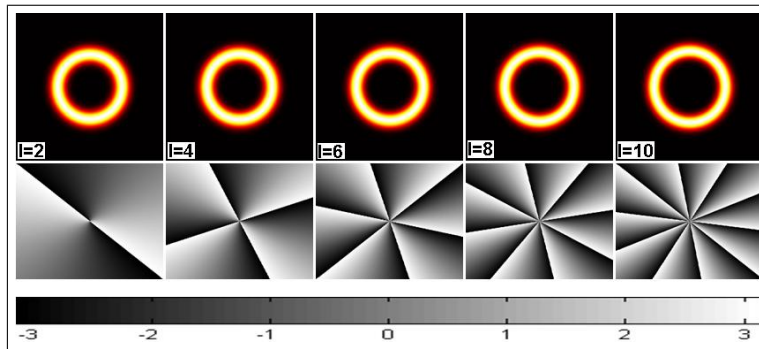
Introduciendo el valor de T en la ecuación 1.12, se llega a que el campo eléctrico del nuevo vórtice óptico perfecto es:

$$\begin{aligned} E(r, \theta) &= (-1)^l i^{l-1} \frac{k}{f} \exp(il\theta) \frac{w_g^2}{2} \exp\left(-\frac{r_r^2 + r^2}{w_0^2}\right) I_l\left(\frac{2r_r r}{w_0^2}\right) \\ &= (-1)^l i^{l-1} \frac{k}{2f} w_g \frac{2f}{kw_0} \exp(il\theta) \exp\left(-\frac{r_r^2 + r^2}{w_0^2}\right) I_l\left(\frac{2r_r r}{w_0^2}\right) \\ &= (-1)^l i^{l-1} \frac{w_g}{w_0} \underbrace{\exp(il\theta)}_{DefineMAO} \exp\left(-\frac{r^2 + r_r^2}{w_0^2}\right) I_l\left(\frac{2r_r r}{w_0^2}\right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

De la anterior ecuación puede verse que el campo eléctrico de este vórtice óptico perfecto posee un factor  $\exp(il\theta)$  inherente al momento angular orbital, una función de tipo gaussiana y una función del tipo Bessel de primer orden modificada. La Figura 7 muestra los perfiles de intensidad y fase para los valores de carga topológica  $l = 2, 4, 6, 8$  y  $l = 10$ . Para las distribuciones de intensidad puede notarse que el diámetro de todos los vórtices permanece aparentemente

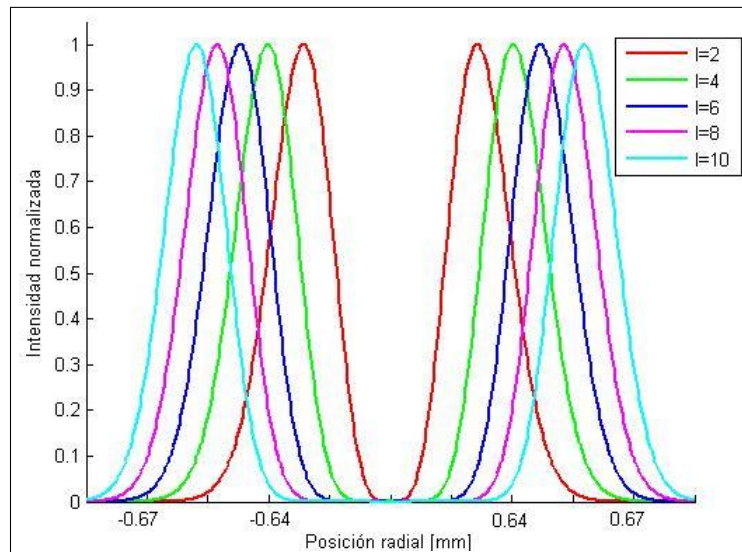
constante, mientras la fase muestra las dislocaciones características referente a los haces con momento angular orbital. Además de la ecuación 1.15 puede deducirse que el radio de cada vórtice está dado por  $r_r = \frac{k_r f}{k}$ , mientras el ancho de cada anillo es  $2w_0$ , donde  $w_0$  es la cintura del haz gaussiano a la distancia focal y está dada por  $w_0 = \frac{2f}{kw_g}$ .

Figura 7: Resultados analíticos de la intensidad (primera fila) y la fase (segunda fila) de vórtices ópticos perfectos para CT  $l=2, 4, 6, 8$  y  $10$ , con su respectiva fase (segunda fila) de izquierda a derecha.



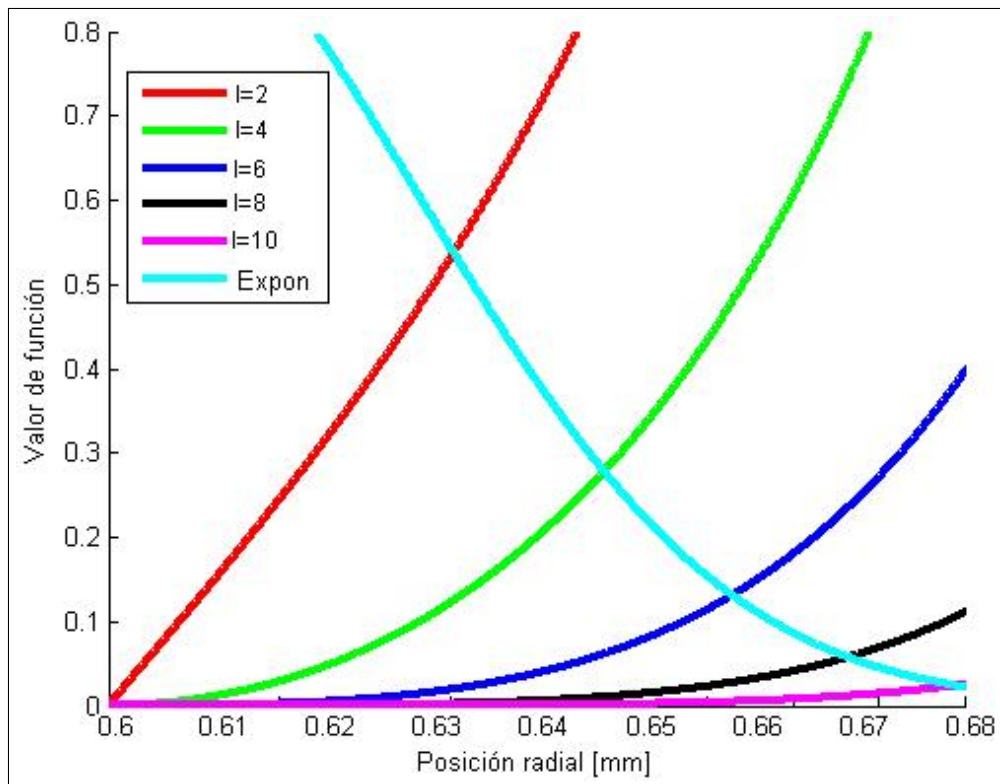
Por otra parte, si se trazan cortes centrales transversales a los perfiles de intensidad de la Figura 7, entonces se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 8 para los valores de carga topológica  $l = 2, 4, 6, 8$  y  $l = 10$ .

Figura 8: Resultados analíticos de los perfiles de intensidad para vórtices ópticos perfectos con carga topológica  $l = 2, 4, 6, 8$  y  $l = 10$ .



En esta última gráfica se aprecia como existe un pequeño corrimiento longitudinal de centésimas de milímetro entre los picos de intensidad asociado a cada valor de CT, es decir, existe un pequeño aumento del radio de cada vórtice óptico perfecto. Dicho corrimiento puede ser explicado si se tiene en cuenta que la función de Bessel modificada de primera especie  $I_l \left( \frac{2r_r r}{w_0^2} \right)$  crece suavemente con el valor de la CT, por tanto, el radio para cada vórtice con un valor bien definido de  $l$  cambia por un pequeño valor. Esto último puede ser entendido si se toma en cuenta que el radio  $r_r$  surge de la intersección entre el crecimiento de la curva dada por la función de Bessel modificada de primera especie  $I_l \left( \frac{2r_r r}{w_0^2} \right)$  y el decrecimiento exponencial de la función  $\exp \left( -\frac{r^2 + r_r^2}{w_0^2} \right)$  de la ecuación 1.15, como puede apreciarse en la Figura 9 para los valores de CT  $l = 2, 4, 6, 8$  y  $l = 10$ , respectivamente. Este cambio puede ser controlado de forma experimental variando el parámetro del número de onda radial desplegado en el respectivo holograma axicón implementado numéricamente usando Matlab, por ejemplo.

Figura 9: Resultados analíticos de la intersección de la curva exponencial con las funciones de Bessel de primera especie. Las funciones de Bessel están representadas por las funciones crecientes de acuerdo a los valores de CT;  $l = 2$  (línea roja),  $l = 4$  (línea verde),  $l = 6$  (línea azul),  $l = 8$  (línea negra),  $l = 10$  (línea fucsia), y la función exponencial decreciente (línea azul aguamarina) que no depende de la CT.



Dado que en el plano de Fourier,  $w_0$ , es pequeño en comparación con el valor de  $r_r$ , entonces la función  $I_l$  se puede aproximar utilizando las propiedades asintóticas de las funciones de Bessel de orden modificado a [26]:

$$I_l \left( \frac{2r_r r}{w_0} \right) \simeq \exp \left( \frac{2r_r r}{w_0} \right), \quad (1.16)$$

entonces la ecuación de 1.15 puede ser descrita asintóticamente como:

$$E(r, \theta) = i^{l-1} \frac{w_g}{w_0} \exp(il\theta) \exp \left( -\frac{(r - r_r)^2}{w_0^2} \right). \quad (1.17)$$

Finalmente es posible hallar la propagación en función de la distancia longitudinal  $z$  para un vórtice óptico perfecto más allá de la distancia de Rayleigh (en el sistema óptico experimental  $z_R = 40,3 \text{ cm}$ ). Para ello se reescribe la ecuación 1.15 asumiendo que  $A_o = i^{l-1} \frac{w_g}{w_0}$  y que esta distribución de campo se encuentra en el plano  $z = 0$  (redefiniendo el origen de referencia), de la siguiente forma:

$$E(r_1, \theta_1) = A_0 \exp(il\theta_1) \exp \left( -\frac{r_1^2}{w_0^2} \right) I_l \left( \frac{2r_r r_1}{w_0^2} \right). \quad (1.18)$$

De manera que una ecuación de campo  $E(r_1, \theta_1)$  en la propagación en el régimen de difracción de Fresnel [27], producto de la transformación de Fourier se obtendrá (ver Apéndice D):

$$\begin{aligned} E(r_2, \theta_2, z) &= \frac{k}{2\pi iz} \exp(ikz) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E(r_1, \theta_1) \\ &\times \exp \left( \frac{ik}{2z} (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)) \right) r_1 d\theta_1 dr_1. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Incluyendo la ecuación del campo propuesta en la ecuación 1.18 sobre 1.19, se obtiene que:

$$\begin{aligned} E(r_2, \theta_2, z) &= \frac{kA_0}{2\pi iz} \exp(ikz) \int_0^\infty \exp \left( \frac{ik}{2z} (r_1^2 + r_2^2) \right) \exp \left( -\frac{r_1^2}{w_0^2} \right) I_l \left( \frac{2r_r r_1}{w_0^2} \right) r_1 dr_1 \\ &\times \underbrace{\int_0^{2\pi} \exp \left( i l \theta_1 - \frac{ik}{z} r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right) d\theta_1}_{U}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

ahora utilizando una sustitución simple y la solución ya obtenida para la parte acimutal de la ecuación 1.11 (ver Apéndice B):

$$U = 2\pi i^l J_l(l') \exp(il\theta_2); \quad l' = -\frac{kr_1 r_2}{z}. \quad (1.21)$$

Además haciendo uso nuevamente de la propiedad de paridad de las funciones de Bessel  $J_l(-r) = (-1)^l J_l(r)$ , el campo  $E(r_2, \theta_2, z)$  toma la forma:

$$E(r_2, \theta_2, z) = \frac{kA_0}{iz} i^l \exp(ikz + i\ell\theta_2) (-1)^l \underbrace{\exp\left(\left(\frac{ik}{2z} - \frac{1}{w_0^2}\right)r_1^2\right)}_{I\dots} \int_0^\infty \underbrace{J_l\left(\frac{k}{z}r_1r_2\right) I_l\left(\frac{2r_r r_1}{w_0^2}\right) r_1 dr_1}_{\dots I} \quad (1.22)$$

De manera que utilizando el resultado de la integral I [26], se tiene:

$$I = \int_0^\infty r_1 \exp(-\alpha r_1^2) J_l(\gamma r_1) I_l(\beta r_1) dr_1 = \frac{1}{2\alpha} \exp\left(\frac{\beta^2 - \gamma^2}{4\alpha}\right) J_l\left(\frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right) \quad (1.23a)$$

$$I = \int_0^\infty r_1 \exp\left(-\underbrace{\left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z}\right)r_1^2}_\alpha\right) J_l\left(\underbrace{\frac{k}{z}r_2 r_1}_\gamma\right) I_l\left(\underbrace{\frac{2r_r}{w_0^2} r_1}_\beta\right) dr_1 \quad (1.23b)$$

Reemplazando los términos planteados en la ecuación 1.23b, se obtiene (ver Apéndice E) el resultado:

$$I = \frac{iz}{k} \frac{i^l \exp(i\psi)}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_r}\right)^2}} I_l\left(\frac{2r_r r_2}{ww_0} \exp(i\psi)\right) \exp\left(\frac{ik}{2R} (r_1^2 + r_2^2)\right) \times \exp\left(-\frac{1}{w^2} \left(r_2^2 - \left(\frac{r_r z}{z_r}\right)^2\right)\right). \quad (1.24)$$

Por lo tanto se llega a que el campo eléctrico del vórtice perfecto más allá del plano de Fourier (en términos de distancias mayores al rango de Rayleigh  $z_R = 40,3 \text{ cm}$ ) está dado por:

$$E(r_2, \theta_2, z) = A_0 \frac{w_0}{w} (-1)^{2l} \exp(i(\psi + \ell\theta_2 + kz)) \exp\left(-\frac{1}{w^2} \left(r_2^2 - \left(\frac{r_r z}{z_r}\right)^2\right)\right) \times \exp\left(\frac{ik}{2R} (r_2^2 + r_r^2)\right) I_l\left(\frac{2r_r r_2}{ww_0} \exp(i\psi)\right). \quad (1.25)$$

Con los parámetros estándar de un haz luminoso dados por:

$$\text{Rango de Rayleigh:} \quad z_r = \frac{kw_0^2}{2}, \quad (1.26a)$$

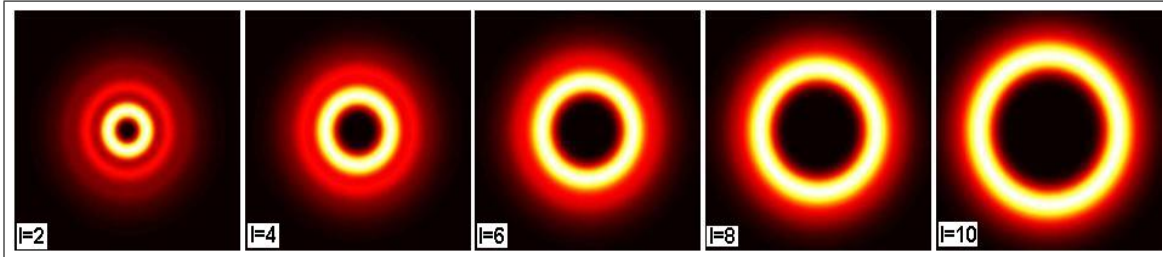
$$\text{Cintura del haz:} \quad w = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_r}\right)^2}, \quad (1.26b)$$

$$\text{Radio de curvatura:} \quad R = z + \frac{z_r^2}{z}, \quad (1.26c)$$

$$\text{Fase de Gouy:} \quad \psi = \arctan\left(\frac{z}{z_r}\right). \quad (1.26d)$$

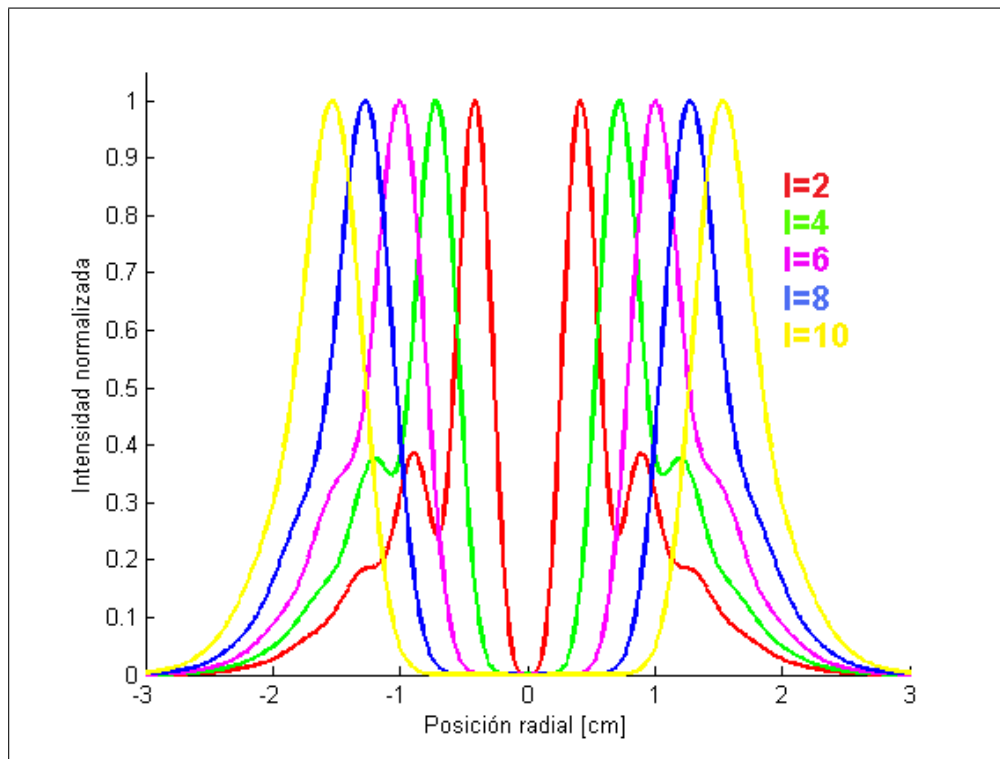
La Figura 10 muestra los perfiles de intensidad de distintos vórtices para las cargas topológicas  $l = 2, 4, 6, 8$  y  $l = 10$  en el plano  $z = 6,0z_r$

Figura 10: Resultados analíticos de la intensidad de vórtices ópticos perfectos en el plano  $z=6.0z_r$  con los valores de CT  $l=2, 4, 6, 8$  y  $l = 10$  de izquierda a derecha, respectivamente.



De la anterior figura, es posible inferir que después del plano de Fourier (rango de Rayleigh experimental  $z_R = 40,3 \text{ cm}$ ) los VO para distintos valores de CT ya no conservan el mismo diámetro. Esto último puede deducirse de los cortes transversales centrales para los perfiles de la Figura 10 mostrados en la Figura 11.

Figura 11: Resultados analíticos de los perfiles de intensidad para vórtices ópticos perfectos con carga topológica  $l = 2, 4, 6, 8$  y  $l = 10$ , en el plano  $z = 6.0z_r$ .



# DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DEL MONTAJE EXPERIMENTAL

---

---

## 2.1 INTRODUCCIÓN

En el anterior capítulo se utilizaron algunos conceptos teóricos de la óptica electromagnética para el entendimiento de los VOP con momento angular orbital. A partir de la difracción de Fraunhofer se demuestra que un VOP puede ser obtenido en campo lejano utilizando una distribución de onda electromagnética tipo Bessel-Gauss. Además se ha descrito brevemente la propagación de los VOP más allá del plano de Fraunhofer (sección 1.2).

Por otra parte la generación experimental de un VOP a través del uso de la técnica de HGC posee gran versatilidad en la asignación de cambios in situ, cuando dichos hologramas son creados por medio de un MEL, por ejemplo. Estos HGC pueden ser del tipo tenedor (tradicionales) o de la forma axicón (circulares). Los HGC tipo axicón pueden ser generados utilizando una estructura de campo de la forma  $\exp(il\theta + i\alpha r)$ , junto a una onda plana de referencia dada como  $\exp(ikz)$ . De manera que el patrón interferométrico entre las ondas mencionadas anteriormente es de la forma:  $I = 2 + 2 \cos(kz - \alpha r - l\theta)$ , donde  $\alpha$  es el parámetro de axicón y se define como  $\alpha = k \arctan\left(\frac{k_r}{k_z}\right) = k \arcsin\left(\frac{k_r}{k}\right)$ ;  $k_r = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ , es el número de onda radial, mientras que  $k$ ,  $k_z$  y  $l$  son los números de onda total, longitudinal y de CT, respectivamente. El principal objetivo de este capítulo consiste en describir la construcción e implementación de un montaje para la generación y detección de vórtices ópticos perfectos que permita verificar experimentalmente las consideraciones teóricas tenidas en cuenta para los VOP en el capítulo

I. La implementación del montaje utiliza como instrumentos ópticos un láser de He-Ne, una lente convexa ( $f=17$  mm), dos polarizadores dicróicos, un modulador espacial de luz por transmisión, una lente corregida de Fourier ( $f = 38,5$  cm) y una cámara CMOS.

De manera que este capítulo ha sido estructurado de la siguiente forma, en la sección 2.2 se detalla el montaje experimental utilizado para la generación de un haz BG. En la sección 2.3 se describe la creación de los HGC utilizados para la generación de un haz BG. En la sección 2.4 se describe el montaje experimental para la generación y detección de los VOP. Finalmente en la sección 2.5 se detalla el montaje experimental para verificar el contenido de momento angular orbital presente en un VOP mediante la utilización de una apertura triangular equilátera.

## 2.2 MONTAJE EXPERIMENTAL PARA LA GENERACIÓN DE HACES BESSEL-GAUSS

El primer instrumento aunque no elemental, pero sí necesario a utilizar es la mesa óptica, la cual garantiza estabilidad de los elementos ópticos para la obtención de resultados experimentales de los VOP.

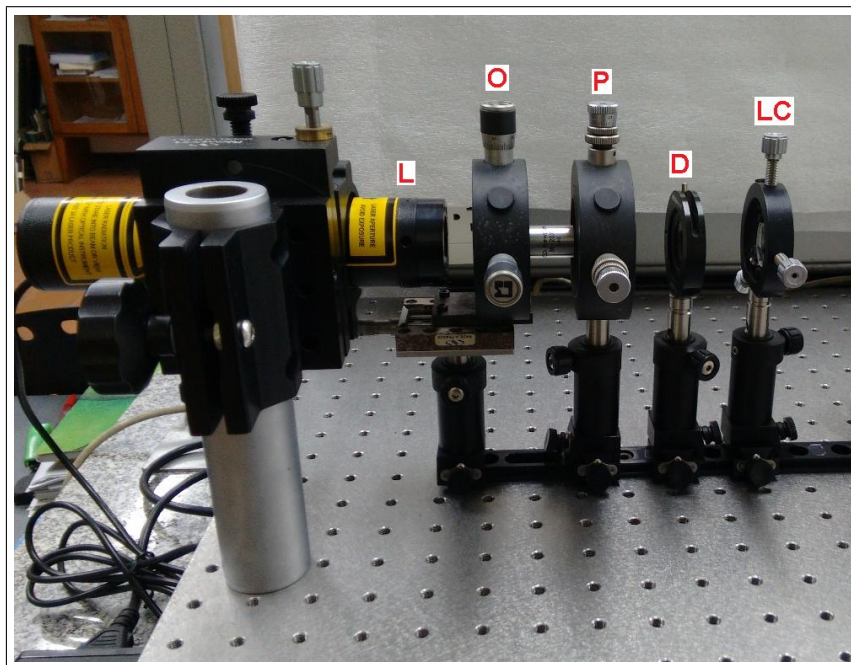
La primera etapa experimental consiste en alinear, filtrar y colimar un haz láser de 632.8 [nm] de longitud de onda, sobre el banco óptico. Las principales características técnicas del láser se encuentran en la Tabla 1. Para llevar a cabo el filtrado y colimado del haz en primer lugar se alinea el haz láser a una posición específica con el fin de fijar la altura en el montaje óptico. Luego utilizando un objetivo de microscopio de 0.40 [mm] de distancia focal junto a un pinhole de 20 [ $\mu m$ ] de diámetro, el láser es filtrado espacialmente, es decir removidas las fluctuaciones aleatorias de mayor frecuencia del perfil del haz láser en el modo  $TEM_{00}$ . Finalmente el haz láser es colimado usando una lente convexa de 17 [mm] de distancia focal. La elección de la lente fue hecha teniendo en cuenta la forma de iluminar completamente el área activa de la matriz de cristal líquido que forma parte del MEL por transmisión. La Fi-

gura 12 muestra el montaje usado para filtrar y colimar el haz láser en el modo transversal electromagnético  $TEM_{00}$ .

Tabla 1: Algunas especificaciones técnicas del láser Helio-Neón.

<b>Láser Helio-Neon Research Electro optics, Inc.</b>	
Modelo	31005
Dimensiones	177.8 x 44.5 mm
Longitud de onda	632.8 nm
Diámetro del haz	0.57 mm
Potencia salida promedio	35 mW
Polarización	Aleatoria
Modo espacial	$TEM_{00}$
Divergencia del haz	1.41 mrad

Figura 12: Montaje experimental para filtrar y colimar el haz láser en el modo  $TEM_{00}$ . Láser (L), objetivo de microscopio (O), pinhole (P), diafragma (D) y lente colimadora (LC).



### 2.2.1. Generación experimental de haces Bessel-Gauss

Una vez obtenido experimentalmente el filtrado y colimado del haz en el modo  $TEM_{00}$ , entonces se utiliza un modulador espacial de luz (MEL) por transmisión. El MEL por transmisión fue insertado en el medio de dos polarizadores con la finalidad de obtener imágenes experimentales en intensidad como se muestra más adelante en la Figura 17. Las principales características técnicas del modulador espacial de luz y los polarizadores dicroicos son mostradas en la Tabla 2 y en la Tabla 3, respectivamente.

Antes de iluminar el sistema formado por el polarizador-MEL-polarizador, con la condición de monocromaticidad de la onda incidente, es necesario generar numéricamente los hologramas tipo axicón que serán asignados dinámicamente al MEL dentro del sándwich P-MEL-P. La Figura 13 muestra el montaje experimental completo utilizado para filtrar y colimar el haz láser de longitud de onda 632.8 [nm], además de generar los hologramas tipo axicón in situ.

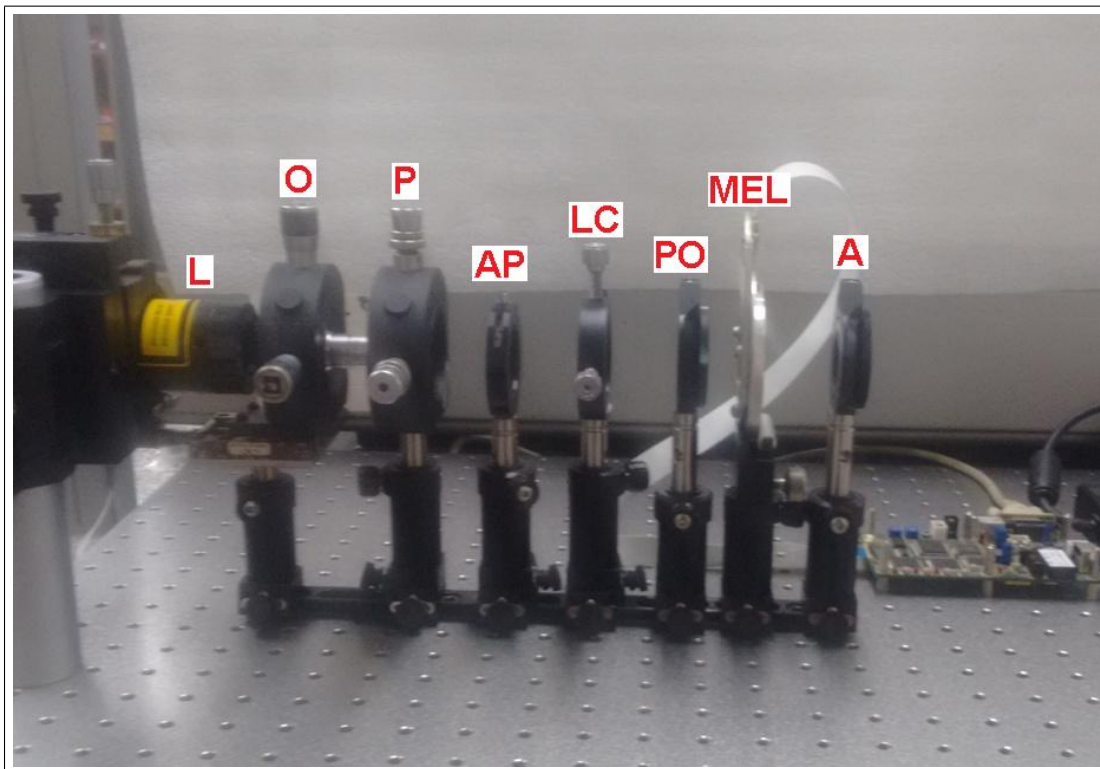
Tabla 2: Algunas especificaciones técnicas del modulador espacial de luz por amplitud.

<b>Modulador espacial de luz XGA1</b>	
Estructura	Cristal liquido Twisted Nematic
Área activa	36,9 x 27,6 mm
Resolución	1024 x 768 Pixeles
Tamaño del pixel	36 $\mu m$
Dimensiones del pixel	33 x 25 $\mu m$
Frecuencia del pixel	65 MHz

Tabla 3: Algunas especificaciones técnicas de los polarizadores

POLARIZADOR LINEAL DE PRECISIÓN NEWPORT	
Modelo	Newport 10LP-VIS-B
Longitud de onda recomendada	430-670 nm
Material polarizador	BK 7
Diámetro externo	25.4mm
Reflectividad	<0.5 % 400-700nm
Tranmisión	T>37 %
Desviación del haz	$\leq 1$ arc min
Rango de Temperatura	(-50) $^{\circ}$ C – 50 $^{\circ}$ C

Figura 13: Montaje experimental para filtrar y colimar el haz láser en el modo  $TEM_{00}$ . Láser (L), objetivo de microscopio (O), pinhole (P), apertura (AP), lente convexa colimadora (LC), polarizador (PO), modulador espacial de luz (MEL) y analizador (A).



## 2.3 GENERACIÓN DE HOLOGRAMAS COMPUTARIZADOS TIPO AXICÓN

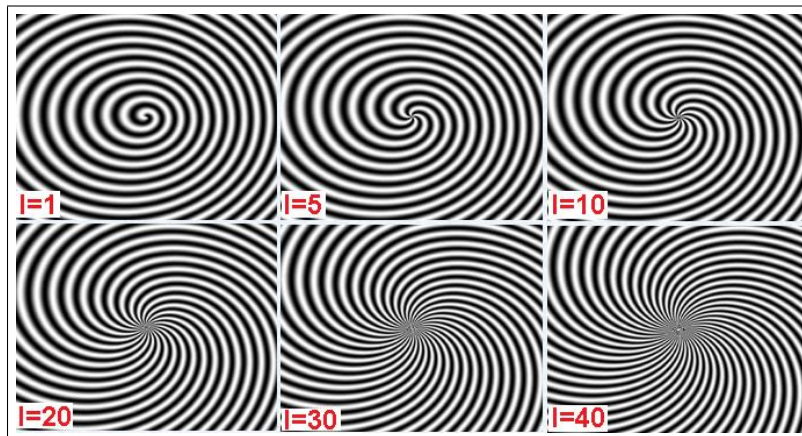
En la generación de hologramas tipo axicón es utilizado el interferograma formado por una onda plana de referencia de la forma  $\exp(ikz)$  junto a una onda de la forma  $\exp(il\theta + i\alpha r)$ . De manera que la función de transmitancia será:

$$I = 2 + 2 \cos(kz - \alpha r - l\theta). \quad (2.1)$$

La anterior red numérica puede ser obtenida haciendo uso de Matlab 2012a© para la creación de hologramas tipo axicón de 1024(H)x768(V) con número de onda asociado  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  y diferentes valores de CT. Los anteriores hologramas son equivalentes a la combinación de una función tipo radial y una función de la forma axicón.

Algunos de los hologramas utilizados para generar haces BG son mostrados en la Figura 14 para los valores de carga topológica  $l = 1, 5, 10, 20, 30$  y  $l = 40$ ; y ampliados para su mejor visualización. Para todas las anteriores máscaras holográficas el parámetro de axicón dado como  $\alpha = k \sin\left(\frac{k_r}{k}\right)$  se mantuvo constante. Sin embargo este valor de  $\alpha$  puede ser cambiado para cada holograma garantizando de esa manera el valor del diámetro constante en el VOP sobre el plano de Fourier.

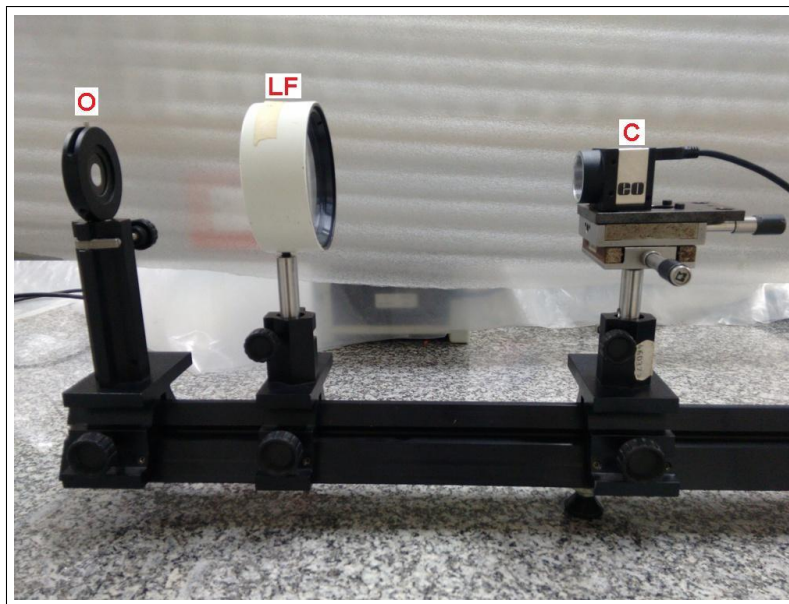
Figura 14: Diferentes hologramas numéricos tipo axicón generados con Matlab™ para valores de CT  $l = 1, 5, 10, 20, 30$  y  $l = 40$ , respectivamente.



## 2.4 MONTAJE EXPERIMENTAL DE DETECCIÓN Y OBSERVACIÓN DE VÓRTICES ÓPTICOS PERFECTOS.

Se utiliza como sistema de adquisición una cámara CMOS EO-1312c, cuyas principales características técnicas se muestran en la Tabla 4. Los parámetros de la tasa de detección y tiempo de adquisición, fueron ajustados manualmente a 10,34 fps y 102,32 ms, respectivamente, con el propósito de optimizar la adquisición\*, mientras los demás parámetros como la constante de brillo y de contraste se dejaron en el modo automático. La Figura 15 muestra un obturador, una lente de Fourier y la cámara CMOS utilizada en la detección de un VOP. La lente de Fourier tiene como finalidad encontrar a la distancia focal la figura de difracción de Fraunhofer experimental del haz Bessel-Gauss con un valor bien definido de CT, es decir obtener un VOP.

Figura 15: Montaje experimental para la generación de un vórtice óptico perfecto. Obturador (O), lente de Fourier (LF), cámara CMOS (C).



---

\*Optimizar desde el punto de vista cualitativo, es decir con estos parámetros se obtuvieron las mejores imágenes.

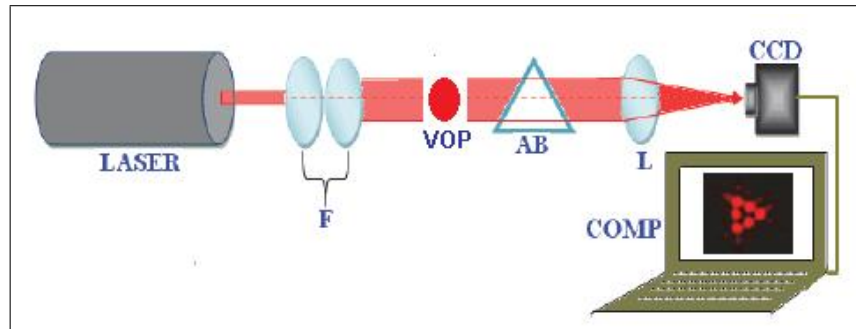
Tabla 4: Algunas especificaciones técnicas de la cámara CMOS

CÁMARA CMOS EO-1312c	
Resolución	1280x1024 pixeles (H/V)
Tamaño del pixel	4,65 [ $\mu m$ ] cuadrado
Área sensible	5,95 [mm] x 4,76 [mm] (H/V)
Sensor	Sony ICX205AK

## 2.5 MONTAJE EXPERIMENTAL PARA LA DIFRACCIÓN DE UN VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO A TRAVÉS DE UNA ABERTURA TRIANGULAR EQUILÁTERA

En la Figura 16 se muestra el montaje utilizado para demostrar experimentalmente el patrón de difracción de VOP con CT entera al difractar sobre una apertura triangular equilátera. El láser de He-Ne es utilizado como fuente monocromática, siendo filtrado y colimado al atravesar F. El VOP generado con CT entera se difracta a través de la apertura triangular equilátera (AB) colocada a una distancia de 186,1 [cm] medida desde el filtro espacial (F). Finalmente una lente de Fourier (L) es utilizada para obtener el patrón de difracción de campo lejano sobre la distancia focal de la lente (38,5 cm), en la cual se encuentra una cámara CMOS para la adquisición y posterior almacenamiento de las imágenes en el computador (COMP).

Figura 16: Montaje experimental para la difracción de un VOP. Láser, filtrado espacial (F), VOP, apertura triangular equilátera (AB), lente de Fourier (L), cámara CMOS y computador (COMP).



# RESULTADOS Y DISCUSIÓN

---

---

## 3.1 INTRODUCCIÓN

Una vez analizado teóricamente e implementado experimentalmente dos montajes: uno para la generación de un VOP y otro para la verificación de MAO presente en el VOP, en éste capítulo se mostrarán los resultados de dichos experimentos. De manera que en la sección 3.2 se muestran los resultados de intensidad obtenidos para los VOP con su respectivo análisis. Mientras que en la sección 3.3 se muestran y explican los resultados experimentales obtenidos para la difracción en campo lejano del VOP a través de la rendija triangular equilátera.

## 3.2 RESULTADOS EXPERIMENTALES DE INTENSIDAD DE UN VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO

La Figura 17 muestra los perfiles de intensidad experimentales de los VOP con valores de CT entera desde  $l = 2$  hasta  $l = 40$ , en pasos de  $l = 2$ . Mientras que la Figura 18 muestra los correspondientes resultados teóricos de la distribución de intensidad utilizando la ecuación 1.15 para los valores de CT desde  $l = 2$  hasta  $l = 40$  en pasos de  $l = 2$ .

Figura 17: Resultados experimentales para la intensidad de VOP con  $k_r = 0.5793 \left[ \frac{\lambda}{m} \right]$  y valores de CT entera desde  $l = 2$  hasta  $l = 40$  en pasos de  $l = 2$ .

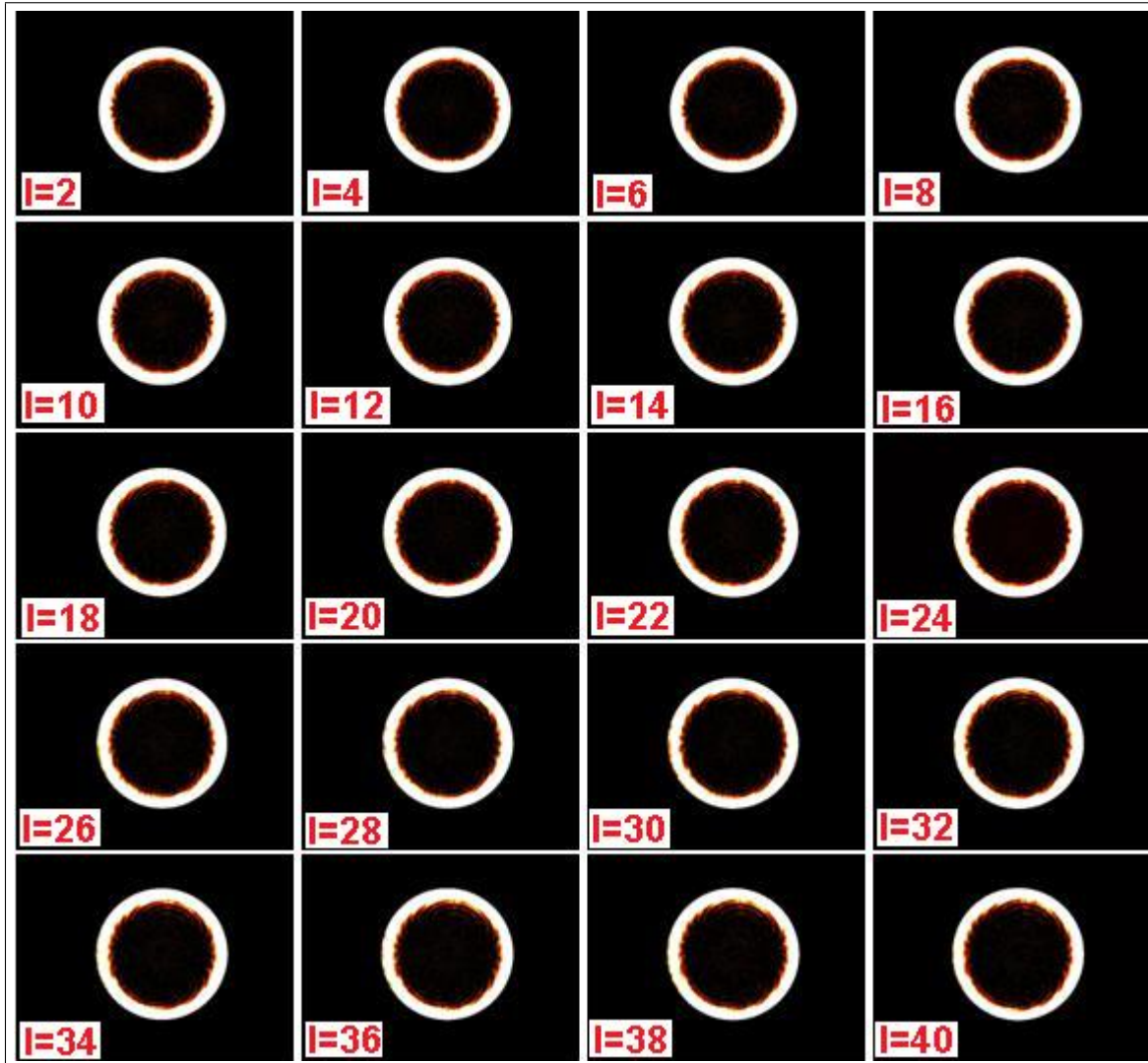
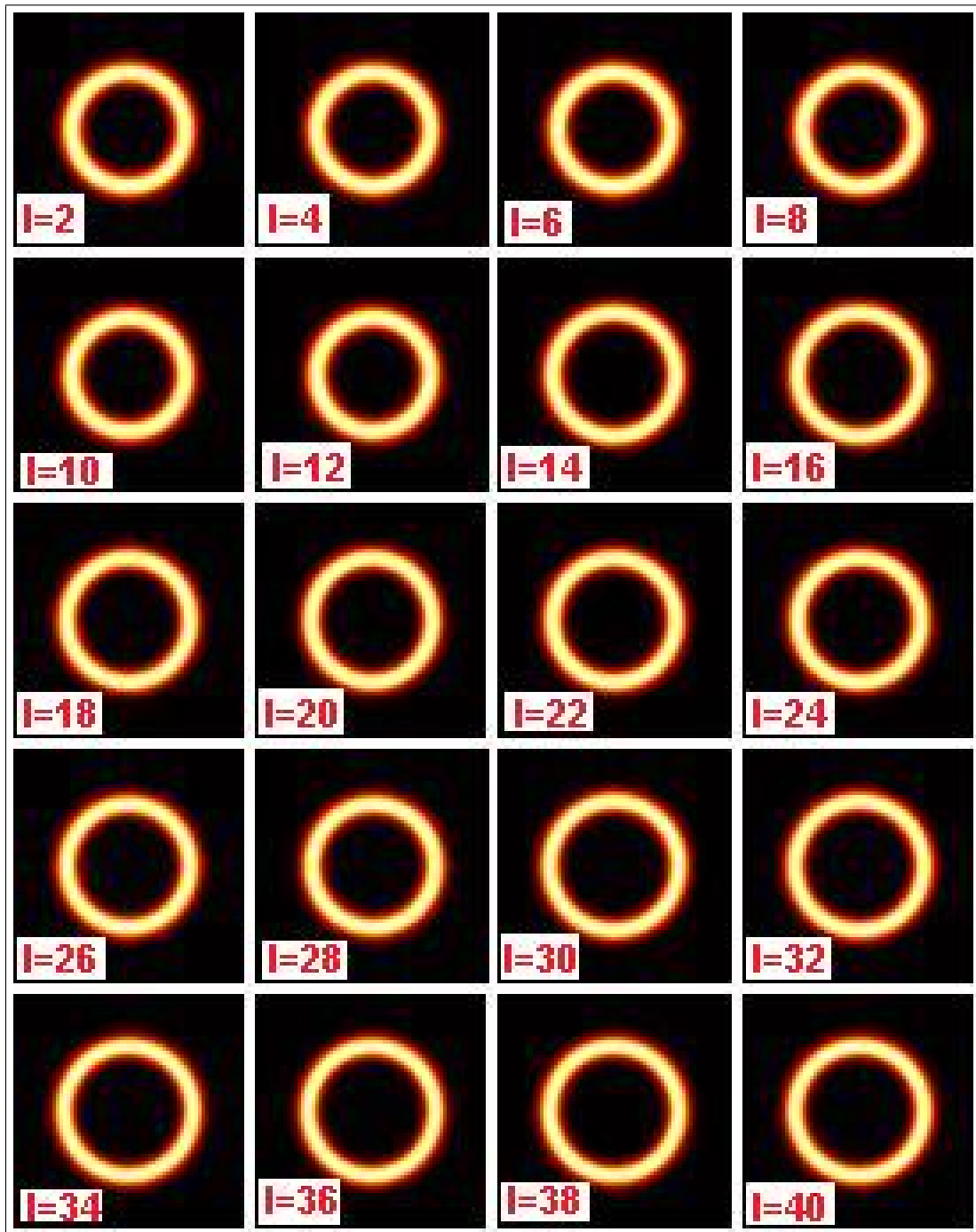


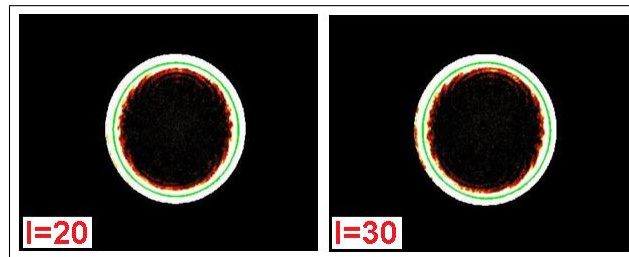
Figura 18: Resultados analíticos para la intensidad de VOP con  $k_r = 0.5793 \left[ \frac{1}{m} \right]$  y valores de CT entera desde  $l = 2$  hasta  $l = 40$  en pasos de  $l = 2$ .



En las imágenes experimentales de intensidad obtenidas para los VOP se aprecia la correspondencia con las simulaciones teóricas, referente a lo predicho analíticamente en el capítulo 1, en relación a la cuasi- invariancia del diámetro del anillo del VOP respecto del valor de la CT entera presente en el mismo haz.

Por otra parte, los radios experimentales promedio de los VOP pueden ser estimados de los perfiles de intensidad de cada anillo de la Figura 17. Estos radios experimentales pueden ser encontrados determinando el centroide de cada anillo y luego trazando una circunferencia inscrita numéricamente en cada imagen. Esta circunferencia es ajustada al valor promedio del anillo tal como se muestra en la Figura 19 para los valores de CT  $l = 20$  y  $l = 30$ . De esa manera, el radio experimental de cada VOP es la multiplicación del radio en píxeles del anillo y el tamaño real del píxel de la cámara CMOS, es decir  $(No\ de\ pixeles) \times (4,65\mu m)$ .

Figura 19: Imágenes experimentales con circunferencia inscrita para VOP con valores de CT  $l = 20$  y  $l = 30$ , respectivamente.



No obstante, dicho radio también puede ser calculado analíticamente utilizando los interceptos entre las funciones de Bessel modificada de primera especie para cada valor de CT y la función exponencial como se describió en el capítulo 1. Por tanto tendremos que las columnas 2 y 3 de la Tabla 5 muestran los valores de los radios teóricos y experimentales de los VOP con diferentes valores de CT, respectivamente. Ahora, si se halla la razón entre estos valores se encuentra que su razón es muy cercana a la unidad, con un error que no supera el valor del 5%. La exactitud entre los valores experimentales y teóricos pueden ser mejoradas sustancialmente si la matriz de cristal líquido del MEL por transmisión permitiese ser operada píxel a píxel en lugar de columnas y filas de píxeles.

Tabla 5: Valores de los radios teórico y experimental de vórtices ópticos perfectos para valores de carga topológica entera y su respectiva razón.

<b>Valores de los radios teórico y experimental de VOP con CT entera</b>			
<b>CT</b>	<b>TEÓRICO [mm]</b>	<b>EXPERIMENTAL [mm]</b>	<b>RAZÓN</b>
2	0.612	0.623	1,0181
4	0.620	0.626	1,0088
6	0.625	0.628	1,0044
8	0.629	0.630	1,0017
10	0.631	0.632	1,0022
12	0.633	0.635	1,0027
14	0.635	0.637	1,0032
16	0.638	0.639	1,0022
18	0.641	0.642	1,0011
20	0.644	0.644	1,0000
22	0.647	0.646	0,9989
24	0.651	0.649	0,9964
26	0.654	0.651	0,9954
28	0.657	0.653	0,9944
30	0.659	0.656	0,9949
32	0.660	0.658	0,9969
34	0.661	0.660	0,9989
36	0.665	0.663	0,9964
38	0.668	0.665	0,9954
40	0.701	0.667	0,9518

Las desviaciones estándar de la Tabla 5 correspondientes a los valores teóricos, experimentales y a la razón (cociente del valor experimental y teórico) equivalen a  $0,5 \mu\text{m}$ ,  $0,46 \mu\text{m}$  y  $0,0055$ , respectivamente.

Tabla 6: Valores de los radios interno y externo promedio experimental de vórtices ópticos perfectos obtenidos para carga topológica entera y su anchura.

<b>Valores de los radios interno y externo experimental para CT entera</b>			
<b>CT</b>	<b>Radio interno [mm]</b>	<b>Radio externo [mm]</b>	<b>Anchura del haz [mm]</b>
2	0,558	0,707	0,149
4	0,562	0,711	0,149
6	0,562	0,711	0,149
8	0,562	0,716	0,154
10	0,562	0,716	0,153
12	0,562	0,716	0,153
14	0,567	0,720	0,153
16	0,567	0,721	0,154
18	0,572	0,725	0,153
20	0,572	0,725	0,153
22	0,572	0,725	0,153
24	0,575	0,729	0,154
26	0,577	0,730	0,153
28	0,576	0,735	0,153
30	0,581	0,735	0,153
32	0,586	0,739	0,153
34	0,586	0,739	0,153
36	0,586	0,739	0,153
38	0,586	0,739	0,153
40	0,591	0,744	0,153

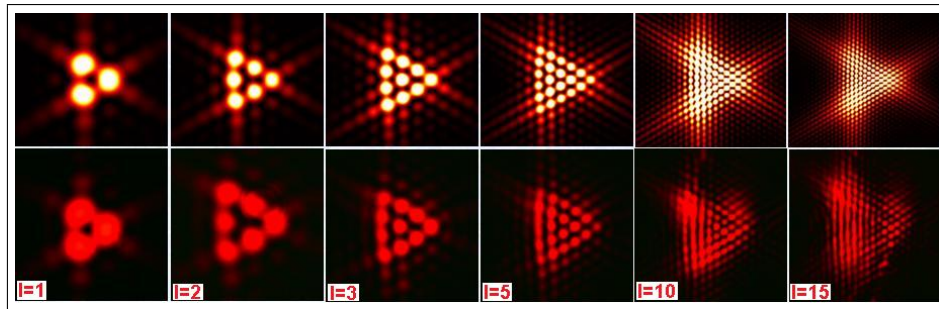
Las desviaciones estándar de la Tabla 6 correspondientes a los radios interno, externo y el ancho del haz (diferencia entre el radio externo y el interno) equivalen a 0.005 mm, 0.005 mm y 0.010 mm, respectivamente. Adicionalmente, de los resultados experimentales obtenidos es posible estimar el ancho de cada anillo presente en un VOP, usando la diferencia entre los

radios promedio externo e interno, respectivamente. La cuarta columna de la Tabla 6 muestra los resultados experimentales de los valores obtenidos para esta diferencia. En dicha tabla puede apreciarse que el valor experimental del ancho del anillo tiene un valor mínimo de  $0.149 \pm 0.010$  [mm] y un valor máximo de  $0.154 \pm 0.010$  [mm]. De acuerdo con la ecuación teórica mostrada en el capítulo 1, el ancho del anillo  $w_0 = 0.155$  [mm]. Por tanto el error asociado a dicho ancho no supera el 4%.

### 3.3 RESULTADOS EXPERIMENTALES DE LA DIFRACCIÓN DE VÓRTICES ÓPTICOS PERFECTOS A TRAVÉS DE UNA RENDIJA TRIANGULAR EQUILÁTERA

La segunda fila de la Figura 20 muestra las imágenes experimentales de las distribuciones de intensidad obtenidas de la difracción de Fraunhofer de un VOP con un valor bien definido de CT, a través de una rendija triangular equilátera.

Figura 20: Resultados numéricos (primera fila) y experimentales (segunda fila) de la difracción de un VOP a través de una abertura triangular equilátera para CT  $l = 1, 2, 3, 5, 10$  y  $l = 15$ .



En estas imágenes experimentales de difracción se aprecia la correspondencia con la forma de la red triangular obtenida numéricamente para iguales valores de CT presente en el VOP, y mostrados en la primera fila de la Figura 20. De ambos resultados podría inferirse que el valor de la CT presente en el VOP es igual al número de puntos con mayor intensidad presentes en cada lado de la red triangular formada menos uno [31-32]. Los anteriores resultados de difracción de campo lejano permiten corroborar experimentalmente que los VOP transportan MAO con valor entero bien definido.

# CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

---

---

## 4.1 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se estudió tanto de forma teórica como experimental la generación de vórtices ópticos perfectos obtenidos a partir de la transformada de Fourier de una distribución de campo tipo Bessel-Gauss con un valor bien definido de  $CT$ . Para esto, se dividió el contenido de este trabajo en tres capítulos, cada uno con conclusiones y resultados relacionados entre sí, por esta razón las conclusiones pueden ser divididas en dos apartados:

### **Teóricas:**

- Se analizó el concepto de vórtice óptico perfecto como un haz luminoso con momento angular orbital cuyo diámetro es independiente del valor de la carga topológica entera presente en el mismo.
- Se analizó la estructura de campo de un vórtice óptico perfecto, y se demostró que solamente es posible obtenerlo en el plano focal imagen de una lente convergente. Además se probó que existen pequeñas variaciones del radio del orden de las centésimas de milímetro conforme el valor de carga topológica aumenta en el haz. Con un error que no supera el tamaño del pixel.
- Se establecieron las condiciones de propagación de un vórtice óptico perfecto después del plano de Fourier (rango de Rayleigh) y se demostró que allí el valor del diámetro

depende del valor de la carga topológica presente en el haz; es decir ya no son perfectos.

### **Experimentales:**

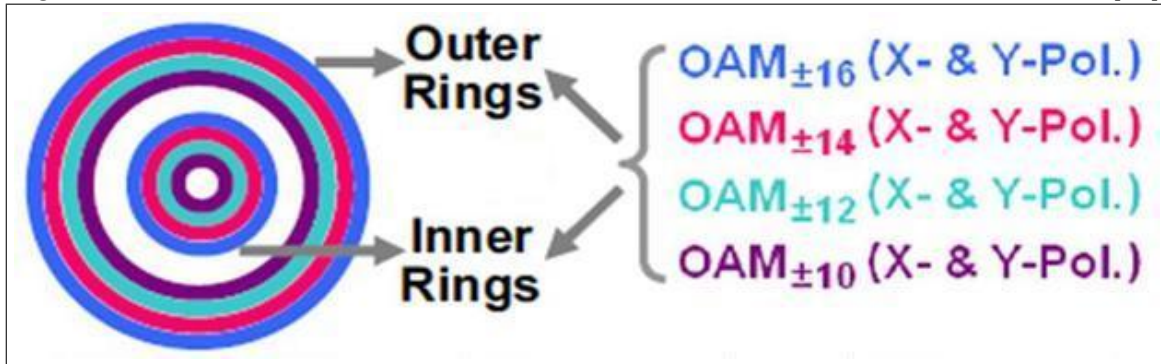
- Se ajustaron las condiciones técnicas para la generación de un vórtice óptico perfecto utilizando una matriz de cristal líquido por transmisión como principal elemento generador de un haz tipo Bessel-Gauss.
- Se generaron hologramas numéricos computarizados de la forma axicón para producir haces tipo Bessel-Gauss con una dependencia en el número de onda radial.
- Se utilizó una cámara CMOS para la detección de los vórtices ópticos perfectos, obteniéndose una completa correspondencia entre las imágenes para la intensidad experimental y teórica como se aprecia en la Figura 17 y la Figura 18, respectivamente.
- A partir de las imágenes experimentales de los vórtices ópticos perfectos se determinó el radio promedio experimental comparado posteriormente con el correspondiente valor teórico y se obtuvo que su error no supera el 5%.
- Se implementó un montaje para la difracción de un vórtice óptico perfecto a través de una rendija triangular equilátera y se demostró que el valor de la carga topológica presente en el haz coincide con el patrón de difracción en campo lejano propio de un haz con un momento angular orbital bien definido.

## 4.2 PERSPECTIVAS

En los capítulos anteriores se estableció teóricamente y verificó experimentalmente que los vórtices ópticos perfectos pueden ser obtenidos mediante haces tipo Bessel-Gauss con un valor de carga topológica bien definida. Ahora, tal como se mostró, estos VOP presentan una invarianza, prácticamente, del diámetro respecto del valor de CT presente en el haz.

Esta última propiedad representa una potencial aplicación en el tema de la transmisión de información utilizando haces con momento angular orbital, en donde la multiplexación de modos con MAO ha permitido una capacidad de hasta 100,8 Tb/s en el espacio libre [12] y hasta 400 Gb/s en una fibra vórtica[10]. Sin embargo, esta multiplexación de datos utilizando diferentes valores de CT representa a su vez diferentes tamaños de anillos con MAO como puede verse en la Figura 21. Lo anterior representa una dificultad tecnológica al momento de insertar los vórtices dentro de una fibra óptica, por ejemplo.

Figura 21: Esquema de la multiplexación de información utilizando haces con MAO. Fuente: [30].



## PRODUCTOS ASOCIADOS


---

---

Parte de los resultados reportados en este trabajo han sido aceptados y presentados en eventos académicos: Para el XIV ENCUENTRO NACIONAL DE ÓPTICA Y V CONFERENCIA ANDINA Y DEL CARIBE, llevado a cabo en Santiago de Cali, Colombia, se envió el resumen el cual fue aceptado y se presentó el póster relacionado en la Figura 22.


- N. Anaya, C. Acevedo, Y. Torres, «Generación de vórtices perfectos mediante haces tipo Bessel-Gauss», XIV ENCUENTRO NACIONAL DE ÓPTICA Y V CONFERENCIA ANDINA Y DEL CARIBE, Santiago de Cali, Colombia, Noviembre, 2015.

Figura 22: Presentación póster Congreso ENO-CANCOA Noviembre 2015, Santiago de Cali, Colombia



Universidad Industrial de Santander

## GENERACIÓN DE VÓRTICES PERFECTOS MEDIANTE HACES TIPO BESSEL-GAUSS



GOTS

Nelson Anaya Carvajal, Cristian Acevedo & Yezid Torres Moreno  
GOTS, Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, Escuela de Física, UIS. Bucaramanga, Colombia

### RESUMEN

Los trabajos de Padgett, Berry, et al [1] han dado a conocer las diversas cualidades del momento angular orbital (MAO) de un haz luminoso, siendo impulsado su estudio por sus potenciales aplicaciones, tanto en el procesamiento y transmisión de la información [2], así como en la manipulación de materia [3].

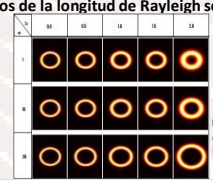
Debido a la alta aplicabilidad de los haces luminosos con momento angular orbital, es necesario implementar nuevos métodos de generación de estas distribuciones de campo óptico, especialmente distribuciones de campo con MAO que mantengan la invariancia tanto en la forma como en las dimensiones geométricas del mismo haz, independientemente del contenido de momento angular orbital presente en dicho haz.

El presente trabajo tiene como finalidad mostrar teóricamente y experimentalmente la generación de haces luminosos con momento angular orbital de tipo perfecto [4-5], es decir haces con MAO que poseen invariancia en la forma y mantienen iguales dimensiones geométricas sin importar el valor de la carga topológica (CT) del haz luminoso.

Para el haz con MAO pasando el plano de Fourier, también el campo óptico puede ser obtenido a través de la ecuación:

$$E(r, \theta, z) = A_0 \frac{w_0}{w} (-1)^l \exp(i\psi + il\theta + ikz) \exp\left(\frac{ik}{2R}(r^2 + r_r^2)\right) \exp\left(-\frac{1}{w^2}\left(r^2 - \left(\frac{r_r z}{z_r}\right)^2\right)\right) I_l\left(\frac{2r_r r \exp(i\psi)}{w_r w}\right) \quad (4)$$

Al ser evaluados las intensidades a distintas distancias múltiplos enteros y semi-enteros de la longitud de Rayleigh se obtienen:

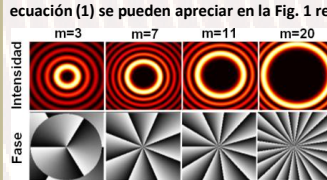


### RESULTADOS TEÓRICOS

Para derivar una expresión matemática de haz luminoso con MAO perfecto, se parte de un Bessel-Gauss en coordenadas cilíndricas con campo dado por:

$$E(\rho, \phi) = J_l(k_r \rho) \exp(il\phi) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right), \quad (1)$$

donde  $J_l$  es la función de Bessel de primera especie,  $k_r$  es el número de onda en la dirección radial,  $w_0$  es la cintura del haz gaussiano  $\phi$  y  $\rho$  son las coordenadas acimutal y radial respectivamente; y  $l$  es la carga topológica presente en el haz. Los perfiles de intensidad y fase descritos por la ecuación (1) se pueden apreciar en la Fig. 1 respectivamente.



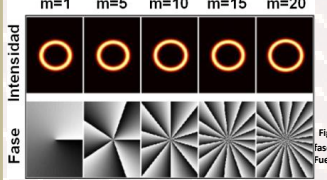
El haz con MAO de tipo perfecto es generado por la transformada de Fourier del campo Bessel-Gauss, es decir

$$E(r, \theta) = \frac{k}{2\pi i f} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty E(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi \exp\left(-\frac{ik}{f} \rho r \cos(\theta - \phi)\right), \quad (2)$$

Luego el campo total será,


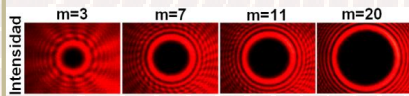
$$E(r, \theta) = i^{l-1} \frac{w_g}{w_0} \exp(il\theta) \exp\left(-\frac{r^2 + r_r^2}{w_0^2}\right) I_l\left(\frac{2r_r r}{w_0^2}\right). \quad (3)$$

Siendo  $I_l$  la función de Bessel de segunda especie de orden  $l$  y  $r_r$  el radio del haz con MAO de tipo perfecto que depende exclusivamente del valor de  $k_r$ .

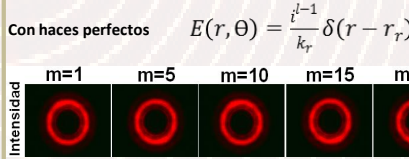


### RESULTADOS EXPERIMENTALES

El montaje utilizado es mostrado en la Fig. 4

Con haces perfectos

$$E(r, \theta) = \frac{i^{l-1}}{k_r} \delta(r - r_r) * \exp(il\theta), \quad (5)$$


### CONCLUSIONES

Se demuestra de forma teórico-experimental que es posible tener haces MAO con iguales dimensiones geométricas sin importar el valor de la carga topológica (CT) del haz luminoso, sólo en el plano de Fourier.

### BIBLIOGRAFÍA

- [1] Andrews, D., y Babiker, M., *The angular momentum of light*, 1 edición, Cambridge university Press (2013).
- [2] Wang, J., Willner, A., et al, *Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing*, Nature Photonics 6(7), 488-496 (2012).
- [3] Bishop, A., Rubinstein-Dunlop, H., *Optical microrheology using rotating laser-trapped particles*, Physical Review letters 92(19), 198104 (2005).
- [4] Ostrovsky, A., Arrizon, V., et al, *Generation of the "perfect" optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator*, Optics letters 38(4), 534-536 (2013).
- [5] Valtý, P. y Rusch L., *Perfect vortex beam: Fourier transformation of a Bessel beam*, Optics letters 40(4), 597-600 (2015).

# APÉNDICES

---

---

## Apéndice A Transformación de Fourier

Teniendo inicialmente la ecuación de difracción de Fraunhofer [27] definida en coordenadas cartesianas como:

$$E(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} E(\epsilon, \eta) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda z} (x\epsilon + y\eta)\right] d\epsilon d\eta \quad (1)$$

Aislando el término del factor de fase  $\exp(ikz)$  y tan sólo toma en cuenta la fase debida a la propagación de la onda en la ecuación anterior ya que no afecta las variables directas e inversas en la transformación.

Ahora bien, llevando la ecuación 1 en términos de coordenadas cilíndricas, con el uso de las siguientes relaciones:

$$E(x, y) \Rightarrow E(r, \theta) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sen \theta \end{cases} \quad (2)$$

Además de:

$$E(\epsilon, \eta) \Rightarrow E(\rho, \phi) \quad \begin{cases} \epsilon = \rho \cos \phi \\ \eta = \rho \sen \phi \end{cases} \quad (3)$$

cuyo Jacobiano es

$$J \begin{pmatrix} \epsilon & \eta \\ \rho & \phi \end{pmatrix} = \rho d\rho d\phi \quad (4)$$

Reemplazando los términos de las ecuaciones 2 a 4 en la ecuación 1, así:

$$\begin{aligned} E(r, \theta) &= \frac{1}{i\lambda z} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E(\rho, \phi) \exp \left[ -\frac{ik}{z} (r \cos \theta \rho \cos \phi + r \sin \theta \rho \sin \phi) \right] \rho d\phi d\rho \\ &= \frac{k}{2\pi iz} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E(\rho, \phi) \exp \left[ -\frac{ik\rho r}{z} \cos(\theta - \phi) \right] \rho d\phi d\rho \end{aligned} \quad (5)$$

Quedando finalmente demostrada la ecuación de transformación óptica de Fourier en coordenadas cilíndricas, a lo largo del eje  $z$ , es decir en el plano de propagación.

## Apéndice B

### Desarrollo de la integral U planteada en la ecuación 1.4 mediante la identidad de Anger-Jacobi

Tomando la integral U planteada en la ecuación 1.4

$$U = \int_0^{2\pi} \exp\left(il\phi + il' \cos(\theta - \phi)\right) d\phi. \quad (1)$$

Ahora, sustituyendo:  $v = \theta - \phi \Rightarrow dv = -d\phi$  quedando:

$$U = - \int_{\theta}^{\theta-2\pi} \exp\left[i\left(l(\theta - v) + l' \cos v\right)\right] dv. \quad (2)$$

Haciendo uso de la identidad de Jacobi-Anger formulada a continuación para resolver la integral definida anteriormente:

$$\exp(iz \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) \exp(in\theta) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos(n\theta), \quad (3)$$

quedando:

$$\begin{aligned} U &= - \exp(il\theta) \int_{\theta}^{\theta-2\pi} \exp(-ilv) \left[ J_0(l') + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(l') \cos(nv) \right] dv \\ &= - \exp(il\theta) \left[ \underbrace{\int_{\theta}^{\theta-2\pi} \exp(-ilv) J_0(l') dv}_{U_1} + \underbrace{\int_{\theta}^{\theta-2\pi} 2 \exp(-ilv) \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(l') \cos(nv) dv}_{U_2} \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales definidas por  $U_1$  y  $U_2$ :

Desarrollando  $U_1$ :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \int_{\theta}^{\theta-2\pi} \exp(-ilv) J_0(l') dv \\
 &= J_0(l') \int_{\theta}^{\theta-2\pi} \exp(-ilv) dv = J_0(l') \frac{\exp(-ilv)}{-il} \Big|_{\theta}^{\theta-2\pi} \\
 &= -\frac{J_0(l')}{il} [\exp(-il(\theta - 2\pi)) - \exp(-il\theta)] \\
 &= -\frac{J_0(l')}{il} \exp(-il\theta) [\exp(i2\pi l) - 1] \\
 &= -\frac{J_0(l')}{il} \exp(-il\theta) \left[ \cos(2\pi l) + i \operatorname{sen}(2\pi l) - 1 \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Desarrollando  $U_2$ :

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \int_{\theta}^{\theta-2\pi} 2 \exp(-ilv) \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(l') \cos(nv) dv \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(l') \int_{\theta}^{\theta-2\pi} \exp(-ilv) \cos(nv) dv \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(l') \int_{\theta}^{\theta-2\pi} (\cos(lv) - i \operatorname{sen}(lv)) \cos(nv) dv \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(l') \left[ \underbrace{\int_{\theta}^{\theta-2\pi} \cos(lv) \cos(nv) dv}_{U_{21}} - i \underbrace{\int_{\theta}^{\theta-2\pi} \operatorname{sen}(lv) \cos(nv) dv}_{U_{22}} \right].
 \end{aligned} \tag{6}$$

Ahora, desarrollando las integrales  $U_{21}$  y  $U_{22}$  planteadas en la ecuación 6, así:

$$U_{21} = \int_{\theta}^{\theta-2\pi} \cos(lv) \cos(nv) dv = -\pi \delta_{nl}. \tag{7}$$

$$U_{22} = \int_{\theta}^{\theta-2\pi} \operatorname{sen}(lv) \cos(nv) dv = 0. \tag{8}$$

Reemplazando estos dos últimos términos en la ecuación 6:

$$U_2 = -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} i^n \delta_{nl} J_n(l') = -2\pi i^l J_l(l'). \tag{9}$$

Ahora, incluyendo los resultados de las ecuaciones 5 y 9 en la ecuación 4, tenemos:

$$U = 2\pi i^l \exp(il\theta) J_l(l'). \quad (10)$$

Quedando finalmente resuelta la ecuación 1 con el uso de la identidad de Anger-Jacobi.

## Apéndice C

### Desarrollo de la integral T de la ecuación 1.12

Desarrollando la ecuación T [26] representada en la ecuación 1.12:

$$T = \int_0^{\infty} J_l(k_r \rho) J_l\left(\frac{kr\rho}{f}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_g^2}\right) \rho d\rho. \quad (1)$$

Haciendo uso de la integral definida de la forma:

$$\int_0^{\infty} \exp^{-m^2 x^2} J_l(\alpha x) J_l(\beta x) x dx = \frac{1}{2m^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4m^2}\right) I_l\left(\frac{\alpha\beta}{2m^2}\right); l > -1; \alpha, \beta > 0, \quad (2)$$

donde  $\alpha = k_r$ ,  $\beta = \frac{kr}{f}$  y  $m^2 = \frac{1}{w_g^2}$ .

Ahora se procede a reemplazar las constantes definidas anteriormente en la ecuación 2 para resolver la ecuación T:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\infty} J_l(k_r \rho) J_l\left(\frac{kr\rho}{f}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_g^2}\right) \rho d\rho \\ &= \frac{w_g^2}{2} \exp\left(-\frac{k_r^2 + \left(\frac{k^2 r^2}{f^2}\right)}{4 \frac{w_0^2 k^2}{f^2}}\right) I_l\left(k_r \frac{kr}{f} \frac{1}{2 \frac{1}{w_g^2}}\right) \\ &= \frac{w_g^2}{2} \exp\left(-\frac{\frac{k^2}{f^2} (r_r^2 + r^2)}{w_0^2 \frac{k^2}{f^2}}\right) I_l\left(\frac{r_r k}{f} \frac{kr}{f} \frac{4 f^2}{2 w_0^2 k^2}\right) \\ &= \frac{w_g^2}{2} \exp\left(-\frac{r_r^2 + r^2}{w_0^2}\right) I_l\left(\frac{2 r_r r}{w_0^2}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que;  $w_g = \frac{2f}{w_0 k}$ ,  $k_r = \frac{kr_r}{f}$ .

Quedando finalmente resuelta en su totalidad la integral T planteada en la ecuación 1.

## Apéndice D

### Demostración de la aproximación integral de Fresnel: ecuación 1.19

Teniendo en cuenta la ecuación de aproximación de Fresnel:

$$E(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} E(\epsilon, \eta) \exp\left[\frac{ik(\epsilon^2 + \eta^2)}{2z}\right] \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z}\right] \times \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x\epsilon + y\eta)\right] d\epsilon d\eta. \quad (1)$$

Haciendo uso de las expresiones:

$$E(x, y) \Rightarrow E(r_2, \theta_2) \quad \begin{cases} x = r_2 \cos \theta_2 \\ y = r_2 \operatorname{sen} \theta_2. \end{cases} \quad (2)$$

$$E(\epsilon, \eta) \Rightarrow E(r_1, \theta_1) \quad \begin{cases} \epsilon = r_1 \cos \theta_1 \\ \eta = r_1 \operatorname{sen} \theta_1. \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{cuyo Jacobiano es:} \quad J \begin{pmatrix} \epsilon & \eta \\ \rho & \phi \end{pmatrix} = \rho d\rho d\phi. \quad (4)$$

Incluyendo las expresiones de las ecuaciones 2 a 4 en la ecuación 1, obteniendo:

$$E(r_2, \theta_2, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} E(r_1, \theta_1) \exp\left[\frac{ik}{2z}((r_1 \cos \theta_1)^2 + (r_1 \operatorname{sen} \theta_1)^2)\right] \times \exp\left[\frac{ik}{2z}((r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_2 \operatorname{sen} \theta_2)^2)\right] \times \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda z}(r_2 \cos \theta_2 r_1 \cos \theta_1 + r_2 \operatorname{sen} \theta_2 r_1 \operatorname{sen} \theta_1)\right] r_1 dr_1 d\theta_1. \quad (5)$$

Reduciendo términos, teniendo en cuenta que:

$$\cos^2(\theta_2) + \operatorname{sen}^2(\theta_2) = 1 \quad \text{y} \quad \cos \theta \cos \phi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi = \cos(\theta - \phi).$$

Llegando finalmente a la ecuación de transformación del campo sobre cualquier plano  $z$ , a lo largo del eje de propagación:

$$E(r_2, \theta_2, z) = \frac{k}{2\pi iz} \exp(ikz) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E(r_1, \theta_1) \\ \times \exp\left(\frac{ik}{2z} (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1))\right) r_1 d\theta_1 dr_1. \quad (6)$$

## Apéndice E

### Integral de Fraunhofer en campo lejano, ecuación 1.22

Utilizando el resultado de [26] se llega a:

$$I = \int_0^\infty r_1 \exp(-\alpha r_1^2) J_l(\gamma r_1) I_l(\beta r_1) dr_1 = \frac{1}{2\alpha} \exp\left(\frac{\beta^2 - \gamma^2}{4\alpha}\right) J_l\left(\frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right). \quad (1)$$

Para encontrar el resultado a la ecuación 1.22 mediante la expresión [26] dada por:

$$\begin{aligned} I &= \exp\left(\frac{ik}{2z} r_2^2\right) \int_0^\infty \exp\left(-\underbrace{\left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z}\right) r_1^2}_\alpha\right) J_l\left(\underbrace{\frac{k}{z} r_2 r_1}_\gamma\right) I_l\left(\underbrace{\frac{2r_r}{w_0^2} r_1}_\beta\right) r_1 dr_1 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z}\right)}}_{A_0} \exp\left(\frac{ik}{2z} r_2^2\right) \underbrace{\exp\left[\frac{\frac{4r_r^2}{w_0^4} - \frac{k^2 r_2^2}{z^2}}{4\left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z}\right)}\right]}_{A_1} J_l\left(\underbrace{\frac{\frac{2r_r}{w_0^2} k r_2}{2\left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z}\right)}}_{A_2}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Desarrollando las expresiones  $A_0$ ,  $A_1$  y  $A_2$  por separado:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z}\right)} = \frac{z w_0^2}{2z - ik w_0^2} = \frac{z w_0^2}{2(z - ik z_r)} \frac{z + iz_r}{z + iz_r} \\ &= \frac{z w_0^2 z_r \left(\frac{z}{z_r} + i\right)}{2z_r^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_r}\right)^2\right)} \frac{-i}{-i} = \frac{z z_r w_0^2 \left(1 - \frac{z}{z_r} i\right)}{-2iz_r^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_r}\right)^2\right)} = \frac{iz}{k} \frac{\exp(i\psi)}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_r}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \exp\left(\frac{ik}{2z} r_2^2\right) \exp\left[\frac{\frac{4r_r^2}{w_0^4} - \frac{k^2 r_2^2}{z^2}}{4\left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z}\right)}\right] = \exp\left(\frac{ik}{2z} r_2^2\right) \exp\left[\frac{\frac{4r_r^2 z^2 - k^2 w_0^4 r_2^2}{z^2 w_0^4}}{4\left(\frac{2z - ik w_0^2}{2z w_0^2}\right)}\right] \\ &= \exp\left(\frac{ik}{2z} r_2^2\right) \exp\left[\frac{(r_r^2 z^2 - z_r^2 r_2^2)(z + iz_r)}{z w_0^2 (z^2 + z_r^2)}\right] \\ &= \exp\left[\frac{(r_r^2 z^2 - z_r^2 r_2^2)}{w_0^2 (z^2 + z_r^2)}\right] \underbrace{\exp\left(\frac{ik}{2z} r_2^2\right) \exp\left[\frac{iz_r (r_r^2 z^2 - z_r^2 r_2^2)}{z w_0^2 w_0^2 (z^2 + z_r^2)}\right]}_{=1} \\ &= \exp\left[-\frac{1}{w^2} \left(r_2^2 - \left(\frac{r_r z}{z_r}\right)^2\right)\right] \exp\left[\frac{ik}{2R} (r_r^2 + r_2^2)\right]. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= J_l \left( \frac{\frac{2r_r}{w_0^2} \frac{kr_2}{z}}{2 \left( \frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z} \right)} \right) = J_l \left( \frac{\frac{2r_r r_2 k}{w_0^2 z}}{2 \left( \frac{2z - ikw_0^2}{2zw_0^2} \right)} \right) = J_l \left[ \left( \frac{r_r r_2 k}{z - iz_r} \right) \left( \frac{z + iz_r}{z + iz_r} \right) \right] \\
 &= J_l \left( \frac{r_r r_2 k (z + iz_r)}{z^2 + z_r^2} \right) = J_l \left( \frac{2r_r r_2 z_r}{w_0 \left( 1 + \frac{z^2}{z_r^2} \right)} \frac{z + iz_r}{z_r^2} \right) \\
 &= J_l \left( \frac{2r_r r_2}{ww_0} \left( \frac{\frac{z}{z_r} + i}{\sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_r} \right)^2}} \right) \right) = i^l I_l \left( \frac{2r_r r_2}{ww_0} \left( \frac{1 - i \frac{z}{z_r}}{\sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_r} \right)^2}} \right) \right) \\
 &= i^l I_l \left( \frac{2r_r r_2}{ww_0} \exp(i\psi) \right). \tag{5}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los resultados de las ecuaciones 3 a 5 para reemplazar finalmente en la ecuación 2, quedando:

$$I = \frac{iz}{k} \frac{\exp(i\psi)}{\sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_r} \right)^2}} i^l I_l \left( \frac{2r_r r_2}{ww_0} \exp(i\psi) \right) \exp \left[ -\frac{1}{w^2} \left( r_2^2 - \left( \frac{r_r z}{z_r} \right)^2 \right) \right] \exp \left[ \frac{ik}{2R} (r_r^2 + r_2^2) \right]. \tag{6}$$

Con los parámetros de un haz luminoso dados como:

$$\text{Rango de Rayleigh:} \quad z_r = \frac{kw_0^2}{2}, \tag{7a}$$

$$\text{Cintura del haz:} \quad w = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_r} \right)^2}, \tag{7b}$$

$$\text{Radio de curvatura:} \quad R = z + \frac{z_r^2}{z}, \tag{7c}$$

$$\text{Fase de Gouy:} \quad \psi = \arctan \left( \frac{z}{z_r} \right). \tag{7d}$$

# BIBLIOGRAFÍA

---

---

- [1] R.E. Beth., «Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light», *Phys. Rev.* Vol. 50, pp 115-125, 1936.
- [2] Allen L., Beijersbergen M. W., Spreeuw R. J. C., Woerdman J. P., «Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes», *Physics Review A*, Vol. 45, pp. 81-85, 1992.
- [3] M. V. Berry, «Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps». *Journal Optics A: Pure appl. Opt*, Vol. 6, No. 2 pp. 259-268, 2004.
- [4] M. Mansuripur, «Spin and orbital angular momenta of electromagnetic waves in free space», *Physical Review A*, Vol. 84, No. 033838, 2011.
- [5] L. Allen, J. Arlt, M. Padgett y N. Simpson, «An experiment to observe the intensity and phase structure of Laguerre-Gaussian laser modes», *Am. J. Phys*, Vol. 64, pp. 77-82, 1996.
- [6] L. Allen, I. MacVivar, A. T. O'Neil y M. J. Padgett, «Intrinsic and Extrinsic Nature of the Orbital Angular Momentum of a Light Beam», *Phys. Rev. Lett*, Vol. 88, No. 5, pp. 3601-3605, 2002.
- [7] M. J. Padgett y A. M. Yao, «Orbital angular momentum: origins, behavior and applications 3», *Advances in Optics and Photonics*, Vol. 2, pp. 161-204, July 2012.
- [8] G. Baldwin, K. Contreras y F. De Zela, «Observación de nuevos patrones modales en experimentos con modos láser Hermite-gaussianos y Laguerre-gaussianos», *Mosaico Cient*, Vol. 2, No. 2, pp. 47-51, 2005.

- 
- [9] S. M. Barnett, S. Franke-Arnold, F. Flossmann, J. B. Gotte, K. O'Holleran, M. J. Padgett y D. Preece, «Light beams with fractional orbital angular momentum and their vortex structure», *Opt Express*, Vol. 16, No. 2, pp. 993-1006, 2008.
- [10] H. Brunet, B. Pravin, M. Younes, S. LaRochelle y L. Rusch, «Design, fabrication and validation of an OAM fiber supporting 36 states», *Optics Express*, Vol. 22, No. 21, pp. 26117-26127, 1 noviembre 2014.
- [11] S. M. Barnett, J. Courtial y S. Franke-Arnold, «Free space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum», *Optics Express*, Vol. 12, No. 22, pp. 5448-5456, 2004.
- [12] Yan. Y, Guodong. X, Lavery. M, Huang. H, Nisar. A, Changing. B, Yongxiong. R, Yinwen. C, Long. L, Zhe. Z, Andreas. M, Moshe. T, Padgett. M, and Willner A. «High-capacity millimetre-wave communication with orbital angular momentum multiplexing», *Nature Communications*, Vol. 5 (4876), 9 pp. 2014.
- [13] N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith, H. Rubinsztein-Dunlop y M. J. Wegener, «Laser beam with singularities», *Optical and Quantum Electronics*, Vol. 24, No. 9, pp. s951-s962, 1992.
- [14] Y.Yue, Y. Yan, N Ahmed, Y. Jeng-Yuan, Z. Lin, R. Yongxiong, H. Hao, K. M. Bimbaum, B. I. Erkmen, S. Dolinar, M. Tur and A.E. Willner. «Multi-Orbital-Angular-Momentum Multi-Ring Fiber for High-Density Space-Division Multiplexing». *IEEE Photonics Journal*. Vol 5. No. 7101007 (2013).
- [15] J. Garcia, C. Rickenstorff-Parrao, R. Garcia, V. Arrizon y S. Ostrovsky, «Simple technique for generating the perfect optical vortex», *Optics Letter*, Vol. 39, No. 18, pp. 5305-5308, 2014.
- [16] B.H. Bransden and C.J. Joachain, «Quantum Mechanics», Pearson Education, Chapter 6, Second edition, 2000.
- [17] L. Allen, J. Arlt, K. Dholakia y M. J. Padgett, «The production of multiringed Laguerre-Gaussian modes by computer generated holograms», *Journal of Modern Optics*, Vol. 45, No. 6, pp. 1231-1237, 1998.

- 
- [18] S. M. Barnett, «Optical angular- momentum flux», J. Opt. B: Quantum Semiclass, Vol. 4, s7-s16, 2002.
- [19] L. Allen y M. Padgett, «Light with a twist in its tail», Contemporary Physics, Vol. 41, No. 5, pp. 275-285, 2000.
- [20] L. Allen, J. Courtial y M. Padgett, «Light's Orbital Angular Momentum», Physics Today, pp. 35-40, 2004.
- [21] <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ed/Sam-oam-interaction.png/400px-Sam-oam-interaction.png>
- [22] P. Vaity y L. Rusch, «Perfect vortex beam: Fourier transformation of a Bessel beam», Optics Letters, Vol. 40, No. 4, pp. 597-600, 2015.
- [23] V. Arrizon, A. S. Ostrovsky y C. Rickenstorff, «Generation of the "perfect" optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator», Opt. Lett, Vol. 38, No. 4, pp. 534-536, 15 February 2013.
- [24] V. Y. Bazhenov, M. S. Soskin y M. V. Vasnetsov, «Laser beam with screw dislocations in their wave fronts», JETP Letters, Vol. 52, No 8, 1990.
- [25] Alicia V. Carpentier, Humberto Michinel and José R. Salgueiro. «Making optical vortices with computer-generated holograms», Am. J. Phys. Vol 76, No. 10, pp 916-921, October 2008.
- [26] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryshik. «Table of integrals, series and products», pages 707 and 714. Seventh edition ©2007, Elsevier Inc.
- [27] J. W. Goodman, «Introduction to Fourier optics», Roberts and Company Publishers, Chapter 4, pp. 63-75, Third edition, 2005.
- [28] <http://mathworld.wolfram.com/Jacobi-AngerExpansion.html>
- [29] Métodos matemáticos III. Capítulo 3, <http://www.ifug.ugto.mx/delepine/meto23.pdf>
- [30] Y. T. Li, R. Wong, Integral and series representations of the Dirac delta function, pag 3. <http://arxiv.org/pdf/1303.1943v1.pdf>.

- 
- [31] Hakmunn. J, Fonseca. E, Soures. W y Chavez. S. «Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum», *Physic Review Letters*, Vol. 105 (2), 2p, 2010.
- [32] Acevedo. C, Diaz. C y Torres. Y. «Determination of the topological charge of a bessel-gauss beam using the diffraction pattern through of an equilateral aperture», *Dyna*, Vol. 82, No. 190, pp. 214-220 (2015).

# BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

---

---

- Acevedo. C, Diaz. C y Torres. Y. «Determination of the topological charge of a Bessel-Gauss beam using the diffraction pattern through of an equilateral aperture», *Dyna*, Vol. 82, No. 190, pp. 214-220 (2015).
- V. Arrizon, A. S. Ostrovsky y C. Rickenstorff, «Generation of the "perfect" optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator», *Opt. Lett.*, Vol. 38, No. 4, pp. 534-536, 15 February 2013.
- S. M. Barnett, S. Franke-Arnold, F. Flossmann, J. B. Gotte, K. O'Holleran, M. J. Padgett y D. Preece, «Light beams with fractional orbital angular momentum and their vortex structure», *Opt Express*, Vol. 16, No. 2, pp. 993-1006, 2008.
- H. Brunet, B. Pravin, M. Younes, S. LaRochelle y L. Rusch, «Design, fabrication and validation of an OAM fiber supporting 36 states», *Optics Express*, Vol. 22, No. 21, pp. 26117-26127, 1 noviembre 2014.
- J. Garcia, C. Rickenstorff-Parrao, R. Garcia, V. Arrizon y S. Ostrovsky, «Simple technique for generating the perfect optical vortex», *Optics Letter*, Vol. 39, No. 18, pp. 5305-5308, 2014.
- Hakmunn. J, Fonseca. E, Soures. W y Chavez. S. «Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum», *Physic Review Letters*, Vol. 105 (2), 2p, 2010.
- Yan. Y, Guodong. X, Lavery. M, Huang. H, Nisar. A, Changing. B, Yongxiong. R, Yinwen. C, Long. L, Zhe. Z, Andreas. M, Moshe. T, Padgett. M, and Willner A. «High-

---

capacity millimetre-wave communication with orbital angular momentum multiplexing», Nature Communications, Vol. 5 (4876), 9 pp. 2014.

- Y. Yue, Y. Yan, N Ahmed, Y. Jeng-Yuan, Z. Lin, R. Yongxiong, H. Hao, K. M. Bimbaum, B. I. Erkmen, S. Dolinar, M. Tur and A.E. Willner. «Multi-Orbital-Angular-Momentum Multi-Ring Fiber for High-Density Space-Division Multiplexing». IEEE Photonics Journal. Vol 5. No. 7101007 (2013).
- P. Vaity y L. Rusch, «Perfect vortex beam: Fourier transformation of a Bessel beam», Optics Letters, Vol. 40, No. 4, pp. 597-600, 2015.