ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA EL ESTUDIO Y CARACTERIZACIÓN DE LA VARIABILIDAD DE LA FRECUENCIA CARDIACA EN LA FIBRILACIÓN AURICULAR MEDIANTE EL ANÁLISIS DE LA DINÁMICA NO LINEAL

LUIS ALEJANDRO TORRES NIÑO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS

ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA

BUCARAMANGA

2010

ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA EL ESTUDIO Y CARACTERIZACIÓN DE LA VARIABILIDAD DE LA FRECUENCIA CARDIACA EN LA FIBRILACIÓN AURICULAR MEDIANTE EL ANÁLISIS DE LA DINÁMICA NO LINEAL

LUIS ALEJANDRO TORRES NIÑO

Trabajo de grado para optar el título de

INGENIERO DE SISTEMAS

Director: Ms.C. Alfonso Mendoza Castellanos

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS

ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA

BUCARAMANGA

2010

A Heidy quien siempre estuvo conmigo
y tuvo que vivir todo el caos que
conllevó este proyecto, a mi familia y
amigos

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su agradecimiento a:

Alfonso Mendoza Castellanos, profesor de la escuela de Ingeniería de sistemas de la Universidad Industrial de Santander y director de la tesis, por su paciencia y valiosas orientaciones.

A todos aquellos que de alguna u otra forma contribuyeron en el desarrollo de esta tesis y a mi proceso de formación.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

Título: ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA EL ESTUDIO Y CARACTERIZACIÓN DE LA VARIABILIDAD DE LA FRECUENCIA CARDIACA EN LA FIBRILACIÓN AURICULAR MEDIANTE EL ANÁLISIS DE LA DINÁMICA NO LINEAL*

Autor: Luis Alejandro Torres Niño**

Palabras claves: Fibrilación auricular, frecuencia cardiaca, Wavelet, Biespectro, Dinámica no lineal.

Contenido

El análisis de la variabilidad de la frecuencia cardiaca (VFC) se ha convertido en una herramienta para el pronóstico de muchas patologías, por ello su importancia. La VFC se ha tratado en los últimos años asumiendo linealidad y sobre todo gaussianidad, por lo cual, se puede llegar a resultados ambiguos. Mediante varias herramientas matemáticas se ha podido demostrar el comportamiento no lineal de la VFC (Test de Hinich, basado en el Biespectro y la Bicoherencia). Los nuevos estudios se han enfocado en el análisis de los registros ECG, mediante técnicas no lineales, incurriendo en el ámbito de la dinámica no lineal. Existen gran número de parámetros que pueden ser hallados mediante este enfoque, pero solo unos pocos son de utilidad respecto al estudio de la variabilidad de la frecuencia cardiaca, entre los cuales se encuentran, la dimensión de correlación, el exponente de Hurst y el máximo exponente de Lyapunov. Al observar los comportamientos entre registros ECG normales y aquellos que presentan Fibrilación Auricular, se observa en la reconstrucción del atractor, una diferenciación amplia entre los dos registros. Nuevas formas de estudiar la variabilidad surgen a diario, pero el análisis no lineal ha tomado fuerza durante los últimos años, demostrando su utilidad y capacidad de predecir sucesos que inicialmente se creían al azar, por lo cual, se hace una herramienta indispensable para ayudar en el pronóstico de muchas cardiopatías.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ingeniería Físico-mecánicas. Escuela de ingeniería de sistemas e informática. Director: Msc. Alfonso Mendoza Castellanos.

Title: COMPUTATIONAL ALGORITHM FOR THE STUDY AND CHARACTERIZATION OF THE HEART RATE VARIABILITY IN ATRIAL FIBRILLATION BY ANALYSIS OF NONLINEAR DYNAMICS*

Author: Luis Alejandro Torres Niño**

Keywords: Atrial fibrillation, heart rate, Wavelet, Biespectro, nonlinear dynamics.

Content

Heart rate variability analysis (HRV) has become a tool for the prognosis of many diseases, therefore its importance. The HRV was processed in recent years assuming linearity and especially gaussianidad, therefore, which could produce ambiguous results. The Non-linear behavior of the HRV has been demonstrated through several mathematical tools (Test of Hinich, based on the Bispectrum and the bicoherence). New studies have focused on analysis of the ECG records by nonlinear techniques, incurring in the field of non-linear dynamics. There are large number of parameters that can be found through this approach, but only a few are useful to the study of the heart rate variability among which are found, the correlation dimension, the Hurst exponent, and the maximum Lyapunov exponent. Observing behaviors between records normal ECG and those with fibrillation headset, seen in the reconstruction of the attractor, wide differentiation between the two registers. New ways to study the variability, emerge daily, but non-linear analysis has taken strength over the past years, demonstrating its usefulness and ability to predict events believed initially randomly, therefore, becomes an indispensable tool to help in many heart disease prognosis.

* Degree work

** Mechanical Physics Engineering Faculty, Computer systems Engineering school. Director: Msc. Alfonso Mendoza Castellanos.

INTRODUCCIÓN

La variabilidad de la frecuencia cardiaca es una herramienta que permite diagnosticar gran variedad de cardiopatías y en ese punto principal radica su importancia. La serie temporal generada por la variabilidad ha venido siendo estudiada desde sus inicios, asumiendo linealidad y gaussianidad, con el fin de simplificar cálculos y poder sacar conclusiones sobre su comportamiento. En la última década, con el aumento en la capacidad y velocidad de cálculo, los estudios han profundizado más en el comportamiento real de la señal, demostrando que en realidad este tipo de registros presentan una gran tendencia a ser no lineales y no gaussianos (Pascale Mansier, 1996), obligando a los investigadores a incurrir en el campo de la dinámica no lineal, con el fin de caracterizar adecuadamente el comportamiento de la señal de estudio.

Para analizar correctamente los registros ECG, primero se debe determinar si en realidad tienen tendencias a la no linealidad y a la no gaussianidad, con lo cual, los parámetros hallados mediante técnicas de la dinámica no lineal (Hilborn, 2004), tendrá validez. Una herramienta muy conocida en el ámbito del tratamiento de señales es el Biespectro (NIKIAS, 1987), por el cual, se puede indagar sobre el comportamiento lineal o no de las series de tiempo estudiadas. El test de Hinich está basado en esta herramienta y en una normalización de la misma conocida como Bicoherencia. Este test permite determinar tanto la no gaussianidad como la no linealidad del registro estudiado.

A pesar de la gran cantidad de herramientas que posee la dinámica no lineal, no todas son de utilidad o de significado a la hora de estudiar la variabilidad de la frecuencia cardiaca, haciendo que los diferentes estudios se enfoquen principalmente en determinar en si el registro estudiado es o no lineal, caótico y sobre qué tan predecible puede ser este. Para esto se implementan la dimensión de correlación, el exponente de Hurst y el máximo exponente de Lyapunov (Hilborn, 2004).

En el capítulo 1 se hace una descripción de la investigación de sus objetivos. En el capítulo 2 se verá una descripción detallada de la variabilidad de la frecuencia cardiaca y sobre los registros electrocardiográficos. En el capítulo 3 se profundizara en la arritmia de análisis de esta investigación, la fibrilación auricular, pasando desde su fisiopatología hasta su manejo. En el capítulo 4 se presenta en forma detallada la Transformada de Fourier, en la cual está basado el Biespectro y la Bicoherencia. En el capítulo 5 se aborda una de las herramientas matemáticas más destacadas en el análisis de señales, en los últimos años. Se hace una descripción de la herramienta conocida como Transformada Wavelet Modulus Maxima, la cual a través de la Transformada Wavelet permite hallar de forma rápida singularidades en las señales. En el capítulo 6 se presenta los diferentes métodos de filtrado utilizados para hallar los umbrales que se utilizaran en las Transformadas tanto Wavelet como Wavelet Packet. En el capítulo 7 se hace una descripción detallada del Biespectro y se describe el Test desarrollado por Hinich para la determinación de no linealidad y no gaussianidad de un registro. En el capítulo 8 se describe toda la parte matemática concerniente a la dinámica no lineal y los métodos y parámetros que se utilizaron en este trabajo. En el capítulo 9 se muestran los resultados obtenidos del procesamiento y procesamiento de las señales de estudio y finalmente en el capítulo 10 se muestran los resultados obtenidos para los parámetros de la dinámica no lineal descritos en el capítulo 8. También se hace una comparación entre los resultados obtenidos para ECG normales y aquellos que presentan Fibrilación Auricular.

1. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

1.1. OBJETIVO GENERAL

Contribuir al estudio de la Fibrilación Auricular y ayudar a descubrir patrones en el comportamiento de la señal a través de métodos computacionales y así prestar la mayor cantidad de información tanto a los investigadores como a médicos que la estudian.

Profundizar en el estudio de la variabilidad de la frecuencia cardíaca mediante el análisis de la dinámica no lineal de la señal y proseguir con la investigación que ha venido llevando a cabo en el Grupo de Investigación en Ingeniería Biomédica (GIIB) de la Universidad Industrial de Santander.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desarrollar un algoritmo basado en la trasformada de Wavelet Packet para el filtrado de la señal electrocardiográfica de pacientes con fibrilación auricular, evitando problemas posteriores en la detección de las secuencias RR, tales como son la presencia de artefactos (falsos positivos - falsos negativos).

- Detección de secuencia RR mediante un algoritmo basado en la transformada de Wavelet.

- Analizar la secuencia RR empleando el Biespectro para detectar las posibles no linealidades en la dinámica de este sistema.

- Describir y cuantificar la complejidad de la variabilidad de la frecuencia cardíaca mediante la dinámica caótica y fractales.

1.3. JUSTIFICACIÓN

Debido a la poca aceptación de los médicos al análisis no lineal de la variabilidad de la frecuencia cardíaca (a pesar de que se ha demostrado en estudios anteriores su comportamiento no lineal (GARCÍA GONZÁLEZ, 1998)), se busca dar una herramienta que dé una forma más sencilla para el análisis de la secuencia RR y a su vez apoye a los métodos clásicos (métodos estadísticos, métodos espectrales, métodos espectro-temporales) en la diagnosis y prognosis de la fibrilación auricular.

La fibrilación auricular es la arritmia más común y el estudio médico se ha basado en su tratamiento, dejando de lado el análisis de la señal, campo en el cual el grupo de investigación en ingeniería biomédica (GIIB) ha venido desempeñándose.

El análisis de la señal mediante la dinámica no lineal es relativamente nuevo y es de gran importancia, debido al comportamiento real de la interconexión de los sistemas fisiológicos y de la variabilidad de la frecuencia cardíaca.

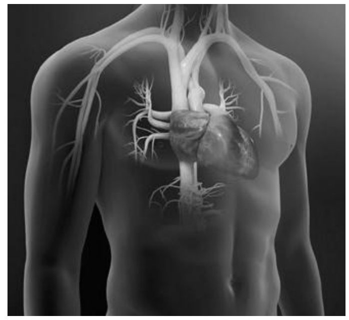
2. FUNDAMENTOS DE FISIOLOGÍA CARDÍACA

En los últimos tiempos, las ciencias de la vida han venido experimentando grandes avances, a partir del desarrollo de técnicas de análisis que ampliaron el conocimiento en mecanismos celulares y moleculares. Entre estos se destacan el conocimiento de la actividad eléctrica celular y la descripción del genoma humano. Aunque algunos investigadores sostienen que estos avances alejaron a los fisiólogos del estudio de la función de los órganos en forma integrada olvidando que las funciones del ser humano necesitan integrar la actividad de cada órgano en un sistema único y coordinado. Este sistema integrado es un sistema complejo, que da lugar a la aparición de un orden emergente diferente a la suma de las partes. Los órganos se pueden considerar como osciladores biológicos que funcionan en forma acoplada y cuyo desacople genera trastornos de la función del todo, sin que necesariamente estén afectadas las partes.

El estudio del ritmo cardiaco, es para los investigadores, un tema de gran interés desde hace tiempo (Spthen Hales, hizo la primera descripción de los cambio cíclicos de la actividad cardiaca y la presión arterial en el siglo XVIII). Las modificaciones de estos ciclos se han estudiado como indicadores de regulación cardiaca, postulando además que su estudio es una forma de analizar el acople entre órganos y por tanto puede considerarse como un índice del nivel de acople. (MIGLIARO & CONTRERAS)

2.1. ANATOMÍA Y FISIOLOGÍA DEL CORAZÓN

El corazón es el órgano que funciona como bomba muscular proporcionando energía para mover la sangre a través de los vasos sanguíneos. Este órgano se encuentra localizado en el mediastino (masa de tejido que se extiende desde el esternón hasta la columna vertebral y entre los pulmones). Descansa sobre el diafragma y dos terceras partes se encuentran a la izquierda de la línea media del cuerpo.



Fuente: (MIGLIARO & CONTRERAS)

Figura 1. Posición del corazón

2.1.1. Pericardio y Capas de la Pared Cardiaca

El corazón se encuentra rodeado por una membrana llamada pericardio, que tiene como función mantener el órgano en su posición y al mismo tiempo permitirle libertad de movimiento para poder realizar sus movimientos correspondientes. El pericardio se divide en:

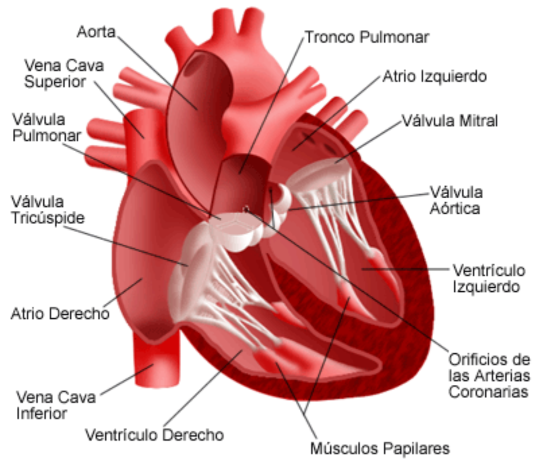
- Pericardio Fibroso: parte superficial compuesta de tejido conectivo, denso, regular, poco elástico y resistente.
- Pericardio Fibroso: parte profunda, delgada y delicada. Se divide en la capa parietal, que se fusiona con el pericardio fibroso y a capa visceral, que también se denomina epicardio.

El líquido pericardio es una secreción lubricante que se localiza entre la capa parietal y la capa visceral. Sirve para reducir la fricción mientras el corazón realiza los latidos. El espacio que contiene este líquido se llama cavidad pericárdica.

La pared cardiaca, localizada en la parte interna al pericardio, se divide en tres capas: el epicardio, el miocardio y el endocardio. El pericardio, como se indicó anteriormente se conoce como la capa visceral del pericardio seroso y está conformado por tejido conectivo. El miocardio es tejido muscular cardiaco y es el responsable de la acción de bombeo del corazón. La capa más interna es el endocardio y es una fina capa de endotelio que yace sobre una delgada capa de tejido conectivo. (MELENDEZ, 2010)

2.1.2. Cámaras Cardiacas

El corazón está dividido en cuatro cámaras. Las dos cámaras superiores reciben el nombre de aurículas o atrios y las dos inferiores se denomina ventrículos. En la cara interior de cada aurícula se encuentra una estructura llamada orejuela. Ellas aumentan levemente la capacidad de las aurículas, permitiéndole recibir un volumen mayor de sangre. En la superficie se puede observar el surco coronario (rodea la mayor parte del corazón) y los surcos interventricular anterior y posterior que marcan las divisiones entre los ventrículos derecho e izquierdo. (MELENDEZ, 2010)



Fuente: (MELENDEZ, 2010)

Figura 2. Partes principales del corazón

La aurícula o atrio derecho recibe sangre de la vena cava superior, la vena cava inferior y el seno coronario. Entre ambas aurículas se encuentra un tabique delgado llamado septum o tabique interauricular. La sangre pasa de la aurícula derecha al ventrículo derecho a través de la válvula que se llama tricúspide. Esta válvula, al igual que las otras, está compuesta de tejido conectivo denso cubierto por endocardio (MIGLIARO & CONTRERAS).

El ventrículo derecho forma la mayor parte de la cara anterior del corazón. Internamente contiene una serie de relieves formados por haces de fibras musculares cardiacas llamados trabéculas carnosas. La válvula tricúspide se conecta a unas estructuras denominadas cuerdas tendinosas que a su vez se conectan con los músculos papilares. Los ventrículos derecho e izquierdo están separados por el septum o tabique interventricular. Su destino final son los pulmones, en donde la sangre será oxigenada para luego dirigirse a la aurícula izquierda por medio de las venas pulmonares (MIGLIARO & CONTRERAS).

La aurícula o atrio izquierdo forma la mayor parte de la base del corazón. A diferencia de la aurícula derecha, esta contiene músculos pectíneos solamente en la orejuela. La sangre pasa al ventrículo izquierdo por medio de la válvula mitral o bicúspide (MIGLIARO & CONTRERAS).

El ventrículo izquierdo forma el vértice o ápex del corazón. Al igual que el ventrículo derecho, contiene trabéculas carnosas y cuerdas tendinosas que conectan la válvula mitral a los músculos papilares. Cuando la sangre sale del ventrículo izquierdo, pasa por la válvula aortica hacia la aorta ascendente. Desde esta arteria sale la irrigación para todo el cuerpo, incluyendo las arterias coronarias que irrigan el corazón (MIGLIARO & CONTRERAS).

Las válvulas tricúspide y mitral reciben el nombre de válvulas atrioventriculares o auriculoventriculares (AV). Las válvulas, pulmonar y aortica reciben el nombre de válvulas semilunares (MIGLIARO & CONTRERAS).

La pared muscular del ventrículo izquierdo es considerablemente más gruesa que la del derecho porque debe realizar un trabajo más intenso; bombear sangre a sectores más distantes como la cabeza y los miembros inferiores (MIGLIARO & CONTRERAS).

2.1.3. Circulación pulmonar

El corazón bombea sangre en dos circuitos cerrados conocidos como circulación sistémica o general y la circulación pulmonar. La circulación sistémica es bombeada por el lado izquierdo del corazón, recibiendo sangre oxigenada desde los pulmones y la eyecta hacia la aorta. Todos los órganos reciben la sangre que pasa por esta arteria exceptuando los pulmones, que reciben la sangre de la circulación pulmonar. El lado derecho del corazón en la bomba de la circulación pulmonar, que recibe sangre pobre en oxigeno proveniente de los órganos y la envía a los pulmones para liberar el dióxido de carbono y sea nuevamente oxigenada. (MELENDEZ, 2010)

2.1.4. Sistema de Conducción

El corazón tiene una red de fibras musculares cardiacas especializadas llamadas fibras automáticas (MELENDEZ, 2010). Ellas se encargan de realizar la actividad eléctrica intrínseca y rítmica que permite el latido cardiaco. Estas fibras generan potenciales de acción en forma repetitiva y a su vez disparan las contracciones cardiacas. En general se dice que tienen dos funciones importantes:

- Determina el ritmo de la excitación eléctrica actuando como marcapasos.
- Forma el sistema conductor para que cada excitación se extienda sobre el corazón.

Los potenciales de acción de propagan a través del corazón, como se describe a continuación:

- Se inicia en el nodo sinoauricular o sinoatrial (SA), localizado en la aurícula derecha.
- Se propagan a través de ambas aurículas, utilizando las vías internodales anterior, media y posterior.
- Las aurículas se contraen debido a los potenciales de acción.
- El potencial llega al nodo aurículoventricular.
- Los ventrículos se llenan por completo.
- Se propaga a través de Haz de His o Fascículo Auriculo Ventricular. Tiene dos ramas, una derecha y una izquierda para cada uno de los ventrículos.
- Después de propagarse a los largo del Haz de His, los potenciales de acción llegan a las Fibras de Purkinge, provocando la contracción de los ventrículos.

El nodo sinoauricular es el marcapasos principal del corazón (MELENDEZ, 2010). Las fibras de este nodo inician un potencial de acción cada 0.6 segundos y aunque el sistema nervioso autónomo y ciertas hormonas pueden modificar la frecuencia y la fuerza de cada latido, el ritmo es mantenido por el nodo sinoauricular.

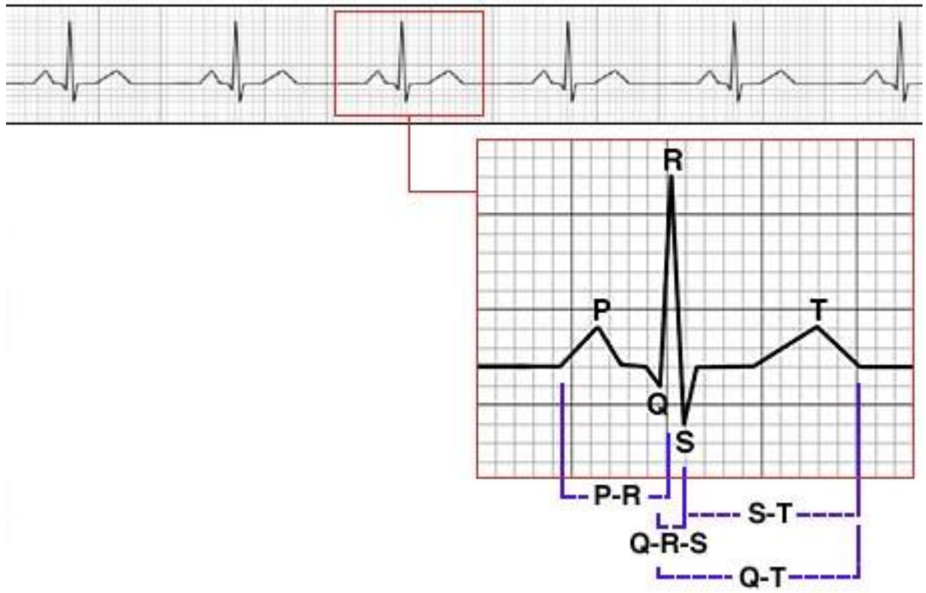
El nodo aurículoventricular también posee potencial ritmogénico, por lo que también puede actuar como marcapaso si hay fallas en el nodo sinoauricular. El Has de Hiz posee la misma característica, por lo cual si es necesario también puede asumir esta función. (MELENDEZ, 2010)

2.2. EL ELECTROCARDIOGRAMA

Una de las opciones para obtener los potenciales eléctricos, en la inserción de electrodos que penetren el cuero cabelludo o insertándolos en el corazón, atravesando las paredes torácicas, obteniéndolos de forma directa, aunque estos procedimientos en la práctica no son usados. Tanto el electrocardiograma como el electroencefalograma son obtenidos de forma indirecta.

Debido a la capacidad de los tejidos para conducir los potenciales eléctricos, los potenciales se captan y registran en forma indirecta o derivada, desde puntos situados en la vecindad del órgano explorado. Este procedimiento tiene como inconveniente el no registro de los fenómenos con total pureza ni potencia primitiva, debido a que los tejidos que rodean al corazón y al cerebro aportan también potenciales propios que lo alteran y disminuyen. En la práctica, estos inconvenientes son ignorados debido a la sencillez de la exploración.

La propagación de los potenciales de acción es observada en el electrocardiograma superficial.



Fuente: (Davita)

Figura 3. Electrocardiograma superficial normal

En la figura 3 aparecen las ondas constituyentes de todo electrocardiograma: onda P, complejo QRS y onda T. La onda P corresponde a la despolarización (contracción) de las aurículas, el complejo QRS corresponde a la despolarización (contracción) de los ventrículos y la onda T corresponde a la repolarización (distención) de los ventrículos. La repolarización de las aurículas queda oculta por el complejo QRS (Médicas).

El electrocardiograma consta de 12 derivaciones, que son el resultado de la exploración indirecta del corazón desde distintos planos.

Las primeras derivaciones fueron descritas por Einthoven[1] a principios del siglo XX y se le conoce como derivaciones estándares o clásicas. Se basan en una concepción de bipolaridad (polo positivo menos polo negativo) y debido a esto también reciben el nombre de derivaciones bipolares. Con el tiempo surgieron las derivaciones unipolares que se basan en potenciales proyectados sobre ambos brazos y la pierna izquierda. Reciben los nombres de VR, VL y VF (por sus siglas en ingles). Por ultimo surgieron las seis derivaciones precordiales, también unipolares, que completan la exploración del corazón desde todos los planos anteriores, laterales y posteriores (Médicas).

[1] (Semarang, actual Indonesia, 1860-Leiden, Países Bajos, 1927) Fisiólogo holandés. Se graduó en la Universidad de Utrecht e ingresó como profesor de fisiología en la de Leiden, donde permaneció desde 1886 hasta su muerte. En 1903 desarrolló el galvanómetro que lleva su nombre, gracias al cual logró medir las diferencias de potencial eléctrico experimentadas por el corazón durante las contracciones sistólicas y diastólicas y reproducirlas gráficamente

2.2.1. Las Derivaciones Estándares de Einthoven D1, D2 y D3

El razonamiento de Einthoven se basa en la idea de la construcción de un triángulo imaginario, formado por las raíces de los miembros, sobre cuyos lados se proyectan las fuerzas eléctricas emanadas desde el musculo cardiaco. En la práctica se emplean los miembros superiores y el inferior izquierdo para construir este triángulo.

Las 3 derivaciones de Einthoven tienen su fundamento bioeléctrico en la teoría del dipolo. La región basal (base del corazón) se proyecta sobre el brazo derecho, constituyendo el polo negativo en las derivaciones bipolares. Como la onda de excitación marcha de base a punta y, al aproximarse al brazo y pierna izquierda, los convierte en polos positivos.

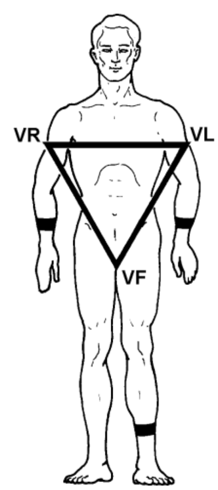
Las derivaciones de Einthoven se integran de la siguiente manera (Médicas):

D1: Brazo izquierdo menos brazo derecho.

D2: Pierna izquierda menos brazo derecho.

D3: Pierna izquierda menos brazo izquierdo.

La derivación D3 queda integrada por dos polos con cargas positivas, en donde se conduce como electronegativo el polo que tenga menos carga positiva, por lo que el brazo izquierdo se toma como polo negativo. (Médicas)



Fuente: (Médicas)

Figura 4. Esquema del triángulo de Einthoven

Las derivaciones estándares están altamente relacionadas, guardando altas proporciones entre sí, de modo que el voltaje de los fenómenos que se recogen en D1, D2 y D3 tienen una relación matemática enunciada por Einthoven: D2=D1+D3.

En la práctica electrocardiográfica se emplea la siguiente terminología para nombra los ángulos del triángulo: Right (Derecho), Left (Izquierdo) y Feet (pierna) y se antepone la inicial V para denotarlos como vectores. Con esta nomenclatura las derivaciones estándares quedan integradas como sigue:

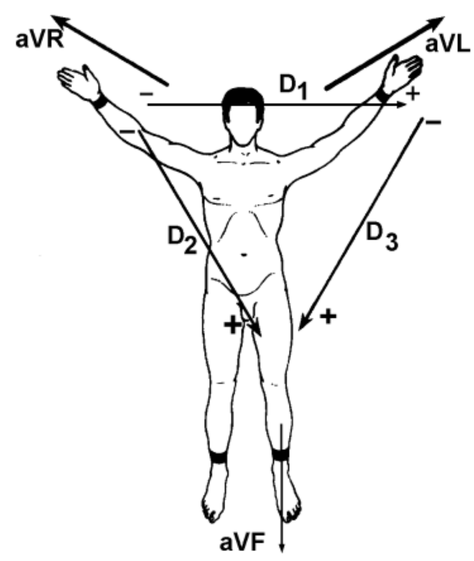
$$D1 = VL - VR$$

$$D2 = VF - VR$$

$$D3 = VF - VL$$

2.2.2. Derivaciones Unipolares de Miembros VR, VL y VF

Su característica general es la obtención de las tres derivaciones a partir de un electrodo explorador, que tiene como polo contrario un potencial cercano a cero. Debido a esto, el dipolo explorador, no está grandemente influenciado y su potencial intrínseco apenas es alterado, obteniéndose un registro con mayor nitidez y libre de interferencias.



Fuente: (Médicas)

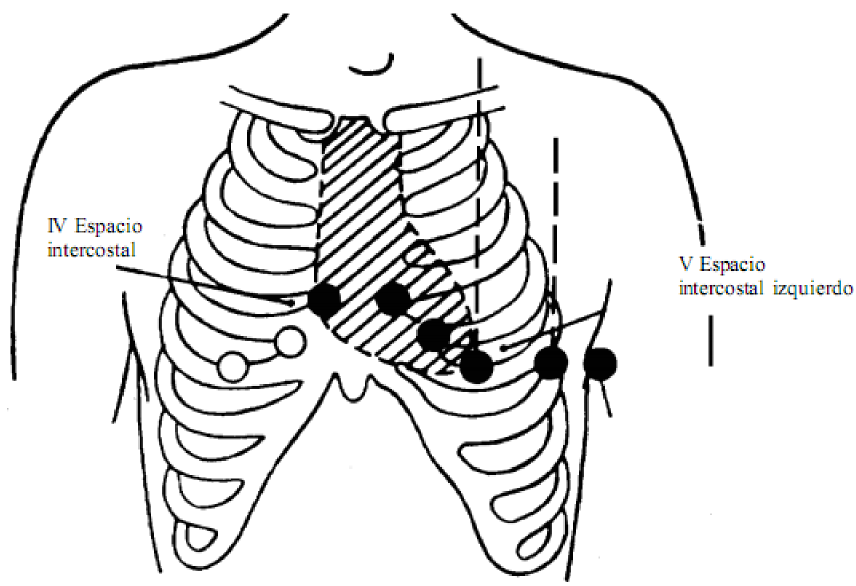
Figura 5. Esquema de las derivaciones de miembros VR, VL y VF.

Matemáticamente y en términos teóricos, no debería existir una derivación formada por un solo polo, pero esto se logra cuando el dipolo está constituido por una fuerza dada y otra artificialmente menguada. La información obtenida por estas derivaciones es muy precisa.

Las denominaciones VR, VL y VF corresponde a la terminología explicada anteriormente. En algunas ocasiones se les antepone la letra minúscula *a* (aumento) para indicar que debido a sus pequeños potenciales eléctricos, tuvieron que ser amplificados para su mayor observación (aVR, aVL y aVF). (Médicas)

2.2.3. Derivaciones Unipolares Precordiales

Deben su nombre a la posición en donde se coloca el electrodo explorador y van desde V1 hasta V6. Estas derivaciones permiten registrar potenciales que no eran detectados con las seis derivaciones anteriormente citadas; abarcan el tórax, partiendo desde su lado derecho y llegan hasta la línea axilar media, en otras palabras, rodena el corazón a manera de semicírculo (Médicas).



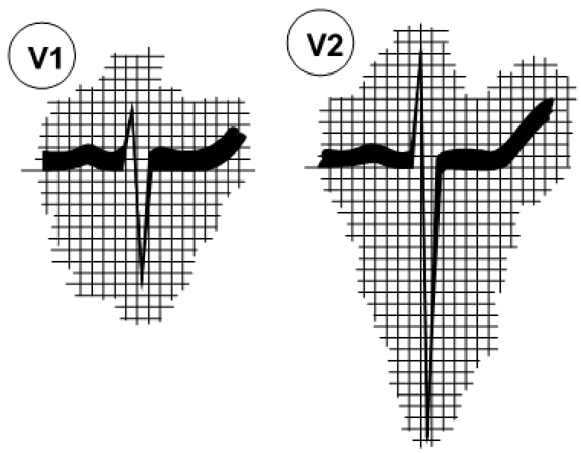
Fuente: (Médicas)

Figura 6. Esquema de las derivaciones precordiales.

Derivación Unipolar Precordial V1: El electrodo explorador se sitúa en el 4to espacio intercostal derecho, junto al borde esternal. Recoge potenciales de las aurículas, sobre todo de la derecha, que es anterior y subyacente, y de una pequeña parte del tabique interventricular y la pared anterior del ventrículo derecho. (Médicas)

La positividad de una onda y la negatividad de la otra está determinada por el sentido en que se activan ambos ventrículos: endocardio a epicardio.

El ventrículo derecho es anterior y el izquierdo posterior. En V1 la onda de activación del ventrículo derecho se acerca al electrodo explorador; por el contrario, la onda de activación del ventrículo izquierdo se aleja del electrodo ubicado en la pared torácica anterior.

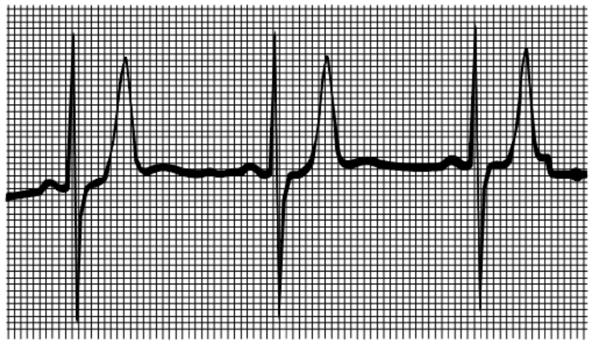


Fuente: (Médicas)

Figura 7. Trazado del aspecto morfológico del complejo ventricular en las derivaciones precordiales derechas V1 y V2, llamadas genéricamente Vd.

Derivación Unipolar Precordial V2: El electrodo se sitúa a la altura del 4to espacio intercostal del lado izquierdo del esternón, justamente encima de la pared ventricular derecha, cuyos potenciales se registran con mayor fuerza que en V1 en razón del mayor grosor que dicha pared presenta a ese nivel, lo que determina que la positividad inicial sea ligeramente mayor que en V1. Inmediatamente después se inscribe, al igual que en V1, una fuerza intensamente negativa, originada por la activación ventricular izquierda. (Médicas)

Derivación Unipolar Precordial V3: El electrodo explorador se sitúa en un punto equidistante de V2 y de la próxima derivación, V4. Dicho electrodo se encuentra teóricamente situado sobre el tabique interventricular, lo que hace de ella una derivación transicional entre las estructuras miocárdicas izquierdas y derechas. En esta derivación se observa una equipotencialidad en ondas positivas y negativas. (Médicas)

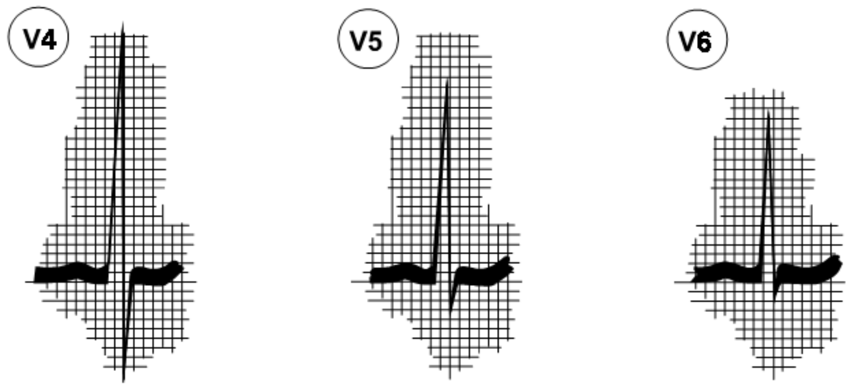


Fuente: (Médicas)

Figura 8. Trazado de la derivación transicional V3.

Derivación Unipolar Precordial V4: El electrodo explorador se sitúa en la región de la punta del ventrículo izquierdo, en el 5^{to} espacio intercostal izquierdo y a nivel de la línea medioclavicular. En esta región es precisamente donde mayor grosor muestra el ventrículo izquierdo, y su activación origina una onda fuertemente positiva. (Médicas)

Después de la fuerte positividad inicial, en V4 se inscribe una débil fuerza negativa, que es la misma que en V1 y V2 se inscribió con signo positivo. En conclusión las ondas positivas en V1 y V2 corresponden al ventrículo derecho y las negativas corresponden al ventrículo izquierdo. En las derivaciones precordiales izquierdas (V4, V5 y V6) lo que se da con signo positivo es ventricular izquierdo y es equivalente a las ondas negativas en V1 y V2. Los potenciales del ventrículo derecho son los que dan una pequeña negatividad terminal observada en V4, V5 y V6.



Fuente: (Médicas)

Figura 9. Trazado de la morfología del complejo ventricular normal en las derivaciones precordiales izquierdas V4, V5 y V6, llamada generalmente Vs.

Derivaciones Unipolares Precordiales V5 y V6: En V5, el electrodo explorador se coloca en el 5to espacio intercostal izquierdo, más lateralmente que en V4, justo al nivel de la línea axilar anterior. En V6, el electrodo sigue situado en el 5to espacio intercostal izquierdo, pero al nivel de la línea axilar media. Debajo de los electrodos situados en esas posiciones se encuentra el miocardio del ventrículo izquierdo, cuyo grosor ha disminuido con respecto a la región de la punta y seguirá disminuyendo hacia la pared posterior; a causa de ello, la fuerza positiva inicial es menor que en V4, aunque sigue siendo dominante. La fuerza negativa terminal representa los potenciales de activación del ventrículo derecho (ver Figura 9) (Médicas).

2.3. VARIABILIDAD DE LA FRECUENCIA CARDIACA

Los intervalos entre los latidos de un corazón normal, muestran entre sí leves diferencias de duración que se traducen en cambios del ritmo cardíaco. Estos cambios en el ritmo siguen ciertos patrones de repetición, por lo que las prolongaciones y acortamientos de los intervalos se repiten de manera cíclica. Uno de los ejemplos más conocidos es la arritmia sinusal respiratoria. Esta modifica los intervalos siguiendo el patrón de la respiración, lo que impone una frecuencia de variación relativamente alta si la comparamos con otras influencias (MIGLIARO & CONTRERAS).

Los métodos informáticos han facilitado la medición y almacenamiento de los intervalos entre latidos, por lo que resulta sencillo estudiar su variación. Este tipo de análisis es el que se conoce como Variabilidad de la Frecuencia Cardíaca

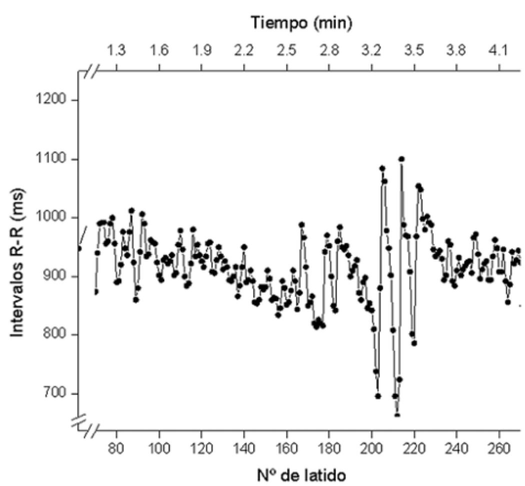
(VFC) y se ha convertido en una herramienta útil para la investigación y el diagnóstico clínico.

Su utilidad deriva de la sencillez de su registro y de las correlaciones fisiológicas y patológicas que se han encontrado. En este último terreno, la VFC ha demostrado ser un buen predictor de morbimortalidad, en particular en pacientes que han sufrido infarto de miocardio, pero también en la diabetes, la insuficiencia cardíaca, la enfermedad de Chagas y la enfermedad coronaria. (MIGLIARO & CONTRERAS)

2.3.1. Métodos para Medir la Variabilidad de la Frecuencia Cardiaca

La VFC puede ser calculada a partir de cualquier señal que identifique una fase dada del ciclo cardíaco, por ejemplo: ruidos, imágenes ecocardiográficas, doppler y otras formas de registro de la actividad cardíaca. Sin embargo, el electrocardiograma (ECG) es la herramienta más utilizada en virtud de su difusión y por proveer registros con referencias muy exactas en el tiempo como lo son las ondas del complejo ventricular QRS. Por esta razón es muy frecuente que se identifiquen los intervalos entre latidos como intervalos R-R, o también como intervalos N-N (por normal-normal), lo que señala que para calcular la VFC se usan ondas R "normales" entendiendo como tales sólo aquellas de origen sinusal. (MIGLIARO & CONTRERAS)

Disponiendo en un gráfico la duración de los intervalos N-N en función del tiempo se obtiene el tacograma que es la base del análisis de la VFC (Figura 10).



Fuente: (MIGLIARO & CONTRERAS)

Figura 10. Tacograma formado por la disposición de los intervalos R-R en función del número de intervalo o su equivalencia en minutos.

Según la duración del período de estudio los métodos de registro pueden ser de pocos minutos (5 a 10) o de varias horas. Muchos de los análisis de la VFC se basan en el ECG de 24h (Holter). Sin embargo, cabe consignar que para el diagnóstico de VFC disminuida en estados patológicos el Holter no parece tener ventajas frente a métodos de menor duración.

Para evaluar numéricamente la VFC se han ensayado una larga serie de índices que se agrupan según la forma de análisis de la VFC. A continuación se enuncian algunos de ellos. (MIGLIARO & CONTRERAS)

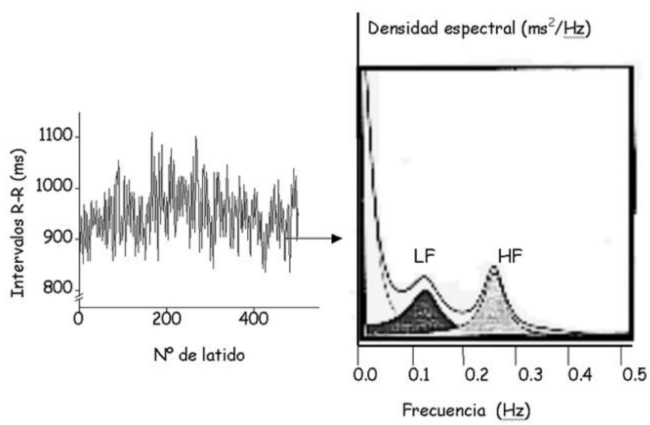
- **Índices Estadísticos**

    - SDNN: Es un índice muy usado y de simple definición (el desvío estándar de todos lo intervalos N-N en la muestra).

    - rMSSD: Muy similar al anterior en cuanto a la fórmula para calcularlo, pero sustituye la resta de cada intervalo de la media, por la resta de dos intervalos adyacentes. Eso hace que sea un índice muy útil para evaluar cambios rápidos de la VFC.

- **Índices en el Ámbito de la Frecuencia (Análisis Espectral)**

    Para realizar el estudio espectral, el perfil del tacograma se trata como una señal compuesta por múltiples ondas de diferentes frecuencias. Se aplican luego métodos como la transformada rápida de Fourier (FFT), modelado autoregresivo (ARMA) o métodos híbridos que generan un espectro de potencias donde se dispone la potencia (varianza) de cada onda en función de su frecuencia (Figura 11).



Fuente: (MIGLIARO & CONTRERAS)

Figura 11. Tacograma y su Espectro de Potencias

El espectro se divide en bandas de frecuencia (ver también Tabla I) y sobre esta base se estima la densidad espectral de cada banda. Existen numerosos estudios (Hernández Rodríguez, 2005) (GARCÍA GONZÁLEZ, 1998) (SUAREZ, 2000) (Tsuji, Larson, & Venditti, 1996) que correlacionan las bandas del espectro con fenómenos fisiológicos.

ÍNDICES EN EL ÁMBITO DE LA FRECUENCIA (ANÁLISIS ESPECTRAL)	
Nombre y Unidades	**Definición**
ULF ($\mathbf{ms^2}$)	Potencia en el rango de frecuencias ultra bajas ($\leq 0.003\ Hz$)
VLF($\mathbf{ms^2}$)	Potencia en el rango de frecuencias muy bajas ($0.003 - 0.04\ Hz$)
LF($\mathbf{ms^2}$)	Potencia en el rango de frecuencias bajas ($0.15 - 0.4\ Hz$)
HF($\mathbf{ms^2}$)	Potencia en el rango de frecuencias altas ($0.15 - 0.4\ Hz$)

Tabla 1. Nombre y unidades de índices espectrales

2.3.2. FACTORES FISIOLÓGICOS RELACIONADOS CON LA VARIABILIDAD DE LA FRECUENCIA CARDIACA

Las células del nódulo sinusal se influyen mutuamente de modo que generan un ritmo único pero necesariamente variable. Esta interacción entre células marcapaso, es responsable de una primera forma de variabilidad, muy pequeña si se la compara con los grandes cambios que se introducen por la vía de la regulación extracardíaca.

El principal regulador extracardíaco es el Sistema Nervioso Autónomo (SNA). El balance entre la rama simpática y la parasimpática incrementa la variabilidad propia del nódulo sinusal (MIGLIARO & CONTRERAS). Vistos por separado, el parasimpático tiene el conocido efecto de incremento de la duración de los intervalos, mientras que el simpático los disminuye. Debido a que el parasimpático tiene una latencia de respuesta menor que la del simpático su influencia es dominante en las modificaciones rápidas de la VFC como las inducidas por la respiración.

Esta dependencia de la VFC con el SNA, ha llevado a que varios autores consideren que el análisis de la VFC es una buena medida de la función autónoma. Es así que los cambios en la postura, los fenómenos vasomotores ligados al control baroreflejo de la presión arterial, o la reacción de alarma tienen un correlato muy claro en la VFC. También se ha establecido claramente que la VFC disminuye con la edad.

Se supone que el envejecimiento del SNA y de las estructuras cardíacas, puede estar en la base de este comportamiento.

También cabe consignar las relaciones entre SNA y procesos inflamatorios que seguramente habrán de abrir interesantes vías de estudio en el futuro inmediato. Otros autores han puesto en duda ese papel de “evaluador autonómico” que se le atribuye a la VFC. Es claro que otras influencias pueden modificar la función del nódulo sinusal, entre ellas: la temperatura actuando en forma directa sobre las células del nódulo, factores endócrinos y metabólicos y fenómenos mecánicos. (MIGLIARO & CONTRERAS)

3. FIBRILACIÓN AURICULAR

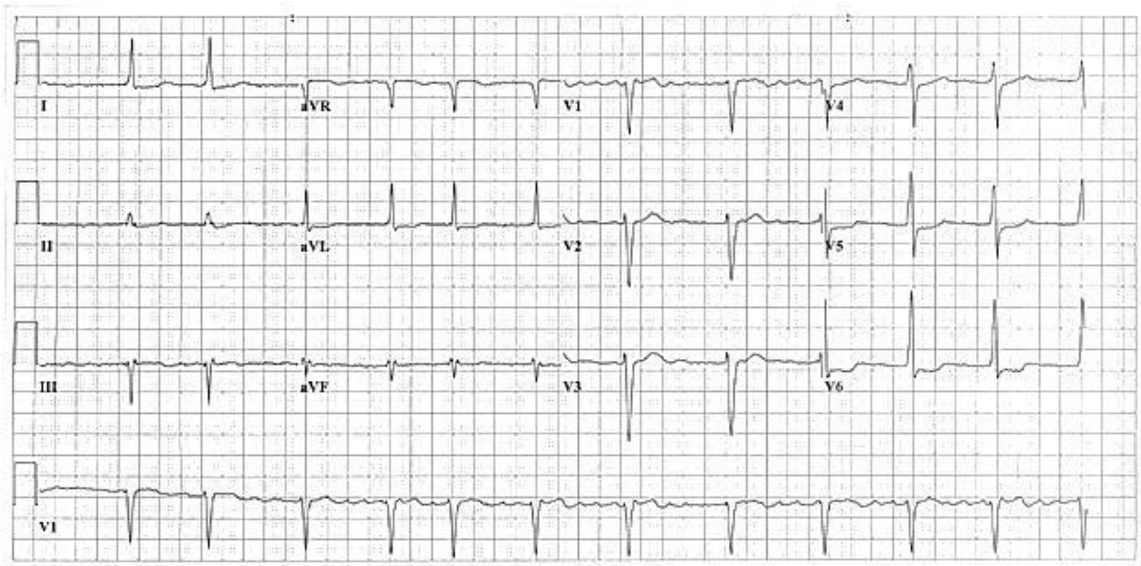
La Fibrilación Auricular (FA) es la arritmia sostenida más frecuente en la práctica clínica y según los estudios de Framingham (Tsuji, Larson, & Venditti, 1996), su incidencia aumenta con la edad independientemente de la patología cardiovascular asociada. (KARMELIC S., 2008)

En la mayoría de los casos se encuentra relacionada con una cardiopatía, aunque existe un grupo de pacientes (del 15% al 30%) en el que no es posible demostrar la presencia de ésta.

Los síntomas se relacionan con deterioro hemodinámico y en ocasiones con evento embolico secundario, causando importante morbilidad, mortalidad y altos costos en los sistemas previsionales de salud. (KARMELIC S., 2008)

3.1. FISIOPATOLOGÍA Y CLASIFICACIÓN

La Fibrilación Auricular es una taquiarritmia supraventricular que se caracteriza por una activación auricular descoordinada que lleva a un deterioro de la función mecánica de la aurícula. El electrocardiograma muestra el reemplazo de la onda P por ondas de oscilación rápida que varían en amplitud, forma y tiempo, asociadas a una rápida respuesta ventricular cuando la conducción aurículoventricular está inactiva. (KARMELIC S., 2008)



Fuente: (KARMELIC S., 2008)

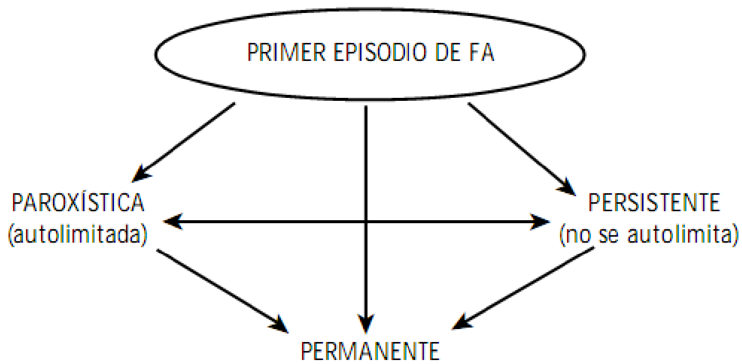
Figura 12. ECG de un paciente en Fibrilación Auricular – 12 derivaciones

El inicio de la FA tiene relación, en general, con factores crónicos de cada paciente (cardiopatías) y con factores agudos que actúan como gatillantes. Las cardiopatías asociadas más comunes son la Hipertensión y la Enfermedad coronaria, sin embargo, en países en vía de desarrollo, es habitual asociarla con la presencia de enfermedad valvular de origen reumático (KARMELIC S., 2008).

Los factores agudos más comunes son el consumo de bebidas alcohólicas, infarto del miocardio, pericarditis, miocarditis, embolia pulmonar, hipertiroidismo, posterior a cirugía cardiaca y en afecciones agudas de las vías respiratorias. En casi el 80% de los casos, la presencia de FA se asocia con cardiopatía estructural como la enfermedad valvular, la enfermedad coronaria, la hipertensión, la miocardiopatía hipertrófica, la miocardiopatía dilatada y las cardiopatías congénitas, especialmente los defectos del septum interauricular (KARMELIC S., 2008).

Los factores agudos actúan por mecanismos inflamatorios o isquémicos, y según su persistencia en el tiempo pueden provocar episodios autolimitados o más permanentes. La permanencia en el tiempo se relaciona con el remodelamiento estructural y eléctrico que la propia FA produce. Al hablar de remodelación se refiere a la dilatación auricular y al acortamiento de los periodos refractarios. Cuando más tiempo dure la FA es más difícil recuperar el ritmo sinusal (KARMELIC S., 2008).

La clasificación de una cardiopatía tiene que ser lo más practico posible, para que sea clínicamente útil y pueda orientar la terapéutica. Se puede detectar un primer episodio que puede ser o no asintomático o autolimitado. Debe considerarse que actualmente no hay certeza de la duración del episodio ni de la existencia de episodios previos. Si el paciente tiene dos o más episodios se considera la arritmia como recurrente. Si la arritmia termina de forma espontánea se denomina paroxística y si se sostiene por más de siete días, persistente. La designación de FA permanente es a menudo algo arbitrario, y depende principalmente de la imposibilidad de obtener y/o mantener ritmo sinusal. (KARMELIC S., 2008)



Fuente: (KARMELIC S., 2008)

Figura 13. Clasificación actual de las formas de presentación de Fibrilación Auricular y la relación entre ellas

La fibrilación auricular aislada se aplica a individuos jóvenes (menos de 60 años), sin evidencia clínica o ecocardiografía de cardiopatía, incluyendo hipertensión. Estos paciente tendrán un mejor pronóstico respecto al riesgo de enfermedad tromboembólica, aunque siempre es necesario el análisis caso a caso. (KARMELIC S., 2008)

3.2. PRESENTACIÓN CLÍNICA

La presentación clínica de la FA depende del efecto hemodinámico que produce y de la ocurrencia de eventos embolicós asociados. En este contexto, se observan casos totalmente asintomáticos, en un amplio espectro clínico que puede incluir palpitaciones, malestar vago y poco definido, angina, edema pulmonar y accidente cerebrovascular. (KARMELIC S., 2008)

Los efectos hemodinámicos dependen de la perdida de la sincronía aurículoventricular, la respuesta ventricular irregular, la frecuencia rápida y el deterioro del flujo arterial coronario. La magnitud de este efecto depende de cuán importante es la enfermedad valvular asociada, la hipertrofia o la disfunción ventricular. Se ha demostrado que la respuesta ventricular elevada puede producir miocardiopatía dilatada inducida por taquicardia, y que esta situación es reversible con el control de la frecuencia ventricular. El mecanismo de este fenómeno no está del todo aclarado. El control de la frecuencia cardiaca durante la FA logra la mejoría de la gran mayoría de síntomas, aunque en algunos casos estos solo es posible al restaurar el ritmo sinusal. (KARMELIC S., 2008)

El accidente cerebrovascular y la oclusión arterial sistémica se asocian en general a la liberación de trombos desde la aurícula izquierda. Debido a que la población afectada habitualmente tiene edad avanzada, debe considerarse la presencia de enfermedad cerebrovascular intrínseca y ateromatosis aortocarotídea, como elementos coadyuvantes a la enfermedad tromboembólica. Generalmente se asume que para la formación de material trombótico se requiere la presencia de FA por al menos 48 horas, pero se han identificado trombos, por ecografía transesofágica, en intervalos de tiempo menores. La presencia de FA se ha asociado con niveles elevados de fibrinógeno y dímero D, indicando un estado de hipercoagulabilidad que contribuye a la formación de trombos. Se ha demostrado que en paciente con FA existe una importante asociación entre la hipertensión, edad avanzada y disfunción ventricular, con la aparición de accidente cerebrovascular. (KARMELIC S., 2008)

3.3. EVALUACIÓN Y MANEJO

El diagnóstico de la fibrilación auricular se basa en la historia y en el examen físico, siendo confirmado por el registro electrocardiográfico ya sea por monitor, Holter de 24 horas o electrocardiograma de superficie. Se debe establecer si la arritmia es paroxística o persistente, si existe un factor gatillante, la presencia de cardiopatía estructural y cuál es la tolerabilidad clínica del paciente a la arritmia (KARMELIC S., 2008).

En la relación de eventos gatillantes debe buscarse la presencia de alcohol, privación del sueño, stress emocional, uso de cafeína y ejercicio. Los casos mediados por estímulo vagal pueden relacionarse a una comida abundante o a periodos de sueño. El examen físico revelará pulso irregular, primer ruido de intensidad variable y elementos de enfermedad valvular o insuficiencia cardiaca según cada caso. (KARMELIC S., 2008)

El manejo de los pacientes con FA tiene tres objetivos fundamentales: control de la frecuencia, prevención de embolias y corrección del trastorno del ritmo. Estos no son excluyentes entre sí.

La fibrilación auricular sigue siendo centro del debate clínico cardiológico, debido a que hasta el momento no hay una estrategia de manejo que asegure un 100% de éxito, sin complicaciones, en las distintas formas de presentación que tiene esta patología. Al analizar las distintas líneas de investigación actual, se demuestra que no hay claridad de donde está realmente el futuro. Se busca el anticoagulante oral ideal, el anti-arrítmico ideal y la ablación ideal, con resultados que no han variado sustancialmente de lo que se ha manejado en los últimos años. Probablemente se seguirá por un tiempo, aún indefinido, usando técnicas combinadas y manteniendo el análisis prudente de cada caso clínico para obtener el mejor resultado inmediato y alejado. (KARMELIC S., 2008)

4. EL ANÁLISIS DE FOURIER

4.1. INTRODUCCIÓN

Los procesos físicos pueden describirse en el dominio del tiempo mediante valores de $f(t)$. El mismo proceso también se puede describir en el dominio de la frecuencia mediante una serie de amplitudes representadas por $\mathrm{F}(\omega)$. La Transformada de Fourier es una herramienta matemática capaz de representar un proceso físico, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Debido a esto la Transformada de Fourier es ampliamente utilizada en ciencia e ingeniería (Faundez & Fuentes).

4.2. SERIES DE FOURIER

Las series de Fourier fueron desarrolladas por Jean-Baptiste Joseph Fourier a principios del siglo XIX al estudiar la ecuación de calor. Las series de Fourier tienen como idea básica que cualquier función periódica (condición fundamental) de periodo T puede ser representada como la suma ponderada de senos y cosenos del mismo periodo T (Faundez & Fuentes).Una serie de la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}\{a_n \cos(nt) + b_n sen(nt)\} \tag{4.1}$$

se denomina serie trigonométrica. Esta serie se transforma en una serie de Fourier cuando es posible obtener todos los coeficientes $\mathrm{a_n}$ y $\mathrm{b_n}$ mediante la integración de la función $f(t)$.

$$\mathrm{a_0} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{f(t)dt} \qquad (\mathrm{n}=0,1,2,\ldots) \tag{4.2}$$

$$\mathrm{a_n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{f(t)cos(nt)\,dt} \qquad (\mathrm{n}=0,1,2,\ldots)$$

$$\mathrm{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{f(t)sen(nt)dt} \qquad (\mathrm{n}=0,1,2,\ldots)$$

Se pueden obtener estos coeficientes debido a la ortogonalidad existente entre las funciones seno, coseno y entre sí mismas para diferentes valores de n. Lo anterior puede resumir de la siguiente manera:

$$\int_0^{2\pi} sen(nt)\cos(mt)\,dt = 0 \qquad n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} sen(nt)\cos(mt)\,dt = 0 \qquad n = m \tag{4.3}$$

$$\int_0^{2\pi} sen(nt)\,\mathrm{sen}(mt)\,dt = 0 \qquad n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} cos(nt)\cos(mt)\,dt = 0 \qquad n \neq m$$

Se debe cumplir además la condición de que la norma de la función analizada sea integrable y esa integral sea finita, es decir

$$\int_0^{2\pi} |\mathrm{f(t)}| < \infty \tag{4.4}$$

y que sea de la forma $\mathrm{f(t+T)=f(t)}$, es decir la función debe ser periódica. El intervalo $[0{,}2\pi]$ se selecciona del periodo correspondiente a las funciones seno y coseno.

4.2.1. SERIES DE SENO Y COSENO

Las series de Fourier pueden dividirse en una serie de senos y otra de cosenos dependiendo de la función con la que se trabaje (Faundez & Fuentes).

- Si f es par, $\mathrm{f(t)=f(-t)}$ por lo tanto la serie de Fourier solo contendrá términos de cosenos.
- Si f es impar, $\mathrm{f(t)=-f(t)}$ por lo tanto la serie de Fourier contendrá solo términos de senos.

Esto permite dividir la función o señal en una parte par y otra impar,

$$f(t) = E(t) + O(t) \tag{4.5}$$

donde

$$E(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \tag{4.6}$$

de tal manera que

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{a_0}{2} + \sum\nolimits_1^\infty \{a_n \cos(nt) + b_n sen(nt)\} + \frac{a_0}{2} + \sum\nolimits_1^\infty \{a_n \cos(-nt) + b_n sen(-nt)\}\right] \quad (4.7)$$

$$O(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{a_0}{2} + \sum\nolimits_1^\infty \{a_n \cos(nt) + b_n sen(nt)\} - \frac{a_0}{2} - \sum\nolimits_1^\infty \{a_n \cos(-nt) + b_n sen(-nt)\}\right]$$

como:

$$\cos(nt) = \cos(-nt) \text{ y } sen(nt) = -sen(-nt)$$

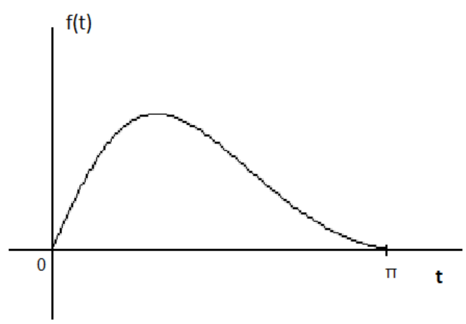
entonces:

$$E(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\nolimits_1^\infty a_n \cos(nt) \qquad (4.8a)$$

$$O(t) = \sum\nolimits_1^\infty b_n sen(nt) \qquad (4.8b)$$

Estas dos nuevas series se conocen como series cosenoidal y senoidal de Fourier respectivamente.

Tomando una función f definida sobre el intervalo $[0, \pi]$, como se muestra en la figura



Fuente: (Faundez & Fuentes)

Figura 14. Función f definida en el intervalo $[0, \pi]$

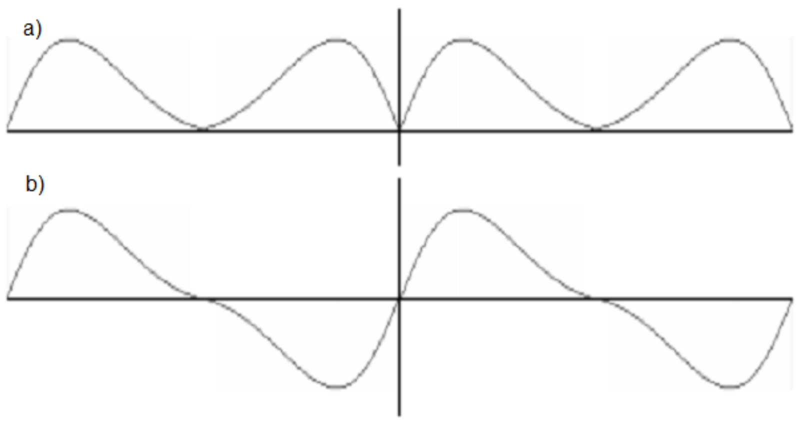
Se utilizarán dos maneras para obtener una extensión periódica de periodo 2π de dicha función, como se ilustra en la figura 14. Se observa que la expansión en series de Fourier de la función de la figura contendrá solo términos cosenoidales por lo que se puede aproximar esta función mediante (4.8a), donde

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \tag{4.9}$$

De manera similar la función de la figura 14, contendrá solo términos por lo que se puede aproximar esta mediante (4.8b), donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)sen(nt)dt \tag{4.10}$$

Como consecuencia de que la función sea par o impar, los coeficientes se calculan integrando sobre la mitad del periodo de la función y multiplicando por 2, en vez de integral sobre el intervalo completo, lo cual reduce considerablemente los tiempos de cálculo.



Fuente: (Faundez & Fuentes)

Figura 15. a) f es par y de período 2π b) f es impar y de período 2π

4.3. LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La Transformada de Fourier descompone o expande una señal o una función en senos y cosenos de diferentes frecuencias cuya suma corresponde a la suma original, en otras palabras distingue las diferentes componentes de frecuencia de la señal, y sus respectivas amplitudes (Faundez & Fuentes). La Transformada de Fourier de una función $f(t)$ se define como

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{4.11}$$

y su inversa de define como

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{4.12}$$

La Transformada de Fourier obtiene una representación en el dominio de la frecuencia de una señal que se encuentra originalmente en el domino del tiempo. La relación existente entre la representación de la señal original a través de funciones senoidales y cosenoidales y el exponencial que se observa en las ecuaciones (4.11) y (4.12) proviene de la definición de la identidad de Euler

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + isen(\omega t) \tag{4.13}$$

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - isen(\omega t)$$

Mediante esta función exponencial es posible formar un set de funciones ortogonales

$$\{e^{in\omega t}: n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

sobre un intervalo $(t_0, t_0 + T)$, y por lo tanto es posible descomponer o expandir la señal original (dominio del tiempo) como se muestra a continuación

$$f(t) = F_0 + F_1e^{-i\omega t} + F_2e^{-i2\omega t} + F_3e^{-i3\omega t} + \cdots + F_{-1}e^{i\omega t} + F_{-2}e^{i2\omega t} + F_3e^{i3\omega t} + \cdots \tag{4.14}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{-in\omega t} \tag{4.15}$$

Estas funciones son referidas como las funciones base de la Transformada de Fourier, y debido a su propiedad de ortogonalidad, es posible obtener los valores o coeficientes F_n como términos de semejanza entre la señal original y la función exponencial (Faundez & Fuentes)

$$F_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-in\omega t}dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} e^{in\omega t}e^{-in\omega t}dt} \tag{4.16}$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-in\omega t}dt \tag{4.17}$$

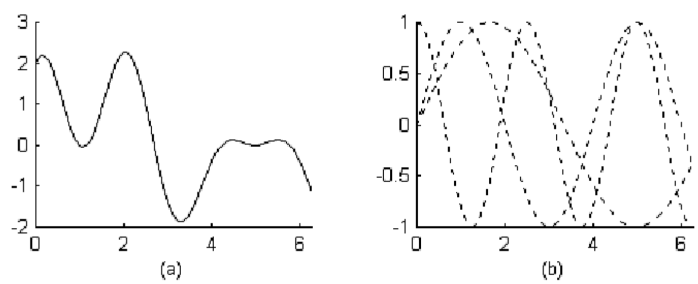
Matemáticamente la función exponencial es más fácil de manipular, pero se trabajara con las funciones seno y coseno ya que desde el punto de vista físico, resulta más fácil comprender el paso de la señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia y su inversa. Por lo tanto, es posible transformar (4.15)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum \{a_n \cos(n\omega t) + b_n sen(n\omega t)\} \qquad (4.18)$$

$$a_n = Re[F_n]$$

$$b_n = Im[F_n]$$

La función en el dominio del tiempo se representa por medio de una combinación lineal de todas las componentes frecuenciales presentes en la señal $f(t)$, donde los coeficientes a_n y b_n representan la cantidad de energía que aporta cada componente de frecuencia a la señal original como se observa en la Figura 16.



Fuente: (Faundez & Fuentes)

Figura 16. a) Señal original b) Descomposición en series de Fourier, la amplitud de cada onda es lo que representa la transformada de Fourier

4.3.1. Propiedades de la Transformada de Fourier

Algunas de las propiedades fundamentales de la Transformada de Fourier son:

Propiedad	Señal	Trasformada de Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(\omega)$ $Y(\omega)$
Linealidad	$ax(t)+by(t)$	$aX(\omega)+bY(\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Desplazamiento en la frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega-\omega_0)$
Escalamiento en el tiempo y en la frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{\omega}{a})$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Conjugación	$\overline{x(t)}$	$\overline{X(-\omega)}$
Convolución	$x(t)*y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega)Y(\omega)$
Diferenciación en el tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t}x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$

Fuente: Elaboración propia

Tabla 2. Propiedades fundamentales de la Transformada de Fourier

Otra propiedad aplicable a la Transformada de Fourier es el Teorema de Parseval, que dice que la energía de la señal es siempre la misma sin depender de si se encuentra en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia (Faundez & Fuentes).

$$Energía\,Total = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2$$

4.4. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

Cuando se habla de tratamiento digital de la señal se hace inmediata relación con el uso de una computadora, la cual trabaja con datos discretos y por tanto el cálculo de la Transformada de Fourier requiere valores discretos o muestreados de $f(t)$, es decir, valores de la forma f_t con $k = 0,1,2,\ldots$ Esto quiere decir que solo es posible calcular la transformada $F(\omega)$ para valores discretos de ω, en otras palabras solo se obtendrán valores de la transformada para F_n con $n = 0,1,2, \ldots$ Se referiría a f de ahora en adelante como una señal en el tiempo y ya no como una función. (Faundez & Fuentes)

Suponiendo que $f(t)$ es una señal periódica de periodo T y que solo se conocen los valores de N puntos igualmente espaciados en el tiempo, entonces, si $f(kT_s)$ corresponde a la $k-ésima$ muestra de $f(t)$ y $F(n\omega_s)$, donde $\omega_s = 2\pi f_s$ (f_s – frecuencia de muestreo) corresponde a la $n-ésima$ muestra de $F(\omega)$, y además se define N como el número de muestras de la señal o longitud de la misma; la Transformada de Fourier de una señal de periodo T puede escribirse en forma discreta como

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} \qquad n,k = 0,1,2, \ldots, N-1 \tag{4.19}$$

debido a que

$$f_k = f\left(k\frac{T}{N}\right) \quad y \quad T_s = \frac{T}{N}$$

$$F_n = F(n\omega_s) \quad y \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

Nótese que $F_{n+N} = F_n$, lo cual se demuestra a continuación

$$F_{n+N} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{i2\pi k(n+N)}{N}}$$

$$F_{n+N} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} e^{-i2\pi k} \tag{4.20}$$

$$e^{i2\pi k} = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto F_n tiene periodo N al igual que f_k. El conjunto de coeficientes $(F_n)_{n=0,1,2,\ldots,N-1}$ se denomina la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de los valores muestreados $(f_k)_{k=0,1,2,\ldots,N-1}$.

La Inversa de la Trasformada Discreta de Fourier (IDFT) se define como

$$f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{\frac{i2\pi kn}{N}} \qquad n,k = 0,1,2, \ldots, N-1 \tag{4.21}$$

4.5. TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)

A mediados de la década de los sesenta (W. & W., 1965) se desarrolló un algoritmo denominado la Transformada Rápida de Fourier (FFT), con el fin de implementar en forma práctica la Transformada de Fourier mediante el uso de computadoras. La FFT elimina información redundante que existe en la DFT mediante la explotación de las propiedades de periodicidad y simetría del factor de fase W_N (conocido como factor twiddle y su valor es $W = e^{-\frac{i2\pi}{N}}$). (Faundez & Fuentes)

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k \quad Simetria \tag{4.22}$$

$$W_N^{k+N} = -W_N^k \quad Periodicidad$$

Existente básicamente dos tipos de algoritmos para la FFT

- Diezmado en el dominio del tiempo
- Diezmado en el dominio de la frecuencia

El algoritmo FFT trabaja en forma más eficiente cuando lo hace sobre una señal donde el número de muestras N es potencia de 2. El principio de la FFT se basa en el método denominado "divide y conquista", debido a que divide la señal de N puntos en dos secuencias de datos de $\frac{N}{2}$ puntos.

4.5.1. FFT de diezmado en el tiempo

El algoritmo de diezmado en el tiempo toma la totalidad de los datos de entrada f_k y los separa en muestras pares e impares, cada una con una longitud igual a la mitad de la longitud de la señal original (Faundez & Fuentes). Esto se demuestra a continuación:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W_N^{kn} \tag{4.23}$$

$$F_n = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k} W_N^{2kn} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k+1} W_N^{(2k+1)n}$$

Como $W_N^{2kn} = W_{\frac{N}{2}}^{kn}$, entonces

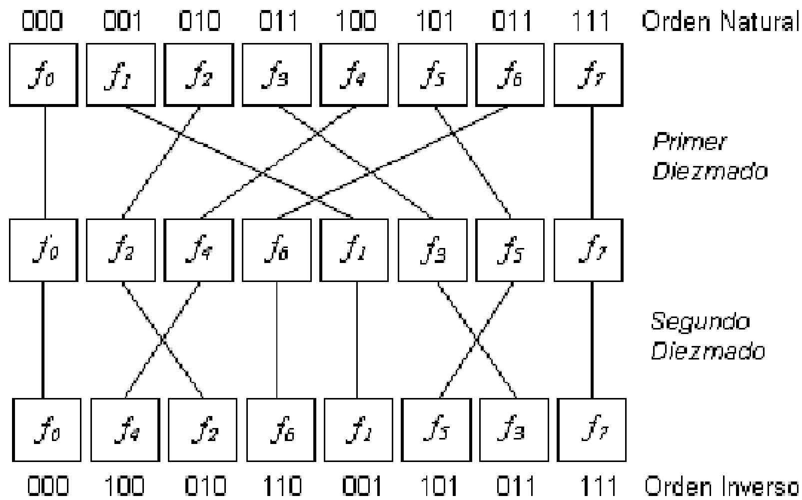
$$F_n = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k} W_{\frac{N}{2}}^{kn} + W_N^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k+1} W_{\frac{N}{2}}^{kn} \tag{4.24}$$

$$F_n = F_n^e + W_N^n F_n^o$$

F_n^e denota el $n - ésimo$ componente de la trasformada de longitud $\frac{N}{2}$ proveniente de los componente pares de la señal original f_k, mientras que F_n^o es la transformada de longitud $\frac{N}{2}$ correspondiente a los componentes impares de la señal f_k. Por tanto se disminuye el número de operaciones de multiplicación de N^2 a $2(\frac{N}{2})^2$.

Este proceso es recursivo permitiendo diezmar las señales f_{2k} y f_{2k+1} nuevamente de tal manera que las transformadas de Fourier obtenidas son de longitud $\frac{N}{4}$, reduciendo el número de operaciones de $\frac{N^2}{2}$ a $4(\frac{N}{4})^2$. Por lo tanto, para una señal donde $N = 2^r$, el proceso de diezmado se puede repetir $r = \log_2 N$ veces. De esta manera el algoritmo FFT de diezmado en el tiempo logra reducir el número de multiplicaciones de N^2 a $\frac{N}{2}\log_2 N$.

Otro punto importante reside en el orden de la secuencia de entrada después de que han sido diezmadas $(r-1)$ veces. Suponga una señal de longitud $N = 8$ como se observa en la figura 17. Al representar estos datos en su forma binaria, se observa que es posible obtener la secuencia de los datos de entrada diezmados leyendo la representación binaria de k en forma inversa.



Fuente: (Faundez & Fuentes)

Figura 17. Inversión binaria para una señal con N =8 datos de entrada

En resumen, el algoritmo de diezmado en el tiempo se realiza en dos partes:

- Inversión binaria de los datos de entrada.
- Operaciones de multiplicación y suma sobre los datos invertidos, entregando los datos de salida en orden natural.

4.5.2. FFT de diezmado en la frecuencia

El algoritmo de diezmado en la frecuencia al igual que el diezmado en el tiempo separa la señal original de longitud N en dos secuencias con una longitud igual a $\frac{N}{2}$; la diferencia con el diezmado en el tiempo reside en que una secuencia contiene la primera mitad de las muestras $(k = 0,1,2,\dots,\frac{N}{2}-1)$ y la otra secuencia contiene la otra mitad $(k = \frac{N}{2},\frac{N}{2}+1,\dots,N)$ (Faundez & Fuentes). Esto se demuestra a continuación:

$$F_n = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k W_N^{kn} + \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-1} f_k W_N^{kn} \qquad (4.25)$$

$$F_n = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k W_N^{kn} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{k+\frac{N}{2}} W_N^{(k+\frac{N}{2})n}$$

$$F_n = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k W_N^{kn} + W_N^{\frac{nN}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{k+\frac{N}{2}} W_N^{kn}$$

Como $W_k^{\frac{nN}{2}} = (-1)^n$, entonces

$$F_n = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[f_k + (-1)^k f_{k+\frac{N}{2}}\right] W^{kn} \tag{4.26}$$

Ahora se diezma la secuencia F_n en muestras pares e impares respectivamente, con lo que se obtiene

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[f_k + f_{k+\frac{N}{2}}\right] W_{\frac{N}{2}}^{kn} \qquad n = 0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$$

$$F_{2n+1} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{\left[f_k - f_{k+\frac{N}{2}}\right] W_N^n\right\} W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

donde se utiliza el hecho de que $W_N^2 = W_{\frac{N}{2}}$.

Al definir las secuencias de $\frac{N}{2}$ puntos h_k^1 y h_k^2 como

$$k_k^1 = f_k + f_{k+\frac{N}{2}}$$

$$h_k^2 = \left[f_k - f_{k+\frac{N}{2}}\right] W_N^n$$

Por lo tanto,

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k^1 W_{\frac{N}{2}}^{kn} \qquad (4.27)$$

$$F_{2n+1} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k^2 W_{\frac{N}{2}}^{kn} \qquad (4.28)$$

Este procedimiento es recursivo. El proceso completo implica $\log_2 N$ etapas de diezmado, donde, para cada diezmado implica $\frac{N}{2}$ multiplicaciones. Al igual que el diezmado en el tiempo, el cálculo de la DFT de N puntos por medio del algoritmo FFT de diezmado en frecuencia, requiere $\frac{N}{2}\log_2 N$ multiplicaciones.

En resumen, el algoritmo de diezmado en la frecuencia se realiza en dos partes:

- Operación de multiplicación y sume sobre los datos de entrada de orden natural.
- Inversión binaria de los datos de salida (transformada).

4.6. ESPECTRO DE POTENCIAS

El estudio de las composiciones frecuenciales se realiza mediante el cálculo de la densidad espectral del proceso o espectro de potencias, mediante la Transformada de Fourier. (ARANGO MARÍN, 2009)

En la práctica puede calcularse directamente a partir de la Transformada de Fourier del propio proceso $x(t)$, pero desde un punto de vista matemático no es posible definirse así, ya que al trabajar con muestras limitadas de procesos reales, se tiene que suponer que se tratan de muestras de procesos aleatorios estacionarios. Estos se definen como aquellos cuyas “propiedades estadísticas son invariantes respecto a un desplazamiento del origen temporal”. En otras palabras la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dy < \infty \qquad (4.29)$$

no se cumple y por tanto no es posible realizar la Transformada de Fourier. Esto obliga a introducir la definición de la función de autocorrelación del proceso estacionario $x(t)$ para poder definir matemáticamente la densidad espectral.

4.6.1. Función de Autocorrelación

La función de autocorrelación de un proceso aleatorio $x(t)$ se define como el valor medio del producto $x(t)x(t+\tau)$, bajo la suposición de que el proceso es estacionario, el valor de la media será independiente del tiempo absoluto t, y solo dependerá del parámetro temporal τ, por lo tanto

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \qquad (4.30)$$

Las propiedades más importantes son:

- Si $x(t)$ es estacionaria, el valor medio y la desviación típica serán independientes de t, de tal forma que

  $$E[x]_t = E[x]_{t+\tau} = E[x]$$
  $$(\Delta x)_t = (\Delta x)_{t+\tau} = (\Delta x)$$

  con lo que se demuestra que el coeficiente de correlación para $x(t)$ y $x(t+\tau)$ será

  $$\rho(\tau) = \frac{R_x(\tau) - E[x]^2}{(\Delta x)^2} \qquad (4.31)$$

- Del enunciado anterior, la función de autocorrelación está acotada por los valores

  $$-(\Delta x)^2 + E[x]^2 \leq R_x(\tau) \leq (\Delta x)^2 + E[x]^2$$

  puesto que $\rho(\tau)$ está acotado por ± 1.

- Cuando $\tau = 0$,

  $$R_x(\tau) = E[x]^2 \qquad (4.32)$$

- Cuando $\tau \to \infty$, el proceso aleatorio tendera a estar incorrelacionado, debido a que no existe relación entre $x(t)$ y $x(t+\tau)$. Por tanto, el coeficiente de correlación $\rho(\tau)$ tendera a cero, entonces

  $$R_x(\tau \to \infty) \to E[x]^2 \qquad (4.32)$$

  Por lo tanto, la función de autocorrelación de cualquier proceso aleatorio cumple con la condición expresada en (4.30), si se transforma convenientemente la función $x(t)$ de tal manera que $E[x] = 0$. Por esta razón es necesario incluir la función de autocorrelación para aplicar la

Transformada de Fourier en el cálculo de la Densidad Espectral de los procesos aleatorios. (ARANGO MARÍN, 2009)

4.6.2. Densidad Espectral

Se define la Densidad Espectral (ARANGO MARÍN, 2009) $S_x(\omega)$ del proceso $x(t)$, como la Transformada de Fourier de su función de autocorrelación $R_x(\tau)$, y según la ecuación

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (4.33)$$

la cual es la forma compleja de la transformada, la Densidad Espectral estará dada por

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad (4.34)$$

Por lo que la función de autocorrelación puede ser expresada como la transformada inversa del espectro

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \qquad (4.35)$$

Las propiedades más importantes de la Densidad Espectral son:

- Dado que $S_x(\omega)$ puede expresarse en términos de sus partes real e imaginaria

  $$S_x(\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$$

  Si el proceso $x(t)$ es real, se puede demostrar que

  $$S_x(\omega) = A(\omega)$$

  donde

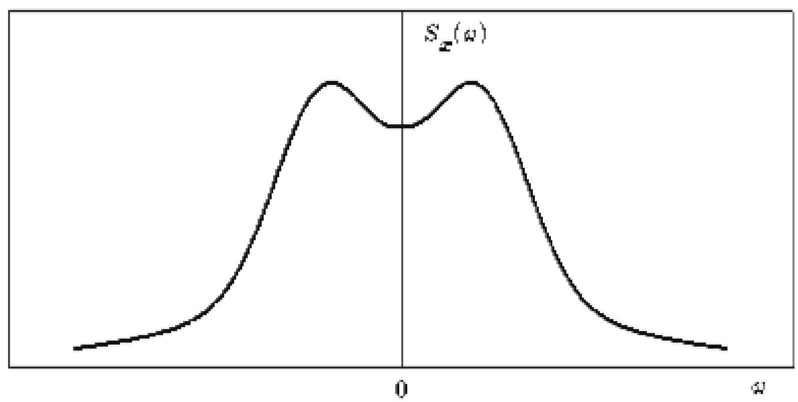
  $$A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau \qquad (4.36)$$

  es decir, $S_x(\omega)$ es una función real de ω. Esta es una de las razones por lo cual interesa el estudio de los procesos reales $x(t)$ a través de su espectro $S_x(\omega)$ y no de su Transformada de Fourier $X(\omega)$, dado que esta última siempre s una función compleja y por tanto es más difícil de manejar interpretar.

- Del apartado anterior, puede deducirse que $S_x(\omega)$ es una función par, es decir, que $S_x(-\omega) = S_x(\omega)$, en otras palabras, es una función simétrica positiva.
- De su definición puede deducirse que

$$R_x(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d(\omega) = \langle x^2 \rangle \qquad (4.37)$$

Por lo que el valor cuadrático medio de un proceso $\langle x^2 \rangle$ viene dado por el área comprendida bajo el grafico de densidad $S_x(\omega)$. Las unidades de $S_x(\omega)$ son las de (Valor cuadrático medio)/(unidad de frecuencia). (ARANGO MARÍN, 2009)



Fuente: (ARANGO MARÍN, 2009)

Figura 18. Representación espectral de un proceso x(t)

4.6.3. Señales $1/\omega$

El ruido blanco o gaussiano es un proceso aleatorio estacionario, producido por un generador de números seudoaleatorios con distribución normal $\boldsymbol{N(0,1)}$. El ruido blanco no es correlacionado, es decir $\boldsymbol{R_x}(\tau) = 0$ y su espacio de potencia $S_x(\omega)$ es constante y por lo tanto las frecuencias están presentes en igual cantidad o lo que es lo mismo $S_x(\omega) \propto \frac{1}{\omega^0}$. En un gráfico $log - log$ de $S_x(\omega)$ contra ω, la representación de un ruido gaussiano blanco es una recta con pendiente 0 (ARANGO MARÍN, 2009).

El movimiento Browniano fue descubierto en 1827 por el botánico R. Brown, al observar en el microscopio, el movimiento errático e irregular de pequeñas partículas sólidas suspendidas en un líquido (ARANGO MARÍN, 2009). Formalmente, el movimiento browniano $B(t)$ es una señal aleatoria producida por la integral de un ruido blanco $W(t)$, es decir, $B(t) = \int_{-\infty}^{t} W(t)dt$. El movimiento Browniano está compuesto principalmente por bajas frecuencias, su espectro de potencias es proporcional a $\frac{1}{\omega^2}$ y los gráficos $log - log$ del movimiento Browniano, están representados por rectas con pendiente 2. (ARANGO MARÍN, 2009)

Entre los dos ruidos anteriores existe un ruido, llamado $\frac{1}{\omega}$. El termino ruido $\frac{1}{\omega}$ se aplica a procesos aleatorios, con espectro de potencia $S_x(\omega)$ proporcional a $\frac{1}{\omega^r}$, con $0.5 < r < 1.5$.

4.7. TRANSFORMADA DE FOURIER BIDIMENSIONAL

Dada una función $f(x,y)$, definida en un plano x, y, la transformada bidimensional de Fourier es la función compleja $F(u,v)$ determinada por la fórmula

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{(-iux-ivy)}\, dx, dy$$

Su transformada inversa se defina por la fórmula

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{(iux+ivy)} du, dv$$

reproduce la función original.

4.8. EL ANÁLISIS DE GABOR

La Transformada de Fourier constituye una herramienta la cual permite obtener información de la distribución de la energía de una señal a través de distintas componentes de frecuencia, por lo cual tiene excelente resolución en frecuencia y la hace muy útil en el análisis de señales estacionarias. Sin embargo, no es posible determinar dónde o cuándo las diferentes componentes de frecuencia se encuentran en la señal como es el caso para señales cuasi-estacionarios o *no* estacionarias cuyo contenido espectral varía con el tiempo. (ARANGO MARÍN, 2009)

4.8.1. La Trasformada de Gabor

Dennis Gabor, quien recibió el premio Nobel por la invención de la Holografía, en un trabajo dedicado al estudio de componentes de sonidos localizados en frecuencia, construyo en 1946, ventanas que se desplazan tanto en el eje temporal, como en el eje de la frecuencia y adicionalmente el área del rectángulo de Heisenberg correspondiente a estas ventanas es la mínima posible, dentro de la cota fijada por el principio de incertidumbre. (ARANGO MARÍN, 2009)

La construcción de Gabor se basa en la propiedad de modulación.

La modulación de $h(t)$ en la frecuencia z es $h_z(t) = h(t)e^{i2\pi zt}$. A una modulación de $h(t)$ en el tiempo corresponde una traslación de $\hat{h}(\omega)$ en la frecuencia, porque la transformada de Fourier de la modulación de h es $\hat{h}_z(\omega) = \hat{h}(\omega - z)$.

La traslación en u y la modulación en z de la función de Gauss

$$h(t) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}, \quad h \in L^2(\mathbb{R}) \quad y \quad \|h\| = 1$$

definen la ventana de Gabor, $h_{u,z}(t) = e^{i2\pi zt}h(t-u)$.

Se llama Transformada de Gabor de la señal análoga $f \in L^2(\mathbb{R})$, al producto interno en $L^2(\mathbb{R})$ de f con $h_{u,z}$

$$\langle f, h_{u,z}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi zt}\overline{h(t-u)}dt$$

4.8.2. Resolución Tiempo – Frecuencia

La ventana en la Transformada de Gabor permite establecer la resolución tanto en tiempo como en frecuencia. Si la ventana es muy angosta analizara una porción muy pequeña de la señal lo que permite tener una buena resolución en tiempo pero una mala resolución en frecuencia, debido a que solo se conocerá una fracción mínima del espectro total existente. Si la ventana es muy ancha se tendrá una buena resolución en frecuencia pero una mala resolución en el tiempo. Por tanto, uno de los defectos de esta transformada es el no poder entregar simultáneamente una buena resolución en tiempo y frecuencia debido al tamaño fijo de la ventana. La raíz de este problema se basa en el principio de incertidumbre de Heisenberg, el cual establece que es imposible conocer una representación exacta tiempo-frecuencia de una señal, es decir, no es posible saber qué valor de frecuencia existe dentro de un intervalo de tiempo.

4.8.3. El espectrograma

La transformada de Gabor se generaliza con la modulación de las funciones diferentes a las gaussianas. En las aplicaciones numéricas se usan ventanas g reales, pares y de norma unitaria. (ARANGO MARÍN, 2009)

Si el centro de la ventana g se traslada al punto $u \in \mathbb{R}$ y luego se modula $g(t-u)$ a la frecuencia $z \in \mathbb{R}$ se obtiene

$$g_{u,z}(t) = e^{i2\pi zt} g(t-u)$$

La función $g_{u,z}(t)$ de pende de los parámetros u y z y para cualquier $(u,z) \in \mathbb{R}^2$, la norma $\|g_{u,z}\| = 1$.

La Transformada ventana de Fourier asociada a $g_{u,z}$ se define, para cualquier señal $f \in L^2(\mathbb{R})$, como el siguiente producto interno en $L^2(\mathbb{R})$:

$$Sf(u,z) = \langle f, g_{u,z} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi zt} g(t-u) dt$$

Esta transformada también se denomina Transformada Fourier de Tiempo Corto (STFT), porque la multiplicación por $g(t-u)$ localiza la señal f en una vecindad de u.

El espectrograma es una densidad de energía definida por:

$$P(u,z) = |Sf(u,z)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi zt} h(t-u) \right|^2$$

$P(u,z)$ mide la energía de f en una vecindad del punto (u,z) del plano tiempo-frecuencia especificada para la ventana $g_{u,z}$.

Una de las aplicaciones más importantes del espectrograma es el cálculo de las frecuencias instantáneas de una señal, a partir de los máximos locales del espectrograma $P(u,z)$.

5. LA TRANSFORMADA DE WAVELET

Desde un punto de vista histórico, el análisis wavelets es un método nuevo, el cual retoma el trabajo realizado por el matemático Joseph Fourier en el siglo XIX. Fourier con su teoría de análisis frecuencial sentó las bases para el desarrollo actual de este tipo de análisis.

La atención de los investigadores ha cambiado gradualmente del análisis basado en frecuencia al análisis basado en escala, debido a que las medidas realizadas a fluctuaciones en diferentes escalas son menos sensibles al ruido.

El primer registro en el que se nombra una wavelet data de 1909 en la tesis de Alfred Haar. El concepto teórico de Wavelet en su actual forma fue descrito por primera vez por Jean Morlet y el centro de Física Teórica Marseille a cargo de Alex Grossmann en Francia. (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Los métodos de análisis Wavelets han sido desarrollados principalmente por Y. Meyer y sus colegas quienes han asegurado la diseminación de los métodos. El primer algoritmo se desarrolló gracias al trabajo de Stephane Mallat en 1988. Desde entonces la investigación de Wavelets ha sido internacionalizada. Tal investigación es una actividad particular en EE.UU. donde es encabezada por el trabajo de científicos como Ingrid Daubechies, Ronald Corfman y Víctor Wickerhauser.

En cualquier lugar existen señales que pueden ser analizadas, por ejemplo temblores, idioma humano, vibraciones de máquinas, imágenes médicas, datos financieros, música, entre otros. El análisis de Wavelet es un nuevo y prometedor conjunto de herramientas y técnicas para el análisis de estas señales.

Las Wavelets tienen aspectos de escala y aspectos de tiempo, consecuentemente cada aplicación también posee aspectos de escala y tiempo. Para aclarar esto, se toman estos aspectos de una forma un tanto arbitraria. Para los aspectos de escala, se presenta una idea alrededor de la noción de regularidad local, para los aspectos de tiempo se presenta una lista de dominios. Cuando la descomposición se toma en su totalidad la sustracción del ruido y los procesos de compresión son puntos centrales. (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Muchas aplicaciones usan la descomposición de Wavelet como un todo. Se encuentran muchos estudios en oceanografía y de la tierra, aunque su uso más popular es el de compresión de huellas digitales por el FBI. Cientos de miles de artículos han sido escritos en los últimos 15 años. Algunas de las aplicaciones se han inclinado hacia la medicina, por lo cual se pueden encontrar estudios en la extracción del micropotencial en el ECG, remoción del ruido en el ECG, etc.

5.1. ANÁLISIS WAVELET

La adaptación de Gabor, llamada Transformada de Fourier en Tiempo Corto (STFT), analiza pequeñas secciones de la señal en el tiempo, técnica conocida como windowing (ventaneo) de la señal. Esta adaptación, mapea la señal en dos dimensiones, en función del Tiempo y la Frecuencia.

Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 19. Representación de la STFT

La STFT representa un pequeño compromiso entre tiempo y frecuencia basándose en la vista de la señal. Esta provee alguna información como el cuándo y con qué frecuencia se produce un acontecimiento de la señal. Sin embargo, solo es posible obtener esta información con una precisión limitada y esta precisión es determinada por el tamaño de la ventana. (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

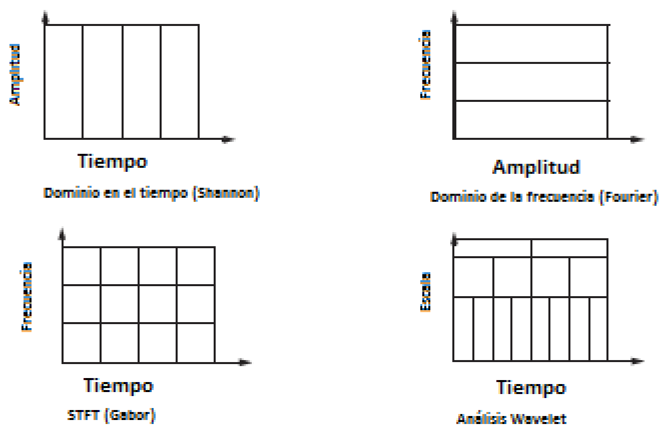
Aunque la información dada por la STFT puede ser útil, el inconveniente radica en la elección única de un tamaño para la ventana en el tiempo, lo que significa que esta ventana es la misma para todas las frecuencias. Muchas señales requieren una aproximación más flexible, una donde se pueda variar el tamaño de la ventana para determinar de forma más detallada el tiempo o la frecuencia.

El análisis Wavelets es una técnica de ventaneo con regiones de tamaño variable; permite el uso de largos intervalos donde se desea ser más preciso en información de bajas frecuencia y regiones cortas donde es requerida información de altas frecuencias.

Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 20. Representación de la Transformada Wavelet

A continuación se muestra un contraste de la vista de la señal bajo los análisis basados en tiempo, en frecuencia y STFT.



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

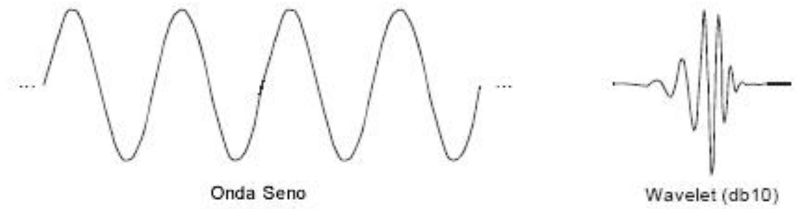
Figura 21. Comparación entre diferentes tipos de análisis

Como se puede observar en la figura 21 el análisis Wavelets no usa una región tiempo-frecuencia sino una región tiempo escala.

Una de las mayores ventajas de Wavelet es su habilidad para hacer un análisis local; un análisis localizado en un área a lo largo de una señal.

El análisis Wavelet es capaz de revelar aspectos que otras técnicas de análisis de señales omiten; aspectos como tendencias, puntos de ruptura, discontinuidades en derivadas superiores y autosimilitudes. Además ofrece una vista diferente de los datos que presentan las técnicas tradicionales permitiendo comprimir o limpiar una señal sin presentar degradación de la misma.

Una Wavelet es una onda de duración limitada que tiene un valor promedio de cero. Comparada con ondas senos y cosenos, las cuales son la base del análisis de Fourier, las ondas sinusoidales no tienen una duración limitada, se extienden de menos a más infinito y en donde las sinusoides tienden a ser lisas y predecibles las Wavelets tienden a ser irregulares y asimétricas (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007).



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 22. Comparación entre las funciones madres de la Transformada de Fourier y la Transformada de Wavelet

El análisis de Fourier consiste en el fraccionamiento de una señal en ondas sinusoidales de varias frecuencias, de forma similar el análisis Wavelet es el fraccionamiento de la señal en su versiones trasladas y escaladas de una wavelet original (wavelet madre).

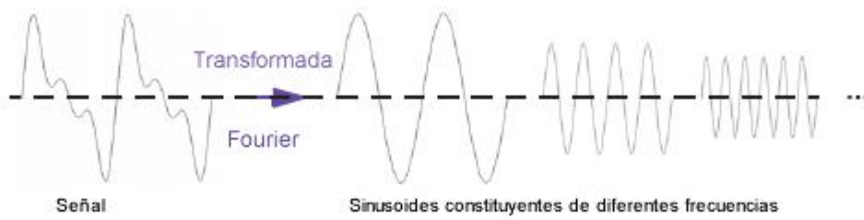
El análisis Wavelet puede ser aplicado a datos en dos dimensiones (imágenes) y en principio, a datos en dimensiones superiores.

5.2. TRANSFORMADA CONTINUA DE WAVELET

Matemáticamente, el proceso de análisis de Fourier es representado por la Transformada de Fourier

$$\mathrm{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

la cual es la suma de todos los tiempos de la señal $f(t)$ multiplicada por un exponente complejo (recordando que el exponencial complejo puede dividir en componentes sinusoidales reales e imaginarios). Los resultados de la transformada son los coeficientes de Fourier $F(\omega)$, los cuales pueden multiplicarse por una sinusoide de frecuencia ω produciendo las componentes sinusoidales de la señal original. Gráficamente el proceso sería:



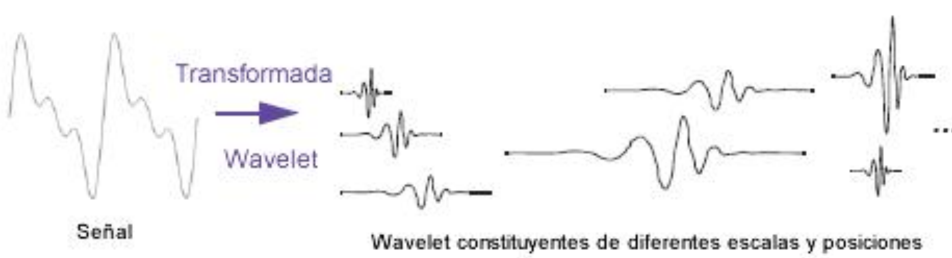
Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 23. Descomposición mediante Fourier

De forma similar, la Transformada Continua de Wavelet (CWT) es definida como la suma de todos los tiempos de la señal multiplicados por las versiones escaladas y trasladadas de la función wavelet Ψ:

$$C(escala\ , posición) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi(escala\ , posición, t)dt$$

Los resultados de la CWT son muchos coeficientes wavelet C, los cuales están en función de la escala y de la posición. Al multiplicar cada coeficiente por la apropiada wavelet escalda y trasladada se producen las wavelets constituyentes de la señal original. (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

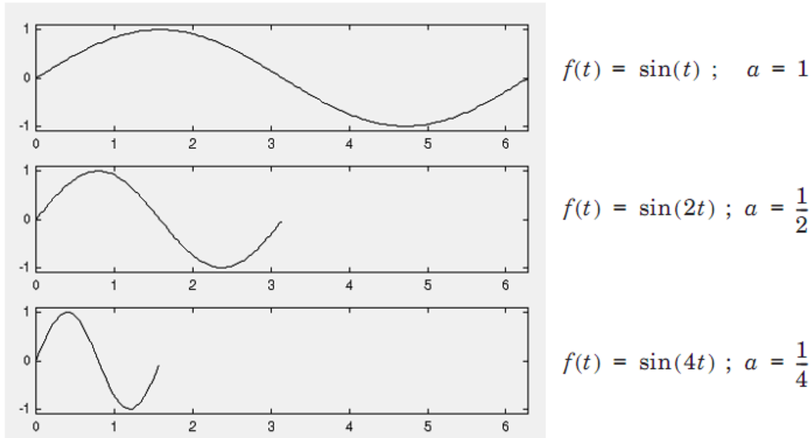


Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 24. Descomposición mediante Wavelet

5.2.1. Escalado

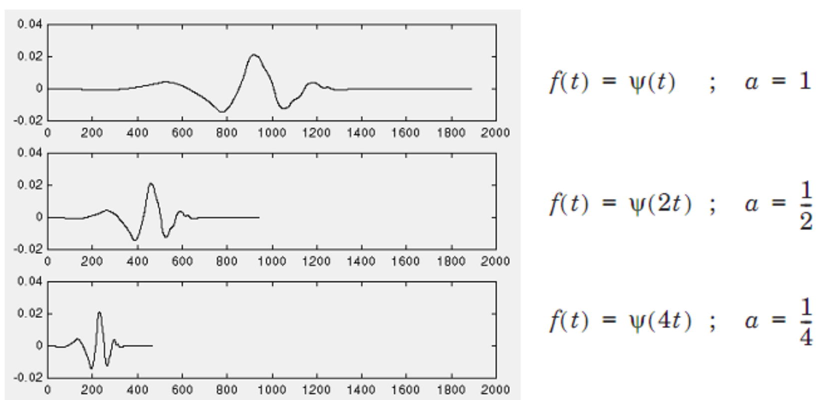
La escalada de una wavelet es simplemente la extensión o la compresión de esta. Para ir más allá de la descripción coloquial de extensión, se introduce el factor escala, a menudo denotada por la letra a. En relación con la función seno, el efecto del factor escala sería:



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 25. Escalado en una función Seno

El factor de escala trabaja de la misma forma con wavelets, a menor factor de escala, más comprimida la wavelet.



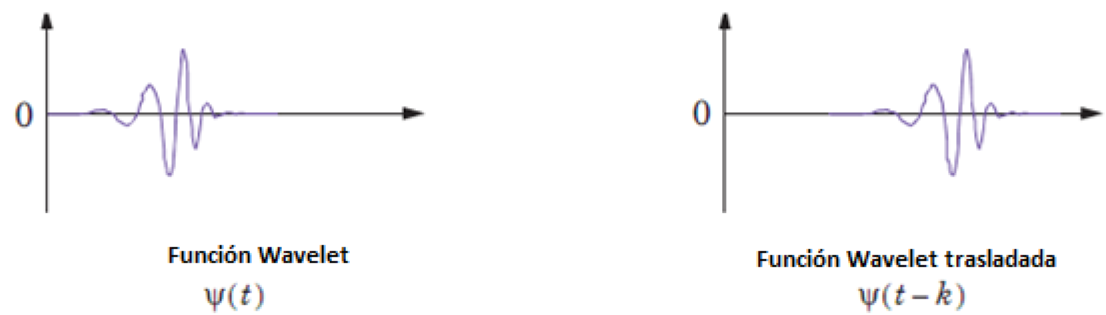
Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 26. Escalado en una Wavelet

Es claro en la figura 25 que, para una sinusoide $sen(\omega t)$, el factor de escala a, está relacionado inversamente con la frecuencia ω (radianes). Del mismo modo, en el análisis Wavelet, la escala está relacionada con la frecuencia de la señal.

5.2.2. Traslación

La traslación de una Wavelet se refiere simplemente al retraso (o aceleramiento) de su aparición. Matemáticamente, el retraso de una función $f(t)$ por k es representado por $f(t-k)$



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 27. Traslación en Wavelet

5.2.3. Escala y Frecuencia

En el análisis Wavelet, grandes escalas corresponden a Wavelets "estiradas". La Wavelet más estirada, hace más larga la porción de la señal con la cual se comienza a comparar y por tanto, son más toscas las características medibles por los coeficientes wavelet.

Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 28. Relación Escala - Frecuencia

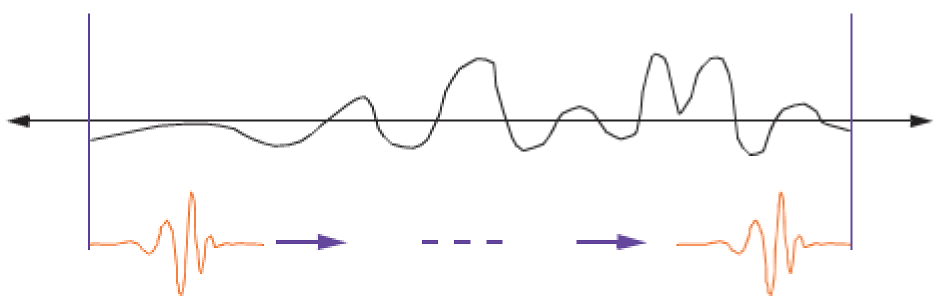
Por lo tanto, hay una correspondencia entre las escalas wavelet y la frecuencia según lo revelado por el análisis wavelet:

- Pequeños valores de $a \Rightarrow$ Wavelet comprimida $\Rightarrow$ cambios rápidos en los detalles $\Rightarrow$ Altas frecuencias ω.
- Grandes valores de $a \Rightarrow$ Wavelet estirada $\Rightarrow$ Cambios lentos, características toscas $\Rightarrow$ Bajas frecuencias ω.

Todo tratamiento de la señal realizado en un ordenador con datos reales, se debe realizar en una señal discreta, es decir, en una señal que se ha medido en tiempo discreto. Cuando se refiere a continuo en la CWT y que la diferencia de la Transformada Discreta de Wavelet, es el conjunto de escalas y posiciones en las que opera. (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

A diferencia de la Transformada Discreta de Wavelet, la CWT puede operar en todas las escalas, desde la escala de la señal original hasta una escala máxima que se determina según la necesidad de análisis detallado que se requiera y del poder computacional disponible.

La CWT es también continua en términos de traslación: durante la computación, el análisis Wavelet es trasladado suavemente sobre todo el dominio de la función analizada.



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 29. Traslación de una Wavelet a lo largo de una señal

5.3. TRANSFORMADA DISCRETA DE WAVELET

Calcular los coeficientes Wavelet para cada posible escala representa una gran cantidad de trabajo y una enorme pérdida de datos. Elegir escalas y posiciones basadas en potencias de dos (también llamadas escalas y posiciones diádicas), hace que los resultados del análisis y del proceso serán mucho más eficientes. Se obtiene un análisis de este tipo de la Transformada Discreta de Wavelet (DWT). (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

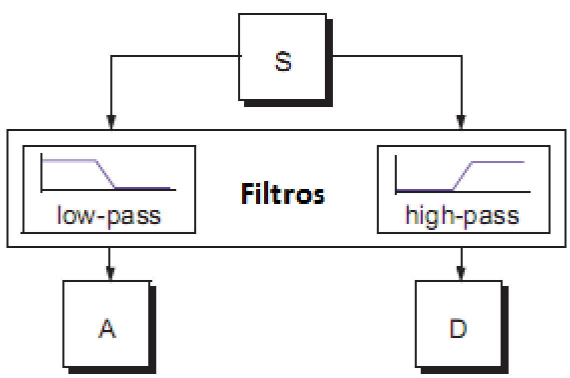
Una forma eficiente de implementar este sistema es el uso de filtros, desarrollado en 1988 por Mallat. El algoritmo de Mallat es en realidad un esquema clásico conocido en la comunidad de procesamiento de señales como un codificador subbanda de dos canales.

La correcta implementación del algoritmo de filtrado, permite obtener una rápida transformada de wavelet en donde los coeficientes emergen rápidamente.

Para muchas señales, el contenido de bajas frecuencias es la parte más importante, debido a que estas son las que dan a la señal su identidad; por otro lado, el contenido de las altas frecuencias, imparte sabor o matices. Considerando la voz humana, si son removidos los componentes de altas frecuencias el sonido de la voz será diferente pero entendible, sin embargo si son removidos suficientes componentes de baja frecuencia solo se escucharan murmullos. (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

En el análisis Wavelet, se habla muchas veces de aproximaciones y detalles. Las aproximaciones son las grandes escalas, los componentes de baja frecuencia de la señal. Los detalles son las pequeñas escalas por ende los componentes de altas frecuencias.

El proceso de filtrado en su nivel básico se puede representar como:

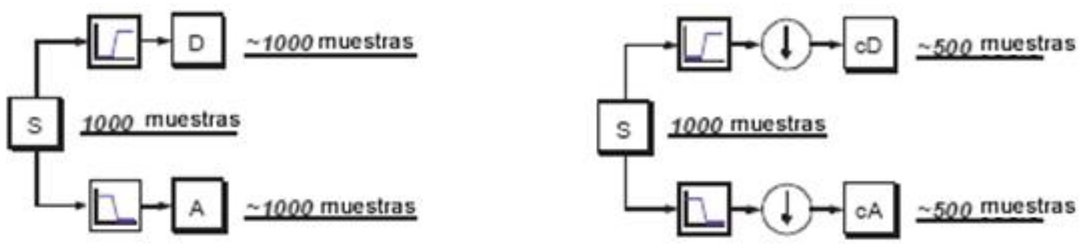


Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 30. Nivel básico de filtrado

La señal original S, pasa a través de dos filtros complementarios y emerge como dos señales. Desafortunadamente, si realmente es realizada esta operación en una señal digital real, se terminaría con el doble de datos empleados inicialmente. Suponiendo por un instante que la señal original S consta de 1000 muestras de datos, entonces para cada señal restante se tendrían 1000 muestras, un total de 2000 datos.

Estas señales A y D son de interés, pero se obtuvieron 2000 valores en lugar de los 1000 iniciales. Existe una manera más sutil para realizar la descomposición usando wavelets. Examinando cuidadosamente cada cálculo, se puede mantener solo un punto de cada dos de las 2000 muestras para mantener completa la información. Este es el concepto de $downsampling$ en donde se producen dos secuencias llamadas cA y cD.

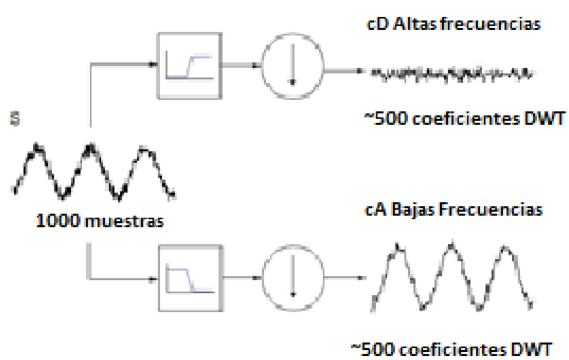


Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 31. Downsamplig

El proceso de la derecha muestra el $downsampling$, produce los coeficientes DWT.

Para tener una mejor apreciación de este proceso, se muestra a continuación la Transformada Discreta de Wavelet de una señal, en una primera etapa. La señal es una sinusoide pura con ruido de alta frecuencia agregado a él.

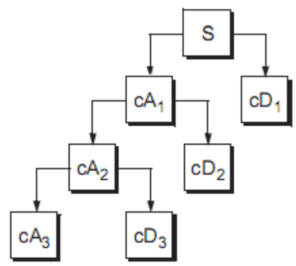


Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 32. Downsamplig de una señal

5.3.1. DESCOMPOSICIÓN MULTINIVEL

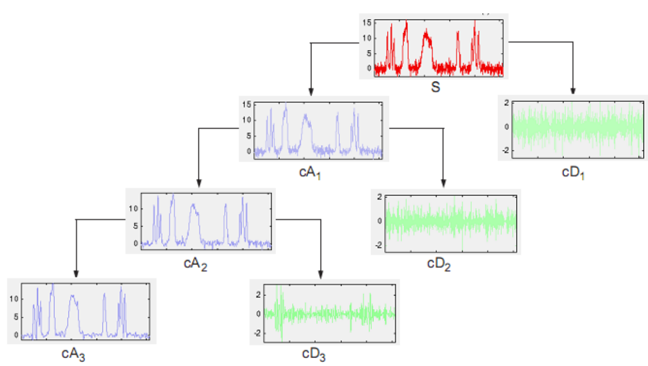
El proceso de descomposición puede ser iterativo, con aproximaciones sucesivas que se descomponen a su vez, de manera que una señal se divida en muchas componentes de menor resolución. La descripción anterior es la correspondiente al árbol de descomposición wavelet. (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 33. Descomposición multinivel Wavelet

Al observar el árbol de descomposición, este puede aportar información valiosa.



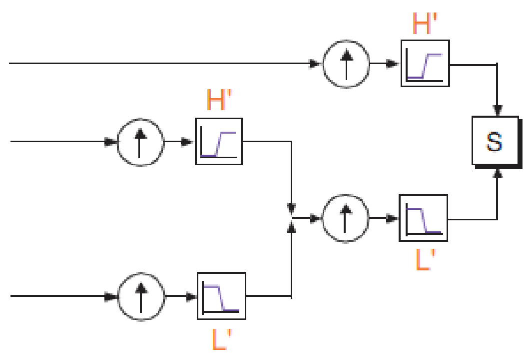
Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 34. Árbol de descomposición Wavelet

Debido a que el proceso de análisis es iterativo, el número de niveles de descomposición puede crecer indefinidamente. En realidad la descomposición puede proceder únicamente hasta que los detalles consistan en una simple muestra o pixel. En la práctica se selecciona un número apropiado de niveles basados en la naturaleza de la señal o en un criterio apropiado como la entropía.

5.3.2. RECONSTRUCCIÓN WAVELET

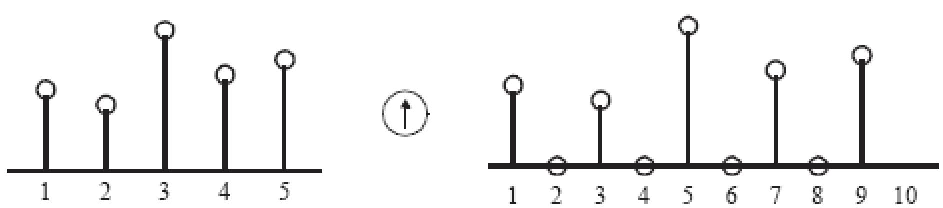
La Transformada Discreta de Wavelet puede ser utilizada para analizar, o descomponer, señales e imágenes. Este proceso se denomina descomposición o análisis. La otra mitad de la historia es como estos componentes pueden ser ensamblados nuevamente para reconstruir la señal original sin pérdida de información. Este proceso es llamado reconstrucción o síntesis. El método matemática que permite esto, es llamado, Transformada Inversa Discreta de Wavelet (IDWT). (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 35. Reconstrucción Wavelet

Cuando el análisis Wavelet implica filtrado y *downsampling*, el proceso de reconstrucción Wavelet consiste en *upsampling* y filtrado. *Upsampling* es el proceso de prolongación de una componente de la señal insertando ceros entre las muestras.



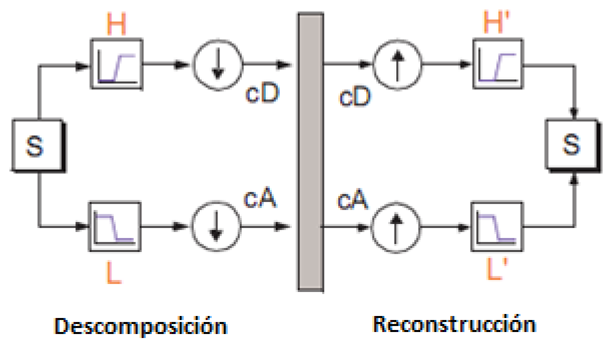
Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 36. Upsampling

La parte de filtrado del proceso de reconstrucción es parte importante en el análisis Wavelet, debido a que la elección de los filtros son fundamentales para alcanzar la reconstrucción perfecta de la señal original.

El *downsampling* de los componentes de la señal realizado durante la fase de descomposición, introduce una distorsión llamada "$aliasing$". La cuidadosa elección de los filtros para las fases de descomposición y reconstrucción están estrechamente relacionadas (no idénticas) pudiendo cancelar los efectos del $aliasing$.

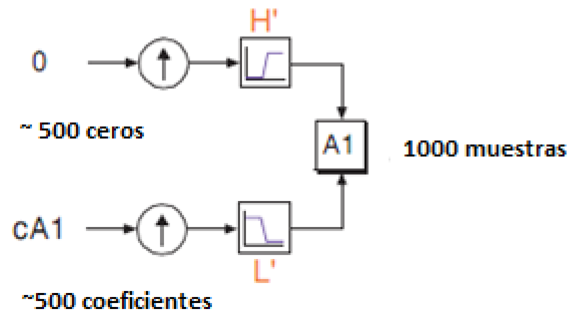
Los filtros de descomposición $\mathrm{pasa-bajo}$ y $\mathrm{pasa-alto}$ $(L\ y\ H)$, junto con sus filtros de reconstrucción asociados $(L'y\ H')$, forman un sistema llamado filtros espejo en cuadratura (quadrature mirror filters). (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 37. Filtros espejo en cuadratura

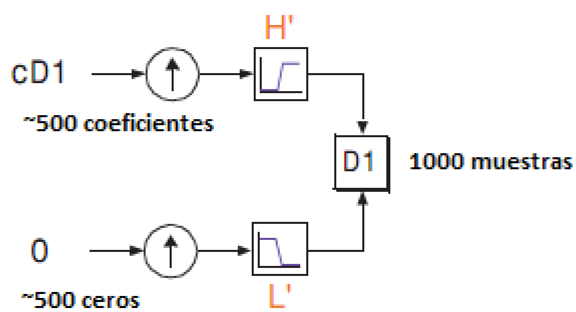
La IDWT permite reconstruir la señal original a partir de los coeficientes de aproximación y detalle. De igual manera permite la reconstrucción de las aproximaciones y detalles por sí mismo a partir del vector de coeficientes. Como ejemplo, se toma la reconstrucción del vector de coeficientes cA_1 del primer nivel de aproximación A_1. Este se pasa por el mismo proceso usado en la reconstrucción de la señal original. Sin embargo, en lugar de combinarlo con el vector de coeficiente de detalle cD_1, se hace con un vector de ceros.



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 38. Reconstrucción de un nivel de Aproximación

El proceso da lugar a la reconstrucción de la aproximación A_1, que tiene la misma longitud que la señal original S y que es una aproximación real de la misma. Del mismo modo, es posible reconstruir los detalles de primer nivel D_1, utilizando el procedimiento análogo:



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

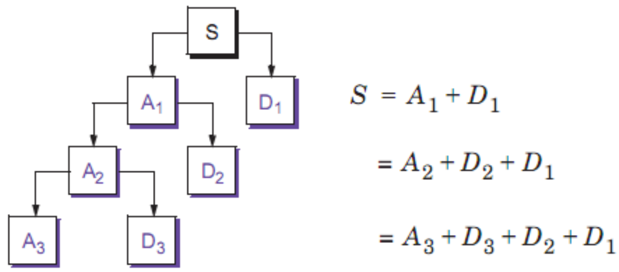
Figura 39. Reconstrucción de un nivel de detalle

La reconstrucción de los detalles y las aproximaciones es la que constituye realmente la señal original:

$$A_1 + D_1 = S$$

Nótese que los vectores de coeficientes cA_1 y cD_1 producidos por él $downsampling$ son solo la mitad de la señal original, lo que no permite combinarlos directamente para reproducirla. Es necesaria la reconstrucción de las aproximaciones y los detalles antes de poder combinarlas.

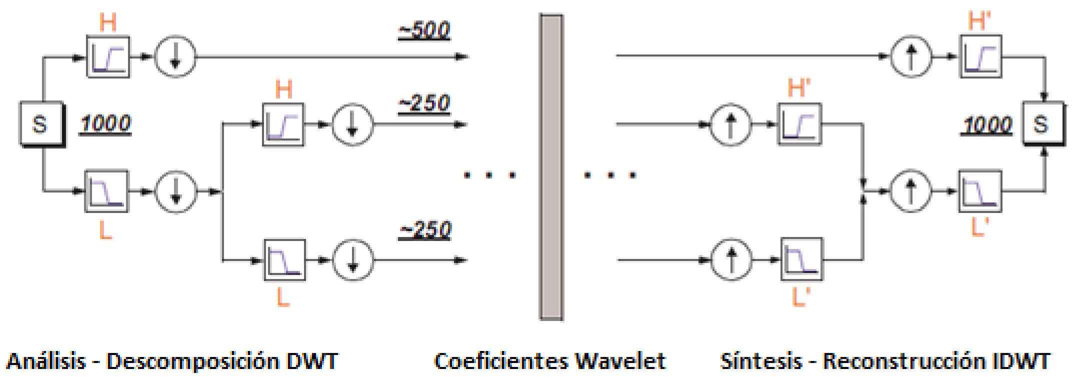
Extendiendo esta técnica a las demás componentes del análisis multinivel, se encuentra con que relaciones similares se cumplen para todos los componentes de la señal reconstruida. Lo anterior muestra la existencia de varias formas de reconstrucción de la señal original.



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 40. Reconstrucción de las componentes de una señal

Los procesos de análisis y síntesis multinivel, pueden ser representados como se muestra en la Figura 41.



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

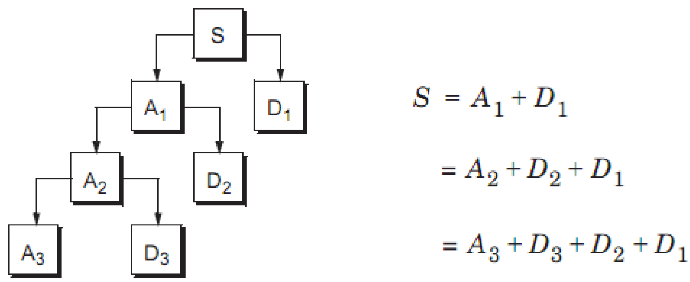
Figura 41. Análisis y síntesis multinivel

Este proceso involucra dos aspectos: ruptura de la señal y obtención de los coeficientes wavelet y, ensamble de la señal a partir de estos coeficientes. Los coeficientes Wavelet pueden modificarse antes de efectuar el paso de reconstrucción. Entre estas modificaciones se encuentran la limpieza de ruido, la compresión de la señal, entre los más usados. (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

5.4. ANÁLISIS WAVELET PACKET

El método de Wavelet Packet es una generalización de la descomposición Wavelet que ofrece un amplio rango de posibilidades para el análisis de señales.

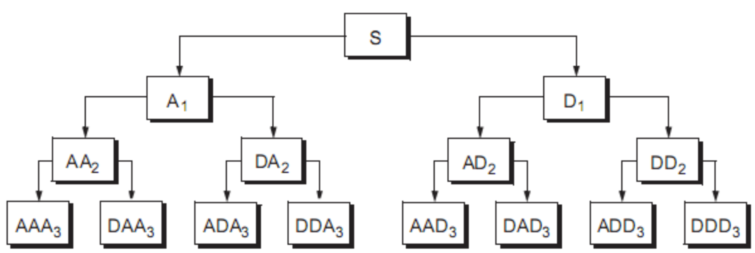
En el análisis wavelet, una señal es dividida en aproximaciones y detalles; las aproximaciones son divididas nuevamente en un segundo nivel de aproximaciones y detalles de forma repetitiva. Para un nivel n de descomposición hay $n+1$ posibles formas para descomponer o codificar la señal.



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 42. Descomposición Wavelet

En análisis Wavelet Packet los detalles como las aproximaciones pueden ser divididas. Esta produce más de $2^{2^{n-1}}$ formas diferentes de codificar la señal. La figura muestra el árbol de descomposición de Wavelet Packet.



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 43. Descomposición Wavelet Packet

Como ejemplo, de la figura 43 el análisis de Wavelet Packet permite que la señal S sea representada como $A_1 + AAD_3 + DAD_3 + DD_2$. Este ejemplo que representa una posibilidad de reconstrucción que no es posible obtener con el análisis Wavelet ordinario.

Elegir una de todas las posibles codificaciones presenta un interesante problema, y en la mayoría de los casos se utiliza el criterio basado en la entropía para seleccionar la descomposición más conveniente de la señal dada. Esto quiere decir que se observa cada nodo del árbol de descomposición y se cuantifica la información que se puede obtener de cada división.

5.4.1. De Wavelet a Wavelet Packet

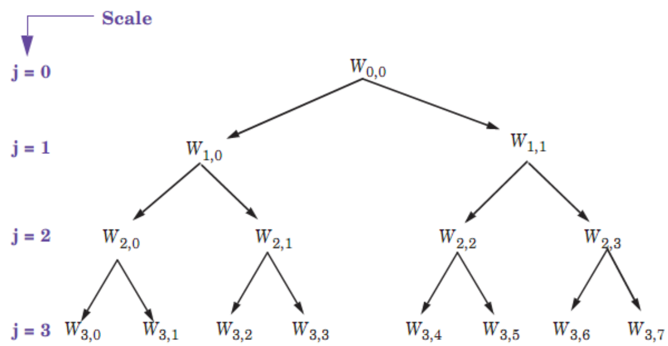
En el procedimiento de descomposición de wavelet, el paso genérico divide los coeficientes de aproximación en dos partes; luego de la separación se obtiene un vector de coeficientes de aproximaciones y un vector de coeficientes de detalles, ambos con una escala poco definida. La información perdida entre las dos aproximaciones sucesivas es capturada en los coeficientes de detalle, el próximo paso consiste en dividir nuevamente el vector de coeficientes de aproximación y nunca son reanalizados los detalles. (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

En al análisis correspondiente a Wavelet Packet, cada vector de coeficientes de detalle se descompone en dos partes usando el mismo enfoque que en la división del vector de aproximación, produciendo un muy buen análisis.

La idea de esta descomposición es partir de una descomposición orientada a la escala y entonces analizar las señales obtenidas en sub-bandas de frecuencia.

5.4.2. Organización Wavelet Packet

El conjunto de funciones $W_{j,n} = (W_{j,n,k}(x), k \in \mathbb{Z})$ es el wavelet packet (j, n). Para valores enteros positivos de j y n, la wavelet packet es organizada en árbol. El árbol de la figura 44 es creado por el nivel máximo de descomposición que en este caso es igual a 3; para cada escala j, los valores posibles del parámetro n son $0,1, \ldots, 2^j - 1$.



Fuente: (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007)

Figura 44. Organización Wavelet Packet

La notación $W_{j,n}$ donde j denota el parámetro de escala y n el parámetro de la frecuencia; esto es consistente con la posición del árbol etiquetado.

5.4.3. Elección de la descomposición optima

Una señal de longitud $N = 2^L$ puede ser expandida en α formas diferentes, donde α es el número de sub-árboles binarios de un árbol binario completo de profundidad L. Como resultado $\alpha \geq 2^{N/2}$.

Como este número puede ser muy grande, y puesto que la enumeración explícita es generalmente difícil de manejar, es interesante encontrar una descomposición óptima con respecto a un criterio práctico, computable por un algoritmo eficiente.

Funciones de verificación de tipo aditivo son muy adecuadas para la búsqueda eficiente de las estructuras de árboles binarios, y la división fundamental. Los criterios básicos de la entropía coinciden con estas condiciones y describen la información relacionada con las propiedades de una representación exacta de una señal determinada. Se muestra una lista de 4 diferentes criterios de entropía, pero hay otros que pueden ser implementados (MISITI, MISITI, OPPENHEIM, & POGGI, 2007). En las siguientes expresiones S es la señal y (S_i) son los coeficientes de S en una base ortogonal.

La entropía E debe ser una función de costo aditivo tal que $E(0) = 0$ y

$$E(s) = \sum_i E(s_i)$$

- La Entropía de Shannon (no-normalizada)

$$E1(s_i) = -s_i^2 \log({s_i}^2)$$

También

$$E1(s) = -\sum_i s_i^2 \log({s_i}^2)$$

Con la convención $0 \log(0) = 0$.

- La concentración en l^P con norma $1 \leq P$.

$$E2(S_i) = |(S_i)\,|^P$$

También

$$E2(s) = \sum_i |s_i|^P = \|s\|_P^P$$

- Entropía del logaritmo de la "energía".

$$E3(S_i) = \log\left({S_i}^2\right)$$

También

$$E3(s) = \sum_i \log\left({S_i}^2\right)$$

Con la convención $\log(0) = 0$.

- Entropía Umbral

$E4(S_i) = 1$, si $|s_i| > \varepsilon$ y 0 en otro caso. También $E4(s) = \#\,\{i\ tal\ que\ |s_i| > \varepsilon\}$ es el número de instantes de tiempo cuando la señal es mayor que un umbral ε.

5.5. TRANSFORMADA MODULUS MAXIMA

La mayoría de la información contenida en una señal se encuentra en estructuras irregulares y fenómenos transitorios, conocidos como singularidades. Un método sobresaliente en la búsqueda e identificación de estas es la Transformada de Wavelet, debido a su capacidad de descomponer una señal tanto en tiempo como en frecuencia. Debido a esta capacidad, la Transformada de Wavelet es capaz de definir la regularidad local en una señal. La regularidad local de una función a menudo se mide con el exponente de Lipschitz, también llamado exponente de Hölder (ARANGO MARÍN, 2009). El máximo local del módulo de la Transformada de Wavelet se define como:

Sea $Wf(x)$ la Transformada Wavelet de la función $f(x)$.

- Se llama extremo local a cualquier punto x_0, tal que $\frac{d(Wf(x))}{dx}$ tiene un cruce por cero en $x = x_0$, cuando x varia.
- Se llama modulus máxima a un punto x_0 tal que $|Wf(x)| < |Wf(x_o)|$ cuando x pertenece al entorno a la derecha y a la izquierda de x_0, y $|Wf(x)| \leq |Wf(x_0)|$ cuando x pertence a otro lado fuera de la vecindad de x_0.
- Se llama línea de máximos, a la curva que se conecta a lo largo del espacio de escala de x, para la cual todos sus puntos son modulus máximas.

6. ALGORITMOS PARA LA REDUCCIÓN DE RUIDO EN SEÑALES

Los algoritmos para la reducción de ruido utilizando Wavelet fueron iniciados principalmente por Donoho y Johnstone en EE.UU. y por Ricard y Kerkyacharian en Francia. Meyer considera que este tema es una de las más significativas aplicaciones de las Wavelets. Dado esto se han desarrollado diferentes algoritmos que permiten analizar una señal y posteriormente sintetizarla reduciendo el ruido que presentaba originalmente.

6.1. UMBRAL SUAVE Y DURO

Existen una gran cantidad de algoritmos para la reducción de ruido utilizando teoría de Wavelets, entre los cuales se encuentran:

- Coherence denoising
- Fixed form threshold
- Heuristic SURE
- Minimax
- Penalize High
- Penalize medium
- Penalize low
- Rigorous SURE
- Wavelet Shrinkage

Los algoritmos se pueden clasificar en métodos de reducción de ruido lineales y no lineales. Los métodos lineales son independientes del tamaño empírico de los coeficientes de la señal, por lo que no son tomados en cuenta. Se basan en que el ruido se encuentra principalmente en los coeficientes finos de escala, de este modo elimina todos los coeficientes con una escala más fina que cierto umbral de escala λ (Hernández Díaz, 2003). Si los coeficientes de wavelet son $\{d_{j,k}\}$, entonces la relación es:

$$d_{j,k} = \begin{Bmatrix} o & ,j \geq \lambda \\ d_{j,k} & ,j < \lambda \end{Bmatrix}$$

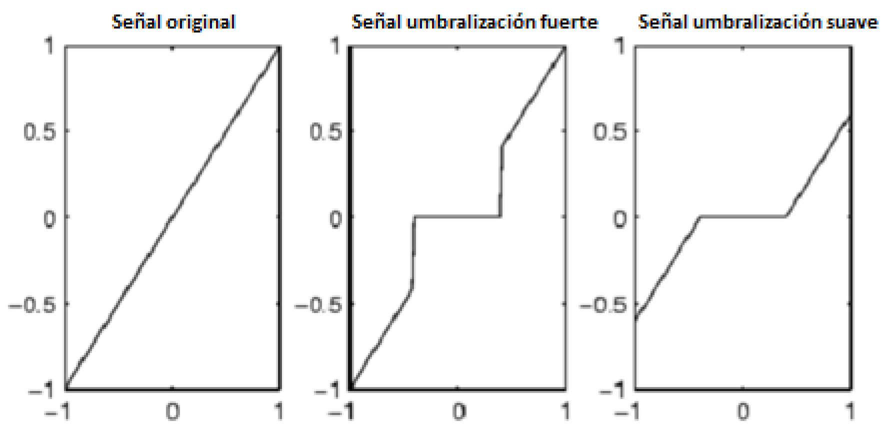
Los métodos no lineales se basan en la idea de que el ruido se encuentra en cada coeficiente y está distribuido sobre todas las escalas. Estos se pueden aplicar en dos versiones, la del umbral suave y la del umbral duro (hard threshold y soft threshold). El umbral duro elimina los coeficientes que se encuentran debajo de cierto umbral elegido. Estos es:

$$s(x) = \begin{cases} s(x) & , |x| > \lambda \\ 0 & , |x| \leq \lambda \end{cases}$$

donde $S(x)$ es la señal que está siendo analizada y λ es el umbral elegido previamente. El Umbral suave, también conocido como Shrinkage Denoising, es una extensión del umbral duro, eliminando los elementos cuyo valor sea menor al umbral y enviando a un valor determinado al resto de ellos. Este proceso se realiza de la siguiente forma:

$$s(x) = \begin{cases} s(x)(|x| - \lambda) & , |x| > \lambda \\ 0 & , |x| \leq \lambda \end{cases}$$

En la figura 45 se aprecia una función tratada con ambos métodos, el umbral duro crea discontinuidades en $s(x) = \pm\lambda$ mientras el umbral suave no lo hace.



Fuente: (Hernández Díaz, 2003)

Figura 45. Umbrales suave y duro

6.2. ANÁLISIS DE ALGORITMOS

Para iniciar con el análisis de algoritmos es necesario conocer la forma en la que trabaja para poder eliminar el ruido de una señal. Para esto se parte de:

$$s(n) = f(n) + e\sigma(n)$$

Donde $f(n)$ es la señal de interés que se desea transmitir, $e(n)$ es ruido blanco Gaussiano, con una medida igual a cero, estacionaria y de segundo orden, lo que significa que todas las componentes de ruido tendrán la misma desviación estándar, la cual es reflejado en el estimador σ y $s(n)$ es la señal resultante de la mezcla de la señal y el ruido. (Hernández Díaz, 2003)

El procedimiento para eliminar el ruido de la señal requiere de tres etapas, para las cuales se requiere definir cierta nomenclatura. Para referirse a la Transformada de Wavelet se define $X(a,b) = DWT\{x(n)\}$, y su inversa está dada por $x(n) = IDWT\{X(a,b)\}$. De este modo se tiene que el proceso es:

I. Descomposición: Elegir una wavelet $h_{a,b}$ con la cual se va a trabajar y elegir un número J de niveles de descomposición a calcular o resolución. Posteriormente se calcula la DWT de la señal $s(n)$.

$$S(a,b) = DWT\{s(n), h_{a,b}, J\}$$

II. Umbral: Esta parte es fundamental en el proceso y se puede definir como:

Un umbral puede ser visto como un parámetro de suavizado: controla el compromiso entre la bondad de ajuste y el suavizado de aproximación. En este contexto, el suavizado debe interpretarse como una dispersión: se trata de encontrar una serie de datos esparcidos, cerca de la entrada ruidosa (Hernández Díaz, 2003).

Para cada coeficiente de 1 a J, se selecciona un umbral λ y se aplica un umbral duro o suave, eliminando los de más baja energía. Se define un operador $u\{\ \}$ que determina el cálculo del umbral λ y otro operador $D\{\ \}$ que realice el proceso de reducción de ruido para obtener los coeficientes limpios $Z(a,b)$. Estos son:

$$\lambda = u\{S(a,b)\}$$

$$Z(a,b) = D\{S(a,b), \lambda\}$$

III. Reconstrucción: Calcular la Transformada Inversa Discreta de Wavelet utilizando los coeficientes modificados.

$$z(n) = IDWT\{Z(a,b)\}$$

Existe una gran variedad de métodos para elegir el valor del umbral λ y pueden ser agrupados en dos categorías, los umbrales globales y los umbrales dependientes de nivel. Los umbrales globales eligen un valor fijo de λ para ser aplicado a todos los coeficientes wavelet. Los umbrales dependientes de nivel tienen la posibilidad de un valor diferente de umbral λ_a para cada nivel de resolución (escala).

Todos los umbrales requieren una estimación de los niveles de ruido, para lo cual no se utiliza la desviación estándar usual de los valores de los datos. El algoritmo propuesto por Donoho y Johnstone en 1994, considera un estimador en el dominio de las wavelet y sugiere un estimador robusto basado en la desviación media absoluta y toma en cuenta solo los coeficientes empíricos de wavelets en los niveles más finos de escala, debido a que concentran la mayor cantidad de ruido (Hernández Díaz, 2003).El estimador de los niveles de ruido está dado por:

$$\sigma = \frac{mediana(\{|S(J-1,b)|: b = 0,1,\ldots,2^{j-1}-1\})}{0.6745}$$

Donde J representa el número de niveles de descomposición o $Decimado$. Este estimador se aplica a los diferentes métodos para reducir ruido.

6.3. ALGORITMO MINIMAX

El primer algoritmo en surgir fue el Minimax y utiliza el principio minimax el cual es utilizado en estadística para diseñar estimadores. Debido a que la reducción de ruido de la señal puede ser vista como el estimador de una regresión de una función desconocida, el umbral minimax λ_M es la opción que obtiene el mínimo, de un conjunto de valores dados, del máximo error cuadrático medio o riesgo.

Este algoritmo fue desarrollado por Donoho y Johnstone en 1994 y es un umbral que minimiza el término constante en el riesgo de la estimación de una función (Hernández Díaz, 2003). El umbral minimax propuesto, el cual depende del tamaño n de las muestras es:

$$\lambda = 0.3936 + 0.1829(\log N \,/\, \log 2)$$

6.4. FIXED FORM THRESHOLD

Propuesto por Donoho y Johnstone en 1994, el cual ha recibido varios nombres como: Universal threshold, Visushrink y Fixed form threshold, dependiendo del autor. Surge como alternativa a los umbrales Minimax. Se utiliza una forma fija de umbral, determinado por:

$$\lambda_{UNI} = \sigma\sqrt{2\log(n)}$$

donde el umbral λ_{UNI} es función de n (longitud de la señal a limpiar) y σ es el estimador de los niveles de ruido descrito en la ecuación. Esto ocasiona la variación del umbral de acuerdo a la longitud de la señal. Para una señal de mayor tamaño, el umbral será mayor que para una señal de menor tamaño. (Hernández Díaz, 2003)

El umbral universal es sustancialmente más grande que el umbral Minimax para cualquier valor particular de n. Como resultado, la reconstrucción involucra menos coeficientes, lo cual representa una estimación que es el mejor balance para el proceso de limpieza, debido a una mejor distribución de la estandarización de los coeficientes que en la estimación Minimax. Otra característica importante radica en que este umbral, posee una alta probabilidad que garantiza que todas las muestras de la DWT en las cuales la función es analizada son exactamente cero, serán estimadas como cero. Este algoritmo es también catalogado dentro de los métodos de umbral global. (Hernández Díaz, 2003)

Una cuestión importante es el ¿por qué el umbral depende de la longitud de la señal?. La explicación radica en que al agregar más muestras, aumenta la redundancia de la señal, esto es, hay menos información nueva en las muestras nuevas que las que hay en las primeras muestras. En el dominio wavelet (escala y traslación), esto significa que el número de coeficientes importantes está creciendo escasamente y toda la información está concentrada en un número limitado de coeficientes. De este modo, el número total de coeficientes de ruido es proporcional a n al igual que el número de coeficientes que tienen la información, sólo que se guarda una relación que está determinada, precisamente por el umbral universal.

6.5. RIGOROUS SURE

Propuesto por Donoho y Johnstone en 1995; introduce un esquema que utiliza los coeficientes wavelets de tal forma que para cada nivel a de escala tenga un umbral λ_a. Este algoritmo recibe también el nombre de $SureShrink$ porque se basa en aplicar él $Stein\acute{} s\ Unbiased\ Risk\ Estimate$ $(SURE)$, el cual es un estimador de umbral suave. También se conoce como función de pérdida cuadrática. (Hernández Díaz, 2003)

Lo primero que se hace es obtener una estimación de riesgo para un valor de umbral en particular; reducir el riesgo o pérdida en ese valor provee una selección del valor del umbral. El valor final del umbral, es:

$$\lambda_{SURE} = \arg min_{0<\lambda<\lambda_{UNI}} SURE(\lambda, \frac{S(a,b)}{\sigma})$$

donde $a = a_0, \ldots, J-1, \quad b = 0,1, \ldots, 2^J - 1,\ \lambda_{UNI}$ fue definido anteriormente, $S(a,b)$ son los coeficientes DWT y σ es el estimador de los niveles de ruido. El operador $arg\ min$ denota la utilización de elementos menores del estimador SURE.

Este tipo de umbral posee una desventaja, el cual fue resuelto por los autores, haciendo un método que conjuntara los trabajos realizados previamente y que compartiera las características de ambos algoritmos, refiriéndose al umbral universal y al SureShrink. De esta mezcla salió el método $Heuristic\, SURE$ o $Hybrid\, SURE$. (Hernández Díaz, 2003)

6.6. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

6.6.1. SNR – SIGNAL TO NOISE RATIO

Se expresa como:

$$SNR = 10 \log\left[(\sum_{n=1}^{N} (x(n) - \tilde{x}(n))^2)^{-1} \sum_{n=1}^{N} (x(n) - \bar{x}(n))^2 \right]$$

Se observa que SNR se incrementa cuando el error entre la señal original y señal filtrada, se decrementa. La relación entre el SNR y el PRD está dada por:

$$SNR = -20 \log(0.01PRD)$$

6.6.2. PRD – PERCENTAGE ROOT DIFFERENCE

Se define como:

$$PRD = \left[\sum_{n=1}^{n} (x(n) - \tilde{x}(n)) \right]^{\frac{1}{2}|} \left[\sum_{n=1}^{N} x^2(n) \right]^{\frac{1}{2}} \times 100$$

Donde $x(n)$ es la señal original, $\tilde{x}(n)$ es la señal reconstruida y N es el tamaño de la ventana. Un valor bajo representa un buen desempeño del algoritmo.

6.6.3. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE PEARSON

Se aplica en la obtención de una medida que tenga en cuenta el grado de similitud entre las señales original x y filtrada y. Esta dada por

$$R_{xy} = C_{xy} \left(C_{xx} C_{yy} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Donde C_{xy} es la covarianza cruzada.

7. ESTADÍSTICOS DE ORDEN SUPERIOR

Durante años recientes, los estadísticos de orden superior (Espectros) han comenzado a encontrar una gran aplicabilidad en gran diversidad de campos, como por ejemplo, sonar, radar, física de plasma, biomedicina, procesamiento de datos sísmicos, reconstrucción de imágenes, recuperación de armónicos, estimación de tiempo de demora, filtrado adaptativo, procesamiento de vectores, y nivelación ciega. Estos estadísticos, conocidos como cumulantes, y sus Transformaciones de Fourier, conocidos como Poliespectros, no solo muestran información de la Amplitud, sino también información de Fase. Esto es importante, porque, como bien se sabe, los estadísticos de segundo orden (como la correlación) son ciegos ante ella. (MENDEL, 1991)

Los estadísticos de orden superior son aplicables cuando se trata con procesos No Gaussianos (o posibles no linealidades), como muchas de las aplicaciones de la vida real. En el pasado, debido a la falta de herramientas analíticas, se había visto forzado a tratar las aplicaciones como si fueran Gaussianas. Con los nuevos desarrollos, se da la posibilidad de reexaminar cada aplicación usando estadísticos de orden superior y mirar, si es posible obtener mejores resultados.

Los primeros trabajos que aplicaron los estadísticos de orden superior infirieron nuevas propiedades en los datos analizados y con el emergente interés en el análisis espectral, la investigación se extendió hacia el análisis poliespectral, el cual se ha dividido en dos, el método poliespectral paramétrico y el método poliespectral no paramétrico. El método paramétrico está sujeto a dos problemas, la alta variancia y la baja resolución. El método no paramétrico, estima los parámetros de un modelo fundamental y después usa el modelo para generar el poliespectro. (MENDOZA SANTIAGO, 2002)

La desventaja más grande en la utilización de los métodos paramétrico y no paramétricos, es la cantidad de datos que requieren a diferencia de los métodos basados en la correlación. Esa gran cantidad de datos es necesaria para reducir la variancia asociada con la estimación de los estadísticos de orden superior.

7.1. LOS CUMULANTES

Los cumulantes corresponden a otro tipo de estadístico de alto orden derivado a partir del logaritmo neperiano de la función generadora de momentos. Los cumulantes son combinaciones no lineales de estos momentos, los cuales son generalizaciones naturales de la autocorrelación. (MENDOZA SANTIAGO, 2002)

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aleatorias, sus cumulantes conjuntos de orden $r = k_{1,} k_2, \ldots, k_n$ se definen como

$$C_{k_1,k_2,\ldots,k_n} = (-j)^r \frac{\partial^r \ln \phi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{\partial \omega_1^{k_1} \partial \omega_2^{k_2} \ldots \partial \omega_n^{k_n}} |_{\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n}$$

donde,

$$\Phi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = E[e^{j\omega_1 X_1 + \cdots + j\omega_n X_n}]$$

es la función característica conjunta.

Los momentos conjuntos de orden $r = k_{1,} k_2, \ldots, k_n$ se definen como

$$m_{k_1,k_2,\ldots,k_n} = E\left[X_1^{k_1}, X_2^{k_2}, \ldots, X_n^{k_n}\right] = (-j)^r \frac{\partial^r \Phi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{\partial \omega_1^{k_1} \partial \omega_2^{k_2} \ldots \partial \omega_n^{k_n}} |_{\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n}$$

Debido a esto, los cumulantes conjuntos pueden ser expresados en función de los momentos de las variables aleatorias.

Para una sola variable aleatoria X_1, la función generadora de cumulantes de orden k es:

$$c_k = (-j)^k \frac{\partial^k \ln \Phi(\omega)}{\partial \omega^k} |_{\omega = 0}, \qquad donde\ \Phi(\omega) = E[e^{j\omega X}]$$

Cuando $k = 1$,

$$c_1 = (-j) \frac{d \ln E\left[e^{i\omega X}\right]}{d\omega} = (-j) \frac{E\left[jXe^{j\omega X}\right]}{E[e^{j\omega X}]} |_{\omega = 0} = E[X] = m_1$$

Para $k = 2$,

$$c_2 = (-j)^2 \frac{d^2 \ln E\left[e^{j\omega X}\right]}{d\omega^2}$$
$$= -\frac{d^2}{d\omega^2} \ln E\left[e^{j\omega X}\right] = -\frac{E\left[e^{j\omega X}\right] E\left[-X^2 e^{\omega jX}\right] - E\left[jXe^{i\omega X}\right] E\left[jXe^{j\omega X}\right]}{E[e^{j\omega X}]^2}$$

$$c_2 = E[X^2] - E[X]^2 = m_2 - m_1^2$$

Utilizando el mismo procedimiento se obtiene el cumulante de orden 3 y 4,

$$c_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

$$c_4 = m_4 - 4m_3m_1 - 3m_2^2 + 12m_2m_1^2 - 6m_1^4$$

Para una variable estocástica se tiene:

$$m_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = E[X(n), X(n+\tau_1) + \cdots + X(n+\tau_{n-1})]$$

Para $n=2$, $m_2^x(\tau)=E[X(n),X(n+\tau)]=R_x(\tau)$; donde τ es el desfasamiento entre las secuencias. De igual forma, los cumulantes de $n-\acute{e}simo$ orden pueden ser escritos como

$$c_x^n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \triangleq cum[X(n), X(n+\tau_1), \dots, X(n+\tau_{n-1})]$$

A continuación se muestran algunas relaciones entre los momentos y los cumulantes.

$$c_1^x = m_1^x = E[X(n)] = media$$

$$c_2^x(\tau_1) = m_2^x(\tau_1) - (m_1^x)^2 = covariancia$$

Donde $c_2^x(\tau_1)$ es una función simétrica alrededor de $\tau_1 = 0$, es decir, $c_2^x(\tau_1) = c_2^x(-\tau_1)$, por lo que se dice que $c_2^x(\tau_1)$ es una función de fase cero, lo que significa que toda la información de la fase de $x(n)$ se pierde. De igual manera,

$$c_3^x(\tau_1, \tau_2) = m_3^x(\tau_1, \tau_2) - m_1^x[m_2^x(\tau_1) + m_2^\tau(\tau_2) + m_2^x(\tau_1 - \tau_2)] + 2(m_1^x)^3$$

$$\begin{aligned} c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = {} & m_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - m_2^x(\tau_1)m_2^x(\tau_3 - \tau_2) - m_2^x(\tau_2)m_2^x(\tau_3 - \tau_2) \\ & - m_2^x(\tau_3)m_2^x(\tau_2 - \tau_1) \\ & - m_1^x[m_3^x(\tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_1) + m_3^x(\tau_2, \tau_3) + m_3^x(\tau_2, \tau_4) + m_3^x(\tau_1, \tau_2)] \\ & + (m_1^x)^2[m_2^x(\tau_1) + m_2^x(\tau_2) + m_2^x(\tau_3) + m_2^x(\tau_3 - \tau_1) + m_2^x(\tau_3 - \tau_2) \\ & + m_2^x(\tau_2 - \tau_1)] - 6(m_1^x)^4 \end{aligned}$$

Cuando $m_1^x = 0$, se tienen los siguientes casos particulares,

$$c_1^x = 0$$

$$c_2^x(\tau_1) = m_2^x(\tau_1) \quad autocorrelación$$

$$c_3^x(\tau_1, \tau_2) = m_3^x(\tau_1, \tau_2)$$

Por lo que, si $x(n)$ tiene media cero, las ecuaciones anteriores son iguales de los cumulantes de segundo y tercer orden son iguales a los momentos de segundo y tercer orden respectivamente. Sin embargo, para los cumulantes de cuarto orden es necesario conocer los momentos de segundo y cuarto orden; de la ecuación de cumulantes de cuarto orden se tiene,

$$c_4^x(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = m_4^x(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - m_2^x(\tau_1)m_2^x(\tau_3-\tau_2) - m_2^x(\tau_2)m_2^x(\tau_3-\tau_1) - m_2^x(\tau_3)m_2^x(\tau_2-\tau_1)$$

Por tanto, de las ecuaciones de cumulantes de segundo, tercero y cuarto orden con $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ y $m_1^x = 0$, se obtiene

$$\gamma_2^x = E[X^2(n)] = c_2^x(0) \quad Variancia$$

$$\gamma_3^x = E[X^3(n)] = c_3^x(0{,}0) \quad Sesgo$$

$$\gamma_4^x = E[X^4(n)] = 3[\gamma_2^x]^2 = c_2^x(0{,}0{,}0) \quad Kurtosis$$

7.2. EL BIESPECTRO

El Biespectro es una parte de los espectros cumulantes o poliespectros, que no solo revelan la información de amplitud del proceso sino también de la fase del mismo. Esto es de gran importancia, debido a que la Densidad Espectral del Potencia y los estadísticos de segundo orden, como la correlación son ciegos ante la fase. (NIKIAS, 1987)

El Biespectro se define como la Transformada de Fourier Bidimensional del cumulante de tercer orden,

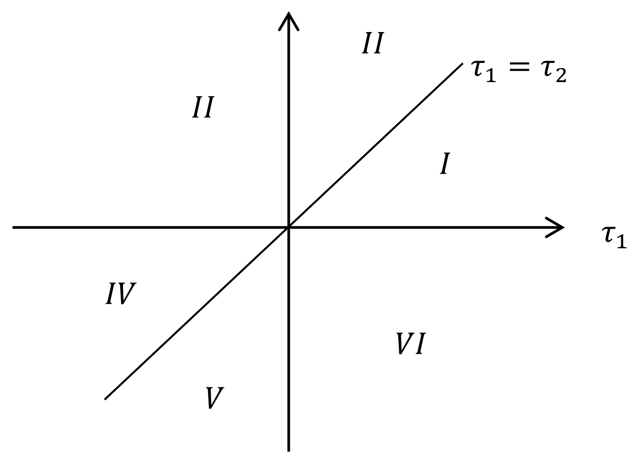
$$S_3^x(\omega_1,\omega_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\tau_2}^{\infty} c_3^x(\tau_1,\tau_2)e^{\{-j(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)\}}, \qquad |\omega_1| < \pi, \quad |\omega_2| < \pi, \quad |\omega_1+\omega_2|$$

De la ecuación de cumulantes de tercer orden y de las propiedades de los momentos se tienen las siguientes condiciones de simetría.

$$c_3^x(\tau_1,\tau_2) = c_3^x(\tau_2,\tau_1) = c_3^x(-\tau_2,\tau_1-\tau_2) = c_3^x(\tau_2-\tau_1,-\tau_1) = c_3^x(\tau_1-\tau_2,-\tau_2) = c_3^x(-\tau_1,\tau_2-\tau_1)$$

Al conocer los cumulantes de tercer orden en cualquiera de los sectores del I al IV, es posible encontrar la secuencia cumulante de tercer orden (MENDOZA SANTIAGO, 2002)

τ_2



Fuente: Elaboración propia

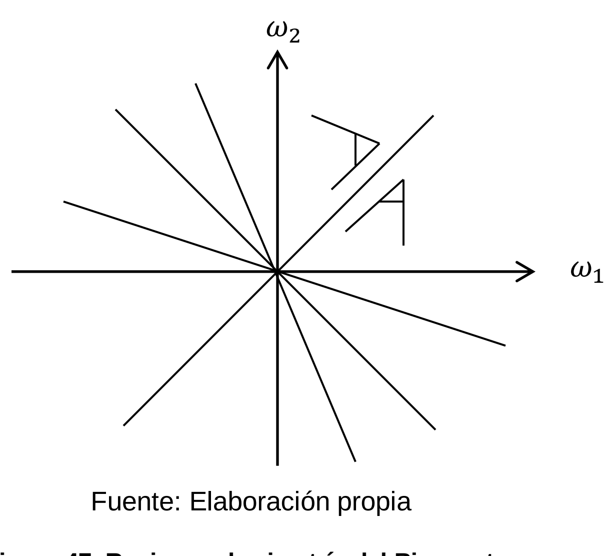
Figura 46. Simetría de los momentos de tercer orden

Para señales reales solo se desea conocer el espectro no redundante, como para el espectro de potencia, solo es necesario conocerlo en el intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$, debido a la simetría que posee la Densidad Espectral de Potencias respecto al eje $\omega = 0$.

Para el Biespectro se tienen las siguientes regiones de simetría,

$$S_3^x(\omega_1,\omega_2) = S_3^x(\omega_2,\omega_1) = S_3^x(-\omega_2,\omega_1) = S_3^x(-\omega_1-\omega_2,\omega_2) = S_3^x(\omega_1,-\omega_1-\omega_2)$$
$$= S_3^x(\omega_2,-\omega_1-\omega_2) = S_3^x(-\omega_1-\omega_2,\omega_1)$$

El conocimiento del Biespectro en la región $\omega_2 \geq 0,\ \ \omega_2 \geq \omega_1,\ \ \omega_1 + \omega_2 \leq \pi,$ es suficiente para describir este para señales aleatorias reales.



Fuente: Elaboración propia

Figura 47. Regiones de simetría del Biespectro

Existen 12 regiones de simetría para el Biespectro.

El Biespectro cruzado se define como,

$$S_{xyz}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{xyz}(k, l) e^{-j2\pi\omega_1 k} e^{-j2\pi\omega_2 l}$$

En donde El Biespectro S_3^x es un caso especial, en donde $x = y = z$.

Finalmente, se define la Bicoherencia crazada, que es otro estadístico útil en el análisis de señales, como

$$bic_{xyz}(\omega_1, \omega_2) = \frac{S_{xyz}(\omega_1, \omega_2)}{\sqrt{S_2^y(\omega_1 + \omega_2) S_2^y(\omega_1) S_2^z(\omega_2)}}$$

La Bicoherencia es obtenida cuando $x = y = z$. En general, la Bicoherencia es una normalización de los datos obtenidos a través del Biespectro. (MENDOZA SANTIAGO, 2002)

7.3. TEST DE LINEALIDAD Y GAUSSIANIDAD

Hinich desarrollo un algoritmo para probar la no-simetría (pobremente llamada Gaussianida) y la linealidad. La idea básica, es que si los cumulantes de tercer orden de un proceso $x(n)$ son cero, entonces su Biespectro es cero y por lo tanto su Bicoherencia también lo es. Si el Biespectro no es cero, entonces el proceso es no-Gaussiano; si el proceso es lineal y no-Gaussiano, entonces la Bicoherencia es una constante diferente de cero (SWAMI, MENDEL, & NIKIAS, 2001). Por tanto, se tiene un problema de prueba de hipótesis de no-Gaussianidad (Biespectro diferente de cero):

$\boldsymbol{H1}$: El Biespectro de $x(n)$ es diferente de cero.

$\boldsymbol{H0}$: El Biespectro de $x(n)$ es cero.

Si la hipótesis de $H1$ es válida, es posible hacer el test de linealidad, esto es, se tiene un segundo problema de hipótesis,

$\boldsymbol{H1'}$: La Bicoherencia de $x(n)$ no es una constante.

$\boldsymbol{H0'}$: La Bicoherencia de $x(n)$ es una constante.

Si la hipótesis $H0'$ es válida, el proceso es lineal.

Asumiendo que se tiene una "perfecta" estimación del espectro de potencias, y considerando la estimación muestral de la Bicoherencia cuadrada,

$$\left|\widehat{bic}_{xxx}(f_1, f_2)\right|^2 = \frac{\left|\hat{S}_{xxx}(f_1, f_2)\right|^2}{S_{2x}(f_1 + f_2)S_{2x}(f_2)S_{2x}(f_2)}$$

Se establece que la estimación muestral de la Bicoherencia usando métodos convencionales es asintóticamente (compleja) Gaussiana; adicionalmente, las estimaciones a diferentes frecuencias no están correlacionadas, siempre que la separación frecuencial sea mayor que el reciproco de la longitud de la ventana efectiva. Si $\hat{S}_{xxx}$ es una distribución Gaussiana, se sabe que $\left|\hat{S}_{xxx}\right|^2$ es una distribución ji-cuadrado con dos grados de libertad.

Si $\hat{S}_{xxx}(f_1, f_2) \equiv 0$, entonces el estadístico de la Bicoherencia cuadrada, es una distribución centrada ji-cuadrado de la variable aleatoria con dos grados de libertad. La Bicoherencia cuadrada se resume como los P puntos en la región no redundante. El estadístico resultante S, es una distribución χ^2, con dos grados de libertad. Por lo tanto, es fácil imaginar, un test estadístico para determinar si el valor observado S es consistente con una distribución ji-cuadrada central; esta consistencia se reporta como un valor de probabilidad de falsa alarma (Pfa), esto es, la probabilidad de que se está equivocado al asumir el Biespectro igual a cero. Si la probabilidad es pequeña, se acepta la hipótesis de Biespectro igual a cero, es decir, no es posible rechazar la hipótesis de Gaussinidad. (SWAMI, MENDEL, & NIKIAS, 2001)

Suponiendo que se ha estimado S y se confía de la no-Gaussinidad de los datos. Ahora si los datos, son lineales, se espera que la Bicoherencia cuadrada debe ser una constante para todos los f_1 y f_2. En la práctica, la Bicoherencia estimada no será plana: se puede obtener una estimación del valor constante, calculando el valor medio de la Bicoherencia sobre los puntos de la región no redúndate, donde λ denota este valor. La Bicoherencia cuadrada es una distribución ji-cuadrada con dos grados de libertad y un parámetro de no centralidad λ.la muestra del rango intercuartil, R, de la Bicoherencia cuadrada puede ser estimado y comparado con el rango intercuartil teórico de la distribución ji-cuadrada con dos grados de libertad y parámetro de no centralidad λ. Si la estimación de los rangos intercuartiles es mucho mayor o más pequeño que el valor teórico, entonces se puede rechazar la hipótesis de linealidad.

Se debe tener en cuenta que un valor cero para el Biespectro no es prueba de Gaussinidad, debido a que los cumulantes de orden superior y los poliespectros no tienen que ser necesariamente idénticos a cero.

8. DINÁMICA NO LINEAL

El matemático francés Jules Henri Poincaré aporto un punto de ruptura entre las teorías de la mecánica celeste y la dinámica de sistemas no disipativos. Las ideas de Newton se convirtieron en un paradigma que lograba describir muchos fenómenos de la vida o al menos los más evidentes, pero existían detalles que no se contemplaban en sus modelos. La mecánica planetaria no tomaba en cuenta los aspectos no lineales de muchos problemas, como los presentes en el “problema de los tres cuerpos”. Poincaré en 1980 publicó un artículo describiendo el hecho de que el sistema “Sol – Tierra – Luna” en interacción, no puede ser explicado bajo la mecánica clásica tradicional demostrando que este conjunto por simple que parezca, presenta un comportamiento complejo a través de una dinámica irregular.

8.1. NOCIONES FUNDAMENTALES

8.1.1. Sistema Dinámico

Un sistema dinámico es, según Kuznetsov, la representación matemática de un proceso determinístico. Si se conoce la ley que gobierna su evolución y su estado inicial, se puede predecir cualquier estado futuro del sistema. En otras palabras, está definido por una serie de variables dependientes del tiempo. (CARBALLO RUBIO)

8.1.2. Estado

Se dice que un estado de un sistema dinámico es el conjunto de valores particulares de las variables definitorias en un momento determinado. (CARBALLO RUBIO)

8.1.3. Reglas de Evolución

Todo sistema dinámico presenta una evolución de sus variables en el tiempo. Se denomina reglas de evolución al patrón que siguen estas variables.

8.1.4. Ecuaciones de Evolución o Movimiento

Un sistema dinámico debe ser representado en forma de ecuaciones que relacionen las diferentes variables x_i (algunas veces se incluye el tiempo), para poderlo trabajar matemáticamente y predecir sus estados futuros numéricamente. Las representaciones pueden darse desde ecuaciones diferenciales de cualquier tipo a ecuaciones de recurrencia o en diferencias. En otras palabras, las reglas de evolución del sistema, se plantean en forma matemática. (CARBALLO RUBIO)

8.1.5. Sistemas Autónomos y No autónomos

En las ecuaciones de evolución del sistema dinámico, puede o no aparecer la variable temporal t. Para aquellos sistemas en donde aparece explícitamente en sus ecuaciones el tiempo, se denominará autónomo y, no autónomo en caso contrario.

8.1.6. Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos

Se dice que un sistema dinámico es continuo, cuando su variable temporal es medida en forma continua. Por otra parte, si el tiempo es medido en pequeños lapsos, el sistema dinámico se dice discreto.

8.1.7. Linealidad y No Linealidad

Dadas las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico de orden n,

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i \in [1, n] \subset \mathbb{N}$$

Se dice que es un sistema lineal cuando las funciones f_i son lineales en las variables x_i. Si se conocen dos soluciones para un sistema lineal, la suma de ellas también es una solución (principio de superposición).

Un sistema dinámico se dice no lineal cuando alguna de las funciones f_i es no lineal en las variables x_i. Estos sistemas son mucho más difíciles de analizar y a menudo exhiben un fenómeno conocido como caos, con comportamientos totalmente imprevisibles y una gran sensibilidad a las condiciones iniciales. (CARBALLO RUBIO)

8.1.8. Espacio de Fases

Espacio $n-dimensional$ constituido por las x_i, $i = 1, \ldots, n$ variables que describen un sistema dinámico y se dice que este sistema tiene dimensión u orden n.

8.1.9. Trayectoria

La solución de un sistema dinámico de orden n, dadas unas condiciones iniciales, consiste en un conjunto de funciones $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, que constituyen las ecuaciones paramétricas de una curva en el espacio fásico, la se denomina trayectoria del sistema.

8.1.10. Diagrama de Fases

El conjunto de trayectorias del sistema en el espacio de fases, para las condiciones iniciales dadas para el sistema, se denomina diagrama de fases.

8.1.11. Volumen Fásico

Dado un sistema dinámico de orden n, se denomina volumen fásico al conjunto de condiciones iniciales del sistema. (CARBALLO RUBIO)

8.1.12. Sistemas Conservativos y Disipativos

Se dice que un sistema dinámico es conservativo si mantiene constante la energía del sistema. En otras palabras, si dada una porción del volumen fásico, al evolucionar el sistema, este es invariante en el tiempo. Si el volumen fásico, varía con el tiempo y por tanto la energía del sistema no se conserva, se dice que el sistema es disipativo.

8.1.13. Atractor

Región del espacio de fases de los sistemas disipativos hacia la cual convergen las trayectorias que parten de una determinada región, llamada cuenca del atractor. Los atractores “predecibles”, de estructura simple, son el punto y el ciclo límite, que corresponden a comportamientos periódicos y, por lo tanto, se representan con curvas cerradas.

8.1.14. Atractor Extraño

Un atractor extraño de un sistema determinístico de ecuaciones diferenciales no lineales, se caracteriza por ser una cuenca de atracción de las trayectorias de las soluciones en el espacio de fases que exhibe una alta sensibilidad a las condiciones iniciales. Su estructura es muy complicada y tiene una dimensión fractal.

8.1.15. Fractal

Un fractal es una forma geométrica que permanece invariante sin importar el aumento con el que se la observe. Esta propiedad recibe el nombre de “autosemejanza”.

8.2. ANÁLISIS NO LINEAL DE LAS SERIES DE TIEMPO

El análisis no lineal de las series de tiempo, es el estudio de series temporales con técnicas computacionales sensibles a la no linealidad en los datos. Si bien hay una larga historia del análisis lineal de series de tiempo, los métodos no lineales solo acaban de empezar a entrar en su madurez. Al analizar datos de series temporales con métodos lineales, hay ciertos procedimientos estándar que se pueden seguir y el comportamiento puede ser completamente descrito por un conjunto relativamente pequeño de parámetros. Para el análisis no lineal de series de tiempo, esto no es así. Si bien existen algoritmos de caja negra para el análisis de datos de series temporales con métodos no lineales, la aplicación de estos algoritmos requiere considerable conocimiento y habilidad por parte del operador. (SMALL, 2004)

Por otra parte, las crecientes herramientas y métodos de análisis no lineal de series de tiempo, aún tienen relativamente pocas materias y aplicaciones prácticas que merezcan la atención de un ingeniero o un médico, pero existen aplicaciones que satisfacen a matemáticos y físicos.

8.2.1. Reconstrucción del Atractor

La complejidad de un sistema se puede caracterizar partiendo de una variable cualquiera que pertenezca a este. Esto fue demostrado en el teorema de Withney-Takens, el cual se fundamenta en la equivalencia topológica entre el sistema y cualquiera de las variables que lo conforman. Dicho teorema demuestra matemáticamente que las propiedades estadísticas fundamentales del atractor subyacente a un sistema, se conservan en los mapas de retorno, reconstruidos a partir de la información proporcionada por una serie temporal de una de las variables relevantes en dicho sistema. (Zulantay, 2008)

Al reconstruir el atractor, puede calcularse diferentes índices estadísticos que permiten describir algunas de las propiedades más importantes en donde suele manifestarse la complejidad, tales como la no linealidad, la caoticidad y la fractalidad del sistema.

En el caso de Sistemas Dinámicos No Lineales, con datos incompletos, la extracción de información, es un trabajo bastante complejo a diferencia de su contraparte lineal. La reconstrucción del espacio de fase permite recuperar la dinámica de un sistema no lineal a partir de una única serie de tiempo, en especial cuando el sistema considerado es altamente caótico. Como se debe de suponer, el espacio reconstruido no es completamente equivalente a la dinámica interna del sistema, pero bajo ciertas restricciones, la topología se preserva. Lo cual permite que las conclusiones obtenidas de la dinámica reconstruida sean válidas para la verdadera dinámica interna. Además, la dinámica reconstruida permite la detección de estructuras que para la serie de tiempo pueden pasar desapercibidas. (SMALL, 2004)

Para obtener el espacio de fase reconstruido, se considera un conjunto de muestras uniformemente espaciadas de una única variable, x. El espcio de fase reconstruido es una representación multidimensional de la señal, contra versiones demoradas de sí misma (subseries). En términos formales, el Espacio de Fase Reconstruido se forma mediante los vectores $\vec{X}_n$ en $\mathbb{R}^k$, donde

$$\vec{X}_n = \{x[n], x[n+\tau], \dots, x[n+(m-1)\tau]\}$$

ó

$$\vec{X}_n = \{x[n], x[n-\tau], \dots, x[n-(m-1)\tau]\}$$

El $x[i]$, es el valor de la señal en el tiempo i, mientras que m, es una constante fundamental para la reconstrucción, denominada Dimensión de Embebimiento. Esta dimensión puede considerarse como la cantidad total de series de tiempo (x y $subseries$) involucradas en el análisis, gráficamente se considera como el número de ejes y analíticamente, se considera como la cantidad de variables que afectan el sistema. El valor τ es el desplazamiento de las subseries y se conoce como Retraso, y en conjunto con la Dimensión de Embebimiento, imponen serias condiciones iniciales en la reconstrucción.

Según el teorema de Takens, en donde se relaciona el Espacio de Fase Reconstruido con la verdadera dinámica interna del sistema, una Dimensión de Embebimiento suficiente y el retraso apropiado, la dinámica real y el espacio de fases reconstruido resultan topológicamente idénticos. Esta equivalencia, permite extraer conclusiones sobre la dinámica de un sistema usando una única serie temporal. Sin embargo, para poder reconstruir el Espacio de Fase, se requieren m y τ, para los cuales en muchas ocasiones se tiene que recurrir a aproximaciones empíricas. Existen varios métodos matemáticos y estadísticos para determinar estos valores, entre los cuales sobresalen para el cálculo de la Dimensión de Embebimiento, los Falsos Vecinos más Cercanos (FNN – False Nearest Neighbor) y para el Retraso, La Media de la Información Mutua (AMI – Average Mutual Information).

8.2.1.1. False Nearest Neighbor

El método de los Falsos vecinos más cercanos, propuesto por Kennel, permite obtener la óptima dimensión de Embebimiento para la reconstrucción del Espacio de Fase. Se revisan las vecindades de los puntos embebidos proyectándolos en dimensiones cada vez mayores eliminando los falsos vecinos: en otras palabras, estos puntos, que aparentemente están bastante cerca, debido a las proyecciones, se separan en dimensiones de Embebimiento superiores. Un criterio utilizado para la captura de errores de Embebimiento, es el aumento de la distancia entre puntos vecinos, cuando se pasa de la dimensión d a $d + 1$. Se designa como un falso vecino cercano a aquellos para los cuales es válido que,

$$\left[\frac{R_{m+1}^2(t,r) - R_m^2(t,r)}{R_m^2(t,r)}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{|x(t+\tau) - x(t_r+\tau)|}{R_m(t,r)} > R_{tol}$$

Donde t y τ corresponden al tiempo del vecino y del punto de referencia, respectivamente. R_m Denota la distancia en el espacio de fase en una dimensión de Embebimiento m, y R_{tol} es el umbral de tolerancia. (SMALL, 2004)

8.2.1.2. Información Mutua Promedio

Una forma de evaluar la correlación o información entre mediciones está basada en la idea de Shanon acerca de la información mutua entre dos dimensiones a_i y

b_j, extraídas de dos conjuntos de A y B de posibles mediciones. La información mutua entre una medición a_i extraída de un conjunto $A = a_i$ y una b_i, extraída de un conjunto $B = b_j$ es la cantidad de información contenida en a_i acerca de la medición b_j. Esto es

$$\log_2 \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i) P_B(b_j)} \right]$$

Donde $P_{AB}(a, b)$ es la densidad de probabilidad conjunta de que las mediciones de A y B resulten en valores a y b. $P_A(a)$ y $P_B(b)$ son las densidades de probabilidad individuales para las mediciones de A y B. Si la medición de un valor de A arroja un valor a_i completamente independiente de la medición de un valor b_j de B, entonces la probabilidad conjunta $P_{AB}(a, b) = P_A(a) P_B(b)$, y por tanto la información entre las dimensiones, la información mutua, resulta ser nula. Al promedio sobre todas las mediciones de esta información estadística, se le denomina información mutua promedio entre las mediciones A y B, esto es

$$I_{AB} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}\left(a_i, b_j\right) \log_2 \left[\frac{P_{AB}\left(a_i, b_j\right)}{P_A(a_i) P_B\left(b_j\right)} \right]$$

Esta cantidad no está relacionada con las reglas de evolución lineal o no-lineal de las cantidades medidas. Este es un producto netamente teórico que conecta dos conjuntos de mediciones entre ellas y establece un criterio para su dependencia mutua basado en la noción de la información compartida entre ellas. Usando esto puede darse una definición precisa para la comprensión teórica acerca de cómo una medición $x(t)$ a un tiempo t está conectada con una medición $x(t + \tau)$ a un tiempo $t + \tau$. Tomando un conjunto A de mediciones de $x(t)$ y un conjunto B de mediciones $x(t + \tau)$, la información mutua promedio entre estas dos mediciones es:

$$I(\tau) = \sum_{x(t), x(t+\tau)} P\big(x(t), x(t+\tau)\big) \log_2 \left[\frac{P\big(x(t), x(t+\tau)\big)}{P\big(x(t)\big) P\big(x(t+\tau)\big)} \right]$$

donde $I(\tau) \geq 0$.

Cuando τ se hace muy grande, el comportamiento caótico de la señal hace que las mediciones $x(t)$ y $x(t + \tau)$ sean independientes e $I(\tau)$ tendera a cero. Esta función $I(\tau)$ puede tomarse como un tipo de función de autocorrelación no-lineal para determinar cuando los valores $x(t)$ y $x(t + \tau)$ son lo suficientemente independientes entre sí, para ser usados como coordenadas de un vector de datos con retrasos temporales, pero no tan independientes para que los mismos estén desconectados. Para la reconstrucción del espacio de fase se sugiere tomar el valor del retraso τ para el cual ocurre el primer mínimo. (SMALL, 2004)

8.2.2. Exponente de Hurst

El exponente de Hurst es una estimación numérica de la previsibilidad de una serie de tiempo. La razón por la cual se considera como una estimación y no como una medida definitiva es debido a que el algoritmo opera bajo el supuesto de que la serie de tiempo es un fractal puro, lo cual no es enteramente cierto para la mayoría de las series de tiempo. Esto es sin embargo de poca importancia, debido a que lo que realmente hace importante al exponente de Hurst en el análisis técnico, es la capacidad que posee de dar un sistema de clasificación de las series de tiempo en términos de previsibilidad.

Hurst introdujo el análisis R/S, el cual es el cociente entre el rango de las sumas parciales de las desviaciones de las medias de una serie de tiempo y la desviación estándar. Para una serie de tiempo $x(t)$ que contiene T observaciones espaciadas uniformemente en el tiempo, se define

$$X^*(t) = \sum_{u=1}^{t} x(u)$$

Con variancia muestral dada por

$$S^2(t,s) = s^{-1} \sum_{u=t+1}^{t+s} x^2(u) - \left[s^{-1} \sum_{u=t+1}^{t+s} x(u) \right]^2$$

Para s observaciones. Y

$$\begin{aligned} R(t,s) = & \underset{o < u < s}{max} \{X^*(t+u) - X^*(t) - ({}^{u}/_{s})[X^*(t+u) - X^*(t)]\} \\ & - \underset{0 < u < s}{min} \{X^*(t+u) - X^*(t) - ({}^{u}/_{s})[X^*(t+u) - X^*(t)]\} \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene el estadístico de,

$$\frac{R}{S} = {}^{R(t,s)}\Big/_{S(t,s)}$$

Puede considerarse a este análisis como una medida robusta, en el sentido de que su comportamiento está influenciado por la persistencia a largo plazo, detectando ciclos no periódicos, aun cuando estos tengan un periodo mayor al periodo muestral y también es un método sensible para detectar correlaciones a largo plazo en procesos aleatorios. Según Maldelbrot y Wallis indican que el análisis R/S también permite deducir que muchos fenómenos naturales son procesos aleatorios independientes, pero que tienen correlación a largo plazo significativa, y finalmente se da la relación

$$R/S = (lag)^H$$

Donde lag es un periodo de tiempo dado y H es el llamado exponente de Hurst.

Los valores del Exponente de Hurst se encuentran entre el rango de 0 y 1.

- $H \cong 0.5$: indica un camino aleatorio (series de tiempo Browniana). En una caminata aleatoria no existe correlación entre cualquier elemento y un elemento futuro, y existe una probabilidad del 50% de que los valores de este en un futuro, aumenten o disminuyan. Series de este tipo, son bastante difíciles de predecir.
- $0 \leq H < 0.5$: existe para series de tiempo con comportamiento "anti-persistente".Esto significa que un aumento tenderá a ser seguido por una disminución (o el caso contrario). Este comportamiento en algunas ocasiones recibe el nombre de "reversión de la media", que significa que valores futuros tenderán a largo plazo, a un valor medio.
- $0.5 < H \leq 1$: Indica un comportamiento persistente, lo que quiere decir que la serie de tiempo tiene tendencias. Si se aumenta el paso del tiempo de $[t-1]$ a $[t]$ es probable que haya un aumento de $[t]$ a $[t+1]$. Lo mismo puede decirse de las disminuciones, en donde una disminución tendera a seguir a una disminución. Cuanto mayor sea el valor de H, más fuerte será la tendencia. Las series de tiempo que caen es esta categoría, son más fáciles de predecir que en las dos anteriores.

8.2.3. Dimensión de Correlación

Existen varias formas de cuantificar la auto-similaridad de la geometría de un objeto de una dimensión y, por supuesto, esta definición debe coincidir con la definición usual de dimensión cuando se aplica a objetos no fractales: una colección finita de puntos es cero dimensional, una línea tiene dimensión uno, una superficie tiene dimensión dos, etc. Existe una definición de particular interés en las aplicaciones prácticas donde el objeto geométrico tiene que ser reconstruido a partir de una muestra finita de datos, que son propensos a contener errores. Esta idea, llamada Dimensión de Correlación, fue presentada por Grassberger y Procaccia. (SMALL, 2004)

Se define en primer lugar, la suma de correlación para una colección de puntos $x_n$en algún espacio vectorial en donde la fracción de todos los posibles pares de puntos que están más cerca de una determinada distancia ϵ en una norma particular. La fórmula básica (puede ser modificada en aplicaciones prácticas) es:

$$C(\epsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \Theta(\epsilon - \|x_i - x_j\|)$$

Donde Θ es la función de Heaviside. La suma solo cuenta los pares de puntos, para los cuales su distancia es más pequeña que ϵ. Cuando la cantidad de datos tienden a infinito $(N \to \infty)$ y para pequeños valores de ϵ, se espera que C se escale como un una ley de potencias, $C(\epsilon) \propto \epsilon^D$, y se define la dimensión de correlación D como

$$d(N, \epsilon) = \frac{\partial \ln C(\epsilon, N)}{\partial \ln \epsilon}$$

$$D = \lim_{\epsilon \to \infty} \lim_{N \to \infty} d(N, \epsilon)$$

8.2.4. Exponentes de Lyapunov

Considerando el espacio de fase asociado a una cierta dinámica autónoma, cada punto de este espacio, está en correspondencia con una única trayectoria la cual esta parametrizada en el tiempo t. Sobre cualquier punto de esta curva, se debe preguntar qué sucede al desplazarse infinitesimalmente en una dirección, no tangente. Al cabo de un incremente δt, la nueva trayectoria puede haberse acercado o alejado de la inicial, lo cual da una medida del comportamiento de la estabilidad local (SMALL, 2004). Por simplicidad, se considera el sistema

$$\frac{d}{dt} y = f(y)$$

La condición inicial $y_0 = y(t_0)$ define la curva γ_0 o sea $y(t, p_0)$. En el tiempo t_0 se produce una variación δy_0 y la nueva curva solución γ expresada como $y = y(t, p_0) + \delta y$, donde la variación δy está definida por

$$\frac{d}{dt} \delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \gamma_0 \delta y$$

e integrando esta ecuación se obtiene,

$$\frac{\delta y(t)}{\delta(t_0)} = e^{\int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial y} dt}$$

Cuando los valores de t están próximos a t_0 la variación se aproxima a

$$\frac{\delta y(t)}{\delta(y_0)} \cong e^{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)t_0 \delta t}$$

Cuando $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) t_0 > 0$, se dice que la solución $y(t, p_0)$ es localmente inestable en p_0. De modo contrario, si $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) t_0 < 0$, la solución es localmente estable, por tanto, para cada punto de la trayectoria se define su estabilidad local. Se debe destacar que una trayectoria puede ser totalmente estable, totalmente inestable o a lo largo de ella puede tener puntos de estabilidad e inestabilidad. Este concepto es fácilmente generalizable a dinámicas de orden superior.

Uno de los puntos importantes en los sistemas dinámicos, consiste en determinar una medida de cuanto se separan a tiempo infinito diferentes trayectorias generadas con condiciones iniciales muy próximas, cuantificando el movimiento caótico. Uno de estos parámetros es el exponente de Lyapunov. Para determinarlo, se considera la ecuación definida anteriormente del sistema dinámico. Se define el exponente de Lyapunov por,

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta y(t)}{\delta y(t_0)} \right|$$

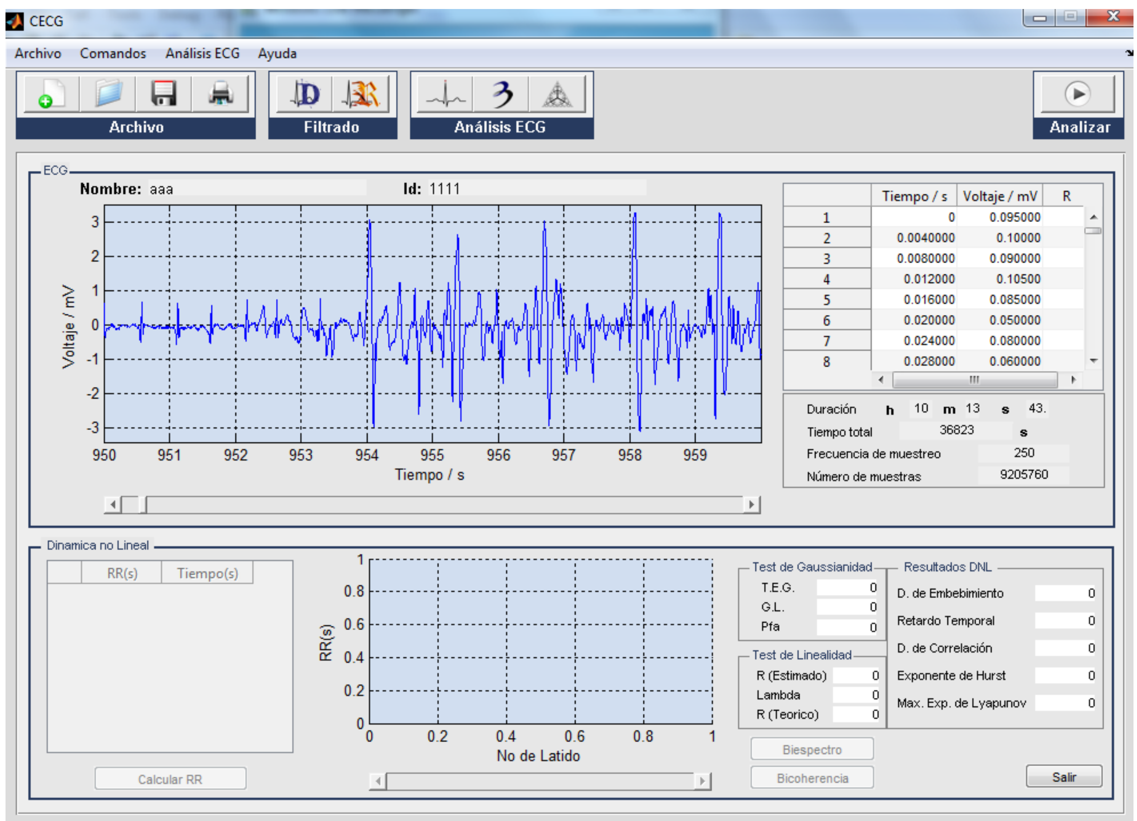
Para sistemas de orden superior, existen tantos exponentes de Lyapunov como dimensiones del sistema. Es importante, hacer notar que cada exponente está asociado con cada curva y con cada punto de espacio de fase del sistema dinámico. Teniendo un sistema de dimensión tres, si la dinámica es caótica, en el sentido de que su comportamiento asintótico es acotado, entonces uno de sus exponentes es positivo, el otro es nulo y el tercero es negativo. En resumen, para determinar que un sistema dinámico es caótico, es necesario que al menos uno de sus exponentes de Lyapunov, sea positivo. (SMALL, 2004)

A pesar de la simplicidad en la definición de los exponentes de Lyapunov, desde el punto de vista del cálculo numérico plantea serias dificultades, debido a la acumulación de errores de truncamiento del método de integración y los errores en la representación numérica, produciendo grandes errores en las estimaciones y desbordamientos en el cálculo. Debido a esto, en muchas ocasiones la solución numérica obtenida tiene poco o nada que ver con la real.

9. PRE-PROCESAMIENTO Y PROCESAMIENTO DE LAS SEÑALES

Las señales de estudio tomadas de la base de datos del MIT-BIH, presentaron una gran cantidad de ruido y ondulaciones en la línea base, por lo cual se realizó un pre-procesamiento para lograr estabilizarlas, y se debió seleccionar partes validas de la señal, para permitir el buen desempeño de los algoritmos de filtrado y detección de la secuencia RR.

La gran mayoría de las señales poseen una duración mayor a las seis horas, pero que en muchas secciones contenían ruido provocado posiblemente por desconexión de los electrodos u algún otro factor que conllevo a que la toma de la señal fuera errónea. Esta situación se muestra en la Figura 48.



Fuente: Elaboración propia

Figura 48. Ruido en la señal ECG

Debido a la presencia de ruido en la señal, no es posible trabajar a lo largo de toda su duración, ya que provocaría una secuencia RR errónea, provocando medidas distorsionadas y alejadas de la realidad.

Después de la elección de los intervalos correctos y de haber discriminado a algunas de las señales por su poca utilidad práctica en este trabajo, se seleccionaron ocho señales que se consideran con un ECG normal, las cuales servirán de referencia y de punto de comparación. Para la Fibrilación Auricular se seleccionaron 6 señales, las cuales fueron divididas en intervalos de tiempo de 60 minutos, 30 minutos y 10 minutos, obteniendo un total de 16 señales para el estudio de la arritmia. En las tabla 3 y 4 se especifican las señales e intervalos tomados tanto para señales normales como para aquellas que presentan Fibrilación auricular.

	ECG	**TIEMPO TOTAL (s)**	**TIEMPO INICIO (s)**	**TIEMPO FINAL (s)**
ECG NORMAL	**16265**	3600	0	3600
	16272	3600	1180	4780
	16539	3600	0	3600
	16773	3600	0	3600
	16786	3600	0	3600
	17052	3600	0	3600
	17453	3600	0	3600
	18184	3600	0	3600

Fuente: Elaboración propia

Tabla 3. Señales ECG Normal

	ECG.	**TT (s)**	**TI (s)**	**TF (s)**	**TT (s)**	**TI (s)**	**TF (s)**	**TT (s)**	**TI (s)**	**TF (s)**
ECG FIBRILACIÓN AURICULAR	**4015**	3600	810	4410	1800	1490	3290	600	5000	5600
	4043	3600	30000	33600	1800	32005	33805	600	380	980
	4126	3600	13600	17200	1800	35049	36819	600	35040	35640
	4746	3600	0	3600	1800	35023	36823	600	3600	4200
	6995	3600	3600	7200	1800	7200	9000	600	3600	4200
	7910	3600	0	3600	1800	4000	5800	600	3600	4200

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.Señales ECG Fibrilación Auricular

9.1. FILTRADO DE LA LINEA BASE

Las señales utilizadas para la evaluación del software, tomadas de la base de datos del MIT-BIH, presentan una gran ondulación de la línea base, lo cual no permitirá la correcta detección de la secuencia RR.

Existen varios tipos de filtrado que permiten la corrección de la línea base, pero con los que no se obtienen buenos resultados, por tanto se optó por utilizar el que mayor confiabilidad proporciono, después de evaluarlos con los criterios SNR, PRD y el coeficiente de correlación de Pearson. Para todas las señales el que tuvo un mejor comportamiento ante los estimadores fue un filtrado de media móvil, el cual, es implementado en Matlab como *smooth*.

Este tipo de filtrado tiene varios métodos para calcular la media móvil, los cuales se listan en la tabla 5.

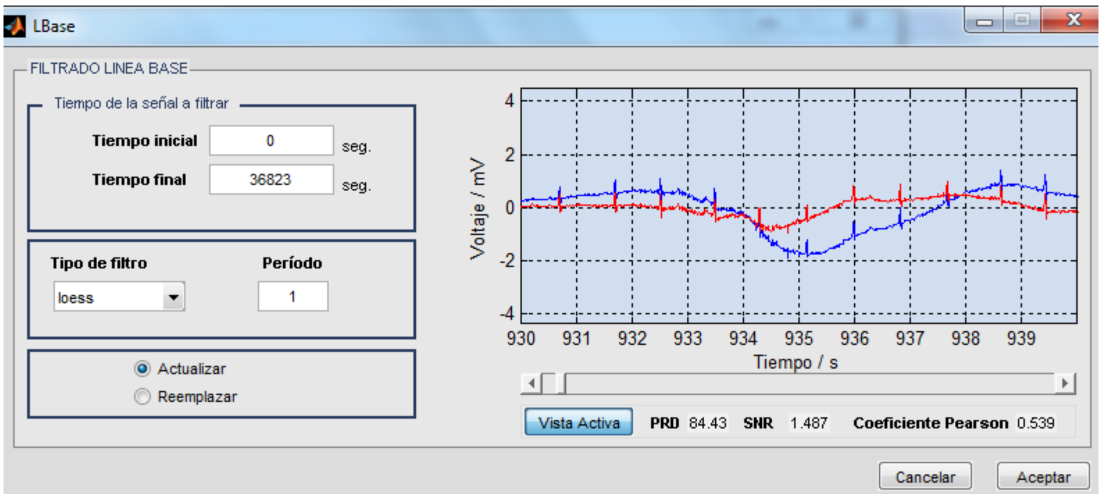
Método	**Descripción**
moving	Media 105movíl. Filtra pasabajo.
Lowess	Regresión local usando modelo polinomico de primer grado.
Loess	Regresión local usando modelo polinomico de segundo grado.
Sgolay	Filtro Savitzky-Golay.
Rlowess	Versión robusta de lowess.
Rloess	Versión robusta de loess.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5. Métodos para calcular la media movíl

Para los diferentes métodos mencionados, se hicieron pruebas tanto de tiempo como de eficiencia mediante la evaluación de los resultados por medio de los criterios SNR, PRD y el coeficiente de correlación de Pearson. En general, el método que proporciono los mejores resultados fueron rlowess y rloess, para los cuales el coeficiente de correlación de Pearson se mantuvo por encima del 97%. Estos métodos a pesar de su eficiencia, presentan un gran consumo computacional, por lo cual los tiempos de cálculo pueden ser proporcionales a la duración total de la señal. Estos métodos fueron descartados por presentar tales problemas de eficiencia. El siguiente método que proporciono bueno resultados para los estimadores fue lowess, que a diferencia de los dos anteriores, presento pequeños tiempos de cálculo manteniendo la eficiencia del coeficiente de correlación de Pearson por encima del 97%. Los resultados se obtuvieron tanto para señales ECG normales como para aquellas que presentan Fibrilación Auricular, debido a que el filtro no depende del tipo de la señal. Ver anexo 1.

Después del filtrado de la línea base, se logró estabilizar en gran parte de la señal la línea base, pero sin embargo se presentaron secciones que no se estabilizaron para el primer paso del filtro y por tanto se filtraron las secciones nuevamente, hasta que se logró estabilizar la totalidad de las señales. En la figura 49 se muestra parte de los resultados obtenidos.



Fuente: Elaboración propia

Figura 49. Filtrado de la línea base

En la Figura 49 se observa la efectividad del filtrado de la línea base, y para esta imagen de ejemplo el filtro se tiene que pasar varias veces por la misma sección.

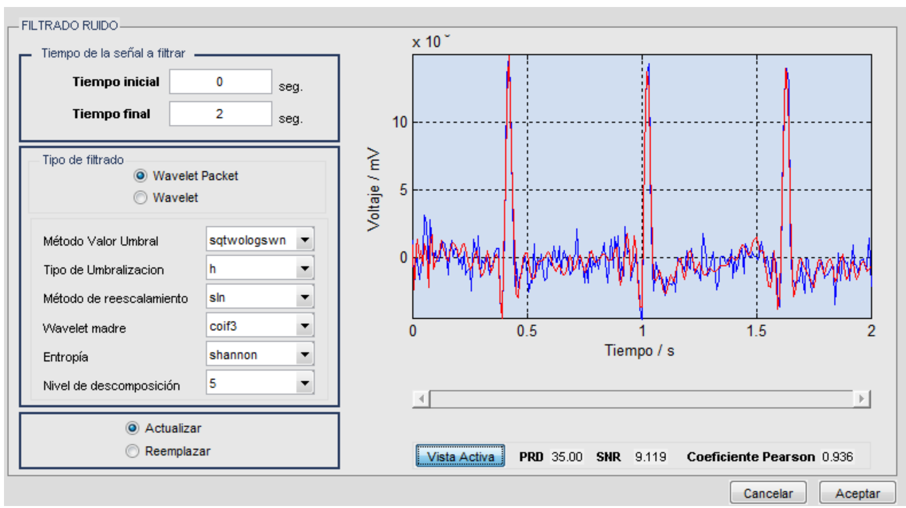
9.2. FILTRADO DEL RUIDO

El pre-procesamiento permitió elegir las señales de estudio y eliminar las partes de las mismas que contenían ruido a tal nivel que se perdía por completo el registro ECG. Después de este pre-procesamiento se generaron nueve señales ECG normales y 18 señales ECG con Fibrilación Auricular. Estas señales presentan niveles bajo de ruido, provocados por factores externos y por interferencia de las señales eléctricas provenientes de los músculos.

Existen varios tipos de filtrado, entre los cuales se destaca los basados en la Transformada de Fourier y los basados en la Transformada de Wavelet. Dentro de los basados en la Transformada de Wavelet se encuentran dos ramas principales. Ambos utilizan los métodos mencionados en el Capítulo 6 para filtrar los coeficientes generados por la descomposición Wavelet.

El filtrado utilizando las Transformada de Wavelet es mucho más eficiente en tiempos de procesamiento, pero se pierde calidad en el filtrado de la señal. Para el filtrado utilizando la Transformada de Wavelet Packet, se obtuvieron en general mejores resultados gracias a que su descomposición es mucho más amplia, permitiendo más flexibilidad a los métodos. Para la evaluación de los diferentes métodos se utilizaron los mismos criterios que para el filtrado de la línea base (SNR, PRD y el coeficiente de correlación de Pearson).

Un ejemplo de la calidad de filtrado mediante Wavelet Packet se muestra en la Figura 50.



Fuente: Elaboración propia

Figura 50. Filtrado de ruido

La disminución del ruido es parte primordial en la detección para evitar los falsos positivos en la señal, por lo cual, para las señales que tenían gran cantidad de ruido, se debió enfatizar en el filtrado combinando varios métodos tanto basados en Wavelet como en Wavelet Packet.

Según los resultados, cabe destacar que los filtros basados tanto en Wavelet como en Wavelet Packet proporcionan buen desempeño a nivel global y la calidad de filtrado es suficiente para que el detector pueda llegar al mayor índice de eficiencia, evitando tanto los falsos positivos como los falsos negativos.

Los métodos utilizados manejan un umbral global para todos los coeficientes de la Transformada Wavelet, por lo cual una parte del ruido contenido en la señal no es filtrado, pero para la detección de las ondas R es suficiente.

Existen métodos para calcular umbrales locales de cada nivel de descomposición de la Transformada de Wavelet o de Wavelet Packet, permitiendo filtrar diferentes frecuencias; si se conociera el valor frecuencial del ruido, el filtrado podría llegar a ser casi totalmente efectivo. Estos métodos no se implementaron debido a que no son necesarios para el objetivo principal del software.

9.3. DETECCIÓN DE LA SECUENCIA RR

La correcta detección de la secuencia RR es fundamental para el estudio de la variabilidad de la frecuencia cardiaca.

El detector se basó principalmente en la implementación del algoritmo computacional conocido como Transformada Modulus Maxima el cual se explica con mayor detalle en la Sección 5.5. Esta transformada se basa en la descomposición de Wavelet continua y permite tener gran velocidad de procesamiento con gran efectividad en la detección.

El algoritmo mostro gran eficiencia, pero sin embargo, un gran porcentaje de ondas R fueron omitidas provocando falsos negativos en la detección. Para solucionar este problema, el algoritmo basado en la Transformada Modulus Maxima fue complementado con un método basado en la media de los valores de las ondas R ya detectadas, aumentando la eficiencia en el detector, pero sin embargo, no se lograba que se aproximara al 100% de las detecciones de las ondas R, de modo que se desarrolló un detector de máximos entre ondas detectadas y se comparaba ese máximo con los ya detectados, permitiendo que el detector bajo ciertas condiciones, alcance el total de aciertos en la detección de las ondas R.

En la Sección 2.2. y subsecuentes, se describen las 12 derivaciones principales del electrocardiograma y su morfología. Esto es esencial para el detector, debido a que fue programado para aquellas derivaciones en donde la onda R es positiva. En algunas derivaciones, debido a diferentes cardiopatías o a la misma morfología de la derivación, la onda R a pesar de ser positiva, se presenta con bajos valores, provocando que la Transformada Modulus Maxima sea ciega para estas ondas de bajo voltaje. Se recomienda en especial, trabajar con las derivaciones D1, V2, V3, V4, V5, V6 y aVL, permitiendo al detector llegar al total de eficiencia.

En la tabla 6 que se muestra a continuación, se presentan las diferentes señales utilizadas en la evaluación del software, junto con el porcentaje de aciertos del detector.

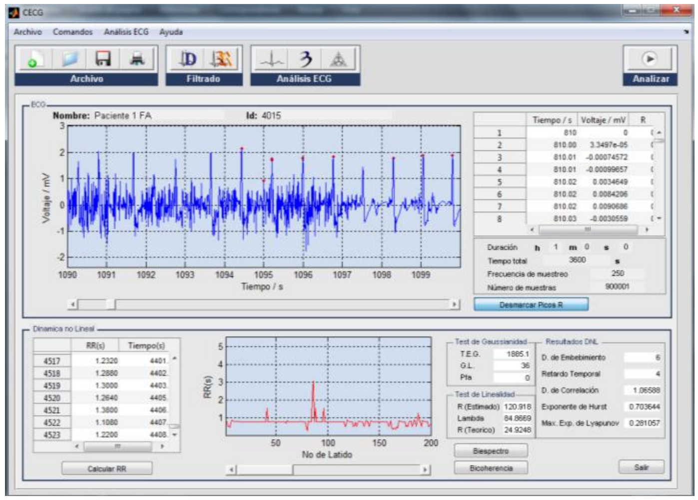
ECG	R TOTALES	R DETECTADOS	PORCENTAJE DE ACIERTOS
16265	5278	5271	99,87%
16272	3473	3471	99,94%
16539	4725	4729	100,01%
16773	4386	4416	100,68%
16786	4405	4398	99,84%
17052	4466	4460	99,87%
17453	4961	4952	99,82%
18184	5199	5191	99,85%
4015	4674	4523	96,76%
4043	3983	3991	100,2%
4126	3709	3699	99,73%
4746	3830	3830	100%
6995	5103	5078	99,51%
7910	3339	3340	100,03%

Fuente: Elaboración propia

Tabla 6. Porcentaje de aciertos

Los porcentajes que excedieron el 100% se debieron a la detección del detector de falsas ondas R, lo cual se le conoce como falsos positivos.

Como se observa en la tabla, solo uno de los resultados presento un bajo número de detecciones; esto se debió a que la señal contiene partes o secciones en las cuales se encuentra ruido de altas frecuencias e impiden que en esas zonas, el detector tenga un buen comportamiento, como se muestra en la Figura 51.



Fuente: Elaboración propia

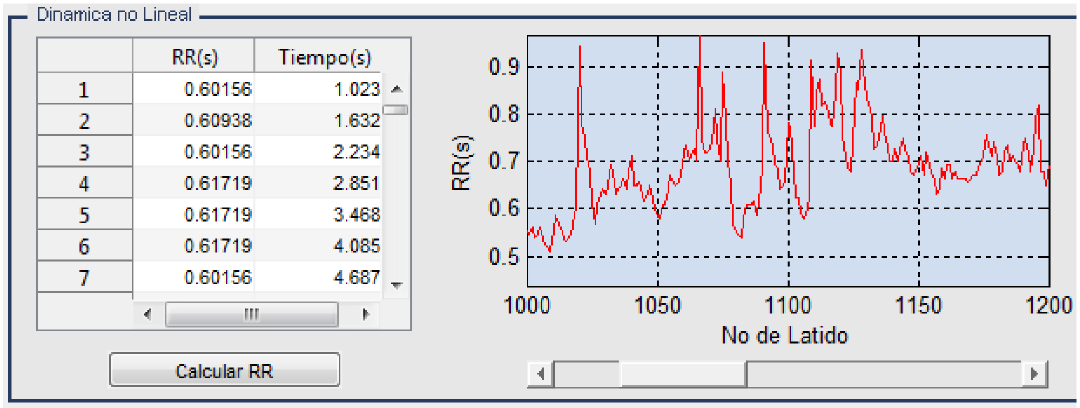
Figura 51. Detección errónea de ondas R a causa del ruido

En la sección anterior, se comentó sobre este tipo de ruido el cual puede ser eliminado con un algoritmo que calcule un umbral local para cada nivel del árbol de descomposición de la Transformada Wavelet o Wavelet Packet.

Debido a lo complejo de estos algoritmos y al desconocimiento del valor frecuencial del ruido (se desconoce el motivo que lo genero), se implementó en el software la opción de corregir manualmente los valores de las ondas R, permitiendo buscarlas y localizarlas

El proceso de detección es la parte fundamental, antes de pasar al análisis del registro de la serie de tiempo mediante técnicas no lineales. Cuando el número tanto de falsos positivos como de falsos negativos empieza a crecer, el cálculo de la secuencia RR es erróneo, por lo tanto, se obtiene una serie de tiempo falseada.

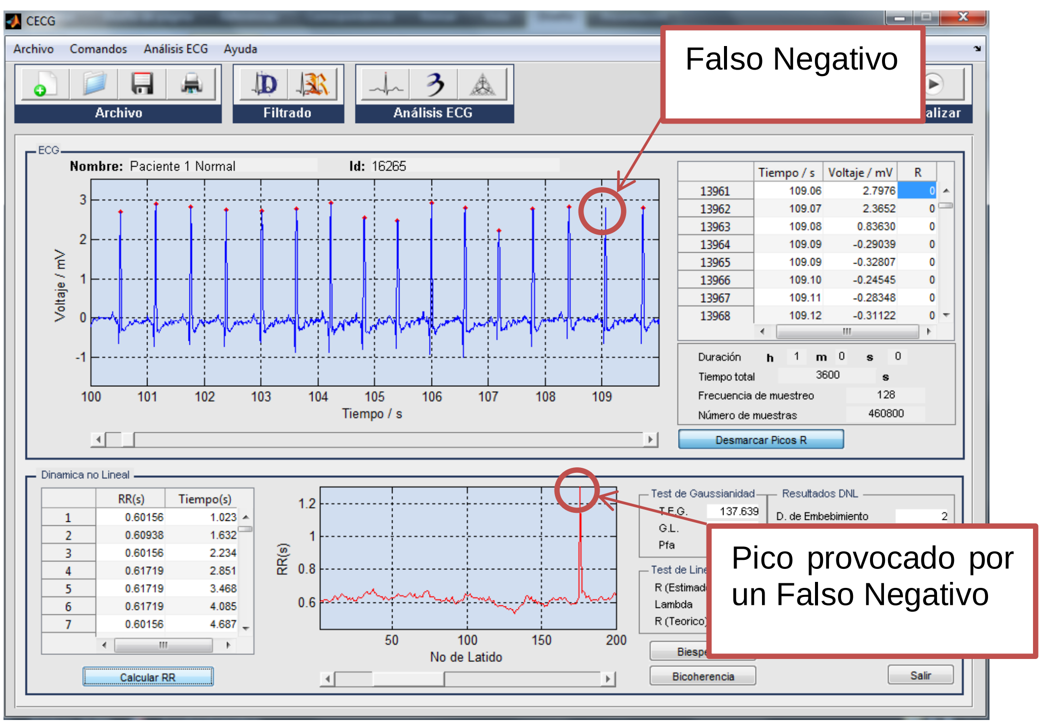
La serie de tiempo es obtenida midiendo el tiempo transcurrido entre cada suceso, que para el caso de la variabilidad de la frecuencia cardiaca, son las ondas R detectadas y localizadas. El grafico que se obtiene de esta serie de tiempo, como en la Figura 52, es llamado Tacograma y muestra las posiciones de todas las ondas R en el tiempo.



Fuente: Elaboración propia

Figura 52. Tacograma

La correcta obtención de la serie RR, muestra mediante el tacograma la variación de los latidos cardiacos. Cuando se presentan falsos positivos o negativos, los intervalos de tiempo tienden a disminuir o a aumentar, provocando que en el tacograma se presenten picos muy profundos o muy altos, respectivamente. En las Figuras 53 y 54 se muestran estas dos circunstancias.



Fuente: Elaboración propia

Figura 53. Falso Negativo

Fuente: Elaboración propia

Figura 54. Falso positivo

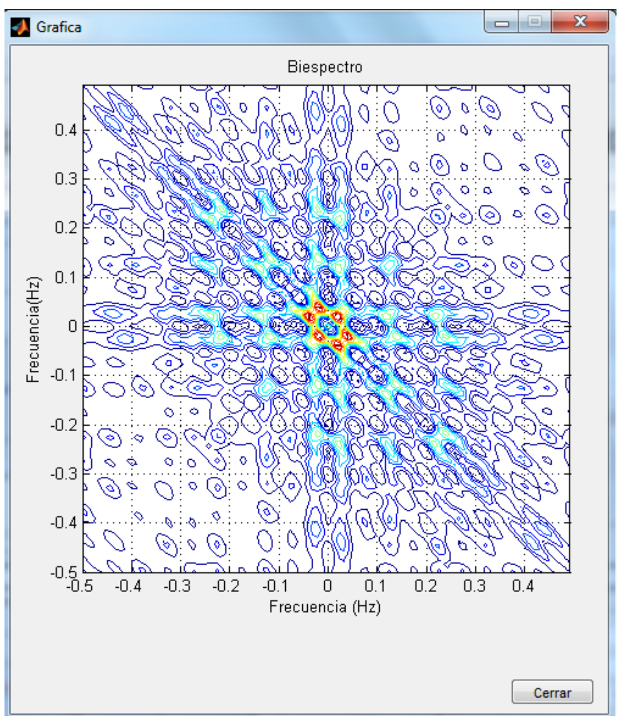
Cuando se presentan pocos casos de falsos positivos o falsos negativos, la dimensión de Embebimiento, el retardo temporal, la dimensión de correlación, el exponente de Hurst y el máximo exponente de Lyapunov no presentaran cambios notorios, sin embargo, no es recomendable permitir estos falsos en la serie de tiempo.

10. ANÁLISIS NO LINEAL DE LA VARIABILIDAD DE LA FRECUENCIA CARDIACA

La variabilidad de la frecuencia cardiaca se puede representar en una serie de tiempo que presenta comportamientos no lineales y poco gaussianos, sin embargo, por la complejidad en su estudio, se implementaron a lo largo de los años, métodos estadísticos para ello, ignorando por completo el comportamiento real de la variabilidad de la frecuencia cardiaca.

10.1. TEST DE GAUSSIANIDAD Y DE LINEALIDAD

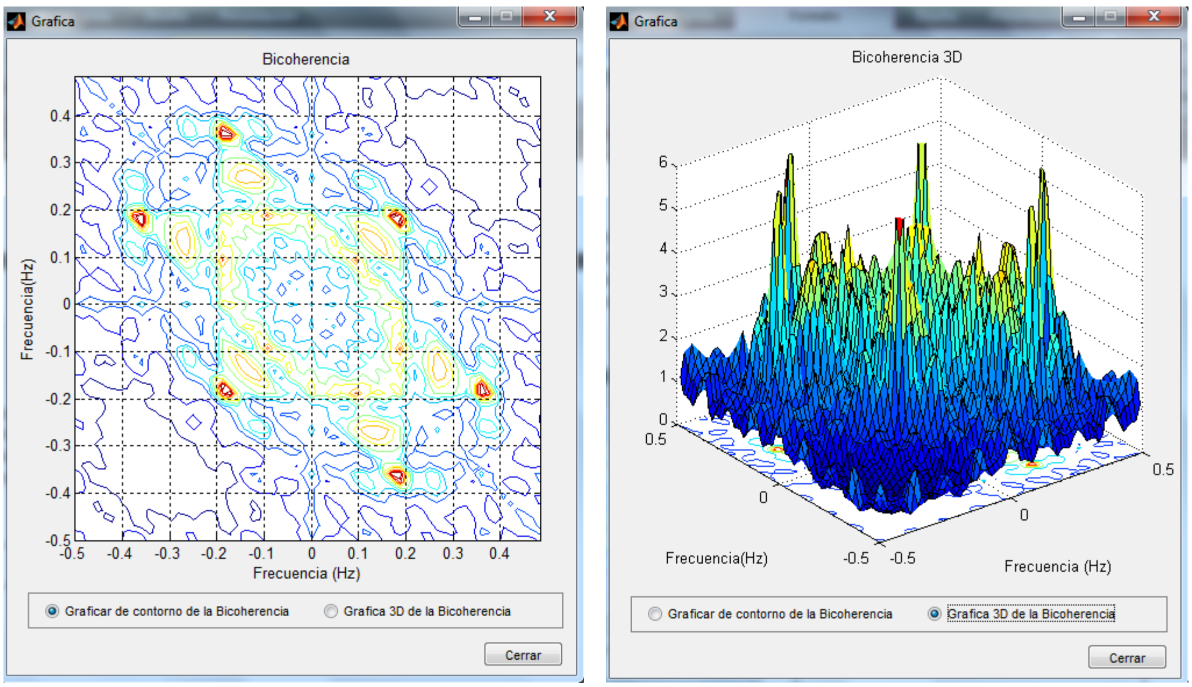
Para demostrar el comportamiento No Lineal y No Gaussiano de la variabilidad de la frecuencia cardiaca, se tomó como prueba, el Biespectro de potencias, el cual permite ver las relaciones no lineales entre las diferentes componentes frecuenciales de la señal. El Biespectro de potencias se explica con mayor detalle en la Sección 7.2. pero en general, este permite observar de manera gráfica (Figura 55) tanto las relaciones no lineales como la gaussianidad de los datos que componente la serie de tiempo estudiada.



Fuente: Elaboración propia

Figura 55. Biespectro de potencias

Los datos obtenidos después de aplicar el Biespectro de potencias a la serie de tiempo, contienen una componente imaginaria, haciendo difícil ver de forma completa las relaciones entre las diferentes frecuencias y debido a esto se utiliza una normalización conocida como Bicoherencia, que convierte los valores imaginarios del Biespectro en valores reales, permitiendo una vista tridimensional de las relaciones antes mencionadas (Figura 56).



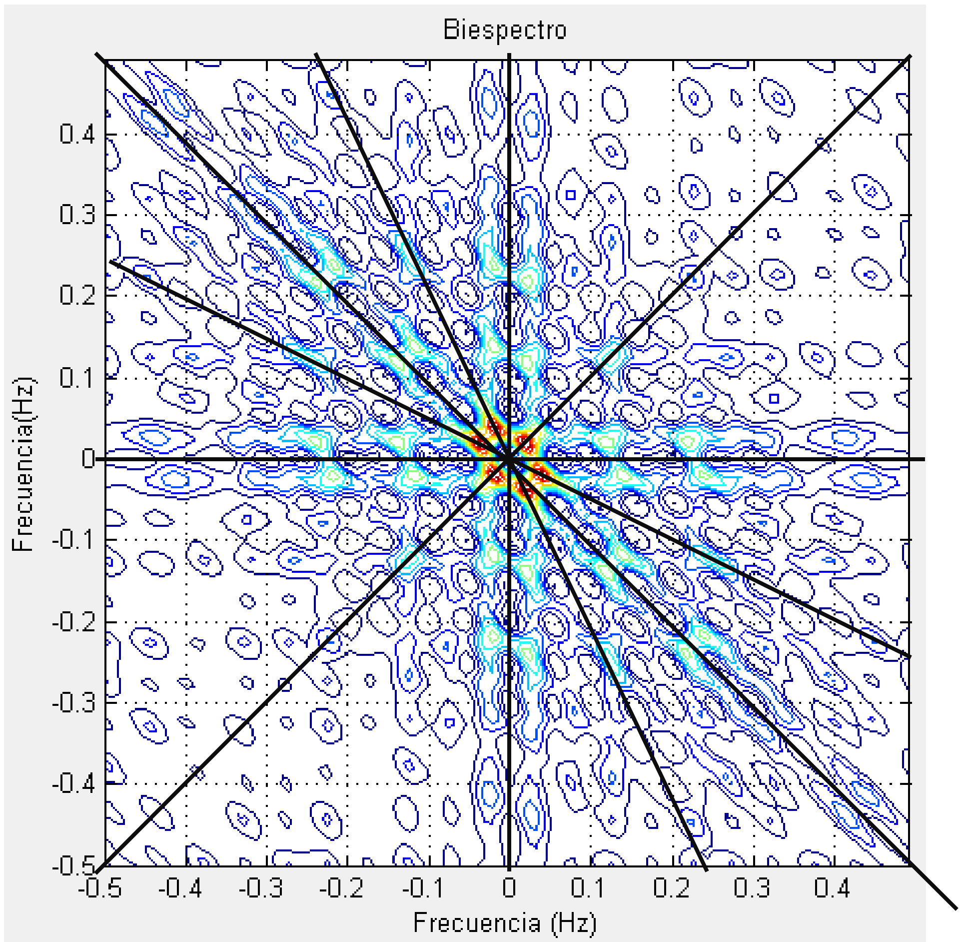
Fuente: Elaboración propia

Figura 56. Bicoherencia

Algo esencial a tener en cuenta en la Figura 56, son las 12 regiones de simetría del Biespectro y de la Bicoherencia, las cuales son información redundante pero que permite observar el comportamiento general de todas las componentes frecuenciales que están presentes en las series de tiempo. Un ejemplo de estas regiones de simetría al obtener el Biespectro de la serie de tiempo compuesta por la variabilidad de la frecuencia cardiaca, se muestra en la figura 57.

De forma visual se puede evaluar la linealidad de la serie de tiempo así como como la gaussianidad de la misma. En señales que presentan No-Gaussianidad, el simple hecho de poder calcular el Biespectro lo confirma; cuando las series de tiempo presentan comportamiento gaussiano, los cumulantes de tercer orden tienden a cero, haciendo que el Biespectro también lo haga.

Existe un rango de aceptación de gaussianidad, debido a que en la realidad, los cumulantes de tercer orden nunca llegaran a ser cero, haciendo que siempre se pueda generar el Biespectro de potencias.

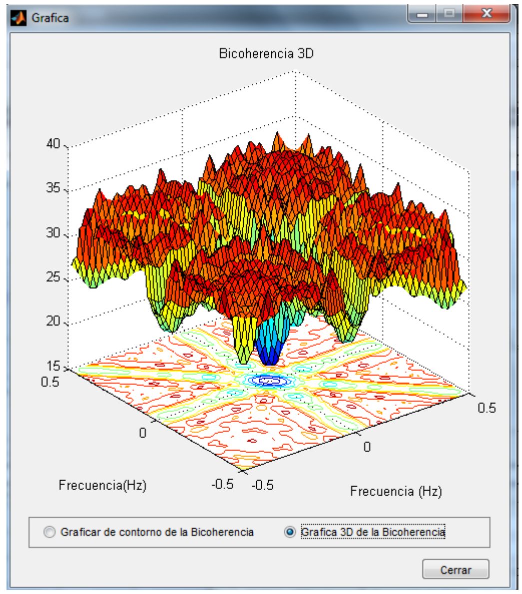


Fuente: Elaboración propia

Figura 57. Las 12 regiones de simetría en el Biespectro

En forma gráfica la No-Gaussianidad, puede observarse cuando los valores de la correlación entre frecuencias aumenta, es decir, la gráfica aparece mucho más densa y los valores de correlación entre frecuencias se alejan de cero, puede verse mediante la asignación de los colores, siendo los colores cercanos al rojo una mayor correlación y los colores como el azul, correlaciones menores.

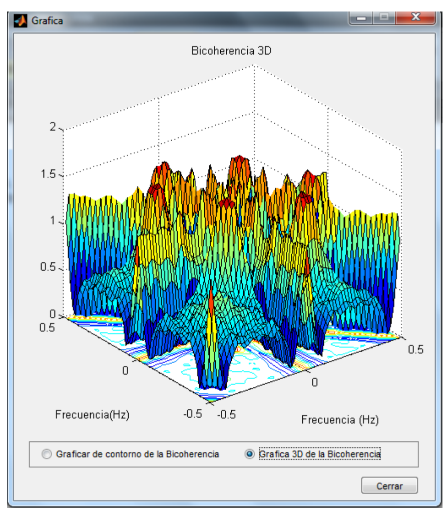
Cuando se trata del estudio de la linealidad de la señal, en nuestro caso de la variabilidad de la frecuencia cardiaca, se debe tener en cuenta las áreas, cuando existe una gran tendencia a ser no lineal, se muestran zonas en forma de meseta en la gráfica, que son más notorias cuando se trabaja con la Bicoherencia en 3D, como se muestra en la Figura 58.



Fuente: Elaboración propia

Figura 58. No-Linealidad – Bicoherencia

En contrapartida, cuando se presenta gran tendencia a la linealidad, la gráfica muestra picos altos seguidos por valles bastantes profundos. La Figura 59 muestras este comportamiento.



Fuente: Elaboración propia

Figura 59. Linealidad – Bicoherencia

El modo grafico para evaluar tanto la gaussianidad como la linealidad de la serie de tiempo, llega a ser dependiente del sujeto quien evalué los resultados, por tanto, se crearon varios test que utilizan los valores obtenidos tanto del Biespectro como de la Bicoherencia para formar criterios de evaluación, permitiendo determinar de una forma más precisa el comportamiento lineal y gaussiano de la serie de tiempo formada por la variabilidad de la frecuencia cardiaca.

El test que se implementó, es el conocido como Test de Hinich, el cual se explica con detalle en la Sección 7.3.

10.1.1. ECG NORMAL

Para la señal ECG Normal se realizó el Test de Hinich, obteniendo los resultados que se muestran en la tabla 7.

Señal		Test de Linealidad			Test de Gaussianidad		
No	Tiempo(s)	R(Estimado)	Lambda	R(Teórico)	Test Estadístico de Gaussianidad	Grados de Libertad	Probabilidad de Falsa Alarma
16265	3600	7,33801	6,37387	7,00626	137,63900	36	0
16272	3600	0,91848	2,18383	4,31691	57,95670	36	0,0117
16539	3600	22,62640	11,14460	9,16678	232,19500	36	0
16773	3600	3,05038	1,49887	3,72431	35,14680	36	0,5091
16786	3600	0,50766	0,30835	2,51750	7,43231	36	1
17052	3600	10,13470	3,35630	5,20053	67,27890	36	0,0012
17453	3600	2,79507	1,03860	3,28573	23,95620	36	0,9379
18184	3600	115,69700	64,55840	21,75730	1524,14000	36	0

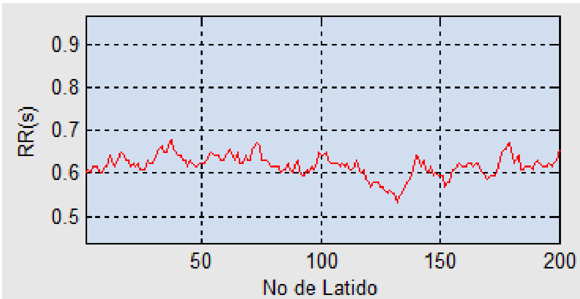
Fuente: Elaboración propia

Tabla 7. Resultados Test de Hinich para ECG Normales

Según los resultados obtenidos, la variabilidad de la frecuencia cardiaca en personas con ECG normales, es No-Gaussiana. Existe una restricción en el Test Estadístico de Gaussianidad y depende de la probabilidad de falsa alarma, en donde según Hinich, solo es posible aceptar el resultado de Gaussianidad cuando la probabilidad de falsa alarma es pequeña y tiende a cero. Este caso se ve para la señal 16786 en donde el resultado del test fue 7,43231 lo cual indicaría Gaussianidad de la señal, pero debido a que la probabilidad de falsa alarma es 1, este resultado tiene que ser rechazado.

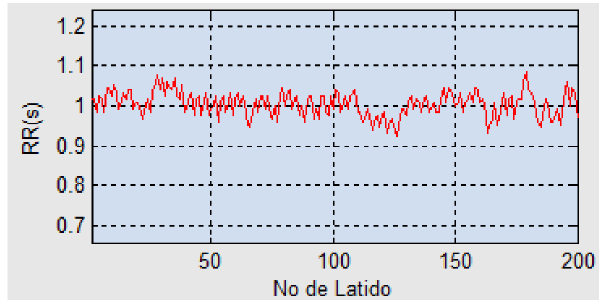
Se presenta que para algunas señales la No-Gaussianidad es mucho más marcada y según las observaciones, cuanto menor es la variabilidad, mayor es el resultado del Test Estadístico de Gaussianidad. En la Figura 60 se muestra la serie de tiempo generada por cada ECG normal junto con su valor respectivo del Test de Gaussianidad.

ECG 16265



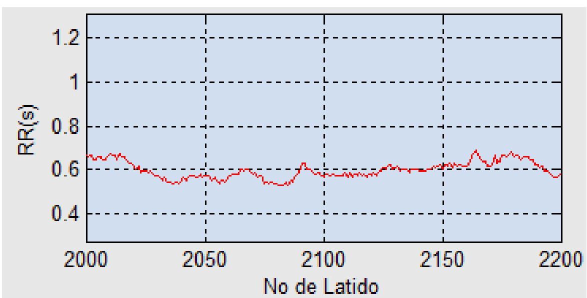
Test de Gaussianidad = 137.639

ECG 16272



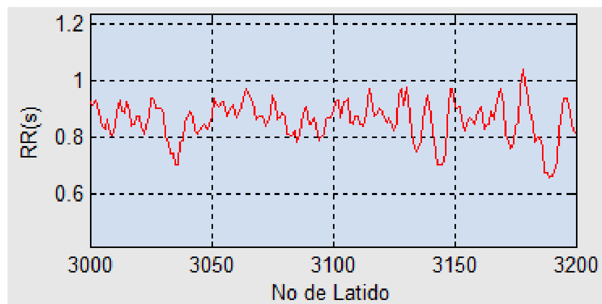
Test de Gaussianidad =57.9597

ECG 16539



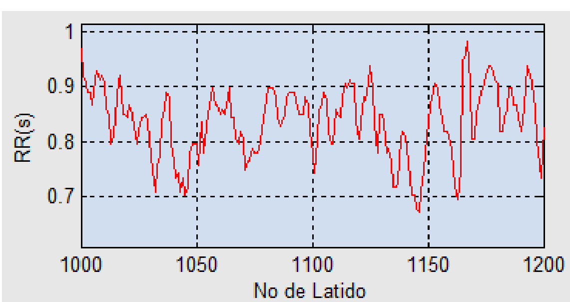
Test de Gaussianidad = 232.195

ECG 16773



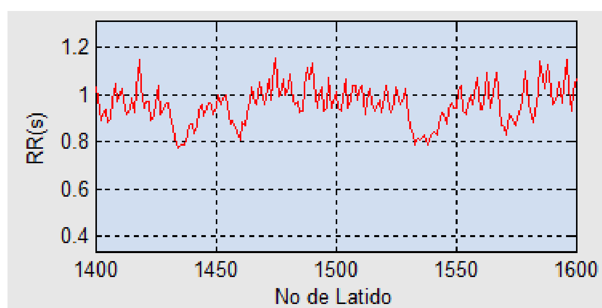
Test de Gaussianidad = 35.1468

ECG 16786



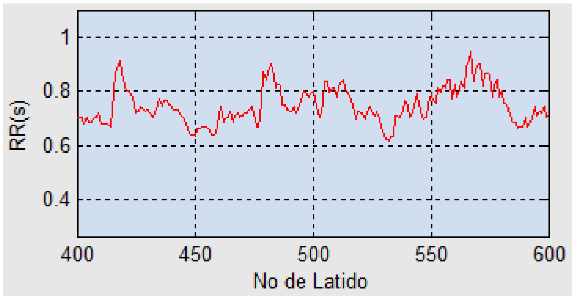
Test de Gaussianidad = 7.43231

ECG 17052



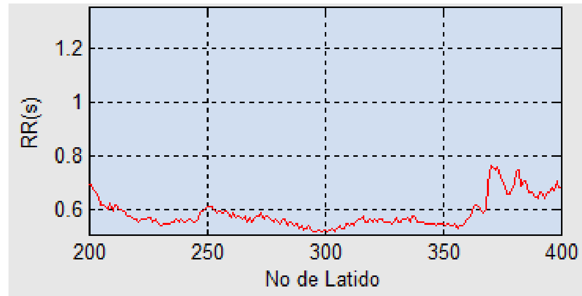
Test de Gaussianidad = 67.2789

ECG 17453



Test de Gaussianidad = 23.9562

ECG 18184



Test de Gaussianidad = 1524.14

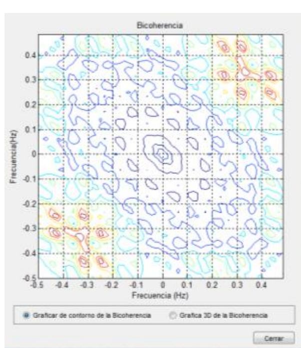
Fuente: Elaboración propia

Figura 60. Comparación entre la variabilidad y el Test de Gaussianidad para ECG Normal

Según Hinich, el Test de Linealidad solo es válido cuando se ha pasado el Test Estadístico de Gaussianidad. Según la Figura 60, todas las señales pueden ser consideradas No-Gaussianas a excepción de la señal 16786 en donde la probabilidad de falsa alarma da como resultado 1, por lo cual se tiene que rechazar la hipótesis de gaussianidad, pero no se puede determinar si es o no gaussiana.

El Test de Linealidad mostro que para señales ECG Normales, en la mayoría de las casos, el comportamiento de las mismas es no lineal, pero a su vez, los valores R(teórico) y R(Estimado) difieren muy poco, por lo tanto la no linealidad de la variabilidad de la frecuencia cardiaca no se encuentra muy marcada en ECG normales. En la Figura 61 se presentan los valores del test de linealidad junto con la gráfica de la Bicoherencia, la cual permite evaluar de manera visual este resultado.

ECG 16265



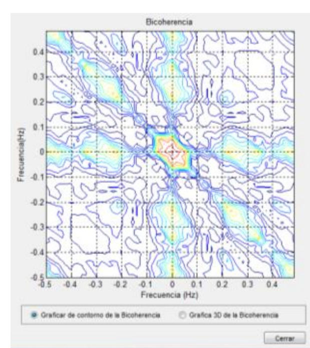
Test de Linealidad

R(Estimado) = 7.33802

Lambda = 6.37387

R(Teórico) = 7.00626

ECG 16272



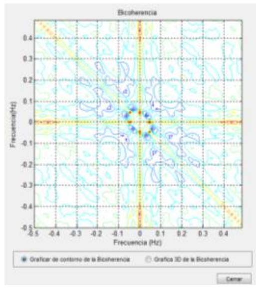
Test de Linealidad

R(Estimado) = 0..91848

Lambda = 2.18383

R(Teórico) = 4.31691

ECG 16539



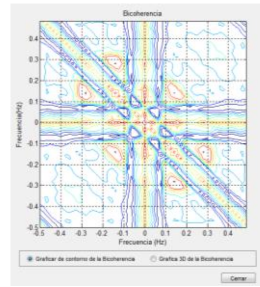
Test de Linealidad

R(Estimado) = 22.6264

Lambda = 11.1446

R(Teórico) = 9.16678

ECG 16773



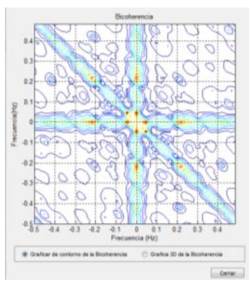
Test de Linealidad

R(Estimado) = 3.050038

Lambda = 1.49887

R(Teórico) = 3.72431

ECG 16786



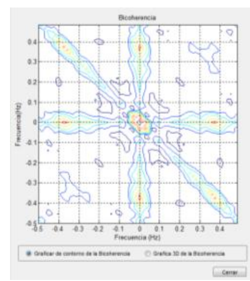
Test de Linealidad

R(Estimado) = 0.50766

Lambda = 0.30835

R(Teórico) = 2.5175

ECG 17052



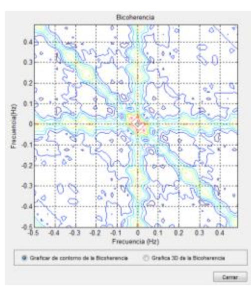
Test de Linealidad

R(Estimado) = 10.1347

Lambda = 3.3563

R(Teórico) = 5.20053

ECG 17453



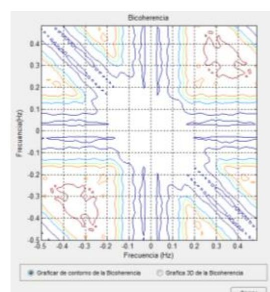
Test de Linealidad

R(Estimado) = 2.79507

Lambda = 1.0386

R(Teórico) = 3.28573

ECG 18184



Test de Linealidad

R(Estimado) = 115.697

Lambda = 64.5584

R(Teórico) = 21.7573

Fuente: Elaboración propia

Figura 61. Comparación entre La Bicoherencia y el Test de Linealidad para ECG Normal

Como se mencionó antes, las regiones en forma de meseta en la gráfica, indican no linealidad en la señal, como se hace notar en ECG 18184, en donde la diferencia entre el R(Estimado) y el R(Teórico) es bastante grande y en la gráfica se muestra un región con valores muy altos que forman áreas planas de gran tamaño.

En resumen, para señales ECG Normales, el Test de Hinich muestra la No-Gaussianidad de la variabilidad de la frecuencia cardiaca y el comportamiento No-Lineal de la misma, aunque para este último, no se logra marcar una amplia diferenciación entre la linealidad y no linealidad de las señales. Igualmente se observa que la No-Linealidad de la variabilidad de la frecuencia cardiaca está ampliamente relacionada con el incremento o disminución de esta, por consiguiente, al aumentar la variabilidad, el comportamiento de la señal tiende a ser lineal y viceversa.

10.1.2. ECG FIBRILACIÓN AURICULAR

Al igual que para el ECG Normal, se implementó el Test de Hinich. Este Test fue aplicado para tres secciones diferentes de 6 señales con duración de 60, 30 y 10 minutos. Los resultados del Test se muestran en la tabla 8.

SEÑAL		**TEST DE LINEALIDAD**			**TEST DE GAUSSIANIDAD**		
NOMBRE	TIEMPO(s)	R(Estimado)	Lambda	R(Teórico)	Test Estadístico de Gaussianidad	Grados de Libertad	Probabilidad de Falsa alarma
4015	3600	120,918	84,8669	24,9248	1885,1	36	0
	1800	21,5171	19,8861	12,1613	484,851	36	0
	600	2,89465	1,36058	3,5962	31,7417	36	0,6716
4043	3600	2,003613	1,02744	3,27465	23,3563	36	0,9485
	1800	17,3144	6,4507	7,04632	155,886	36	0
	600	9,71764	8,6085	8,09086	181,363	36	0
4126	3600	4,8662	9,75769	8,59526	297,183	36	0
	1800	2,62731	1,37454	3,60928	30,7763	36	0,7155
	600	2,33751	1,43065	3,6615	33,3447	36	0,5958
4746	3600	82,5919	28,714	14,5698	627,401	36	0
	1800	74,57002	27,9874	14,3869	633,327	36	0
	600	113,572	38,7574	16,8958	816,269	36	0
6995	3600	0,11637	0,26102	2,46523	6,53385	36	1
	1800	3,96836	1,77602	3,97213	38,3711	36	0,3624
	600	1,23714	0,51624	2,74446	12,1676	36	0,9999
7910	3600	13,2093	5,71644	6,65367	132,866	36	0
	1800	53,7691	20,9283	12,47	517,485	36	0
	600	84,429	27,787	14,336	695,957	36	0

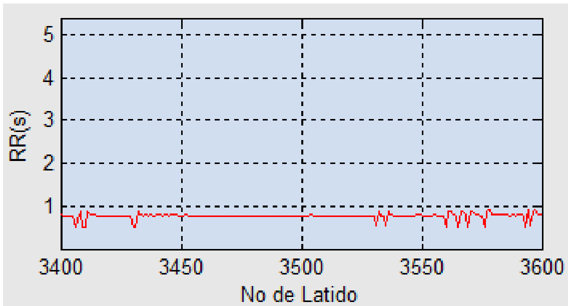
Fuente: Elaboración propia

Tabla 8. Resultados del Test de Hinich para ECG con Fibrilación Auricular

Según el Test de Gaussianidad, las señales ECG con Fibrilación Auricular, son fuertemente No-Gaussianas. Al comparar el Test realizado a las diferentes secciones de la señal de diferente duración, se muestra que a pesar de la disminución del contenido de información (serie de tiempo más corta), se logra mantener y comprobar el hecho de la No-Gaussianidad de la misma.

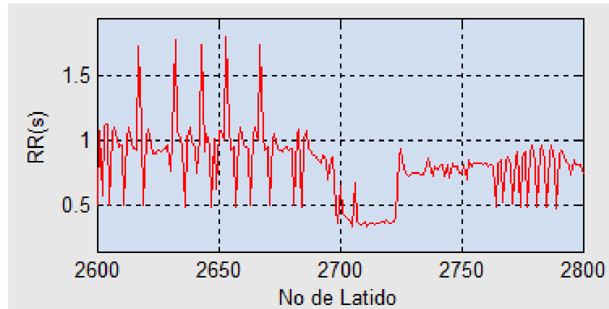
De la misma forma en que se vieron relaciones entre la variabilidad de la frecuencia cardiaca y su grado de No-Gaussianidad para ECG Normales, se muestra en la Figura 62 una posible relación con ECG, con Fibrilación Auricular.

ECG 4015



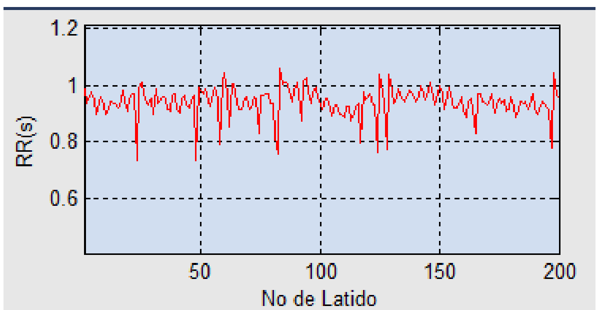
Test de Gaussianidad = 1885.1

ECG 4043



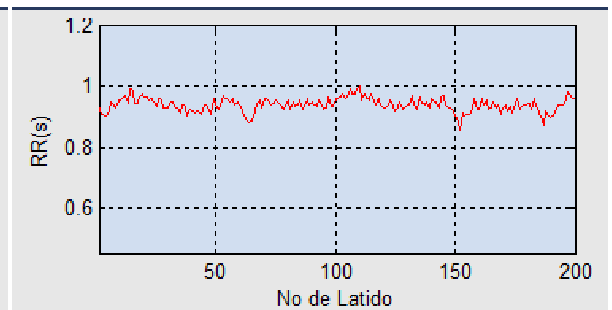
Test de Gaussianidad = 23.3563

ECG 4126



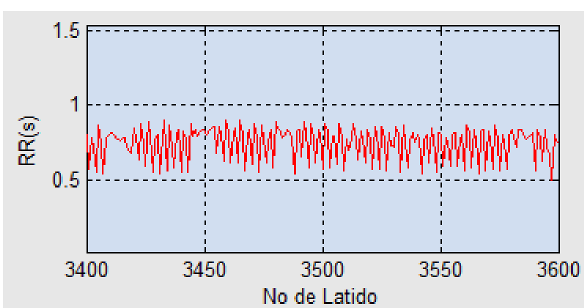
Test de Gaussianidad = 297.183

ECG 4746



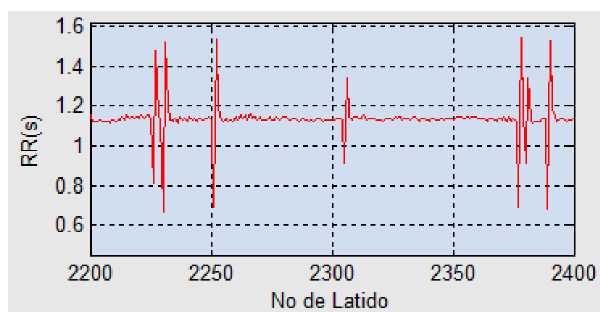
Test de Gaussianidad = 627.401

ECG 6995



Test de Gaussianidad = 6.53385

ECG 7910



Test de Gaussianidad = 132.866

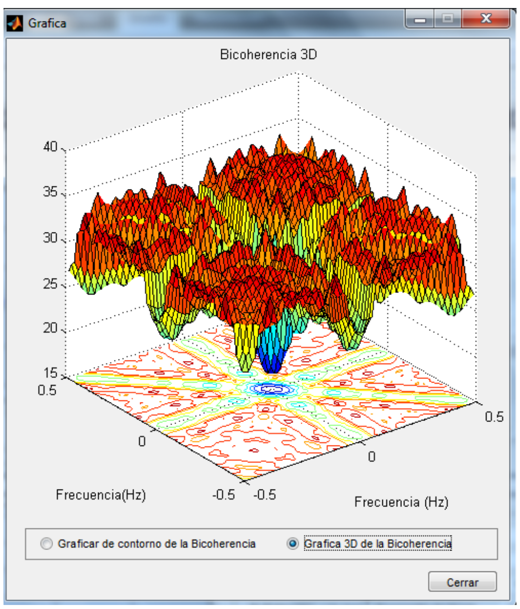
Fuente: Elaboración propia

Figura 62. Comparación entre la variabilidad y el Test de Gaussianidad para ECG con Fibrilación Auricular

La señal 4126 presento resultados fuera de los esperados; a pesar de tener un valor alto para el test de gaussianidad, se presenta una variabilidad grande. Al examinar la señal, se muestra un comportamiento muy irregular de los latidos en pequeñas secciones, el cual, se presenta a intervalos irregulares, lo cual podría indicar otra cardiopatía fuera de los límites de estudio de este trabajo.

Demostrado el comportamiento No-Gaussiano de las ECG con Fibrilación Auricular, se procede a evaluar el Test de Linealidad el cual se muestra en la Tabla 8. En ECG donde se presenta muy poco marcada la Fibrilación Auricular, los resultados del Test de Linealidad tienden a parecerse a los obtenidos previamente para ECG Normales, en donde, la No-Linealidad es poco marcada y notoria. De manera contraria, el registro ECG 4746, el cual presenta Fibrilación Auricular a lo largo de toda su extensión, muestra valores grandes de No-Linealidad y en menor medida, el registro ECG 6995. En la Figura 63 se muestran los resultados del Test de Linealidad, confrontados con la gráfica de la Bicoherencia.

ECG 4015



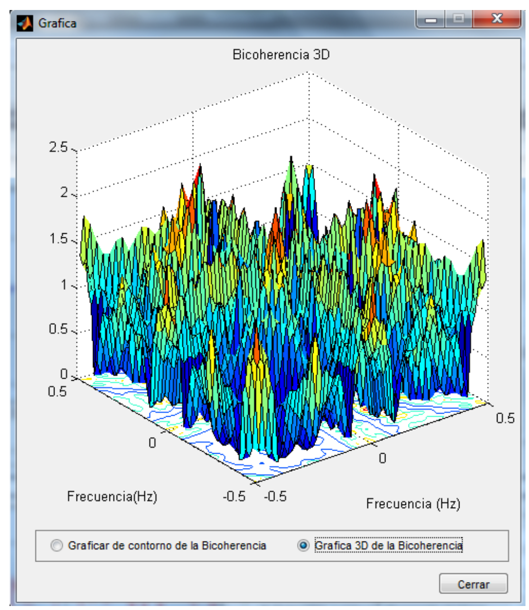
Test de Linealidad

R(Estimado) = 120.918

Lambda = 84.8669

R(Teórico) = 24.9248

ECG 4043



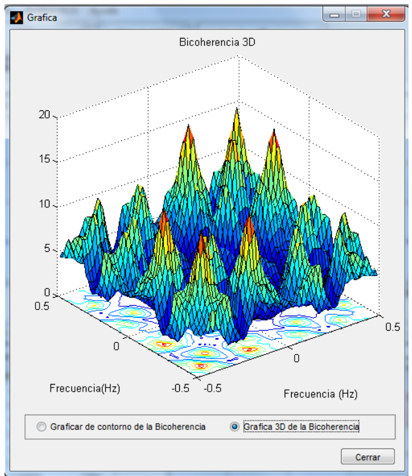
Test de Linealidad

R(Estimado) = 2.79507

Lambda = 1.0386

R(Teórico) = 3.28573

ECG 4126



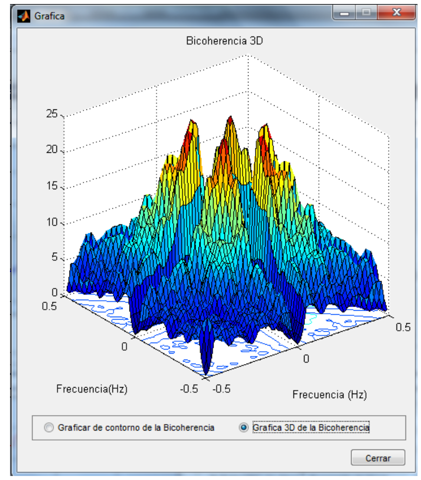
Test de Linealidad

R(Estimado) = 4.8662

Lambda = 9.75769

R(Teórico) = 8.59526

ECG 4746



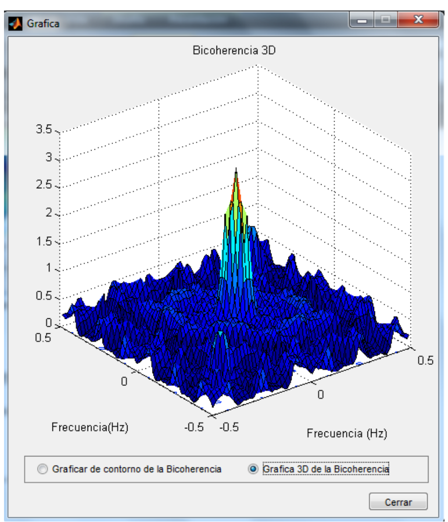
Test de Linealidad

R(Estimado) = 82.5619

Lambda = 28.714

R(Teórico) = 14.5698

ECG 6995



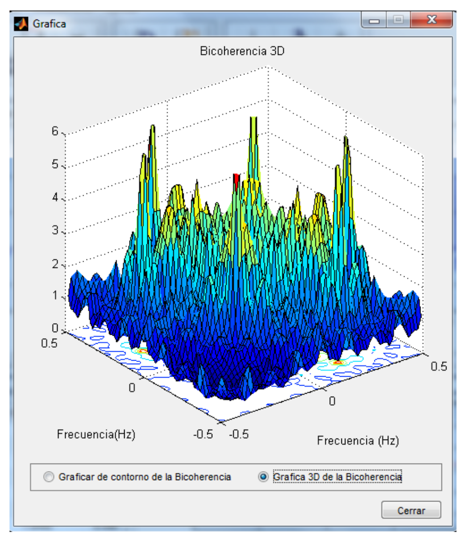
Test de Linealidad

R(Estimado) = 0.11637

Lambda = 0.26102

R(Teórico) = 2.46523

ECG 7910



Test de Linealidad

R(Estimado) = 13.2093

Lambda = 5.71644

R(Teórico) = 6.65367

Fuente: Elaboración propia

Figura 63. Comparación entre La Bicoherencia y el Test de Linealidad para ECG con Fibrilación Auricular

El grado de No-Linealidad de la variabilidad de la frecuencia cardiaca, está ampliamente relacionada con el grado de presencia de la Fibrilación auricular en la señal estudiada. A mayor presencia de Fibrilación Auricular, mayor diferencia entre R(Estimado) y R(Teórico).

10.2. ANÁLISIS NO LINEAL DE LA VARIABILIDAD DE LA FRECUENCIA CARDIACA

El análisis no lineal de las series de tiempo, es un área relativamente nueva en la matemática, la cual ha venido mejorando con el paso del tiempo, encontrando cada vez, más aplicaciones tanto en ingenierías como en ciencias. En la medicina, los estudios sobre los comportamientos de diferentes señales biomédicas han ido en constante crecimiento, permitiendo a los investigadores, hallar nuevos patrones y razones de la causa de muchas patologías, como es el caso de estudios hechos a señales electroencefalográficas o EEC, tanto en paciente con trastornos del sueño como en la monitorización de la profundidad anestésica.

La aplicación de la Dinámica No Lineal en el estudio de la Variabilidad de la frecuencia cardiaca es muy reciente y su desarrollo se produjo a partir de mediados de los noventa. Los estudios hechos a partir de esa fecha han venido adquiriendo respaldo a lo largo de los últimos años, debido al aumento de la velocidad en el cálculo computacional; a pesar de la simplicidad en la definición de muchos de los conceptos que encierra la Dinámica No Lineal, se requiere de millones de operaciones, para poder llegar a un resultado que pueda ser aceptado y tenga concordancia con la realidad.

Los estudios hechos hasta la fecha, abarcan en gran medida la variabilidad cardiaca como tal, enfocándose en el comportamiento de la señal y dejando las diferentes cardiopatías presentes en los registros de lado. Entre ellas, la más común, es la Fibrilación Auricular, presente por lo general en personas mayores, las cuales poseen esta arritmia en forma sostenida y aunque por sí misma no es mortal, puede llegar a generar complicaciones cardiacas graves, infartos y la muerte.

10.2.1. ECG NORMAL

La mayor parte de los estudios hechos se enfocan en este tipo de registros, en donde no se presentan ninguna arritmia, ni factor que modifique el normal comportamiento del latido cardiaco.

Se examinaron ocho señales ECG normales, para observar de manera global el comportamiento no lineal de las mismas. Se ha determinado en la sección anterior, la gran tendencia de su comportamiento a la no linealidad y de no gaussianidad, por lo cual, su comportamiento puede ser bien descrito tanto por los estimadores como los parámetros de la Dinámica No Lineal.

Los resultados obtenidos para los ECG Normales se muestran en la Tabla 9.

Señal		Dinámica No Lineal				
No	Tiempo(s)	Dimensión de Embebimiento	Retardo Temporal	Dimensión de Correlación	Exponente de Hurst	Máximo Exponente de Lyapunov
16265	3600	2	77	1,212040	0,968209	0,271653
16272	3600	1	8	1,332590	0,808296	0,862326
16539	3600	1	10	1,253540	0,948801	0,978098
16773	3600	4	9	1,311272	0,918904	0,0604368
16786	3600	2	8	1,375360	0,887110	0,80732
17052	3600	3	73	1,220450	0,946318	0,0885485
17453	3600	2	12	1,303360	0,873360	0,52337
18184	3600	1	12	1,161910	0,919497	0,242372

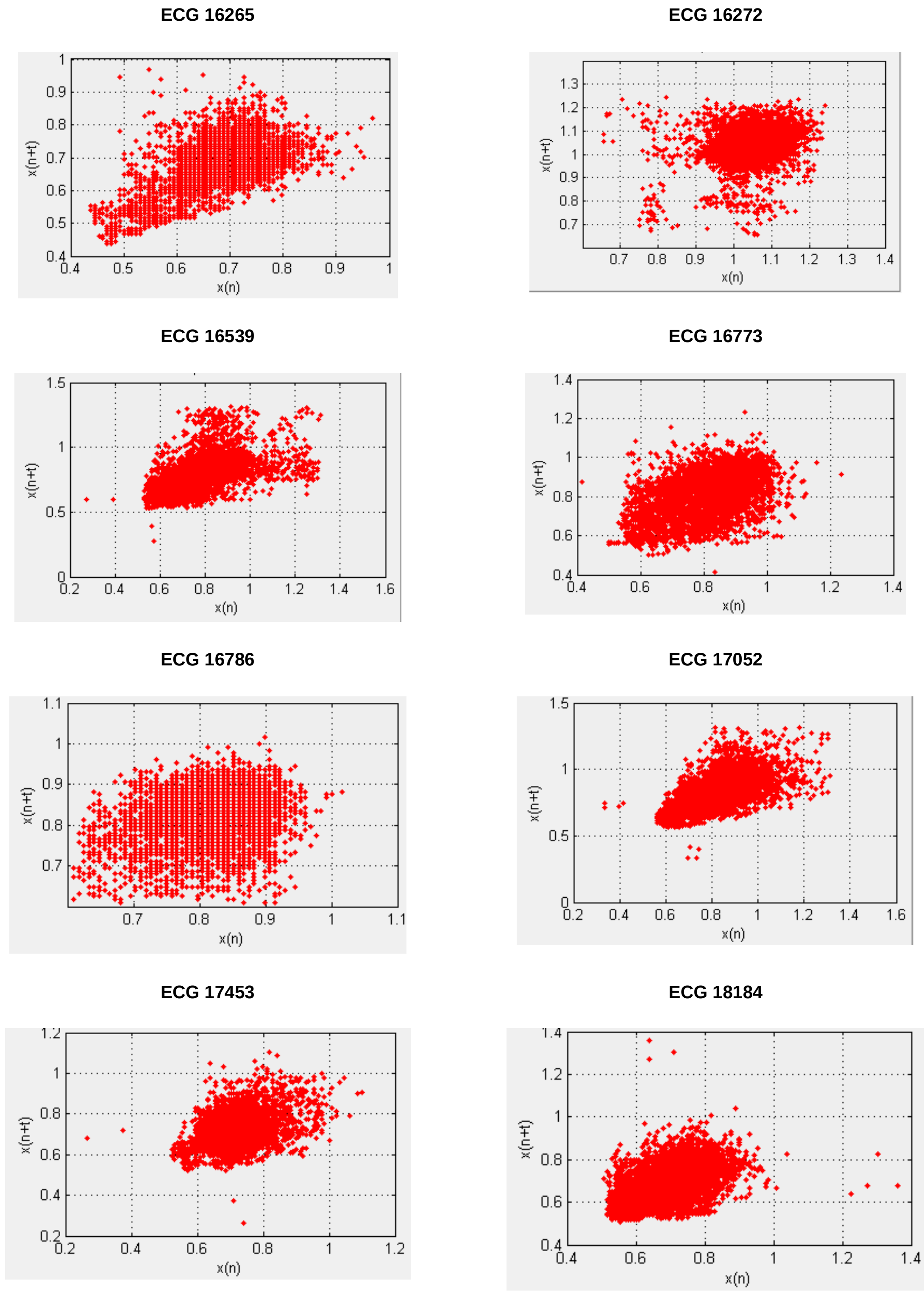
Fuente: Elaboración propia

Tabla 9. Resultados – Dinámica No Lineal ECG Normal

Para la reconstrucción del atractor, los resultados oscilaron entre varias dimensiones de Embebimiento, haciendo complicado la elección correcta de esta Para la selección se utilizó la mediana, obteniendo como resultado que la dimensión de Embebimiento para ECG Normales es de 2. Según estudios anteriores, esta dimensión es la que mejor permite reconstruir el espacio de fases y posteriormente el atractor de la serie de tiempo.

Al igual que para la dimensión de Embebimiento, el retardo temporal presento varios valores sin mostrar ninguna tendencia aparente. El retardo temporal no es un parámetro tan importante a la hora de la reconstrucción del atractor como es su dimensión de Embebimiento, pero esto no le resta importancia; se tomó nuevamente la mediana para obtener un valor “útil” en la reconstrucción. Como resultado de esta se tiene que el Retardo Temporal más adecuado para la reconstrucción de atractor en el espacio de fases es 11.

En la Figura 64 se muestra los atractores reconstruidos para cada una de las señales ECG Normales.



Fuente: Elaboración propia

Figura 64. Reconstrucción de Atractores para ECG Normal

Una forma de determinar si el atractor es fractal es determinar su dimensión. Existen varios métodos, pero se enfocara en la Dimensión de Correlación por la simplicidad en su cálculo en la determinación de la dimensión fractal del atractor. Los resultados presentados en la tabla 9 son muy similares, por tanto se utilizó la media para determinar el valor de la dimensión del atractor de la serie de tiempo de la variabilidad de la frecuencia cardiaca del ECG Normal. La Dimensión de correlación promedio para el ECG Normal es **1.269557041**. Este resultado muestra que el atractor puede ser representado perfectamente en un espacio de fases bidimensional, por tanto, queda sustentado que la Dimensión de Embebimiento hallada es correcta.

El exponente de Hurst permite definir qué tan predecible es la serie de tiempo estudiada, en otras palabras, el exponente de Hurst, es una medida de la información que la señal conserva al cabo de cierto tiempo. Todas las señales estudiadas, presentan un exponente de Hurst por encima de 0,5; mediante la media geométrica se obtiene el valor promedio dando como resultado que el exponente de Hurst es **0.907492123**. Como se explica en la sección 8.2.2, cuando el valor del exponente es mayor a 0,5, es un indicativo de persistencia, por lo tanto la variabilidad de la frecuencia cardiaca es fácil de predecir.

El mayor exponente de Lyapunov, permite determinar si la serie temporal es o no caótica, indica la sensibilidad o dependencia de los estados futuros de un sistema bajo ciertas condiciones iniciales. Debido a la complejidad de calculo que representa y a problemas de desbordamiento, el valor como tal, se ignora, y solo se toma el signo del resultado para determinar, si la serie de tiempo es caótica o no. Según la tabla 9, los exponentes hallados para cada una de las señales ECG son de signo positivo, quedando demostrado el comportamiento caótico de las series de tiempo generadas por la variabilidad de la frecuencia cardiaca de ECG Normales. Para tener un dato de referencia del grupo de estudio, se calcula la media; el mayor exponente de Lyapunov promedio para ECG normales es **0.325357634**.

10.2.2. ECG FIBRILACIÓN AURICULAR

La Fibrilación Auricular, como se mencionó en la Sección 3, es la arritmia más común y es el objeto de estudio de este trabajo. Debido a los inconvenientes que se presentaron con las señales de trabajo por mal registro de las mismas, se eligieron 6, divididas cada una en 3 segmentos de diferente duración. Los resultados de los estimadores y parámetros se presentan en la tabla 10.

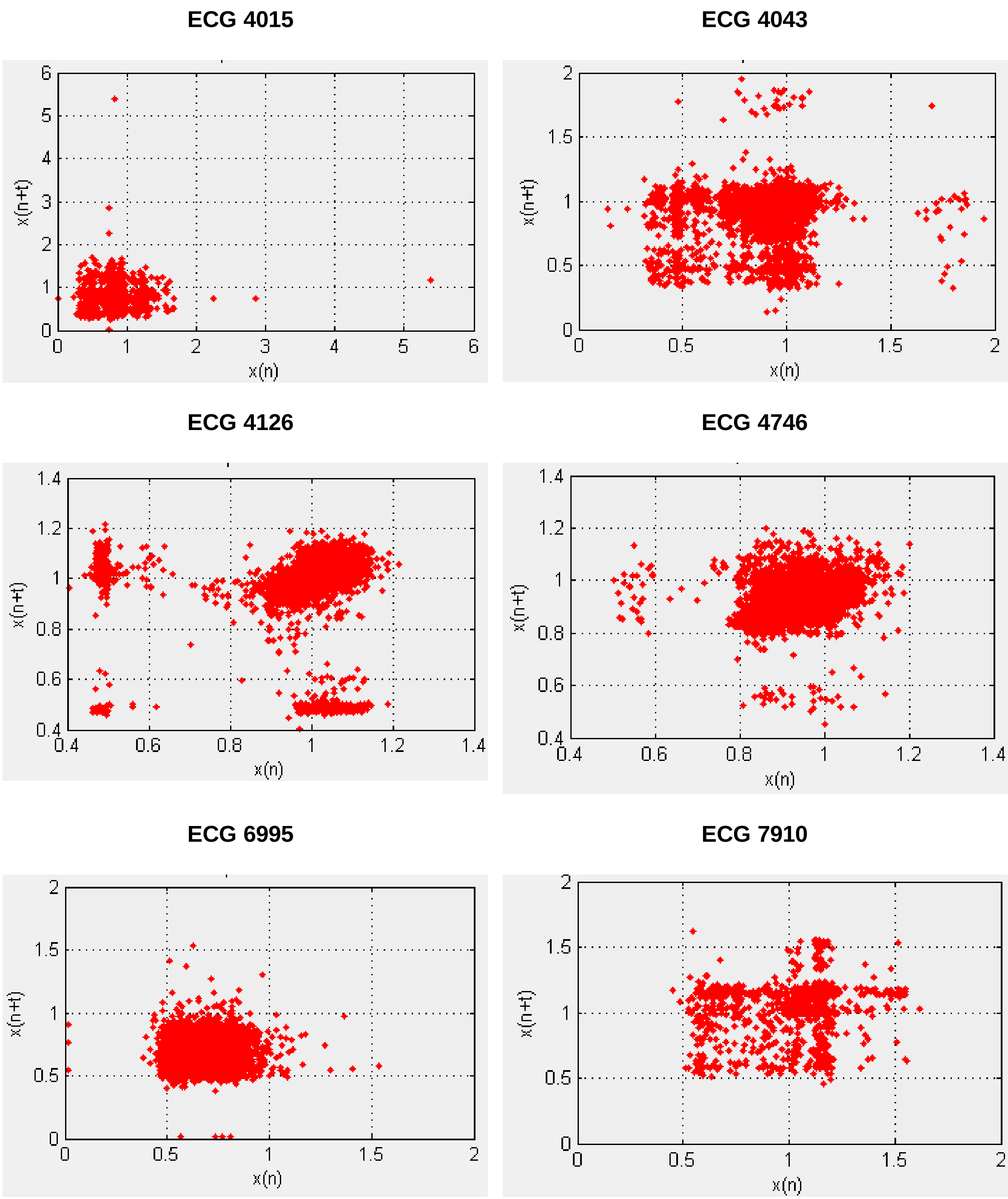
Señal		Dinámica No Lineal				
ECG	Tiempo(s)	Dimensión de Embebimiento	Retardo Temporal	Dimensión de Correlación	Exponente de Hurst	Máximo Exponente de Lyapunov
4015	3600	6	4	1,06588	0,703644	0,281057
	1800	6	10	1,04235	0,694748	0,0972427
	600	1	8	1,52259	0,659958	1,76051
4043	3600	2	3	1,45307	0,781953	0,69496
	1800	4	4	1,25935	0,689014	0,175054
	600	4	4	1,24975	0,806773	0,712488
4126	3600	2	4	1,34169	0,665914	0,442809
	1800	1	8	1,29201	0,645241	0,786299
	600	1	5	1,37215	0,478349	0,805339
4746	3600	4	16	1,22877	0,784835	0,204386
	1800	4	4	1,1649	0,934717	0,130456
	600	3	3	1,37301	0,824146	0,291444
6995	3600	1	4	1,73621	0,816663	1,69968
	1800	2	4	1,50867	0,736705	0,623491
	600	1	4	2,10932	0,643795	1,8903
7910	3600	2	5	1,13284	0,8837001	0,302078
	1800	4	5	1,09351	0,981517	1,167957
	600	4	7	1,11208	0,826791	0,193274

Fuente: Elaboración propia

Tabla 10. Resultados – Dinámica No Lineal – ECG Fibrilación Auricular

Los cálculos para la Dimensión de Embebimiento para la reconstrucción del atractor de la serie de tiempo generada por la variabilidad de la frecuencia cardiaca en registros ECG con Fibrilación Auricular, se han dividido en 3 grupos diferentes, diferenciables por la duración de las señales. Para las señales de duración de 3600 segundos, el valor de la Dimensión de Embebimiento es 2, con lo cual se mantiene el espacio de fases bidimensional de los ECG Normales. El mismo razonamiento se hace para las señales de duración 1800 segundos y 600 segundos, con lo cual, la Dimensión de Embebimiento es 4 y 2, respectivamente. Cabe notar que para las señales de duración de 1800 segundos, la mediana del grupo es 4, lo cual difiere de los demás resultados presentados.

La mediana del Retardo Temporal de los grupos de duración de 1800 y 600 segundos es de 4,5 mientras el del grupo de 3600 segundos es de 4. Se toma como valor de retardo 4 para la reconstrucción del atractor en el espacio de fases. En la Figura 65 se muestra los atractores reconstruidos para cada una de los registros ECG con Fibrilación Auricular.



Fuente: Elaboración propia

Figura 65. Reconstrucción de Atractores para ECG con Fibrilación Auricular

Los resultados parciales de las Dimensiones de Correlación promedio para los registro de 3600, 1800 y 600 segundos son 1.308623586, 1.217648464 y 1.426023399, respectivamente. Estos valores hacen notar que la elección del valor 2 como Dimensión de Embebimiento es acertada, debido a que el atractor puede estar completamente representado en dos dimensiones.

El exponente de Hurts se calculó para cada uno de los grupos antes mencionados, dando como resultado para los registros de 3600, 1800 y 600 segundos, los valores de 0.769448673, 0.770208219 y 0.694000851, respectivamente. Según la definición del exponente de Hurts, cuando el valor de este se acerca a 0.5, la señal comienza a comportarse cada vez más de forma aleatoria y se pierde correlación entre los estados presentes con los estados futuros.

Sin entrar en mayor detalle, los máximos exponentes de Lyapunov para los grupos de 3600, 1800 y 600 segundos, son 0.456721381, 0.329146806 y 0.689618672. Se aprecia que los máximos exponentes de Lyapunov para todos los grupos de estudio son positivos, por tanto tienen un comportamiento caótico

10.2.3. COMPARACIÓN ENTRE ECG NORMAL Y ECG FIBRILACIÓN AURICULAR

Aunque la finalidad del trabajo no es predecir la posible aparición de la Fibrilación Auricular en sujetos sanos, si es importante hacer notar las similaridades y diferencias que existen entre las dos series de tiempo generadas a partir de ECG's Normales y con Fibrilación Auricular.

Para simplificar el proceso comparativo, los datos obtenidos a través del desarrollo de la investigación se muestran en la tabla 11.

Registro	**Dinámica No Lineal**				
ECG	**Dimensión de Embebimiento**	**Retardo Temporal**	**Dimensión de Correlación**	**Exponente de Hurst**	**Máximo Exponente de Lyapunov**
NORMAL	2	11	1,269557	0,9074921	0,3253576
FIBRILACIÓN AURICULAR	2	4	1,308623	0,7694486	0,4567213

Fuente: Elaboración propia

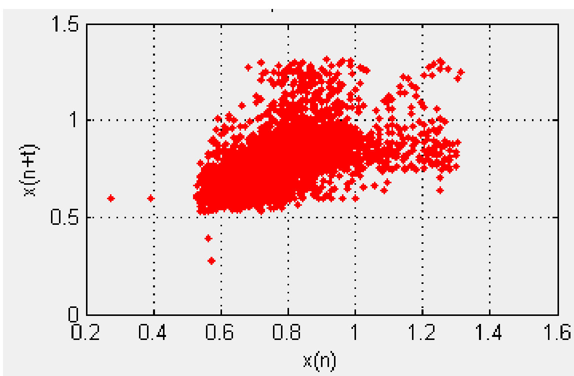
Tabla 11. Comparación de resultados de la Dinámica No Lineal

Una comparación superficial de los resultados, muestra que los estimadores y parámetros de la Dinámica No-Lineal de las series de tiempo generadas por la variabilidad de la frecuencia cardiaca de ECG's Normales y de ECG's con Fibrilación Auricular difieren. En cuanto a la Dimensión de Embebimiento, esta permanece igual para ambos, pero los demás parámetros varían. Los más significativos son, la Dimensión de Correlación y el Exponente de Hurst. En la Fibrilación Auricular, la variabilidad de la frecuencia cardiaca se hace aleatoria y menos persistente en comparación con ECG's normales, demostrado mediante la comparación de los exponentes de Hurst. Una diferencia notoria se hace presente en el máximo exponente de Lyapunov, en donde, para los registros con Fibrilación Auricular se hace mayor que para ECG's normales. Otra singularidad a destacar, es el hecho de que al aumentar la aleatoriedad de la serie temporal, también aumenta el valor del mayor índice de Lyapunov.

Otra diferencia bastante notable recae en la diferencia de forma de los atractores para ECG's Normales y ECG's con Fibrilación Auricular. La Figura 66 se muestra a modo de comparación esta diferencia. Para registros normales, el atractor permanece compacto, dibujando una forma parecida a un corazón, mientras que para registro de Fibrilación Auricular, el atractor empieza a abrirse formando una figura similar a una flecha.

ECG NORMAL

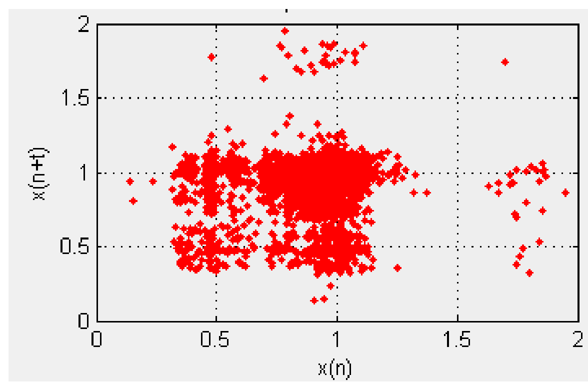
ECG 16539



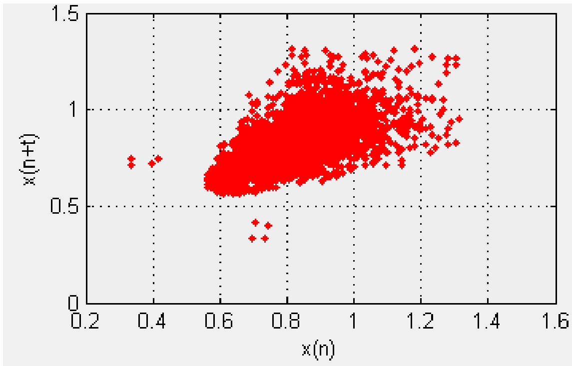
ECG 17052

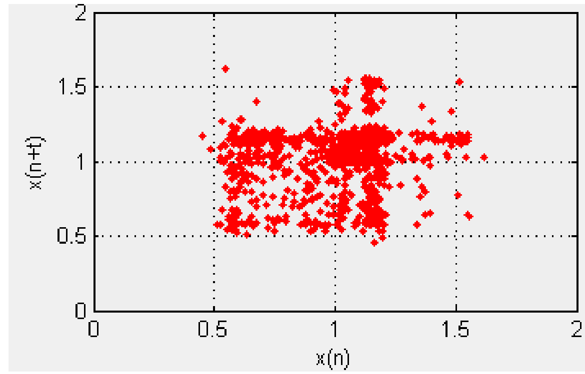
ECG FIBRILACIÓN AURICULAR

ECG 4043

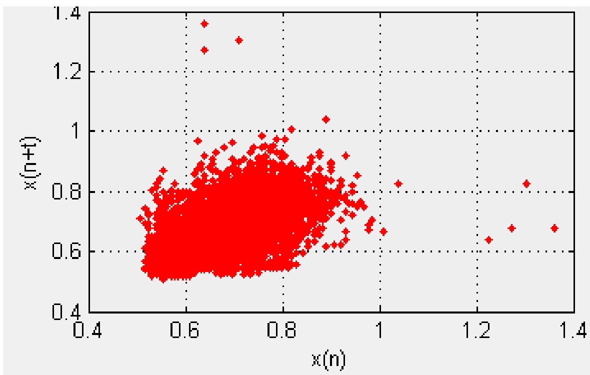


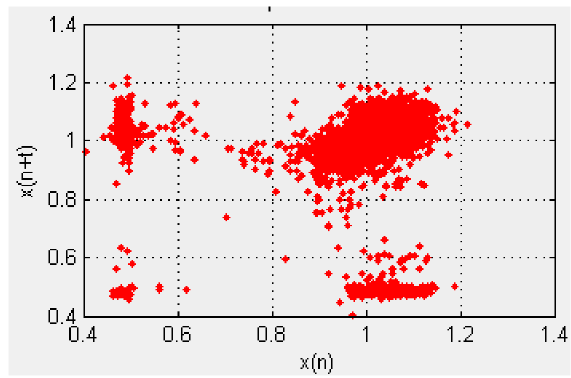
ECG 7910





ECG 18184 **ECG 4126**





Fuente: Elaboración propia

Figura 66. Comparación de Atractores

Existen mucho otros parámetros para el estudio de la Dinámica No-Lineal (Hilborn, 2004) de series temporales, pero aún no se ha demostrado ser muy representativas en lo concerniente a la variabilidad de la frecuencia cardiaca y por ellos solo se tomaron aquellos que pueden definirla y demostrar su comportamiento no lineal y caótico.

11. CONCLUSIONES

1. El filtrado mediante la Transformada de Wavelet Packet presenta un óptimo desempeño, debido a la gran cantidad de información que permite obtener en su árbol de descomposición.
2. A pesar de la gran cantidad de configuraciones que existen para el filtrado mediante Wavelet Packet, los métodos implementados se refieren a umbrales globales, discriminando las singularidades y eventos aislados de la señal, por tanto, cuando una señal presenta ruido en diferentes frecuencias, el filtro bajo un umbral global se hace deficiente y por tal motivo se tiene que recurrir al cálculo de umbrales locales en cada nivel de descomposición, haciendo necesario conocer la frecuencia del evento que causa el ruido en el lugar aislado de la señal.
3. La Transformada Wavelet permite hallar de una manera rápida singularidades gracias a su capacidad de descomposición de las señales en tiempo y frecuencia. La implementación de la Transformada de Wavelet Modulus Maxima, permite hacer de manera eficiente la detección de las ondas R en el registro ECG.
4. La Transformada Modulus Maxima depende en gran medida de la calidad de la señal por lo cual se hace de suma importancia el filtrado correcto de la señal.
5. Cuando las señales ECG presentan ondulaciones grandes en su línea base, los detectores basados en La Transformada Wavelet Modulus Maxima pierden capacidad de análisis, debido a que la idea principal de esta es hallar cruces por cero y posteriormente el máximo local entre esos cruces.
6. El Biespectro de potencias es una herramienta extremadamente útil a la hora de analizar las correlaciones entre las diferentes frecuencias que componen una señal, por lo cual permite hacer tanto de modo grafico como numérico, cálculos de linealidades y gaussianidades en la señal.
7. La Bicoherencia, permite observar de una manera más práctica la linealidad de las señales procesadas.
8. El Test desarrollado por Hinich permite determinar de forma eficiente y numérica la no linealidad y gaussianidad de una serie temporal.
9. Para los registros ECG tanto normales como los que presentan Fibrilación Auricular, se nota una relación entre la variabilidad de la frecuencia cardiaca y el grado de gaussianidad. En otras palabras a mayor No-Gaussianidad menor es la variabilidad.
10. Cuanto mayor es la presencia de Fibrilación Auricular, mayor es el grado de No-Linealidad.
11. Tanto para ECG normales como para los que presentan Fibrilación Auricular, se determinó que la dimensión correcta para la reconstrucción del atractor es dos.

12. Mediante la dimensión de correlación se puede demostrar que la dimensión elegida de Embebimiento es correcta.
13. Para registros ECG normales, según el exponente de Hurst, la serie temporal se hace predecible y persistente.
14. Para los registros ECG con Fibrilación Auricular, el exponente de Hurst disminuye en comparación con el hallado para ECG normales, por lo cual, la serie temporal formada por la variabilidad de la frecuencia cardiaca, se hace cada vez menos predecible y empieza a tornarse aleatoria.
15. La variabilidad de la frecuencia cardiaca tanto para registros normales como para aquellos que presentan Fibrilación Auricular presentan un comportamiento caótico, mostrado mediante el valor del mayor índice de Lyapunov.
16. A pesar de que el mayor índice de Lyapunov es sensible a muchos factores y abarca gran cantidad de cálculos numéricos y debido a esto es sensible a desbordamientos, se debe hacer notar que a medida que la variabilidad de la frecuencia cardiaca se acerca a valores de aleatoriedad, el valor de este índice aumenta.
17. Uno de las conclusiones más importantes es el hecho de la diferencia entre los atractores generados por los registros ECG normales y con Fibrilación Auricular. A mayor grado de presencia de Fibrilación Auricular, el atractor de abre, haciéndose cada vez más disperso.

12. RECOMENDACIONES

- Muchos de los registros ECG son tomados de sistemas Holter y debido a esto presentan secciones en donde se pierde el registro del latido cardiaco para registrar ruido proveniente en gran medida de músculos o factores externos como desprendimiento de los electrodos, por tanto, se recomienda, trabajar con señales que no contengan este tipo ruido, ya que afectan en gran medida, los tiempos registrados en la señal.
- Cuando se trabaja con filtros, no se debe enfocar en una sola herramienta, ya que el filtrado es la clave fundamental para la búsqueda correcta de singularidades en la señal y por tanto, se recomienda la utilización de mezcla de filtros basados en múltiples transformadas, hallando el mejor método de filtrado para cada señal.
- Las señales de estudio que se trabajaron fueron pocas por lo cual se recomienda corroborar los resultados obtenidos, mediante el estudio de una muestra poblacional suficientemente valida.
- Debido a que La dinámica no lineal es una rama relativamente nueva en las matemáticas, nuevos algoritmos de cálculo y correcciones a las definiciones, surgen frecuentemente, por tanto es recomendable corregir constantemente los algoritmos implementados en esta herramienta para corroborar que los resultados obtenidos sean válidos en estudios posteriores.

13. BIBLIOGRAFÍA

ARANGO MARÍN, H. (2009). *Análisis de señales con las transformadas de Fourier, Gabor y Onditas.* Medellín, Colombia: ITM.

CARBALLO RUBIO, R. (s.f.). *DINÁMICA NO LINEAL.*

Faundez, P., & Fuentes, A. (s.f.). *Procesamiento Digital de Señales Acústicas utilizando Wavelets.* Instituto de Matemáticas UACH.

GARCÍA GONZÁLEZ, M. Á. (1998). *Estudio de la variabilidad del ritmo cardiaco mediante técnicas estadísticas, espectrales y no lineales.* Cataluña.

Hernández Díaz, M. (2003). *Análisis Comparativo de Algoritmos para Reducción de Ruido en Señales Utilizando Wavelets.* Puebla: Universidad de las Américas .

KARMELIC S., C. (2008). FIBRILACIÓN AURICULAR: ESTADO PRESENTE. *CONDES*, 32-38.

Médicas, C. N. (s.f.). *infoMED - RED DE SALUD DE CUBA.* Recuperado el 27 de Febrero de 2010, de http://www.sld.cu

MELENDEZ, L. (20 de Febreo de 2010). *EL HÚMERO*. Recuperado el 27 de Febrero de 2010, de http://el-humero.blogspot.com/2010/02/anatomia-y-fisiologia-del-corazon.html

MENDEL, J. M. (1991). TUTORIAL ON HIGHER-ORDER STATISTICS(SPECTRA) IN SIGNAL PROCESSING AND SYSTEM THEORY. *PROCEEDINGS OF THE IEEE*, 278-305.

MENDOZA SANTIAGO, J. J. (2002). *APLICACIONES DE ESPECTROS DE ORDEN SUPERIOR.* Tijuana: Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital.

MIGLIARO, E. R., & CONTRERAS, P. (s.f.). BASES FISIOLOGICAS DE LA VARIABILIDAD DE LA FRECUENCIA CARDÍACA. En *FISIOLÓGIA CARDIOVASCULAR APLICADA* (págs. 304-315).

MISITI, M., MISITI, Y., OPPENHEIM, G., & POGGI, J.-M. (2007). *Wavelet Toolbox - MATLAB.* The MathWorks, Inc.

NIKIAS, C. L. (1987). BISPECTRUM ESTIMATION: A DIGITAL SIGNAL PROCESSING FRAMEWORK. *PROCEEDINGS OF THE IEEE*, 869- 891.

SMALL, M. (2004). *APPLIED NONLINEAR TIME SERIES ANALYSIS.* NONLINEAR SCIENCE.

SWAMI, A., MENDEL, J. M., & NIKIAS, C. L. (2001). *HIGHER-ORDER SPECTRAL.* United Signals & Systems, Inc.

Zulantay, H. (28 de 06 de 2008). *Something on Dynamic Complex.* Recuperado el 5 de 03 de 2010, de http://complejidad.bligoo.com/content/view/221417/Software-Libre-y-Dinamicas-Complejas.html

ANEXOS

ANEXO 1.TABLA DE RESULTADOS PARA EL FILTRADO DE LA LÍNEA BASE EN SEÑALES ECG NORMALES Y CON FIBRILACIÓN AURICULAR

EVALUACIÓN DE TODOS LOS MÉTODOS

NOMBRE	METODO	span	SNR	PRD	PEARSON	MAYOR PEARSON	MAYOR SNR	MENOR PRD
16265	moving	0,1	10,819835	28,9420251	0,96341815	0,999591753	18,98668769	11,30280618
		0,2	17,8038151	12,9517935	0,99756801			
		0,3	18,140074	12,4599691	0,99848079			
		0,4	18,4472503	12,0270233	0,99887057			
		0,5	18,5899843	11,8309999	0,99912293			
		0,6	18,7486213	11,6168826	0,99927975			
		0,7	18,8625288	11,4655324	0,9993934			
		0,8	18,9246507	11,3838229	0,99947596			
		0,9	18,9543964	11,3449045	0,99954445			
		1	18,9866877	11,3028062	0,99959175			
	lowess	0,1	8,39585539	38,2584962	0,93226571	0,999771458	19,21527518	11,00922901
		0,2	15,2739537	17,3309744	0,99086017			
		0,3	18,5395024	11,8999612	0,9988084			
		0,4	18,7060632	11,6739413	0,99908514			
		0,5	18,8376443	11,4984275	0,9992871			
		0,6	18,9887149	11,3001686	0,99943946			
		0,7	19,1251018	11,1241177	0,99954957			
		0,8	19,1835512	11,0495122	0,99964501			
		0,9	19,2022357	11,0257688	0,99971466			
		1	19,2152752	11,009229	0,99977146			
	loess	0,1	4,28628812	61,4053568	0,80184613	0,999546935	19,16293597	11,07576842
		0,2	11,1569578	27,8402273	0,96659294			
		0,3	16,4502179	15,135953	0,99454845			
		0,4	18,2774141	12,2645032	0,99843798			
		0,5	18,5752306	11,8511129	0,99886136			
		0,6	18,6662858	11,7275252	0,99904063			
		0,7	18,7048917	11,6755158	0,99926027			
		0,8	18,8654804	11,4616369	0,99938387			
		0,9	19,0152432	11,2657083	0,99947057			
		1	19,162936	11,0757684	0,99954694			
	sgolay	0,1	6,11080554	49,7714609	0,87438754	0,999540221	19,12366268	11,12596094
		0,2	12,6428594	23,4626843	0,9779499			
		0,3	17,8184828	12,9299405	0,99769035			
		0,4	18,0847394	12,5396003	0,99801916			
		0,5	18,5190806	11,9279727	0,99875906			
		0,6	18,6125231	11,8003397	0,99906716			
		0,7	18,6738295	11,7173443	0,99925508			
		0,8	18,985712	11,3040759	0,99944558			
		0,9	19,1119126	11,1410221	0,99954022			
		1	19,1236627	11,1259609	0,99952381			
	rlowess	0,1	9,03988174	35,5243858	0,99300982	0,99980037	10,66676087	29,4566003
		0,2	9,93737929	32,0369896	0,99791658			
		0,3	10,6605406	29,4777027	0,99882807			
		0,4	10,6667609	29,4566003	0,99906837			
		0,5	10,6153254	29,6315519	0,99925537			
		0,6	10,5976401	29,691946	0,99935783			
		0,7	10,6175064	29,6241122	0,99947835			
		0,8	10,6270568	29,5915574	0,99961269			
		0,9	10,6239132	29,6022692	0,9997132			
		1	10,6332116	29,5705963	0,99980037			
	rloess	0,1	9,03611734	35,5397851	0,99128173	0,999519113	10,67003263	29,44550681
		0,2	9,24850135	34,6813183	0,99475082			
		0,3	10,4262144	30,2837705	0,99830573			
		0,4	10,6700326	29,4455068	0,99871706			
		0,5	10,6524273	29,5052502	0,99886227			
		0,6	10,6342198	29,5671643	0,99904086			
		0,7	10,5431709	29,8787292	0,99917447			
		0,8	10,5672723	29,7959373	0,99929095			
		0,9	10,5944169	29,7029661	0,99940584			
		1	10,6500243	29,513414	0,99951911			
16272	moving	0,1	5,44679464	54,3549494	0,86073831	0,979976708	11,59024707	26,7957844
		0,2	7,23899486	44,2210535	0,91681178			
		0,3	8,0910618	40,0890476	0,93631254			
		0,4	8,86081059	36,6892048	0,95128312			
		0,5	9,67573836	33,4034951	0,96294647			
		0,6	10,4756197	30,4647659	0,97148194			

		0,7	11,0381516	28,5542824	0,97541836			
		0,8	11,2931677	27,7281213	0,97734128			
		0,9	11,4590777	27,20351	0,97880827			
		1	11,5902471	26,7957844	0,97997671			
	lowess	0,1	4,75843538	58,8378858	0,83099675	0,987505749	12,43961437	24,2995432
		0,2	6,52404638	48,0149531	0,89730556			
		0,3	7,74731478	41,7073973	0,92898547			
		0,4	8,43652088	38,5258992	0,94271548			
		0,5	9,0559888	35,8739657	0,95279466			
		0,6	9,55173228	33,8838082	0,95894152			
		0,7	10,0188282	32,1097864	0,96390269			
		0,8	10,7422373	29,5438413	0,97181057			
		0,9	11,6419102	26,6368777	0,98086828			
		1	12,4396144	24,2995432	0,98750575			
	loess	0,1	3,50347207	67,9837669	0,7585483	0,968574308	10,48838028	30,42004234
		0,2	5,43387937	54,4358313	0,86037452			
		0,3	6,38924842	48,7659183	0,89284819			
		0,4	7,52931046	42,767445	0,92333598			
		0,5	7,88179317	41,0666399	0,93155307			
		0,6	8,33694355	38,9701117	0,94166025			
		0,7	8,73020468	37,2450528	0,94933152			
		0,8	9,07862946	35,7805783	0,95483047			
		0,9	9,73236241	33,1864431	0,96129516			
		1	10,4883803	30,4200423	0,96857431			
	sgolay	0,1	4,0284862	63,9962488	0,79131794	0,977088825	11,2731646	27,79205101
		0,2	5,77715134	52,3264487	0,8730201			
		0,3	6,99889518	45,4604854	0,91024832			
		0,4	7,71173967	41,8785701	0,92805943			
		0,5	8,20858741	39,5502705	0,93880706			
		0,6	8,65754093	37,5579415	0,9470318			
		0,7	8,99712033	36,1179266	0,95353456			
		0,8	9,59176267	33,7280082	0,96027926			
		0,9	10,5583602	30,1759408	0,97036461			
		1	11,2731646	27,792051	0,97708882			
	rlowess	0,1	4,61618757	59,8094006	0,8505712	0,991228735	7,807729359	41,41830865
		0,2	5,02140752	57,0832186	0,90839547			
		0,3	4,5652104	60,1614518	0,9165893			
		0,4	4,86230818	58,138446	0,92800689			
		0,5	5,37421491	54,8110451	0,94092269			
		0,6	5,8816396	51,7007506	0,95232914			
		0,7	6,7869886	46,5832085	0,96578612			
		0,8	7,39116659	43,4530734	0,96981293			
		0,9	7,80772936	41,4183087	0,9831707			
		1	7,8005033	41,4527802	0,99122874			
	rloess	0,1	4,12475609	63,2908639	0,823031	0,968560362	7,224963487	44,29254691
		0,2	4,65050414	59,5735693	0,89776392			
		0,3	4,39788327	61,3316523	0,91074179			
		0,4	4,32200443	61,8697849	0,90757416			
		0,5	4,61467907	59,8197887	0,9164134			
		0,6	4,9222949	57,738312	0,93358769			
		0,7	5,40145968	54,6393902	0,94958968			
		0,8	5,78889503	52,255749	0,95193246			
		0,9	6,50771615	48,1053103	0,95701556			
		1	7,22496349	44,2925469	0,96856036			
16420	**moving**	0,1	12,0159564	25,4800862	0,98397925	0,999168535	14,76257661	18,57247916
		0,2	13,7691829	20,8228211	0,99463988			
		0,3	13,9425914	20,4112283	0,99553326			
		0,4	14,0754287	20,1014449	0,9962174			
		0,5	14,2432964	19,7166846	0,99692011			
		0,6	14,476529	19,1942991	0,99783764			
		0,7	14,6869746	18,7348397	0,99867716			
		0,8	14,7625766	18,5724792	0,99911881			
		0,9	14,7164176	18,6714406	0,99916854			
		1	14,6688687	18,7739334	0,99911893			
	lowess	0,1	11,413441	27,310312	0,97889622	0,99975987	14,83854599	18,41074705
		0,2	13,4364747	21,6359006	0,99294194			
		0,3	13,9268365	20,4482847	0,99548846			
		0,4	13,9873155	20,3064	0,99580333			
		0,5	14,1030242	20,0376829	0,99627881			
		0,6	14,2591616	19,6807041	0,99691882			
		0,7	14,4444143	19,2653984	0,99770083			
		0,8	14,6553001	18,803284	0,99866692			
		0,9	14,7979386	18,4970206	0,9994353			
		1	14,838546	18,410747	0,99975987			
	loess	0,1	7,87223564	41,0569731	0,93007813	0,997822301	14,57040736	18,98796149
		0,2	12,4070006	24,3583957	0,98663289			
		0,3	13,6129572	21,2007318	0,99388059			
		0,4	13,89666	20,5194497	0,99528098			
		0,5	13,9103306	20,4871798	0,9954818			
		0,6	13,9384671	20,4209225	0,99562414			
		0,7	13,967536	20,3526945	0,99579529			
		0,8	14,0145665	20,2427907	0,99594857			
		0,9	14,198623	19,8183531	0,9965143			
		1	14,5704074	18,9879615	0,9978223			
	sgolay	0,1	9,77342324	32,98584	0,96122322	0,999437148	14,92970173	18,21854224
		0,2	12,6792727	23,6066888	0,98838484			
		0,3	13,7792349	20,7987371	0,99481149			

		0,4	13,8840474	20,5492672	0,99527972			
		0,5	13,9197387	20,4650013	0,99551335			
		0,6	13,9804318	20,3224994	0,99577488			
		0,7	14,0103402	20,2526426	0,9959554			
		0,8	14,0639697	20,1279816	0,9962722			
		0,9	14,6081712	18,9055864	0,99816506			
		1	14,9297017	18,2185422	0,99943715			
	rlowess	0,1	9,55660034	33,8196176	0,98754062	0,99986175	10,99307036	28,66455424
		0,2	9,90856292	32,4766006	0,99426685			
		0,3	10,587194	30,0357866	0,99524273			
		0,4	10,6022746	29,9836832	0,99564349			
		0,5	10,6825153	29,7079678	0,99615633			
		0,6	10,7555886	29,4590869	0,99691339			
		0,7	10,8552482	29,1230127	0,99784653			
		0,8	10,9644137	28,7592809	0,99890107			
		0,9	10,9930704	28,6645542	0,99962845			
		1	10,960492	28,7722688	0,99986175			
	rloess	0,1	9,23339998	35,1017453	0,98202876	0,998184556	10,94290706	28,83057853
		0,2	9,25709508	35,0061183	0,99099859			
		0,3	10,1617402	31,5436323	0,99457663			
		0,4	10,6213145	29,9180294	0,99514152			
		0,5	10,5602767	30,1290108	0,99534707			
		0,6	10,5873817	30,0351375	0,99550162			
		0,7	10,6233878	29,910889	0,99575439			
		0,8	10,657533	29,7935368	0,99598956			
		0,9	10,7629362	29,4341772	0,99673907			
		1	10,9429071	28,8305785	0,99818456			
16539	**moving**	0,1	10,509648	30,1534471	0,96515517	0,99693819	15,61364251	16,75472264
		0,2	13,7699802	20,7166896	0,98939675			
		0,3	14,4452474	19,167126	0,99238291			
		0,4	14,868542	18,2554385	0,99402071			
		0,5	15,173018	17,6265968	0,99527788			
		0,6	15,3220422	17,3267559	0,99612959			
		0,7	15,4090781	17,1540023	0,99650413			
		0,8	15,4778103	17,0187969	0,996678			
		0,9	15,5223077	16,9318333	0,99684368			
		1	15,6136425	16,7547226	0,99693819			
	lowess	0,1	8,56294947	37,7287047	0,93882335	0,999164152	16,27085354	15,5337636
		0,2	13,1611785	22,2208385	0,98630209			
		0,3	14,7559557	18,4936052	0,99399877			
		0,4	14,9904863	18,0009346	0,99489241			
		0,5	15,2444968	17,4821374	0,99595568			
		0,6	15,4754138	17,0234931	0,99698074			
		0,7	15,7324724	16,5270656	0,99791706			
		0,8	15,9852179	16,0530837	0,99849397			
		0,9	16,1526896	15,7465309	0,99887355			
		1	16,2708535	15,5337636	0,99916415			
	loess	0,1	5,5419305	53,4223322	0,85912155	0,997919907	15,78333189	16,43057545
		0,2	10,9623128	28,6222473	0,96987427			
		0,3	13,2172586	22,0778328	0,9865667			
		0,4	14,6242903	18,7760769	0,99353431			
		0,5	14,7878749	18,425769	0,99407944			
		0,6	14,9992436	17,9827948	0,99473038			
		0,7	15,2259691	17,519468	0,99540093			
		0,8	15,3560122	17,2591244	0,99647826			
		0,9	15,5142753	16,9474986	0,99741801			
		1	15,7833319	16,4305755	0,99791991			
	sgolay	0,1	6,69620057	46,7745201	0,89646527	0,998491837	16,04505284	15,94287814
		0,2	11,6039304	26,5841544	0,97594545			
		0,3	14,2140276	19,6842101	0,9915916			
		0,4	14,613464	18,7994944	0,99333409			
		0,5	14,9132811	18,1616505	0,99447018			
		0,6	15,179309	17,6138347	0,99530343			
		0,7	15,4216942	17,1291044	0,99650566			
		0,8	15,6136269	16,7547528	0,99758832			
		0,9	15,8078413	16,3842778	0,99807344			
		1	16,0450528	15,9428781	0,99849184			
	rlowess	0,1	6,82736354	46,0734986	0,93494967	0,999216277	9,263318725	34,80594523
		0,2	7,99287922	40,2879721	0,987561			
		0,3	8,71494572	37,0742251	0,9939383			
		0,4	8,93595021	36,1428053	0,99481857			
		0,5	8,91652084	36,2237432	0,99568317			
		0,6	8,98660045	35,9326582	0,99676455			
		0,7	9,02260504	35,7840191	0,997972			
		0,8	9,1041486	35,4496489	0,99856207			
		0,9	9,22475982	34,9608013	0,99887384			
		1	9,26331872	34,8059452	0,99921628			
	rloess	0,1	6,40595994	48,3639064	0,91990882	0,997925829	9,051807098	35,66391481
		0,2	7,16770871	44,3030814	0,96929166			
		0,3	7,57977967	42,2503572	0,99013193			
		0,4	8,83593513	36,5613828	0,99318843			
		0,5	8,86856743	36,4242818	0,99354852			
		0,6	8,95977548	36,0438019	0,9943951			
		0,7	8,94035592	36,1244774	0,99493209			
		0,8	8,8248475	36,6080835	0,99625718			
		0,9	8,93303654	36,1549314	0,99721326			
		1	9,0518071	35,6639148	0,99792583			

16773	moving	0,1	6,68768159	46,4283684	0,88872241	0,99168106	15,61827811	16,60556267
		0,2	9,03455954	35,4355783	0,93868529			
		0,3	10,4109733	30,2425798	0,95627816			
		0,4	12,5385071	23,672392	0,97509132			
		0,5	14,5377792	18,8052254	0,98597947			
		0,6	15,2341271	17,3564597	0,98957795			
		0,7	15,329186	17,1675453	0,99019838			
		0,8	15,6182781	16,6055627	0,9912345			
		0,9	15,5639191	16,7098114	0,99125475			
		1	15,6019903	16,6367307	0,99168106			
	lowess	0,1	5,65907122	52,2653593	0,85699083	0,998957508	20,88485514	9,055756674
		0,2	7,89846553	40,3872446	0,91795039			
		0,3	9,77643506	32,5346208	0,9487771			
		0,4	11,0000327	28,2595908	0,96220991			
		0,5	12,5482058	23,6459741	0,97497834			
		0,6	14,1024647	19,7717115	0,98406781			
		0,7	17,1071267	13,9897891	0,99384791			
		0,8	19,5130236	10,6051379	0,99759375			
		0,9	20,4123962	9,56197693	0,9984939			
		1	20,8848551	9,05575667	0,99895751			
	loess	0,1	3,56492206	66,5152762	0,75272641	0,995710019	17,88449856	12,79212143
		0,2	6,68295481	46,4536412	0,88853209			
		0,3	7,7759091	40,9611411	0,91543675			
		0,4	9,24910417	34,5710279	0,94136823			
		0,5	9,73781442	32,6796036	0,94814558			
		0,6	10,9200153	28,5211306	0,96074534			
		0,7	12,1412038	24,780343	0,97136293			
		0,8	14,3129936	19,2982453	0,98494327			
		0,9	16,6798258	14,6952241	0,99335335			
		1	17,8844986	12,7921214	0,99571002			
	sgolay	0,1	4,51316306	59,6361156	0,80613065	0,997440043	19,15622494	11,04984675
		0,2	6,87885458	45,4176618	0,89389094			
		0,3	8,72952669	36,7021213	0,93340973			
		0,4	9,42433814	33,8805611	0,94392594			
		0,5	10,5787691	29,6639545	0,95789208			
		0,6	11,9333468	25,3804993	0,96961558			
		0,7	14,2226299	19,5000627	0,98378509			
		0,8	17,0540539	14,0755316	0,99382152			
		0,9	18,0319809	12,5767509	0,99553638			
		1	19,1562249	11,0498467	0,99744004			
	rlowess	0,1	5,14139522	55,4750548	0,86799922	0,998157456	10,36176706	30,41439267
		0,2	6,6613615	46,5692696	0,93778074			
		0,3	6,61993219	46,7919228	0,95032783			
		0,4	7,25117917	43,5119496	0,96135766			
		0,5	8,48726508	37,7402044	0,97735129			
		0,6	9,31857195	34,2956394	0,98723654			
		0,7	9,56172563	33,3488775	0,99335697			
		0,8	9,61077149	33,1610999	0,99498792			
		0,9	9,7517341	32,6272745	0,99639062			
		1	10,3617671	30,4143927	0,99815746			
	rloess	0,1	4,39011526	60,4869573	0,84065165	0,99552223	9,985117513	31,76227677
		0,2	6,31102548	48,4859855	0,92687037			
		0,3	6,16309601	49,3188227	0,93766957			
		0,4	6,24278699	48,8684036	0,94123052			
		0,5	6,64551056	46,6543318	0,94996017			
		0,6	7,81744732	40,7657217	0,96611415			
		0,7	8,75481727	36,5954117	0,97808594			
		0,8	9,40025912	33,9746151	0,98857009			
		0,9	9,59247645	33,2310206	0,99389712			
		1	9,98511751	31,7622768	0,99552223			
16786	moving	0,1	10,3785448	30,3939471	0,95692287	0,99897775	19,91638981	10,13665943
		0,2	15,7034373	16,46427	0,99068706			
		0,3	17,2055226	13,8496314	0,99473547			
		0,4	18,3451595	12,1466459	0,99701599			
		0,5	18,9143726	11,3761606	0,99792914			
		0,6	19,2056542	11,0009866	0,99834274			
		0,7	19,4997061	10,634793	0,99873218			
		0,8	19,7674963	10,3119199	0,99890757			
		0,9	19,9163898	10,1366594	0,99897775			
		1	19,9025341	10,1528423	0,99896346			
	lowess	0,1	7,63545692	41,6813234	0,91619815	0,999744864	20,99199469	8,956010851
		0,2	13,6313498	20,9000275	0,98199732			
		0,3	17,7143443	13,0616226	0,99554606			
		0,4	18,4936912	11,9406999	0,99694484			
		0,5	19,3268229	10,8485877	0,99815847			
		0,6	19,9054872	10,1493911	0,99882614			
		0,7	20,1656144	9,84994088	0,99913094			
		0,8	20,4518203	9,53066778	0,99936284			
		0,9	20,7948348	9,16162696	0,99958939			
		1	20,9919947	8,95601085	0,99974486			
	loess	0,1	3,96968859	63,5667366	0,78105395	0,999016883	19,82414004	10,24489104
		0,2	10,8323383	28,8467859	0,96170307			
		0,3	13,5918721	20,995235	0,98179097			
		0,4	17,6855261	13,1050307	0,99544643			
		0,5	17,973606	12,6775125	0,99601877			
		0,6	18,5522714	11,8604393	0,99713632			
		0,7	19,3175188	10,8602145	0,99816301			

		0,8	19,677736	10,4190362	0,99852625			
		0,9	19,6350351	10,4703836	0,99876084			
		1	19,82414	10,244891	0,99901688			
	sgolay	0,1	5,41680526	53,8113741	0,84787261	0,999315171	20,15774226	9,858872104
		0,2	11,4334188	26,9180381	0,96756389			
		0,3	15,9262949	16,0472124	0,99111894			
		0,4	17,1661063	13,9126235	0,99436446			
		0,5	18,1401116	12,4368033	0,99628206			
		0,6	19,245568	10,9505504	0,99819729			
		0,7	19,5827024	10,5336583	0,99830939			
		0,8	19,58417	10,5318786	0,99866649			
		0,9	20,1577423	9,8588721	0,99914885			
		1	20,0797678	9,94777508	0,99931517			
	rlowess	0,1	8,8381563	36,2916347	0,97169122	0,999540077	9,244011135	34,6348881
		0,2	8,49353747	37,760477	0,99522968			
		0,3	8,45654	37,9216605	0,99576934			
		0,4	8,59868056	37,3061402	0,99679499			
		0,5	8,77482649	36,5572081	0,99797419			
		0,6	9,00660759	35,5945877	0,9986414			
		0,7	9,12429808	35,1155473	0,99893616			
		0,8	9,13051039	35,090441	0,99927822			
		0,9	9,13664043	35,0656847	0,99949717			
		1	9,24401114	34,6348881	0,99954008			
	rloess	0,1	8,18457795	39,1278017	0,95756946	0,998846015	9,100904825	35,21024965
		0,2	8,443905	37,9768637	0,99308459			
		0,3	8,26297069	38,7762504	0,99477085			
		0,4	8,45660215	37,9213891	0,99514955			
		0,5	8,4967237	37,746628	0,99571728			
		0,6	8,59842122	37,3072541	0,99701552			
		0,7	8,84135846	36,2782578	0,99802659			
		0,8	9,03023411	35,4978982	0,99838541			
		0,9	9,02552747	35,5171388	0,99864977			
		1	9,10090483	35,2102496	0,99884602			
17052	moving	0,1	8,6671812	37,719832	0,95102227	0,997915726	13,06097529	22,74469119
		0,2	11,8550798	26,1321305	0,98954198			
		0,3	12,6208192	23,9269779	0,9950315			
		0,4	12,8407114	23,328845	0,9965713			
		0,5	12,9389617	23,0664482	0,99701799			
		0,6	13,0057309	22,8898141	0,99735032			
		0,7	13,0500245	22,7733847	0,99766371			
		0,8	13,0580388	22,7523819	0,99782211			
		0,9	13,0487615	22,7766966	0,99788441			
		1	13,0609753	22,7446912	0,99791573			
	lowess	0,1	7,25259202	44,3914374	0,92308296	0,99946448	13,37002069	21,94965885
		0,2	10,8065454	29,4850275	0,9801142			
		0,3	12,7476228	23,58021	0,99558792			
		0,4	12,9976679	22,9110723	0,99728046			
		0,5	13,113195	22,60836	0,99780549			
		0,6	13,1919646	22,4042586	0,9981302			
		0,7	13,2502475	22,2544278	0,99853034			
		0,8	13,294309	22,1418221	0,99891805			
		0,9	13,3341664	22,0404517	0,99923751			
		1	13,3700207	21,9496588	0,99946448			
	loess	0,1	4,48753317	61,0312339	0,8228307	0,998474573	13,29651076	22,13621024
		0,2	8,68416055	37,6461685	0,95104492			
		0,3	10,8024383	29,4989729	0,98006527			
		0,4	12,8161825	23,3948187	0,99579339			
		0,5	12,9327974	23,082824	0,99677674			
		0,6	12,9868936	22,9395096	0,99735464			
		0,7	13,0452852	22,7858141	0,99758949			
		0,8	13,156601	22,4956609	0,99786836			
		0,9	13,2164457	22,3412015	0,99815833			
		1	13,2965108	22,1362102	0,99847457			
	sgolay	0,1	5,70240567	53,0650436	0,87487189	0,999053028	13,35954379	21,97615046
		0,2	9,47487043	34,3704555	0,96364132			
		0,3	11,8381356	26,1831583	0,98959998			
		0,4	12,6718974	23,786686	0,99523738			
		0,5	12,8631095	23,268765	0,99669964			
		0,6	12,9989224	22,9077634	0,99737036			
		0,7	13,1568887	22,4949158	0,99773406			
		0,8	13,2256693	22,3174898	0,99821739			
		0,9	13,3127733	22,0948036	0,99858878			
		1	13,3595438	21,9761505	0,99905303			
	rlowess	0,1	8,1092167	40,2223994	0,9827805	0,999276933	9,067307546	36,02163588
		0,2	8,09449515	40,2906294	0,99065679			
		0,3	8,77239895	37,2656638	0,99641842			
		0,4	9,01238648	36,250123	0,99730568			
		0,5	9,01687098	36,231412	0,99775818			
		0,6	9,03231727	36,1670383	0,99821516			
		0,7	9,04828299	36,1006199	0,99853066			
		0,8	9,06730755	36,0216359	0,99893101			
		0,9	9,05380862	36,0776614	0,99909178			
		1	9,0501701	36,0927775	0,99927693			
	rloess	0,1	7,94556254	40,9874295	0,9782977	0,998513313	9,079021225	35,9730903
		0,2	7,92534052	41,0829654	0,98481403			
		0,3	8,00768282	40,6953388	0,99050504			
		0,4	8,79049924	37,1880878	0,99621636			

		0,5	8,99477905	36,3236813	0,99678841			
		0,6	8,95006696	36,5111457	0,99738629			
		0,7	8,9852692	36,3634725	0,99757514			
		0,8	9,02661313	36,1907974	0,99793691			
		0,9	9,02969691	36,1779508	0,99822759			
		1	9,07902122	35,9730903	0,99851331			
17453	moving	0,1	10,6652714	29,4560363	0,96143193	0,998145311	18,41860548	12,06445209
		0,2	15,917577	16,0901105	0,99249824			
		0,3	16,9364698	14,3091681	0,99520099			
		0,4	17,6568392	13,1703076	0,99663778			
		0,5	18,2048306	12,3650633	0,99757345			
		0,6	18,3672851	12,1359456	0,99790382			
		0,7	18,4004568	12,0896865	0,99806374			
		0,8	18,4186055	12,0644521	0,99812953			
		0,9	18,4009152	12,0890485	0,99811095			
		1	18,3832538	12,1136547	0,99814531			
	lowess	0,1	8,89394926	36,1193906	0,93905646	0,999777729	19,30667815	10,89190813
		0,2	14,4282427	19,0996646	0,98736878			
		0,3	17,7387887	13,046633	0,99709844			
		0,4	18,1222759	12,483147	0,99778117			
		0,5	18,5558417	11,8753328	0,99847896			
		0,6	18,8629541	11,4627856	0,99901644			
		0,7	18,95576	11,3409616	0,99927734			
		0,8	19,0788899	11,1813278	0,99950943			
		0,9	19,2099861	11,0138352	0,99966827			
		1	19,3066781	10,8919081	0,99977773			
	loess	0,1	5,23765276	55,0243903	0,84479565	0,999394383	19,00533281	11,27641982
		0,2	11,0042197	28,3287162	0,96485751			
		0,3	14,6958885	18,5201052	0,98841011			
		0,4	17,5277655	13,3674819	0,99667136			
		0,5	17,7842725	12,9784926	0,99721353			
		0,6	18,039632	12,6024876	0,99765373			
		0,7	18,5952422	11,8215866	0,99842584			
		0,8	18,9600173	11,3354043	0,99893237			
		0,9	19,0053328	11,2764198	0,99918988			
		1	19,0001852	11,2831047	0,99939438			
	sgolay	0,1	6,94188542	45,2213586	0,89819176	0,99969923	19,19980736	11,02674951
		0,2	12,2190223	24,6312675	0,97493587			
		0,3	16,821156	14,5004031	0,99517327			
		0,4	17,4568696	13,4770362	0,99655688			
		0,5	17,6512368	13,1788052	0,9970441			
		0,6	18,3800661	12,1181011	0,99818902			
		0,7	18,887355	11,4306289	0,99887246			
		0,8	19,0182237	11,2596967	0,99917837			
		0,9	19,0536473	11,2138698	0,99934062			
		1	19,1998074	11,0267495	0,99969923			
	rlowess	0,1	9,56154615	33,4472618	0,98221927	0,999730745	12,38054813	24,1774487
		0,2	10,5683466	29,7865736	0,99275325			
		0,3	12,0032639	25,2507733	0,99634266			
		0,4	12,0768031	25,0378896	0,99732403			
		0,5	12,2038616	24,6742975	0,99822283			
		0,6	12,3027829	24,3948827	0,99903929			
		0,7	12,2883734	24,4353861	0,99932144			
		0,8	12,288986	24,4336629	0,99953837			
		0,9	12,3221654	24,3405062	0,99963369			
		1	12,3805481	24,1774487	0,99973075			
	rloess	0,1	9,18041557	34,9475793	0,97574632	0,999458464	12,36342672	24,22515369
		0,2	9,785871	32,5945003	0,98728898			
		0,3	11,2099478	27,6656251	0,99354961			
		0,4	11,9334807	25,4544573	0,99603404			
		0,5	11,9462708	25,4170028	0,99652902			
		0,6	12,0346277	25,1597598	0,99724962			
		0,7	12,2354042	24,584856	0,99833145			
		0,8	12,3634267	24,2251537	0,99901545			
		0,9	12,3382154	24,2955708	0,99927537			
		1	12,3407436	24,2885001	0,99945846			
18184	moving	0,1	8,73814339	36,8326565	0,93768328	0,997107659	16,59800089	14,90184933
		0,2	10,7155309	29,3334855	0,96402353			
		0,3	12,1148814	24,968712	0,97638061			
		0,4	13,934344	20,2499061	0,98757718			
		0,5	15,3275621	17,2489279	0,99364224			
		0,6	15,8569182	16,229095	0,99553221			
		0,7	16,1863625	15,6250741	0,99634748			
		0,8	16,2813877	15,4550647	0,99676792			
		0,9	16,4929162	15,0832317	0,99706681			
		1	16,5980009	14,9018493	0,99710766			
	lowess	0,1	7,28404917	43,5449458	0,90990392	0,999136144	18,04908792	12,60915015
		0,2	10,0728807	31,5861126	0,95653309			
		0,3	11,4505393	26,9533809	0,9707527			
		0,4	12,7378504	23,2406191	0,98034762			
		0,5	14,3058	19,4021658	0,98884204			
		0,6	15,9089592	16,1321501	0,99476185			
		0,7	17,0355482	14,16977	0,99734371			
		0,8	17,5111266	13,4147902	0,9983628			
		0,9	17,7688968	13,0225302	0,99887759			
		1	18,0490879	12,6091502	0,99913614			
	loess	0,1	4,30974798	61,3271544	0,80120821	0,997457515	16,92233053	14,35567725

		0,2	8,94891885	35,9496172	0,94103073			
		0,3	9,95465263	32,0189865	0,9550539			
		0,4	10,9018785	28,7108657	0,96561488			
		0,5	11,5940018	26,5118556	0,97188949			
		0,6	12,6815242	23,3918193	0,97958491			
		0,7	14,2005296	19,6387452	0,98862245			
		0,8	15,5919628	16,7317771	0,9942081			
		0,9	16,5438487	14,9950451	0,99602036			
		1	16,9223305	14,3556773	0,99745751			
		0,1	5,65860786	52,5061071	0,8598732	0,998874478	17,45031158	13,50904454
		0,2	9,13751318	35,1774662	0,94393834			
		0,3	10,4619718	30,2024118	0,96099001			
		0,4	11,2236083	27,6668552	0,96863887			
	sgolay	0,5	12,4562834	24,0063448	0,9781912			
		0,6	14,1288921	19,8013869	0,9876405			
		0,7	15,602311	16,7118551	0,99435772			
		0,8	16,6296716	14,8476128	0,99607671			
		0,9	16,8793102	14,4269559	0,99716141			
		1	17,4503116	13,5090445	0,99887448			
		0,1	6,04174281	50,2403981	0,91694004	0,999142304	10,21215169	31,08369422
		0,2	6,75299387	46,2903558	0,95316777			
		0,3	7,43600835	42,7897545	0,96381434			
		0,4	8,26673135	38,8869288	0,97621978			
	rlowess	0,5	9,13577757	35,184496	0,98817733			
		0,6	9,5897112	33,3929397	0,99476325			
		0,7	9,9726312	31,9527802	0,99713464			
		0,8	10,0692711	31,5992416	0,99844453			
		0,9	10,1383634	31,3488811	0,99896752			
		1	10,2121517	31,0836942	0,9991423			
		0,1	5,48137072	53,5885093	0,89580543	0,997725346	9,750269538	32,78134253
		0,2	5,96452127	50,6890497	0,94117401			
		0,3	6,5987689	47,1196187	0,95033371			
		0,4	7,21887884	43,8728928	0,95755524			
	rloess	0,5	7,83363515	40,8750649	0,96697106			
		0,6	8,50904724	37,8170677	0,97814583			
		0,7	9,19386993	34,9499627	0,98832458			
		0,8	9,5374268	33,5945534	0,99426373			
		0,9	9,72130901	32,8908246	0,99635358			
		1	9,75026954	32,7813425	0,99772535			

EVALUACIÓN DE LOS MÉTODOS ELEGIDOS

NOMBRE	METODO	span	SNR	PRD	PEARSON	TIEMPO(s)
16265	rlowess	1	11,25	27,4806025	0,9978048	8346,16
16272	rlowess	1	2,28213152	77,0100955	0,64793393	10188,04
16420	rlowess	1	9,33466946	34,563282	0,9787641	7029,13
16539	rlowess	1	8,05135827	40,0536438	0,98842648	6091,59
16773	rlowess	1	7,66506092	41,5205487	0,96836454	11205,68
16786	rlowess	1	8,56519304	37,4771988	0,99680893	8401,62
17052	rlowess	1	7,99413636	40,4711409	0,96671428	10755,79
17453	rlowess	1	11,4753873	26,8359011	0,99085789	6701,52
18184	rlowess	1	8,61835253	37,2874872	0,98008092	6906,55
16265	lowess	1	20,1446361	9,86536658	0,99823911	13,09
16272	lowess	1	3,59292286	66,2228847	0,75948521	14,58
16420	lowess	1	11,915202	25,6796054	0,97930947	13,27
16539	lowess	1	13,56244	21,2367446	0,98953934	11,63
16773	lowess	1	11,9198407	25,4404094	0,9707151	13,02
16786	lowess	1	18,4134254	12,0602276	0,99741556	15,99
17052	lowess	1	10,2162888	31,3355861	0,96637656	15,43
17453	lowess	1	15,2544155	17,3685983	0,99063434	12,22
18184	lowess	1	13,0742712	22,3237518	0,98065218	12,76
16272	moving	1	5,01489847	56,2223915	0,83519199	6,31