
Estudio del Mecanismo de la Generación de la Coherencia en la Emisión Estimulada con Fotones Libres

Daniel Fernando Borrero Landazabal

Trabajo de Grado para Optar el Título de Físico

Director
Rafael Ángel Torres Amaris
Doctor en Ciencias Naturales

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Bucaramanga
2020

Dedicatoria

A mis padres Carlos y Nubia. A mis hermanos Carlos, Mayra y Laura. A Jessica, y a mis amigos Soren, Stephany y Fabian. Sin ustedes no hubiera sido posible.

Agradecimientos

Profundo agradecimiento a todos los profesores de la Universidad Industrial de Santander que orientaron mi formación, en especial a mi director Rafael Torres.

A los investigadores y estudiantes del CICESE en México, y a la organización OSA, por expandir mis horizontes y brindarme crecimiento profesional.

A la Universidad Industrial de Santander, a la Facultad de Ciencias y la Escuela de Física, por apoyarme en todos los eventos en los cuales participé.

A mis padres y mis hermanos por su apoyo incondicional.

A Jessica por su apoyo, su motivación y su compañía.

A mis amigos, Soren, Stephany y Fabian, que siempre estuvieron pendientes, y a mis amigos de carrera por las interminables discusiones.

Índice general

Introducción	8
1 Teoría Cuántica del Campo Electromagnético	12
1.1 Segunda Cuantización del Campo Electromagnético	14
1.2 Mecánica Ondulatoria del Fotón	22
1.3 El Fotón como un Paquete de Ondas y la Regla de Extracción	24
2 El Fotón de Fase	28
2.1 Construyendo una Base	30
2.1.1 <i>Normalización</i>	32
2.1.2 <i>Ortogonalidad</i>	33
2.1.3 <i>Complejitud</i>	35
2.2 El Estado de un Fotón de Fase	37
2.2.1 <i>Valor Esperado del Operador Número</i>	38
2.2.2 <i>Valor Esperado de Energía</i>	41
2.2.3 <i>Valor Esperado del Operador Campo Eléctrico</i>	44
2.3 Función de Onda del Fotón de Fase	45
2.3.1 <i>Espacio de Fase</i>	45
2.3.2 <i>Espacio de Posición y Espacio de Momento</i>	47
2.4 Comparación entre Modelos del Fotón	52
2.4.1 <i>El Fotón de Fase</i>	54
3 Dos Fotones Coherentes	55
3.1 La Emisión Estimulada	55
3.1.1 <i>Introducción del Fenómeno por Albert Einstein</i>	56
3.1.2 <i>En la Segunda Cuantización</i>	57
3.2 La Generación de Dos Fotones Idénticos	59
3.2.1 <i>Operadores Bosónicos para los Paquetes de Ondas</i>	59
3.2.2 <i>Emisión Espontánea y Emisión Estimulada</i>	61
Conclusiones	64
Referencias	65

Índice de figuras

1.1	<i>Función de onda de los estados de Fock en el espacio Q</i>	19
2.1	<i>Representación en el espacio de cuadratura</i>	29
2.2	<i>Funciones de peso</i>	32
2.3	<i>Estado coherente en el espacio de fase</i>	40
3.1	<i>Fenómeno de emisión estimulada</i>	56
3.2	<i>Proceso de emisión espontánea</i>	62
3.3	<i>Proceso de emisión estimulada</i>	63

Resumen

TÍTULO: Estudio del Mecanismo de la Generación de la Coherencia en la Emisión Estimulada con Fotones Libres*.

AUTOR: Daniel Fernando Borrero Landazabal†

PALABRAS CLAVE: Coherencia cuántica, emisión estimulada, fotones libres.

DESCRIPCIÓN:

La emisión estimulada se caracteriza por ser el único fenómeno que permite clonar el estado cuántico de un fotón, es decir, el fotón emitido tiene la misma energía, polarización y está en fase con el fotón incidente. Este hecho diferencia la emisión estimulada de la espontánea, en la cual el fotón emitido tiene una energía, polarización y fase aleatoria. Además, la emisión estimulada es el proceso fundamental para conseguir radiación coherente en un sistema LASER cuya coherencia está limitada solo por la emisión espontánea, debido a que el fotón emitido por emisión estimulada no es idéntico con el fotón emitido por emisión espontánea. No obstante, los modelos actuales para describir el estado de un fotón presentan la falencia de no poder distinguir entre dos fotones que tengan la misma energía y polarización, y más aún, ningún modelo asocia alguna fase a estos estados. En este trabajo se propone una nueva descripción del fotón como un paquete de ondas de estados coherentes, el cual se denomina aquí como un *Fotón de Fase*, y se demuestra que este estado constituye una representación válida del fotón, con la cual, se logra encontrar una función de onda que es solución a la ecuación de onda cuántica relativista del fotón, y que además tiene una fase global asociada, permitiendo así distinguir entre dos fotones que tengan la misma energía y polarización por medio de la fase asociada a cada fotón. Finalmente, haciendo uso de los operadores bosónicos de creación y aniquilación para estos fotones de fase, se modifica el Hamiltoniano de interacción de Jaynes-Cummings y se logra mostrar que esta descripción permite entender la emisión estimulada como una clonación del estado del fotón, donde, además, los fotones comparten la misma fase y su estado es diferente a un fotón emitido por emisión espontánea.

*Trabajo de Grado

†Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Rafael Ángel Torres Amaris. Doctor en Ciencias Naturales

Abstract

TITLE: Study of the Mechanism for the Generation of Coherence in the Stimulated Emission Process with Free Photons*.

AUTHOR: Daniel Fernando Borrero Landazabal†

KEYWORDS: Quantum coherence, stimulated emission, free photons.

DESCRIPTION:

Stimulated emission is the unique phenomenon that can clone a photon quantum state, i.e., the photon emitted by this process has the same energy, polarization and it is said to be in phase with the photon that stimulated the emission. This fact differentiates stimulated from spontaneous emission, in which the emitted photon is stimulated by the vacuum state, and thus, the photon has random energy, polarization and phase. Furthermore, stimulated emission is the fundamental phenomenon to obtain coherent radiation in a LASER system, whose coherence is limited only by spontaneous emission because a photon emitted by stimulated emission is different from one emitted by spontaneous emission, even if they have the same energy and polarization. However, the current models of the single-photon state only allow us to differentiate two photons by the energy or polarization, since there exists no phase associated to these single-photon states. In this thesis we argue that the single-photon state can be described as a wave-packet of coherent states, which we called *Phase Photon*, and we show that this description is a valid representation for the single-photon state, which leads to a wave function that, is solution to the quantum relativistic photon wave mechanics, and has a global phase associated, this characteristic phase allows us to tell apart between two photons that have the same energy and polarization. Finally, by using the bosonic operators for creation and annihilation of these Phase Photons, the Jaynes-Cummings interaction Hamiltonian is modified so that the stimulated emission can be understood as a quantum state cloning process, in which the photons share the same phase and has a different state from those photons emitted by spontaneous emission.

*Bachelor Thesis

†Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Rafael Ángel Torres Amaris. Doctor en Ciencias Naturales

Introducción

*‘In 50 years of pondering, I still have not come closer to an answer for the question what light quanta are’
Albert Einstein, 1951.*

¿Qué es el fotón? Los físicos han abordado esta pregunta por más de un siglo obteniendo resultados asombrosos. No obstante, en el fondo de esta pregunta subyace una característica inherente a la física, y es que en cualquier fenómeno que se estudie siempre se llega a un punto en el cual no es posible entender más allá de lo que el lenguaje de las matemáticas (siendo estas tan abstractas) describen. Para ejemplificar esto, lo más fundamental que se entiende del electrón es que es una partícula elemental cuya probabilidad de ser encontrada en el espacio se determina por una función de onda que se rige por la mecánica cuántica relativista descrita por la ecuación de Dirac. Sin embargo, el electrón también se puede entender como una excitación de un modo de oscilación de un campo cuantizado, según la teoría cuántica de campos (QFT^{*}). De forma análoga, se puede entender el fotón como una función de onda que se rige por una mecánica cuántica relativista descrita por una ecuación de onda, o, como una excitación de un campo relativista cuantizado en la teoría cuántica de campos.

Por otra parte, la física es una ciencia que es fenomenológica, esto implica que todo su estudio y desarrollo tiene como base lo que directa o indirectamente puede ser observado o medido. Este hecho marca la diferencia entre el lenguaje meramente matemático y la física. De tal manera que, han sido los fenómenos relacionados con la radiación electromagnética los que han permitido conocer sus propiedades y características, y además, desarrollar o verificar modelos a partir de estos.

Por lo que se refiere a los modelos de la luz, estos se han desarrollado de forma muy particular. Primero, se desarrolló una teoría clásica de campos descrita por las ecuaciones de Maxwell, la cual lograba explicar los fenómenos de difracción, reflexión, refracción y su interacción clásica con la materia, a este modelo se le conoce hoy en día como electrodinámica clásica. Dicho modelo de la radiación resultó satisfactorio hasta que a comienzos del siglo XX se evidenció el comportamiento cuántico de la luz, principalmente en los fenómenos de radiación de cuerpo negro, efecto fotoeléctrico y efecto Compton. Para entonces, fue Albert Einstein el que comprendió que la luz se comportaba como compuesta por paquetes discretos de energía $h\nu$, siendo ν la frecuencia de la onda electromagnética y h la constante de Planck, [Einstein \(1905\)](#).

Posteriormente, con el fin de explicar la interacción entre la radiación cuantizada y la

^{*}Por sus siglas del nombre en inglés *Quantum Field Theory*.

materia, Paul Dirac desarrolla el método de la segunda cuantización aplicándolo al Hamiltoniano del campo electromagnético, [Dirac \(1927\)](#). Es decir, la luz pasó de una descripción clásica a una descripción de teoría cuántica de campos, aparentemente, sin pasar por una descripción de una función de onda del fotón regida por una ecuación de onda cuántica relativista. Caso diferente al del electrón, que primero se estudió en un marco cuántico no relativista con la ecuación de Schrödinger, luego en una teoría cuántica relativista con la ecuación de Dirac y finalmente como un campo relativista cuantizado por medio de la teoría cuántica de campos.

Por otro lado, el estudio de la mecánica cuántica relativista del fotón es desarrollada en 1994 por Birula, quien encuentra una ecuación de onda para el fotón análoga a la ecuación de Dirac para fermiones, [Białynicki-Birula \(1994\)](#). Cabe agregar además, que dicha función de onda del fotón está directamente relacionada con el campo eléctrico y magnético por medio del vector de Riemann-Silberstein, de tal forma que la ecuación de onda del fotón es equivalente a las ecuaciones de Maxwell. Esto quiere decir, que la descripción *clásica* del campo electromagnético realmente equivale a una ecuación cuántica relativista para el fotón. Más aún, en trabajos previos del grupo de investigación en Óptica y Tratamiento de Señales de la Universidad Industrial de Santander, se logró mostrar la relación directa que existe entre el propagador cuántico de fotones y el propagador clásico de la radiación, por medio de una transformación de Fourier fraccionaria, [Santos, Castro, y Torres \(2018\)](#).

De manera que, análogo al tratamiento del electrón, también se puede estudiar el fotón como una partícula cuántica relativista por medio de una función de onda, o como una excitación de un campo relativista cuantizado en la teoría cuántica de campos. No obstante, estos dos modelos están directamente relacionados, ya que describiendo el estado de un fotón como un paquete de ondas en la segunda cuantización se puede obtener la función de onda del fotón por medio de una regla de extracción usando el operador de campo, como se muestra en [Smith y Raymer \(2007\)](#).

Sin embargo, existen algunos fenómenos cuánticos de la radiación que permanecen sin ser resueltos o que han sido abordados de forma superficial debido a las limitaciones de los modelos, un caso especial es el de la generación de la coherencia en el proceso de emisión estimulada.

La emisión estimulada es el proceso por el cual un átomo en un estado excitado decae a un estado de menor energía debido a la interacción con un fotón cercano, emitiendo de esta manera un fotón que es totalmente idéntico en energía, polarización y fase, al fotón que estimuló la emisión, tal como se argumenta en [Simon, Weihs, y Zeilinger \(2000\)](#). Este proceso se diferencia de la emisión espontánea, en la cual, el campo de vacío es el responsable de que el átomo decaiga, y por lo tanto el fotón emitido por este proceso tiene una energía, una polarización y una fase aleatoria, [Henry \(1982\)](#). Razón por la cual, se espera que el fotón emitido por emisión estimulada sea diferente al fotón emitido por emisión espontánea, aún en el caso en que estos tengan la misma energía.

Más aún, la emisión estimulada es el fenómeno fundamental para poder obtener radiación casi completamente coherente, es decir, el láser, ver [Milonni y Eberly \(1988\)](#). Esto es evidencia de la diferencia que existe entre la emisión estimulada y la emisión espontánea, ya que no es posible obtener radiación coherente por medio de esta última.

No obstante, el problema en el estudio del fenómeno de la emisión estimulada radica en que el modelo actual de interacción entre la luz y la materia de Jaynes-Cummings, el

cual está basado en el formalismo de la segunda cuantización del campo electromagnético, no permite distinguir entre el fenómeno de emisión espontánea y emisión estimulada. Y esto tiene principalmente dos razones: la primera razón, y la más importante, se debe a que el formalismo de la segunda cuantización en estados de Fock, no permite distinguir entre dos fotones que tengan la misma energía y polarización, y la segunda razón, es que el Hamiltoniano de interacción del modelo de Jaynes-Cummings se formula para fotones descritos como modos monocromáticos del campo cuantizado, es decir, para estados de Fock.

En este trabajo se aborda este problema, y con el fin de solucionarlo se traza el principal objetivo de construir una nueva descripción para el estado de un fotón el cual permita asociarle una fase a dicho estado, de tal forma que se pueda distinguir entre dos fotones aún en el caso en que estos tengan tanto la misma energía como polarización, y que además, permita sustentar el hecho de que dos fotones compartan la misma fase. Como consecuencia de esta descripción, se podrá distinguir el fotón emitido por emisión estimulada del fotón emitido por emisión espontánea, en un átomo de dos niveles con una transición electrónica de determinada energía. Y de esta forma, poder explicar la generación de dos fotones coherentes, los cuales son idénticos en energía, polarización y fase. Para que finalmente, se pueda explicar la generación de la coherencia temporal en el proceso de emisión estimulada.

Para resolver este problema, se deben solucionar las dos razones por las cuales existe. Para abordar el hecho de poder distinguir entre dos fotones aunque tengan la misma energía, se construye el estado de un fotón como un paquete de ondas de estados coherentes[†], de tal forma, que se le pueda asociar al estado de un fotón una energía, una polarización y además una fase. De tal manera, que sea posible distinguir dos fotones también por su fase, o poder argumentar que dos fotones comparten la misma fase. Para mostrar que esta descripción es válida, se propone una regla de extracción similar a la presentada en [Smith y Raymer \(2007\)](#) para paquetes de ondas en estados de Fock, con la cual se puede encontrar una función de onda que es solución a la ecuación de onda del fotón encontrada por Birula en [Białynicki-Birula \(1994\)](#), y que tiene el sentido físico que propone Sipe en [Sipe \(1995\)](#).

Una vez se describe el fotón como un paquete de ondas en estados coherentes, se reescribe el Hamiltoniano de interacción del modelo de Jaynes-Cummings usando operadores bosónicos de creación y aniquilación para los paquetes de ondas. De esta forma, se describe la creación de un fotón como un paquete de ondas y finalmente se puede distinguir entre un paquete de ondas emitido por emisión estimulada del emitido por emisión espontánea.

El contenido del trabajo se encuentra dividido en 3 capítulos. En el primer capítulo se revisa el estado del arte concerniente a la descripción cuántica de la radiación electromagnética, de manera que se parte de la cuantización canónica del campo electromagnético. Posteriormente, se explica en qué consiste la mecánica ondulatoria del fotón y finalmente se muestra cómo estas dos teorías son equivalentes para una descripción del fotón como un paquete de ondas de estados de Fock con la cual se puede encontrar la función de onda del fotón por medio de una regla de extracción.

En el segundo capítulo se introduce una nueva visión del fotón, descrito como un paquete de ondas de estados coherentes, y se demuestra que esta descripción es igual de válida a la descripción del fotón como un paquete de ondas en estados de Fock. Para llegar a esta descripción, primero se muestra que los paquetes de ondas de estados coherentes forman una

[†]Los estados coherentes de la radiación son los estados propios del operador campo eléctrico.

base que permite expandir todo el espacio de los estados de la radiación electromagnética cuantizada. Seguido, se determina el subconjunto de dicha base que representa el estado de un fotón y se estudia el valor esperado de los principales operadores que caracterizan la radiación electromagnética. Finalmente se estudia la representación de la función de onda del fotón en diferentes espacios, posteriormente se realiza una comparación entre el modelo del *Fotón de Fase* aquí propuesto y el modelo en estados de Fock, cerrando el capítulo con un resumen y un análisis de las principales consecuencias y características del *Fotón de Fase*.

En el tercer capítulo se realiza una discusión sobre el fenómeno de emisión estimulada y cómo el modelo del *Fotón de Fase* permite una mejor interpretación de la generación de la coherencia, debido a que se puede introducir la noción de que dos fotones se encuentran en fase, y por lo tanto, se consideran como dos fotones coherentes. Para finalizar el trabajo, se resumen todos los puntos y hallazgos importantes que resaltan en el desarrollo de este.

Capítulo 1

Teoría Cuántica del Campo Electromagnético

‘No problem can be solved from the same level of consciousness that created it.’
Albert Einstein

Albert Einstein fue el primero en entender y demostrar que la radiación electromagnética está constituida por paquetes discretos de energía $E = h\nu$ donde ν es la frecuencia de la radiación y h es la constante de Planck. En [Einstein \(1905\)](#), Einstein expone que a raíz del análisis estadístico al fenómeno de la radiación de cuerpo negro en [Planck \(1901\)](#), se puede concluir que la radiación electromagnética se comporta de forma termodinámica como si estuviese compuesta de un número de paquetes independientes de energía, y que además, con este entendimiento de la luz se logra explicar el fenómeno conocido como efecto fotoeléctrico. Posteriormente, con esta misma línea de pensamiento logró deducir la ley de radiación de cuerpo negro de Planck con una descripción de la absorción y emisión de estos cuantos de energía que constituyen la radiación electromagnética, [Einstein \(1917\)](#).

No obstante, para esa época la única teoría que lograba explicar la radiación electromagnética era la teoría *clásica*[†] desarrollada por James Clerk Maxwell. Esto representaba un grave problema ya que en dicha descripción no existen cantidades discretas, es decir, no era entendida como una teoría cuántica de la radiación. No fue sino hasta 1927 que se logró resolver este problema gracias al trabajo de Dirac, quien logró cuantizar la radiación electromagnética por medio de un método conocido ahora como segunda cuantización, y el cual aplicó al Hamiltoniano de la radiación en el estudio del fenómeno de interacción de absorción y emisión de estos cuantos de energía, [Dirac \(1927\)](#), que para ese año ya se les denominaban “fotones”. Gracias a su trabajo y a los aportes de Fock en [Fock \(1932\)](#), se sentó este nuevo tratamiento de la segunda cuantización que daría lugar a una futura teoría cuántica de campos o QFT (*Quantum Field Theory*) por sus siglas en inglés, la cual explica las interacciones de las partículas fundamentales, entendidas como excitaciones de un campo cuantizado, por medio de operadores de creación y aniquilación de partículas.

En su trabajo, Dirac consigue interpretar la radiación electromagnética como osciladores armónicos cuánticos, debido a que el Hamiltoniano corresponde con el de un oscilador armó-

[†]Realmente la teoría de Maxwell representa correctamente una teoría cuántica relativista de la radiación electromagnética.

nico cuántico de masa unitaria. De esta forma interpreta al fotón como un modo monocromático del campo electromagnético cuantizado, igualmente desarrolla la noción de interferencia de fotones por medio de una función de onda del fotón, Dirac (1981), función de onda que nunca llega a definir debido a que no existía alguna ecuación que determinara la mecánica del fotón, como existe la ecuación de Dirac para describir partículas relativistas de espín $s = 1/2$ con masa (Fermiones de Dirac), sin masa (Fermiones de Weyl) o cuya antipartícula es idéntica a la partícula (Fermiones de Majorana), Pal (2011).

En 1994, Iwo Białynicki-Birula va más allá del trabajo de Dirac de construir una ecuación de onda para el electrón y logra desarrollar una Mecánica Ondulatoria del Fotón llamada *Photon Wave Mechanics* (PWM), encontrando una ecuación de onda para el fotón siendo este una partícula especial que no posee masa, tiene un espín de 1 y además no posee antipartícula y puede tener helicidad[†] positiva o negativa, más aún, Birula demuestra que esta ecuación de onda para el fotón está directamente relacionada con las ecuaciones de Maxwell, Białynicki-Birula (1994). Como consecuencia de este trabajo, en 1996 Birula logra describir a profundidad la función de onda del fotón y las características ligadas a la mecánica cuántica relativista del fotón, Białynicki-Birula (1996).

Por otra parte y de forma simultánea, en 1995 John E. Sipe logra describir una ecuación de onda para los fotones partiendo de la relación momento-energía de Einstein, llegando a una descripción de la función de onda del fotón equivalente a la encontrada por Birula, Sipe (1995). Sin embargo, la gran diferencia es que Sipe sugiere y establece una conexión directa entre la Mecánica Ondulatoria del Fotón (PWM) y la segunda cuantización (teoría cuántica de campos) del campo electromagnético formulada por Dirac.

En definitiva, por un lado está la teoría cuántica de campos, es decir, el desarrollo de Dirac de la segunda cuantización del campo electromagnético, y por otro lado se tiene el desarrollo de la mecánica cuántica relativista por medio del modelo *Photon Wave Mechanics*. Este último define una función de onda del fotón que satisface una ecuación relativista para partículas de espín $s = 1$, sin masa y a la que se le refiere como ecuación óptica de Dirac, Barnett (2014), la cual además puede ser escrita de forma covariante y logra describir la electrodinámica clásica como se muestra en Tamburini y Vicino (2008). Más aún, está directamente relacionada con las ecuaciones de Maxwell por medio del vector de Riemann-Silberstein de tal forma que realmente las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones cuánticas relativistas para la función de onda del fotón, Białynicki-Birula y Białynicki-Birula (2013); Hawton (2019); Raymer y Smith (2005). Nuevamente, Einstein tiene razón al haberse referido a la teoría electromagnética de Maxwell como: “*the most profound and the most fruitful since the time of Newton*”.

Finalmente, estos dos modelos cuánticos de la radiación están directamente relacionados a tal punto que se puede obtener la función de onda del fotón (*Photon Wave Function*) del modelo *Photon Wave Mechanics* a partir de una descripción del fotón como un paquete de ondas conformado por modos monocromáticos del modelo de la segunda cuantización del campo electromagnético, Smith y Raymer (2007). De manera que las dos formulaciones se articulan en una interpretación del fotón como un paquete de ondas.

Esta formulación del fotón como un paquete de ondas permite además solucionar el problema de la localización del fotón. Aunque se demostró que no existe un operador posición

[†]La helicidad es la proyección del momento angular del fotón (espín) en la dirección del momento.

de la forma usual para el fotón, [Newton y Wigner \(1949\)](#); [Wightman \(1962\)](#), la evidencia observacional es que estos deben estar al menos parcialmente localizados en el espacio-tiempo. La formulación del paquete de ondas permite encontrar que la energía del fotón está parcialmente localizada en el espacio-tiempo, contrario a la descripción dada por Dirac de un modo monocromático el cual se encuentra totalmente deslocalizado, [Białynicki-Birula y Białynicki-Birula \(2009\)](#); [Chan, Law, y Eberly \(2002\)](#).

En este capítulo se revisan estos dos modelos de la teoría cuántica de la radiación: la teoría cuántica de campos y la mecánica ondulatoria del fotón; principalmente, enfocados en la descripción del fotón, y se toman como base para abordar el principal objetivo de este trabajo, el cual como se expone en la introducción, consiste en brindar una nueva luz sobre una descripción del fotón que permita entender la generación de la coherencia temporal en el proceso de emisión estimulada.

En la primera sección se explica en qué consiste la cuantización canónica de la radiación y se encuentran los operadores de campo eléctrico y campo magnético para un campo multimodal confinado en una cavidad. Igualmente se explican los estados propios del operador número o lo que es equivalente, del operador Hamiltoniano, los cuales son conocidos como estados de Fock. También se habla del campo de vacío y finalmente, se explica cómo se pasa de una descripción en modos discretos dentro de una cavidad a una descripción en modos continuos para estudiar la radiación fuera de cavidades.

En la segunda sección se muestra el desarrollo de la función de onda del fotón en la mecánica ondulatoria del modelo *Photon Wave Mechanics* (PWM), la cual se deriva de la relación de momento-energía de Einstein y por lo tanto tiene una forma parecida a la ecuación de Dirac pero aplicada a fotones, igualmente se muestra su relación directa con las ecuaciones de Maxwell.

Finalmente, en la tercera sección se presenta la relación directa que existe entre la mecánica ondulatoria del fotón (PWM) y la teoría cuántica de campos (QFT), más aún, se muestra cómo estas dos teorías de la radiación realmente convergen en una descripción única del fotón por medio de una regla de extracción.

1.1. Segunda Cuantización del Campo Electromagnético

La segunda cuantización o cuantización canónica del campo electromagnético es la teoría cuántica de campos (QFT) de la radiación, a veces también denominada *Quantum Electrodynamics* (QED). Esta teoría como todas las teorías cuánticas de campos se enfoca principalmente en las interacciones, en este caso entre la radiación y la materia, por medio de la descripción de creación y aniquilación de las partículas cuánticas, las cuales se interpretan como un estado excitado del campo cuántico, [Ryder \(1996\)](#).

En este formalismo se eleva a estatus de operador el Hamiltoniano de la radiación definiendo operaciones de conmutación entre dos operadores canónicamente conjugados del sistema, [Dirac \(1927, 1981\)](#). Como consecuencia de este procedimiento igualmente se eleva a estatus de operador el potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y por ende el campo eléctrico y magnético también, [Keller \(2016\)](#); [Loudon \(2000\)](#); [Shih \(2018\)](#).

Con el fin de cuantizar el campo electromagnético se parte de la descripción del potencial vectorial para un campo multimodal confinado en una cavidad de volumen V , teniendo en cuenta que tanto el potencial escalar como el vectorial satisfacen las siguientes ecuaciones de onda bajo el *gauge* de Lorentz y en ausencia de corrientes o cargas eléctricas,

$$\square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.1)$$

$$\square \phi(\mathbf{r}, t) = \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.2)$$

donde \square se conoce como el operador d'Alembertian y el *gauge* de Lorentz es la condición sobre la derivada de los potenciales que toma la siguiente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0, \quad (1.3)$$

y asumiendo además que el campo es transversal a la dirección de propagación, es decir se asume el *gauge* de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$, estas condiciones implican que el potencial escalar sea constante.

Es bien sabido que la solución de la ecuación de onda, **ecuación (1.1)**, son ondas armónicas, razón por la cual el potencial vectorial en la cavidad se puede expandir en armónicos de la siguiente manera

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left[\alpha_{\mathbf{k}\sigma}(0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \alpha_{\mathbf{k}\sigma}^*(0) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right], \quad (1.4)$$

donde la amplitud se toma arbitrariamente a conveniencia, \mathbf{k} es un modo de la cavidad, $\sigma = \pm$ es la helicidad[†], y $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$ representa la polarización de la onda electromagnética para un modo y helicidad dados.

Más aún, el campo eléctrico y magnético quedan descritos en términos del potencial vectorial por medio de las siguientes relaciones

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (1.6)$$

de tal forma que al calcular el campo eléctrico y magnético para posteriormente reemplazarlos en el cálculo del Hamiltoniano de la radiación en la cavidad, se obtiene

$$H = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \left[\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] d^3 \mathbf{r} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) \alpha_{\mathbf{k}\sigma}(t), \quad (1.7)$$

donde la evolución temporal de la variable está dada por $\alpha(t) = \alpha(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$, y por consiguiente que la energía de la radiación en el volumen dado sea independiente tanto de la posición como del tiempo. La energía toma esta forma debido a la amplitud que se toma a conveniencia en la expresión del potencial vectorial.

[†]La helicidad es la proyección del momento angular del fotón en la dirección del momento $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$.

Ahora, para definir el Hamiltoniano en términos de variables canónicamente conjugadas se expresa α en términos de las variables Q y P , de la siguiente manera

$$\alpha_{\mathbf{k}\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}}Q_{\mathbf{k}\sigma}(t) + iP_{\mathbf{k}\sigma}(t)), \quad (1.8)$$

de tal forma que el Hamiltoniano se puede reescribir como,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\sigma} \left(P_{\mathbf{k}\sigma}^2(t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}\sigma}^2(t) \right), \quad (1.9)$$

donde se puede mostrar que este Hamiltoniano satisface las ecuaciones de Hamilton-Jacobi para las variables Q y P , las cuales representan en un sistema clásico la posición y el momento canónico, respectivamente. No obstante, en este caso no representa la posición y el momento de la radiación sino que están directamente relacionadas con el campo eléctrico y magnético. Además, este Hamiltoniano corresponde con la energía de osciladores armónicos de masa unitaria.

Ahora, para cuantizar el Hamiltoniano basta con elevar las variables canónicamente conjugadas Q y P a estatus de operador definiendo la siguiente relación de conmutación característica de operadores canónicamente conjugados

$$\left[\hat{Q}_{\mathbf{k}\sigma}(t), \hat{P}_{\mathbf{k}'\sigma'}(t) \right] = i\hbar \hat{I} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (1.10)$$

estos operadores hermíticos, \hat{Q} y \hat{P} , juegan el papel de operador posición y operador de momento canónico, sin embargo, en el tratamiento de la radiación estos operadores están directamente relacionados con las cantidades observables del campo eléctrico y magnético. Como consecuencia de elevar estas variables a estatus de operador, la variable α se eleva a estatus de operador tomando la forma

$$\alpha_{\mathbf{k}\sigma}(t) \implies \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\omega_{\mathbf{k}} \hat{Q}_{\mathbf{k}\sigma}(t) + i \hat{P}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \right), \quad (1.11)$$

$$\alpha_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) \implies \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\omega_{\mathbf{k}} \hat{Q}_{\mathbf{k}\sigma}(t) - i \hat{P}_{\mathbf{k}\sigma}(t) \right), \quad (1.12)$$

los cuales se conocen como operadores escalera o aniquilación y creación, respectivamente.

Los operadores escalera satisfacen la siguiente relación de conmutación y dependencia temporal

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger(t) \right] = \hat{I} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (1.13)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}, \quad (1.14)$$

donde \hat{I} representa el operador identidad. Finalmente los operadores asociados a las variables canónicamente conjugadas se escriben en términos de los operadores escalera como

$$\hat{Q}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t) \right), \quad (1.15)$$

$$\hat{P}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = \frac{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}}{2i} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t) \right), \quad (1.16)$$

y se definen además, los operadores de cuadratura los cuales se obtienen al adimensionalizar los operadores conjugados \hat{Q} y \hat{P} ,

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{2} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right), \quad (1.17)$$

$$\hat{x}_2 = \frac{1}{2i} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right). \quad (1.18)$$

Estos operadores de cuadratura se utilizan para construir el espacio de fase también conocido como espacio de cuadratura, donde cada eje de dicho espacio bidimensional corresponde con el valor esperado de uno de estos operadores, y por lo tanto se utilizan para encontrar la representación de los estados de la radiación en el espacio de fase.

Por otra parte, el operador Hamiltoniano se puede expresar en términos del operador creación y aniquilación como

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right), \quad (1.19)$$

el cual corresponde con el Hamiltoniano de un oscilador armónico cuántico multimodal, Cohen-Tannoudji, Diu, y Laloe (1978); Loudon (2000); Nouredine (2009). Es decir, la radiación electromagnética se comporta como un oscilador armónico cuántico donde el campo eléctrico y magnético representan las variables canónicamente conjugadas. Finalmente, en términos de los operadores escalar el operador potencial vectorial queda de la forma,

$$\hat{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(0) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)} \right], \quad (1.20)$$

y haciendo uso de la ecuación (1.5) y la ecuación (1.6), el operador campo eléctrico y campo magnético se expresan como,

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(0) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)} \right], \quad (1.21)$$

$$\hat{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k},\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0V}} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}) \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(0) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)} \right], \quad (1.22)$$

donde $\mathbf{k} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ es el vector unitario en dirección del vector de onda. Donde además se definen los operadores positivos y negativos como,

$$\begin{aligned} \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{\mathbf{k},\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} = \left(\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \right)^\dagger, \\ \hat{B}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k},\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0V}} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} = \left(\hat{B}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \right)^\dagger. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Bajo este formalismo de la teoría cuántica de campos, se describe a la radiación como estados pertenecientes al espacio de Hilbert usando la notación de Dirac, entre las descripciones más importantes de la radiación están los estados de Fock o estados de ocupación y los estados coherentes. A continuación, se revisa el estado de la radiación en estados de Fock.

Estados de Fock

Denotados como $|n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle$, representan los estados propios del operador número definido como el producto del operador creación y el operador aniquilación, $\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ donde \mathbf{k} representa el modo y σ la helicidad del fotón. Es decir, dichos estados satisfacen

$$\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} |n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle = n_{\mathbf{k}\sigma} |n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle, \quad (1.24)$$

donde el autovalor $n_{\mathbf{k}\sigma}$ representa el *número de fotones* en el modo \mathbf{k} y helicidad σ . Los estados de Fock o estados número forman una base ortonormal, [ecuación \(1.25\)](#), y además, constituyen una base completa dada por la relación de cierre, [ecuación \(1.26\)](#),

$$\langle n_{\mathbf{k}'\sigma'} | n_{\mathbf{k}\sigma} \rangle = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (1.25)$$

$$\sum_{n_{\mathbf{k}\sigma}} |n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle \langle n_{\mathbf{k}\sigma}| = 1, \quad (1.26)$$

lo que significa que los estados de Fock permiten expandir cualquier estado $|\psi\rangle$ del espacio de Hilbert de la radiación de la siguiente forma,

$$|\psi\rangle = \sum_{n_{\mathbf{k}\sigma}} |n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle \langle n_{\mathbf{k}\sigma} | \psi \rangle. \quad (1.27)$$

Por otra parte, se puede reemplazar la definición del operador número en la expresión del Hamiltoniano, de tal forma que al aplicarlo al estado número se obtiene

$$\hat{H} |n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right) |n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right) |n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle, \quad (1.28)$$

donde es evidente que los estados número también son estados propios del operador Hamiltoniano.

Con ayuda del Hamiltoniano y la relación de conmutación, [ecuación \(1.13\)](#), se puede mostrar que al aplicar el operador creación $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ y aniquilación $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ a los estados de Fock, se obtiene

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger |n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\sigma} + 1} |n_{\mathbf{k}\sigma} + 1\rangle, \quad (1.29)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} |n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\sigma}} |n_{\mathbf{k}\sigma} - 1\rangle, \quad (1.30)$$

por lo tanto, al aplicar el operador creación, el estado se incrementa en un *fotón**, y al aplicar el operador aniquilación el estado disminuye en un *fotón*, [Cohen-Tannoudji y cols. \(1978\)](#); [Fox \(2006\)](#); [Gerry y Knight \(2005\)](#); [Shih \(2018\)](#). Además, haciendo uso del operador creación, se puede expresar el estado $|n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle$ de la siguiente manera

$$|n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle = \frac{\left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right)^{n_{\mathbf{k}\sigma}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}\sigma}!}} |\text{vac}\rangle, \quad (1.31)$$

*Los fotones descritos en este formalismo no representan correctamente el estado de un fotón, contrario a como un paquete de ondas sí lo hace.

donde $|\text{vac}\rangle$ representa el estado de cero fotones o estado de vacío para cualquier modo \mathbf{k} y helicidad σ , este estado satisface

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} |\text{vac}\rangle = 0, \quad (1.32)$$

este resultado se obtiene de la ecuación (1.30) y su significado físico es el hecho de que no existen estados de Fock negativos para la radiación.

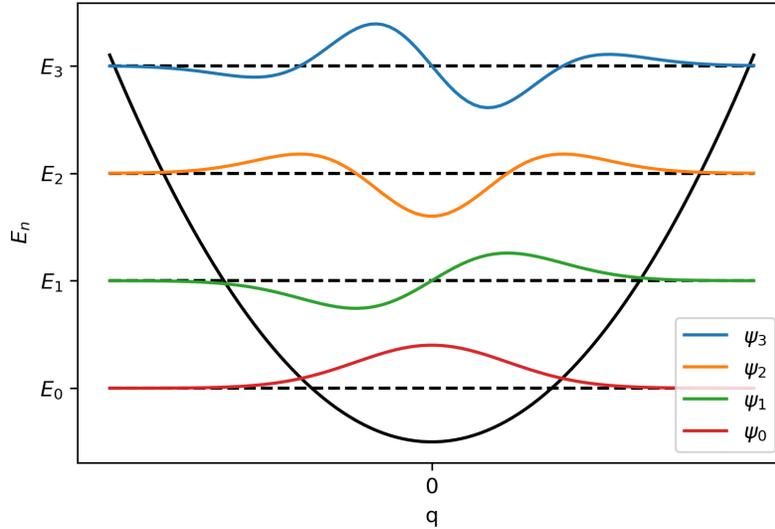
La representación de los estados número en el espacio Q y el espacio P^\dagger está descrita por funciones Hermite-Gauss, ver figura 1.1; la función de onda para el estado $|n\rangle$ en determinado modo, se escribe como

$$\psi_n(q) = \langle Q|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\pi \hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\omega_{\mathbf{k}} q^2}{2\hbar}} H_n \left(\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\hbar}} q\right), \quad (1.33)$$

donde H_n son los polinomios de Hermite y $\omega_{\mathbf{k}}$ es la frecuencia asociada con el modo \mathbf{k} , Cohen-Tannoudji, Dupont-Roc, y Grynberg (1997); Gerry y Knight (2005); Nouredine (2009).

Figura 1.1

Función de onda de los estados de Fock en el espacio Q



Nota. Las funciones de onda en el espacio de fase de la radiación electromagnética está descrita por las funciones de Hermite-Gauss.

Para un campo multimodal, los estados propios del operador número es el producto tensorial de todos los estados propios asociados a cada modo, es decir

$$|\{n_{\mathbf{k}\sigma}\}\rangle \equiv |n_{\mathbf{k}_1\sigma}\rangle |n_{\mathbf{k}_2\sigma}\rangle \dots |n_{\mathbf{k}_j\sigma}\rangle \dots \quad (1.34)$$

Dicho campo multimodal tiene $n_{\mathbf{k}_1\sigma}$ fotones en el modo \mathbf{k}_1 y la helicidad σ , $n_{\mathbf{k}_2\sigma}$ fotones en el modo \mathbf{k}_2 y la helicidad σ , etc. Haciendo uso del operador creación se puede generar a

[†]Estos espacios son los asociados a las variables canónicamente conjugadas, Q y P , de la radiación electromagnética en la cavidad.

partir del estado de vacío $|\text{vac}\rangle$, todos los estados número para un campo multimodal de la siguiente forma

$$|\{n_{\mathbf{k}\sigma}\}\rangle = \prod_{\mathbf{k},\sigma} \frac{(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}\sigma}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}\sigma}!}} |\text{vac}\rangle, \quad (1.35)$$

representando así la generalización de la [ecuación \(1.31\)](#). Ahora, se presenta la descripción del estado de vacío y algunas de sus características.

Vacío Cuántico

Se denomina campo de vacío al estado número de cero fotones $|0\rangle \equiv |\text{vac}\rangle$, recibe su nombre debido a que existen desviaciones del campo electromagnético incluso en ausencia de fotones. El valor esperado del operador campo eléctrico, [ecuación \(1.21\)](#), para el campo de vacío es cero,

$$\langle 0 | \hat{E} | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} i\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \left(\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger | 0 \rangle \right) = 0, \quad (1.36)$$

en general, el valor esperado del operador campo eléctrico para un estado de Fock es cero, es decir, $\langle n | \hat{E} | n \rangle = 0$. Sin embargo, el valor esperado del cuadrado del campo es diferente de cero,

$$\langle 0 | \hat{E}^2 | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} \langle 0 | 1 + 2\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}, \quad (1.37)$$

donde se hizo uso de la [ecuación \(1.13\)](#) y [ecuación \(1.32\)](#). Se concluye así que existen desviaciones del campo electromagnético aún cuando no hay fotones presentes.

Otra característica del estado de vacío es que su energía es diferente de cero, usando la [ecuación \(1.28\)](#), se tiene que la energía es

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \hbar\omega_{\mathbf{k}}, \quad (1.38)$$

la cual es infinita. Está demostrado experimentalmente que el campo de vacío es una entidad física y es el responsable de diferentes fenómenos como el efecto Casimir y el corrimiento de Lamb, [Gerry y Knight \(2005\)](#); [Itzykson y Zuber \(1980\)](#).

De Modos Discretos a Modos Continuos

Para poder pasar de modos discretos en una cavidad a modos continuos en el espacio libre se debe construir la representación integral de los operadores teniendo en cuenta el número de modos, esto independientemente de los dos grados de libertad que otorga la helicidad de los fotones. De acuerdo con las condiciones de frontera dentro de la cavidad, se tiene que cualquier modo está definido por,

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (m_x, m_y, m_z), \quad (1.39)$$

donde, L es el tamaño de la cavidad que se asume cúbica, y los valores m_i son números enteros que determinan el modo. De tal forma que el número de modos presentes en la cavidad en un intervalo infinitesimal es,

$$dm = \frac{L^3}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k, \quad (1.40)$$

siendo V el volumen de la cavidad. Ahora, tomando la integral sobre todos los valores de \mathbf{k} posibles, el número total de modos es,

$$m = \int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k, \quad (1.41)$$

de tal forma que para pasar de sumatoria a integral se realiza el siguiente cambio,

$$\sum_{\mathbf{k}} \implies \int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k, \quad (1.42)$$

esta integral de modos continuos para la descripción de los estados en el espacio libre es la que se adoptará en este trabajo.

Este desarrollo se puede llevar a una descripción en términos de la frecuencia, para esto se escribe el vector número de onda en coordenadas esféricas, de tal forma que se puede escribir el diferencial de modos, ecuación (1.40), en coordenadas esféricas

$$dm = \frac{V}{(2\pi)^3} k dk \sin \theta d\theta d\phi, \quad (1.43)$$

con k representando la magnitud del número de onda, el cual se relaciona con la frecuencia como $\omega = kc$, entonces

$$dm = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{c^3} d\omega \sin \theta d\theta d\phi, \quad (1.44)$$

si se asume que la distribución angular de los modos es uniforme, de tal forma que al realizar la integral de volumen se obtiene,

$$m = \int \frac{V\omega^2}{2\pi^2 c^3} d\omega, \quad (1.45)$$

las ecuaciones (1.41) y (1.45) son equivalentes en el caso en que los modos estén distribuidos de manera uniforme en los ejes angulares, la ventaja del análisis en frecuencia es que permite realizar un análisis espectral el cual es implementado en los siguientes capítulos.

Bajo esta descripción un operador en modos discretos se escribe en modos continuos de la siguiente manera,

$$\sum_{\mathbf{k}} f(\hat{a}_{\mathbf{k}}) \implies \int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k f(\hat{a}_{\mathbf{k}}) = \int \frac{V\omega^2}{2\pi^2 c^3} d\omega f(\hat{a}_{\omega_{\mathbf{k}}}), \quad (1.46)$$

y donde además la distribución de Dirac actúa de la siguiente manera

$$\int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k f(\hat{a}_{\mathbf{k}}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = f(\hat{a}_{\mathbf{k}'}), \quad (1.47)$$

estos dos últimos resultados son usados posteriormente.

1.2. Mecánica Ondulatoria del Fotón

El desarrollo de una ecuación de onda para el fotón fue realizado por Birula en [Białynicki-Birula \(1994\)](#) partiendo de las ecuaciones de Maxwell, y por Sipe en [Sipe \(1995\)](#) por medio de la relación momento-energía de Einstein. En esta sección mostraremos cómo se deduce la ecuación de onda del fotón de la forma en que lo hizo Sipe, y además se realiza un análisis de la función de onda del fotón que es solución a esta ecuación, el desarrollo que se muestra acá es presentado de forma concisa en [Raymer y Smith \(2005\)](#).

Partiendo de la relación de Einstein para una partícula sin masa en reposo y multiplicando ambos lados por la función de onda de la partícula $\Psi(\mathbf{p}, E)$, se obtiene

$$E\Psi(\mathbf{p}, E) = \sqrt{c^2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}\Psi(\mathbf{p}, E), \quad (1.48)$$

donde la función de onda es un campo vectorial de tres componentes debido a que el fotón posee espín $s = \pm 1$. Posteriormente, se define el operador $\hat{C} = i\mathbf{p} \times$, de tal manera que

$$\hat{C}\hat{C}\Psi = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}\Psi - \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \Psi), \quad (1.49)$$

y asumiendo que el campo vectorial es transversal, es decir $\mathbf{p} \cdot \Psi = 0$, se llega a que la función de onda satisface,

$$E\Psi(\mathbf{p}, E) = ic\mathbf{p} \times \Psi(\mathbf{p}, E). \quad (1.50)$$

Ahora, realizando una transformación del espacio de momento al espacio de posición, donde se debe agregar el término $E = \sqrt{c|\mathbf{p}|}$ en la transformación para que la función de onda se pueda entender como una localización espacial de la energía del fotón, idea original de Sipe en [Sipe \(1995\)](#), y haciendo también la transformación del espacio de energía al espacio del tiempo por una transformación usual de Fourier, la función de onda en el espacio-tiempo es

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int dE \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \delta(E - c|\mathbf{p}|) \sqrt{c|\mathbf{p}|} \Psi(\mathbf{p}, E) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)/\hbar}, \quad (1.51)$$

donde el delta de Dirac se introduce por la relación que existe entre la energía y el momento del fotón. De esta forma, se puede reescribir la ecuación de onda del fotón para la función de onda en el espacio-tiempo como

$$i\hbar\partial_t\Psi(\mathbf{r}, t) = c\hbar\nabla \times \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.52)$$

además, se pueden usar las matrices de Spin $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ para el espín $s = 1$ en una representación no diagonal, [Białynicki-Birula \(1994\)](#), y usar la relación $\mathbf{S} \cdot \nabla = i\nabla \times$, para que finalmente la ecuación de onda se pueda escribir en términos de las matrices de Spin como,

$$i\hbar\partial_t\Psi(\mathbf{r}, t) = c \left(\mathbf{S} \cdot \frac{\hbar}{i} \nabla \right) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.53)$$

esto para el caso de helicidad positiva. Debido a que el fotón no tiene antipartícula no se puede asociar la helicidad positiva con el fotón y la helicidad negativa con el *anti-fotón* o viceversa, por lo tanto un fotón puede tener helicidad positiva o negativa ($\sigma = \pm$) los cuales se relacionan con los dos estados de polarización circular del fotón, polarización izquierda o

derecha. Entonces, para cualquier helicidad ya sea positiva o negativa, la ecuación de onda toma la forma

$$i\hbar\partial_t\Psi^\pm(\mathbf{r}, t) = \pm c \left(\mathbf{S} \cdot \frac{\hbar}{i}\nabla \right) \Psi^\pm(\mathbf{r}, t). \quad (1.54)$$

Con el fin de unificar la función de onda del fotón para ambas helicidades, Białyński-Birula (1994) construye la función de onda de seis componentes conformada por una parte superior e inferior de la siguiente manera

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \Psi^+(\mathbf{r}, t) \\ \Psi^-(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (1.55)$$

la cual satisface la ecuación generalizada del fotón

$$i\hbar\partial_t\mathcal{F} = c\rho_3 \left(\mathbf{S} \cdot \frac{\hbar}{i}\nabla \right) \mathcal{F}, \quad (1.56)$$

donde ρ_3 es una matriz de Pauli, la cual produce el signo positivo si actúa en la componente superior de \mathcal{F} y un signo negativo si actúa sobre la componente inferior. Además, este vector \mathcal{F} satisface,

$$\nabla \cdot \mathcal{F} = 0, \quad (1.57)$$

y es necesaria la condición entre las componentes de la función de onda,

$$\mathcal{F} = \rho_1\mathcal{F}^* = \begin{pmatrix} \Psi^-(\mathbf{r}, t) \\ \Psi^+(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}^*, \quad (1.58)$$

donde la matriz de Pauli ρ_1 intercambia las componentes de la función de onda, ver Białyński-Birula (1994, 1996).

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío se pueden obtener usando esta ecuación de onda si se define a la función de onda en términos del vector de Riemman-Silberstein, tal como mostró Birula en su primer trabajo Białyński-Birula (1994), y luego profundiza en la importancia de este vector en la descripción cuántica y clásica de la radiación, Białyński-Birula y Białyński-Birula (2013). La función de onda del fotón como el vector de Riemman-Silberstein se expresa de la siguiente manera

$$\Psi^+(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + i\frac{1}{\sqrt{2\mu}}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (1.59)$$

donde las ecuaciones de divergencia de los campos se pueden obtener con la condición expuesta anteriormente para la divergencia de la función de onda,

$$\nabla \cdot \Psi^+(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{cases}, \quad (1.60)$$

y la ecuaciones de los rotacionales se puede obtener aplicando la ecuación (1.52),

$$i \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\partial_t\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + i\frac{1}{\sqrt{2\mu}}\partial_t\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) = c \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + i\frac{1}{\sqrt{2\mu}}\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right), \quad (1.61)$$

y separando la parte real y la parte imaginaria de este resultado, se obtienen las otras dos ecuaciones de Maxwell,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\tag{1.62}$$

Por otra parte, la energía del fotón se puede calcular como,

$$H = \int_{R^3} d^3r \Psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R^3} [\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] d^3r,\tag{1.63}$$

que equivale a la descripción clásica de la energía de la radiación. De tal forma que, como analiza Sipe en su trabajo, [Sipe \(1995\)](#), el significado de la función de onda al cuadrado multiplicado por un delta de volumen y normalizado por la energía total representa la probabilidad de encontrar la energía del fotón en el intervalo de posición $(\mathbf{r}, \mathbf{r} + d^3r)$ para un instante de tiempo t , es decir

$$P(\mathbf{r}, t) = \frac{\Psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t)}{H} d^3r,\tag{1.64}$$

a diferencia de otras partículas relativistas, el cuadrado de la función de onda del fotón no representa la probabilidad de la posición de la masa de la partícula, puesto que no posee masa inercial, sino que esta representa la probabilidad de encontrar la energía de la partícula.

1.3. El Fotón como un Paquete de Ondas y la Regla de Extracción

En las secciones anteriores se revisó dos formas de abordar el estudio del campo electromagnético, en la primera sección se estudió como un campo cuántico relativista en la teoría cuántica de campos (QFT), y en la segunda sección como una partícula relativista descrita por una función de onda la cual se rige por una ecuación de onda relativista. Sin embargo, no existe una única teoría cuántica relativista que logre describir a totalidad los fenómenos de una partícula fundamental. La teoría cuántica de campos permite entender las interacciones entre partículas a altas energías por medio de interacciones entre campos y es la que soporta el modelo estándar de la física de partículas, mientras que la mecánica cuántica relativista permite entender fenómenos como la interferencia, los orbitales atómicos por medio de la función de onda de los electrones, y aún en el límite no relativista permite entender fenómenos como la magnetización, entre otros. Para el caso específico de la radiación esta descripción mecano-cuántica logra describir toda la electrodinámica clásica por medio del vector de Riemman-Silberstein, [Tamburini y Vicino \(2008\)](#).

En esta sección, se muestra la relación directa que existe entre la teoría cuántica de campos aplicada a la radiación y la mecánica cuántica relativista del fotón. Smith & Raymer proponen en [Smith y Raymer \(2007\)](#) un regla de extracción por medio de la cual, partiendo de una descripción del fotón como un paquete de ondas en la teoría cuántica de campos se logra obtener la función de onda del fotón de la mecánica ondulatoria del fotón. a continuación,

se presenta en qué consiste este procedimiento y el significado físico de esta descripción del fotón.

En la primera sección se revisaron los estados propios del Hamiltoniano los cuales reciben el nombre de estados de Fock, denotados $|n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle$, donde además se dice que $n_{\mathbf{k}\sigma}$ representa el número de fotones presentes en el modo \mathbf{k} y helicidad σ . Se podría pensar entonces que el estado de un fotón estaría descrito por $|\psi\rangle = |1_{\mathbf{k},\sigma}\rangle$, sin embargo, describir el estado de un fotón como un modo armónico del campo implicaría una total deslocalización del fotón en el espacio debido a que una onda armónica se extiende indefinidamente, además, debido al principio de incertidumbre entre energía y tiempo, una energía totalmente definida requeriría de un proceso de tiempo infinito, caso contrario a lo que ocurre en la emisión de fotones cuando un átomo decae.

Por lo tanto, una mejor descripción que solvente estos problemas, sería la descripción del estado de un fotón como un paquete de ondas compuesto por varios vectores de ondas tal como se muestra en [Smith y Raymer \(2007\)](#) y en [Keller \(2016\)](#), el cual está ponderado por una función de peso, es decir

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) |\text{vac}\rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) |1_{\sigma}(\mathbf{k})\rangle, \quad (1.65)$$

donde además, la función de peso tiene la condición de ser cuadrado integrable debido a la condición de normalización del estado,

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) = 1. \quad (1.66)$$

Estos estados tienen el valor esperado del operador número igual a uno, donde el operador toma la forma

$$\hat{N} = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}), \quad (1.67)$$

de tal manera que al calcular el valor esperado realizando el paso a paso del cálculo,

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\hat{N}|\Psi\rangle &= \sum_{\sigma',\sigma''} \int \frac{V d^3 k'}{(2\pi)^3} \int \frac{V d^3 k''}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma''}^{\dagger}(\mathbf{k}'') \psi_{\sigma'}(\mathbf{k}') \langle 1_{\sigma''}(\mathbf{k}'') | \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) | 1_{\sigma'}(\mathbf{k}') \rangle \\ \langle\Psi|\hat{N}|\Psi\rangle &= \sum_{\sigma',\sigma''} \int \frac{V d^3 k'}{(2\pi)^3} \int \frac{V d^3 k''}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma''}^{\dagger}(\mathbf{k}'') \psi_{\sigma'}(\mathbf{k}') \langle 1_{\sigma''}(\mathbf{k}'') | \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') | 1_{\sigma'}(\mathbf{k}') \rangle \\ \langle\Psi|\hat{N}|\Psi\rangle &= \sum_{\sigma,\sigma''} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{V d^3 k''}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma''}^{\dagger}(\mathbf{k}'') \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) \langle 1_{\sigma''}(\mathbf{k}'') | 1_{\sigma}(\mathbf{k}) \rangle \\ \langle\Psi|\hat{N}|\Psi\rangle &= \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) = 1, \end{aligned} \quad (1.68)$$

donde se ha tenido en cuenta que los operadores solo operan para un modo, por lo tanto aparecen deltas de Dirac y Kronecker y luego al cerrar el producto entre los estados de Fock igualmente por la condición de ortogonalidad de estos, aparecen de nuevo deltas de Dirac y Kronecker, de tal forma que el valor esperado se reduce a la misma condición de

normalización. Se ha realizado el cálculo paso a paso para dejar claro cómo actúan los delta de Dirac en esta representación integral de los operadores, tal como se había mostrado en la [sección 1.1](#). En los cálculos de ahora en adelante se obviarán algunos de estos pasos por simplicidad.

De forma análoga se puede calcular el valor esperado de la energía para este estado haciendo uso del operador Hamiltoniano para modos continuos, el cual toma la forma

$$\hat{H} = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}), \quad (1.69)$$

y por lo tanto, el valor esperado de la energía del paquete de ondas es,

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \psi_{\sigma}(\mathbf{k}). \quad (1.70)$$

Ahora, se muestra cómo se puede obtener la función de onda del fotón en el espacio-tiempo por medio de la regla de extracción de tal forma que dicha función sea solución a la ecuación de onda del fotón, [ecuación \(1.52\)](#).

Regla de Extracción

Esta es propuesta por Smith & Raymer en [Smith y Raymer \(2007\)](#) y consiste en usar el operador de campo, el cual se define para frecuencias positivas como

$$\hat{\Psi}_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\epsilon_0}{2} \right)^{1/2} \left(\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + i\sigma c \hat{\mathbf{B}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right), \quad (1.71)$$

donde los operadores campo eléctrico y magnético positivos y negativos se definieron en la [ecuación \(1.23\)](#). Para modos continuos el operador de campo para frecuencias positivas queda de la forma,

$$\hat{\Psi}_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{4V} \right)^{1/2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \left(\mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) + i\sigma \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) \right) \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}). \quad (1.72)$$

De acuerdo con Smith & Raymer, la función de onda del fotón se puede encontrar como la matriz de elementos del operador de campo entre el estado de vacío y el estado del fotón como un paquete de ondas, la función está dada por

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \langle \text{vac} | \hat{\Psi}_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \Psi \rangle, \quad (1.73)$$

de tal forma que al realizar este cálculo, ellos obtiene la función de onda

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{4V} \right)^{1/2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \left(\mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) + i\sigma \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) \right), \quad (1.74)$$

además, tomando una base para la polarización de la forma, $\mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) = [\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) + i\sigma \mathbf{e}_2(\mathbf{k})]/\sqrt{2}$, donde los vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|)$ forman un sistema coordenado diestro, y por lo tanto se satisface que

$$\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) = -i\sigma \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}), \quad (1.75)$$

de tal forma que la función de onda del fotón se puede escribir como

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{V} \right)^{1/2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}), \quad (1.76)$$

esta función es solución a la ecuación de onda del fotón presentada anteriormente, es decir,

$$i\hbar \partial_t \Psi(\mathbf{r}, t) = c\hbar \nabla \times \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.77)$$

Se concluye entonces que esta regla de extracción descrita por Smith & Raymer permite encontrar una función de onda a partir de la descripción de fotón como un paquete de ondas, donde dicha función representa la función de onda del fotón. Además, vale comparar las funciones de ondas mostradas en la [ecuación \(1.51\)](#) y la [ecuación \(1.76\)](#), donde la similitud entre estas es evidente. No obstante, este método no permite encontrar las funciones de onda por separado para cada helicidad es decir $\Psi^{\pm}(\mathbf{r}, t)$, tal como lo plantea originalmente Birula en [Białyński-Birula \(1994, 1996\)](#).

En el próximo capítulo se describe el estado de un fotón como un paquete de ondas de estados coherentes en lugar de estados de Fock, además, se estudian las características de esta descripción así como el valor esperado de los operadores más relevantes y finalmente se encuentra la función de onda para dichos estados del fotón por medio de una regla de extracción modificada que permita encontrar la función de onda para cada helicidad de tal forma que concuerde con la descripción de Birula.

Capítulo 2

El Fotón de Fase

*‘What I cannot create, I do not understand.’
Richard Feynman*

Los estados coherentes fueron introducidos en el estudio del oscilador armónico cuántico por Erwin Schrödinger como un estado de dicho sistema cuya evolución temporal se asemeja al comportamiento de un oscilador armónico clásico, por lo que se dice que representan los estados *más clásicos*[†], [Schrödinger \(1926\)](#). Posteriormente, en 1963 con el estudio de la coherencia cuántica, Glauber introduce de manera natural los estados coherentes en la segunda cuantización de la radiación electromagnética debido a que el Hamiltoniano de la radiación tiene la forma de un oscilador armónico cuántico de masa unitaria, [Glauber \(1963a\)](#).

Estos también reciben el nombre de estados desplazados del vacío, debido a que su función de onda en el espacio de fase es una Gaussiana desplazada del origen, mientras que la función de onda del estado de mínima energía (el vacío cuántico) es una Gaussiana centrada en el origen, ver [figura 2.1](#). Vale la pena aclarar que el espacio de fase del oscilador armónico cuántico estudiado por Schrödinger está conformado por las variables conjugadas del sistema: El espacio de posición (\mathbf{r}) y el espacio de momento (\mathbf{p}). Sin embargo, las variables conjugadas de la radiación no corresponden con el espacio de posición y de momento, sino con las variables Q y P las cuales están directamente relacionadas con el campo eléctrico y magnético, tal como se mostró en la [sección 1.1](#).

Más aún, estos estados se denominan coherentes debido a que tienen la máxima coherencia posible para todo orden de coherencia de acuerdo con la teoría de la coherencia cuántica formulada por Glauber, [Glauber \(1963b\)](#). Esto es consecuencia de que su estadística se describe por una distribución de Poisson para el valor esperado del operador número, [Titulaer y Glauber \(1966\)](#). Cabe agregar que, los estados coherentes son normalizados, no ortogonales y completos, de tal manera que cualquier estado de la radiación se puede expandir en términos de estados coherentes, característica que se utiliza en este capítulo para describir el estado de un fotón como un paquete de ondas de estados coherentes.

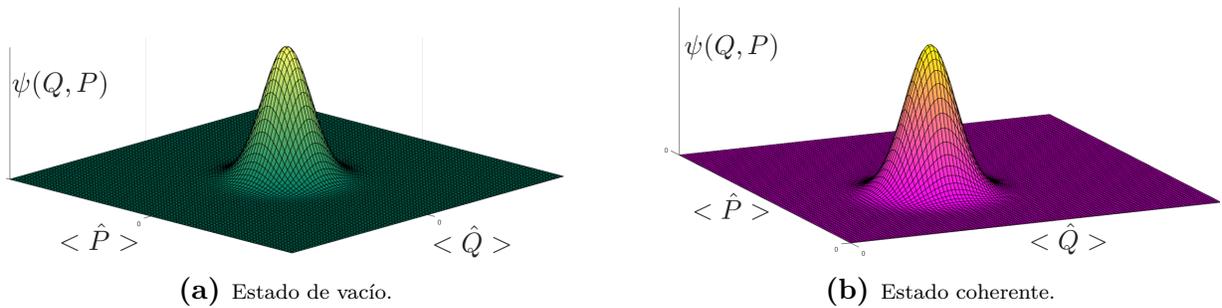
En este capítulo se muestra que los estados coherentes pueden ser usados para expresar el estado de un fotón como un paquete de ondas y que esta descripción es análoga e igual de válida a la descripción en estados de Fock presentada en la [sección 1.3](#). Además, se realiza

[†]Aunque su comportamiento sea similar al de un sistema clásico, no dejan de ser estados cuánticos.

un análisis a las características más relevantes y que distinguen esta descripción en estados coherentes a la descripción en estados de Fock. En trabajos recientes se hace un desarrollo parecido al que se muestra en este trabajo, en donde el autor argumenta que esta descripción en estados coherentes brinda una nueva panorámica sobre la localización del fotón por medio del valor esperado del campo electromagnético, [Hoffmann \(2020\)](#). Sin embargo, el estudio que se presenta en este trabajo se centra principalmente en la generación de la coherencia por medio del proceso de emisión estimulada, tema que es analizado en el [capítulo 3](#).

Figura 2.1

Representación en el espacio de cuadratura



Nota. a) Gaussiana centrada en el origen, la desviación de la Gaussiana representa la incertidumbre del campo electromagnético. (b) Gaussiana desplazada del origen, la incertidumbre del campo electromagnético es igual a la del estado de vacío.

En la primera sección se aborda la construcción de una base de paquetes de ondas en el espacio de momento* con estados coherentes, es decir, con estados desplazados de vacío en el espacio de fase. Por lo tanto, se define un conjunto de elementos que representa una base y se determina la condición de normalización, de ortogonalidad y la relación de cierre que permita expandir cualquier estado de la radiación en términos de los elementos de esta base.

En la segunda sección se determina el subconjunto de paquetes de ondas que describen el estado de un fotón y que denominamos como fotones de fase. La principal condición que se impone a este subconjunto es que los paquetes de ondas tengan valor esperado del operador número igual a uno. Además, se estudian las características y propiedades de estos fotones como paquetes de ondas, por lo tanto se calcula el valor esperado del Hamiltoniano, en el cual además se realiza un análisis en el espacio de frecuencias y se muestra que dos fotones pueden ser diferentes aunque estos posean la misma función de peso y por ende la misma energía. También se estudia el valor esperado del operador campo eléctrico el cual es diferente de cero para los estados coherentes, diferenciándose así de los estados de Fock.

En la tercera sección se encuentra la función de onda de estos paquetes de ondas tanto en el espacio de fase como en el espacio de posición y el espacio de momento. En la cuarta sección, se realiza una comparación entre el modelo del fotón en estados de Fock y el modelo del fotón en estados coherentes.

*El momento de un fotón está dado por $\hbar\mathbf{k}$, por lo tanto construir el paquete de ondas en el espacio de momento es análogo a hacerlo en el espacio de vectores de onda \mathbf{k} .

Finalmente, este capítulo se cierra con un resumen del desarrollo del modelo del *Fotón de Fase*, de sus características, y con un análisis a profundidad y una breve discusión sobre las ventajas e implicaciones de esta descripción.

2.1. Construyendo una Base

Se construye el estado $|\phi_\alpha\rangle$ como una combinación de infinitos estados desplazados de vacío ponderados por una función de peso $\phi_\sigma(\mathbf{k})$, cada estado desplazado tiene un modo \mathbf{k} asociado y una helicidad del fotón $\sigma = \pm 1$,

$$|\phi_\alpha\rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) \hat{D}(\alpha_\sigma(\mathbf{k})) |\text{vac}\rangle, \quad (2.1)$$

donde se toma la integral en el volumen del espacio de vectores de onda debido a que fuera de cavidades los modos son continuos, ver [sección 1.1](#). El operador \hat{D} es el operador desplazamiento el cual “desplaza” el estado de vacío a un estado coherente $|\alpha_\sigma(\mathbf{k})\rangle$, es decir

$$\begin{aligned} |\alpha_\sigma(\mathbf{k})\rangle &\equiv \hat{D}(\alpha_\sigma(\mathbf{k})) |\text{vac}\rangle = e^{\frac{-1}{2}|\alpha_\sigma(\mathbf{k})|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_\sigma(\mathbf{k}) \hat{a}_\sigma^\dagger(\mathbf{k}))^n}{n!} |\text{vac}\rangle \\ &= e^{\frac{-1}{2}|\alpha_\sigma(\mathbf{k})|^2} \sum_{n_\sigma(\mathbf{k})=0}^{\infty} \frac{(\alpha_\sigma(\mathbf{k}))^{n_\sigma(\mathbf{k})}}{\sqrt{n_\sigma(\mathbf{k})!}} |n_\sigma(\mathbf{k})\rangle, \end{aligned} \quad (2.2)$$

para la última expresión se hizo uso de la [ecuación \(1.31\)](#), además, $\hat{a}_\sigma^\dagger(\mathbf{k})$ es el operador creación en el modo \mathbf{k} para la helicidad σ , y $\alpha_\sigma(\mathbf{k})$ es una función compleja que representa el autovalor del operador aniquilación,

$$\hat{a}_\sigma(\mathbf{k}) |\alpha_\sigma(\mathbf{k})\rangle = \alpha_\sigma(\mathbf{k}) |\alpha_\sigma(\mathbf{k})\rangle, \quad (2.3)$$

este autovalor complejo representa también la posición del centro de la Gaussiana del estado coherente en el espacio de fase, ya que la parte real e imaginaria de este autovalor son los valores esperados de los operadores de cuadratura, ver [sección 1.1](#), es decir

$$\begin{aligned} \langle \alpha_\sigma(\mathbf{k}) | \hat{x}_1 | \alpha_\sigma(\mathbf{k}) \rangle &= \langle \alpha_\sigma(\mathbf{k}) | \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{2} | \alpha_\sigma(\mathbf{k}) \rangle = \text{Re}\{\alpha_\sigma(\mathbf{k})\}, \\ \langle \alpha_\sigma(\mathbf{k}) | \hat{x}_2 | \alpha_\sigma(\mathbf{k}) \rangle &= \langle \alpha_\sigma(\mathbf{k}) | \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{2i} | \alpha_\sigma(\mathbf{k}) \rangle = \text{Im}\{\alpha_\sigma(\mathbf{k})\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como consecuencia de la [ecuación \(2.2\)](#), el estado $|\phi_\alpha\rangle$ puede ser escrito equivalentemente como una combinación infinita de estados coherentes

$$|\phi_\alpha\rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) |\alpha_\sigma(\mathbf{k})\rangle, \quad (2.5)$$

el significado de la función de peso $\phi_\sigma(\mathbf{k})$, además de ponderar cada estado coherente, esta describe el contenido espectral del fotón. Por ejemplo, suponiendo el caso en que el estado tiene un modo definido para una helicidad positiva, $\sigma = +$, es decir, la función de peso toma

la forma $\phi_\sigma(\mathbf{k}) = \delta_{\sigma+}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$. Entonces, el estado está descrito por un estado coherente en dicho modo y con dicha helicidad

$$|\phi_\alpha\rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \delta_{\sigma+}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) |\alpha_\sigma(\mathbf{k})\rangle = |\alpha_+(\mathbf{k}_0)\rangle. \quad (2.6)$$

Aunque dos estados tengan la misma función de peso $\phi_\sigma(\mathbf{k})$, pueden tener una función diferente como autovalor del estado coherente, es decir, el estado $|\phi_\beta\rangle$ es diferente al estado $|\phi_\alpha\rangle$,

$$|\phi_\beta\rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) |\beta_\sigma(\mathbf{k})\rangle \neq \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) |\alpha_\sigma(\mathbf{k})\rangle = |\phi_\alpha\rangle. \quad (2.7)$$

Por lo tanto, es evidente que en este caso tanto la función de peso, $\phi_\sigma(\mathbf{k})$, como la función de autovalor, $\alpha_\sigma(\mathbf{k})$, especifican totalmente el paquete de ondas.

Espacio de Frecuencias

Expresando la integral triple en coordenadas esféricas se puede expresar el paquete de ondas en una representación en el espacio de frecuencias, ver [sección 1.1](#), este toma la forma

$$|\phi_\alpha\rangle = \sum_\sigma \int \frac{V \omega^2}{(2\pi c)^3} d\omega d\Omega \phi_\sigma(\omega, \Omega) |\alpha_\sigma(\omega, \Omega)\rangle, \quad (2.8)$$

donde $d\Omega$ es el diferencial de ángulo sólido. Si se supone que la distribución de los modos es independiente del ángulo, es decir, es uniforme angularmente, ver [figura 2.2](#), en este caso particular se puede escribir el estado como

$$|\phi_\alpha\rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d\omega}{2\pi^2 c^3} \omega^2 \phi_\sigma(\omega) |\alpha_\sigma(\omega)\rangle, \quad (2.9)$$

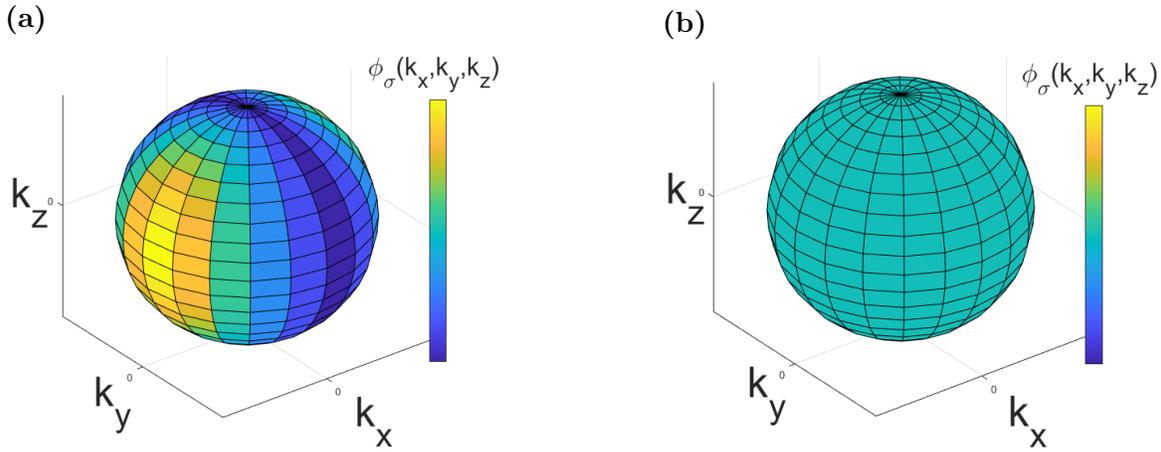
donde ahora es más claro que la función de peso es la que determina el contenido espectral del paquete de ondas.

Es necesario aclarar que las funciones de peso para la descripción en el espacio de vectores de ondas y la descripción en el espacio de las frecuencias son diferentes $\phi_\sigma(\mathbf{k}) \neq \phi_\sigma(\omega)$, y no deben ser confundidas, ya que la primera es una distribución de los modos en el espacio de vectores de ondas, mientras que la segunda es la distribución de frecuencias bajo la condición de que la distribución de los modos varía solo con el radio en el espacio de vectores de ondas, ver [figura 2.2](#).

Ahora se demostrará que el conjunto de paquetes de ondas,

$$\{|\phi_{\alpha_1}\rangle, |\phi_{\alpha_2}\rangle, \dots, |\phi_{\alpha_n}\rangle, \dots, |\psi_{\alpha_1}\rangle, \dots, |\zeta_{\alpha_1}\rangle, \dots\}, \quad (2.10)$$

definidos de la forma de la [ecuación \(2.5\)](#) constituyen una base normal, no ortogonal pero completa, de tal forma que cualquier estado de la radiación se puede expandir en términos de esta base.

Figura 2.2*Funciones de peso*

Nota. Dos funciones de peso diferentes que describen los paquetes de ondas. **(a)** Distribución de modos que varía angularmente. **(b)** Distribución de modos que no varía angularmente pero sí puede variar con el radio.

2.1.1. Normalización

En general los estados utilizados en la mecánica cuántica para la descripción de sistemas físicos pertenecen al espacio Hilbert en el cual se define la norma como la raíz cuadrada del producto interno y la cual debe ser un valor real mayor o igual a cero, es decir, si se tiene el estado $|\phi\rangle$ su norma es

$$\|\phi\| = \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle} \geq 0. \quad (2.11)$$

Se dice que un estado o una base está normalizada si cada elemento perteneciente a la base tiene una norma unitaria. La condición de normalización resulta ser más práctica que necesaria para la construcción de una base, por ejemplo, el cálculo del valor esperado de operadores se facilita si los estados con los que se trabaja son estados normalizados,

$$\langle\hat{B}\rangle_{\phi} = \frac{\langle\phi|\hat{B}|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} = \langle\phi|\hat{B}|\phi\rangle. \quad (2.12)$$

Por esta razón se desea encontrar la condición bajo la cual la base de paquetes de ondas propuesta, $\{|\phi_{\alpha_1}\rangle, \dots, |\phi_{\alpha_n}\rangle \dots |\psi_{\alpha_1}\rangle, \dots, |\zeta_{\alpha_1}\rangle \dots\}$, se encuentra normalizada. Para encontrar esta condición, primero se debe tener en cuenta que los estados coherentes se encuentran normalizados. Usando la definición del estado coherente, ecuación (2.2), el producto interno entre dos estados coherentes es

$$\begin{aligned} \langle\alpha_{\sigma'}(\mathbf{k}')|\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\alpha_{\sigma'}(\mathbf{k}')|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{\sigma}(\mathbf{k}))^n (\alpha_{\sigma'}^*(\mathbf{k}'))^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \langle m_{\sigma'}(\mathbf{k}')|n_{\sigma}(\mathbf{k})\rangle \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{nm}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ &= e^{-|\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{\sigma}(\mathbf{k}))^n}{n!} = 1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

es decir, el producto de dos estados coherentes está normalizado para el mismo modo \mathbf{k} y la misma helicidad σ , como consecuencia de la distribución de Dirac y el delta de Kronecker en el caso donde estos tengan diferente modo o helicidad el producto interno es cero.

Teniendo en cuenta la normalización de los estados coherentes, se considera ahora el producto interno del paquete de ondas $|\phi_\alpha\rangle$,

$$\begin{aligned}\langle\phi_\alpha|\phi_\alpha\rangle &= \sum_\sigma \int \frac{Vd^3k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) \sum_{\sigma'} \int \frac{Vd^3k'}{(2\pi)^3} \phi_{\sigma'}^*(\mathbf{k}') \langle\alpha_{\sigma'}(\mathbf{k}')|\alpha_\sigma(\mathbf{k})\rangle, \\ \langle\phi_\alpha|\phi_\alpha\rangle &= \sum_\sigma \int \frac{Vd^3k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) \sum_{\sigma'} \int \frac{Vd^3k'}{(2\pi)^3} \phi_{\sigma'}^*(\mathbf{k}') \delta_{\sigma'\sigma} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \\ \langle\phi_\alpha|\phi_\alpha\rangle &= \sum_\sigma \int \frac{Vd^3k}{(2\pi)^3} |\phi_\sigma(\mathbf{k})|^2 = 1,\end{aligned}\tag{2.14}$$

se observa que la condición de normalización recae sobre las funciones de peso, es decir sobre el contenido espectral de los paquetes de ondas. Otra implicación de este resultado, es que las funciones de peso deben ser funciones cuadrado integrables[§] en el espacio del vector de onda, es decir, pertenecen al espacio \mathcal{L}^2 , que además es un espacio de Hilbert.

Para el caso en particular en que la distribución de los modos tenga simetría angular, es decir, que esta depende solo de la magnitud del modo $|\mathbf{k}|$, se puede encontrar la condición para la distribución en la frecuencia,

$$\begin{aligned}\langle\phi_\alpha|\phi_\alpha\rangle &= \sum_{\sigma'} \int \frac{Vd\omega'}{2\pi^2c^3} \omega'^2 \sum_\sigma \int \frac{Vd\omega}{2\pi^2c^3} \omega^2 \phi_{\sigma'}^*(\omega') \phi_\sigma(\omega) \langle\alpha_{\sigma'}(\omega')|\alpha_\sigma(\omega)\rangle, \\ \langle\phi_\alpha|\phi_\alpha\rangle &= \sum_\sigma \int \frac{Vd\omega}{2\pi^2c^3} \omega^2 |\phi_\sigma(\omega)|^2 = 1,\end{aligned}\tag{2.15}$$

esta condición es peculiar ya que si $\phi_\sigma(\omega)$ representa el contenido espectral del paquete de ondas, la que debe estar normalizada es el producto de la función de peso ponderada por la variable de integración al cuadrado ω^2 , esto es consecuencia directa de que la función que debe estar normalizada es la función de peso en el espacio de vectores de ondas. A continuación, se estudia la ortogonalidad de esta base de paquetes de ondas.

2.1.2. Ortogonalidad

Dos estados son ortogonales cuando el producto interno de estos es igual a cero,

$$\langle\psi|\phi\rangle = 0,\tag{2.16}$$

recibe este nombre de ortogonalidad ya que en un espacio vectorial el producto interno entre dos vectores que forman un ángulo de 90° es cero. Sin embargo, es un concepto que se traslada a un tema más abstracto donde los elementos de un espacio no se limitan a ser vectores, sino que en este caso se extiende al estudio de estados cuánticos.

Una base se dice ser ortogonal cuando todos los elementos que la componen son ortogonales entre ellos, no obstante, la ortogonalidad no es una condición necesaria para considerar

[§]Las funciones cuadrado integrables forman una base completa del espacio de Hilbert.

a un conjunto de elementos como una base, ya que lo más importante es que por medio de combinaciones lineales se pueda escribir cualquier elemento del espacio, condición que se le conoce como completitud.

La base de estados coherentes no es ortogonal, ya que al realizar el producto interno entre dos estados coherentes diferentes se obtiene,

$$\langle \beta_{\sigma'}(\mathbf{k}') | \alpha_{\sigma}(\mathbf{k}) \rangle = \delta_{\sigma'\sigma} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})|^2 - \frac{1}{2} |\beta_{\sigma'}(\mathbf{k}')|^2 + \beta_{\sigma'}^*(\mathbf{k}') \alpha_{\sigma}(\mathbf{k}) \right\}, \quad (2.17)$$

donde el exponencial debería hacer el papel de una distribución de Dirac de la forma $\delta(\beta - \alpha)$ para que estos estados sean ortonormales. Se puede realizar un análisis gráfico a la no ortogonalidad de los estados coherentes, como se mencionaba anteriormente, la representación de los estados coherentes es una Gaussiana en el espacio de fase, de esta manera dos estados diferentes representan dos Gaussianas diferentes, estas funciones se extienden en todo el espacio de fase, por lo tanto al hacer el producto interno entre estas funciones siempre habrá un solapamiento entre estas por más pequeño que sea, el producto interno tiende a cero en el límite en que las Gaussianas se encuentren lo más alejadas posibles una de otra.

La no ortogonalidad de los estados coherentes se transmite inevitablemente a los paquetes de ondas. Tomando el producto interno entre dos paquetes de ondas

$$\langle \psi_{\beta} | \phi_{\alpha} \rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \phi_{\sigma}(\mathbf{k}) \sum_{\sigma'} \int \frac{V d^3 k'}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma'}^*(\mathbf{k}') \langle \beta_{\sigma'}(\mathbf{k}') | \alpha_{\sigma}(\mathbf{k}) \rangle, \quad (2.18)$$

y usando el producto entre los estados coherentes, [ecuación \(2.17\)](#),

$$\langle \psi_{\beta} | \phi_{\alpha} \rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}^*(\mathbf{k}) \phi_{\sigma}(\mathbf{k}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})|^2 - \frac{1}{2} |\beta_{\sigma}(\mathbf{k})|^2 + \beta_{\sigma}^*(\mathbf{k}) \alpha_{\sigma}(\mathbf{k}) \right\}, \quad (2.19)$$

además de que el exponente es diferente de cero, las funciones $\psi_{\sigma}^*(\mathbf{k})$ y $\phi_{\sigma}(\mathbf{k})$ al ser funciones cuadrado integrables, no son necesariamente ortogonales, por lo tanto los dos paquetes de ondas en general no son ortogonales.

Se puede igualmente analizar el caso de paquetes de ondas que compartan la misma función de autovalores, de la anterior ecuación es evidente que cuando las funciones de autovalores que determina los estados coherentes son iguales, el exponente se hace igual a uno, entonces el producto interno de los paquetes de ondas es,

$$\langle \psi_{\alpha} | \phi_{\alpha} \rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}^*(\mathbf{k}) \phi_{\sigma}(\mathbf{k}), \quad (2.20)$$

el cual en general es diferente de cero, ya que las funciones de peso no necesariamente son ortogonales.

Además, se puede analizar el caso en que dos paquetes de ondas tienen la misma función de peso, es decir, el mismo contenido espectral y sin embargo tener una función de autovalor diferente para el estado coherente, es decir,

$$\langle \phi_{\beta} | \phi_{\alpha} \rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} |\phi_{\sigma}(\mathbf{k})|^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})|^2 - \frac{1}{2} |\beta_{\sigma}(\mathbf{k})|^2 + \beta_{\sigma}^*(\mathbf{k}) \alpha_{\sigma}(\mathbf{k}) \right\}, \quad (2.21)$$

en cuyo caso, nuevamente el producto interno vuelve a ser en general diferente de cero.

Del análisis de la ortogonalidad de los paquetes de ondas resulta interesante observar la libertad que existe en la descripción del paquete de ondas por el hecho de estar determinado totalmente no solo por una función sino por dos funciones, la función de peso y la función de autovalor asociada al estado coherente, así, se observa que dos paquetes de ondas no se diferencian solo por su contenido espectral sino también por su representación en el espacio de fase. Por otro lado, no es importante el hecho de que los paquetes de ondas no sean ortogonales, ya que como se dijo previamente, esta condición resulta ser práctica pero no necesaria, por lo tanto los paquetes de ondas pueden formar una base que permita expandir todos los estados de la radiación y principalmente el estado de un fotón que es nuestro principal objetivo en este capítulo.

Finalmente, el análisis en frecuencia es totalmente análogo al desarrollado, por lo tanto no arroja información nueva sobre los paquetes de ondas o las funciones de peso, por ejemplo, la no ortogonalidad en el espacio de frecuencia está dada por

$$\begin{aligned} \langle \psi_\beta | \phi_\alpha \rangle &= \sum_{\sigma'} \int \frac{V d\omega'}{2\pi^2 c^3} \omega'^2 \sum_{\sigma} \int \frac{V d\omega}{2\pi^2 c^3} \omega^2 \psi_{\sigma'}^*(\omega') \phi_{\sigma}(\omega) \langle \beta_{\sigma'}(\omega') | \alpha_{\sigma}(\omega) \rangle \\ &= \sum_{\sigma} \int \frac{V d\omega}{2\pi^2 c^3} \omega^2 \psi_{\sigma}^*(\omega) \phi_{\sigma}(\omega) e^{-\frac{1}{2}|\alpha_{\sigma}(\omega)|^2 - \frac{1}{2}|\beta_{\sigma}(\omega)|^2 + \beta_{\sigma}^*(\omega)\alpha_{\sigma}(\omega)}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

y el análisis realizado para la representación en el espacio de vectores de ondas aplica de manera análoga para este caso. A continuación, se procederá a demostrar la completitud de los paquetes de ondas.

2.1.3. *Completitud*

La completitud es la principal condición para considerar a un conjunto de elementos pertenecientes a un espacio como una base. Esta condición implica que los elementos de dicho conjunto permiten expandir todo el espacio por medio de combinaciones lineales. Esto significa que, en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , el conjunto de estados $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle\} \in \mathcal{H}$, se considera completo si

$$\forall |\chi\rangle \in \mathcal{H} \quad \exists \quad \{c_1, \dots, c_n\} : \quad c_i \in \mathbb{C} \quad \& \quad |\chi\rangle = c_1 |v_1\rangle + \dots + c_n |v_n\rangle, \quad (2.23)$$

es decir, todo estado perteneciente al espacio \mathcal{H} se puede expresar como una combinación lineal de los estados del conjunto base. Se dice que una base es *sobre-completa** cuando uno puede retirar un elemento del conjunto y la base sigue siendo completa, intuitivamente significa que el conjunto base tiene más elementos de los necesarios para expandir todo el espacio y es consecuencia de que el conjunto no sea ortogonal. Cuando los elementos son los mínimos suficientes se dice simplemente que la base es completa.

La base de estados coherentes representa una base sobre-completa debido a que un estado coherente es una combinación infinita de estados de Fock, y los estados de Fock representan una base completa. Por lo tanto, una base de estados coherentes resulta redundante, debido principalmente a que los estados coherentes no son ortogonales, en caso de serlo, el conjunto de estos constituirían simplemente una base completa.

*Traducción literal del adjetivo del inglés *Overcomplete*.

La demostración de que los estados coherentes son completos se encuentra en [Gerry y Knight \(2005\)](#). Para realizar la demostración se parte del operador proyección sobre el estado coherente $|\alpha\rangle$,

$$\hat{P}_\alpha \equiv |\alpha\rangle \langle \alpha|, \quad (2.24)$$

y ahora se toma la proyección sobre todos los estados coherentes posibles,

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha, \quad (2.25)$$

donde $d^2\alpha = d\text{Re}(\alpha)d\text{Im}(\alpha)$, es el diferencial en el plano complejo. Para mostrar que los estados coherentes son completos se usa el hecho de que los estados de Fock son completos, por lo tanto se usa la definición de estados coherentes en términos de estados de Fock,

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \int e^{-|\alpha|^2} \sum_n \sum_m \frac{(\alpha^*)^m (\alpha)^n}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle \langle m| d^2\alpha, \quad (2.26)$$

expresando ahora en coordenadas polares, $\alpha = re^{i\theta}$, de tal forma que $d^2\alpha = r dr d\theta$, entonces se puede escribir la anterior integral como,

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \sum_n \sum_m \frac{|n\rangle \langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_0^\infty dr e^{-r^2} r^{n+m+1} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta}, \quad (2.27)$$

haciendo el cambio de variable $r^2 = y$ y desarrollando el delta de Kronecker se obtiene,

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \pi \sum_{n=0}^\infty \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^\infty dy e^{-y} y^n, \quad (2.28)$$

donde esta última integral no es más que la función Gamma y su valor es el factorial de n . Finalmente, teniendo en cuenta que los estados de Fock son completos, es decir $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$, entonces

$$\int \frac{|\alpha\rangle \langle \alpha|}{\pi} d^2\alpha = 1, \quad (2.29)$$

por lo tanto los estados coherentes satisfacen una relación de cierre, lo que significa que cualquier estado $|\psi\rangle$ de la radiación electromagnética puede ser expresado en esta base de estados coherentes como

$$|\Psi\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \Psi. \quad (2.30)$$

Ahora, se muestra que los paquetes de ondas propuestos igualmente representan una base completa. Debido a que el paquete de ondas se forma como una combinación lineal de estados coherentes, cada uno en diferente modo \mathbf{k} de la radiación, por lo tanto, el paquete de ondas realmente es un estado coherente en cada modo. El operador proyección en este caso está dado por,

$$\hat{P}_{\phi_\alpha} \equiv |\phi_\alpha\rangle \langle \phi_\alpha| = \sum_{\sigma, \sigma'} \int \frac{V d^3 k'}{(2\pi)^3} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \phi_{\sigma'}^*(\mathbf{k}') \phi_\sigma(\mathbf{k}) |\alpha_\sigma(\mathbf{k})\rangle \langle \alpha_{\sigma'}(\mathbf{k}')|, \quad (2.31)$$

como la acción del operador proyección es proyectar un estado en un único estado coherente para cada modo, entonces para mostrar la completitud se debe tomar la integral sobre todos los estados coherentes posibles para cada modo, es decir

$$\int |\phi_\alpha\rangle \langle \phi_\alpha| d^2\alpha = \sum_{\sigma, \sigma'} \int \frac{V d^3 k'}{(2\pi)^3} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \phi_{\sigma'}^*(\mathbf{k}') \phi_\sigma(\mathbf{k}) \int |\alpha_\sigma(\mathbf{k})\rangle \langle \alpha_{\sigma'}(\mathbf{k}')| d^2\alpha, \quad (2.32)$$

ahora se usará el hecho de que los estados coherentes son completos bajo la siguiente relación de cierre

$$\int |\alpha_\sigma(\mathbf{k})\rangle \langle \alpha_{\sigma'}(\mathbf{k}')| d^2\alpha = \pi \delta_{\sigma'\sigma} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.33)$$

de tal forma que al reemplazar se obtiene,

$$\int |\phi_\alpha\rangle \langle \phi_\alpha| d^2\alpha = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} |\phi_\sigma(\mathbf{k})|^2 \pi, \quad (2.34)$$

y usando la condición de normalización para las funciones de peso finalmente se obtiene

$$\int |\phi_\alpha\rangle \langle \phi_\alpha| d^2\alpha = \pi, \quad (2.35)$$

es decir, la relación de cierre es idéntica a la de los estados coherentes.

La razón por la cual la relación de cierre es la misma, es porque el paquete de ondas que se forma solo tiene en cuenta un solo estado coherente para cada modo del campo cuantizado, esto es evidente al observar la definición del paquete de ondas,

$$|\phi_\alpha\rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) |\alpha_\sigma(\mathbf{k})\rangle, \quad (2.36)$$

esto es básicamente que el estado coherente en el modo \mathbf{k} y helicidad σ está multiplicado por un valor escalar, es decir, en el fondo esta descripción no es más por así decirlo que un estado coherente multimodal, y lo que se acaba de mostrar es que los estados coherentes representan una base sobre-completa para el campo cuántico multimodal. Finalmente, se puede expandir cualquier estado multimodal de la radiación como

$$|\zeta\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\phi_\alpha\rangle \langle \phi_\alpha|\zeta\rangle. \quad (2.37)$$

En la siguiente sección se determina el subconjunto de paquetes de ondas que describen el estado de un fotón.

2.2. El Estado de un Fotón de Fase

Hasta ahora se han descrito unos estados de la radiación denotados por $|\phi_\alpha\rangle, |\psi_\beta\rangle, \dots$ en términos de estados coherentes y los cuales han sido nombrados como paquetes de ondas debido a que son estados multimodales, es decir son combinación de estados en todos los modos posibles. Sin embargo, la relación entre estos estados y el estado de un fotón aún no es del todo clara debido a que no se ha especificado si todos estos paquetes de ondas

describen estados de fotones diferentes, dicho de forma más explícita, no se ha expuesto qué condiciones deben tener estos paquetes para que representen el estado de un fotón.

Para que un estado de la radiación sea considerado como el estado de un fotón, las características y propiedades derivadas de su descripción matemática deben concordar con las observaciones físicas de los fenómenos en los cuales involucran el fotón. La observación en mecánica cuántica está directamente relacionada con los operadores Hermitianos ya que para cada cantidad física observable se le asocia un operador de este tipo, además, los valores propios de los sistemas físicos (estados) asociados a estos operadores representan la cantidad medible en un experimento. Por lo tanto, es necesario ahondar en el análisis de operadores asociados a cantidades observables aplicados a los paquetes de ondas para poder determinar las condiciones sobre estos estados $|\phi_\alpha\rangle, |\psi_\beta\rangle, \dots$ para que describan el estado de un fotón.

Como se revisó en la [sección 1.3](#), el hecho de expresar un fotón como un estado multimodal ponderado por una función de peso está directamente ligado a tratar de solventar el problema de localización del fotón atribuyéndole a este un contenido espectral, de tal forma que, aunque el fotón no se pueda localizar en un punto del espacio como se demuestra en [Newton y Wigner \(1949\)](#) y en [Wightman \(1962\)](#), sin embargo, pueda ser parcialmente localizado en un volumen del espacio como se demuestra en [Białynicki-Birula \(1996\)](#); [Sipe \(1995\)](#); [Smith y Raymer \(2007\)](#), y de esta forma concordar con las observaciones que apuntan a que el fotón debe estar parcialmente localizado ya que por ejemplo cuando el fotón interactúa con un átomo es porque se encontraba en un espacio cercano al átomo. No obstante, esta descripción puede traer consigo el problema de determinar cuál es el modo que se asocia con la energía del fotón, ya que si el fotón tiene un contenido espectral entonces puede surgir la pregunta ¿cuál de todas esas frecuencias es la frecuencia del fotón?

La condición principal para que un estado sea considerado como el estado de un fotón es que el valor esperado del operador número \hat{N} sea igual a uno. Igualmente, es de interés analizar el valor esperado de energía y de campo eléctrico, además de que se ha propuesto que este último se puede asociar a la localización del fotón, [Hoffmann \(2020\)](#). Más aún, se busca que esta descripción del fotón como un paquete de ondas permita obtener una función de onda del fotón que sea solución a la mecánica ondulatoria de este, tal como se realizó en la [sección 1.3](#) con los paquetes de ondas en estados de Fock.

En esta sección se determinan las condiciones para que los paquetes de ondas estudiados en la anterior sección describan el estado de un fotón, más aún, se abordan los cálculos respectivos de los operadores que más interesan en el análisis de la radiación electromagnética y se hace una breve discusión al respecto. Finalmente, se encuentra la función de onda del fotón la cual es solución a la ecuación de onda del fotón y queda de la forma presentada por Birula, mostrada en la [sección 1.2](#), y que además se obtiene por medio de una regla de extracción ligeramente modificada a la presentada en [Smith y Raymer \(2007\)](#).

2.2.1. Valor Esperado del Operador Número

Hasta el momento se han descrito los estados de paquetes de ondas como

$$|\phi_\alpha\rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \phi_{\sigma}(\mathbf{k}) |\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})\rangle, \quad (2.38)$$

sin embargo, este estado puede representar cualquier estado de la radiación electromagnética. Se busca encontrar que este estado represente de manera unívoca el estado de un fotón, por lo tanto se busca que al calcular el valor esperado del operador número se obtenga el valor de uno. El operador número multimodal para modos continuos está definido por la siguiente expresión

$$\hat{N} = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}), \quad (2.39)$$

donde \hat{a}^{\dagger} representa el operador creación y \hat{a} el operador aniquilación, y la integral toma esta forma al pasar de modos discretos a modos continuos, ver [sección 1.1](#).

Con esta definición se procede a calcular el valor esperado del operador número para el paquete de ondas $|\phi_{\alpha}\rangle$, y se obtiene,

$$\langle \phi_{\alpha} | \hat{N} | \phi_{\alpha} \rangle = \sum_{\sigma''} \int \frac{V d^3 k''}{(2\pi)^3} \phi_{\sigma''}(\mathbf{k}'') \sum_{\sigma'} \int \frac{V d^3 k'}{(2\pi)^3} \phi_{\sigma'}^*(\mathbf{k}') \langle \alpha_{\sigma'}(\mathbf{k}') | \hat{N} | \alpha_{\sigma''}(\mathbf{k}'') \rangle, \quad (2.40)$$

y el valor esperado del operador número para el estado coherente es

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{\sigma'}(\mathbf{k}') | \hat{N} | \alpha_{\sigma''}(\mathbf{k}'') \rangle &= \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \langle \alpha_{\sigma'}(\mathbf{k}') | \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) | \alpha_{\sigma''}(\mathbf{k}'') \rangle \\ &= \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} |\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})|^2 \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\sigma\sigma''} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}''), \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde los delta de Dirac y de Kronecker se obtienen debido a que los operadores escalera solo aplican a los estados que se encuentren en el mismo modo y helicidad, y donde además, se hizo uso de la [ecuación \(2.3\)](#), es decir, se usaron los siguientes resultados,

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) | \alpha_{\sigma''}(\mathbf{k}'') \rangle &= \alpha_{\sigma}(\mathbf{k}) \delta_{\sigma\sigma''} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') | \alpha_{\sigma}(\mathbf{k}) \rangle, \\ \langle \alpha_{\sigma'}(\mathbf{k}') | \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) &= \langle \alpha_{\sigma}(\mathbf{k}) | \alpha_{\sigma'}^*(\mathbf{k}) \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (2.42)$$

De tal manera, que al reemplazar este resultado en el cálculo del valor esperado del operador número y aplicando los deltas, finalmente se llega a que el valor esperado para el paquete de ondas es

$$\langle \phi_{\alpha} | \hat{N} | \phi_{\alpha} \rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} |\phi_{\sigma}(\mathbf{k})|^2 |\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})|^2. \quad (2.43)$$

Este resultado es interesante, ya que la magnitud al cuadrado del valor propio del estado coherente para el operador aniquilación, es decir $|\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})|^2$, representa el valor esperado del número de fotones del estado coherente para un modo en específico. Por lo tanto, la anterior ecuación representa la suma de valores esperados de número de fotones para cada modo, ponderado por el cuadrado de la función de peso, $\phi_{\sigma}(\mathbf{k})$. Si se busca obtener un valor esperado del operador número igual a uno, entonces surge naturalmente la condición de que el valor propio del estado coherente sea de la forma,

$$\alpha_{\sigma}(\mathbf{k}) = 1 \exp\{i\theta_{\sigma}(\mathbf{k})\}, \quad (2.44)$$

y por lo tanto su magnitud es uno, de tal forma que el valor esperado del número de fotones del paquete de ondas es

$$\langle \phi_\alpha | \hat{N} | \phi_\alpha \rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} |\phi_\sigma(\mathbf{k})|^2 = 1, \quad (2.45)$$

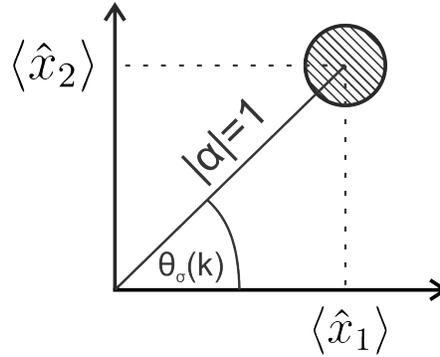
es decir que bajo la condición de la [ecuación \(2.44\)](#) para los estados coherentes, se tiene que el paquete de ondas representa estados cuyo valor esperado del operador número es de un fotón. Entonces, los paquetes de ondas que describen estados de un solo fotón finalmente toman la forma

$$|\phi_\theta\rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) |e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})}\rangle, \quad (2.46)$$

a los cuales denominamos como *Fotones de Fase*, donde $\theta_\sigma(\mathbf{k})$ representa la fase del estado coherente para el modo \mathbf{k} y la helicidad σ , ver [figura 2.3](#).

Figura 2.3

Estado coherente en el espacio de fase



Nota. Para el estado de un fotón se toma $|\alpha| = 1$, el círculo negro representa la incertidumbre de los operadores o la proyección de la Gaussiana en el espacio de fase.

La [ecuación \(2.46\)](#) representa nuestra propuesta* para describir el estado de un fotón y esta deja en claro que el estado del fotón queda totalmente determinado por una función $\phi_\sigma(\mathbf{k})$ que juega el papel tanto de función de peso, como de distribución de los modos del paquete de ondas, y por una función $\theta_\sigma(\mathbf{k})$ que podría estar directamente relacionada con una fase asociada al fotón, y por ende se cuenta con dos grados de libertad que permiten distinguir entre diferentes estados de paquetes de ondas, hecho que podría estar ligado con la coherencia y la generación de esta, tema que se discute en el [capítulo 3](#).

A continuación, se analiza el valor esperado del operador Hamiltoniano y el operador campo eléctrico para el estado de un fotón encontrado en esta sección.

*Sin embargo, en un artículo de marzo del presente año y del cual no se tenía conocimiento se propone una descripción similar, ver [Hoffmann \(2020\)](#).

2.2.2. Valor Esperado de Energía

Una vez se ha propuesto los paquetes de ondas que describen a los fotones, se analiza el valor esperado de operadores para dichos estados. La ecuación (1.19) es el operador Hamiltoniano multimodal para modos discretos, cabe resaltar que dicho operador contiene el aporte del campo de vacío el cuál es infinito debido a que los modos son infinitos, por lo tanto, se debe tomar solamente la energía del fotón, es decir, el operador Hamiltoniano del fotón para modos continuos se escribe de la siguiente manera,

$$\hat{H}_{ph} = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}). \quad (2.47)$$

El valor esperado del Hamiltoniano representa la energía del estado, en este caso representa la energía del fotón entendido como un paquete de ondas. Al tomar el valor esperado sobre el estado del fotón $|\phi_{\theta}\rangle$ descrito en la ecuación (2.46), se obtiene,

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\theta} | \hat{H}_{ph} | \phi_{\theta} \rangle &= \sum_{\sigma, \sigma', \sigma''} \int \frac{V d^3 k'}{(2\pi)^3} \phi_{\sigma'}^*(\mathbf{k}') \int \frac{V d^3 k''}{(2\pi)^3} \phi_{\sigma''}(\mathbf{k}'') \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \\ &\times \hbar \omega_{\mathbf{k}} \langle e^{\theta_{\sigma'}(\mathbf{k}')} | \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) | e^{\theta_{\sigma''}(\mathbf{k}'')} \rangle, \end{aligned} \quad (2.48)$$

teniendo en cuenta que el producto *bracket* representa el valor esperado del número de fotones del estado coherente, entonces usando el resultado de la ecuación (2.41) y dado que en este caso el valor esperado del número de fotones es uno por ser el estado de un fotón, se llega a

$$\langle \phi_{\theta} | \hat{H}_{ph} | \phi_{\theta} \rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \hbar \omega_{\mathbf{k}} |\phi_{\sigma}(\mathbf{k})|^2 \quad (2.49)$$

y usando la relación entre la frecuencia y la magnitud del vector de onda, $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$, finalmente la energía del fotón es

$$\langle \phi_{\theta} | \hat{H}_{ph} | \phi_{\theta} \rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \hbar c |\mathbf{k}| |\phi_{\sigma}(\mathbf{k})|^2, \quad (2.50)$$

es decir, la energía del fotón es una integral del cuadrado de su distribución de modos ponderado por la magnitud del modo, y también multiplicado por la constante de Planck, \hbar , y la velocidad de la luz, c .

Según este resultado, la energía del fotón está determinada por la distribución de modos que compone el fotón, sin importar la fase que este estado tenga. Sin embargo, cabe mencionar que de acuerdo con la conclusión de Einstein en Einstein (1905, 1917) sobre la radiación electromagnética, esta debe estar compuesta por cuantos de energía donde cada cuanto tiene la energía de $E = h\nu$, es decir, el fotón tiene una frecuencia asociada la cual determina su energía.

Si bien, el desarrollo de Einstein correspondería a una forma de primera cuantización del campo electromagnético, y el trabajo que se ha desarrollado hasta ahora se basa en la segunda cuantización del campo electromagnético, es decir una teoría cuántica de campos, consecuentemente no es necesario que exista una correspondencia directa entre estos dos tratamientos totalmente diferentes. Ahora bien, lo que se observa en los experimentos es

que el fotón tiene una energía bien definida, esto no es contradictorio con el resultado de la [ecuación \(2.50\)](#), ya que este arroja un valor de energía único.

Haciendo analogía al tratamiento de Einstein se le puede asociar una frecuencia a la energía del fotón de la siguiente manera,

$$\omega_{ph} \equiv \frac{E}{\hbar} = \frac{\langle \phi_\theta | \hat{H}_{ph} | \phi_\theta \rangle}{\hbar} = \sum_\sigma \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} c|\mathbf{k}| |\phi_\sigma(\mathbf{k})|^2, \quad (2.51)$$

consecuente a esta definición de *frecuencia del fotón*, se puede ahora introducir la noción de una frecuencia en el sentido de Einstein, es decir una frecuencia asociada a la energía del fotón, la cual se diferencia de la distribución de modos del paquete de ondas que constituye el fotón. Al pasar el tratamiento del espacio de vectores de ondas a las frecuencias esta relación entre la visión de Einstein del fotón y la energía del paquete de ondas es directa, tal como se muestra a continuación.

Al realizar el análisis en el espacio de frecuencias, se obtiene un resultado breve y conciso pero sustancial, el cual muestra la conexión directa entre la segunda cuantización del campo electromagnético y la visión del fotón según Einstein. Sea el estado de un fotón expresado en el espacio de frecuencias de la siguiente forma

$$|\phi_\theta\rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d\omega}{2\pi^2 c^3} \omega^2 \phi_\sigma(\omega) |e^{i\theta_\sigma(\omega)}\rangle, \quad (2.52)$$

donde como se expresó anteriormente, $\phi_\sigma(\omega)$ representa el contenido espectral del paquete de ondas, en este caso del fotón. Teniendo en cuenta que dicha función debe ser cuadrado integrable debido a la condición de normalización previamente encontrada, se asume que el contenido espectral esté dado por una función del tipo campana, en esta caso si se supone que el contenido espectral del fotón está descrito por una función Gaussiana de la forma

$$\phi_\sigma(\omega) = B \exp \left\{ -(\omega - \omega_0)^2 / 2\Delta\omega^2 \right\}, \quad (2.53)$$

siendo ω_0 el centro de la Gaussiana y $\Delta\omega$ el ancho de esta o su desviación, y B es un valor que está sujeto a la condición de normalización, y que por tanto se puede determinar por medio de ella.

Usando la ecuación de normalización, [ecuación \(2.15\)](#), es decir

$$\langle \phi_\theta | \phi_\theta \rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d\omega}{2\pi^2 c^3} \omega^2 |\phi_\sigma(\omega)|^2 = 1, \quad (2.54)$$

y desarrollando la integral usando la función de peso descrita en la [ecuación \(2.53\)](#), se encuentra que el cuadrado de la función de peso debe tener la forma

$$|\phi_\sigma(\omega)|^2 \approx \frac{2\pi^2 c^3}{V \Delta\omega (\Delta\omega^2 + 2\omega_0^2)} \exp \left\{ -(\omega - \omega_0)^2 / \Delta\omega^2 \right\}, \quad (2.55)$$

para cumplir con la condición de normalización, en donde la aproximación realizada es para el caso en el que $\omega_0 \gg \Delta\omega$, el cual se cumple para la luz visible, por ejemplo en una láser Helio-Neón la frecuencia angular es $\omega_0 \approx 3 \times 10^{15} [Hz]$, mientras que el ancho de banda es de alrededor de $\Delta\omega \approx 10^9 [Hz]$.

Ahora que se determinó la forma que debe tener la función de peso, se puede calcular el valor esperado del operador Hamiltoniano en el espacio de las frecuencias, al realizar la integral se obtiene

$$\langle \phi_\theta | \hat{H}_{ph} | \phi_\theta \rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d\omega}{2\pi^2 c^3} \hbar \omega \omega^2 |\phi_\sigma(\omega)|^2 = \hbar \left(\omega_0 + \frac{2\omega_0 \Delta\omega^2}{\Delta\omega^2 + 2\omega_0^2} \right) \approx \hbar \omega_0, \quad (2.56)$$

donde el segundo término es despreciable para el caso en el que $\omega_0 \gg \Delta\omega$. De esta forma, el valor esperado de la energía del fotón como un paquete de ondas concuerda con la visión de fotón desarrollada por Einstein para explicar los fenómenos de efecto fotoeléctrico y radiación de cuerpo negro. Por lo tanto, se puede concluir que la visión de Einstein es un límite clásico donde solo se considera el valor esperado de energía del tratamiento de la teoría cuántica de campos (QFT) para el fotón.

Finalmente, la relación entre la teoría cuántica de campos y la visión clásica de Einstein se puede resumir en la siguiente expresión

$$E_{ph} = \hbar \omega_{ph} \iff \langle \phi_\theta | \hat{H}_{ph} | \phi_\theta \rangle \approx \hbar \omega_0. \quad (2.57)$$

Llegados a este punto, se puede agregar además que aunque dos fotones tengan la misma distribución de modos, y consecuentemente la misma energía, estos pueden ser diferentes ya que su fase puede ser diferente. Para aclarar este punto, se toma como ejemplo dos estados diferentes de la forma $|\phi_\theta\rangle, |\phi_\eta\rangle$, descritos como

$$\begin{aligned} |\phi_\theta\rangle &= \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) |e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})}\rangle, \\ |\phi_\eta\rangle &= \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) |e^{i\eta_\sigma(\mathbf{k})}\rangle, \end{aligned} \quad (2.58)$$

al calcular la energía de estos dos fotones, se encuentra que es la misma,

$$\langle \phi_\theta | \hat{H}_{ph} | \phi_\theta \rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \hbar \omega_{\mathbf{k}} |\phi_\sigma(\mathbf{k})|^2 = \langle \phi_\eta | \hat{H}_{ph} | \phi_\eta \rangle, \quad (2.59)$$

sin embargo, estos estados tienen diferente representación en el espacio de fase debido a que en general para cada modo tienen un estado coherente con diferente fase. De manera que se puede concluir que, aunque dos fotones tengan la misma energía, estos pueden estar representados por dos estados diferentes, lo que conlleva a que no sean el mismo estado, es decir, el mismo fotón.

Esta característica de poder distinguir dos fotones de la misma energía por medio de la fase, marca una gran diferencia entre el estudio del fotón en estados coherentes y el fotón en estados de Fock, ya que en este último caso no se puede hablar de una fase del fotón y además no se puede distinguir dos fotones que tengan la misma energía. Este hecho resulta de gran utilidad para desarrollar la discusión sobre la generación de la coherencia en el próximo capítulo.

2.2.3. Valor Esperado del Operador Campo Eléctrico

El valor esperado del operador campo eléctrico para los estados coherentes es diferente de cero y este hecho es otra característica principal que diferencia el paquete de ondas de estados coherentes al paquete de ondas de estados de Fock, estudiado en la [sección 1.3](#). Incluso, recientemente se ha propuesto que este valor esperado del operador campo eléctrico para el paquete de ondas de estados coherentes está directamente relacionado con la localización del fotón, [Hoffmann \(2020\)](#).

El operador campo eléctrico fue definido en la [ecuación \(1.21\)](#), cuando se pasa de modos discretos a modos continuos, este operador queda de la forma

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) \left[\hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} - \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right], \quad (2.60)$$

básicamente, como se ha hecho anteriormente, se cambia la sumatoria por la integral, tal como se muestra en la [sección 1.1](#). Ahora, se calcula el valor esperado de este operador para el estado del fotón, se debe tener en cuenta que las integrales de los estados y del operador tienen una variable de integración diferente, igualmente hay tres sumatorias para la helicidad, las cuales convergen a una sola integral y una sola sumatoria cuando se operan las distribuciones de Dirac y deltas de Kronecker que surgen del producto *bracket* tal como se ha realizado en cálculos previos.

El valor esperado del operador campo eléctrico está dado por,

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\theta} | \hat{E}(\mathbf{r}, t) | \phi_{\theta} \rangle &= \sum_{\sigma, \sigma', \sigma''} \int \frac{V d^3 k'}{(2\pi)^3} \phi_{\sigma'}^*(\mathbf{k}') \int \frac{V d^3 k''}{(2\pi)^3} \phi_{\sigma''}(\mathbf{k}'') \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} i \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) \\ &\times \langle e^{i\theta_{\sigma'}(\mathbf{k}')} | \left(\hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} - \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right) | e^{i\theta_{\sigma''}(\mathbf{k}'')} \rangle, \end{aligned} \quad (2.61)$$

es evidente que al aplicar los operadores escalera se obtiene un delta de Kronecker y una distribución de Dirac además del valor propio, ver [ecuación \(2.42\)](#), y posteriormente, al realizar el producto *bracket* se obtiene otra distribución de Dirac y delta de Kronecker, de tal manera que al operar los deltas obtenidos queda una sola integral y una sumatoria, el valor esperado toma la forma

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\theta} | \hat{E}(\mathbf{r}, t) | \phi_{\theta} \rangle &= i \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} |\phi_{\sigma}(\mathbf{k})|^2 \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) \\ &\times [\exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t + \theta_{\sigma}(\mathbf{k}))\} - \exp\{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t + \theta_{\sigma}(\mathbf{k}))\}], \end{aligned} \quad (2.62)$$

y usando la fórmula de Euler finalmente el valor esperado del operador campo eléctrico para el estado de un *Fotón de Fase* es,

$$\langle \phi_{\theta} | \hat{E}(\mathbf{r}, t) | \phi_{\theta} \rangle = -2 \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} |\phi_{\sigma}(\mathbf{k})|^2 \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t + \theta_{\sigma}(\mathbf{k})). \quad (2.63)$$

Es decir, el valor esperado del operador campo eléctrico para el estado del *Fotón de Fase* es diferente de cero, esto se debe principalmente a que los estados coherentes representan los estados propios del operador campo eléctrico. Donde el valor obtenido se puede interpretar como una proyección del estado del *Fotón de Fase* en un eje del espacio de fase, ponderado por la función de peso al cuadrado y sumado sobre todos los modos posibles.

2.3. Función de Onda del Fotón de Fase

Resulta de interés estudiar la representación del estado de un fotón en diferentes espacios debido a que estas permiten, por un lado visualizar la función de onda del fotón, y además entender a mayor profundidad las características y las propiedades del comportamiento del fotón. En esta sección se estudia la función de onda en el espacio de fase, de momento y de posición.

En la primera parte se estudia la función de onda en el espacio de fase el cual para la radiación electromagnética es un espacio bidimensional donde cada eje representa el valor esperado de un operador de cuadratura, dichos operadores son la forma reducida de los operadores canónicamente conjugados del Hamiltoniano de la radiación, los cuales como se mencionó previamente están relacionados con los valores de campo eléctrico, magnético y con el potencial vectorial, revisar [sección 1.1](#).

Posteriormente, se estudia la función de onda en el espacio de momento, la cual es exactamente la misma función de peso en el espacio de vectores de onda, solo que el argumento se multiplica por la constante de Planck \hbar . Por otra parte, la relación que existe entre el espacio de momento y de posición no es la usual mediada por una transformación de Fourier estándar debido a que para la radiación estas no son variables canónicamente conjugadas de su Hamiltoniano. Sin embargo, Sipe definió una transformación similar con la principal condición que la integral en el espacio de posición del cuadrado de la función de onda sea la energía del fotón, [Sipe \(1995\)](#).

Finalmente, para encontrar la función de onda en el espacio de posición, que sea solución a la ecuación de onda del fotón encontrada por Birula, y presentada en la [sección 1.2](#), se define una regla de extracción similar a la utilizada por Smith & Raymer, sin embargo, la regla de extracción aquí propuesta permite encontrar por separado la función de onda del fotón para helicidad positiva y negativa. Además, se discute el significado de esta función de onda del fotón encontrada.

2.3.1. *Espacio de Fase*

El espacio de fase se define por medio de los operadores de cuadratura, definidos en la [sección 1.1](#), los cuales para un sistema con modos continuos toman la siguiente forma

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} (\hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) + \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k})), \\ \hat{x}_2 &= \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2i} (\hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) - \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k})),\end{aligned}\tag{2.64}$$

con los cuales se puede encontrar que el valor esperado de los operadores de cuadratura para el estado de un fotón como un paquete de ondas en estados coherentes, se diferencian por una fase de $\pi/2$ que representa la diferencia de fase entre la función $\cos(x)$ y $\sin(x)$, tal como

se muestra en los siguientes resultados

$$\begin{aligned}\langle \phi_\theta | \hat{x}_1 | \phi_\theta \rangle &= \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\phi_\sigma(\mathbf{k})|^2}{2} \left[e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})} + e^{-i\theta_\sigma(\mathbf{k})} \right] \\ &= \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} |\phi_\sigma(\mathbf{k})|^2 \cos(\theta_\sigma(\mathbf{k})),\end{aligned}\quad (2.65)$$

$$\begin{aligned}\langle \phi_\theta | \hat{x}_2 | \phi_\theta \rangle &= \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\phi_\sigma(\mathbf{k})|^2}{2i} \left[e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})} - e^{-i\theta_\sigma(\mathbf{k})} \right] \\ &= \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} |\phi_\sigma(\mathbf{k})|^2 \sin(\theta_\sigma(\mathbf{k})),\end{aligned}\quad (2.66)$$

estos valores representan el valor esperado del estado del fotón en el espacio de fase.

Igualmente, se puede expresar la función de onda del fotón, descrito como un paquete de ondas de estados desplazados, en el espacio de fase. Para encontrar la función de onda en un eje del espacio de fase se debe proyectar el estado del fotón en la base del espacio de fase, es decir,

$$\phi_\theta(x_1) \equiv \langle x_1 | \phi_\theta \rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) \langle x_1 | e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})} \rangle, \quad (2.67)$$

y ahora, usando la definición del estado coherente en términos de estados de Fock, [ecuación \(2.2\)](#), y teniendo en cuenta que los estados coherentes usados para la descripción del estado del fotón tienen autovalor con amplitud unitaria, se tiene que la función de onda es

$$\phi_\theta(x_1) = \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) e^{-\frac{1}{2}} \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})})^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} \langle x_1 | n_k \rangle, \quad (2.68)$$

y usando la función de onda de los estados de Fock representada en el espacio de fase dada por el producto interno $\langle x_1 | n_{\mathbf{k}} \rangle$, la cual fue presentada previamente en la [sección 1.1](#), por la [ecuación \(1.33\)](#), en términos de la variable no reducida q , no obstante, en este caso se expresa en la variable reducida $x_1 = q\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}/2\hbar}$, de tal forma que queda reescrita como

$$\langle x_1 | n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n_{\mathbf{k}}} n_{\mathbf{k}}!}} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-x_1^2} H_{n_{\mathbf{k}}}(\sqrt{2}x_1), \quad (2.69)$$

donde nuevamente $H_{n_{\mathbf{k}}}(x)$ es el $n_{\mathbf{k}}$ -ésimo polinomio de Hermite.

Reemplazando este resultado en la función de onda del fotón en el espacio de fase, esta queda expresada como

$$\phi_\theta(x_1) = \sum_\sigma \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-1/2} e^{-x_1^2} \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})}/\sqrt{2})^{n_k}}{n_k!} H_{n_k}(\sqrt{2}x_1), \quad (2.70)$$

para desarrollar esta expresión se usa la función generadora de los polinomios de Hermite

$$e^{2yt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)t^n}{n!}, \quad (2.71)$$

en donde para este caso $y = \sqrt{2}x_1$ y $t = e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})}/\sqrt{2}$, de tal forma que al sustituir la sumatoria en n_k por la exponencial y al operar los términos de los exponentes, la función de onda se escribe como

$$\phi_\theta(x_1) = \sum_\sigma \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-1/2} \exp\left\{-x_1^2 + 2x_1 e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})} - \frac{e^{2i\theta_\sigma(\mathbf{k})}}{2}\right\}, \quad (2.72)$$

y factorizando, finalmente se encuentra que la función de onda del fotón en un eje del espacio de fase está dada por

$$\phi_\theta(x_1) = \sum_\sigma \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \phi_\sigma(\mathbf{k}) \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-1/2} e^{x_1^2} \exp\left\{-\left(\sqrt{2}x_1 - \frac{e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})}}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}. \quad (2.73)$$

Este resultado significa que la función de onda en el espacio de fase equivale a una suma ponderada de la función de onda para determinado vector de onda, esta suma es representada por la integral y está ponderada por la función de peso.

Y debido a que las variables del espacio de fase son canónicamente conjugadas, la función de onda en el otro eje del espacio de fase está dado como la transformada de Fourier de la función de onda encontrada, es decir

$$\phi_\theta(x_2) = \mathbb{TF}\{\phi_\theta(x_1)\}, \quad (2.74)$$

donde \mathbb{TF} representa la transformación de Fourier estándar.

2.3.2. *Espacio de Posición y Espacio de Momento*

En esta sección se muestra cómo encontrar la representación en el espacio de posición partiendo de la función de onda del fotón en el espacio del momento. En la primera parte, se muestra el procedimiento de Sipe mostrado en [Sipe \(1995\)](#), con el cual a partir de la descripción del fotón como un paquete de ondas en el espacio de momento llega a una formulación de la función de onda del fotón en el espacio de posición por medio de una transformación de Fourier modificada por un término multiplicativo en el kernel de la transformación dado por la raíz cuadrada de la energía, $\sqrt{c|\mathbf{p}|}$.

En la segunda parte, se plantea una regla de extracción similar a la formulada por Smith & Raymer en [Smith y Raymer \(2007\)](#) y presentada en la [sección 1.3](#), de tal forma que se pueda obtener las funciones de onda del fotón para helicidad positiva y negativa por separado partiendo de la descripción del fotón como un paquete de ondas en estados coherentes, de manera que esta descripción concuerde tanto con la descripción de Sipe como con la de Birula.

La Función de Onda Según Sipe

De acuerdo con [Sipe \(1995\)](#), se puede definir una función de onda en el espacio de posición si se está de acuerdo con redefinir lo que se desea representar con ella. La idea de Sipe consiste en interpretar la integral del cuadrado de la función de onda en el espacio de posición como la energía del fotón.

La función de onda en el espacio-tiempo se define como la proyección del estado del fotón en la base del espacio-tiempo

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{r}, t | \Psi \rangle, \quad (2.75)$$

la cual, para satisfacer la idea de Sipe esta debe definirse para una helicidad dada en términos de la función de onda en el espacio de momento como

$$\Psi_\sigma(\mathbf{r}, t) \equiv \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \Psi_\sigma(\mathbf{p}) \sqrt{c|\mathbf{p}|} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar}, \quad (2.76)$$

donde $c|\mathbf{p}|$ es la energía asociada con el momento \mathbf{p} , ver [ecuación \(1.51\)](#), además esta función es solución a la ecuación de onda del fotón, [ecuación \(1.52\)](#). Se puede observar que la transformación sería de Fourier estándar si no fuese por la raíz cuadrada de la energía que aparece en el kernel. En este caso, la transformación inversa está definida por

$$\Psi_\sigma(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{c|\mathbf{p}|}} \int d^3 r e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar} \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t). \quad (2.77)$$

Ahora se muestra cómo esta definición permite entender la integral del cuadrado de la función de onda en el espacio de posición como la energía del fotón. El valor esperado de la energía del paquete de ondas en el espacio de momento está dado por

$$H = \sum_\sigma \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{p}) \hat{H}_{ph} \Psi_\sigma(\mathbf{p}) = \sum_\sigma \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \hbar\omega_{\mathbf{p}} \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{p}) \Psi_\sigma(\mathbf{p}), \quad (2.78)$$

y donde la función de onda en el espacio de momento puede ser expresada en términos de la función de onda en el espacio de posición por medio de la [ecuación \(2.77\)](#), quedando de la siguiente forma

$$\Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{p}) \Psi_\sigma(\mathbf{p}) = \frac{1}{c|\mathbf{p}|} \int d^3 r' e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}'-c|\mathbf{p}|t)/\hbar} \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}', t) \int d^3 r e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar} \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t) \quad (2.79)$$

la cual al desarrollar los exponenciales se puede simplificar a la expresión

$$\Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{p}) \Psi_\sigma(\mathbf{p}) = \frac{1}{c|\mathbf{p}|} \int d^3 r \int d^3 r' e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}', t) \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t). \quad (2.80)$$

De tal forma que al reemplazar esta expresión en el valor esperado de la energía se obtiene que la energía del fotón en términos de la función de onda en el espacio de posición es

$$H = \sum_\sigma \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{p}}}{c|\mathbf{p}|} \int d^3 r \int d^3 r' e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}', t) \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t), \quad (2.81)$$

desarrollando la integral con respecto al momento se obtiene un delta de Dirac entre las variables del espacio de posición, mientras que la energía $\hbar\omega$ se cancela con el término de energía $c|\mathbf{p}|$, de tal forma que la energía es

$$H = \sum_\sigma \int d^3 r \int d^3 r' \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}', t) \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t), \quad (2.82)$$

y finalmente realizando la integral que contiene al delta de Dirac se obtiene que la energía del fotón es la integral del cuadrado de la función de onda en el espacio de posición

$$H = \sum_{\sigma} \int d^3r \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t). \quad (2.83)$$

Esta sería la forma de encontrar la función de onda del fotón de acuerdo a Sipe, esta función de onda además es solución de la ecuación de onda del fotón, [ecuación \(1.52\)](#). A continuación, se muestra una forma más directa de obtener la función de onda del fotón propuesta por Birula, por medio de una regla de extracción similar a la propuesta por Smith & Raymer, presentada en la [sección 1.3](#). En este caso, se aplica al estado del fotón como un paquete de ondas en estados coherentes.

Regla de Extracción y la Función de Onda

Se desea encontrar la función de onda del fotón como propone Birula que permite separarla en dos componentes de la forma,

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \Psi^{+}(\mathbf{r}, t) \\ \Psi^{-}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

donde $\Psi^{+}(\mathbf{r}, t)$ es la componente de la función de onda del fotón para la helicidad positiva y $\Psi^{-}(\mathbf{r}, t)$ para la helicidad negativa. Las cuales son solución de la ecuación de onda del fotón, [ecuación \(1.54\)](#).

Primero, se parte de la definición hecha previamente del estado del fotón como un paquete de ondas de estados coherentes en el espacio de momento, de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} |\Psi_{\theta}\rangle &= \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \psi_{\sigma}(\mathbf{p}) |e^{i\theta_{\sigma}(\mathbf{p})}\rangle, \\ |\Psi_{\theta}\rangle &= \int \frac{V d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \psi_{+}(\mathbf{p}) |e^{i\theta_{+}(\mathbf{p})}\rangle + \int \frac{V d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \psi_{-}(\mathbf{p}) |e^{i\theta_{-}(\mathbf{p})}\rangle, \\ |\Psi_{\theta}\rangle &= |\Psi_{\theta}^{+}\rangle + |\Psi_{\theta}^{-}\rangle, \end{aligned} \quad (2.85)$$

donde en la segunda línea solo se ha separado la sumatoria de la helicidad para los dos valores posibles $\sigma = \pm$, relacionados con las dos posibles polarizaciones del fotón.

Estos estados están normalizados como se ha mostrado previamente, de tal forma que al expandir la sumatoria de la helicidad la condición de normalización es

$$\langle \Psi_{\theta} | \Psi_{\theta} \rangle = \int \frac{V d^3p}{(2\pi\hbar)^3} |\psi_{+}(\mathbf{p})|^2 + \int \frac{V d^3p}{(2\pi\hbar)^3} |\psi_{-}(\mathbf{p})|^2 = \langle \Psi_{\theta}^{+} | \Psi_{\theta}^{+} \rangle + \langle \Psi_{\theta}^{-} | \Psi_{\theta}^{-} \rangle = 1, \quad (2.86)$$

donde es evidente que la condición de normalización aplica para la suma de los productos de los estados para ambas helicidades y no para cada helicidad por aparte, esto cobra sentido en los posteriores cálculos.

Ahora, si se define el operador de campo para frecuencias positivas y negativas de forma similar a como lo hacen Smith & Raymer, [ecuación \(1.71\)](#), de la siguiente manera

$$\hat{\Psi}^{\pm}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\epsilon_0}{2}\right)^{1/2} \left(\hat{E}^{\pm}(\mathbf{r}, t) \pm ic\hat{B}^{\pm}(\mathbf{r}, t)\right) \quad (2.87)$$

donde los operadores \hat{E}^\pm y \hat{B}^\pm están definidos en la [ecuación \(1.23\)](#). Si se aplica la parte positiva de este operador a la parte del estado con helicidad positiva se obtiene

$$\hat{\Psi}^+(\mathbf{r}, t) |\Psi_\theta^+\rangle = i \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{p}}}{4V}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar} \left(\mathbf{e}_+(\mathbf{p}) + i \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \times \mathbf{e}_+(\mathbf{p}) \right) \psi_+(\mathbf{p}) e^{i\theta_+(\mathbf{p})} |e^{i\theta_+(\mathbf{p})}\rangle, \quad (2.88)$$

donde se ha usado el hecho de que los estados coherentes son estados propios del operador aniquilación. De tal manera, que al cerrar el producto con el campo de vacío al igual que lo hacen Smith & Raymer, en este caso se obtiene la función de onda del fotón para la helicidad positiva, es decir

$$\Psi_\theta^+(\mathbf{r}, t) = \langle \text{vac} | \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}, t) | \Psi_\theta^+ \rangle. \quad (2.89)$$

Ahora, utilizando la definición de los estados coherentes en términos de los estados de Fock, [ecuación \(2.2\)](#), la función de onda del fotón para la helicidad positiva es,

$$\Psi_\theta^+(\mathbf{r}, t) = i \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\frac{c|\mathbf{p}|}{4V}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar} \psi_+(\mathbf{p}) e^{i\theta_+(\mathbf{p})} e^{-1/2} \left(\mathbf{e}_+(\mathbf{p}) + i \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \times \mathbf{e}_+(\mathbf{p}) \right), \quad (2.90)$$

donde la constante $e^{-1/2}$ sale del producto interno entre el vacío y el estado coherente. Además, tomando una base para la polarización de la forma, $\mathbf{e}_\sigma(\mathbf{p}) = [\mathbf{e}_1(\mathbf{p}) + i\sigma\mathbf{e}_2(\mathbf{p})]/\sqrt{2}$, donde los vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{p}/|\mathbf{p}|)$ forman un sistema coordinado diestro, y por lo tanto se satisface que

$$\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \times \mathbf{e}_\sigma(\mathbf{p}) = -i\sigma\mathbf{e}_\sigma(\mathbf{p}), \quad (2.91)$$

entonces, la función de onda se puede simplificar como

$$\Psi_\theta^+(\mathbf{r}, t) = i \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\frac{c|\mathbf{p}|}{V}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar} \psi_+(\mathbf{p}) e^{i\theta_+(\mathbf{p})} e^{-1/2} \mathbf{e}_+(\mathbf{p}), \quad (2.92)$$

la cual puede ser aún más resumida si se define el vector en el espacio de momento de la forma

$$\Psi^+(\mathbf{p}) \equiv \frac{\psi_+(\mathbf{p})}{\sqrt{V}} e^{-1/2} \mathbf{e}_+(\mathbf{p}), \quad (2.93)$$

de tal manera que la función de onda del fotón para la helicidad positiva se puede escribir como

$$\Psi_\theta^+(\mathbf{r}, t) = i \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \Psi^+(\mathbf{p}) e^{i\theta_+(\mathbf{p})} \sqrt{c|\mathbf{p}|} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar}. \quad (2.94)$$

Se observa que la función de onda del fotón encontrada tiene la forma de la [ecuación \(1.76\)](#) encontrada por Smith & Raymer y también de la [ecuación \(1.51\)](#) formulada por Sipe. Sin embargo, la diferencia radica en una fase proveniente del estado coherente y la constante $e^{-1/2}$ que se obtiene del producto interno del estado coherente con el estado de vacío debido a la normalización de los estados coherentes. No obstante, estos términos adicionales no están involucrados en la ecuación de onda del fotón, de tal manera que la función encontrada también satisface la ecuación de onda del fotón para helicidad positiva

$$i\hbar\partial_t\Psi_\theta^+(\mathbf{r}, t) = c\hbar\nabla \times \Psi_\theta^+(\mathbf{r}, t), \quad (2.95)$$

la cual puede ser fácilmente demostrada aplicando la derivada temporal y el rotacional teniendo en cuenta la condición de la [ecuación \(2.91\)](#).

De forma análoga se puede hallar la función de onda del fotón para helicidad negativa, calculando los elementos de la matriz de operador de campo para frecuencias negativas entre el estado de vacío y el estado del fotón para helicidad negativa, esto es

$$\Psi_{\theta}^{-}(\mathbf{r}, t) = \langle \Psi_{\theta}^{-} | \hat{\Psi}^{-}(\mathbf{r}, t) | \text{vac} \rangle, \quad (2.96)$$

el cálculo es análogo al realizado para encontrar la función de onda para la helicidad positiva, al realizarlo se obtiene un resultado similar

$$\begin{aligned} \Psi_{\theta}^{-}(\mathbf{r}, t) = & -i \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \psi_{-}(\mathbf{p}) \left(\frac{c|\mathbf{p}|}{4V} \right)^{1/2} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar} e^{-i\theta_{-}(\mathbf{p})} e^{-1/2} \\ & \times \left(\mathbf{e}_{-}(\mathbf{p}) - i \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \times \mathbf{e}_{-}(\mathbf{p}) \right), \end{aligned} \quad (2.97)$$

la cual puede ser simplificada de forma análoga a como se hizo para la función de onda con helicidad positiva, de tal manera que esta se puede finalmente expresar como

$$\Psi_{\theta}^{-}(\mathbf{r}, t) = -i \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \Psi^{-}(\mathbf{p}) e^{-i\theta_{-}(\mathbf{p})} \sqrt{c|\mathbf{p}|} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar}, \quad (2.98)$$

donde la función $\Psi^{-}(\mathbf{p})$, está definida como,

$$\Psi^{-}(\mathbf{p}) \equiv \frac{\psi_{-}(\mathbf{p})}{\sqrt{V}} e^{-1/2} \mathbf{e}_{-}(\mathbf{p}). \quad (2.99)$$

Igualmente esta función de onda es solución a la ecuación de onda para fotones con helicidad negativa

$$i\hbar\partial_t\Psi_{\theta}^{-}(\mathbf{r}, t) = -c\hbar\nabla \times \Psi_{\theta}^{-}(\mathbf{r}, t), \quad (2.100)$$

la cual se puede mostrar de manera análoga a como se haría con la ecuación para helicidad positiva.

Finalmente, se ha podido encontrar las dos componentes de la función de onda del fotón, donde cada componente corresponde con la función de onda del fotón para una helicidad, la función de onda unificada toma la forma

$$\mathcal{F}_{\theta} = \begin{pmatrix} \Psi_{\theta}^{+}(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_{\theta}^{-}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (2.101)$$

la cual es solución a las ecuaciones de onda del fotón, [ecuación \(1.56\)](#), [\(1.57\)](#) y [\(1.58\)](#). Y además, es la formulada por Birula originalmente en [Białynicki-Birula \(1994\)](#). La [ecuación \(1.58\)](#), se cumple si

$$\Psi_{\theta}^{+}(\mathbf{r}, t) = \left(\Psi_{\theta}^{-}(\mathbf{r}, t) \right)^*, \quad (2.102)$$

la cual se satisface bajo la condición que

$$\Psi^{+}(\mathbf{p}) e^{i\theta_{+}(\mathbf{p})} = \left(\Psi^{-}(\mathbf{p}) e^{-i\theta_{-}(\mathbf{p})} \right)^*, \quad (2.103)$$

y como para los vectores de polarización, de la forma en que se definieron anteriormente, se cumple que

$$\mathbf{e}_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_1(\mathbf{p}) + i\mathbf{e}_2(\mathbf{p})] = (\mathbf{e}_-(\mathbf{p}))^*, \quad (2.104)$$

entonces finalmente la condición para que la función de onda para helicidad positiva sea el complejo conjugado de la función de onda para helicidad negativa es,

$$\begin{aligned} \psi_+(\mathbf{p}) &= (\psi_-(\mathbf{p}))^*, \\ e^{i\theta_+(\mathbf{p})} &= (e^{-i\theta_-(\mathbf{p})})^*, \end{aligned} \quad (2.105)$$

de tal forma que la [ecuación \(2.102\)](#) se satisface.

Por otra parte, la energía del fotón, está dada según por Birula en [Białynicki-Birula \(1994\)](#), por la integral del producto de la siguiente forma

$$H = \int d^3r \mathcal{F}_\theta^\dagger \cdot \mathcal{F}_\theta = \int d^3r \left[(\Psi_\theta^+(\mathbf{r}, t))^\dagger \Psi_\theta^+(\mathbf{r}, t) + (\Psi_\theta^-(\mathbf{r}, t))^\dagger \Psi_\theta^-(\mathbf{r}, t) \right] \quad (2.106)$$

la cual puede ser expresada como,

$$H = \sum_\sigma \int d^3r (\Psi_\theta^\sigma(\mathbf{r}, t))^\dagger \Psi_\theta^\sigma(\mathbf{r}, t), \quad (2.107)$$

y de esta forma se evidencia que es equivalente a la formulación de Sipe presentada en la [ecuación \(2.83\)](#). La cual, si se expresa en el espacio de momento toma la siguiente forma,

$$H = \sum_\sigma \int \frac{V d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \hbar\omega_{\mathbf{p}} (\Psi^\sigma(\mathbf{p}))^\dagger \Psi^\sigma(\mathbf{p}), \quad (2.108)$$

Esto es evidencia de que la función de onda encontrada es válida para describir la función de onda del fotón y relaciona directamente el formalismo desarrollado por Birula con el de Sipe por medio de la regla de extracción aquí definida. Que además, concuerda con la descripción de función de onda del fotón presentada en trabajos como: [Białynicki-Birula \(1994, 1996\)](#); [Sipe \(1995\)](#); [Smith y Raymer \(2007\)](#).

En la siguiente sección se compara la función de onda del fotón asociada al paquete de ondas en estados coherentes con el de estados de Fock.

2.4. Comparación entre Modelos del Fotón

A continuación se resume el modelo del fotón como un paquete de ondas en estados de Fock y en estados coherentes, es decir, el *Fotón de Fase*.

En Estados de Fock

En términos del estado de vacío

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) |\text{vac}\rangle$$

En términos de estados de Fock

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) |1_{\sigma}(\mathbf{k})\rangle$$

Normalización

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) = 1$$

Ortogonalidad

$$\langle\Psi|\Phi\rangle \neq 0$$

Regla de extracción de Smith & Raymer

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \langle\text{vac}|\hat{\Psi}_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{r}, t)|\Psi\rangle$$

Operador de campo

$$\hat{\Psi}_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\epsilon_0}{2}\right)^{1/2} \left(\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + i\sigma c \hat{\mathbf{B}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)\right)$$

Función de onda del fotón

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \psi_{\sigma}(\mathbf{p}) \sqrt{\frac{c|\mathbf{p}|}{V}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - c|\mathbf{p}|t)/\hbar} \mathbf{e}_{\mathbf{p},\sigma}$$

Solución a

$$i\hbar\partial_t\Psi(\mathbf{r}, t) = c\left(\mathbf{S}\cdot\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\Psi(\mathbf{r}, t)$$

Energía del fotón

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 r \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) \\ &= \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \hbar\omega_{\mathbf{p}} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p}) \psi_{\sigma}(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Permite distinguir entre fotones de igual energía

NO**Fotón de Fase**

En términos del estado de vacío

$$|\Psi_{\theta}\rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) \hat{D}\left(e^{i\theta_{\sigma}(\mathbf{k})}\right) |\text{vac}\rangle$$

En términos de estados coherentes

$$|\Psi_{\theta}\rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) |e^{i\theta_{\sigma}(\mathbf{k})}\rangle$$

Normalización

$$\langle\Psi_{\theta}|\Psi_{\theta}\rangle = \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \psi_{\sigma}(\mathbf{k}) = 1$$

Ortogonalidad

$$\langle\Psi_{\theta}|\Phi_{\nu}\rangle \neq 0$$

Regla de extracción

$$\Psi_{\theta}^{+}(\mathbf{r}, t) = \langle\text{vac}|\hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r}, t)|\Psi_{\theta}^{+}\rangle$$

$$\Psi_{\theta}^{-}(\mathbf{r}, t) = \langle\Psi_{\theta}^{-}|\hat{\Psi}^{-}(\mathbf{r}, t)|\text{vac}\rangle$$

Operador de campo

$$\hat{\Psi}^{\pm}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\epsilon_0}{2}\right)^{1/2} \left(\hat{E}^{\pm}(\mathbf{r}, t) \pm ic\hat{B}^{\pm}(\mathbf{r}, t)\right)$$

Función de onda del fotón

$$\mathcal{F}_{\theta} = \begin{pmatrix} \Psi_{\theta}^{+}(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_{\theta}^{-}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

Solución a

$$i\hbar\partial_t\mathcal{F}_{\theta} = c\rho_3\left(\mathbf{S}\cdot\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\mathcal{F}_{\theta}$$

Energía del fotón

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\sigma} \int d^3 r (\Psi_{\theta}^{\sigma}(\mathbf{r}, t))^{\dagger} \Psi_{\theta}^{\sigma}(\mathbf{r}, t) \\ &= \sum_{\sigma} \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \hbar\omega_{\mathbf{p}} (\Psi^{\sigma}(\mathbf{p}))^{\dagger} \Psi^{\sigma}(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Permite distinguir entre fotones de igual energía

SI

2.4.1. *El Fotón de Fase*

La principal característica de describir el estado de un fotón como un paquete de ondas en estados coherentes es que esta permite diferenciar entre dos fotones por medio de una fase asociada al fotón que se ha denominado como *Fotón de Fase*, aún en el caso en que ambos fotones tengan la misma energía. Por ejemplo, dos fotones con funciones de onda asociadas de la forma

$$\mathcal{F}_\theta = \begin{pmatrix} \Psi_\theta^+(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_\theta^-(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \Psi_\eta^+(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_\eta^-(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \mathcal{F}_\eta, \quad (2.109)$$

son diferentes debido a la fase de cada fotón. Sin embargo, al calcular la probabilidad de encontrar la energía del fotón, es decir, tomar el cuadrado de la función de onda normalizada por la energía total, ver ecuación (1.64), se tiene que,

$$\frac{|\mathcal{F}_\theta|^2 d^3r}{\int d^3r |\mathcal{F}_\theta|^2} = \frac{|\mathcal{F}_\eta|^2 d^3r}{\int d^3r |\mathcal{F}_\eta|^2}, \quad (2.110)$$

es decir, ambas funciones representan la misma probabilidad de encontrar el fotón en la misma región del espacio. Más aún, no es posible distinguir de esta forma la función de onda formulada para el fotón en estados de Fock ya que igualmente se cumple que,

$$\frac{|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r}{\int d^3r |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2} = \frac{|\mathcal{F}_\theta|^2 d^3r}{\int d^3r |\mathcal{F}_\theta|^2}, \quad (2.111)$$

donde $\Psi(\mathbf{r}, t)$ representa la función de onda del fotón descrito como un paquete de ondas en estados de Fock, ecuación (1.76). Se pensaría que esto significa que las dos descripciones, la encontrada por Smith & Raymer y la descripción aquí presentada con estados coherentes, son idénticas.

No obstante, esto no es cierto, ya que la fase global que tiene el estado del fotón cobra relevancia cuando se tiene un experimento de interferencia. Dicho fenómeno estudiado con la descripción aquí propuesta depende de la fase de los fotones mientras que con la propuesta de estados de Fock no depende de ninguna fase, es decir

$$|\Psi(\mathbf{r}, t) + \Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \neq |\mathcal{F}_\theta + \mathcal{F}_\eta|^2, \quad (2.112)$$

por lo tanto, la propuesta en estados coherentes no es idéntica a la descripción en estados de Fock. Además, con la descripción en estados coherentes se puede tener dos fotones con la misma energía pero diferenciarse por la fase, es decir, es posible diferenciar dos fotones que posean la misma energía, caso contrario a la descripción en estados de Fock. De hecho, los estados $|\Psi_\theta\rangle$ y $|\Psi_\eta\rangle$, tienen la misma energía,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_\theta | \hat{H}_{ph} | \Psi_\theta \rangle &= \langle \Psi_\eta | \hat{H}_{ph} | \Psi_\eta \rangle \\ \sum_\sigma \int d^3r (\Psi_\theta^\sigma(\mathbf{r}, t))^\dagger \Psi_\theta^\sigma(\mathbf{r}, t) &= \sum_\sigma \int d^3r (\Psi_\eta^\sigma(\mathbf{r}, t))^\dagger \Psi_\eta^\sigma(\mathbf{r}, t) \\ \sum_\sigma \int \frac{V d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \hbar\omega_{\mathbf{p}} (\Psi^\sigma(\mathbf{p}))^\dagger \Psi^\sigma(\mathbf{p}) &= \sum_\sigma \int \frac{V d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \hbar\omega_{\mathbf{p}} (\Psi^\sigma(\mathbf{p}))^\dagger \Psi^\sigma(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (2.113)$$

sin embargo, son estados que se diferencian por su fase.

En el próximo capítulo se usa esta posibilidad de distinguir fotones que tengan la misma energía y esta característica de atribuirle una fase al fotón, para abordar el problema de la generación de la coherencia en el proceso de emisión estimulada.

Capítulo 3

Dos Fotones Coherentes

'I like to play about with equations, just looking for beautiful mathematical relations which maybe don't have any physical meaning at all. Sometimes they do.'
Paul Adrien Maurice Dirac

En este capítulo se aborda la explicación de la generación de la coherencia en el fenómeno de emisión estimulada. La hipótesis que se trabaja para desarrollar esta cuestión está basada en el resultado encontrado en el anterior capítulo, en el cual dos fotones se pueden distinguir por una función de peso que define su contenido espectral, una helicidad (polarización) y una fase, las cuales especifican completamente el estado de un fotón.

En la primera sección se estudia el fenómeno de emisión estimulada, se explica en qué consiste y se expone brevemente la formulación hecha por Albert Einstein en el estudio de la radiación del cuerpo negro. Después, se muestra el estudio formal de la emisión estimulada en la teoría de la segunda cuantización y se presenta por qué la emisión estimulada se considera como un proceso por medio del cual se logra clonar el estado de un fotón. Finalmente, se menciona la diferencia entre los fenómenos de emisión espontánea y estimulada, y se explica su importancia para poder obtener una fuente de radiación coherente como el láser.

En la segunda sección se explica la generación de la coherencia, entendiendo el fenómeno de emisión estimulada como una copia de la función de onda del fotón descrito como un paquete de ondas de estados coherentes, por lo tanto estos tendrán la misma energía, polarización y fase.

3.1. La Emisión Estimulada

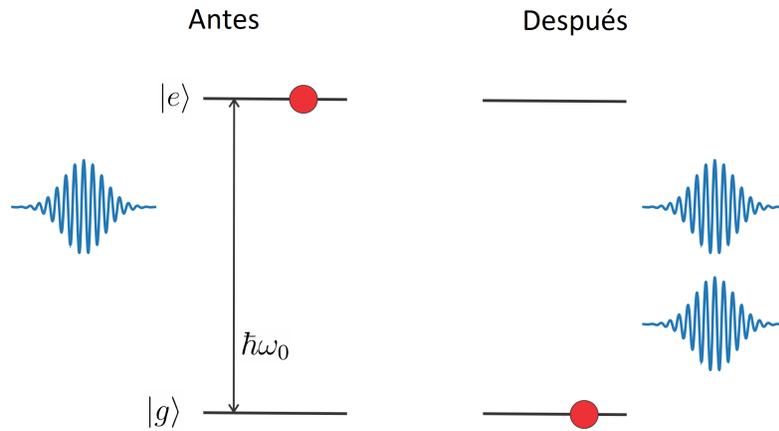
La emisión estimulada es el fenómeno en el cual un electrón que se encuentra en un estado excitado de un átomo o molécula decae a un estado base emitiendo un fotón debido a una interacción con un fotón incidente, ver [figura 3.1](#). Este fenómeno es el principal mecanismo para la obtención de radiación coherente en una cavidad, es decir, del Láser.

Actualmente se puede estudiar la emisión estimulada en el formalismo de la segunda cuantización como un operador amplificador mono-modal, sin embargo, Albert Einstein fue el que introdujo este fenómeno. A continuación se muestra el tratamiento estadístico de Einstein, el cual no representa una explicación fundamental del principio de funcionamiento de este fenómeno pero evidencia la importancia del mismo. Posteriormente, se presenta la

explicación del fenómeno en la teoría de la segunda cuantización del campo electromagnético, la cual consiste básicamente en decir que se crea un fotón, y mas bien su explicación parece demasiado simple como para explicar completamente este fenómeno.

Figura 3.1

Fenómeno de emisión estimulada



Nota. El electrón en el estado excitado decae debido a la interacción con el fotón incidente.

3.1.1. Introducción del Fenómeno por Albert Einstein

Albert Einstein fue el primero en mencionar este fenómeno en [Einstein \(1917\)](#), en el cual, describiendo las tasas de emisión estimulada, emisión espontánea y de absorción de la radiación cuantizada, logró reproducir la ley de radiación de cuerpo negro de Planck. A continuación, se muestra la línea de pensamiento con la cual Einstein introduce la emisión estimulada.

Se parte de un sistema de N átomos confinados en una cavidad con paredes totalmente reflectivas, de los cuales N_e átomos se encuentran en un estado excitado, $|e\rangle$, y N_g se encuentran en el estado base, $|g\rangle$, y además se considera que en este sistema de átomos ocurren los fenómenos de emisión espontánea, emisión estimulada y absorción de fotones. También se asume que la frecuencia de los fotones emitidos corresponde con la frecuencia de transición entre el estado base y el estado excitado, $\omega = (E_e - E_g)/\hbar$.

Ahora, analizando la conservación de la energía del sistema, es decir, todo átomo que decae emite un fotón y todo átomo que absorbe destruye uno, entonces las tasas de cambio de la población de los átomos en el estado excitado y en el estado base deben satisfacer las siguientes ecuaciones diferenciales,

$$\frac{dN_e}{dt} = -[A + BU(\omega)]N_e + CU(\omega)N_g, \quad (3.1)$$

$$\frac{dN_g}{dt} = -CU(\omega)N_g + [A + BU(\omega)]N_e, \quad (3.2)$$

donde, los coeficientes A, B, C se les conoce como coeficientes de Einstein, [Carmichael \(2013\)](#); [Fox \(2006\)](#); [Gerry y Knight \(2005\)](#); [Grynberg, Aspect, y Fabre \(2010\)](#). Además, AN_e es el

aumento del número de átomos en el estado $|g\rangle$ debido a la emisión espontánea desde el estado $|e\rangle$; $BU(\omega)N_e$ es el aumento del número de átomos en el estado $|g\rangle$ debido a la emisión estimulada desde el estado $|e\rangle$, con $U(\omega)$ siendo la densidad espectral de energía de la radiación; finalmente, $CU(\omega)N_g$ es el aumento en la población de átomos en el estado $|e\rangle$ debido a la absorción de fotones.

Cuando el sistema alcanza el estado de equilibrio, el número de átomos en cada estado permanece constante, por lo tanto, las tasas de cambio anteriores equivalen a cero, por lo tanto se obtiene

$$[A + BU(\omega)]N_e = CU(\omega)N_g, \quad (3.3)$$

posteriormente, Einstein hace uso de la relación encontrada por Boltzmann,

$$\frac{N_g}{N_e} = \exp[(E_a - E_b)/kT] = \exp(\hbar\omega/kT), \quad (3.4)$$

de esta manera, igualando las dos ecuaciones anteriores, Einstein finalmente encuentra la distribución de radiación de cuerpo negro,

$$U(\omega) = \frac{A}{C \exp(\hbar\omega/kT) - B}, \quad (3.5)$$

consecuentemente, Einstein demostró la existencia de estas tres formas de interacción entre la luz y la materia, y la necesidad de la emisión estimulada para explicar la radiación de cuerpo negro.

Sin embargo, este tratamiento no representa una explicación cuántica del fenómeno de emisión estimulada. A continuación, se presenta una explicación de la emisión estimulada en el formalismo de la segunda cuantización, y representa el modelo actual y la forma en que se estudia la emisión estimulada.

3.1.2. *En la Segunda Cuantización*

La emisión estimulada se entiende como un proceso en el cual se obtiene una copia exacta del estado cuántico del fotón que estimula la emisión. Por otra parte, Wootters & Zurek demostraron en [Wootters y Zurek \(1982\)](#) que no puede existir un sistema amplificador cuántico* que permita obtener tantas copias como se desee de un estado cuántico, ni siquiera por medio de la emisión estimulada ya que esta estaría limitada por el fenómeno de emisión espontánea, el cual crearía fotones que no son clones del estado deseado. Esto significa que, si se desean $2N$ estados clonados del estado de un fotón, realmente se obtendrían N fotones clones obtenidos por emisión estimulada y N fotones totalmente diferentes obtenidos por emisión espontánea, en el caso de que cada fenómeno tenga igual probabilidad de ocurrir.

No obstante, se ha demostrado que existen sistemas en los cuales se optimiza la producción de fotones clones por medio de la emisión estimulada, básicamente consiguiendo que la tasa de emisión estimulada sea mayor a la tasa de emisión espontánea, [Lamas-Linares, Simon, Howell, y Bouwmeester \(2002\)](#); [Simon y cols. \(2000\)](#). Por lo que el fenómeno de emisión estimulada es el mecanismo actual con más eficiencia para clonar estados cuánticos.

*Estos sistemas amplifican un estado cuántico en particular, es decir, hacen que dicho estado a la salida del sistema sea el más probable.

Por otra parte, el fenómeno de emisión estimulada se puede modelar como un amplificador mono-modal, esta descripción es equivalente a interpretar la emisión estimulada como la interferencia de fotones indistinguibles, y la emisión espontánea como una interferencia de fotones distinguibles, [Ou \(2007\)](#); [Sun y cols. \(2007\)](#).

El principio fundamental del fenómeno de emisión estimulada se estudia en la segunda cuantización por medio del Hamiltoniano de interacción luz-materia del modelo de Jaynes-Cummings, [Gerry y Knight \(2005\)](#). En dicho modelo, se tiene que para un átomo de dos niveles interactuando con radiación cuantizada, ver [figura 3.1](#), la dinámica está descrita por el Hamiltoniano,

$$\hat{H} = \hbar\lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger), \quad (3.6)$$

donde los operadores $\hat{\sigma}_\pm$ se conocen como operadores de transición, ya que al aplicarlos estos realizan la transición entre el estado base del átomo, $|g\rangle$, y el estado excitado de este, $|e\rangle$, y están definidos como $\hat{\sigma}_+ \equiv |e\rangle \langle g|$ y $\hat{\sigma}_- \equiv |g\rangle \langle e|$. Además, la constante λ representa el valor esperado de la interacción entre la radiación cuantizada y el átomo bajo la aproximación dipolar, y la cual toma la forma,

$$\lambda = -\frac{\langle e|\hat{d}|g\rangle}{\hbar} \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz). \quad (3.7)$$

Entonces, el operador de evolución temporal para este Hamiltoniano, y bajo la condición de que solo se emite un fotón ya sea por emisión espontánea o estimulada, este toma la forma,

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \approx 1 - i\hat{H}t/\hbar, \quad (3.8)$$

donde la expansión se corta debido a la condición de que solo se emite un fotón, hecho que queda claro con el análisis que se hace a continuación. Si el estado inicial del sistema átomo-radiación se compone de un átomo excitado y el vacío es decir $|\psi\rangle = |e\rangle |\text{vac}\rangle$, entonces el sistema evoluciona como,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle, \\ |\psi(t)\rangle &= |e\rangle |\text{vac}\rangle - it\lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) |e\rangle |\text{vac}\rangle, \\ |\psi(t)\rangle &= |e\rangle |\text{vac}\rangle - it\lambda |g\rangle |1_{\mathbf{k}}\rangle, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde el estado final es una combinación lineal del sistema en un estado donde el átomo no ha decaído y el sistema en el estado $|g\rangle |1_{\mathbf{k}}\rangle$ cuando el átomo excitado decae emitiendo un fotón con la energía de transición entre los niveles del átomo, $E = \hbar\omega$, esta emisión es espontánea ya que el vacío era el que estaba interactuando con el átomo.

Para la emisión estimulada el estado inicial del sistema estaría dado por $|\phi\rangle = |e\rangle |1_{\mathbf{k}}\rangle$, de tal forma que la evolución del sistema en este caso es,

$$|\phi(t)\rangle = |e\rangle |1_{\mathbf{k}}\rangle - it\lambda |g\rangle |2_{\mathbf{k}}\rangle, \quad (3.10)$$

donde nuevamente es una combinación de los dos casos, el primero en el cual el sistema se mantiene igual y el átomo no decae, y el segundo, $|g\rangle |2_{\mathbf{k}}\rangle$, en el cual el átomo decae por emisión estimulada emitiendo un fotón con la energía de transición e idéntico al fotón que causó la emisión.

No obstante, este formalismo no permite diferenciar entre el fotón emitido por emisión espontánea y el emitido en la emisión estimulada, esto es porque los dos fotones tienen el mismo estado en el mismo modo, es decir, la misma energía y por lo tanto no hay forma de distinguirlos. La única forma de poder evidenciar que los fotones que se obtienen en la emisión estimulada son idénticos, es por medio de fenómenos de interferencia de fotones, como en el experimento de Hong-Ou-Mandel, [Hong, Ou, y Mandel \(1987\)](#), en los cuales juega un papel importante la visión del fotón como un paquete de ondas ya que este representa una generalización de la descripción del estado de un fotón, [Ou \(2007\)](#).

En la siguiente sección se muestran las implicaciones de clonar el estado de un fotón por medio del fenómeno de la emisión estimulada, usando la descripción del fotón como un paquete de ondas en estados coherentes presentada en el anterior capítulo. También se muestra cómo por medio de la función de onda de estados coherentes se pueden diferenciar entre el fotón emitido por emisión espontánea y el emitido por emisión estimulada.

3.2. La Generación de Dos Fotones Idénticos

Haciendo uso de la descripción del estado de un fotón como un paquete de ondas en estados coherentes, es posible diferenciar entre dos fotones aún en el caso en que estos tengan la misma energía, ver [sección 2.4](#). En esta sección se realiza el análisis del fenómeno de emisión estimulada por medio de esta descripción para el estado de un fotón. Por lo tanto, se muestra cómo abordar la creación y la aniquilación de estos estados de paquetes de ondas en estados coherentes por medio de operadores bosónicos, y posteriormente, se relaciona de nuevo la función de onda del fotón con los estados definidos por estos operadores de creación y aniquilación, mostrando así la equivalencia entre el trabajo realizado en el capítulo anterior y la descripción por medio de los operadores bosónicos de creación y aniquilación. Finalmente, se reescribe el Hamiltoniano de interacción de Jaynes-Cummings usando esta descripción de operadores y se estudia la emisión espontánea y estimulada, y se muestra de manera contundente por qué el fotón emitido por emisión estimulada es un clon del fotón que causa la emisión y cómo se diferencia del fotón emitido por emisión espontánea.

3.2.1. Operadores Bosónicos para los Paquetes de Ondas

En el capítulo anterior se definió el estado de un fotón en términos de estados coherentes, de la siguiente forma,

$$|\Psi_\theta\rangle = \sum_\sigma \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \psi_\sigma(\mathbf{k}) \hat{D}(e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})}) |\text{vac}\rangle. \quad (3.11)$$

Se pueden definir operadores de creación y aniquilación para estos paquetes de ondas como, $\hat{b}_{j,\sigma,\theta}^\dagger$ y $\hat{b}_{j,\sigma,\theta}$, respectivamente, definidos de forma análoga a la formulación presentada en [Smith y Raymer \(2007\)](#), como

$$\begin{aligned} \hat{b}_{j,\sigma,\theta}^\dagger &\equiv \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} U_j^{(\sigma)}(\mathbf{k}) \hat{D}(e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})}), \\ \hat{b}_{j,\sigma,\theta} &\equiv \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} (U_j^{(\sigma)}(\mathbf{k}))^\dagger \hat{D}^\dagger(e^{i\theta_\sigma(\mathbf{k})}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde, de acuerdo con [Smith y Raymer \(2007\)](#), $U_j^{(\sigma)}(\mathbf{k})$ es una matriz unitaria, esto implica que para determinado valor de helicidad esta satisface,

$$\sum_j U_j^{(\sigma)}(\mathbf{k}') U_j^{(\sigma)}(\mathbf{k}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \quad \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} (U_{j'}^{(\sigma)}(\mathbf{k}))^\dagger U_j^{(\sigma)}(\mathbf{k}) = \delta_{jj'}, \quad (3.13)$$

la cual además determina totalmente el contenido espectral del paquete de ondas, es decir, actúa como función de peso.

Como consecuencia directa de estas condiciones, los operadores de creación y aniquilación aquí definidos satisfacen la relación bosónica,

$$[\hat{b}_{j,\sigma,\theta}, \hat{b}_{j',\sigma',\theta}^\dagger] = \delta_{jj'} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (3.14)$$

la cual se puede mostrar de forma sencilla tomando el valor esperado del conmutador con el campo de vacío, y teniendo en cuenta que estos operadores actúan de la siguiente forma

$$|1_{j,\sigma,\theta}\rangle = \hat{b}_{j,\sigma,\theta}^\dagger |\text{vac}\rangle, \quad |\text{vac}\rangle = \hat{b}_{j,\sigma,\theta} |1_{j,\sigma,\theta}\rangle, \quad \hat{b}_{j,\sigma,\theta} |\text{vac}\rangle = 0. \quad (3.15)$$

Entonces tomando el valor esperado del conmutador se obtiene,

$$\begin{aligned} \langle \text{vac} | [\hat{b}_{j,\sigma,\theta}, \hat{b}_{j',\sigma',\theta}^\dagger] | \text{vac} \rangle &= \langle \text{vac} | \hat{b}_{j,\sigma,\theta} \hat{b}_{j',\sigma',\theta}^\dagger - \hat{b}_{j',\sigma',\theta}^\dagger \hat{b}_{j,\sigma,\theta} | \text{vac} \rangle \\ &= \langle 1_{j,\sigma,\theta} | 1_{j',\sigma',\theta} \rangle \\ &= \delta_{jj'} \delta_{\sigma\sigma'}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde $|1_{j,\sigma,\theta}\rangle$ denota el estado de un fotón descrito por un paquete de ondas en el modo j , es decir, esta define el paquete de ondas, con helicidad σ y con fase θ , entonces, el estado de un fotón se escribe como

$$|1_{j,\sigma,\theta}\rangle = \hat{b}_{j,\sigma,\theta}^\dagger |\text{vac}\rangle = \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} U_j^{(\sigma)}(\mathbf{k}) \hat{D}(e^{i\theta\sigma(\mathbf{k})}) |\text{vac}\rangle, \quad (3.17)$$

el cual tiene la misma forma del estado descrito originalmente como un paquete de ondas en estados coherentes, [ecuación \(3.11\)](#), para una helicidad dada. Se puede concluir entonces, que esta descripción por medio de los operadores creación y aniquilación concuerda con la descripción del fotón propuesta en el capítulo anterior.

Para terminar de mostrar la equivalencia entre la descripción por medio de estos operadores de creación y aniquilación y la descripción presentada previamente del estado del fotón como un paquete de ondas en estados coherentes, se muestra que se encuentra la misma función de onda del fotón, la cual se puede hallar por medio de la regla de extracción propuesta previamente, de tal forma que

$$\begin{aligned} \Psi_{j,\theta}^+(\mathbf{r}, t) &= \langle \text{vac} | \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}, t) | 1_{j,+,\theta} \rangle \\ \Psi_{j,\theta}^-(\mathbf{r}, t) &= \langle 1_{j,-,\theta} | \hat{\Psi}^-(\mathbf{r}, t) | \text{vac} \rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde el operador de campo está definido en la [ecuación \(2.87\)](#). De manera que estas funciones de onda toman la forma,

$$\begin{aligned} \Psi_{j,\theta}^+(\mathbf{r}, t) &= i \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{U}_j^{(+)}(\mathbf{p}) e^{i\theta_+(\mathbf{p})} \sqrt{c|\mathbf{p}|} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar}, \\ \Psi_{j,\theta}^-(\mathbf{r}, t) &= -i \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{U}_j^{(-)}(\mathbf{p}) e^{-i\theta_-(\mathbf{p})} \sqrt{c|\mathbf{p}|} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

en donde la función vectorial \mathbf{U} está definida de forma análoga a las ecuaciones (2.93) y (2.99), como

$$\mathbf{U}_j^{(\pm)}(\mathbf{p}) \equiv \frac{U_j^{(\pm)}(\mathbf{p})}{\sqrt{V}} e^{-1/2} \mathbf{e}_{\pm}(\mathbf{p}). \quad (3.20)$$

Y donde finalmente la función de onda del fotón unificando las dos helicidades toma la forma,

$$\mathcal{F}_{j,\theta} = \begin{pmatrix} \Psi_{j,\theta}^+(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_{j,\theta}^-(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

siendo solución a la ecuación de onda del fotón,

$$i\hbar\partial_t \mathcal{F}_{j,\theta} = c\rho_3 \left(\mathbf{S} \cdot \frac{\hbar}{i} \nabla \right) \mathcal{F}_{j,\theta}. \quad (3.22)$$

Se concluye consecuentemente que la descripción por medio de los operadores aniquilación y creación definidos en la ecuación (3.12) es equivalente a todo el tratamiento del estado del fotón en estados coherentes presentado en el capítulo 2. Habiendo mostrado esta equivalencia, se puede ahora sí abordar la interacción entre un fotón y un átomo de dos niveles.

3.2.2. Emisión Espontánea y Emisión Estimulada

El Hamiltoniano de interacción, ecuación (3.6), puede ser modificado en términos del operador creación y aniquilación de paquetes de ondas, ecuación (3.12), de tal forma que,

$$\hat{H} = \sum_{j,\sigma} C_{j,\sigma} \left(\hat{\sigma}_+ \hat{b}_{j,\sigma,\theta} + \hat{\sigma}_- \hat{b}_{j,\sigma,\theta}^\dagger \right), \quad (3.23)$$

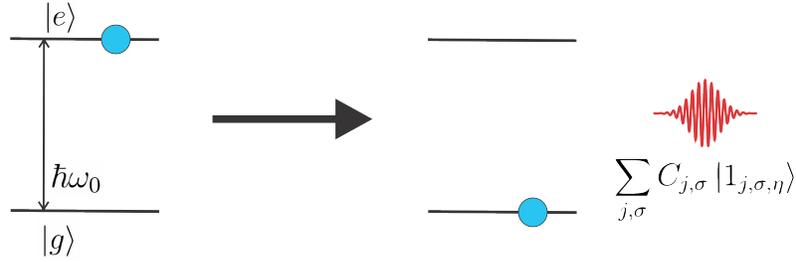
donde $C_{j,\sigma}$ contiene las constantes \hbar y λ , y además caracteriza la emisión del átomo, ya que $|C_{j,\sigma}|^2$ representa la probabilidad de que el átomo emita o absorba un paquete de ondas en el modo j y con helicidad σ , por lo tanto se cumple que

$$\sum_{j,\sigma} |C_{j,\sigma}|^2 = 1, \quad (3.24)$$

este valor depende principalmente del estado del átomo, de su ambiente electromagnético y de características como el ancho de banda de las líneas de emisión, ya que j define la componente espectral del fotón la cual depende de la transición electrónica en el átomo. De esta manera, este operador representa una forma generalizada y como consecuencia, el paquete de ondas que se crea puede tener cualquier función de peso, polarización y fase.

Ahora, se analiza de nuevo el fenómeno de emisión espontánea y emisión estimulada por medio de esta descripción. Si se tiene un sistema en el estado inicial $|\psi_i\rangle = |e\rangle |\text{vac}\rangle$, donde el átomo está excitado y se encuentra en un espacio sin fotones, entonces al operarlo por el Hamiltoniano de interacción, el estado final del sistema será

$$\begin{aligned} |\psi_f\rangle &= \hat{H} |\psi_i\rangle, \\ |\psi_f\rangle &= \sum_{j,\sigma} C_{j,\sigma} |g\rangle \hat{b}_{j,\sigma,\eta}^\dagger |\text{vac}\rangle, \\ |\psi_f\rangle &= \sum_{j,\sigma} |g\rangle C_{j,\sigma} |1_{j,\sigma,\eta}\rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Figura 3.2*Proceso de emisión espontánea*

Nota. El electrón en el estado excitado decae debido a la interacción con el campo de vacío.

Esto significa que el sistema en el estado final está en una superposición de todos los posibles paquetes de ondas que puede emitir el átomo, ver [figura 3.2](#), el cual es un resultado sorprendente ya que en la medición, el fotón colapsará a un determinado modo con una energía, polarización y fase determinada. Además, la probabilidad de que el sistema haya emitido el fotón en un estado específico y el átomo decaiga al estado base, es decir, la probabilidad de que el sistema esté en el estado $|\Psi\rangle = |1_{j,\sigma,\eta}\rangle |g\rangle$, es

$$|\langle \Psi | \psi_f \rangle|^2 = |C_{j,\sigma}|^2, \quad (3.26)$$

y evidentemente la probabilidad de que se emita un fotón y el átomo siga en el estado excitado es decir, $|\Psi_1\rangle = |1_{j,\sigma,\eta}\rangle |e\rangle$, es

$$|\langle \Psi_1 | \psi_f \rangle|^2 = 0, \quad (3.27)$$

ya que no es posible que el átomo haya emitido un fotón sin hacer la transición electrónica al estado base. Este caso estudiado es el de emisión espontánea ya que el estado inicial del sistema átomo-radiación se compone del átomo excitado y del campo de vacío. A continuación, se presenta el análisis a la emisión estimulada.

En la emisión estimulada el sistema se encuentra en el estado inicial $|\phi\rangle = |e\rangle |1_{j,\sigma,\theta}\rangle$, bajo la suposición de que el fotón que estimula el proceso de emisión está descrito por el estado $|1_{j,\sigma,\theta}\rangle$, es decir, este tiene un modo j , una helicidad σ y consecuentemente una polarización, y una fase θ , todo determinado. El estado final del sistema luego de la interacción entre el fotón y el átomo, es

$$\begin{aligned} |\phi_f\rangle &= \hat{H} |\phi_i\rangle, \\ |\phi_f\rangle &= \sum_{j',\sigma'} C_{j',\sigma'} |g\rangle \hat{b}_{j',\sigma',\theta'}^\dagger |1_{j,\sigma,\theta}\rangle, \\ |\phi_f\rangle &= C_{j,\sigma} |g\rangle |2_{j,\sigma,\theta}\rangle, \end{aligned} \quad (3.28)$$

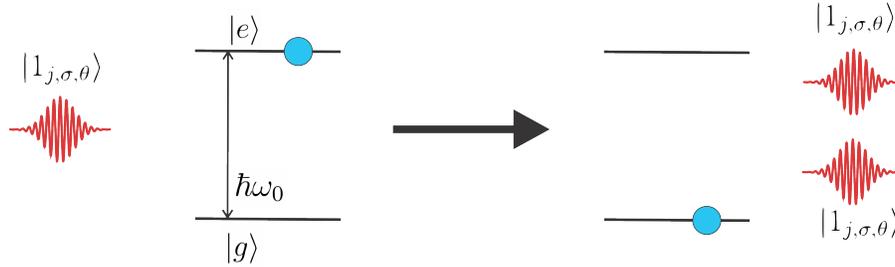
donde se ha usado el hecho de que el operador bosónico de creación, $\hat{b}_{j',\sigma',\theta'}^\dagger$, solo actúa para un modo, helicidad y fase específicos, es decir,

$$\hat{b}_{j',\sigma',\theta'}^\dagger |1_{j,\sigma,\theta}\rangle = |2_{j,\sigma,\theta}\rangle \delta_{jj'} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (3.29)$$

de tal forma que el fotón emitido solo puede ser emitido como una copia exacta del estado cuántico del fotón que provocó la emisión, ver [figura 3.3](#). Ahora sí, se puede decir que los fotones emitidos en la emisión estimulada tienen la misma energía, polarización y están en fase con el fotón que estimuló la emisión, es decir, que comparten la misma función de fase.

Figura 3.3

Proceso de emisión estimulada



Nota. Los fotones emitidos son totalmente idénticos y por lo tanto indistinguibles.

Finalmente, el estado $|2_{j,\sigma,\theta}\rangle$ representaría el estado de dos fotones coherentes cuya función de onda es exactamente la misma,

$$\Psi_{j,\theta}^\sigma(\mathbf{r}, t) = i \int \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{U}_j^{(\sigma)}(\mathbf{p}) e^{i\theta_\sigma(\mathbf{p})} \sqrt{c|\mathbf{p}|} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - c|\mathbf{p}|t)/\hbar}. \quad (3.30)$$

Además, los fotones emitidos por emisión estimulada pueden estimular el decaimiento en otros átomos que emitirán en el mismo estado del fotón, de esta forma llevando a cabo un proceso colectivo y repetitivo dentro de una cavidad resonadora como la de los láseres, consiguiendo de esta manera que los fotones de la cavidad sean casi coherentes y consecuentemente la radiación también, viéndose limitado solamente por los fotones emitidos por emisión espontánea.

Conclusiones

La principal conclusión sobre el estudio del mecanismo de la generación de la coherencia en la emisión estimulada con fotones libres, es que la descripción del fotón como un paquete de ondas de estados coherentes es una representación válida del estado de un *fotón de fase*, ya que por medio de la regla de extracción aquí propuesta se logra encontrar la función de onda del fotón que es solución a la ecuación de onda de la mecánica cuántica relativista de este. Además, esta descripción permite diferenciar entre dos fotones aún en el caso en que estos tengan la misma energía y polarización asociada, debido a que, se caracterizan por una fase en el espacio de cuadratura. De esta manera, se logró mostrar por medio del Hamiltoniano de interacción luz-materia, modificado para la creación y aniquilación de paquetes de ondas, que los fotones emitidos por emisión estimulada son una copia exacta del fotón que estimula la emisión y que el estado de este fotón emitido es diferente al fotón emitido por emisión espontánea. Por lo tanto, la emisión estimulada es la responsable de la creación de fotones coherentes y consecuentemente de la generación de la radiación coherente.

Entre otras conclusiones importantes del trabajo, está el hecho de que se demostró que el conjunto de paquetes de ondas en estados coherentes representan una base completa, normal pero no ortogonal para el espacio de la radiación electromagnética multimodal. Igualmente, se calculó el valor esperado del operador número, del Hamiltoniano y del operador campo eléctrico para el estado de un fotón descrito como un paquete de ondas de estados coherentes. Más aún, se encontró la función de onda del fotón en el espacio de fase y en el espacio posición por medio de una regla de extracción aquí propuesta. Finalmente, se realizó una comparación entre el modelo del fotón como un paquete de ondas de estados de Fock con el modelo del fotón como un paquete de ondas de estados coherentes, donde se logró ver la analogía del tratamiento y las características a favor de la descripción del fotón en estados coherentes.

Referencias

- Barnett, S. M. (2014). Optical dirac equation. *New Journal of Physics*, *16*(9), 093008. doi: 10.1088/1367-2630/16/9/093008
- Białyński-Birula, I. (1994). On the wave function of the photon. *Acta Physica Polonica A*, *86*(1), 97-116.
- Białyński-Birula, I. (1996). The photon wave function. En *Coherence and quantum optics vii* (pp. 313–322). Springer. doi: 10.1016/S0079-6638(08)70316-0
- Białyński-Birula, I., y Białyński-Birula, Z. (2009). Why photons cannot be sharply localized. *Physical Review A*, *79*(3), 032112. doi: 10.1103/PhysRevA.79.032112
- Białyński-Birula, I., y Białyński-Birula, Z. (2013). The role of the Riemann–Silberstein vector in classical and quantum theories of electromagnetism. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, *46*(5), 053001. doi: 10.1088/1751-8113/46/5/053001
- Carmichael, H. J. (2013). *Statistical methods in quantum optics 1: master equations and fokker-planck equations*. Springer Science & Business Media. doi: 10.1007/978-3-662-03875-8
- Chan, K., Law, C., y Eberly, J. (2002). Localized single-photon wave functions in free space. *Physical review letters*, *88*(10), 100402. doi: 10.1103/PhysRevLett.88.100402
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., y Laloe, F. (1978). *Quantum mechanics vol. 1*. John Wiley.
- Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J., y Grynberg, G. (1997). *Photons and atoms-introduction to quantum electrodynamics*. Wiley-VCH. doi: 10.1002/9783527618422
- Dirac, P. A. M. (1927). The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, *114*(767), 243–265. doi: 10.1098/rspa.1927.0039
- Dirac, P. A. M. (1981). *The principles of quantum mechanics*. Oxford university press.
- Einstein, A. (1905). Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtet betreffenden heuristischen gesichtspunkt. *Annalen der physik*, *322*(6), 132–148. doi: 10.1002/andp.19053220607
- Einstein, A. (1917). Zur quantentheorie der strahlung. *Phys. Z.*, *18*, 121–128.

- Fock, V. (1932). Konfigurationsraum und zweite quantelung. *Zeitschrift für Physik*, 75(9-10), 622–647. doi: 10.1007/BF01344458
- Fox, M. (2006). *Quantum optics: an introduction* (Vol. 15). OUP Oxford.
- Gerry, C., y Knight, P. (2005). *Introductory quantum optics*. Cambridge university press. doi: 10.1017/CBO9780511791239
- Glauber, R. J. (1963a). Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131, 2766–2788. doi: 10.1103/PhysRev.131.2766
- Glauber, R. J. (1963b). The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, 130, 2529–2539. doi: 10.1103/PhysRev.130.2529
- Grynberg, G., Aspect, A., y Fabre, C. (2010). *Introduction to quantum optics: from the semi-classical approach to quantized light*. Cambridge university press. doi: 10.1017/CBO9780511778261
- Hawton, M. (2019). Maxwell quantum mechanics. *Physical Review A*, 100(1), 012122. doi: 10.1103/PhysRevA.100.012122
- Henry, C. (1982). Theory of the linewidth of semiconductor lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 18(2), 259–264. doi: 10.1109/JQE.1982.1071522
- Hoffmann, S. E. (2020, mar). Electromagnetic field expectations as measures of photon localization. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 53(14), 145303. doi: 10.1088/1751-8121/ab77f5
- Hong, C. K., Ou, Z. Y., y Mandel, L. (1987). Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, 59, 2044–2046. doi: 10.1103/PhysRevLett.59.2044
- Itzykson, C., y Zuber, J.-B. (1980). *Quantum field theory*. McGraw-Hill.
- Keller, O. (2016). *Light-the physics of the photon*. CRC press.
- Lamas-Linares, A., Simon, C., Howell, J. C., y Bouwmeester, D. (2002). Experimental quantum cloning of single photons. *Science*, 296(5568), 712–714. doi: 10.1126/science.1068972
- Loudon, R. (2000). *The quantum theory of light*. OUP Oxford.
- Milonni, P., y Eberly, J. (1988). *Lasers*. John Wiley and Sons. doi: 10.1002/9780470409718
- Newton, T. D., y Wigner, E. P. (1949). Localized states for elementary systems. *Rev. Mod. Phys.*, 21, 400–406. doi: 10.1103/RevModPhys.21.400
- Nouredine, Z. (2009). *Quantum mechanics concepts and applications*. Wiley.
- Ou, Z. (2007). Multi-photon interference and temporal distinguishability of photons.

- International Journal of Modern Physics B*, 21(30), 5033–5058. doi: 10.1142/S0217979207038186
- Pal, P. B. (2011). Dirac, majorana, and weyl fermions. *American Journal of Physics*, 79(5), 485–498. doi: 10.1119/1.3549729
- Planck, M. (1901). Ueber das gesetz der energieverteilung im normalspectrum. *Annalen der Physik*, 309(3), 553–563. doi: 10.1002/andp.19013090310
- Raymer, M., y Smith, B. J. (2005). The maxwell wave function of the photon. En *The nature of light: What is a photon?* (Vol. 5866, pp. 293–297). doi: 10.1201/9781420044256.ch14
- Ryder, L. H. (1996). *Quantum field theory*. Cambridge university press. doi: 10.1017/CBO9780511813900
- Santos, E. A., Castro, F., y Torres, R. (2018). Huygens-fresnel principle: Analyzing consistency at the photon level. *Physical Review A*, 97(4), 043853. doi: 10.1103/PhysRevA.97.043853
- Schrödinger, E. (1926). Der stetige Übergang von der mikro- zur makromechanik. *Naturwissenschaften*, 14, 664–666. doi: 10.1007/BF01507634
- Shih, Y. (2018). *An introduction to quantum optics: photon and biphoton physics*. CRC press.
- Simon, C., Weihs, G., y Zeilinger, A. (2000). Optimal quantum cloning via stimulated emission. *Physical review letters*, 84(13), 2993. doi: 10.1103/PhysRevLett.84.2993
- Sipe, J. (1995). Photon wave functions. *Physical Review A*, 52(3), 1875. doi: 10.1103/PhysRevA.52.1875
- Smith, B. J., y Raymer, M. (2007). Photon wave functions, wave-packet quantization of light, and coherence theory. *New Journal of Physics*, 9(11), 414. doi: 10.1088/1367-2630/9/11/414
- Sun, F., Liu, B., Gong, Y., Huang, Y., Ou, Z., y Guo, G. (2007). Stimulated emission as a result of multiphoton interference. *Physical review letters*, 99(4), 043601. doi: 10.1103/PhysRevLett.99.043601
- Tamburini, F., y Vicino, D. (2008). Photon wave function: A covariant formulation and equivalence with qed. *Physical Review A*, 78(5), 052116. doi: 10.1103/PhysRevA.78.052116
- Titulaer, U. M., y Glauber, R. J. (1966, May). Density operators for coherent fields. *Phys. Rev.*, 145, 1041–1050. doi: 10.1103/PhysRev.145.1041
- Wightman, A. S. (1962, Oct). On the localizability of quantum mechanical systems. *Rev. Mod. Phys.*, 34, 845–872. doi: 10.1103/RevModPhys.34.845

Wootters, W. K., y Zurek, W. H. (1982). A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299(5886), 802–803. doi: 10.1038/299802a0