

EVALUACIÓN DE DOS ECUACIONES DE MAGNETIZACIÓN PARA LA
PREDICCIÓN DEL FLUJO DE FERROFLUIDO GENERADO POR UN CAMPO
MAGNÉTICO ROTANDO DE ALTA AMPLITUD

VICTOR ALFONSO PEÑA CRUZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA QUÍMICA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA QUÍMICA

BUCARAMANGA

2015

EVALUACIÓN DE DOS ECUACIONES DE MAGNETIZACIÓN PARA LA
PREDICCIÓN DEL FLUJO DE FERROFLUIDO GENERADO POR UN CAMPO
MAGNÉTICO ROTANDO DE ALTA AMPLITUD

VICTOR ALFONSO PEÑA CRUZ

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de

MAGÍSTER EN INGENIERÍA QUÍMICA

DIRECTOR

Arlex Chaves Guerrero

Ingeniero Químico, Ph.D

CODIRECTOR

David Alfredo Fuentes Díaz

Ingeniero Mecánico, Ph.D

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA QUÍMICA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA QUÍMICA

BUCARAMANGA

2015

Tabla de Contenido

1	INTRODUCCIÓN	14
1.1	Ferrohidrodinámica	14
1.2	Ferrofluidos y sus aplicaciones	14
1.3	Descripción general del documento	16
2	MARCO TEÓRICO	17
2.1	Teoría de difusión de momento angular interno (DMAI)	17
2.2	Ecuaciones ferrohidrodinámicas	19
2.2.1	Ecuaciones de magnetización	21
3	ESTADO DEL ARTE	24
3.1	Trabajos experimentales sobre flujo inducido por CMR	24
3.2	Teorías sobre el mecanismo de generación de flujo de FF por CMR	27
4	OBJETIVOS DEL PROYECTO	32
4.1	Objetivo General	32
4.2	Objetivos Específicos	32
5	METODOLOGÍA	33
5.1	Revisión bibliográfica	33
5.2	Desarrollo de Modelos Matemáticos	33
5.3	Implementación de Soluciones Asintótica y Numéricas	34
5.4	Predicciones de Flujo a Altas Intensidades del Campo Magnético	35

6	IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA Y VALIDACIÓN DEL CAMPO DE FLUJO ENTRE DOS PLACAS PARALELAS	36
6.1	Solución Asintótica Para el Campo de Flujo de un Ferrofluido Entre Dos Placas Paralelas	37
6.1.1	Descripción del problema de flujo de ferrofluido entre placas paralelas	37
6.1.2	Expresión para la densidad de torque magnético	39
6.1.3	Expresiones para el perfil de velocidad traslacional	41
6.2	Implementación de las Soluciones Numéricas	42
6.2.1	Modelos Matemáticos y Discretización para el Problema de Flujo con Diferentes Ecuaciones de Magnetización	42
6.2.2	Diseño de algoritmos computacionales	55
6.3	Validación de las Soluciones Numéricas	56
7	RESULTADOS Y ANÁLISIS	60
7.1	Resultados computacionales a altos valores de frecuencia Ω y amplitud K de CM	60
7.1.1	Evaluación de resultados de flujo para bajos campos ($\varepsilon \ll 1$) y altas frecuencias ($\tilde{\Omega} \gg 1$)	60
7.1.2	Evaluación de flujo para altos campos magnéticos ($\varepsilon \gg 1$) y bajas frecuencias ($\tilde{\Omega} \ll 1$)	62
7.1.3	Evaluación de flujo para altos campos magnéticos ($\varepsilon \gg 1$) y altas frecuencias ($\tilde{\Omega} \gg 1$)	64
7.1.4	Evaluación del efecto del parámetro κ sobre el flujo para altos campos ($\varepsilon \gg 1$) y altas frecuencias ($\tilde{\Omega} \gg 1$)	65
7.2	Evaluación del efecto del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ de la ecuación MRSh sobre la generación de flujo a altos valores de frecuencia Ω y amplitud H de CM	67
8	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	73
8.1	Conclusiones	73
8.2	Recomendaciones	74
9	BIBLIOGRAFÍA	80

Lista de Figuras

2-1	Dispersión coloidal de partículas magnetizadas permanentemente (ferrofluido) sujetas a un movimiento de rotación Browniano (a) en ausencia de un campo aplicado y (b) sometido a un campo aplicado de magnitud $ \mathbf{H} $. Figura tomada de Chaves, Tesis doctoral <i>Ref.</i> [1].	18
2-2	Tiempos de relajación Browniano, de Néel y tiempo efectivo en función del radio de las nanopartículas. Figura adaptada de Chaves, Tesis doctoral <i>Ref.</i> [1].	19
3-1	Observaciones experimentales hechas por Rosensweig <i>et al.</i> [2]: (a) Con un menisco cóncavo en la superficie libre se observó contra-rotación del fluido con respecto a la dirección de rotación del CM. (b) Cuando la superficie era plana no se observó flujo. (c) Con un menisco convexo en la superficie libre, se observó co-rotación entre flujo y CM. Figura modificada de <i>Ref.</i> [29].	26
3-2	a) Perfiles de velocidad para diferentes alturas del contenedor cilíndrico sin tapa, a $h = 63$ mm las velocidades negativas indican contra-rotación. b) Perfiles de velocidad medidos en cuatro alturas diferentes del eje del contenedor cilíndrico con tapa. c) Ilustración de la configuración experimental para mediciones de perfiles de velocidad en ferrofluidos, en un contenedor cilíndrico y sometido a un campo magnético rotativo uniforme. Izquierda: Contenedor con transductores situados dentro de un estator de inducción de dos polos de motor. Figuras tomadas de la <i>Ref.</i> [20].	27
5-1	Etapas de la metodología para la realización del proyecto.	34

6-1	Geometría para modelar el problema de flujo de ferrofluido entre placas paralelas infinitamente largas, generado por un campo magnético longitudinal H_z y una densidad de flujo magnético transversal B_x , proporcionados por las bobinas que se ubican alrededor de las placas, v_z es la velocidad lineal y w_y es la velocidad angular.	38
6-2	Diagrama de flujo del procedimiento iterativo para solucionar el sistema de ecuaciones ferrohodinámicas.	57
6-3	Comparación de resultados numéricos con respecto a la solución asintótica para un ferrofluido WBF-1, a un valor de $\tilde{\Omega} = 2.623 \times 10^{-3}$ a) perfiles de velocidad lineal, b) perfiles de velocidad angular; obtenidos para $\varepsilon = 4.32 \times 10^{-3}$ $\kappa = 3.3$, $\Omega = 25$ Hz y $K = 0.1$ mT.	58
6-4	Perfiles de velocidad lineal para validar las soluciones numéricas con respecto a la solución asintótica, para dos ferrofluidos diferentes: a) ferrofluido WGBF-1 para $\kappa = 3.3$, $\Omega = 0.5$ Hz y $K = 0.1$ mT. y b) ferrofluido GBF-2 para $\kappa = 3.3$, $\Omega = 0.5$ Hz y $K = 0.4$ mT.	59
7-1	Perfiles de velocidad lineal para un ferrofluido WBF1, manteniendo constante los parámetros $\varepsilon = 4.325 \times 10^{-3}$ y $\kappa = 3.3$; para valores de frecuencias adimensionales de a) $\tilde{\Omega} = 1.05$, b) $\tilde{\Omega} = 1.57$, y c) $\tilde{\Omega} = 3.148$. La figura d) muestra los perfiles de velocidad lineal obtenidos usando la ecuación de magnetización MRSh, variando $\tilde{\Omega}$	61
7-2	Perfiles de velocidad lineal para un ferrofluido WGBF1, manteniendo constante los parámetros $\varepsilon = 8.5192 \times 10^{-3}$ y $\kappa = 3.3$; variando el parámetro $\tilde{\Omega}$: a) $\tilde{\Omega} = 1.0776$ (corresponde a $\Omega = 70$ Hz), b) $\tilde{\Omega} = 3.0788$ (corresponde a $\Omega = 200$ Hz), c) $\tilde{\Omega} = 15.394$ (corresponde a $\Omega = 1$ kHz), y d) muestra los perfiles de velocidad traslacional, obtenidos usando la ecuación de magnetización MRSh bajo las condiciones de las gráficas a), b) y c).	62
7-3	Perfiles de velocidad lineal para un ferrofluido WBF1, manteniendo constante $\tilde{\Omega} = 5.2 \times 10^{-3}$ y $\kappa = 3.3$; variando el parámetro ε : a) $\varepsilon = 3.9$, b) $\varepsilon = 10.8$, c) $\varepsilon = 15.6$ y d) muestra los resultados de la ecuación de magnetización MRSh bajo las condiciones de las gráficas a), b) y c).	63

7-4	Perfiles de velocidad traslacional para un ferrofluido WGBF1, manteniendo constante $\tilde{\Omega} = 7.7 \times 10^{-1}$ ($\Omega = 50$ Hz) y $\kappa = 3.3$; variando el parámetro ε : a) $\varepsilon = 3.4$ ($K = 2$ mT), b) $\varepsilon = 13.6$ ($K = 4$ mT), c) $\varepsilon = 30.7$ ($K = 6$ mT) y d) muestra los resultados de la ecuación de magnetización MRSh bajo las condiciones de las gráficas a), b) y c).	64
7-5	Perfiles de velocidad traslacional para un ferrofluido WBF1, manteniendo constante los parámetros $\varepsilon = 6.9200$ ($K = 4$ mT) y $\kappa = 3.3$; variando el parámetro $\tilde{\Omega}$: a) $\tilde{\Omega} = 2.0986$ ($\Omega = 20$ kHz), b) $\tilde{\Omega} = 3.1479$ ($\Omega = 30$ kHz), c) $\tilde{\Omega} = 6.2958$ ($\Omega = 60$ kHz) y d) muestra los perfiles de velocidad traslacional, obtenidos usando la ecuación de magnetización MRSh bajo las condiciones de las gráficas a), b) y c).	66
7-6	Perfiles de velocidad lineal para un ferrofluido WGBF1, manteniendo constante los parámetros $\varepsilon = 13.631$ ($K = 4$ mT) y $\kappa = 3.3$; variando el parámetro $\tilde{\Omega}$: a) $\tilde{\Omega} = 24.630$ ($\Omega = 1.6$ kHz), b) $\tilde{\Omega} = 61.575$ ($\Omega = 4$ kHz), c) $\tilde{\Omega} = 92.363$ ($\Omega = 6$ kHz) y d) muestra los perfiles de velocidad traslacional, obtenidos usando la ecuación de magnetización MRSh bajo las condiciones de las gráficas a), b) y c).	67
7-7	Perfiles de velocidad traslacional para un ferrofluido WBF1, manteniendo constante los parámetros $\varepsilon = 6.9200$ ($K = 4$ mT) y $\tilde{\Omega} = 3.1479$ ($\Omega = 30$ kHz); variando el parámetro κ : a) $\kappa = 0.5$, b) $\kappa = 3.3$, c) $\kappa = 10.4$ y d) $\kappa = 32.9$	68
7-8	Perfiles de momento lineal para un ferrofluido WGBF1, manteniendo constante y altos los parámetros $\varepsilon = 13.631$ ($K = 4$ mT) y $\tilde{\Omega} = 15.394$ ($\Omega = 1$ kHz); variando el parámetro κ : a) $\kappa = 0.5$, b) $\kappa = 3.3$, c) $\kappa = 10.4$ y d) $\kappa = 32.9$	69
7-9	Perfiles de velocidad traslacional para el ferrofluido WBF1 obtenidos a partir del conjunto de ecuaciones ferrodinámicas con la ecuación de magnetización MRSh, manteniendo constante $\tilde{\Omega}$ y κ , pero variando el parámetro ε ; a) con presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ y b) sin presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$	70
7-10	Perfiles de velocidad traslacional para el ferrofluido WBF1 obtenidos a partir del conjunto de ecuaciones ferrodinámicas con la ecuación de magnetización MRSh, manteniendo constante ε y variando el parámetro $\tilde{\Omega}$; a) con presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ y b) sin presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$	71

7-11 Perfiles de velocidad traslacional para el ferrofluido WGBF1 obtenidos a partir del conjunto de ecuaciones ferrohodinámicas con la ecuación de magnetización MRSh, manteniendo constante ε y variando el parámetro $\tilde{\Omega}$; a) con presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ y b) sin presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ 71

7-12 Perfiles de velocidad traslacional para el ferrofluido WGBF1 obtenidos a partir del conjunto de ecuaciones ferrohodinámicas con la ecuación de magnetización MRSh, mantenido constante ε y variando el parámetro $\tilde{\Omega}$; a) con presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ y b) sin presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ 72

Lista de Tablas

6.1	Condiciones de frontera para la velocidad lineal y angular.	43
6.2	Algoritmo computacional para el método de Newton-Raphson usado para sistemas de ecuaciones no lineales.	51
6.3	Propiedades físicas y magnéticas a temperatura ambiente (294 K) para ferrofluidos de ferrita-cobalto; tomado de Torres-Díaz et al.	57

RESUMEN

TÍTULO: Evaluación de dos ecuaciones de magnetización para la predicción del flujo de ferrofluido generado por un campo magnético rotando de alta amplitud¹

AUTOR: Victor Alfonso Peña Cruz²

PALABRAS CLAVE: Ferrofluido, campo magnetico rotante, ecuaciones ferrohídrodinámicas, solución numérica.

En este documento se presentan soluciones numéricas para el flujo de ferrofluido entre dos placas paralelas usando la teoría de Difusión de Momento Angular Interno (DMAI); las soluciones son válidas para altas amplitudes y frecuencias de rotación del campo magnético (CM). Se evalúa el efecto de dos ecuaciones de magnetización sobre el flujo: *i*) Ecuación de Magnetización de Shliomis y *ii*) Ecuación de Magnetización derivada por Martsenyuk, Raikher y Shliomis (MRSh). Las soluciones numéricas fueron validadas con una solución asintótica válida en el límite de cero amplitud del CM. Las simulaciones de flujo mostraron que no existen diferencias en el campo de flujo entre las soluciones numéricas y la asintótica para bajas amplitudes y frecuencias de rotación del CM; resultados similares se observaron para el caso de bajas amplitudes y altas frecuencias del CM. Para el caso de altas amplitudes y bajas frecuencias del CM, la solución asintótica siempre predice la magnitud de flujo más alta y la menor magnitud de flujo fue obtenida con la ecuación de magnetización MRSh. Para el caso de altas amplitudes y frecuencias de rotación del CM, la mayor magnitud de flujo fue obtenida con la ecuación de magnetización MRSh. Estos resultados mostraron que es posible obtener un mejor acuerdo entre los resultados experimentales de flujo y las predicciones de la teoría DMAI utilizando la ecuación MRSh en el caso de que el ferrofluido se expone a amplitudes de CM que exceden la magnetización de saturación del ferrofluido.

¹Tesis.

²Facultad de Ingenierías Físico Químicas. Escuela de Ingeniería Química. Director: Arlex Chaves Guerrero PhD. Codirector: David Fuentes Díaz PhD.

ABSTRACT

TITLE: Evaluation of two equations for predicting magnetization ferrofluid flow generated by a rotating magnetic field of high amplitude³

AUTHOR: Victor Alfonso Peña Cruz⁴

KEY WORDS: Ferrofluid, rotating magnetic field, ferrohydrodynamics equations, numerical solution.

This document shows numerical solutions for a ferrofluid flow between two parallel plates using theory of Diffusion Momentum Angular Internal (DMAI); The solutions are valid for high amplitudes and frequencies of rotation of the magnetic field (MF). The effect of two equations magnetisation on the flow is evaluated: *i*) Equation Shliomis magnetization and *ii*) derived by Equation Martsenyuk magnetization, and Shliomis Raikher (MRSh). Numerical solutions were validated with a valid asymptotic solution in the limit of zero amplitude of MF. Flow simulations showed no difference in the flow field between the numerical and asymptotic solutions for low amplitudes and frequencies of rotation of MF; Similar results were observed for the case of high frequencies and low amplitudes of MF. In the case of high amplitudes and low frequencies of MF, the asymptotic solution always predict the magnitude of higher flow and lower flow rate was obtained with the equation of magnetization MRSh . For the case of high amplitude and frequency of rotation of MF, the largest flow rate was obtained with the equation MRSh magnetization. These results showed that it is possible to obtain a better agreement between the experimental results and flow predictions of the theory DMAI using the equation MRSh in the case that the ferrofluid exposed to MF amplitudes that exceed the saturation magnetization of the ferrofluid.

³Thesis

⁴Faculty of physical Chemical Engineering. Chemical Engineering School. Director: Arlex Chaves Guerrero PhD. Codirector: David Fuentes Diaz PhD.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Ferrohidrodinámica

El flujo de ferrofluidos es el objeto de estudio de la ferrohidrodinámica, una rama de la mecánica de fluidos que se ocupa del flujo de medios magnéticos dipolares [3]. El término ferrohidrodinámica fue introducido en 1964 por Neuringer y Rosensweig [4] en el artículo "*Ferrohidrodinámica*" el cual es considerado como la primera publicación en esta ciencia. Esta surgió motivada por el interés de convertir energía magnética en movimiento macroscópico sin que sea necesario usar otros mecanismos.

1.2 Ferrofluidos y sus aplicaciones

Ferrofluidos (FF) son suspensiones coloidales de nano partículas magnéticas de diámetro entre 10 a 15 nm y suspendidas en agua o en un líquido orgánico. Este tamaño hace que las partículas posean un único dominio magnético. Típicamente, estas nanopartículas (magnetita o ferrita cobalto) están recubiertas de una capa de surfactante que previene que se adhieran unas a otras lo que puede llegar a desestabilizar el coloide [3]. Actualmente los ferrofluidos tienen múltiples aplicaciones como por ejemplo en fabricación de sellos mecánicos usados en discos duros de computador y en otros dispositivos electrónicos, en sistemas para separación de materiales [5], en modelación y estudio de dinámica gravitacional en ambientes controlados [6], en la fabricación de generadores electromecánicos a escala nanométrica [7], en micro-actuadores, amortiguadores y

acelerómetros con fluidos magnéticos [8, 9]. También se han desarrollado numerosas aplicaciones biomédicas como el posicionamiento magnético de medicinas (“*Magnetic Drug Targeting*”), la hipertermia para el tratamiento de cáncer; en el mejoramiento del contraste de imágenes en resonancia magnética, y en aplicaciones de separación magnética de células, entre otras [10, 11].

Desde el punto de vista reológico, los ferrofluidos se diferencian de fluidos tradicionales en que responden a la presencia de un campo magnético (CM) externo ya sea estacionario, rotando o alternando. Como ejemplo de estos comportamientos la literatura menciona observaciones de incremento de la viscosidad del ferrofluido en presencia de campos magnético estático, el decrecimiento de la viscosidad en campos magnéticos rotando o alternando [12, 13]; e incluso generación de flujo por la acción de un campo magnético rotativo, siendo este el foco de atención del presente trabajo.

Soluciones analíticas para el flujo de ferrofluido inducido por un campo magnético rotando (CMR) en distintas geometrías han sido obtenidas usando la teoría de Difusión de Momento Angular Interno (DMAI, por sus siglas). Sin embargo, todos estos análisis suponen que la intensidad del campo magnético es despreciable ($|\mathbf{H}| \rightarrow 0$). Por el contrario, datos experimentales han sido obtenidos a altas intensidades del campo magnético lo que estrictamente no permite una comparación entre datos experimentales y predicciones teóricas. Adicionalmente, han surgido dudas respecto a la idoneidad de la Ecuación de Magnetización de Shliomis para predecir situaciones de flujo a altas frecuencias de rotación e intensidades del CM; planteándose en la literatura que la Ecuación de Magnetización propuesta por Martsenyuk, M., Raikher, Y. L., and Shliomis (RMSH) podría generar predicciones teóricas de la teoría DMAI más ajustadas a los datos experimentales.

Por lo tanto esta investigación se enfocó en evaluar el efecto de altas intensidades y frecuencias del campo magnético, sobre la predicción del flujo de ferrofluido confinado entre dos placas paralelas infinitamente largas usando la teoría de DMAI. Para esto se obtuvieron soluciones numéricas para las distribuciones de velocidad traslacional y velocidad angular usando la ecuación de magnetización de Shliomis y la Ecuación de magnetización RMSH prescindiendo de la suposición acostumbrada de que $|\mathbf{H}| \rightarrow 0$.

1.3 Descripción general del documento

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico, donde se describen los fundamentos de la teoría de difusión de momento angular interno (DMAI) dando a conocer los mecanismos de relajación de *Néel* y el *Browniano* junto con las expresiones que caracterizan a los tiempos de relajación asociados a cada uno de estos mecanismos que intervienen en el proceso de magnetización del ferrofluido. En este mismo capítulo se describe el conjunto de ecuaciones ferrohodinámicas, dando especial atención al origen y las características de las ecuaciones de magnetización que serán objeto de evaluación.

En el capítulo 3, se presenta el estado del arte sobre las investigaciones más relevantes que involucran la evaluación de la teoría DMAI como el mecanismo generador del flujo de ferrofluido en campos magnéticos rotativos.

En el capítulo 4 se presenta el objetivo general y los objetivos específicos de la investigación.

En el capítulo 5, se presenta la metodología desarrollada para lograr los objetivos de la investigación, especificando el tratamiento matemático y numérico hecho para obtener la solución de cuatro modelos ferrohodinámicos diferentes: *i*) una solución asintótica que tiene en cuenta la aproximación $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi \mathbf{H}$, y tres soluciones numéricas, *ii*) una con la ecuación de magnetización de Shliomis con $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi \mathbf{H}$; *iii*) otra teniendo en cuenta la función de Langevin para \mathbf{M}_{eq} , *iv*) y por último una solución de flujo usando la Ecuación de Magnetización de MRSh.

En el capítulo 6 se describe el procedimiento para la implementación numérica y validación del campo de flujo entre dos placas paralelas y en el capítulo 7 se presenta el análisis de los resultados obtenidos en este trabajo; se hicieron evaluaciones del comportamiento del flujo a altas intensidades y frecuencias del campo magnético variando los parámetros $\tilde{\Omega} \gg 1$ y $\varepsilon \gg 1$ para cada una de las cuatro soluciones obtenidas en el capítulo 5, también se estudió el efecto del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ de la ecuación de magnetización MRSh.

Finalmente en el capítulo 8 se dan a conocer las conclusiones y recomendaciones obtenidas de este trabajo.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Teoría de difusión de momento angular interno (DMAI)

Esta teoría se basa en el carácter superparamagnético de las nanopartículas que conforman el ferrofluido. Este comportamiento hace que las partículas suspendidas en el líquido tiendan a alinear su vector de momento magnético en la dirección del campo, como se ilustra en la Figura 2-1. Por lo tanto, cuando el campo magnético externo es desplazado de su posición original, se genera inmediatamente un torque magnético ($\mu_o \mathbf{M} \times \mathbf{H}$) que tiende a alinear el momento magnético de la partícula en la dirección del campo. Esta alineación puede llevarse a cabo por dos mecanismos: *i*) un mecanismo de relajación de *Néel* en el cual el vector de momento magnético (\mathbf{m}) rota dentro de la partícula pero sin rotación de la misma en el líquido y *ii*) por medio del mecanismo de relajación *Browniano*, mediante el cual el vector de momento magnético se reacomoda por rotación de la partícula en el líquido [14, 15, 16] siendo este mecanismo de relajación importante en la generación del flujo. Cada uno de estos mecanismos de relajación, están caracterizados por tiempos de relajación dados por las siguientes expresiones:

$$\tau_B = \frac{3V_h \eta_0}{k_B T}, \quad \tau_N = \frac{1}{f_0} \exp\left(\frac{KV_c}{k_B T}\right). \quad (2.1)$$

En la Ecn. (2.1) V_h y V_c representan los volúmenes hidrodinámico y magnético de la partícula, η_0 es la viscosidad del líquido en el cual están suspendidas, k_B es la constante de Boltzmann y f_0 es una frecuencia que tiene un valor de aproximadamente 10^9 Hz. Como se puede corroborar

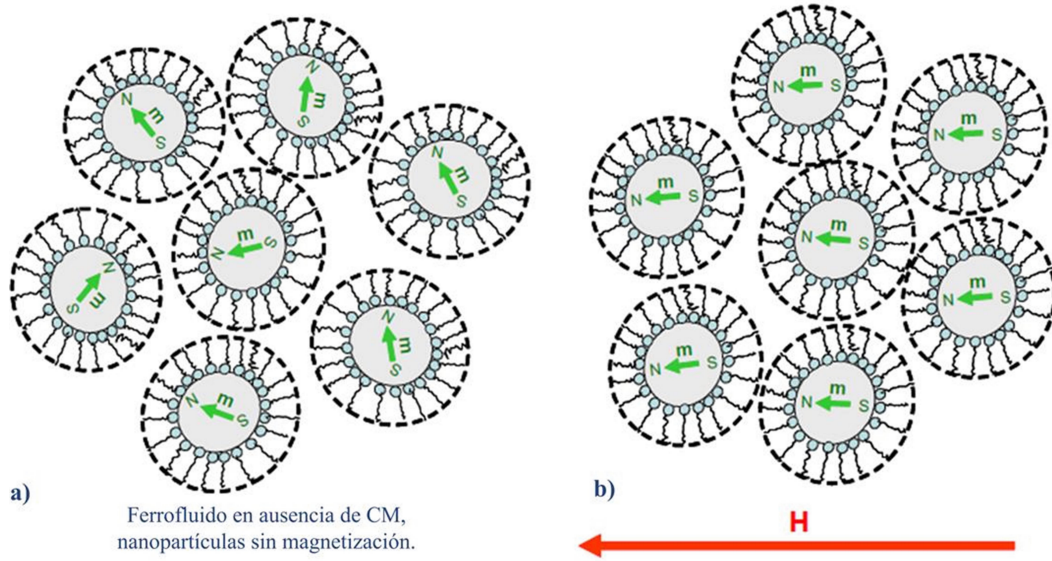


Figura 2-1: Dispersión coloidal de partículas magnetizadas permanentemente (ferrofluido) sujetas a un movimiento de rotación Browniano (a) en ausencia de un campo aplicado y (b) sometido a un campo aplicado de magnitud $|\mathbf{H}|$. Figura tomada de Chaves, Tesis doctoral Ref. [1].

de la *Ecn.* (2.1), se espera que para partículas magnéticas con diámetros mayores de 10 nm el mecanismo de relajación sea dominado por el mecanismo *Browniano* (τ_B). Esta situación se ilustra en la Figura 2-2, donde se muestran curvas típicas para los tiempos de relajación de Néel y Browniano, así como el tiempo efectivo de relajación *Ecn.* (2.2), para un ferrofluido que tiene como fluido base agua [17].

$$\tau = \frac{\tau_B \tau_N}{\tau_B + \tau_N}. \quad (2.2)$$

Teniendo en cuenta este comportamiento superparamagnético y suponiendo que el mecanismo de relajación de las partículas es principalmente browniano, se espera que un campo magnético rotativo genere, a su vez, la rotación de las partículas en la matriz del líquido. Esto tiene otra gran implicación: cuando el ferrofluido no está sometido a un campo magnético, las partículas giran a una velocidad angular promedio (ω) igual a la mitad de la vorticidad local del fluido ($\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$). En este caso, el ferrofluido se comporta como un fluido newtoniano, el cual es caracterizado por un tensor de esfuerzos simétrico (σ). No obstante, en presencia de un campo magnético rotando o alternando, las partículas tienen una velocidad angular diferente a la

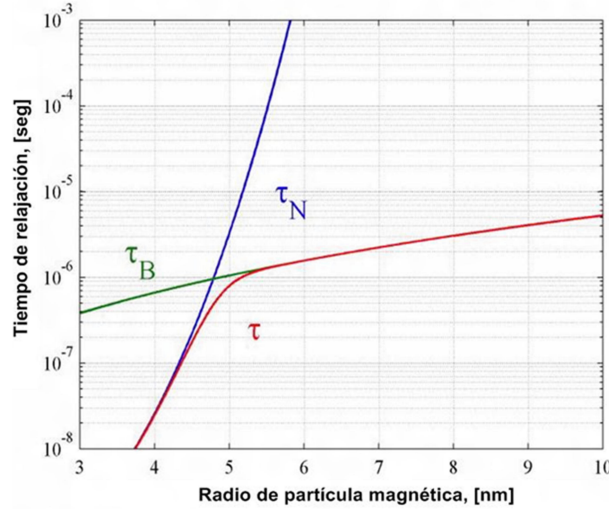


Figura 2-2: Tiempos de relajación Browniano, de Néel y tiempo efectivo en función del radio de las nanopartículas. Figura adaptada de Chaves, Tesis doctoral *Ref.* [1].

vorticidad del fluido ($\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$) generando esfuerzos asimétricos dentro del líquido por lo que $\boldsymbol{\sigma} = \eta [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t] + \zeta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) - \delta p$. Por lo tanto, $\boldsymbol{\omega}$ se constituye en una variable que hace necesario tener en cuenta el balance de momento angular interno descrito en la siguiente sección.

2.2 Ecuaciones ferrohodinámicas

Como ya fue mencionado, ferrohodinámica es la rama de la mecánica de fluidos que estudia el comportamiento de fluidos que son afectados por campos magnéticos externos, pero que no son conductores de electricidad, caso contrario a lo que sucede en la Magnetohodinámica [3]. El conjunto de ecuaciones ferrohodinámicas está constituido por la ecuación de continuidad para un fluido incompresible (*Ecn.* (2.3)), la ecuación de balance de momento lineal (*Ecn.* (2.4)) y la ecuación de balance de momento angular interno (*Ecn.* (2.5)), estas ecuaciones describen el comportamiento hidrodinámico del fluido. Adicionalmente es necesario incluir para el problema magnético la ecuación de magnetización (*Ecn.* (2.6)) y las ecuaciones de Maxwell en el límite

magneto-cuasiestático (*Ecn.* (2.7)), para fluidos no conductores [18, 3]

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} - \nabla p - 2\zeta \nabla \times \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right) + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.4)$$

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} + \eta \nabla^2 \boldsymbol{\omega} - 2\zeta \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{M}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_{eq}), \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0. \quad (2.7)$$

Las condiciones de frontera para el campo magnético son las siguientes:

$$\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{H} + \mathbf{M})_a - (\mathbf{H} + \mathbf{M})_b] = 0, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b] = \mathbf{K}, \quad (2.9)$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal a la interfase y dirigido de la fase a a la fase b , \mathbf{K} es el vector de distribución de corriente; mientras que las condiciones de frontera para la velocidad traslacional son las típicas condiciones de no-deslizamiento y no penetración.

Como fue mencionado en la sección 2.1, cuando las partículas del ferrofluido experimentan torques magnéticos ($\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} \neq 0$) el tensor de esfuerzos viscosos posee una parte asimétrica la cual es representada por el tercer término del lado derecho de la *Ecn.* (2.4). Este término es caracterizado por un coeficiente fenomenológico conocido como la viscosidad de vórtice (ζ) y para el cual Brenner [19] obtuvo la siguiente expresión

$$\zeta = 1.5 \phi_h \eta_0, \quad (2.10)$$

la cual es aplicable en el límite de dilución infinita. En esta expresión, ϕ_h es la fracción volumétrica hidrodinámica de las partículas en suspensión y η_0 es la viscosidad dinámica del fluido en el cual están suspendidas las partículas. Volviendo a la *Ecn.* (2.4), \mathbf{M} es el vector de magnetización del ferrofluido y \mathbf{H} es el vector del campo magnético. En la misma ecuación, el término $\mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$ representa la densidad de fuerza magnética que actúa sobre el ferrofluido (fuerza de cuerpo similar a la fuerza ejercida por la gravedad sobre un fluido) debido a gradi-

entes del campo magnético. En otras palabras es la forma como el campo magnético externo introduce momento lineal al fluido. Este tipo de fuerza es conocida con el nombre de *fuerza tipo Kelvin*. En la *Ecn.* (2.5), I es el momento de inercia promedio de las partículas por unidad de masa. El primer término del lado derecho de la *Ecn.* (2.5) ($\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}$) representa el torque magnético por unidad de volumen generado por un campo externo sobre las partículas del fluido. De modo similar al caso de la *fuerzas tipo Kelvin*, la densidad de torque magnético puede ser visto como el momento angular interno que es introducido al ferrofluido por el campo magnético externo. El segundo término del lado derecho de la *Ecn.* (2.5) tiene en cuenta la difusión del momento angular interno el cual es caracterizado por el coeficiente de "spin viscosity" η . El tercer término del lado derecho de la *Ecn.* (2.5) que también aparece en la *Ecn.* (2.4), representa la conversión o intercambio de momento angular interno a momento angular lineal (y viceversa) dentro del fluido, este término muestra que el momento angular interno no es conservado como sucede en fluidos no polares [20], pero el momento lineal y angular total sí se conservan.

2.2.1 Ecuaciones de magnetización

Soto-Aquino y Rinaldi [21] estudiaron la reología de suspensiones de nanopartículas magnéticas esféricas diluidas en un fluido newtoniano, aplicando campos magnéticos constantes y usando simulaciones dinámicas; estos autores encontraron excelente concordancia entre sus simulaciones y las predicciones de la ecuación de magnetización deducida por Martsenyuk, Raikher y Shliomis (MRSh). Los cálculos hechos a partir de la ecuación Shliomis [22] se desvía de los resultados de las simulaciones para los valores intermedios del parámetro Langevin. Soto-Aquino y Rinaldi también evaluaron una ecuación de magnetización obtenida a partir de termodinámica irreversible [23] y encontraron una buena concordancia cualitativa con sus simulaciones, pero no hubo concordancia cuantitativa.

Krekhov *et al* [24], en 2005 estudiaron el flujo axial de ferrofluido en una tubería, para diferentes velocidades de flujo, ellos observaron que de acuerdo al campo aplicado se obtenían viscosidades positivas o negativas lo que influye significativamente sobre la vorticidad del flujo y los ferrofluidos exhiben un comportamiento no Newtoniano; los modelos matemáticos usados se basan en las ecuaciones ferrohídrodinámicas convencionales, Krekhov *et al*, obtuvieron predic-

ciones de flujo usando por separado la ecuación de magnetización de Shliomis y la ecuación de magnetización MRSh, los resultados muestran que a medida que se incrementa la magnitud del CM aumenta la diferencia entre las predicciones obtenidas con cada ecuación de magnetización.

Ecuación de relajación de la magnetización de Shliomis

La *Ecn.* (2.6), se conoce con el nombre de Ecuación de Relajación de Magnetización de Shliomis [25] y tiene en cuenta la alineación local de las partículas por efecto del campo magnético. En la *Ecn.* (2.6), el primer término del lado derecho representa el efecto de la rotación de las partículas sobre el proceso de magnetización del ferrofluido, es decir, la rotación de las partículas cambia el vector de magnetización del ferrofluido por un ángulo igual a la cantidad $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ en una unidad de tiempo. El segundo término muestra que la razón de cambio de la magnetización es proporcional a la diferencia entre el vector de magnetización y su valor de equilibrio (\mathbf{M}_{eq}). En esta ecuación, τ es el tiempo de relajación efectivo de las partículas. Una expresión para la magnetización de equilibrio es dada por la ecuación de *Langevin*

$$\frac{\mathbf{M}_{eq}}{\phi M_d} = L(\alpha) \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} = \left[\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right] \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}, \quad \alpha = \frac{\mu_0 M_d |\mathbf{H}| V_c}{k_B T}, \quad (2.11)$$

donde $L(\alpha)$ es la función de *Langevin*, α es conocido como el parámetro de *Langevin* y representa la relación entre fuerzas magnéticas y brownianas que impiden o favorecen la alineación del momento magnético de las partículas en la dirección del campo, $|\mathbf{H}|$ es la amplitud local del campo magnético, M_d es la magnetización de dominio de las nanopartículas, T es la temperatura absoluta y V_c es el volumen de nanopartículas.

Ecuación de relajación de la magnetización MRSh

La ecuación de relajación de la magnetización de Martsenyuk, Raikher y Shliomis (MRSh) [26], es una ecuación microscópica para la magnetización del ferrofluido la cual asume que la función de distribución de las partículas suspendidas en un fluido, con respecto a la orientación de su momento magnético está sujeta a la ecuación de Fokker-Plank [27, 28]. Esta ecuación se caracteriza por tener dos tiempos de relajación: uno para la componente longitudinal y otro para la componente transversal de la magnetización; ambos son proporcionales a la viscosidad del

fluido. La *Ecn.* (2.12) es la ecuación MRSh y describe las componentes paralela y perpendicular de la relajación de la magnetización \mathbf{M} , respecto al campo magnético externo aplicado

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \frac{\mathbf{H} [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)]}{\tau_{\parallel} |\mathbf{H}|^2} - \frac{\mathbf{H} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})}{\tau_{\perp} |\mathbf{H}|^2}, \quad (2.12)$$

en la *Ecn.* (2.12), las constantes de tiempo τ_{\parallel} y τ_{\perp} son tiempos de relajación paralelo y perpendicular respectivamente, los cuales están dados por:

$$\tau_{\parallel} = \frac{d \ln L(\alpha)}{d \ln \alpha} \tau_B, \quad \tau_{\perp} = \frac{2L(\alpha)}{\alpha - L(\alpha)} \tau_B. \quad (2.13)$$

Capítulo 3

ESTADO DEL ARTE

Las investigaciones realizadas sobre la generación de flujo de ferrofluidos por CMR han sido enfocadas a la medición experimental de perfiles de velocidad y torques producidos sobre superficies que permiten validar algunas de las teorías propuestas como mecanismo generador del flujo. Por tal razón, este capítulo de revisión del estado del arte se subdivide en trabajos experimentales y teóricos sobre la generación de flujo por un campo magnético rotando en distintas geometrías.

3.1 Trabajos experimentales sobre flujo inducido por CMR

Moskowitz y Rosensweig [29] fueron los primeros en reportar la generación de flujo por un CMR de un ferrofluido en una geometría cilíndrica. Posteriormente Brown y Horsnell [30] realizaron experimentos donde observaron que la dirección del flujo en relación a la dirección de rotación del campo cambiaba de acuerdo a la magnitud del campo magnético aplicado: co-rotación entre el campo y el fluido para bajas amplitudes del CM y contra-rotación para altas amplitudes del CM. Este hallazgo fue y sigue siendo de importancia ya que muchas teorías incluyendo la de DMAI no pueden describir esta observación experimental. A este trabajo se sumaron otros como los de Kagan *et al.* [31] y Calugaru *et al.* [32], quienes reportaron contra-rotación para bajas amplitudes del CM y co-rotación para altas -amplitudes del CM, observaciones contrarias a las de Brown y Horsnell. Una revisión detallada de estos primeros trabajos muestra que en muchos casos, los experimentos fueron realizados con fluidos magnetoreológicos más que

con ferrofluidos, que no fue especificado el tipo de equipo empleado para generar el CM (por ejemplo estatores de dos o más polos) o que no se realizaba una apropiada caracterización física y magnética de los fluidos, lo que pone en duda la rigurosidad de los experimentos. Otro problema, de estos primeros experimentos, tiene que ver con la imposibilidad de medir perfiles de velocidad al interior del fluido debido al color oscuro característico de los ferrofluidos, lo que dificultó la aplicación de técnicas ópticas para medir estos perfiles de velocidad. Por tal razón, los perfiles de velocidad eran medidos en la superficie del fluido usando partículas como trazadores del flujo.

Ante la imposibilidad de la teoría de DMAI de explicar la contra-rotación entre flujo y CM; Rosensweig *et al.* [2] plantearon una nueva teoría. Ellos realizaron un experimento que consistió en medir la velocidad y la dirección del flujo en la superficie libre de un ferrofluido diluido en agua en un tubo capilar sometido a un CMR uniforme. Adicionalmente, ellos cambiaron la forma del menisco de cóncava a convexa mediante la modificación de las propiedades de la superficie del capilar. Con un menisco cóncavo ellos observaron que el CM y el fluido presentaban contra-rotación, mientras observaron que el CM y el fluido presentaban co-rotación con un menisco convexo. Esta situación es ilustrada en la Figura 3-1 [33]. Ellos también observaron que la velocidad angular de la superficie libre se incrementa a medida que el diámetro interior del contenedor cilíndrico disminuye siendo esto contrario a lo esperado habitualmente en flujos viscosos. Estas observaciones llevaron a Rosensweig *et al.* a la conclusión de que "*el flujo es generado por esfuerzos magnéticos tangenciales de carácter superficial*" más que por esfuerzos volumétricos, lo que a la postre generó dudas sobre la posibilidad de que no existiera flujo al interior del fluido.

Con los resultados del anterior trabajo en mente, Chaves *et al.* [34] realizaron los primeros perfiles de velocidad medidos al interior del fluido. Estos perfiles de velocidad fueron obtenidos usando una técnica basada en emisiones de pulsos de ultrasonido que permite medir los perfiles de velocidad en tiempo real. El montaje experimental y algunos perfiles de velocidad obtenidos por ellos se muestran en la Figura 3-2. Estos experimentos mostraron, que el flujo en la superficie del fluido es fuertemente influenciado por esfuerzos magnéticos tangenciales y que por lo tanto, la dirección del flujo en la interfase fluido-aire depende de la curvatura de la superficie como había sido planteado por Rosensweig *et al.* [2]: contra-rotación entre flujo y CM del fluido

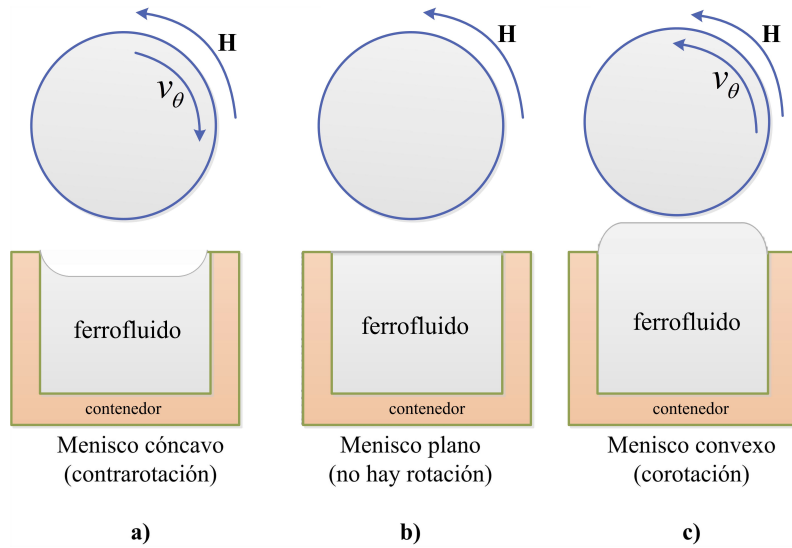


Figura 3-1: Observaciones experimentales hechas por Rosensweig *et al.* [2]: **(a)** Con un menisco cóncavo en la superficie libre se observó contra-rotación del fluido con respecto a la dirección de rotación del CM. **(b)** Cuando la superficie era plana no se observó flujo. **(c)** Con un menisco convexo en la superficie libre, se observó co-rotación entre flujo y CM. Figura modificada de *Ref.* [29].

cercano a la interfase fluido-aire cuando esta es cóncava y co-rotación cuando la interface es convexa. Adicionalmente, se observó que la dirección del flujo al interior del fluido siempre es la misma que la dirección de rotación del CM.

Estos experimentos demostraron que el flujo al interior del fluido es generado por efectos volumétricos mientras que el flujo cercano a la interface del fluido es influenciado por esfuerzos magnéticos tangenciales de carácter superficial, y que por tanto, los perfiles de velocidad medidos en la superficie no pueden ser usados para validar teorías basadas en fuerzas volumétricas como la teoría DMAI. Estos experimento muestran que la teoría de DMAI es la que mejor predice el flujo al interior del fluido, no obstante, algunos aspectos como la magnitud del flujo, el valor de η' , el efecto de la no completa homogeneidad del campo magnético siguieron sin ser completamente aclarados.

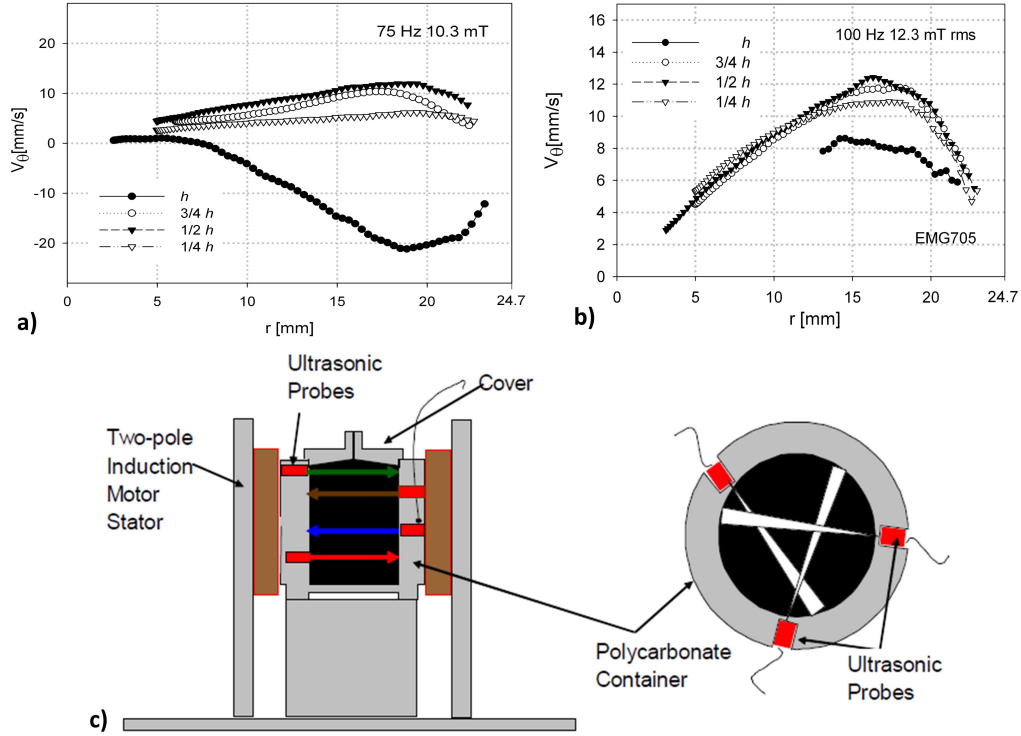


Figura 3-2: **a)** Perfiles de velocidad para diferentes alturas del contenedor cilíndrico sin tapa, a $h = 63$ mm las velocidades negativas indican contra-rotación. **b)** Perfiles de velocidad medidos en cuatro alturas diferentes del eje del contenedor cilíndrico con tapa. **c)** Ilustración de la configuración experimental para mediciones de perfiles de velocidad en ferrofluidos, en un contenedor cilíndrico y sometido a un campo magnético rotativo uniforme. Izquierda: Contenedor con transductores situados dentro de un estator de inducción de dos polos de motor. Figuras tomadas de la *Ref.* [20].

3.2 Teorías sobre el mecanismo de generación de flujo de FF por CMR

Varios autores [3, 35, 2, 29, 36] han formulado teorías para tratar de explicar el mecanismo generador del flujo de ferrofluido en un contenedor cilíndrico; una de las más importantes es la “*Spin Diffusion Theory*” (DMAI) desarrollada por Zaitsev y Shliomis [35]. Esta teoría supone que el campo magnético es uniforme en el interior del ferrofluido lo que a su vez genera una magnetización uniforme. Esto trae como consecuencia una fuerza magnética igual a cero ($\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} = 0$) y densidad de torque magnético uniforme ($\mathbf{M} \times \mathbf{H} = \text{constante}$). Adicionalmente ellos supo-

nen que la contribución de la velocidad angular ($\mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}$) a la ecuación de magnetización es despreciable, y que la \mathbf{M}_{eq} puede ser aproximada como $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi \mathbf{H}$. Estas dos últimas aproximaciones les permitieron obtener una solución analítica desacoplando el problema magnético del hidrodinámico. Sin embargo, ésta teoría se ha enfrentado con varios dilemas, como por ejemplo el hecho de que el parámetro fenomenológico que caracteriza la DMAI conocido como "spin viscosity" (η') no ha podido ser determinado ni experimental ni analíticamente. Más aún, muchos investigadores se han inclinado por tomar $\eta' = 0$ en sus análisis basados en argumentos dimensionales los cuales predicen su valor como despreciable ($\eta' \sim 10^{19}$). No obstante, estos análisis realizados con $\eta' = 0$, no predicen flujo, contradiciendo la evidencia experimental actual que ha probado la existencia de este al interior del fluido [34]. El otro gran problema que ha tenido que enfrentar esta teoría además del hecho de no poder explicar la contra-rotación entre CM y flujo, es que los valores de la magnitud de flujo predichos por la teoría son más grandes que los medidos experimentalmente.

Glazov desarrolló una teoría alternativa para explicar el fenómeno observado en el comportamiento del flujo [37, 38, 39]. Él consideró en su análisis que el flujo es producido por el efecto de armónicos espaciales de alto orden, que se generan en los experimentos debido a la no idealidad en la distribución del devanado del estátor. Los análisis de flujo de Glazov se basaron en la misma teoría fenomenológica de Zaitsev y Shliomis [35], pero desprecia las contribuciones debidas a la difusión del momento angular interno ($\eta' = 0$). Glazov concluyó que no puede producirse flujo en ausencia de armónicos de alto orden cuando se utiliza un devanado de dos polos como fuente de campo magnético; en otras palabras, el CM uniforme supuesto por Zaitsev y Shliomis no puede generar flujo, y por lo tanto, las observaciones experimentales del flujo se deben a las imperfecciones del equipo generador del CM. No obstante, la teoría de Glazov tampoco logró explicar la contra-rotación entre el CM y el ferrofluido.

Pshenichnikov *et al.*, [40, 36] planteó que el flujo es generado por la disipación de energía producida por la rotación de las partículas en el fluido, lo que da lugar a gradientes de temperatura y consecuentemente a gradientes en la magnetización del fluido, que generan flujo en la dirección opuesta a la dirección de rotación del campo. Sin embargo, para que esto fuera real, debería existir un tiempo de retraso entre la puesta del CM y el inicio del flujo lo cual no sucede; el flujo inicia con la exposición del fluido al CM, además, Chaves *et al.* no observaron

gradientes de temperatura.

Motivados por los resultados experimentales de flujo al interior del fluido, Chaves *et al.* [41] desarrollaron una solución asintótica al problema de flujo en un cilindro infinitamente largo usando el método de perturbación regular. Para esto realizaron un escalamiento del conjunto de ecuaciones ferrohodinámicas con el fin de obtener un parámetro de perturbación:

$$\varepsilon \equiv \frac{\mu_0 \chi K^2 \tau}{\zeta} = \frac{2}{3} \alpha^2. \quad (3.1)$$

Este análisis mostró que el problema de cero orden corresponde al problema resuelto por Zaitsev y Shliomis [35], mientras que el primer orden permitió ampliar el rango de amplitud del CM hasta valores de $\alpha = 0.5$; el cual sigue siendo insuficiente para realizar una comparación directa con resultados experimentales. No obstante, ellos usaron estos resultado analíticos junto a los experimentales para estimar el valor de η' , obteniendo valores de η' en un rango de $10^{-8} - 10^{-12}$ kg m s^{-1} [41], el cual es significativamente grande respecto al valor estimado por Zaitsev y Shliomis $\eta \approx 10^{-19} \text{kg m s}^{-1}$ [35].

Las conclusiones dadas por Chaves *et al.* [41] fueron controvertidas por Khushrushahi y Zahn [42], quienes afirmaron que el flujo observado en los experimentos no es el resultado de "couple stress" si no por efectos de desmagnetización generados por la no uniformidad del CM. Esta afirmación es basada en mediciones de flujo realizadas en un recipiente esférico el cual está entre dos pares de bobinas esféricas que, según los autores, generan un CMR uniforme; bajo estas condiciones no fue generado flujo, mientras que cuando la esfera no estaba totalmente llena, se podían obtener medidas de flujo. Posteriormente, ellos generaron un campo magnético no uniforme sobre la esfera completamente llena de ferrofluido y de nuevo detectaron la generación del flujo. Estos experimentos llevaron a Khushrushahi y Zahn a concluir que un campo magnético no uniforme es la causa de *Spin Up Flow* en ferrofluidos contenidos en recipientes totalmente cubiertos, mientras que esfuerzos magnéticos tangenciales contribuyen al flujo del ferrofluido con superficies descubiertas y expuestas al CM. Khushrushahi y Zahn concluyen que estos mecanismos generadores de flujo son la razón por la cual los valores experimentales del coeficiente "spin viscosity" (η) son de orden de magnitud muy superior a los valores que se han determinado con la teoría DMAI [3, 43].

En 2013, Finlayson [44] examinó computacionalmente el spin-up de ferrofluidos (movimiento de rotación de un fluido magnético inducido por un CMR), él usó el software de elementos finitos *COMSOL Multiphysics*[®]. Las simulaciones muestran que para una viscosidad de giro dado y una ecuación de magnetización lineal, a medida que aumenta el campo magnético el flujo se vuelve irregular y cambia de dirección. El campo magnético crítico en el que esto sucede disminuye como la viscosidad de giro disminuye. Cuando se utiliza la ecuación de Langevin, no se observa la inversión del flujo. Si la viscosidad de giro es cero, no se predice flujo cuando el campo magnético es uniforme. Ellos dicen que el flujo irregular se produce si el campo magnético es alto, lo que está relacionado con la viscosidad de giro y la ecuación de la magnetización usada.

En 2014 Torrez-Díaz *et al* [45] reportaron mediciones de perfiles de velocidad para una serie de ferrofluidos en contenedores cilíndricos y sometidos a campos magnéticos rotativos (CMR). Los ferrofluidos consistían en suspensiones de nanopartículas de ferrita-cobalto electrostáticamente estabilizado en mezclas de agua, glicerol, y agua/glicerol. Ellos verificaron experimentalmente el mecanismo de relajación browniano de las nanopartículas y el tiempo de relajación magnético para cada ferrofluido. Mediante la variación de la viscosidad del medio de suspensión, pudieron probar el efecto del producto de la frecuencia de campo y el tiempo de relajación magnético en el flujo inducido por un CMR. Para ferrofluidos con baja viscosidad y bajas concentraciones de partículas, y sometidos a campos magnéticos bajos, ellos encontraron una excelente concordancia cuantitativa entre los perfiles de velocidad experimentales y los predichos por la teoría de DMAI, no obstante, ellos observaron que a mayores amplitudes de campo magnético para los mismos ferrofluidos, se presentó una disminución de la dependencia de la magnitud de flujo con la intensidad del campo aplicado, ellos atribuyen este comportamiento a la magnetización de saturación de los ferrofluidos. Para ferrofluidos más concentrados y de alta viscosidad, ellos obtuvieron perfiles de velocidad con las mismas características cualitativas predichos por la teoría de DMAI. Sin embargo, Torrez-Díaz *et al*, observaron que la dependencia de la magnitud de estos perfiles de velocidad respecto a la amplitud del campo y la frecuencia se desvió de las predicciones obtenidas con la teoría de DMAI. Torrez-Díaz *et al*. atribuyeron estas diferencias al uso de una ecuación de relajación de la magnetización (en la teoría de DMAI) que sólo es válida para bajas amplitudes y frecuencias del campo aplicado. Con base en sus observaciones experimentales Torrez-Díaz *et al*. recomiendan hacer análisis con la teoría de

DMAI clásica pero prescindiendo de los supuestos de bajas amplitudes y frecuencias del campo aplicado, y haciendo uso de la ecuación de relajación de la magnetización más precisa deducida por Martsenyuk, Raikher y Shliomis (ecuación MRSh).

En conclusión, todavía no existe un concepto claro sobre el mecanismo de generación del flujo. No obstante la evidencia experimental y los análisis de flujo realizados usando la teoría de DMAI la muestran como la que mejor describe los experimentos realizados. Por otro lado, los análisis teóricos han sido limitados a condiciones de amplitudes del CM que tienden a cero lo que implica que estas predicciones no pueden ser usadas rigurosamente para validar comparando con experimentos, los cuales han sido realizados a amplitudes del campo próximas al valor de la magnetización de saturación del ferrofluido. Adicionalmente, se ha comprobado que la ecuación de magnetización de Shliomis no es exacta a altas amplitudes y frecuencias del CM, lo que hace necesario usar otra ecuación obtenida de una forma más rigurosa con el fin de determinar predicciones de la teoría DMAI que puedan ser usadas a altas amplitudes del CM. Finalmente, se debe resaltar la importancia de la geometría usada en los estudios de flujo. La mayoría de los experimentos han sido realizados en geometría cilíndrica lo que facilita el trabajo experimental, pero que complica el desarrollo de soluciones de flujo cuando se busca obtener soluciones validas a campos altos. Por otro lado, también existen análisis de flujo entre placas planas lo que complica el desarrollo experimental pero que facilita los análisis de flujo. En este sentido, este trabajo se enfocará en el análisis teórico de flujo entre placas planas sin restricción en la amplitud del CM, como primer paso hacia el posterior desarrollo del análisis de flujo en un recipiente cilíndrico.

Capítulo 4

OBJETIVOS DEL PROYECTO

4.1 Objetivo General

Valorar el efecto de la ecuación de magnetización de Shliomis-Langevin y la ecuación de magnetización de MRSh sobre el campo de flujo de FFs para altas intensidades y frecuencias del CM.

4.2 Objetivos Específicos

1. Determinar una solución asintótica para el campo de flujo de un FF entre dos placas paralelas infinitamente largas, suponiendo que $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi\mathbf{H}$ y usando como parámetro de perturbación $\varepsilon \equiv \frac{\mu_0\chi K^2\tau}{\zeta} = \frac{2}{3}\alpha^2$.
2. Desarrollar un modelo ferrohodinámico valido para el problema de flujo de FFs entre dos placas paralelas prescindiendo de la suposición $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi\mathbf{H}$.
3. Determinar el efecto de las ecuaciones de magnetización sobre el campo de flujo a bajas y altas intensidades del CM y frecuencias de rotación.
4. Evaluar el efecto del termino $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ de la ecuación de magnetización de Shliomis y la ecuación de magnetización MRSh sobre la generación del flujo a altas amplitudes y frecuencias del CM.

Capítulo 5

METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta la metodología llevada a cabo para lograr los objetivos del proyecto. La Figura 5-1 muestra de manera resumida las etapas del proyecto. En las siguientes secciones se hace una descripción de cada una de las etapas.

5.1 Revisión bibliográfica

Durante el desarrollo de la investigación se revisaron publicaciones (artículos, libros, etc.) sobre: ferrodinámica, dinámica de fluidos computacionales, electromagnetismo, fluidos estructurados, métodos numéricos para solución de ecuaciones diferenciales parciales e información relacionada con la temática.

5.2 Desarrollo de Modelos Matemáticos

En este paso de la metodología se desarrollaron los modelos matemáticos tanto para las soluciones numéricas como para la solución asintótica. La solución asintótica es válida en el límite de bajos campos y fue usada para validar las soluciones numéricas. Los modelos matemáticos se diferencian básicamente en la ecuación de Magnetización de la siguiente manera: 1) La solución asintótica usa la Ecuación de Magnetización de Shliomis con la aproximación $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi \mathbf{H}$ y

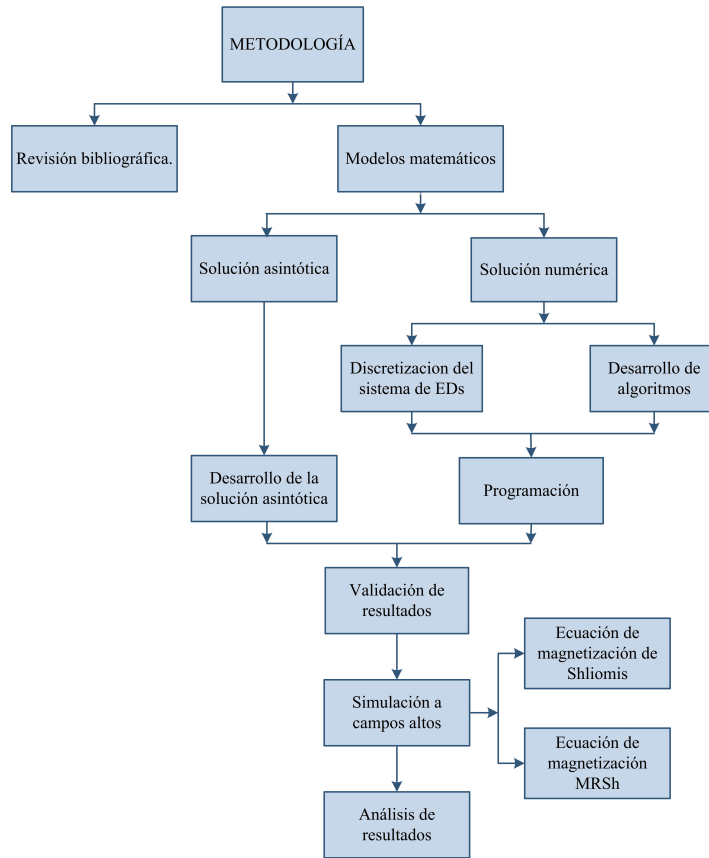


Figura 5-1: Etapas de la metodología para la realización del proyecto.

$\omega \times \mathbf{M} = \mathbf{0}$. 2) La solución numérica con la Ecuación de Magnetización de Shliomis con la aproximación $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi \mathbf{H}$ y $\omega \times \mathbf{M} = \mathbf{0}$. 3) Solución numérica con ecuación de Magnetización de Shliomis y $\mathbf{M}_{eq} = \phi M_d L(\alpha) \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}$ y $\omega \times \mathbf{M} \neq \mathbf{0}$. 3) Solución numérica con Ecuación de Magnetización de MRSh.

5.3 Implementación de Soluciones Asintótica y Numéricas

Se obtuvo la solución asintótica como el primer orden de un análisis de perturbación regular con parámetro de perturbación dado por la Ecn. 3.1. Las soluciones numéricas fueron implementadas teniendo en cuenta que las soluciones validas a altos intensidades del campo magnético requirieron la implementación del método de Newton-Raphson debido a la no linealidad del

problema. Las soluciones fueron entonces validadas a bajas amplitudes del campo magnético.

5.4 Predicciones de Flujo a Altas Intensidades del Campo Magnético

Una vez validadas las soluciones numéricas para el flujo de ferrofluido entre dos placas paralelas, se realizaron las simulaciones de flujo a altas intensidades y altas frecuencias de rotación del campo magnético. Las propiedades físicas y magnéticas usadas en la simulación fueron las reportadas por Torres-Díaz *et al.*, [45] para ferrofluidos de ferrita de cobalto suspendidas en agua y en una mezcla de agua y glicerina. A partir de estas simulaciones se construyeron las conclusiones y recomendaciones del proyecto.

Capítulo 6

IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA Y VALIDACIÓN DEL CAMPO DE FLUJO ENTRE DOS PLACAS PARALELAS

Con el fin de validar las soluciones numéricas obtenidas, se obtuvo una solución asintótica válida en el límite de amplitudes de campo magnéticos que tiende a cero. Es necesario resaltar que soluciones similares fueron presentadas inicialmente por Zahn y Greer [46] y posteriormente por Rinaldi y Zahn [47]. No obstante, Zahn y Greer obtuvieron una solución numérica válida para $\omega_y \tau \ll 1$ y $|\mathbf{H}| \rightarrow 0$. Por otro lado, Rinaldi y Zahn usaron el método de perturbación regular tomando como parámetro de perturbación el producto de la escala de la velocidad angular y el tiempo de relajación efectivo de las partículas, no obstante, ellos no definen claramente cuál es la escala para ω . Teniendo en cuenta lo anterior, se prefirió usar una solución asintótica usando como parámetro de perturbación el obtenido por Chaves *et al.*, [41]. No obstante, el modelo matemático usado para la descripción del campo de flujo corresponde al usado en las dos referencias mencionadas.

6.1 Solución Asintótica Para el Campo de Flujo de un Ferrofluido Entre Dos Placas Paralelas

6.1.1 Descripción del problema de flujo de ferrofluido entre placas paralelas

La geometría del problema se ilustra en la Figura 6-1. El análisis supone la existencia de una capa de ferrofluido de espesor δ entre dos placas paralelas infinitamente largas y sometida al efecto de un campo magnético uniforme rotando sobre el eje y . El campo magnético es simulado por la superposición de dos fuentes externas: una componente de campo magnético longitudinal y una componente de inducción magnética transversal representadas por las funciones

$$B_x = \Re \{ b_x e^{j\Omega_f t} \}, \quad (6.1)$$

$$H_z = \Re \{ h_z e^{j\Omega_f t} \}, \quad (6.2)$$

donde \Re es la parte real de la función compleja, j es el número imaginario, b_x y h_z representan las componentes x y z complejas de la inducción magnética y del campo magnético. Teniendo en cuenta la aproximación geométrica usada y la dirección de rotación del campo se puede suponer que los vectores de velocidad translacional del fluido y angular de las partículas magnéticas son: $\mathbf{v} = v_z(x) \mathbf{i}_z$ y $\boldsymbol{\omega} = \omega_y(x) \mathbf{i}_y$. Adicionalmente, se supone que los efectos inerciales son despreciables tanto en la ecuación de momento lineal como de momento angular interno y que no existe un gradiente de presión en la dirección del flujo.

Teniendo en cuenta estas suposiciones y usando las siguientes variables escaladas obtenidas en la referencia [41]

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}}{\chi K}; \quad \tilde{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}}{K}; \quad \tilde{\nabla} = \delta \nabla; \quad \tilde{x} = \frac{x}{\delta}; \quad \tilde{t} = \Omega_f t; \quad (6.3)$$

$$\tilde{p} = \frac{\zeta p}{\mu_o \eta \chi K^2 \tilde{\Omega}}; \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\zeta \boldsymbol{\omega}}{\mu_o \chi K^2 \tilde{\Omega}}; \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\zeta \mathbf{v}}{\mu_o \chi K^2 \tilde{\Omega} \delta}, \quad (6.4)$$

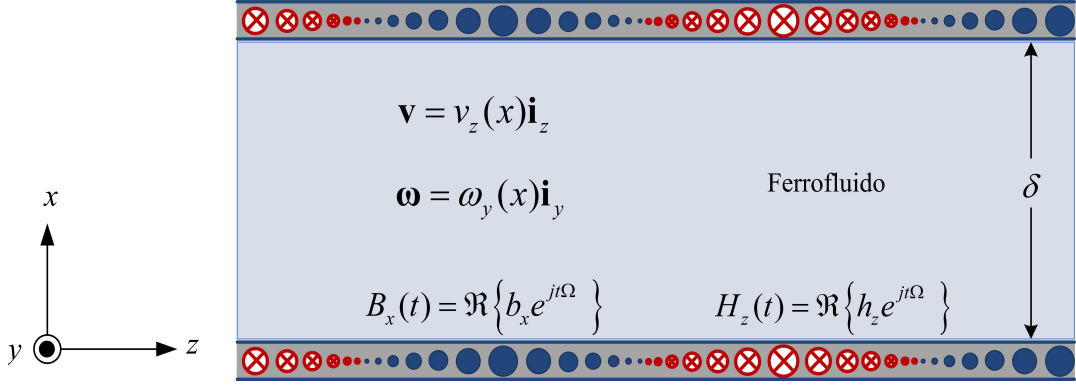


Figura 6-1: Geometría para modelar el problema de flujo de ferrofluido entre placas paralelas infinitamente largas, generado por un campo magnético longitudinal H_z y una densidad de flujo magnético transversal B_x , proporcionados por las bobinas que se ubican alrededor de las placas, v_z es la velocidad lineal y w_y es la velocidad angular.

se obtiene las ecuaciones ferrohídrodinámicas escaladas y en forma adimensional

$$\mathbf{0} = \frac{\zeta}{\eta \tilde{\Omega}} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\nabla} \tilde{p} + 2 \frac{\zeta}{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{\eta_e}{\eta} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{0} = \frac{1}{\tilde{\Omega}_f} \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} + 2 \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - 4 \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (6.6)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial t} + \tilde{\Omega}_\varepsilon \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\Omega}_\varepsilon \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\mathbf{M}_{eq}}{\chi_i K}, \quad (6.7)$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \quad (6.8)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot (\chi_i \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{H}}) = 0. \quad (6.9)$$

En las *Ecms.* (6.3) y (6.4) χ es la susceptibilidad magnética inicial del ferrofluido, K es la amplitud del campo magnético, δ es la distancia entre las dos placas y $\tilde{\Omega} \equiv \Omega \tau$. De la misma forma en las *Ecms.* (6.5) a (6.9), se definió el parámetro dimensional η_e y el adimensional κ como.

$$\eta_e \equiv \eta + \zeta, \quad \kappa^2 \equiv \frac{4\eta \delta^2 \zeta}{\eta_e \eta'}. \quad (6.10)$$

6.1.2 Expresión para la densidad de torque magnético

El análisis realizado en este documento para obtener las expresiones del campo magnético, densidad de flux magnético y magnetización es el propuesto por Zahn y Greer [46]. En este sentido para determinar una expresión para la densidad del torque magnético se hace necesario resolver las *Ecns.* (6.7) a (6.10). Para esto usamos las *Ecns.* (6.20) y (6.1) en forma adimensional.

$$\tilde{H}_z(\tilde{t}) = \Re \left\{ \tilde{h}_z e^{j\tilde{t}} \right\}, \quad (6.11)$$

$$\tilde{B}_x(\tilde{t}) = \Re \left\{ \tilde{b}_x e^{j\tilde{t}} \right\}. \quad (6.12)$$

Esta suposición de que $\tilde{H}_z(\tilde{t})$ y $\tilde{B}_x(\tilde{t})$ son uniformes espacialmente, y que el espesor de la película de fluido es depreciable en comparación con sus dimensiones en las direcciones z y y , satisfacen las leyes de Ampere y Gauss.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{H}} &= \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \tilde{x}} \mathbf{i}_y = \mathbf{0}, \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}} &= \frac{\partial \tilde{B}_x}{\partial \tilde{x}} = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, las componentes x y z de la magnetización deben depender de la coordenada x en virtud del término $\tilde{\omega} \times \tilde{\mathbf{M}}$ que aparece en la ecuación de magnetización (*Ecns.* (6.7) y por lo tanto las componentes \tilde{H}_z y \tilde{B}_x también deben depender de la coordenada x y por consiguiente se puede asumir que los vectores $\tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ y $\tilde{\mathbf{M}}$ tienen la siguiente forma funcional:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \Re \left\{ \left[\tilde{h}_x(\tilde{x}) \mathbf{i}_x + \tilde{h}_z \mathbf{i}_z \right] e^{j\tilde{t}} \right\}, \quad (6.13)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \Re \left\{ \left[\tilde{b}_x \mathbf{i}_x + \tilde{b}_z(\tilde{x}) \mathbf{i}_z \right] e^{j\tilde{t}} \right\}, \quad (6.14)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \Re \left\{ \left[\tilde{m}_x(\tilde{x}) \mathbf{i}_x + \tilde{m}_z(\tilde{x}) \mathbf{i}_z \right] e^{j\tilde{t}} \right\}. \quad (6.15)$$

Donde \tilde{h}_x , \tilde{h}_z , \tilde{b}_x , \tilde{b}_z , \tilde{m}_x y \tilde{m}_z son las componentes complejas adimensionales de los vectores del campo magnético, inducción magnética y la magnetización, respectivamente. Bajo estas condiciones las componentes x y z de la ecuación de magnetización para el cero orden de un

análisis de perturbación regular son:

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{M}_x + \tilde{H}_x, \quad (6.16)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{M}_z + \tilde{H}_z, \quad (6.17)$$

donde usamos la aproximación lineal $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi \mathbf{H}$, lo que limita la solución a campos magnéticos bajos. Usando las *Ecns.* (6.13) y (6.15) en las *Ecns.* (6.16) y (6.17) se obtienen las siguientes expresiones para \tilde{m}_x y \tilde{m}_z :

$$\tilde{m}_x(\tilde{x}) = \frac{\tilde{h}_x(\tilde{x})}{1 + j\tilde{\Omega}}, \quad \tilde{m}_z(\tilde{x}) = \frac{\tilde{h}_z}{1 + j\tilde{\Omega}}. \quad (6.18)$$

Ahora se puede obtener la componente compleja del campo magnético en la dirección x introduciendo las *Ecns.* (6.13) a (6.18) en la expresión para el vector de densidad de flujo magnético

$$\tilde{\mathbf{B}} = \chi \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{H}} \quad (6.19)$$

obteniendo:

$$\tilde{h}_x(\tilde{x}) = \frac{\tilde{b}_x(1 + j\tilde{\Omega})}{1 + \chi + j\tilde{\Omega}}. \quad (6.20)$$

Como puede ser observado de las *Ecns.* (6.18) y (6.20), el campo magnético es uniforme ($\nabla \mathbf{H} = \mathbf{0}$) por lo que el vector de fuerza magnética es cero. A diferencia de esta, existe la componente y del torque magnético y es dada por la expresión:

$$\tilde{l}_y = \tilde{M}_z \tilde{H}_x - \tilde{M}_x \tilde{H}_z, \quad (6.21)$$

$$\tilde{l}_y = \Re \left\{ \tilde{m}_z e^{j\tilde{t}} \right\} \Re \left\{ \tilde{h}_x e^{j\tilde{t}} \right\} - \Re \left\{ \tilde{m}_x e^{j\tilde{t}} \right\} \Re \left\{ \tilde{h}_z e^{j\tilde{t}} \right\}. \quad (6.22)$$

La ecuación (6.22) puede ser simplificada reconociendo que la parte real de un número complejo z es

$$\Re \{z\} = \frac{1}{2} (z + z^*), \quad (6.23)$$

donde el superíndice (*) denota el conjugado complejo de z . Entonces usando *Ecn.* (6.23) en

Ecn. (6.22) se obtiene

$$\tilde{l}_y = -\frac{j\tilde{\Omega} \left[(1 + \chi + \tilde{\Omega}^2 - j\chi\tilde{\Omega}) \tilde{h}_z \tilde{b}_x^* - j(1 + \chi - j\tilde{\Omega})(-j + \tilde{\Omega}) \tilde{h}_z^* \tilde{b}_x \right]}{2(\tilde{\Omega}^2 + 1) \left[(\chi + 1)^2 + \tilde{\Omega}^2 \right]}. \quad (6.24)$$

El campo magnético rotando puede ser generado escogiendo $\tilde{h}_z = -1$ y $\tilde{b}_x = j$ o $\tilde{h}_z = 1$ y $\tilde{b}_x = -j$ como es demostrado por Rinaldi [17] con lo cual se obtiene:

$$\tilde{l}_y = \frac{\tilde{\Omega}(1 + \chi + \tilde{\Omega}^2)}{(1 + \tilde{\Omega}^2) \left[(1 + \chi)^2 + \tilde{\Omega}^2 \right]}. \quad (6.25)$$

Es de resaltar que esta expresión es independiente del tiempo y de la posición.

6.1.3 Expresiones para el perfil de velocidad traslacional

Teniendo en cuenta las suposiciones antes mencionadas sobre los campos de velocidad lineal y angular; la componente z del balance de momento lineal y la componente y del balance de momento angular interno se simplifican a:

$$2\frac{\zeta}{\eta} \frac{d\tilde{\omega}_y}{d\tilde{x}} + \frac{\eta_e}{\eta} \frac{d^2\tilde{v}_z}{d\tilde{x}^2} = 0 \quad (6.26)$$

$$\frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \frac{d^2\tilde{\omega}_y}{d\tilde{x}^2} - 2\frac{d\tilde{v}_z}{d\tilde{x}} - 4\tilde{\omega}_y + \frac{\tilde{l}_y}{\tilde{\Omega}} = 0 \quad (6.27)$$

El anterior sistema de ecuaciones diferenciales puede ser resuelto integrando la *Ecn.* (6.26) un vez de lo que se obtiene

$$\frac{d\tilde{v}_z}{d\tilde{x}} = \frac{\eta_e}{\eta} c_1 - 2\frac{\zeta}{\eta} \tilde{\omega}_y \quad (6.28)$$

expresión que posteriormente se reemplazó en la ecuación *Ecn.* (6.27) para obtener

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2\tilde{\omega}_y}{d\tilde{x}^2} - \tilde{\omega}_y = -\frac{c_1}{2} - \frac{\eta_e \tilde{l}_y}{4\eta \tilde{\Omega}}. \quad (6.29)$$

La anterior ecuación tiene la solución general

$$\tilde{\omega}_y(\tilde{x}) = C_1 \sinh(\kappa\tilde{x}) + C_2 \cosh(\kappa\tilde{x}) + \frac{\eta_e \tilde{l}_y}{4\eta \tilde{\Omega}} + \frac{c_1}{2}. \quad (6.30)$$

El perfil de velocidad lineal es determinado reemplazando la *Ecn.* (6.30) en la *Ecn.* (6.28), e integrando una vez de donde se obtiene:

$$\tilde{v}_z(\tilde{x}) = -C_1 \frac{2\zeta}{\eta_e \kappa} \cosh(\kappa \tilde{x}) - C_2 \frac{2\zeta}{\eta_e \kappa} \sinh(\kappa \tilde{x}) - c_1 \tilde{x} - \frac{\zeta \tilde{l}_y}{2\eta \tilde{\Omega}} \tilde{x} + C_3, \quad (6.31)$$

Con el fin de determinar c_1 , C_1 , C_2 y C_3 se usan como condiciones de frontera la condición de no deslizamiento, es decir: $\tilde{v}_z(0) = 0$, $\tilde{\omega}_y(0) = 0$ y $\tilde{v}_z(1) = 0$, $\tilde{\omega}_y(1) = 0$, por tanto los perfiles de velocidad lineal y angular son:

$$\omega_y(\tilde{x}) = \frac{\mu_o \chi K^2 \eta_e \kappa \tilde{l}_y \sinh\left(\frac{\kappa \tilde{x}}{2}\right) \sinh\left[\frac{1}{2}(\kappa - \tilde{x}\chi)\right]}{\zeta \left[\eta_e \kappa \cosh\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right) - 2\zeta \sinh\left(\frac{\kappa}{2}\right)\right]}, \quad (6.32)$$

$$v_z(\tilde{x}) = -\frac{\mu_o \chi K^2 \delta \tilde{l}_y (2\tilde{x} - 1) \sinh\left(\frac{\kappa}{2}\right) \sinh\left[\frac{1}{2}(\kappa - 2\tilde{x})\right]}{\eta_e \kappa \cosh\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right) - 2\zeta \sinh\left(\frac{\kappa}{2}\right)}. \quad (6.33)$$

6.2 Implementación de las Soluciones Numéricas

En esta sección se detalla la forma como se implementó las soluciones numéricas de las ecuaciones ferrohodinámicas (*Ecns.* (6.5) a (6.9)) adimensionalizadas en la sección anterior. La discretización se realizó usando el método de diferencias finitas. Posteriormente, se hizo la programación de algoritmos usando el lenguaje computacional C++. Debido a la complejidad en la implementación numérica de los modelos matemáticos se decidió obtener una solución numérica inicial asumiendo que la magnetización de equilibrio $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi \mathbf{H}$, con lo cual se realizó una primera validación del cálculo computacional. Luego se procedió a obtener las dos soluciones numéricas de interés: una usando la ecuación de magnetización de Shliomis teniendo en cuenta la ecuación de Langevin y otra usando la ecuación de magnetización de MRSh.

6.2.1 Modelos Matemáticos y Discretización para el Problema de Flujo con Diferentes Ecuaciones de Magnetización

Case 1 Con ecuación de magnetización de Shliomis y $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi \mathbf{H}$

Problema Hidrodinámico

Cabe resaltar que el modelo matemático para el campo de velocidad es el mismo para la solución asintótica y para las soluciones numéricas que se estudian en este trabajo. Aquí se debe resaltar, que los resultados de la solución numérica estudiado en este caso no difieren del de la solución asintótica ya obtenida, no obstante se hizo con el fin de desarrollar una base algorítmica y de programación que facilite la obtención de las soluciones numéricas de interés y que serán tratadas en los otros casos. En este sentido las *Ecns.* (6.26) y (6.27) fueron discretizadas usando diferencias finitas centrales de orden cuatro, cuyo error es del orden $\mathcal{O}(\Delta x)^4$, obteniéndose:

$$\left(\frac{\zeta}{\eta \tilde{\Omega}} \left\langle \tilde{f}_x(t) \right\rangle_t \right)_i + \frac{A}{\Delta x^2} \tilde{v}_{i-1} - \frac{2A}{\Delta x^2} \tilde{v}_i + \frac{A}{\Delta x^2} \tilde{v}_{i+1} - \frac{B}{\Delta x} \tilde{\omega}_{i-1} + \frac{B}{\Delta x} \tilde{\omega}_{i+1} = 0, \quad (6.34)$$

$$\left(\frac{1}{\tilde{\Omega}} \left\langle \tilde{l}_y(t) \right\rangle_t \right)_i + \frac{2}{\Delta x} \tilde{v}_{i-1} - \frac{2}{\Delta x} \tilde{v}_{i+1} + \frac{C}{\Delta x^2} \tilde{\omega}_{i-1} - \left(4 + \frac{2C}{\Delta x^2} \right) \tilde{\omega}_i + \frac{C}{\Delta x^2} \tilde{\omega}_{i+1} = 0 \quad (6.35)$$

Las soluciones de las matrices generadas al aplicar las *Ecns.* (6.34) y (6.35) fueron obtenidas usando el método iterativo de Gauss-Seidel; en estas ecuaciones los términos $\left\langle \tilde{f}_x(t) \right\rangle_t$ y $\left\langle \tilde{l}_y(t) \right\rangle_t$ son la fuerza y el torque magnéticos promediados en el tiempo, para esta geometría la fuerza magnética es igual a cero, el subíndice i indica la posición de un nodo en el espacio; adicionalmente se definieron los parámetros A , B , y C como:

$$A = \frac{\eta_e}{\eta}, \quad B = 2 \frac{\zeta}{\eta}, \quad C = \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2}. \quad (6.36)$$

Las condiciones de frontera para la velocidad lineal y angular son las típicas condiciones de no deslizamiento y se presentan en la Tabla (6.1).

Frontera	CF para placas paralelas
$\tilde{x} = 0$	$\tilde{v}_{z0} = 0, \quad \tilde{\omega}_{y0} = 0.$
$\tilde{x} = 1$	$\tilde{v}_{zd} = 0, \quad \tilde{\omega}_{yd} = 0.$

Tabla 6.1: Condiciones de frontera para la velocidad lineal y angular.

Modelo Matemático y Discretización del Problema Magnético

Al igual que para la solución asintótica es supuesto que el campo magnético es generado por la superposición de dos campos externos modelados por conveniencia ahora de acuerdo a las siguientes funciones

$$\tilde{H}_z(\tilde{t}) = \sin(\tilde{t}), \quad (6.37)$$

$$\tilde{B}_x(\tilde{t}) = \cos(\tilde{t}) \quad (6.38)$$

y que de acuerdo a los argumentos antes mencionados por Zahn y Greer

$$\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{x}) = \tilde{H}_x(x)\mathbf{i}_x + \tilde{H}_z\mathbf{i}_z, \quad (6.39)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{x}) = \tilde{B}_x\mathbf{i}_x + \tilde{B}_x(\tilde{x})\mathbf{i}_z, \quad (6.40)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{x}) = \tilde{M}_x\mathbf{i}_x + \tilde{M}_z(\tilde{x})\mathbf{i}_z. \quad (6.41)$$

Usando las *Ecn.* (6.37) a (6.41) en la *Ecn.* (6.7) obtenemos las componentes x y z de la ecuación de Magnetización de Shliomis

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_z - \tilde{M}_x + \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right], \quad (6.42)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_x - \tilde{M}_z + \sin(\tilde{t}). \quad (6.43)$$

El término entre corchetes del lado derecho de la *Ecn.* (6.42), se obtuvo a partir de la *Ecn.* (6.19) la cual permite expresar la componente x del vector del campo magnético como

$$\tilde{H}_x = \tilde{B}_x - \chi \tilde{M}_x. \quad (6.44)$$

Una vez calculados \tilde{M}_x y \tilde{M}_z se puede obtener la componente y del torque magnético a partir de la *Ecn.* (6.21).

Las ecuaciones (6.42) y (6.43) fueron posteriormente discretizadas usando diferencias finitas "forward" de orden uno en el tiempo y un esquema implícito, cuyo error es del orden $\mathcal{O}(\Delta x)$

obteniendo

$$\tilde{M}_{x,i}^k + \frac{\Delta t}{\tilde{\Omega}} \sin_i^k(\tilde{t}) = \frac{\Delta t + \Delta t \chi + \tilde{\Omega}}{\tilde{\Omega}} \tilde{M}_{x,i}^{k+1} - \Delta t \varepsilon \tilde{\omega}_{y,i} \tilde{M}_{z,i}^{k+1}. \quad (6.45)$$

$$\tilde{M}_{z,i}^k + \frac{\Delta t}{\tilde{\Omega}} \cos_i^k(\tilde{t}) = \Delta t \varepsilon \tilde{\omega}_{y,i} \tilde{M}_{x,i}^{k+1} + \frac{\Delta t + \tilde{\Omega}}{\tilde{\Omega}} \tilde{M}_{z,i}^{k+1}, \quad (6.46)$$

en las ecuaciones anteriores el superíndice k está referido a la discretización en el tiempo. Las soluciones de las matrices generadas al aplicar las *Ecns.* (6.45) y (6.46) fueron obtenidas usando el método iterativo de Gauss-Seidel con relajación.

Case 2 Con Ecuación de Magnetización de Shliomis y \mathbf{M}_{eq} de la Ecuación de Langevin

Como se mencionó en el anterior caso, el problema hidrodinámico permanece igual. Por tal razón, en este caso nos centramos en detallar los cambios generados en la ecuación de magnetización teniendo en cuenta la Ecuación de Langevin (*Ecn.* (2.11)). Para esto iniciamos de nuevo de la *Ecn.* (6.7) y nos centramos en el término del lado derecho el cual puede ser escrito de la siguiente forma

$$\tilde{\mathbf{M}}_{eq} = \frac{\mathbf{M}_{eq}}{\chi K} = \frac{\phi M_d}{\frac{1}{3} \left(\frac{\pi \phi \mu_0 M_d^2 d^3}{6 k_B T} \right) K |\mathbf{H}|} \left[\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right], \quad (6.47)$$

donde se tuvo en cuenta que la susceptibilidad magnética es $\chi = \pi \phi \mu_0 M_d^2 d^3 / (18 k_B T)$ [3]. Ahora, recordando que

$$\alpha = \frac{\pi \mu_0 M_d d^3 |\mathbf{H}|}{6 k_B T}, \quad y \quad \tilde{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}}{K}, \quad (6.48)$$

e introduciendo estas expresiones en *Ecn.* (6.47) se obtiene la Ecuación de *Langevin* en forma adimensional

$$\tilde{\mathbf{M}}_{eq} = 3\tilde{\mathbf{H}} \left[\frac{\coth \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right]. \quad (6.49)$$

Teniendo en cuenta lo anterior las componentes x y z de la ecuación de magnetización incluyendo la ecuación de Langevin son:

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_z - \tilde{M}_x + 3\tilde{H}_x \left[\frac{\coth \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right]. \quad (6.50)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_x - \tilde{M}_z + 3\tilde{H}_z \left[\frac{\coth \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right]. \quad (6.51)$$

Las anteriores ecuaciones se pueden poner en términos solo de la magnetización y el parámetro de perturbación (ε) usando las *Ecns.* (6.37), (6.38) y la relación dada por Chaves *et al.*, [34]

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon |\tilde{\mathbf{H}}|^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon (\tilde{H}_x^2 + \tilde{H}_z^2)}. \quad (6.52)$$

obteniéndolo

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{M}_x + 3 \left[\sin(\tilde{t}) - \chi_i \tilde{M}_x \right] \left[\frac{\coth \left(\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon \left\{ \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right]^2 + \cos^2(t) \right\}} \right)}{\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon \left\{ \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right]^2 + \cos^2(t) \right\}}} - \frac{2}{3\varepsilon \left\{ \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right]^2 + \cos^2(t) \right\}} \right] + \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_z, \quad (6.53)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{M}_z + 3 \cos(t) \left[\frac{\coth \left(\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon \left\{ \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right]^2 + \cos^2(t) \right\}} \right)}{\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon \left\{ \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right]^2 + \cos^2(t) \right\}}} - \frac{2}{3\varepsilon \left\{ \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right]^2 + \cos^2(t) \right\}} \right] - \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_x. \quad (6.54)$$

Para este caso de estudio el problema hidrodinámico es el mismo que se definió en la subsección 6.2.1; la estrategia numérica usada también es la misma que se usó anteriormente y que se presenta en el diagrama de flujo de la Figura 6-2; la diferencia es que ahora el problema electro-magnético presenta una alta no linealidad, lo cual hace necesario la implementación del método de Newton-Raphson (N-R) para sistemas de ecuaciones no lineales, a continuación se describe la implementación del método para este problema particular.

Método de Newton Raphson (N-R) para sistemas de ecuaciones no lineales

El método de Newton-Raphson permite encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de sistemas de ecuaciones multidimensionales no lineales, este método es documentado con detalle por Langtangen [48], las etapas del método para resolver el problema electro-magnético descrito en la subsección anterior son las siguientes:

- Las *Ecms.* (6.53) y (6.54) deben ser reescritas mediante las siguientes expresiones:

$$F(\tilde{M}_x, \tilde{M}_z) = \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_z + \tilde{M}_x - f(\tilde{M}_x, \tilde{M}_z), \quad (6.55)$$

$$G(\tilde{M}_x, \tilde{M}_z) = \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_x + \tilde{M}_z - g(\tilde{M}_x, \tilde{M}_z), \quad (6.56)$$

donde se han definido las siguientes funciones:

$$f(\tilde{M}_x, \tilde{M}_z) = 3 \left[\sin(\tilde{t}) - \chi_i \tilde{M}_x \right] \left[\frac{\coth \left(\sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon \left\{ \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right]^2 + \cos^2(t) \right\}} \right)}{\sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon \left\{ \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right]^2 + \cos^2(t) \right\}}} - \frac{2}{3\varepsilon \left\{ \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right]^2 + \cos^2(t) \right\}} \right] \quad (6.57)$$

$$g(\tilde{M}_x, \tilde{M}_z) = 3 \cos(t) \left[\frac{\coth \left(\sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon \left\{ \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right]^2 + \cos^2(t) \right\}} \right)}{\sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon \left\{ \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right]^2 + \cos^2(t) \right\}}} - \frac{2}{3\varepsilon \left\{ \left[\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x \right]^2 + \cos^2(t) \right\}} \right] \quad (6.58)$$

- El siguiente paso es discretizar las *Ecms.* (6.55) y (6.56) respecto al tiempo, esta discretización se hace con diferencias finitas forward de orden uno para obtener las siguientes

expresiones

$$F_i(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1}) = \tilde{\Omega} \left(\frac{\tilde{M}_{x,i}^{k+1} - \tilde{M}_{x,i}^k}{\Delta \tilde{t}} \right) - \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_{z,i}^{k+1} + \tilde{M}_{x,i}^{k+1} - f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1}), \quad (6.59)$$

$$G_i(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1}) = \tilde{\Omega} \left(\frac{\tilde{M}_{z,i}^{k+1} - \tilde{M}_{z,i}^k}{\Delta \tilde{t}} \right) + \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_{x,i}^{k+1} + \tilde{M}_{z,i}^{k+1} - g(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1}), \quad (6.60)$$

en las ecuaciones anteriores el superíndice k está referido a la discretización en el tiempo.

- En esta etapa del método de Newton Raphson se calcula el Jacobiano (J) de cada una de las *Ecms.* (6.59) y (6.60). La contribución de las funciones $f(\tilde{M}_x, \tilde{M}_z)$ y $g(\tilde{M}_x, \tilde{M}_z)$ al Jacobiano están dadas por las siguientes derivadas parciales:

– Para $f(\tilde{M}_x, \tilde{M}_z)$ se obtiene:

$$\frac{\partial f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})}{\partial \tilde{M}_{x,j}^{k+1}} = \begin{cases} \frac{\partial f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})}{\partial \tilde{M}_{x,i}^{k+1}}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (6.61)$$

$$\frac{\partial f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})}{\partial \tilde{M}_{z,j}^{k+1}} = \begin{cases} \frac{\partial f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1}}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (6.62)$$

– Para $g(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})$ se obtiene:

$$\frac{\partial g(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})}{\partial \tilde{M}_{x,j}^{k+1}} = \begin{cases} \frac{\partial g(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})}{\partial \tilde{M}_{x,i}^{k+1}}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (6.63)$$

$$\frac{\partial g(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})}{\partial \tilde{M}_{z,j}^{k+1}} = \begin{cases} \frac{\partial g(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1}}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (6.64)$$

- Ahora se procede a construir la matriz de coeficientes para cada iteración del método N-R, para esto se obtienen las derivadas parciales de las funciones $F_i(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1}) = F_i$ y $G_i(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1}) = G_i$, como se muestra a continuación:

– Para F_i se obtiene:

$$\frac{\partial F_i}{\partial \tilde{M}_{x,j}^{k+1}} = \begin{cases} \frac{\tilde{\Omega}}{\Delta \tilde{t}} + 1 - \frac{\partial f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})}{\partial \tilde{M}_{x,i}^{k+1}}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (6.65)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1}} = \begin{cases} -\tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y - \frac{\partial f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1}}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (6.66)$$

– Para G_i se obtiene:

$$\frac{\partial G_i}{\partial \tilde{M}_{x,j}^{k+1}} = \begin{cases} \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y - \frac{\partial g(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})}{\partial \tilde{M}_{x,i}^{k+1}}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (6.67)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1}} = \begin{cases} \frac{\tilde{\Omega}}{\Delta \tilde{t}} + 1 - \frac{\partial f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1})}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1}}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (6.68)$$

teniendo en cuenta las *Ecns.* (6.65) a (6.68) se construyó la siguiente matriz Jacobiana,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial \tilde{M}_{x,j}^{k+1}} & \frac{\partial F_i}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1}} \\ \frac{\partial G_i}{\partial \tilde{M}_{x,j}^{k+1}} & \frac{\partial G_i}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1}} \end{bmatrix},$$

aplicando el método de N-R para un sistema de dos ecuaciones no lineales se obtiene:

$$\lambda \frac{\partial F_i}{\partial \tilde{M}_{x,j}^{k+1}} + \varrho \frac{\partial F_i}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1}} = -F_i(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1}), \quad (6.69)$$

$$\lambda \frac{\partial G_i}{\partial \tilde{M}_{x,j}^{k+1}} + \varrho \frac{\partial G_i}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1}} = -G_i(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1}), \quad (6.70)$$

ahora se reemplazan las *Ecns.* (6.65) a (6.68) en las *Ecns.* (6.69) y (6.70), de este

procedimiento se obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\lambda \left(\frac{\tilde{\Omega}}{\Delta \tilde{t}} + 1 - \frac{\partial f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l})}{\partial \tilde{M}_{x,i}^{k+1}} \right) + \varrho \left(-\tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y - \frac{\partial f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l})}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1}} \right) = -F_i(\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l}), \quad (6.71)$$

$$\lambda \left(\tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y - \frac{\partial g(\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l})}{\partial \tilde{M}_{x,i}^{k+1}} \right) + \varrho \left(\frac{\tilde{\Omega}}{\Delta \tilde{t}} + 1 - \frac{\partial g(\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l})}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1}} \right) = -G_i(\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l}), \quad (6.72)$$

en las ecuaciones anteriores se ha introducido el superíndice l para registrar las iteraciones del método de N-R.

- Finalmente se usa un procedimiento iterativo para solucionar las *Ecns.* (6.55) y (6.56) (problema magnético), este algoritmo computacional se presenta en la Tabla (6.2), para iniciar el método ($l = 0$) se debe suponer una solución $\tilde{M}_{x,i}^{k+1;0}$, $\tilde{M}_{z,i}^{k+1;0}$ con estos valores se resuelven simultáneamente las *Ecns.* (6.71) y (6.72) para obtener los valores de λ y ϱ , posteriormente se calculan los valores para la siguiente iteración: $\tilde{M}_{x,i}^{k+1;1} = \tilde{M}_{x,i}^{k+1;0} + \lambda$ y $\tilde{M}_{z,i}^{k+1;1} = \tilde{M}_{z,i}^{k+1;0} + \varrho$, y se inicia una nueva iteración con los nuevos valores $\tilde{M}_{x,i}^{k+1;1}$ y $\tilde{M}_{z,i}^{k+1;1}$, el proceso es repetido hasta obtener las raíces con la precisión deseada (ϵ). En general las formulas recurrentes para iniciar una nueva iteración son $\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l+1} = \tilde{M}_{x,i}^{k+1;l} + \lambda$ y $\tilde{M}_{z,i}^{k+1;l+1} = \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l} + \varrho$; ϵ es la tolerancia de error igual a 10^{-11} .

Algoritmo para el Método de Newton-Raphson
<p>Ingresar las funciones $f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l})$, $g(\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l})$.</p> <p>Leer $\tilde{M}_{x,i}^{k+1;0}$, $\tilde{M}_{z,i}^{k+1;0}$, ϵ, <i>maxiteracion</i> (número máximo de iteraciones);</p> <p>para $l = 0$ hasta <i>maxiteracion</i>, hacer</p> <p style="padding-left: 40px;">Calcular : $\frac{\partial f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l})}{\partial \tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}}$, $\frac{\partial f(\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l})}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l}}$, $\frac{\partial g(\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l})}{\partial \tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}}$ y $\frac{\partial g(\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l})}{\partial \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l}}$;</p> <p style="padding-left: 40px;">Resolver las <i>Ecns.</i> (6.71) y (6.72) para λ y ϱ</p> <p style="padding-left: 40px;">Calcular $\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l+1} = \tilde{M}_{x,i}^{k+1;l} + \lambda$ y $\tilde{M}_{z,i}^{k+1;l+1} = \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l} + \varrho$</p> <p style="padding-left: 40px;">Si $\left\ \tilde{M}_{x,i}^{k+1;l+1} - \tilde{M}_{x,i}^{k+1;l} \right\ \leq \epsilon$ y $\left\ \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l+1} - \tilde{M}_{z,i}^{k+1;l} \right\ \leq \epsilon$</p> <p style="padding-left: 80px;">La solución es $\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l+1}$ y $\tilde{M}_{z,i}^{k+1;l+1}$</p> <p style="padding-left: 40px;">Si no, entonces iniciar nueva iteración con $\tilde{M}_{x,i}^{k+1;l+1}$ y $\tilde{M}_{z,i}^{k+1;l+1}$</p> <p>fin del ciclo "para".</p> <p>Imprimir: "la solución no converge en <i>maxiteracion</i>".</p> <p>Fin del método de Newton-Raphson.</p>

Tabla 6.2: Algoritmo computacional para el método de Newton-Raphson usado para sistemas de ecuaciones no lineales.

El Método de N-R explicado anteriormente proporciona la solución del problema magnético únicamente para un tiempo t , ahora es posible calcular el torque magnético (\tilde{l}_y) para ese instante t ; es necesario implementar otro ciclo iterativo para repetir el método N-R en $t = t + \Delta t$ hasta alcanzar un t_f (tiempo de simulación) apropiado tal que el torque magnético alcance un comportamiento uniforme respecto al tiempo; cuando este proceso termina se obtiene la densidad de torque magnético en función del tiempo t ,

$$\tilde{l}_y = f(t), \tag{6.73}$$

este torque magnético (\tilde{l}_y) será usado nuevamente en el problema hidrodinámico el cual fue tratado en estado estable, por esta razón se hace necesario calcular el promedio de \tilde{l}_y respecto a t . El torque magnético describe un comportamiento periódico respecto al tiempo, entonces su

promedio está dado por la expresión

$$\langle \tilde{l}_y(\tilde{t}) \rangle_t = \frac{1}{\tilde{t}_f} \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}_f} \tilde{l}_y(\tilde{t}) dt, \quad (6.74)$$

esta integral es resuelta numéricamente mediante la regla compuesta del trapecio

$$\langle \tilde{l}_y(t) \rangle_t = \frac{1}{\tilde{t}_f} \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}} \tilde{l}_y(t) dt \approx \frac{1}{\tilde{t}_f} \left\{ \frac{\Delta t}{2} \left[\tilde{l}_y(0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{l}_y(t_i) + \tilde{l}_y(\tilde{t}_f) \right] \right\}, \quad (6.75)$$

en la ecuación anterior cada término de la sumatoria se calculó con $t_i = t_i + \Delta t$, este método es apropiado en la medida que $\Delta t \rightarrow 0$, para este caso se usó $\Delta t = 10^{-4}$. Los resultados obtenidos para este problema ferrohrodinámico son presentados en el capítulo de resultados y análisis (capítulo 7).

Case 3 Con la Ecuación de magnetización MRSh

El origen y las características de la ecuación de relajación de la magnetización de Martsenyuk, Raikher y Shliomis (MRSh) [26] ya fueron tratados en el marco teórico; en la presente sección se muestra la adimensionalización y posteriormente la discretización de esta ecuación. La *Ecn.* (2.12) fue hecha adimensional y de “orden uno” introduciendo las escalas definidas en la *Ecns.* (6.3); al aplicar estas escalas se obtiene:

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\Omega}_\varepsilon \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\tilde{\mathbf{H}} (\tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{M}})}{|\tilde{\mathbf{H}}|^2} \left(\frac{1}{B_\perp} - \frac{1}{B_\parallel} \right) + \frac{3\tilde{\mathbf{H}} \varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z)}{B_\parallel} - \frac{\tilde{\mathbf{M}}}{B_\perp}, \quad (6.76)$$

donde las constantes adimensionales de los tiempos de relajación paralelo y perpendicular fueron definidas como:

$$B_\parallel = \frac{\tau_\parallel}{\tau_B} = \frac{d \ln L(\alpha)}{d \ln \alpha}, \quad B_\perp = \frac{\tau_\perp}{\tau_B} = \frac{2L(\alpha)}{\alpha - L(\alpha)}. \quad (6.77)$$

La *Ecn.* (6.76) escrita por componentes para \tilde{M}_x y \tilde{M}_z es:

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_z + \frac{\tilde{H}_x (\tilde{H}_x \tilde{M}_x + \tilde{H}_z \tilde{M}_z)}{|\tilde{\mathbf{H}}|^2} \left(\frac{1}{B_\perp} - \frac{1}{B_\parallel} \right) + \frac{3\tilde{H}_x \varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z)}{B_\parallel} - \frac{\tilde{M}_x}{B_\perp}, \quad (6.78)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_x + \frac{\tilde{H}_z (\tilde{H}_x \tilde{M}_x + \tilde{H}_z \tilde{M}_z)}{|\tilde{\mathbf{H}}|^2} \left(\frac{1}{B_\perp} - \frac{1}{B_\parallel} \right) + \frac{3\tilde{H}_z \varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z)}{B_\parallel} - \frac{\tilde{M}_z}{B_\perp}, \quad (6.79)$$

donde la función $\varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z)$ se ha definido como:

$$\varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z) = \frac{\coth \left(\sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon (\tilde{H}_x^2 + \tilde{H}_z^2)} \right)}{\sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon (\tilde{H}_x^2 + \tilde{H}_z^2)}} - \frac{2}{3\varepsilon (\tilde{H}_x^2 + \tilde{H}_z^2)}. \quad (6.80)$$

Para poder dar solución a las *Ecns.* (6.78) y (6.79) es necesario tener en cuenta las expresiones para las componentes del campo magnético \tilde{H}_x y \tilde{H}_z , que ya fueron obtenidas en la subsección 6.2.1, estas son

$$\tilde{H}_x = \sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x, \quad (6.81)$$

$$\tilde{H}_z = \cos(\tilde{t}), \quad (6.82)$$

adicionalmente se debe introducir la ecuación de *Langevin* (*Ecn.* (2.11)) en las constantes de tiempo B_\parallel y B_\perp (*Ecns.* (6.77)), de donde se obtiene que

$$B_\parallel = \frac{\tau_\parallel}{\tau_B} = \frac{d \ln \left[\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right]}{d \ln \alpha}, \quad (6.83)$$

$$B_\perp = \frac{\tau_\perp}{\tau_B} = \frac{2 \left[\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right]}{\alpha - \left[\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right]}, \quad (6.84)$$

donde el parámetro α ya fue definido mediante la *Ecn.* (6.52) de la sección anterior. Finalmente el problema electromagnético queda totalmente especificado mediante el conjunto de *Ecns.* (6.78) a (6.84), las cuales fueron discretizadas usando diferencias finitas forward de orden uno en el tiempo y un esquema implícito; para este caso las funciones F_i y G_i obtenidas son

respectivamente:

$$\begin{aligned}
F_i(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1}) = & -\tilde{\Omega} \left(\frac{\tilde{M}_{x,i}^{k+1} - \tilde{M}_{x,i}^k}{\Delta \tilde{t}} \right) + \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_{y,i} \tilde{M}_{z,i}^{k+1} + \\
& \frac{\tilde{H}_{x,i}^{k+1} \left(\tilde{H}_{x,i}^{k+1} \tilde{M}_{x,i}^{k+1} + \tilde{H}_{z,i}^{k+1} \tilde{M}_{z,i}^{k+1} \right)}{\left(|\tilde{\mathbf{H}}|^2 \right)_i^{k+1}} \left(\frac{1}{B_{\perp,i}^{k+1}} - \frac{1}{B_{\parallel,i}^{k+1}} \right) + \\
& \frac{3\tilde{H}_{x,i}^{k+1} \left[\varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z) \right]_i^{k+1}}{B_{\parallel,i}^{k+1}} - \frac{\tilde{M}_{x,i}^{k+1}}{B_{\perp,i}^{k+1}}, \quad (6.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_i(\tilde{M}_{x,i}^{k+1}, \tilde{M}_{z,i}^{k+1}) = & -\tilde{\Omega} \left(\frac{\tilde{M}_{z,i}^{k+1} - \tilde{M}_{z,i}^k}{\Delta \tilde{t}} \right) - \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_{y,i} \tilde{M}_{z,i}^{k+1} + \\
& \frac{\tilde{H}_{z,i}^{k+1} \left[\tilde{H}_{x,i}^{k+1} \tilde{M}_{x,i}^{k+1} + \tilde{H}_{z,i}^{k+1} \left(\tilde{M}_z \right)_i^{k+1} \right]}{\left(|\tilde{\mathbf{H}}|^2 \right)_i^{k+1}} \left(\frac{1}{B_{\perp,i}^{k+1}} - \frac{1}{B_{\parallel,i}^{k+1}} \right) + \\
& \frac{3\tilde{H}_{z,i}^{k+1} \left[\varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z) \right]_i^{k+1}}{B_{\parallel,i}^{k+1}} - \frac{\tilde{M}_{z,i}^{k+1}}{B_{\perp,i}^{k+1}}. \quad (6.86)
\end{aligned}$$

Las dos ecuaciones anteriores son resueltas con el método de N-R siguiendo un procedimiento análogo al que se describió en el caso de estudio inmediatamente anterior (case 2); para que se cumpla que las funciones anteriores F_i y G_i sean función únicamente de $\tilde{M}_{x,i}^{k+1}$ y $\tilde{M}_{z,i}^{k+1}$ es necesario definir las siguientes ecuaciones auxiliares para $\left[\varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z) \right]_i^{n+1}$, las componentes del campo magnético $\tilde{\mathbf{H}}$ ($\tilde{H}_{x,i}^{k+1}$ y $\tilde{H}_{z,i}^{k+1}$) y las dos componentes del tiempo de relajación $B_{\parallel,i}^{k+1}$ y $B_{\perp,i}^{k+1}$; el origen de estas relaciones matemáticas ya fue tratado anteriormente en este mismo

capítulo.

$$\left[\varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z)\right]_i^{k+1} = \frac{\coth \sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon \left[\left(\tilde{H}_{x,i}^{k+1}\right)^2 + \left(\tilde{H}_{z,i}^{k+1}\right)^2 \right]}}{\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon \left[\left(\tilde{H}_{x,i}^{k+1}\right)^2 + \left(\tilde{H}_{z,i}^{k+1}\right)^2 \right]}} \frac{2}{3\varepsilon \left[\left(\tilde{H}_{x,i}^{k+1}\right)^2 + \left(\tilde{H}_{z,i}^{k+1}\right)^2 \right]}, \quad (6.87)$$

$$\tilde{H}_{x,i}^{k+1} = \sin_i^{k+1}(\tilde{t}) - \chi M_{x,i}^{k+1}, \quad (6.88)$$

$$\tilde{H}_{z,i}^{k+1} = \cos_i^{k+1}(t), \quad (6.89)$$

$$B_{\parallel,i}^{k+1} = \frac{d \ln \left[\coth \alpha_i^{k+1} - \frac{1}{\alpha_i^{k+1}} \right]}{d \ln \alpha_i^{n+1}}, \quad (6.90)$$

$$B_{\perp,i}^{k+1} = \frac{2 \left[\coth \alpha_i^{k+1} - \frac{1}{\alpha_i^{k+1}} \right]}{\alpha_i^{k+1} - \left[\coth \alpha_i^{k+1} - \frac{1}{\alpha_i^{k+1}} \right]}, \quad (6.91)$$

$$\alpha_i^{k+1} = \sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon \left[\left(\tilde{H}_{x,i}^{k+1}\right)^2 + \left(\tilde{H}_{z,i}^{k+1}\right)^2 \right]} \quad (6.92)$$

Finalmente el problema magnético queda completamente especificado mediante el conjunto de *Ecns.* (6.85) a (6.92); es necesario resaltar que para este problema electro-magnético se calculó el promedio en el tiempo del torque $\langle \tilde{l}_y(t) \rangle_t$ para luego resolver el problema hidrodinámico el cual sigue siendo el mismo usado para las tres soluciones numéricas y que ya fue descrito en la subsección 6.2.1 mediante las *Ecns.* (6.34) y (6.35). La estrategia computacional usada para dar solución a este problema ferrohídrodinámico se resume en la Figura 6-2. Los resultados obtenidos son presentados en el capítulo 7.

6.2.2 Diseño de algoritmos computacionales

Se implementaron algoritmos usando el lenguaje de programación *C++*. El procedimiento general usado para obtener la solución numérica es descrito en la Figura 6-2. Como se puede ver de ésta figura, se implementó un algoritmo iterativo que permite romper el acoplamiento

entre el problema hidrodinámico (*Ecms.* (6.32) a (6.33)) y el magnético (*Ecms.* (2.6) a (2.9)); inicialmente se suponen valores para el torque magnético $(l_y)_i^{k=0}$, estos valores son usados para solucionar el problema hidrodinámico descrito mediante las *Ecms.* (2.3) a (2.5), de donde se obtendrá un primer estimado para $\tilde{v}_z(\tilde{x})_i$ y $\tilde{\omega}_y(\tilde{x})_i$. Posteriormente estos resultados se usarán en las *Ecms.* (2.4) a (2.7) para obtener estimados de \mathbf{H} , \mathbf{M} , \mathbf{B} y posteriormente hacer el cálculo corregido de $(l_y)_i^{k+1}$; con esto se inició una nueva iteración la cual se repitió hasta alcanzar un criterio de convergencia específico ϵ . Se usó el método de Gauss-Seidel para solucionar simultáneamente los sistemas de ecuaciones involucrados en el algoritmo tanto para el problema hidrodinámico como el magnético del Caso 1, mientras que para el problema magnético de los otros casos se usó el método de Newton-Raphson. También se implementó el criterio de convergencia absoluta mostrado en la inecuación (6.93) para la función de torque magnético,

$$\left\| (l_y)_i^{(n)} - (l_y)_i^{n-1} \right\| \leq \epsilon, \quad (6.93)$$

donde $(l_y)_i^n$ es la solución en la iteración actual y $(l_y)_i^{n-1}$ es la solución en la iteración anterior. En la inecuación 6.93, ϵ es el valor de tolerancia igual a 1×10^{-10} .

Los resultados obtenidos de estas soluciones numéricas son validados ahora con la solución asintótica.

6.3 Validación de las Soluciones Numéricas

Las propiedades físicas y magnéticas de los ferrofluidos necesarias para obtener las soluciones de los modelos matemáticos se presentan en la Tabla 6.3. Esta información fue tomada de Torres-Díaz *et al.* [45] quienes sintetizaron ferrofluidos con partículas de ferrita cobalto suspendidas en agua (WBF-1), glicerina (GBF-2) o una combinación de los dos (WGB-2).

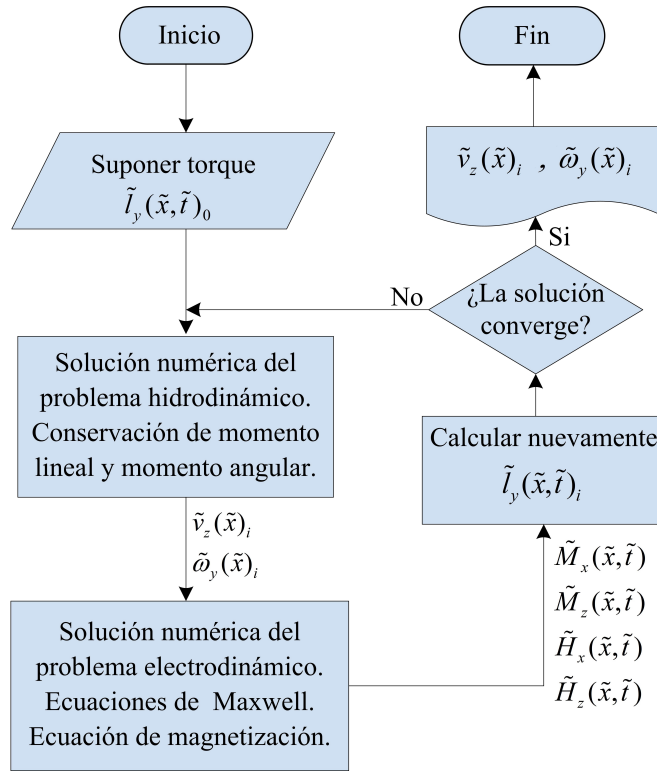


Figura 6-2: Diagrama de flujo del procedimiento iterativo para solucionar el sistema de ecuaciones ferrohidrodinámicas.

Ferrofluido	WBF-1	WGBF-1	GBF-2
ρ (kg/m ³)	1.03	1.26	1.29
η (mPa s)	1.03	76.1	109
η_0 (mPa s)	1.02	81.2	995
$\mu_0 M_s$ (mT)	1.14	2.01	4.02
ϕ (%)	0.213	0.376	0.753
χ	0.106	0.200	0.301
τ (s)	1.67×10^{-05}	2.45×10^{-03}	1.84×10^{-03}

Tabla 6.3: Propiedades físicas y magnéticas a temperatura ambiente (294 K) para ferrofluidos de ferrita-cobalto; tomado de Torres-Díaz et al.

Las soluciones numéricas de los perfiles de velocidad traslacional y angular de las partículas

obtenidas para cada uno de los casos presentados, fueron comparadas con la solución asintótica la cual es válida en el límite de $K \rightarrow 0$ (o $\varepsilon \ll 1$) y frecuencias de rotación del campo moderadas. Los perfiles de velocidad lineal y angular obtenidos numéricamente y los asintóticos para el ferrofluido WBF-1 son presentados en la Figura 6-3. Como se puede observar en la

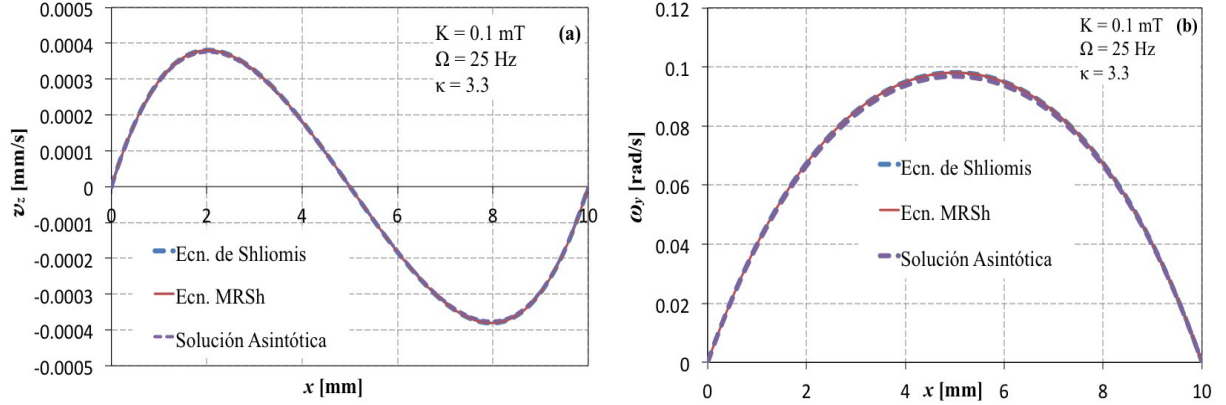


Figura 6-3: Comparación de resultados numéricos con respecto a la solución asintótica para un ferrofluido WBF-1, a un valor de $\tilde{\Omega} = 2.623 \times 10^{-3}$ a) perfiles de velocidad lineal, b) perfiles de velocidad angular; obtenidos para $\varepsilon = 4.32 \times 10^{-3}$ $\kappa = 3.3$, $\Omega = 25$ Hz y $K = 0.1$ mT.

Figura 6-3, los perfiles de velocidad lineal (a) y angular (b) de las dos soluciones numéricas están superpuestos con respecto a los perfiles de la solución asintótica. La desviación absoluta promedio de las soluciones numéricas respecto a la asintótica es 3.0374×10^{-6} y 2.7255×10^{-6} para los perfiles de velocidad lineal obtenidos con las ecuaciones de magnetización de Shliomis y MRSh, respectivamente. En cuanto a los perfiles de velocidad angular la desviación absoluta promedio es 5.1825×10^{-5} y 1.3647×10^{-4} para los perfiles de velocidad angular obtenidos con las ecuaciones de magnetización de Shliomis y MRSh, respectivamente.

De la misma forma, la Figura 6-4 muestra los resultados obtenidos numéricamente versus la solución asintótica para los ferrofluidos WGBF-1 y GBF-2; se encontró que los resultados numéricos están en excelente acuerdo con los resultados asintóticos y que la desviación absoluta promedio de las dos soluciones numéricas con respecto a la asintótica es del orden de 10^{-6} para el ferrofluido WGBF-1 y de 10^{-5} para el ferrofluido GBF-1. Es de resaltar que el concepto de "campos bajos" depende del tipo de ferrofluido, es decir, de sus propiedades físicas y magnéticas; como se observa en la Figura 6-4 para el FF WGBF-1 todas las curvas están superpuestas

para valores de amplitud del CM $K = 0.1$ mT y frecuencia $\Omega = 5$ Hz que corresponden a $\varepsilon = 8.519 \times 10^{-3}$ y $\tilde{\Omega} = 2\pi\Omega\tau = 7.696 \times 10^{-2}$, mientras que para el ferrofluido GBF-2 $K = 1.5$ mT y frecuencia $\Omega = 0.01$ Hz corresponden a $\varepsilon = 8.828 \times 10^{-2}$ y $\tilde{\Omega} = 1.156 \times 10^{-4}$.

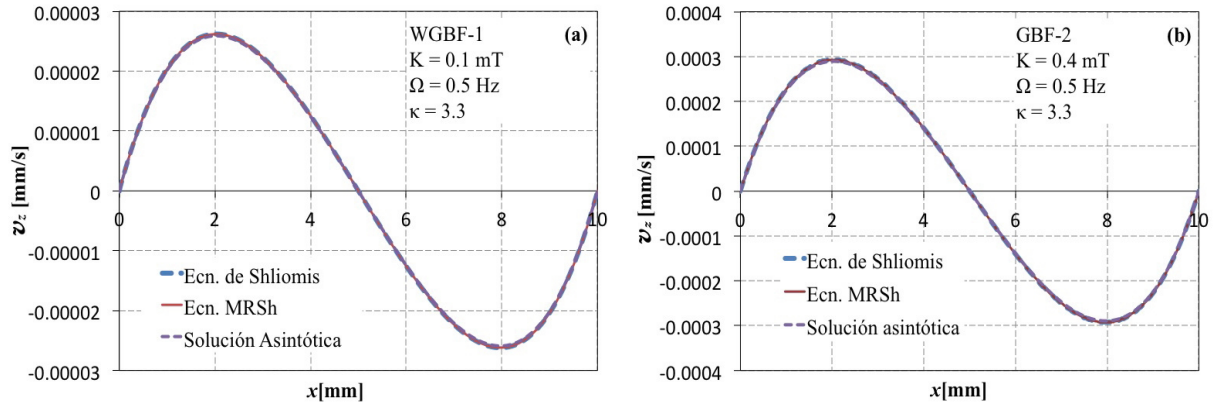


Figura 6-4: Perfiles de velocidad lineal para validar las soluciones numéricas con respecto a la solución asintótica, para dos ferrofluidos diferentes: a) ferrofluido WGBF-1 para $\kappa = 3.3$, $\Omega = 0.5$ Hz y $K = 0.1$ mT. y b) ferrofluido GBF-2 para $\kappa = 3.3$, $\Omega = 0.5$ Hz y $K = 0.4$ mT.

Capítulo 7

RESULTADOS Y ANÁLISIS

7.1 Resultados computacionales a altos valores de frecuencia Ω y amplitud K de CM

Después de hacer la validación de las soluciones numéricas, en las siguientes secciones se procede a examinar el comportamiento del flujo de FF a altos valores de frecuencia Ω ($\tilde{\Omega} \gg 1$) y amplitud K ($\varepsilon \gg 1$) de CM; primero se estudia el efecto de la amplitud del campo manteniendo fijas las demás variables y propiedades, luego el efecto de Ω y finalmente el efecto de κ .

7.1.1 Evaluación de resultados de flujo para bajos campos ($\varepsilon \ll 1$) y altas frecuencias ($\tilde{\Omega} \gg 1$)

En la Figura 7-1 se muestran los resultados de simulaciones hechas para evaluar el efecto de altas frecuencia del campo magnético sobre el perfil de velocidad traslacional usando las propiedades físicas y magnéticas del WBF-1 para una amplitud del campo magnético de $K = 0.1$ mT ($\varepsilon = 4.3 \times 10^{-3}$) y con el parámetro $\kappa = 3.3$. En las gráficas a), b) y c) se reporta la comparación de las tres soluciones numéricas y la solución asintótica para valores de $\tilde{\Omega}$ de 1.05, 3.15 y 6.30. De estas figuras se puede observar que no existe diferencia alguna ni en la forma ni la magnitud del flujo entre las soluciones numéricas y la asintótica. Por otro lado, es claro que un incremento de la frecuencia genera un incremento en la velocidad de flujo hasta un valor crítico, a partir del cual un incremento en la frecuencia genera una disminución del flujo. Esto puede ser explicado,

para el caso de la solución asintótica teniendo en cuenta que:

$$\lim_{\tilde{\Omega} \rightarrow 0} \tilde{l}_y = \lim_{\tilde{\Omega} \rightarrow \infty} \tilde{l}_y = 0 \quad (7.1)$$

lo cual explica la disminución de la magnitud del flujo conforme la frecuencia adimensional incrementa, ya que el flujo es proporcional a la densidad de torque magnético como se observa de la Ecn. (6.33).

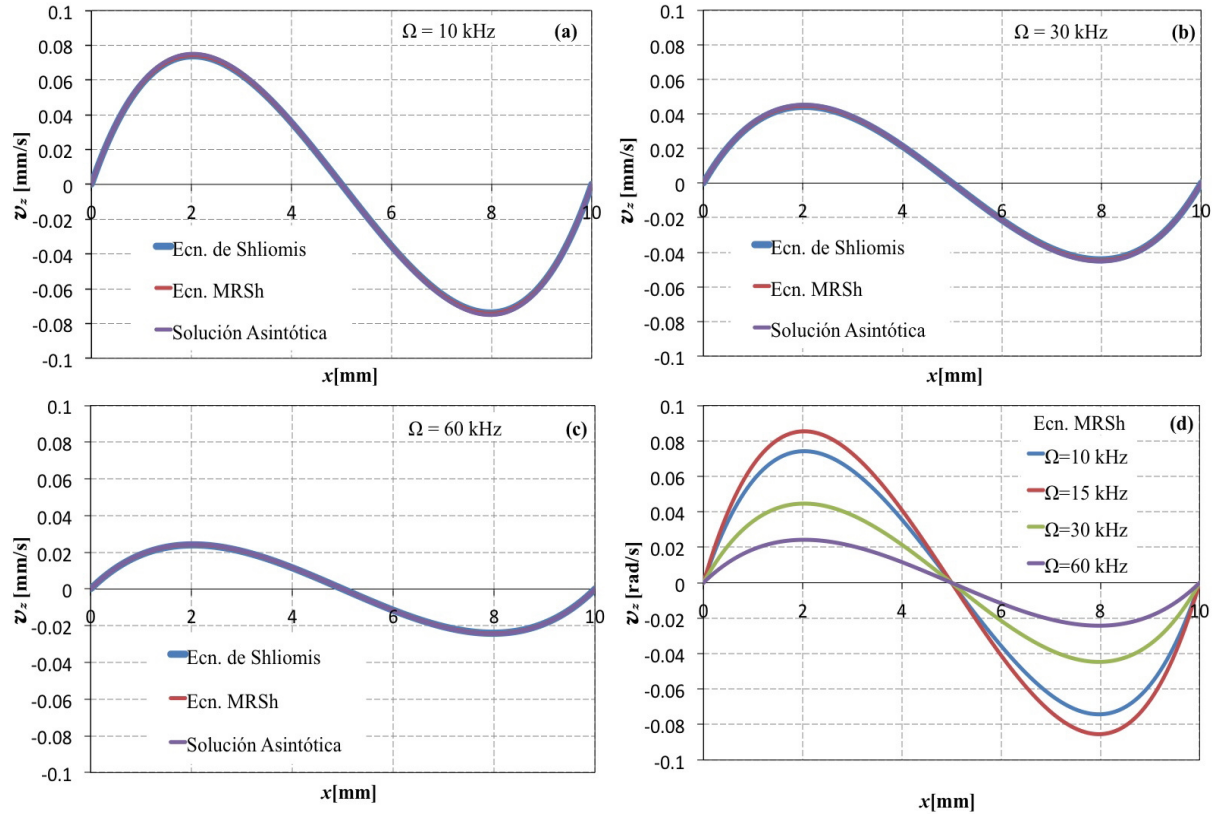


Figura 7-1: Perfiles de velocidad lineal para un ferrofluido WBF1, manteniendo constante los parámetros $\varepsilon = 4.325 \times 10^{-3}$ y $\kappa = 3.3$; para valores de frecuencias adimensionales de a) $\tilde{\Omega} = 1.05$, b) $\tilde{\Omega} = 1.57$, y c) $\tilde{\Omega} = 3.148$. La figura d) muestra los perfiles de velocidad lineal obtenidos usando la ecuación de magnetización MRSh, variando $\tilde{\Omega}$.

Perfiles de velocidad traslacional bajo condiciones similares a los mostrados en la Figura 7-1 fueron hechos para el ferrofluido WGBF-1 (Figura 7-2) encontrando un comportamiento similar.

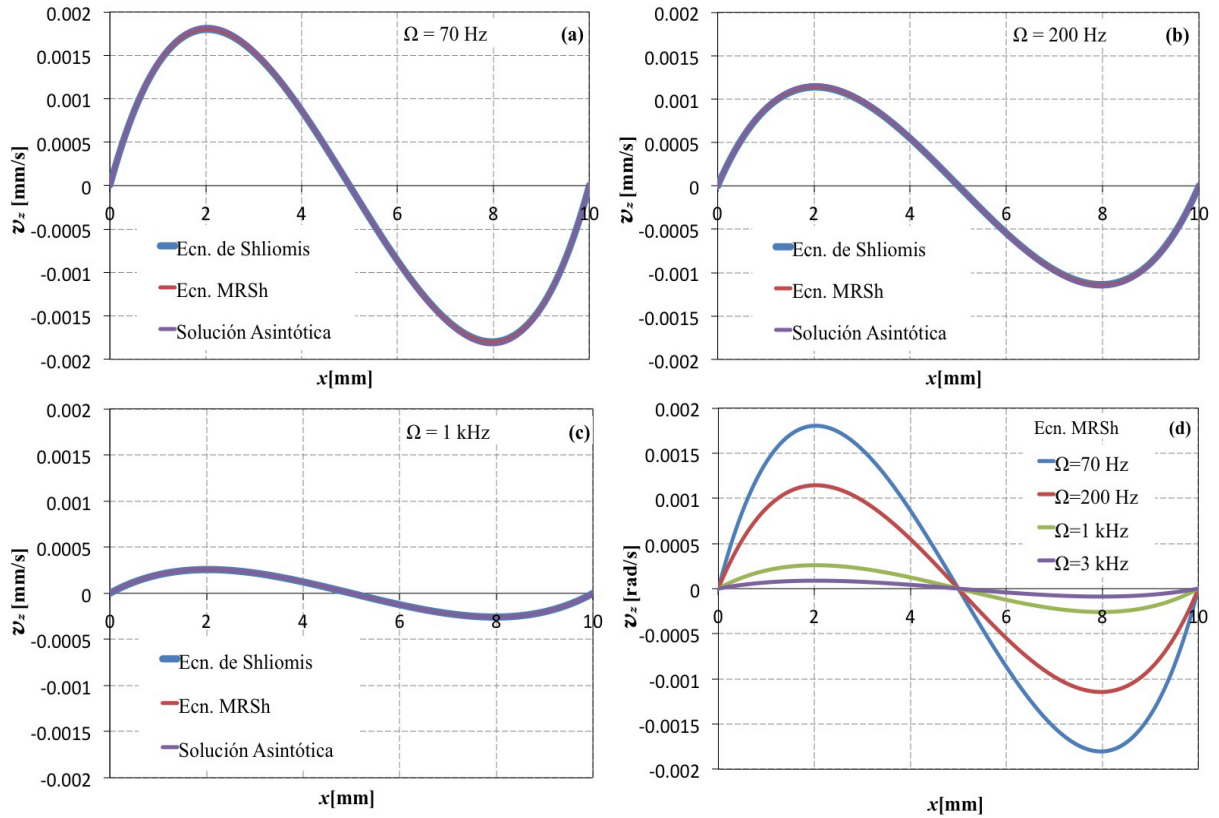


Figura 7-2: Perfiles de velocidad lineal para un ferrofluido WGBF1, manteniendo constante los parámetros $\varepsilon = 8.5192 \times 10^{-3}$ y $\kappa = 3.3$; variando el parámetro $\tilde{\Omega}$: a) $\tilde{\Omega} = 1.0776$ (corresponde a $\Omega = 70$ Hz), b) $\tilde{\Omega} = 3.0788$ (corresponde a $\Omega = 200$ Hz), c) $\tilde{\Omega} = 15.394$ (corresponde a $\Omega = 1$ kHz), y d) muestra los perfiles de velocidad traslacional, obtenidos usando la ecuación de magnetización MRSh bajo las condiciones de las gráficas a), b) y c).

7.1.2 Evaluación de flujo para altos campos magnéticos ($\varepsilon \gg 1$) y bajas frecuencias ($\tilde{\Omega} \ll 1$)

La Figura 7-3 muestra perfiles de velocidad traslacional para ferrofluidos WBF-1 obtenidos a partir de la solución asintótica, la Ecuación de Magnetización de Shliomis y la Ecuación de Magnetización de MRSh, para $\tilde{\Omega} = 5.2465 \times 10^{-3}$ (corresponde a $\Omega = 50$ Hz) y $\kappa = 3.3$.

Como se observa de la Figura 7-3, la magnitud del flujo predicha por la solución asintótica crece más rápidamente en relación a las predicciones de las soluciones numéricas conforme el valor de ε crece. Esto es debido a que la velocidad traslacional obtenida a partir de la solución

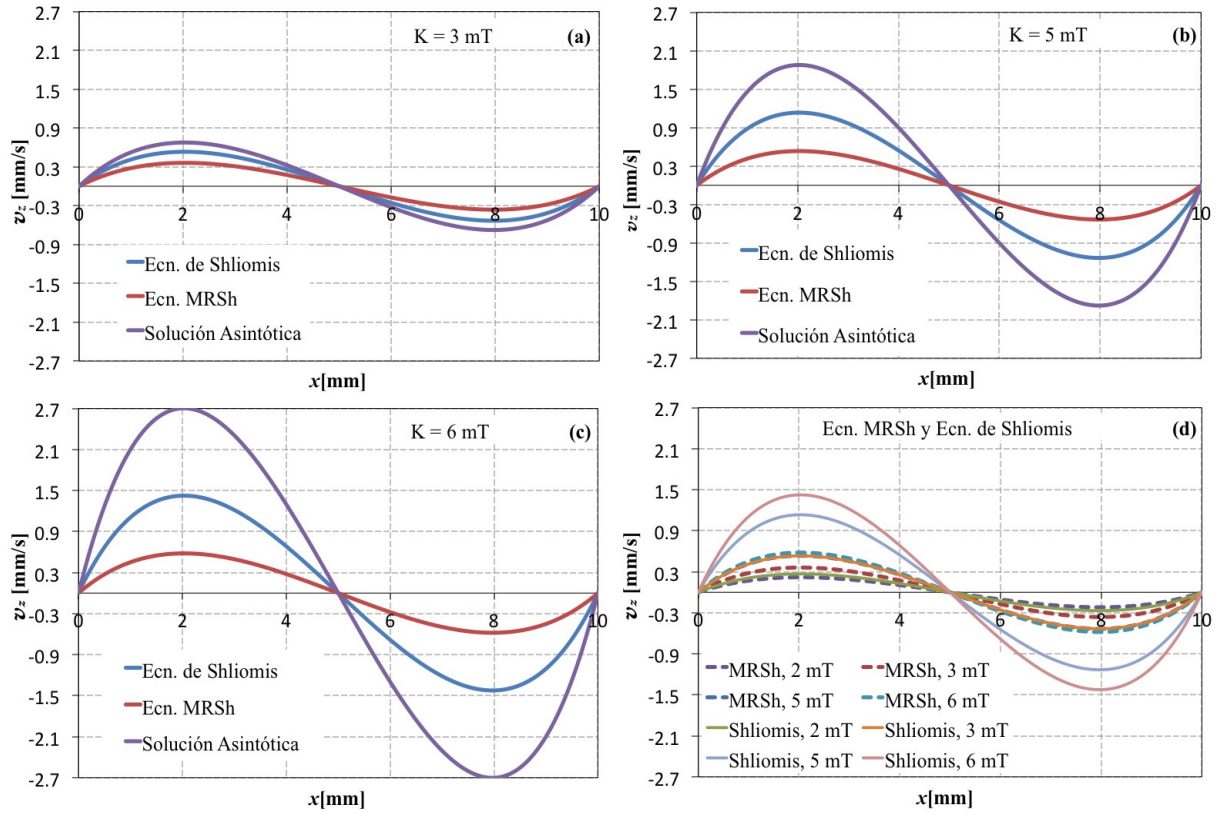


Figura 7-3: Perfiles de velocidad lineal para un ferrofluido WBF1, manteniendo constante $\tilde{\Omega} = 5.2 \times 10^{-3}$ y $\kappa = 3.3$; variando el parámetro ε : a) $\varepsilon = 3.9$, b) $\varepsilon = 10.8$, c) $\varepsilon = 15.6$ y d) muestra los resultados de la ecuación de magnetización MRSh bajo las condiciones de las gráficas a), b) y c).

asintótica tiene una dependencia cuadrática sobre K y además no permite incorporar el efecto de la saturación de la magnetización a altas intensidades del campo. Por otro lado, de las mismas figuras se observa que también existe una diferencia entre los perfiles de velocidad obtenidos con la ecuación de magnetización de Shliomis versus la de MRSh conforme la amplitud del campo incrementa, siendo mayor la magnitud de flujo predicha por la solución que incorpora la Ecuación de magnetización de Shliomis. Por otro lado, graficas similares fueron realizadas para el ferrofluido WGBF-1 como se muestra en la Figura. 7-4. En este caso se observó el mismo comportamiento mostrado por el WBF-1 aun que los valores de ε y $\tilde{\Omega}$ fueron más altos debido a las propiedades magnéticas del ferrofluido.

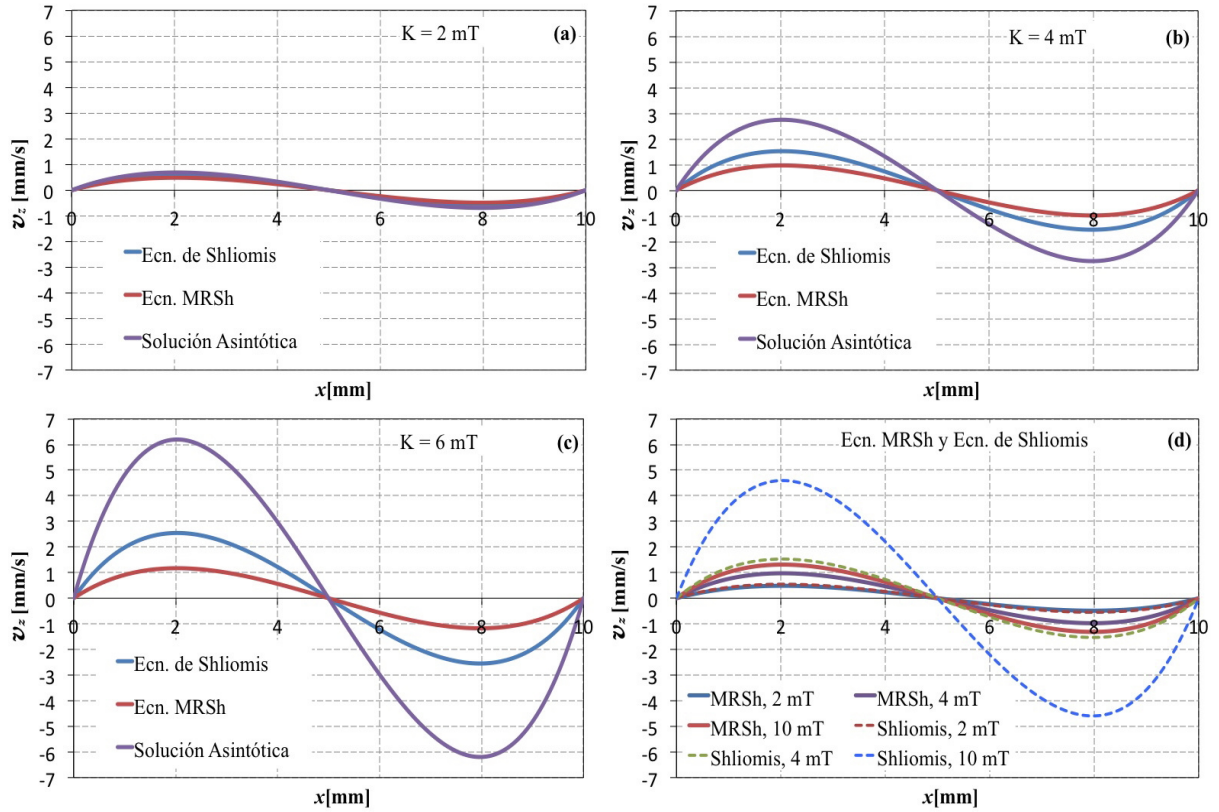


Figura 7-4: Perfiles de velocidad traslacional para un ferrofluido WGBF1, manteniendo constante $\tilde{\Omega} = 7.7 \times 10^{-1}$ ($\Omega = 50$ Hz) y $\kappa = 3.3$; variando el parámetro ε : a) $\varepsilon = 3.4$ ($K = 2$ mT), b) $\varepsilon = 13.6$ ($K = 4$ mT), c) $\varepsilon = 30.7$ ($K = 6$ mT) y d) muestra los resultados de la ecuación de magnetización MRSh bajo las condiciones de las gráficas a), b) y c).

7.1.3 Evaluación de flujo para altos campos magnéticos ($\varepsilon \gg 1$) y altas frecuencias ($\tilde{\Omega} \gg 1$)

En esta parte se presentan los resultados de flujo para altas amplitudes ($\varepsilon = 6.92$) y frecuencias del campo magnético para los ferrofluidos WBF1 y WGBF1.

En la Figura 7-5, las gráficas a), b) y c) muestran las comparaciones de los perfiles de velocidad traslacional obtenidos con la solución asintótica versus los perfiles obtenidos de las soluciones numéricas para la ecuación de magnetización de Shliomis-Langevin y la ecuación MRSh. En este caso se observa que el efecto combinado de altas frecuencias y altos campos puede generar predicciones de flujo mayores con la Ecuación de Magnetización de MRSh. De

allí se observa que aunque la magnitud del flujo decrece con la frecuencia, la ecuación de magnetización de MRSh predice un decrecimiento más lento lo que genera predicciones de la magnitud del flujo incluso mayores que la asintótica para las frecuencias más altas. Por otro lado, la Ecuación de Magnetización de Shliomis siempre predijo valores de flujo más bajos para todos los valores altos de frecuencia y amplitud de campo magnético estudiados. Por otro lado, los perfiles de velocidad traslacional para el ferrofluido WGBF-1, mostrados en la Figura 7-6 muestran valores de magnitud de flujo más altos para las simulaciones realizadas con la Ecuación de Magnetización MRSh. Esto se debe a que los valores de $\tilde{\Omega}$ para este ferrofluido son mayores que los del ferrofluido WBF-1 como consecuencia del mayor valor del tiempo de relajación de las partículas (τ).

7.1.4 Evaluación del efecto del parámetro κ sobre el flujo para altos campos ($\varepsilon \gg 1$) y altas frecuencias ($\tilde{\Omega} \gg 1$)

Con el fin de continuar con la comparación entre las solución asintótica y las numéricas, se obtuvieron perfiles de velocidad para diferentes valores del parámetro κ manteniendo constante la amplitud del campo magnético K y la frecuencia Ω , este estudio se hizo para los ferrofluidos WBF1 y WGBF1.

Los perfiles de velocidad traslacional para el ferrofluido WBF1 se muestran en la Figura 7-7. Estos resultados muestran una clara dependencia del flujo con respecto al parámetro adimensional κ ; las predicciones obtenidas con la solución asintótica son aproximadamente iguales a las obtenidas con las soluciones numéricas únicamente para bajos valores de κ , este comportamiento está de acuerdo con los análisis hechos por otros autores; a medida que aumenta κ también se va incrementando la magnitud de la velocidad traslacional hasta llegar a un valor máximo a partir del cual, si se sigue aumentando κ la magnitud de la velocidad traslacional empieza a disminuir. En otras palabras, la magnitud del flujo tiende a cero conforme $\kappa \rightarrow \infty$ ($\eta' \rightarrow 0$). Este resultado indica que el efecto del "couples stresses" $[\nabla^2 \omega]$ es importante en la generación del flujo, situación que ha sido demostrada en varios trabajos analíticos donde los "couples stresses" han sido despreciados haciendo $\eta' = 0$ lo que ha resultado en cero flujo, contradiciendo la actual evidencia experimental.

La Figura 7-8 muestra la comparación de los perfiles de velocidad traslacional obtenidos a

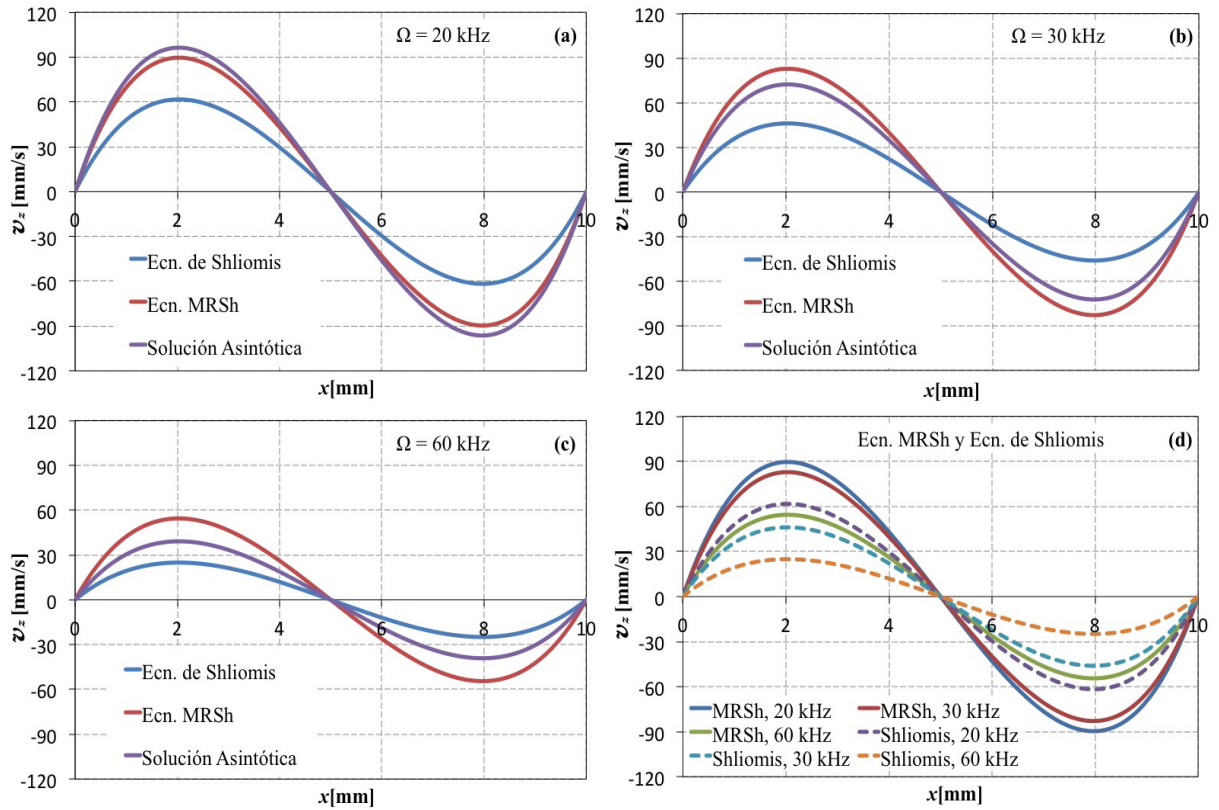


Figura 7-5: Perfiles de velocidad traslacional para un ferrofluido WBF1, manteniendo constante los parámetros $\varepsilon = 6.9200$ ($K = 4$ mT) y $\kappa = 3.3$; variando el parámetro $\tilde{\Omega}$: a) $\tilde{\Omega} = 2.0986$ ($\Omega = 20$ kHz), b) $\tilde{\Omega} = 3.1479$ ($\Omega = 30$ kHz), c) $\tilde{\Omega} = 6.2958$ ($\Omega = 60$ kHz) y d) muestra los perfiles de velocidad traslacional, obtenidos usando la ecuación de magnetización MRSh bajo las condiciones de las gráficas a), b) y c).

partir de la solución asintótica versus los perfiles obtenidos de los análisis numéricos hechos con la ecuación de magnetización de Shliomis-Langevin y la ecuación de magnetización MRSh, para diferentes valores del parámetro κ y para un ferrofluido WGBF1; se observa que el comportamiento cualitativo de los perfiles de velocidad sigue la misma tendencia descrita anteriormente para el ferrofluido WBF1, no obstante las diferencias entre las predicciones de la solución asintótica y las soluciones numéricas son significativamente mayores en el ferrofluido WGBF1, este hecho puede ser explicado a partir de las propiedades físicas de cada ferrofluido (tabla 6.3), es decir, la expresión $\kappa^2 \equiv \frac{4\eta d^2 \zeta}{\eta_e \eta}$ muestra la fuerte dependencia de κ respecto a la viscosidad (η) y al diámetro de partícula (d), estas propiedades son mayores para el ferrofluido WGBF1 lo que

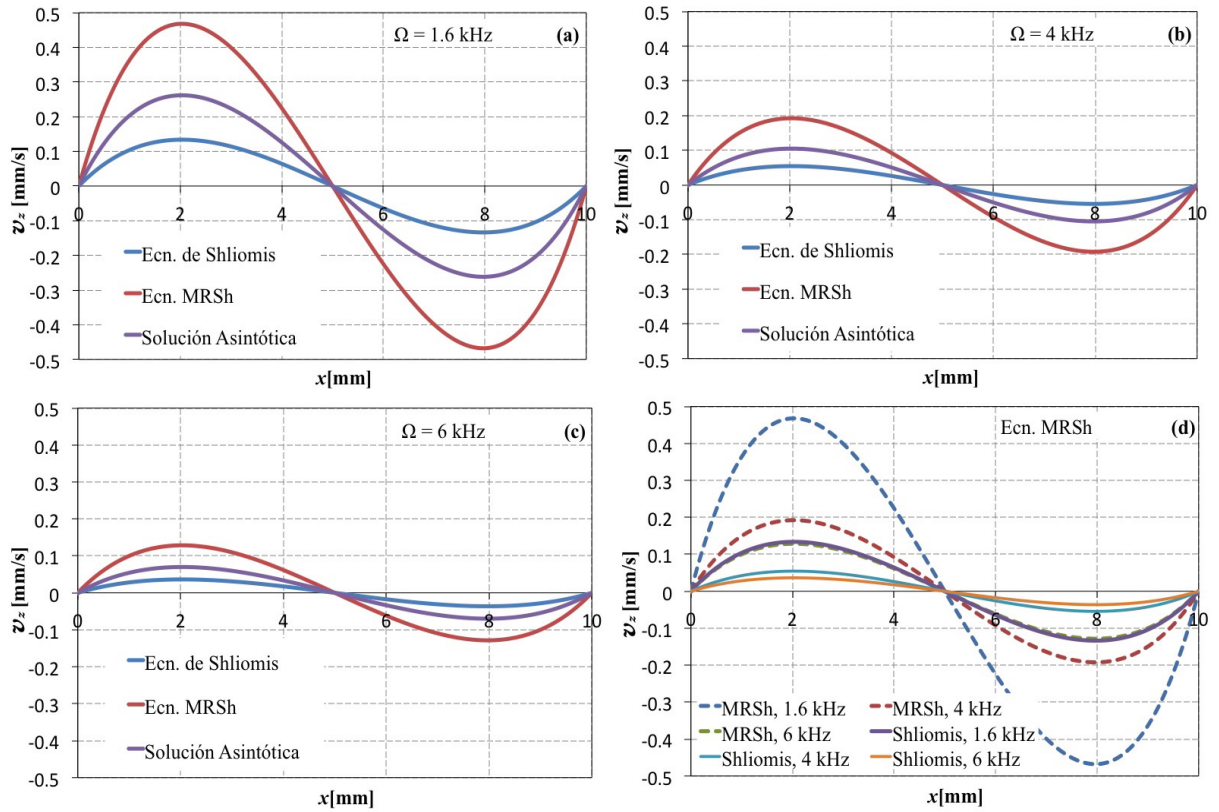


Figura 7-6: Perfiles de velocidad lineal para un ferrofluido WGBF1, manteniendo constante los parámetros $\varepsilon = 13.631$ ($K = 4$ mT) y $\kappa = 3.3$; variando el parámetro $\tilde{\Omega}$: a) $\tilde{\Omega} = 24.630$ ($\Omega = 1.6$ kHz), b) $\tilde{\Omega} = 61.575$ ($\Omega = 4$ kHz), c) $\tilde{\Omega} = 92.363$ ($\Omega = 6$ kHz) y d) muestra los perfiles de velocidad traslacional, obtenidos usando la ecuación de magnetización MRSh bajo las condiciones de las gráficas a), b) y c).

a su vez origina un mayor efecto sobre los perfiles de velocidad.

7.2 Evaluación del efecto del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ de la ecuación MRSh sobre la generación de flujo a altos valores de frecuencia Ω y amplitud H de CM

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al evaluar el efecto del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ de la ecuación de magnetización de MRSh sobre la velocidad traslacional de un ferrofluido confinado entre dos placas paralelas y sometido a un campo magnético rotacional; el estudio se hizo para

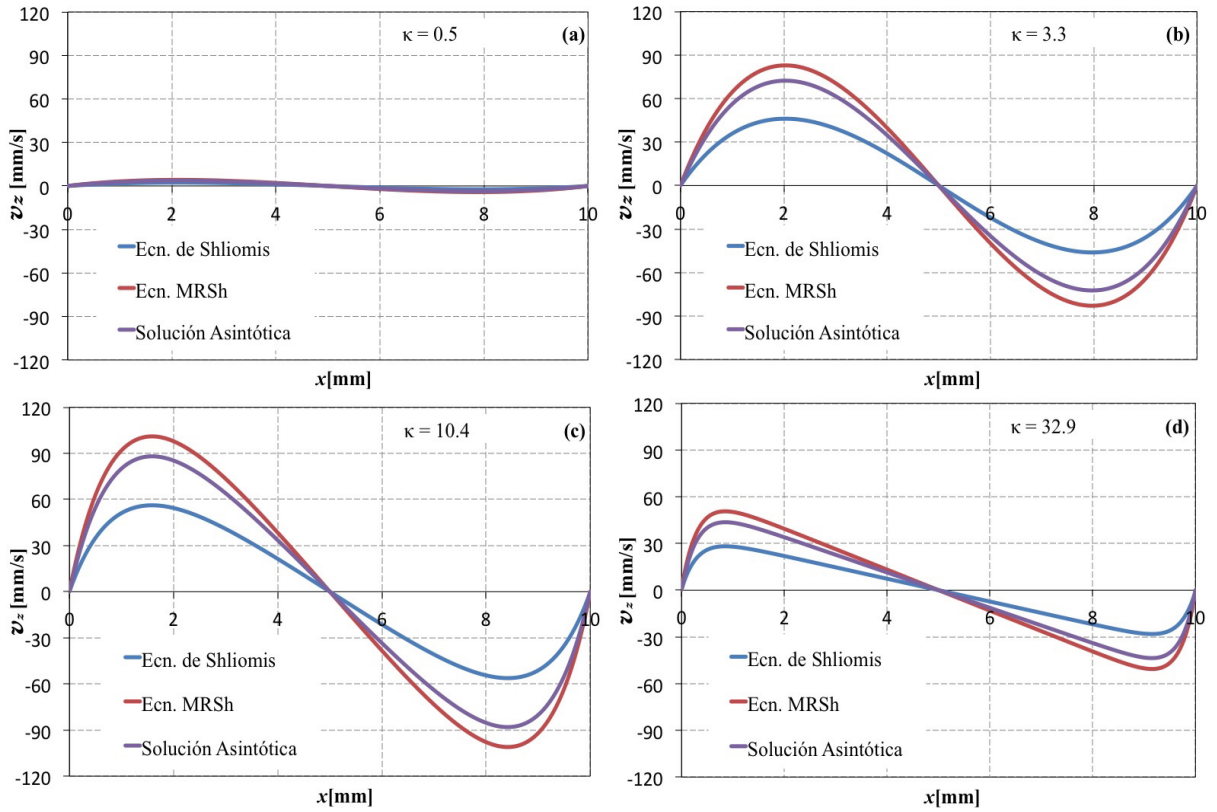


Figura 7-7: Perfiles de velocidad traslacional para un ferrofluido WBF1, manteniendo constante los parámetros $\varepsilon = 6.9200$ ($K = 4$ mT) y $\tilde{\Omega} = 3.1479$ ($\Omega = 30$ kHz); variando el parámetro κ : a) $\kappa = 0.5$, b) $\kappa = 3.3$, c) $\kappa = 10.4$ y d) $\kappa = 32.9$.

los ferrofluidos WBF1 y WGBF1.

La Figura 7-9 muestra los resultados obtenidos para el ferrofluido WBF1, se observa que con o sin el término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ de la ecuación de magnetización MRSh se mantiene la misma tendencia mencionada en los análisis anteriores a cerca del efecto del parámetro ε sobre los perfiles de velocidad traslacional, es decir, se incrementa la magnitud del flujo conforme aumenta la intensidad del campo magnético K (incremento de ε), adicionalmente, no se encontraron diferencias en el flujo cuando se desprecia el término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$, cuando no se tiene en cuenta dicho término las ecuaciones ferrodinámicas predicen igual magnitud en el flujo, como se observa en la figura 7-9. Continuando con el análisis para el ferrofluido WBF1, ahora se evalúa el efecto del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ manteniendo constantes los parámetros $\varepsilon = 6.920$ y $\kappa = 3.3$; en la Figura

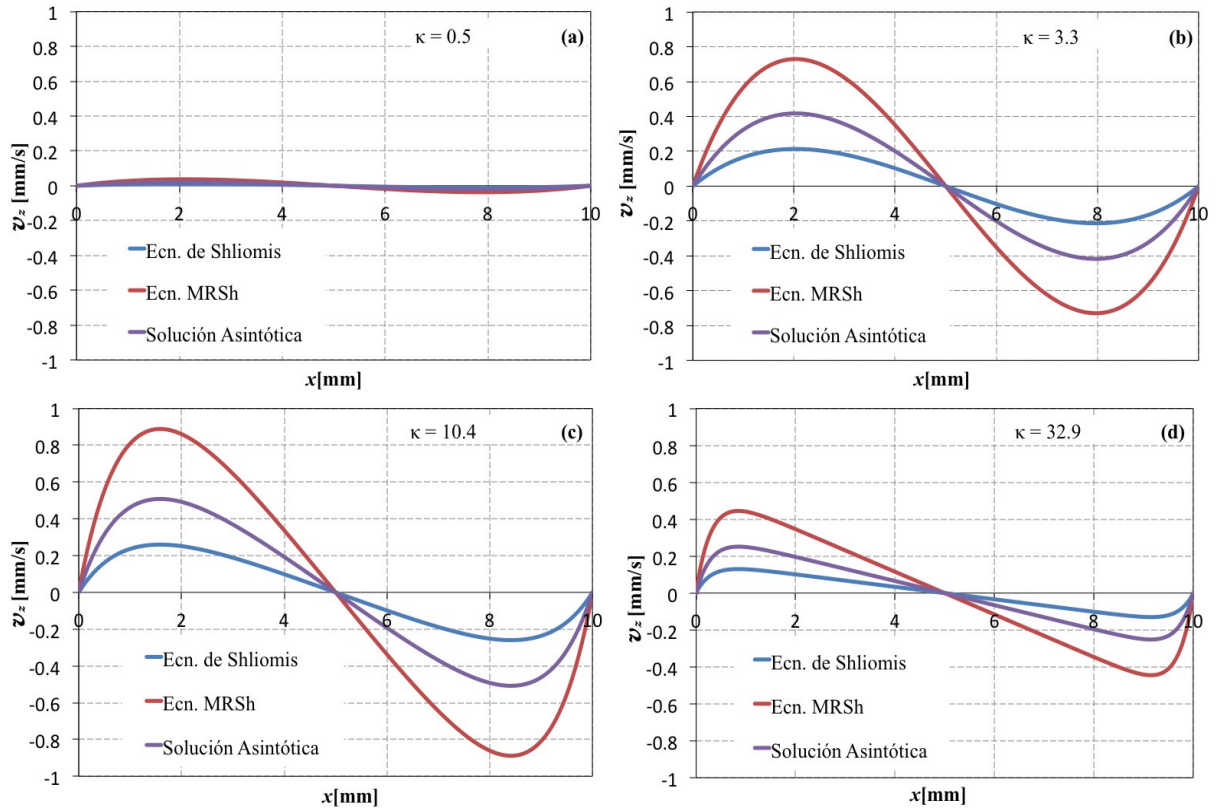


Figura 7-8: Perfiles de momento lineal para un ferrofluido WGBF1, manteniendo constante y altos los parámetros $\varepsilon = 13.631$ ($K = 4$ mT) y $\tilde{\Omega} = 15.394$ ($\Omega = 1$ kHz); variando el parámetro κ : a) $\kappa = 0.5$, b) $\kappa = 3.3$, c) $\kappa = 10.4$ y d) $\kappa = 32.9$.

7-10 se presentan los resultados obtenidos; se aprecia que el término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ no tiene efecto notorio sobre los perfiles de velocidad traslacional para valores muy altos de la frecuencia (Ω), este hecho está de acuerdo con los análisis hechos en la sección anterior. Finalmente se repitió el estudio hecho para el ferrofluido WBF1 ahora para un ferrofluido WGBF1, los resultados obtenidos son presentados en las Figuras 7-11 y 7-12, estas figuras muestran un comportamiento cualitativo idéntico al ya descrito para el ferrofluido WBF1; donde el término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ tiene un efecto importante en todo el rango de valores altos de ε estudiados, al desprestigiar el término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ de la ecuación MRSh se incurre en una sobreestimación en la magnitud del flujo del ferrofluido. Para el caso en que se mantiene constante la intensidad del campo magnético H (ε constante) y se varía la frecuencia Ω , el término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ de la ecuación MRSh tiene un efecto

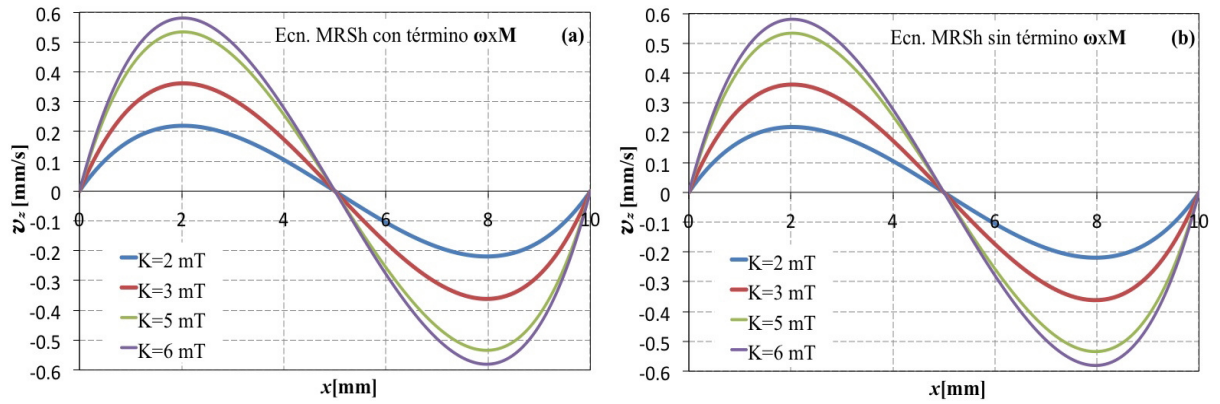


Figura 7-9: Perfiles de velocidad traslacional para el ferrofluido WBF1 obtenidos a partir del conjunto de ecuaciones ferrodinámicas con la ecuación de magnetización MRSh, manteniendo constante $\tilde{\Omega}$ y κ , pero variando el parámetro ε ; a) con presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ y b) sin presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$.

importante para valores intermedios de Ω , pero cuando Ω se acerca a un límite muy alto el flujo no presenta cambios en su magnitud, entonces bajo estas condiciones la presencia o no del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ no tiene algún efecto sobre el flujo.

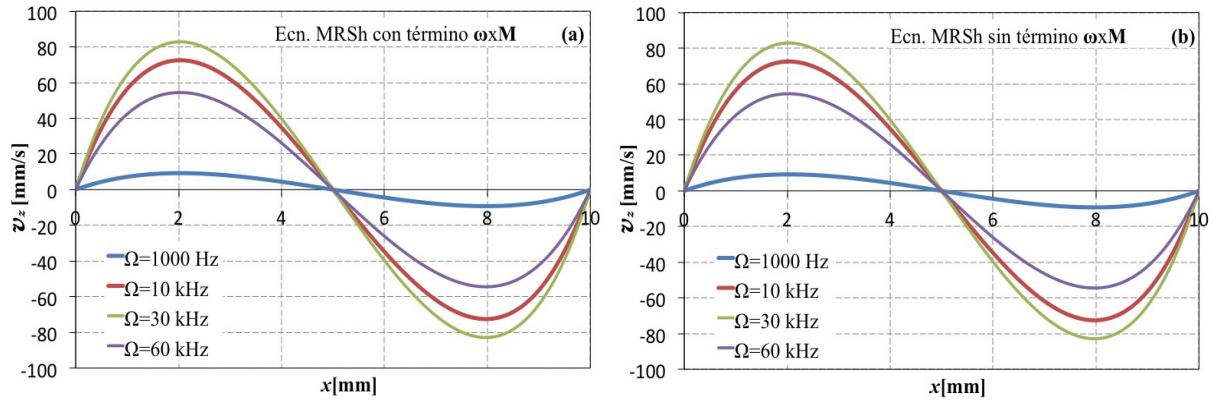


Figura 7-10: Perfiles de velocidad traslacional para el ferrofluido WBF1 obtenidos a partir del conjunto de ecuaciones ferrohídrodinámicas con la ecuación de magnetización MRSh, manteniendo constante ε y variando el parámetro $\tilde{\Omega}$; a) con presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ y b) sin presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$.

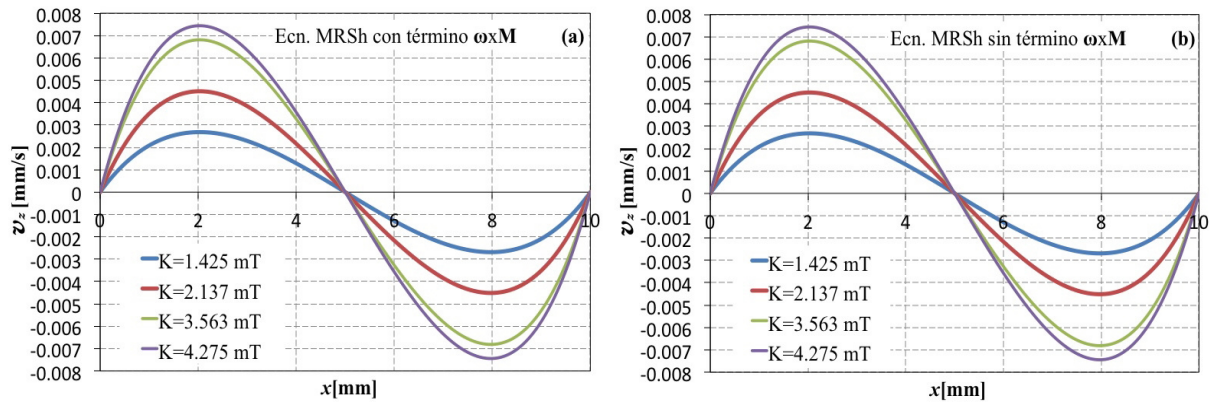


Figura 7-11: Perfiles de velocidad traslacional para el ferrofluido WGBF1 obtenidos a partir del conjunto de ecuaciones ferrohídrodinámicas con la ecuación de magnetización MRSh, manteniendo constante ε y variando el parámetro $\tilde{\Omega}$; a) con presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ y b) sin presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$.

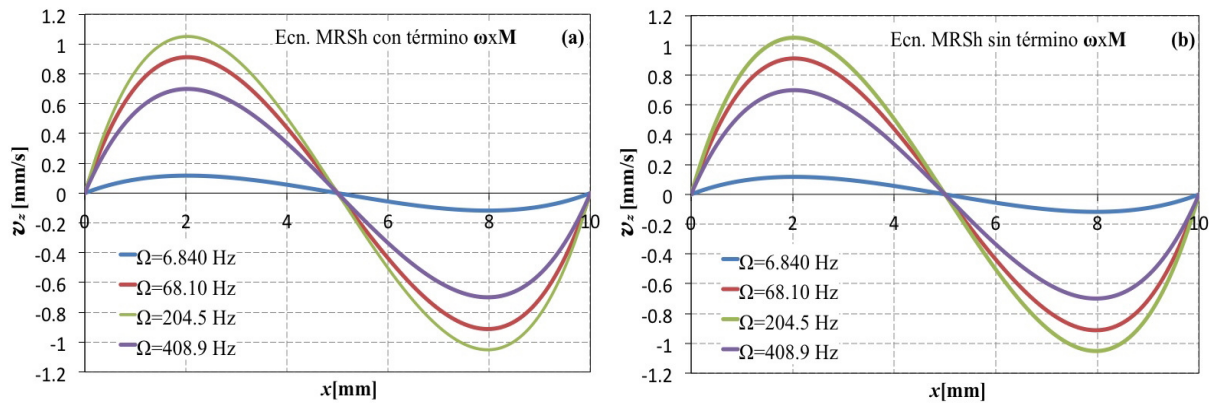


Figura 7-12: Perfiles de velocidad traslacional para el ferrofluido WGBF1 obtenidos a partir del conjunto de ecuaciones ferrodinámicas con la ecuación de magnetización MRSh, manteniendo constante ε y variando el parámetro $\hat{\Omega}$; a) con presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ y b) sin presencia del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$.

Capítulo 8

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

8.1 Conclusiones

- De los resultados obtenidos se puede concluir que no existen diferencias en la predicción del flujo usando las ecuaciones de magnetización de Shliomis y MRSh para dos casos: i) valores bajos de la frecuencia adimensional ($\tilde{\Omega}$) y de la amplitud del campo magnético (ε) y ii) para valores de $\varepsilon \ll 1$ y $\tilde{\Omega} \gg 1$.
- Las predicciones de flujo muestran que para $\tilde{\Omega} \ll 1$ y $\varepsilon \gg 1$ hay una marcada diferencia en las predicciones de flujo de la solución asintótica y numéricas. Es de resaltar que en este caso siempre la predicción del flujo fue mayor para la asintótica, y la menor para los resultados obtenidos con la Ecuación de Magnetización de MRSh. Esto puede ser una de las causas de que la comparación entre la magnitud de flujo experimental, típicamente obtenidas a altos campos, nunca se ajusten a los resultados de las soluciones asintóticas siendo esto una de las principales causas para desvirtuar la teoría de DMAI.
- Para este caso en particular de flujo entre placas, las simulaciones muestran que conforme la intensidad de la frecuencia incrementa la magnitud del flujo predicha por la Ecuación de Magnetización de MRSh es mayor incluso que la solución asintótica y esta a su vez predice mayores valores de flujo que los predichos por la Ecuación de Magnetización de

Shliomis.

- No se encontró efecto alguno del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ sobre el flujo.

8.2 Recomendaciones

- Se debe seguir con el objetivo de obtener soluciones numéricas para el flujo de ferrofluidos en geometrías cilíndrica y de cilindros concéntricos para altos valores de intensidad y frecuencia del campo magnético con el fin de hacer comparaciones directas de los resultados numéricos con análisis experimentales que ya han sido reportados por Torrez-Díaz *et al* [45] para estas geometrías cilíndricas.
- Se recomienda hacer montajes experimentales para la medición de perfiles de velocidad lineal y angular del flujo de ferrofluidos en geometrías de placas paralelas, estos resultados permitirán hacer comparaciones directas con los resultados numéricos reportados en este trabajo de investigación.

Citas Bibliográficas

- [1] Chaves, A., *Magnetorheology in Rotating Magnetic Fields*, Ph.d. thesis, University of Puerto Rico, Puerto Rico, MA. 2007.
- [2] Rosensweig, R. E., Popplewell, J., and Johnston, R. J., “Magnetic fluid motion in rotating field,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 85, 1990, pp. 171–180.
- [3] Rosensweig, R. E., *Ferrohydrodynamics*, Dover Publications, Mineola, NY, 1997.
- [4] Neuringer, J. and Rosensweig, R. E., “Ferrohydrodynamics,” *The Physics of Fluids*, Vol. 7, No. 12, 1964, pp. 1927–1937.
- [5] Elborai, S. M., *Ferrofluid Surface and Volume Flows in Uniform Rotating Magnetic Fields*, Ph.d. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA. 2006.
- [6] Rosensweig, R. E., Browaeys, J., Bacri, J., Zebib, A., and Perzynski, R., “Laboratory Study of Spherical Convection in Simulated Central Gravity,” *The American Physical Society*, Vol. 83, 1999, pp. 4904–4907.
- [7] Zahn, M., “Magnetic fluid and nanoparticle applications to nanotechnology,” *Journal of Nanoparticle Research*, Vol. 3, 2001, pp. 73–78.
- [8] Mao, L. and Koser, H., “Towards ferrofluidics for μ -TAS and lab on-a-chip applications,” *Nanotechnology*, Vol. 17, No. 7, 2006, pp. S34–S47.
- [9] Krauss, R., Reimann, B., Richter, R., Rehberg, I., and Liu, M., “Fluid pumped by magnetic stress,” *Appl. Phys. Lett*, Vol. 86, 2005.
- [10] Odenbach, S., “Ferrofluids magnetically controlled suspensions,” *Suspensions, Colloids and Surfaces A: Physicochem.Eng. Aspects*, Vol. 217, No. 4, 2003, pp. 171–178.

- [11] Rahisuddin., Pramod, S., Mohd, S., and Garima, G., “Application of ferrofluid: as a targeted drug delivery system in nanotechnology,” *International Journal of Pharmaceutical Sciences Review and Research*, Vol. 5, No. 3, 2010, pp. 115–119.
- [12] Shliomis, M. I. and Morozov, K. I., “Negative viscosity of ferrofluid under alternating magnetic field,” *Physics of Fluids*, Vol. 6, No. 8, 1994, pp. 2855–2861.
- [13] Rinaldi, C., Chaves, A., Elborai, S., He, X., and Zahn, M., “Magnetic fluid rheology and flows,” *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, Vol. 10, 2005, pp. 141–157.
- [14] Rinaldi, C., “Effect of the particle size distribution on Brownian and Néel relaxations times of ferrofluids,” Personal Communication 2005.
- [15] Rosenthal, A. D., Rinaldi, C., Franklin, T., and Zahn, M., “Torque measurements in spin-up flow of ferrofluids,” *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 126, 2004, pp. 198–205.
- [16] Lehlooh, A. F., Mahmood, S. H., and Williams, J. M., “On the particle size dependence of the magnetic anisotropy energy constant,” *Physica B*, Vol. 321, No. 1-4, 2002, pp. 159–162.
- [17] Rinaldi, C., *Continuum modeling of polarizable systems*, Ph.d. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA. 2002.
- [18] Rosensweig, R. E., “Continuum equations for magnetic and dielectric fluids with internal rotations,” *Journal of Chemical Physics*, Vol. 121, No. 3, 2000, pp. 1228–1242.
- [19] Brenner, H., “Rheology of two-phase systems,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 2, 1970, pp. 137–176.
- [20] Dahler, J. S. and Scriven, L. E., “Angular momentum of continua,” *Nature*, Vol. 192, No. 4797, 1961, pp. 36–37.
- [21] D., S.-A. and C., R., “Magnetoviscosity in dilute ferrofluids from rotational Brownian dynamics simulations,” *Physical Review E*, Vol. 82, 2010.
- [22] Shliomis, M. I., “Effective viscosity of magnetic suspensions,” *Soviet Physics JETP*, Vol. 34, No. 6, 1972, pp. 1291–1294.

- [23] Shliomis, M. I., “Ferrohydrodynamics: Testing a third magnetization equation,” *Physical Review E*, Vol. 64, No. 06051(R), 2001.
- [24] Krekhov, Alexei P. Shliomis, M. I. and Kamiyama, S., “Ferrofluid pipe flow in an oscillating magnetic field,” *Physics of fluids*, Vol. 17, 033105, 2005.
- [25] Shliomis, M. I., “Concerning one gyromagnetic effect in a liquid paramagnet,” *Sov. Phys. JETP*, Vol. 39, No. 4, 1974, pp. 701–704.
- [26] Martsenyuk, M., Raikher, Y. L., and Shliomis, M., “On the kinetics of magnetization of suspensions of ferromagnetic particles,” *Sov. Phys. JETP*, Vol. 38, No. 2, 1974, pp. 413–416.
- [27] Shliomis, M. I. and Eksp, Z., “Teor. Fiz,” *Soviet Physics JETP*, Vol. 34, No. 61, 1972.
- [28] Leotovich, M., *Statisticheskaya fizika(Statistical Physics)*, Vol. Gostekhizdat, 1944.
- [29] Moskowitz, R. and Rosensweig, R., “Nonmechanical torque-driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field,” *Applied Physics Letters*, Vol. 11, No. 10, 1967, pp. 301–303.
- [30] Brown, R. and Horsnell, T. S., “The wrong way round,” *Electrical Review*, Vol. 183, 1969, pp. 235–236.
- [31] Kagan, I., Rykov, V., and Yantovskii, E. I., “Flow of a dielectric ferromagnetic suspension in a rotating magnetic field,” *Magnitnaya Gidrodynamika*, Vol. 9, 1973, pp. 135–137.
- [32] Calugaru, G. H., Cotae, C., Badescu, R., Badescu, V., and Luca, E., “A new aspect of the movement of ferrofluids in a rotating magnetic field,” *Reviews in Rumanian Physics*, Vol. 21, 1976, pp. 439–440.
- [33] Rinaldi, C., Rosenthal, A., Lee, J.-H., Franklin, T., and Zahn, M., “Ferrohydrodynamics in time-varying magnetic fields,” *International Mechanical Engineering Conference and Exposition - ASME*, edited by D. A. Siginer, Vol. to appear, New Orleans, LA, 2002.

- [34] Chaves, A., Rinaldi, C., Elborai, S., He, X., and Zahn, M., “Bulk flow in ferrofluids in a uniform rotating magnetic field,” *Physical Review Letters*, Vol. 96, No. 19, 2006, pp. 194501.
- [35] Zaitsev, V. M. and Shliomis, M. I., “Entrainment of ferromagnetic suspension by a rotating field,” *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 10, 1969, pp. 696–700.
- [36] Pshenichnikov, A. F., Lebedev, A. V., and Shliomis, M. I., “On the rotational effect in nonuniform magnetic fluids,” *Magnetohydrodynamics*, Vol. 36, No. 4, 2000, pp. 275–281.
- [37] Glazov, O. A., “Motion of a ferrosuspension in rotating magnetic fields,” *Magnitnaya Gidrodynamika*, Vol. 11, No. 2, 1975, pp. 16–22.
- [38] Glazov, O., “Role of higher harmonics in ferrosuspension motion in a rotating magnetic field,” *Magnitnaya Gidrodynamika*, Vol. 11, No. 4, 1975, pp. 31.
- [39] Glazov, O. A., “Velocity profiles for magnetic fluids in rotating magnetic fields,” *Magnitnaya Gidrodynamika*, Vol. 18, No. 1, 1982, pp. 27.
- [40] Shliomis, M. I., Lyubimova, T. P., and Lyubimov, D. V., “Ferrohydrodynamics: an essay on the progress of ideas,” *Chem. Eng. Comm.*, Vol. 67, 1988, pp. 275–290.
- [41] Chaves, A., Rinaldi, C., and Zahn, M., “Spin-up flow of ferrofluids: Asymptotic theory and experimental measurements,” *Physics of fluids*, Vol. 20, No. 053102, 2008.
- [42] Khushrushahi, S. and Zahn, M., “Ultrasound velocimetry of ferrofluid spin-up-flow measurements using a spherical coil assembly to impose a uniform rotating magnetic field,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 323, 1992, pp. 1302–1308.
- [43] Schumacher, K. R., Sellien, I., Knoke, G. S., Cader, T., and Finlayson, B. A., “Experiment and simulation of laminar and turbulent ferrofluid pipe flow in an oscillating magnetic field,” *Physical Review E*, Vol. 67, No. 3, 2003, pp. 026308.
- [44] Finlayson, B. A., “Spin-up of ferrofluids: The impact of the spin viscosity and the Langevin function,” *Physics of fluids*, Vol. 25, 073101, 2013.

- [45] Torres, D. I., Cortes, A., Cedeño-Mattei, Y., and O., P.-P., “Flows and torques in brownian ferrofluids subjected to rotating uniform magnetic fields in a cylindrical and annular geometry,” *Physics Of Fluids*, Vol. 26:012004, 2014.
- [46] Zahn, M. and Greer, D. R., “Ferrohydrodynamic pumping in spatially uniform sinusoidally time-varying magnetic fields,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 149, 1995, pp. 165–173.
- [47] Rinaldi, C. and Zahn, M., “Effects of spin viscosity on ferrofluid flow profiles in alternating and rotating magnetic field,” *Physics of Fluids*, Vol. 14, No. 8, 2002, pp. 2847–2869.
- [48] Langtangen, H. P., *Computational Partial Differential Equations*, Simula Research Laboratory and Department of Informatics., University of Oslo, 2nd ed., 2002.

Capítulo 9

BIBLIOGRAFÍA

- Chaves, A., Magnetorheology in Rotating Magnetic Fields, Ph.D. thesis, University of Puerto Rico, Puerto Rico, MA. 2007.
- Rosensweig, R. E., Popplewell, J., and Johnston, R. J., “Magnetic fluid motion in rotating field,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 85, 1990, pp. 171–180.
- Rosensweig, R. E., *Ferrohydrodynamics*, Dover Publications, Mineola, NY, 1997.
- Neuringer, J. and Rosensweig, R. E., “Ferrohydrodynamics,” *The Physics of Fluids*, Vol. 7, No. 12, 1964, pp. 1927–1937.
- Elborai, S. M., *Ferrofluid Surface and Volume Flows in Uniform Rotating Magnetic Fields*, Ph.d. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA. 2006.
- Rosensweig, R. E., Browaeys, J., Bacri, J., Zebib, A., and Perzynski, R., “Laboratory Study of Spherical Convection in Simulated Central Gravity,” *The American Physical Society*, Vol. 83, 1999, pp. 4904–4907.
- Zahn, M., “Magnetic fluid and nanoparticle applications to nanotechnology,” *Journal of Nanoparticle Research*, Vol. 3, 2001, pp. 73–78.
- Mao, L. and Koser, H., “Towards ferrofluidics for μ -TAS and lab on-a-chip applications,” *Nanotechnology*, Vol. 17, No. 7, 2006, pp. S34–S47.

- Krauss, R., Reimann, B., Richter, R., Rehberg, I., and Liu, M., “Fluid pumped by magnetic stress,” *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 86, 2005.
- Odenbach, S., “Ferrofluids magnetically controlled suspensions,” *Suspensions, Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*, Vol. 217, No. 4, 2003, pp. 171–178.
- Rahisuddin., Pramod, S., Mohd, S., and Garima, G., “Application of ferrofluid: as a targeted drug delivery system in nanotechnology,” *International Journal of Pharmaceutical Sciences Review and Research*, Vol. 5, No. 3, 2010, pp. 115–119.
- Shliomis, M. I. and Morozov, K. I., “Negative viscosity of ferrofluid under alternating magnetic field,” *Physics of Fluids*, Vol. 6, No. 8, 1994, pp. 2855–2861.
- Rinaldi, C., Chaves, A., Elborai, S., He, X., and Zahn, M., “Magnetic fluid rheology and flows,” *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, Vol. 10, 2005, pp. 141–157.
- Rinaldi, C., “Effect of the particle size distribution on Brownian and Néel relaxations times of ferrofluids,” *Personal Communication* 2005.
- Rosenthal, A. D., Rinaldi, C., Franklin, T., and Zahn, M., “Torque measurements in spin-up flow of ferrofluids,” *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 126, 2004, pp. 198–205.
- Lehlooh, A. F., Mahmood, S. H., and Williams, J. M., “On the particle size dependence of the magnetic anisotropy energy constant,” *Physica B*, Vol. 321, No. 1-4, 2002, pp. 159–162.
- Rinaldi, C., *Continuum modeling of polarizable systems*, Ph.d. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA. 2002.
- Rosensweig, R. E., “Continuum equations for magnetic and dielectric fluids with internal rotations,” *Journal of Chemical Physics*, Vol. 121, No. 3, 2000, pp. 1228–1242.
- Brenner, H., “Rheology of two-phase systems,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 2, 1970, pp. 137–176.
- Dahler, J. S. and Scriven, L. E., “Angular momentum of continua,” *Nature*, Vol. 192, No. 4797, 1961, pp. 36–37.

- D., S.-A. and C., R., “Magnetoviscosity in dilute ferrofluids from rotational Brownian dynamics simulations,” *Physical Review E*, Vol. 82, 2010.
- Shliomis, M. I., “Effective viscosity of magnetic suspensions,” *Soviet Physics JETP*, Vol. 34, No. 6, 1972, pp. 1291–1294.
- Shliomis, M. I., “Ferrohydrodynamics: Testing a third magnetization equation,” *Physical Review E*, Vol. 64, No. 06051(R), 2001.
- Krekhov, Alexei P. Shliomis, M. I. and Kamiyama, S., “Ferrofluid pipe flow in an oscillating magnetic field,” *Physics of fluids*, Vol. 17, 033105, 2005.
- Shliomis, M. I., “Concerning one gyromagnetic effect in a liquid paramagnet,” *Sov. Phys. JETP*, Vol. 39, No. 4, 1974, pp. 701–704.
- Martsenyuk, M., Raikher, Y. L., and Shliomis, M., “On the kinetics of magnetization of suspensions of ferromagnetic particles,” *Sov. Phys. JETP*, Vol. 38, No. 2, 1974, pp. 413–416.
- Shliomis, M. I. and Eksp, Z., “Teor. Fiz,” *Soviet Physics JETP*, Vol. 34, No. 61, 1972.
- Leontovich, M., *Statisticheskaya fizika (Statistical Physics)*, Vol. Gostekhizdat, 1944.
- Moskowitz, R. and Rosensweig, R., “Nonmechanical torque-driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field,” *Applied Physics Letters*, Vol. 11, No. 10, 1967, pp. 301–303.
- Brown, R. and Horsnell, T. S., “The wrong way round,” *Electrical Review*, Vol. 183, 1969, pp. 235–236.
- Kagan, I., Rykov, V., and Yantovskii, E. I., “Flow of a dielectric ferromagnetic suspension in a rotating magnetic . . . eld,” *Magnitnaya Gidrodynamika*, Vol. 9, 1973, pp. 135–137.
- Calugaru, G. H., Cotae, C., Badescu, R., Badescu, V., and Luca, E., “A new aspect of the movement of ferrofluids in a rotating magnetic field,” *Reviews in Rumanian Physics*, Vol. 21, 1976, pp. 439–440.

- Rinaldi, C., Rosenthal, A., Lee, J.-H., Franklin, T., and Zahn, M., “Ferrohydrodynamics in time-varying magnetic fields,” International Mechanical Engineering Conference and Exposition - ASME, edited by D. A. Siginer, Vol. to appear, New Orleans, LA, 2002.
- Chaves, A., Rinaldi, C., Elborai, S., He, X., and Zahn, M., “Bulk flow in ferrofluids in a uniform rotating magnetic . . . eld,” Physical Review Letters, Vol. 96, No. 19, 2006, pp. 194501.
- Zaitsev, V. M. and Shliomis, M. I., “Entrainment of ferromagnetic suspension by a rotating field,” Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Vol. 10, 1969, pp. 696–700.
- Pshenichnikov, A. F., Lebedev, A. V., and Shliomis, M. I., “On the rotational effect in nonuniform magnetic fluids,” Magnetohydrodynamics, Vol. 36, No. 4, 2000, pp. 275–281.
- Glazov, O. A., “Motion of a ferrosuspension in rotating magnetic fields,” Magnitnaya Gidrodynamika, Vol. 11, No. 2, 1975, pp. 16–22.
- Glazov, O., “Role of higher harmonics in ferrosuspension motion in a rotating magnetic field,” Magnitnaya Gidrodynamika, Vol. 11, No. 4, 1975, pp. 31.
- Glazov, O. A., “Velocity profiles for magnetic fluids in rotating magnetic fields,” Magnitnaya Gidrodynamika, Vol. 18, No. 1, 1982, pp. 27.
- Shliomis, M. I., Lyubimova, T. P., and Lyubimov, D. V., “Ferrohydrodynamics: an essay on the progress of ideas,” Chem. Eng. Comm., Vol. 67, 1988, pp. 275–290.
- Chaves, A., Rinaldi, C., and Zahn, M., “Spin-up flow of ferrofluids: Asymptotic theory and experimental measurements,” Physics of fluids, Vol. 20, No. 053102, 2008.
- Khushrushahi, S. and Zahn, M., “Ultrasound velocimetry of ferrofluid spin-up-flow measurements using a spherical coil assembly to impose a uniform rotating magnetic field,” Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 323, 1992, pp. 1302–1308.
- Schumacher, K. R., Sellien, I., Knoke, G. S., Cader, T., and Finlayson, B. A., “Experiment and simulation of laminar and turbulent ferrofluid pipe flow in an oscillating magnetic field,” Physical Review E, Vol. 67, No. 3, 2003, pp. 026308.

- Finlayson, B. A., “Spin-up of ferrofluids: The impact of the spin viscosity and the Langevin function,” *Physics of fluids*, Vol. 25, 073101, 2013.
- Torres, D. I., Cortes, A., Cedeño-Mattei, Y., and O., P.-P., “Flows and torques in brownian ferrofluids subjected to rotating uniform magnetic fields in a cylindrical and annular geometry,” *Physics Of Fluids*, Vol. 26:012004, 2014.
- Zahn, M. and Greer, D. R., “Ferrohydrodynamic pumping in spatially uniform sinusoidally time-varying magnetic fields,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 149, 1995, pp. 165–173.
- Rinaldi, C. and Zahn, M., “Effects of spin viscosity on ferrofluid flow profiles in alternating and rotating magnetic field,” *Physics of Fluids*, Vol. 14, No. 8, 2002, pp. 2847–2869.
- Langtangen, H. P., *Computational Partial Differential Equations*, Simula Research Laboratory and Department of Informatics., University of Oslo, 2nd ed., 2002.