ESTRUCTURAS Y MECANISMOS MENTALES ASOCIADOS A LOS INTERVALOS DE CONFIANZA: PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN

Luzdari Rangel Ruiz

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2014

ESTRUCTURAS Y MECANISMOS MENTALES ASOCIADOS A LOS INTERVALOS DE CONFIANZA: PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN

LUZDARI RANGEL RUIZ

Trabajo de Grado para Optar al Título de

Magister en Educación Matemáticas

Director

DR. GABRIEL YÁÑEZ CANAL
Especialidad en Matemática Educativa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2014

AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar en primer lugar, con gran satisfacción mi sentimiento de gratitud y admiración al Director de esta Tesis, el Dr. Gabriel Yáñez Canal, quien con su conocimiento y experiencia, su permanente apoyo tanto a nivel académico como personal, sus consejos, su constancia, su rigor profesional y sus contribuciones incalculables, ha hecho posible la adecuada realización de esta tesis.

A Raúl, por su amor, constante apoyo, paciencia y por creer en mis capacidades.

A Samuel por llegar a mi vida y ser mi inspiración para hacer grandes cosas.

A la Dra. Solange Roa Fuentes, por sus contribuciones, sus reflexiones y permanente apoyo.

A los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Matemática pura que participaron en este estudio, por su paciencia y valiosa colaboración, sin la cual no hubiese sido posible la realización de esta investigación.

A los profesores, estudiantes de posgrado y administrativos de la Escuela de Matemáticas, por su dedicación y entrega en la tarea de formación docente, tanto a nivel académico como personal.

A Dios por darme la vida, a la vida por permitirme conocerlos a ustedes, a los nombrados y no nombrados, no por olvido si no por la limitación del texto.

A todos les expreso mi más sentido agradecimiento.

Luzdari Rangel Ruiz

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ANEXOS

1. **TÍTULO:**
   ESTRUCTURAS Y MECANISMOS MENTALES ASOCIADOS A LOS INTERVALOS DE CONFIANZA: PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN*.

2. **AUTOR:**
   Luzdari Rangel Ruiz**

3. **PALABRAS CLAVES:**
   Intervalos de Confianza
   Profesores de Matemáticas en Formación
   Teoría APOE
   Descomposición Genética

4. **RESUMEN:**

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos de una investigación cuya finalidad era describir las estructuras y mecanismos mentales presentes en la construcción del concepto de intervalo de confianza en profesores de matemáticas en formación.

Con el ánimo de alcanzar el objetivo propuesto, se asumió como referente teórico la teoría APOE, la cual proporcionó una estructura para la conceptualización y diseño de la investigación, conllevando a la construcción de una descomposición genética refinada del concepto de intervalos de confianza (IC) que se espera sea una herramienta útil para el diseño de actividades de enseñanza de dicho concepto. Durante la investigación se realizó un análisis teórico con el propósito de plantear una descomposición genética preliminar, es decir, una descripción hipotética de las estructuras y mecanismos mentales específicos que un individuo debe desarrollar para comprender el concepto de IC. Con base en esta descomposición genética se diseñó y aplicó una entrevista de corte didáctico con dos objetivos, el primero fue medir lo que los profesores de matemáticas en formación aprendieron sobre el concepto de IC y el segundo determinar si dichos individuos alcanzaron las estructuras y mecanismos mentales planteados en la descomposición genética preliminar.

Los resultados permitieron observar, entre otras cosas, que si bien los profesores de matemáticas en formación que participaron en el estudio dieron señas de poseer un esquema del concepto de IC que en principio garantiza una comprensión de este concepto, suficiente desde el punto de vista funcional, no se mostró muy sólido a la hora de responder algunas de las preguntas planteadas durante las entrevistas realizadas. La investigación permitió conjeturar desde el punto teórico las razones por la cuales los profesores en formación construyen algunas concepciones alrededor de las propiedades de los intervalos de confianza.

---

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Maestría en Educación Matemática. Dr. Gabriel Yáñez Canal

1. **TÍTLE:**
   MENTAL STRUCTURES AND MECHANISMS ASSOCIATED WITH CONFIDENCE INTERVALS: MATHEMATICS TEACHERS IN FORMATION[*].

2. **AUTHOR:**
   Luzdari Rangel Ruiz[**]

3. **KEYWORDS:**
   Confidence intervals
   Mathematics teachers in formation
   APOS Theory
   Genetic decomposition

4. **SUMMARY:**

In this work the results of an investigation are shown which aimed to describe the mental structures and mechanisms involved in the construction of the concept of confidence interval in mathematics teachers in training.

With the purpose to achieve the objective, is assumed as a reference theoretical the APOS theory, which provided a structure for the conceptualization and design of the research that leading to the construction of a refined genetic decomposition of the concept of confidence intervals (CI) and is expected to be useful tool to design learning activities of that concept. During the investigation was performed a theoretical analysis in order to raise a preliminary genetic decomposition, ie, a hypothetical description of the structures and specific mental mechanisms that an individual must develop to understand the concept of CI. Based on this genetic decomposition was designed and implemented an interview didactical with two purposes, the first was to measure what math teachers in training learned about the concept of IC and the second, to determine whether these individuals had raised the mental structures and mechanisms in genetic preliminary decomposition.

The results showed, among other things, that math teachers in training who participated in the study had signs to possess an outline of the concept of IC which ensures an understanding of this concept; they were not very solid at the time to answer some of the questions raised during the interviews. The investigation allowed guessing from the theoretical point the reasons why teachers in training build some conceptions about the properties of the confidence intervals.

---

[*] Degree work
[**] Faculty of Sciences. Masters in Mathematics Education. PhD Gabriel Yanez Canal

INTRODUCCIÓN

Los métodos utilizados para tomar decisiones u obtener conclusiones sobre una población forman parte del campo de la inferencia estadística y se basan en la información contenida en una muestra extraída debidamente de la población.

El campo de la inferencia estadística puede dividirse en dos grandes áreas, la estimación de parámetros y las pruebas de hipótesis. La estimación de parámetros puede ser puntual o mediante intervalos de confianza, las estimaciones puntuales no proporcionan información suficiente sobre el parámetro que se desea estimar, al contrario de los intervalos de confianza que suministran un rango de valores. Es por esto y gracias a su naturaleza inferencial que son altamente utilizados para estimar uno o más parámetros de una población basándose en la información contenida en una muestra, que con cierto grado de confianza (nivel de confianza) se espera que dicho intervalo lo contenga. La expresión algebraica que da lugar a dicha estimación es la que sigue:

$$\boldsymbol{\bar{X} \pm Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Donde $\bar{X}$ es la media muestral, $Z_{1-\alpha/2}$ es el percentil de la normal estándar asociado al nivel de confianza y $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es la desviación estándar asociada a la variable aleatoria $\bar{X}$.

Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de los intervalos de confianza señalan que estudiantes universitarios, profesores, expertos e investigadores presentan dificultades y diferentes tipos de concepciones respecto a los intervalos de confianza.

Son pocos los estudios cuya finalidad es explicar dichas dificultades y tipos de concepciones así como plantear herramientas en pro de la superación de las mismas. En un intento de continuar por este sendero, se realizó un estudio con profesores de matemáticas en formación en donde buscamos describir las estructuras y mecanismos mentales presentes en la construcción del concepto de intervalo de confianza para investigar a profundidad las razones de estos tipos concepciones reportadas en las investigaciones realizadas en torno a la comprensión del concepto de intervalo de confianza, lo que puede permitir proponer una estrategia didáctica que permita generar una mejor comprensión por parte de los estudiantes con respecto a los intervalos de confianza. Con el ánimo de alcanzar estos dos objetivos se asumió como referente teórico la Teoría APOE (Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema), esta teoría propone la construcción de una descomposición genética del concepto de intervalos de confianza que se espera sea una herramienta útil para la enseñanza de este concepto.

Nuestra investigación está guiada por la siguiente pregunta: *¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales presentes en la construcción del concepto de intervalo de confianza en profesores de matemáticas en formación?* a su vez nos cuestionamos sobre los razonamientos de los estudiantes que los llevan a obtener conclusiones erradas que han sido reportadas en la literatura relacionada y que se relacionan con el efecto que tienen el nivel de confianza, la desviación poblacional y el tamaño muestral sobre la precisión de la estimación con intervalos.

La metodología implementada para realizar esta investigación consistió básicamente en el diseño y aplicación de un cuestionario y en la realización de entrevistas a profundidad con cuatro estudiantes seleccionados con base en las argumentaciones presentadas en la solución del cuestionario.

La población en estudio son profesores de matemáticas en formación y la muestra con que trabajamos eran estudiantes del último semestre de la Licenciatura en Matemáticas y de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander que ya se encontraban ejerciendo.

Iniciamos la investigación con una búsqueda sistematizada de las investigaciones relacionadas con el concepto en estudio lo cual nos permitió tener un panorama general de lo realizado en este campo de estudio. La aplicación del cuestionario y las entrevistas nos permitieron identificar en la población de estudio las concepciones ya reportadas en la literatura, así como conocer algunas otras no reportadas hasta el momento y que se relacionan con el efecto del tamaño muestral y el nivel de confianza sobre la precisión de la estimación.

Un resultado importante fue la construcción de una descomposición genética de los intervalos de confianza que, en pocas palabras, es un modelo de las construcciones mentales que se requieren para construir un conocimiento adecuado de los intervalos de confianza. Esta descomposición genética es una guía que permite el diseño de actividades didácticas que sustenten una enseñanza adecuada de este tema.

A continuación describimos brevemente los capítulos que componen este documento.

En el primer capítulo, presentamos algunas investigaciones relacionadas con los intervalos de confianza y con algunos conceptos que intervienen en su construcción con el objetivo de determinar las dificultades y tipos de concepciones reportados hasta el momento.

En el segundo capítulo, Marco Teórico, presentamos una descripción general de la Teoría APOE la cual proporciona una estructura para la conceptualización y diseño de la investigación.

En el tercer capítulo, Diseño de la Investigación, describimos cada una de las fases de la investigación y las formas como obtuvimos y analizamos la información.

En el cuarto capítulo, Análisis Teórico, presentamos la parte inicial de la metodología, parte fundamental de nuestra investigación. Como resultado del análisis teórico se presenta una descomposición genética preliminar del concepto de intervalo de confianza, la cual es guía para el diseño de la entrevista de corte didáctico.

En el quinto capítulo, Análisis y discusión de los resultados, se presenta el análisis de la información recolectada durante la investigación, así como los principales resultados de la misma.

En el sexto capítulo, Conclusiones, se presentan los principales resultados obtenidos durante la investigación, entre ellos la descomposición genética refinada y algunas sugerencias de corte didáctico así como el planteamiento de futuras líneas de investigación relacionadas con los intervalos de confianza.

1. ANTECEDENTES

A continuación presentamos los estudios que fundamentan esta investigación. El capítulo se divide en dos partes, la primera parte consta de dos secciones, en la primera sección se presentamos las investigaciones cuyos resultados apuntan a la identificación de las dificultades y tipos de concepciones presentes en los individuos cuando se enfrentan a situaciones que requieren de la construcción e interpretación de un intervalo de confianza; en la segunda sección se presentan las investigaciones que buscan explicar las causas de las dificultades y tipos de concepciones y a su vez las estrategias y herramientas en pro de la superación de dichas dificultades y tipos de concepciones. En la segunda parte, y con ánimos de mostrar la forma como se utiliza el marco teórico de este trabajo, se describen algunas investigaciones alrededor de conceptos estadísticos que subyacen en la construcción de un intervalo de confianza y en las cuales se utiliza como marco de trabajo la Teoría APOE.

1.1 Investigaciones alrededor de los Intervalos de confianza

A continuación presentamos una revisión de las investigaciones realizadas en torno a los intervalos de confianza, que de alguna manera justifican la investigación realizada.

1.1.1 Los intervalos de confianza: Dificultades y tipos de concepciones.

Las investigaciones de carácter didáctico realizadas sobre la comprensión de los intervalos de confianza han mostrado que, tanto los estudiantes como expertos e investigadores e incluso algunos profesores de estadística, poseen concepciones equivocadas sobre los intervalos de confianza.

Behar (2001) realizó una investigación con varios objetivos, uno de ellos el de hacer un diagnóstico sobre los logros conceptuales en lo que se refiere a la estimación por intervalos de confianza sobre una muestra de profesores de estadística y de estudiantes universitarios. Su muestra de estudio estaba constituida por 41 “expertos” (estadísticos profesionales, profesionales no estadísticos y estudiantes de último año de la carrera de estadística) y 297 “no expertos” (estudiantes universitarios de pregrado y en su mayoría alumnos de los “expertos”). En esta investigación se elaboró un instrumento de evaluación de 74 ítems organizado en tres categorías: la primer categoría (ítems del 1 al 9) correspondió a juicios bajo incertidumbre, la segunda categoría (ítems del 10 al 33) a la comprensión de los conceptos sobre intervalos de confianza y la tercera categoría (ítems del 34 al 74) a la comprensión de los conceptos sobre contraste de hipótesis. Los 23 ítems relacionados con los intervalos de confianza están basados en los objetivos de aprendizaje desarrollados por Garfield, delMas y Chance (1999), todas la preguntas son cerradas, la mayoría de falso o verdadero y otras de opción múltiple, no se consideraron preguntas en las cuales fuese necesaria la aplicación de procedimientos algebraicos.

Durante la investigación en ningún momento se realizaron entrevistas con el objetivo de confrontar las concepciones identificadas, lo que hace que los resultados obtenidos por este estudio alrededor de los intervalos de confianza, y que se describen a continuación, sean de carácter exploratorio.

- Estudiantes y expertos asocian el nivel de confianza con el porcentaje de datos poblacionales que están contenidos en el intervalo de confianza. Es decir, un intervalo con un nivel de confianza del 95% contiene el 95% de los valores posibles de la población en estudio.
- Los estudiantes hacen una interpretación bayesiana del intervalo de confianza al suponer que el coeficiente de confianza es la probabilidad a posteriori de obtener el parámetro dentro del intervalo, una vez recogida la muestra.
- Estudiantes y expertos no asocian el nivel de confianza con una frecuencia relativa, es decir, no comprenden que el nivel de confianza lo que dice es que si se repite el muestreo muchas veces, se espera que un porcentaje igual al nivel de confianza de dichos intervalos contenga el parámetro poblacional μ, y por lo tanto existan algunos intervalos que no lo contengan.
- Los estudiantes asumen que altos niveles de confianza, manteniendo los demás datos constantes, conllevan a intervalos menos anchos.
- Estudiantes y expertos, en menor grado, asumen que el ancho del intervalo es directamente proporcional al tamaño de la muestra, es decir, un incremento en el tamaño de la muestra conduce a que el ancho del intervalo aumente.
- Estudiantes y expertos consideran erróneamente que un intervalo de confianza contiene los valores de la media muestral y no los posibles (plausibles) valores del parámetro que se está estimando (media poblacional).

Behar (2001) en su investigación sentó un precedente sobre los tipos de concepciones presentes en la comprensión de los intervalos de confianza, lo cual llevó a otros investigadores a profundizar en el tema.

Cumming, Williams y Fidler (2004) presentan de manera sucinta los resultados que obtuvieron al invitar a autores de artículos de revistas de sicología, neurociencia conductual y medicina a visitar un sitio Web para responder algunos cuestionamientos sobre intervalos de confianza. Los autores plantean que las respuestas de 263 investigadores sugieren que muchos de ellos, líderes en las tres disciplinas, tienen ideas erróneas sobre el nivel de confianza, ya que asumen que este indica la probabilidad de que el intervalo contenga los valores de la media muestral y no del parámetro a estimar. Además no asocian el nivel de confianza con una frecuencia relativa. Cumming y colaboradores (2004) consideran que la mayoría de los investigadores con quienes trabajaron no entienden lo que significa un intervalo de confianza.

Sumado a esto Fidler y Cumming (2005) presentan los resultados de un estudio con estudiantes de último semestre y estudiantes de posgrado de ciencias ambientales al pedirles que interpretaran los resultados estadísticos de un estudio de importancia ecológica. Los resultados les fueron planteados de dos formas: primero se dieron en términos del *p* valor (prueba de hipótesis) y luego mediante intervalos de confianza. En ningún momento se realizaron entrevistas, los resultados se describen con base en las respuestas dadas por los estudiantes de forma escrita. En este estudio se identificaron las mismas concepciones ya descritas en Behar (2001).

Olivo y Batanero (2007) elaboraron un instrumento de evaluación que buscaba estudiar a fondo las concepciones de los estudiantes de ingeniería sobre los intervalos de confianza. El instrumento constó de 15 ítems en su mayoría seleccionados de otros estudios, de los cuales 11 son de opción múltiple y 4 problemas abiertos, algunos de los ítems requerían la aplicación de procedimientos algebraicos. Este instrumento fue aplicado a 48 estudiantes que ya habían recibido dos cursos básicos de estadística y se realizó un análisis de las respuestas ofrecidas por los estudiantes de forma escrita, en ningún momento se realizaron entrevistas para confrontar las respuestas de los estudiantes.

Los resultados del estudio de Olivo y Batanero (2007) señalan que el concepto de intervalo de confianza no es difícil de aprender en la gran mayoría de estudiantes, sin embargo se identificaron los tipos de concepciones ya descritas por Behar (2001) y además identificaron errores conceptuales y procedimentales que podrían ser causa de la mayoría de los tipos de concepciones expuestas en las investigaciones previas, y que hacen referencia a la falta de claridad en la expresión algebraica que da lugar a la construcción de un intervalo de confianza, por ejemplo:

- El nivel de confianza no afecta el tamaño del intervalo.

- La evidente dificultad para identificar la distribución muestral a utilizar.
- Los estudiantes asumen los intervalos de confianza como estadísticos descriptivos, lo cual hace que ignoren su naturaleza inferencial.

Un año más tarde Olivo, Batanero y Díaz (2008) presentaron los resultados de un estudio de evaluación sobre la comprensión de los intervalos de confianza. Para esto se aplicó un cuestionario a 252 estudiantes de ingeniería mexicanos que ya habían estudiado el tema. El cuestionario constó de 14 ítems de los cuales 12 fueron de opción múltiple y los restantes fueron problemas abiertos, algunos de los ítems requerían la aplicación de procedimientos algebraicos.

En este artículo nuevamente se llegó a conclusiones que ya habían sido obtenidas en otras investigaciones, como la confusión entre los conceptos de estadístico y parámetro ya descrita por Vallecillos y Batanero (1997) y Behar (2001), el conflicto entre al tamaño de la muestra y el ancho del intervalo y las malas interpretaciones del nivel de confianza (Behar 2001, Cumming et al., 2004, Fidler y Cumming 2005).

Ese mismo año Olivo (2008) presentó nuevos resultados a partir de la aplicación de un nuevo instrumento de evaluación de 18 ítems que le permitió analizar el significado personal que los estudiantes de ingeniería mexicanos asignan a los intervalos de confianza para cualquier parámetro, la muestra constó de 252 estudiantes. Para este estudio se hizo un análisis de 11 libros de texto usados por los estudiantes de ingeniería del instituto Tecnológico de Monterrey (Universidad en la cual estudian los 252 estudiantes que participan en el estudio) con el objetivo de establecer un “significado de referencia” de los intervalos de confianza para luego ser tenido en cuenta en la elaboración del instrumento de evaluación. A su vez se realizó un estudio histórico del desarrollo de los intervalos de confianza con el objetivo de fijar los significados institucionales y así intentar a su vez explicar las dificultades y tipos de concepciones presentes en los estudiantes. Los resultados arrojados en este estudio permitieron corroborar las dificultades ya expuestas (Behar 2001, Cumming, Williams y Fidler 2004, Fidler y Cumming 2005, Olivo y Batanero 2007, Olivo, Batanero y Díaz 2008) y a su vez resaltar ciertas dificultades y conflictos semióticos que afectan no solo la definición de los intervalos de confianza, si no cada uno de los elementos que los componen, como por ejemplo:

- Dificultad para interpretar correctamente un intervalo de confianza a partir de un gráfico. Es decir, si se traslapan, hasta dónde visualmente se puede decir si los dos intervalos de confianza responden a la misma población.

- Los estudiantes tienden a confundir la media muestral con la media poblacional.
- Los estudiantes confunden la desviación estándar poblacional con la desviación estándar muestral.
- Los estudiantes hacen una interpretación bayesiana del intervalo de confianza al suponer que el nivel de confianza es la probabilidad a posteriori de obtener el parámetro dentro del intervalo, una vez recogida la muestra.

En este estudio no se reportan entrevistas, los resultados son planteados con base en las respuestas dadas por los estudiantes de forma escrita y el análisis fue realizado bajo el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática.

Las explicaciones dadas por Olivo (2008) en cuanto a las dificultades presentes en los estudiantes que son parte del estudio para la construcción de un intervalo de confianza varía de acuerdo al parámetro que se desea estimar; en el caso de la construcción de un intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales, plantea que puede deberse a la "falta de memorización de las formulas correspondientes, hasta una falta de conectividad entre símbolos y entidades conceptuales" (p. 224), para la comparación de dos varianzas poblacionales, el autor considera que una posible explicación es la falta de claridad de los estudiantes en cuanto a la diferencia de los valores críticos; para la construcción de un intervalo de confianza para proporciones el autor resalta que la principal fuente de dificultad puede deberse a los procesos algebraicos realizados por los estudiantes, los cuales en su mayoría no son correctos. En general las explicaciones ofrecidas en este trabajo son de tipo procedimental y fundamentado en el significado personal de intervalo de confianza identificado en cada uno de los estudiantes que participaron en el estudio.

Kalinowski (2010) presenta los resultados de una investigación con el propósito de identificar los tipos de concepciones presentes en estudiantes de posgrado respecto a los intervalos de confianza. La población de estudio estuvo conformada por 94 estudiantes graduados con honores y estudiantes de posgrado de varias disciplinas (incluyendo psicología, medicina y ecología), los cuales respondieron una encuesta que fue distribuida por internet. La encuesta presentaba 4 problemas de contexto diferente destinados a construir e interpretar un intervalo de confianza. El análisis de las respuestas ofrecidas por los individuos les permitió identificar los tipos de concepciones ya reportadas (Behar 2001, Cumming, Williams y Fidler 2004, Fidler y Cumming 2005, Olivo y Batanero 2007, Olivo, Batanero y Díaz 2008, Olivo 2008).

Sarmiento y Osma (2010) y Henriques (2012) realizaron estudios con estudiantes universitarios de pregrado y posgrado de diferentes áreas, encontrando las dificultades y tipos de concepciones ya expuestas anteriormente. Sarmiento y Osma (2010) indagaron sobre la comprensión de los intervalos de confianza en estudiantes de educación superior utilizando tanto el análisis clásico de los datos como el análisis a partir del modelo Rasch. Algunas de las conclusiones de este estudio son las siguientes:

- El análisis clásico y el análisis a partir del modelo Rasch señalan que la prueba utilizada tiene un índice de dificultad alto, determinándola como una prueba difícil para los estudiantes.
- La mayor dificultad se observó en los ítems abiertos, especialmente los que requieren el análisis de gráficos y la estimación de intervalos de confianza cuando la desviación estándar poblacional es desconocida.
- El menor grado de dificultad se observó en los ítems dicotómicos de tipo conceptual que no requieren de un mayor discernimiento.
- Los estudiantes no tienen una idea clara sobre el efecto de la varianza en el ancho del intervalo de confianza.

Salcedo, Lira, González y Yáñez (2011) presentan un estudio con docentes en formación a quienes aplicaron un cuestionario escrito de 14 ítems cerrados (tomados de Behar, 2001), con el propósito de identificar concepciones alternativas sobre los intervalos de confianza reportadas en otras investigaciones. En el estudio participaron 102 docentes en formación, durante la investigación no se realizaron entrevistas.

En el cuestionario se abordan tres casos, en primer lugar se busca conocer lo que piensan los docentes en formación sobre la información que da un intervalo de confianza para la media poblacional; en segundo lugar se aborda la construcción e interpretación de un intervalo de confianza para la diferencia de medias y, en tercer lugar, identificar lo que piensan los docentes en formación sobre los conceptos estadísticos que intervienen de manera directa en la construcción del intervalo de confianza, como lo son el nivel de confianza, el tamaño muestral y la desviación estándar de la población, asumiendo que se conoce.

En general se encontraron los tipos de concepciones ya expuestas, sin embargo, identificaron que:

- Los docentes en formación asumen el nivel de confianza como un valor de probabilidad en términos subjetivos, es decir, como un valor de certeza sin ninguna interpretación frecuencial. Pareciera que están asimilando el nivel de confianza con la exactitud o precisión del intervalo.
- Varios errores identificados en estudios previos pueden deberse a deficiencias en el concepto de distribución de medias muestrales, el teorema central del límite y su importancia en la construcción de intervalos de confianza.

En general Salcedo y colaboradores (2011) consideran que los docentes en formación que participaron en el estudio tienen malas interpretaciones de los intervalos de confianza sin importar el contexto.

Chance y McGaughey (2014) reportan los resultados de una investigación con estudiantes universitarios basado en la simulación computacional (no se especifica el software usado), con el objetivo de identificar su impacto en la comprensión del p-valor y de los intervalos de confianza. Para esto se diseñaron y aplicaron dos unidades de evaluación basados en el instrumento CAOS (Comprehensive Assessment of Outcomes in a First Statistics course) planteado por delMas, Garfield, Ooms y Chance (2007), las pruebas SAT (Scholarship Aptitude Test) y el uso de la simulación con el objetivo de valorar lo aprendido por los estudiantes en un curso introductorio.

Inicialmente los estudiantes son introducidos a la inferencia de una proporción, incluyendo una introducción basada en la simulación para el p-valor. Dicha simulación no fue sólo computacional, también se presentaron actividades que requerían de la simulación manual. por el ejemplo el lanzamiento de una moneda para generar observaciones repetidas de un proceso aleatorio, que posteriormente es contrastado con lo obtenido en la simulación computacional. Luego se introducen los intervalos de confianza como el conjunto de los posibles valores del parámetro que no sería rechazado con base en el p-valor.

En la primera mitad de dicho curso se aplicó la primera unidad evaluativa a 518 estudiantes de 12 instituciones diferentes. La unidad evaluativa incluía una serie de preguntas de opción múltiple que incluían la identificación de la hipótesis nula y la hipótesis alternativa apropiada, así como la interpretación del p-valor. Al finalizar la prueba se les pidió a los estudiantes plantear si un intervalo de confianza para la proporción de la población con base en el análisis realizado por ellos sobre el p-valor incluiría el valor 0.5. El objetivo de esta última actividad radica en que el estudiante note que 0.5 no es un valor plausible para el parámetro ya que el p-valor es igual a 0.012.

Una vez analizadas las respuestas de los estudiantes se encontró que no presentaron mayor dificultad en la identificación de la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. La interpretación del p-valor presentó dificultad para los estudiantes. En cuanto a los intervalos de confianza se identificó que los estudiantes describían claramente la forma de construir el intervalo de confianza, sin embargo, presentaron dificultad para su interpretación y por tanto conexión con el p-valor.

Al finalizar el curso se aplicó la segunda unidad evaluativa enfocada en la interpretación del p-valor y su importancia para tomar decisiones en cuanto a la hipótesis nula. En el análisis de las respuestas de los estudiantes se observó que al parecer los estudiantes comprenden con cierta rapidez la noción de prueba de hipótesis y su utilidad en la toma de decisiones, sin embargo, la dificultad radica en la interpretación que se debe hacer de acuerdo al p-valor obtenido. Chance y McGaughey (2014) plantean que a partir de los análisis de un pre test y un post test planteados con base en el instrumento CAOS se identificaron ciertas tendencias y comparaciones interesantes alrededor de los intervalos de confianza y el p-valor, las cuales no se reportan. El pre test fue aplicado a 1000 estudiantes y el post test a 500 estudiantes.

En términos de los intervalos de confianza se les presentaron a los estudiantes un conjunto de interpretaciones de los intervalos de confianza y se les pregunta si son válidos o no válidos. En sus respuestas se observa que la gran mayoría indican de manera adecuada que el nivel de confianza del 95% no está relacionado con el hecho de que el intervalo contenga al 95% de la población, sin embargo consideran que el nivel de confianza actúa sobre el intervalo y no sobre el proceso aleatorio que dio origen a su construcción. Los estudiantes también presentan dificultad en cuanto al hecho de que la muestra debe estar contenida en el intervalo. En términos del p-valor se encontró que los estudiantes presentan dificultad para tomar decisiones, sin embargo pareciera que asumieron que entre más pequeño sea el p-valor mayor es la evidencia en contra de la hipótesis nula.

Para finalizar Chance y McGaughey (2014) plantean que el uso de la simulación ayudó a que los estudiantes ganaran comprensión en torno al p-valor y la variabilidad de las muestras. Sin embargo, recomiendan resaltar qué representa cada repetición, ya que la simulación sin duda es una herramienta útil en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la estadística. En cuanto a la comprensión de los intervalos de confianza, manifiestan que la simulación es una herramienta útil que lleva al estudiante a identificar que la media muestral es una variable aleatoria y que da lugar a introducir el teorema central del límite.

Es importante resaltar que las investigaciones presentadas hasta el momento no reportan entrevistas ni actividades orientadas a confrontar las dificultades y tipos de concepciones reportadas en cada una de ellas, sus resultados son únicamente descriptivos y sus explicaciones se limitan a lo procedimental.

1.1.2 Los intervalos de confianza: Propuestas didácticas y posibles explicaciones a las dificultades y tipos de concepciones

Garfield, delMas y Chance (1999) plantean que el concepto de intervalo de confianza es complejo y difícil de entender, lo cual se evidencia en los resultados de las investigaciones presentadas hasta el momento. Es por esto que varios investigadores emprendieron la tarea de intentar explicar el porqué de las dificultades y tipos de concepciones reportados y a su vez plantear herramientas en pro de su superación.

Es por lo anterior que Cumming y Fidler (2005) presentan un estudio en el cual proponen una forma de superar algunos problemas presentes en los individuos al momento de interpretar uno o más intervalos de confianza a partir de un gráfico, es decir, si se traslapan, hasta dónde visualmente y a partir de la información suministrada se puede decir si las medias son diferentes; a este hecho le suman la creencia errónea acerca del solapamiento entre intervalos y su relación con la significancia estadística. Por último, hacen un llamado a la importancia del diseño de investigaciones que promuevan la aplicación e interpretación de los intervalos de confianza.

A partir de los resultados establecidos por Cumming y colaboradores (2004) Cumming y Fidler (2005) plantean que el uso de los intervalos de confianza puede mejorar notablemente la comunicación en la investigación, por lo cual consideran que una solución a la dificultad de interpretar uno o más intervalos de confianza a partir de un gráfico es mejorar la forma en que se presenta la información. Para esto recomiendan hacer uso no solo del lenguaje algebraico al que están acostumbrados los individuos, sino también hacer uso de las representaciones gráficas, lo cual puede facilitar la interpretación gráfica de uno o más intervalos de confianza. Un ejemplo de las representaciones se presenta a continuación:

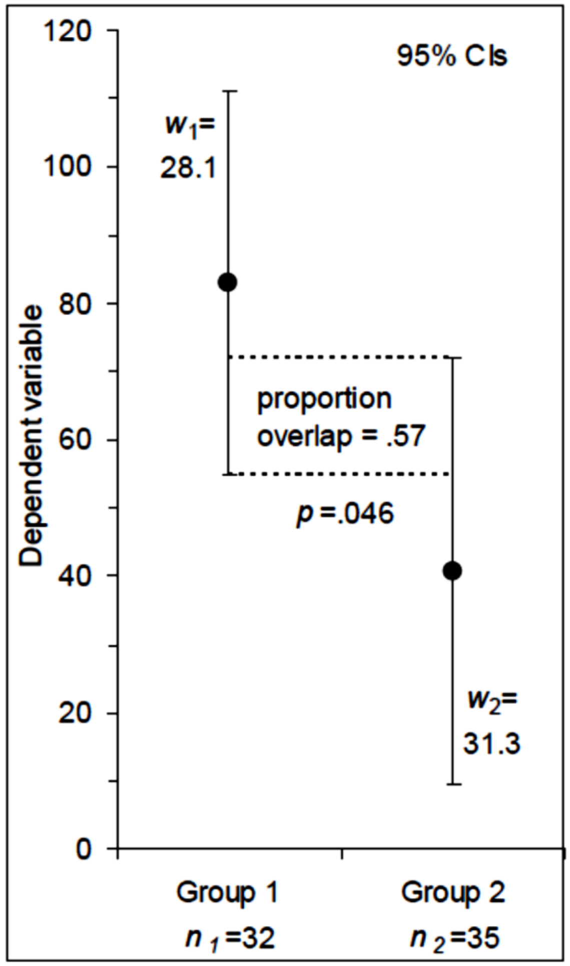


Ilustración 1: Ejemplo de la "rule of eye" planteado por los autores.
Tomado de Cumming y Fidler (2005, p. 3)

En la Ilustración 1, los autores presentan dos intervalos de confianza del 95% de confianza para comparar la media de dos poblaciones, sumado a esto se suministra el margen de error w_1 y w_2 de cada intervalo (la mitad de la longitud total del intervalo) y el p-valor de dos colas para la diferencia de las medias. A partir de esta información se le pide a los individuos que digan si los dos intervalos de confianza niegan o no la igualdad de las dos medias. Sumado a este tipo de representaciones gráficas Cumming y Fidler (2005) recomiendan el uso de la simulación como apoyo en el proceso de construcción e interpretación de uno o más intervalos de confianza.

Si bien Cumming y Fidler (2005) proponen una posible solución en términos didácticos a la dificultad de interpretar dos o más intervalos de confianza a partir de un gráfico, no tienen en cuenta los conocimientos previos que debe tener un individuo cuando se enfrenta a su construcción e interpretación, como lo señalan Behar (2001) y Olivo (2008).

Terán (2006) presenta parte de un estudio cuyo objetivo fue investigar el significado de los intervalos de confianza en estudiantes de primer año universitario en un curso de Estadística. Para esto analizó el diálogo de dos estudiantes en una clase de 2 horas cuando resolvían un problema propuesto usando un computador; el investigador no interviene en ningún momento en el diálogo de los estudiantes. El autor plantea que esta interacción, estudiante-computador, permite al estudiante explorar y experimentar, de tal manera que podrían llegar a relacionar los elementos que intervienen en la construcción de un intervalo de confianza. Con base en lo observado en el diálogo de los dos estudiantes, Terán (2006) sugiere el diseño de instrumentos didácticos mediados con simulación para favorecer el aprendizaje de los intervalos de confianza.

En una dirección diferente, Yáñez y Behar (2009) presentan los resultados de un estudio con profesores de matemáticas en formación que tomaron dos cursos semestrales de estadística básica (4 horas semanales). Durante los cursos se asumió el enfoque didáctico de resolución de problemas con la ayuda de la simulación a través del paquete Fathom (Finzer, Erickson y Binker 2000). Es de resaltar que al finalizar el curso los estudiantes respondieron el cuestionario planteado por Behar (2001) y se realizaron entrevistas semiestructuradas personales sobre los intervalos de confianza. Este trabajo se interesó básicamente en la interpretación del nivel de confianza asociado a los intervalos de confianza y en tratar de explicar las razones que podrían respaldar los tipos de concepciones que sobre este aspecto existen. A partir del razonamiento de los estudiantes, Yáñez y Behar (2009) plantean dos explicaciones a las interpretaciones equivocadas que hacen los estudiantes sobre el nivel de confianza, la cuales se mencionan a continuación:

- Una primera explicación se basa en los diferentes significados que asume el concepto de probabilidad en los intervalos generados a partir de la expresión

  $$P\left(\bar{X} - \boldsymbol{Z_{1-\alpha/2}}\, \boldsymbol{\sigma}/\sqrt{\boldsymbol{n}} < \boldsymbol{\mu} < \boldsymbol{\bar{X}} + \boldsymbol{Z_{1-\alpha/2}}\, \boldsymbol{\sigma}/\sqrt{\boldsymbol{n}}\right) = 1 - \alpha \quad \textbf{\textit{(i)}}$$

  Ya que con despejes adecuados se obtiene

  $$P\left(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{Z_{1-\alpha/2}}\, \boldsymbol{\sigma}/\sqrt{\boldsymbol{n}} < \boldsymbol{\bar{X}} < \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{Z_{1-\alpha/2}}\, \boldsymbol{\sigma}/\sqrt{\boldsymbol{n}}\right) = 1 - \alpha \quad \textbf{\textit{(ii)}}$$

  Permitiendo la obtención de sendos intervalos, no sólo para μ sino también para $\bar{X}$. Las ideas erróneas respecto al contenido de los intervalos de confianza e incluso del nivel de confianza pueden surgir de la interpretación que hacen los estudiantes de las representaciones ***i*** y ***ii***. A esta posible explicación hay que añadirle “las incomprensiones que puede generar un proceso basado en el comportamiento de muchas muestras cuando solo se cuenta con una sola” (Yáñez y Behar 2009, p.13). Luego esto puede ser una razón para que los estudiantes asuman el nivel de confianza como una medida de certeza lejana a una interpretación frecuencial.

- Una segunda explicación es el hecho de no asumir el nivel de confianza de un intervalo como una frecuencia relativa que podría estar evidenciando “una concepción sobre la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, en la que el valor de probabilidad asociada a un intervalo se interpreta como el porcentaje de los valores de la variable que caen en ese intervalo” (p. 11). Este hecho, añaden los autores, amerita ser estudiado a profundidad.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, Yáñez y Behar (2009) realizan una serie de consideraciones sobre la enseñanza y aprendizaje de los intervalos de confianza, que a continuación se describen:

- La forma en que se le presenta a los estudiantes el proceso algebraico de construcción de un intervalo de confianza con cierta probabilidad, $100(1-\alpha)\%$, puede generar malas interpretaciones. En este sentido se recomienda utilizar un enfoque frecuencial desde un comienzo y no limitarse simplemente a utilizarlo para interpretar el nivel de confianza.
- La necesidad de discutir con los estudiantes los pasos realizados para construir un intervalo de confianza y evitar así que sean los mismos estudiantes quienes tengan que elaborar sus propias justificaciones, en su mayoría erróneas y permitiendo así caer en malas interpretaciones.
- La simulación facilita la comprensión del efecto producido al variar el nivel de confianza y el tamaño de la muestra. Sin embargo, hay dificultad para interpretar los resultados obtenidos al realizar simulaciones.

Álvarez, Fernández y Andrade (2013) plantean como propuesta de enseñanza un taller con el objetivo de contrastar, cuestionar y posicionar una nueva significación de intervalo de confianza y el nivel de confianza asociado al proceso aleatorio que precede a su construcción. El taller fue diseñado en el marco de la línea en educación estadística de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) para ser trabajado con docentes de matemáticas en formación y consta de 5 partes.

Esta propuesta de enseñanza, en particular, está determinada por las diferentes interpretaciones del concepto de nivel de confianza que surjan de cada individuo en la medida que resuelve el siguiente problema:

> *Mundialmente se ha reconocido que aquellas personas que tienen un coeficiente intelectual (C.I.) igual o superior a 125 puntos, son superdotados. En el colegio "Los Pilos" en donde hay 1000 alumnos en los grados de sexto a once, se quiere realizar una prueba para determinar el puntaje del coeficiente intelectual representativo de estos cursos. Los costos de aplicar esta prueba son muy altos y el colegio no dispone de suficientes recursos para aplicarla a todos. (p. 286)*

La primera parte del taller (9 ítems) está dirigido a que el estudiante identifique la población y la muestra, en particular, los autores plantean la existencia de una población de estudio y de una población de datos, así como una muestra de estudio y una muestra de datos.

La segunda parte del taller (8 ítems) consta de dos secciones, la primera está dirigida a que el estudiante tome una muestra que a su consideración sea la más adecuada e identifique el parámetro a estimar y el estadístico, haciendo la respectiva diferencia entre ellos.

La tercera parte del taller (8 ítems, uno con 7 incisos) está dirigido a reflexionar con el estudiante la interpretación del nivel de confianza e Identificar la concepción a priori que tiene los estudiante en relación con el significado del nivel de confianza.

La cuarta parte del taller (5 ítems) está dirigida a posibilitar la interpretación frecuencial de los intervalos de confianza mediante la simulación manual.

La quinta y última parte del taller (5 ítems) está orientada a la simulación computacional (Excel) con la finalidad de contrastar lo trabajado en la parte 4 del taller, haciendo énfasis en la interpretación frecuencial de los intervalos de confianza. Álvarez, Fernández y Andrade (2013) consideran que su propuesta de enseñanza se enfoca en la interpretación de los intervalos de confianza, cosa que a su parecer no es frecuente encontrar en los libros de texto universitario, y que puede ser una explicación a los tipos de concepciones y dificultades reportadas.

Andrade, Fernández y Álvarez (2014) presentan los resultados de un estudio con futuros docentes de matemáticas con quienes se trabajó la propuesta de enseñanza de su autoría con el interés de superar las dificultades asociadas a la interpretación del nivel de confianza para un intervalo de confianza para la media poblacional. La propuesta de enseñanza es un taller que tiene como objetivo contrastar, cuestionar y posicionar una nueva significación del nivel de confianza. El taller comprende 5 etapas (Explicadas con brevedad en Álvarez et al., 2013).

El estudio se llevó a cabo con estudiantes universitarios que cursaban una materia de métodos estadísticos. Para esto se llevaron a cabo varias sesiones de clase consecutivas determinadas por la metodología propuesta en el diseño de la investigación (no se explicita) determinada por la constante socialización y reflexión del trabajo realizado en las sesiones de clase. Andrade y colaboradores (2014) centran su discusión en la tercera parte de la propuesta de enseñanza.

A partir del análisis realizado a las discusiones llevadas a cabo durante las sesiones, se observó que la interpretación inicial del nivel de confianza persistía, por lo cual Andrade y colaboradores plantean que esto puede deberse a la dificultad de los estudiantes para conceptualizar la noción de probabilidad y la diversidad de formas en que las probabilidades se pueden asignar.

Teniendo en cuenta la observación anterior, Andrade y colaboradores (2014) plantean las siguientes consideraciones sobre el proceso de enseñanza e interpretación de los intervalos de confianza:

- El estudio de la variación en la estadística es limitado ya que en las clases sólo se aborda la variabilidad de unas cuantas muestras y además la interpretación del nivel de confianza está ligado a un proceso basado en el comportamiento de muchas muestras cuando para su construcción solo se cuenta con una sola (ya planteada por Yáñez y Behar, 2009).
- Para familiarizar a los estudiantes con una interpretación cercana a una frecuencia relativa del nivel de confianza, los cursos básicos de estadística deben incluir actividades que permitan a los estudiantes percibir la variabilidad, "especialmente, la variación entre los valores asociados a estimadores generados a partir de diferentes muestras del mismo tamaño" (p. 4).

Para finalizar Andrade y colaboradores (2014) plantean la necesidad de relacionar la estimación por intervalos de confianza con las pruebas de hipótesis, permitiendo ver a los estudiantes la utilidad de los mismos en el campo de la estimación.

Como se observa, los estudios más recientes se enfocan en explicar las dificultades y tipos de concepciones relacionadas con el nivel de confianza de un intervalo de confianza para la media poblacional. Las explicaciones dadas hasta el momento varían pero propenden por el planteamiento de actividades de clase que conlleven a un mejor entendimiento de los intervalos de confianza. Es de resaltar que no se encontraron estudios dirigidos a explicar la lógica subyacente en las respuestas de los sujetos que los conducen a los errores reportados, así como tampoco se presentan las relaciones que pueden existir entre las concepciones sobre los intervalos de confianza y las incomprensiones de los conceptos que intervienen en su construcción.

Precisamente, el objetivo central de la investigación que se propone en este trabajo busca llenar el vacío descrito, intentando describir a partir del razonar con los estudiantes, las estructuras y mecanismos mentales necesarios para la adecuada comprensión de concepto de intervalo de confianza en profesores de matemáticas en formación y a su vez buscar las razones que puedan conducir a los errores detectados en las investigaciones referenciadas en términos de que no se logran las estructuras adecuadas porque no se desarrollan los mecanismos necesarios.

La descripción de estas estructuras y mecanismos mentales se considera una herramienta potente para el diseño de actividades de clase y por tanto útil para futuras investigaciones que propongan el diseño de modelos de clase con base en dicho análisis.

1.2 Investigaciones relacionadas con la Teoría APOE

A continuación se presentan algunas investigaciones en estadística en las cuales se utiliza como marco de trabajo la Teoría APOE, con el ánimo de destacar las posibilidades que encierra para cumplir con el objetivo de investigación que se propone en este estudio. Los términos propios de la teoría, de los cuales se hace uso en esta presentación, se describirán con detalle más adelante en el apartado dedicado a la Teoría APOE.

Mathews y Clark (2007) presentan los resultados de un estudio realizado en el seno del Grupo Research on Undergraduate Mathematics Education, RUMEC por sus siglas en inglés, que se encarga de estudiar la naturaleza y el desarrollo del conocimiento matemático en estudiantes universitarios. Estos resultados provienen del análisis de una entrevista clínica realizada a 8 estudiantes universitarios que habían acabado de aprobar su curso de estadística y que obtuvieron las calificaciones más altas.

La pregunta que originó este estudio fue: ¿Qué permanecerá en las mentes de nuestros estudiantes después de finalizar un curso? Y su objetivo fue determinar, de manera más precisa, las concepciones de media, desviación estándar y teorema central del límite en estudiantes universitarios exitosos en el curso de estadística. Para esto se utilizó la primer y tercer componente del ciclo de investigación propuesto por la Teoría APOE. Estas componentes son el análisis teórico y observación, análisis y verificación de datos, respectivamente.

Las entrevistas se centraron en torno a tres preguntas planteadas a cada estudiante.

1. ¿Qué se quiere decir con la palabra "media" en la estadística?

2. ¿Qué se entiende por "desviación estándar"?

3. ¿Cuál es el Teorema del Límite Central?

A partir de las respuestas y del razonar con los estudiantes, se evidenció una falta de entendimiento de los conceptos en estudio y de un apego a los procedimientos algebraicos sin entenderlos.

Las primeras conclusiones a las cuales llegaron los investigadores se presentan a continuación:

- Los ocho estudiantes calculan de manera correcta la media de un conjunto de datos, sin embargo cuando se discutieron algunos ejemplos específicos, se notó que muchos de los estudiantes confunden la media con la moda y la media poblacional con la media muestral.
- Los ocho estudiantes no tenía una concepción clara de la desviación estándar.
- Los ocho estudiantes no tenían un conocimiento práctico del teorema central del límite.

Las conclusiones anteriores llevaron a los investigadores a presentar un análisis en términos de los elementos teóricos planteados por la Teoría APOE sobre la media, la desviación estándar y el teorema central del límite.

Respecto a la media encontraron que:

- Ninguno de los estudiantes analizados se encontraba en una concepción acción ya que no necesitaban motivaciones externas para calcularla.
- Los ocho estudiantes se encontraban en una concepción proceso de la media ya que plantearon la necesidad de relacionarla con la desviación muestral, sin embargo, no se evidenció una concepción objeto de media.

Respecto a la desviación estándar encontraron que:

Dos de los ocho estudiantes se encontraban en una concepción acción de la desviación estándar, es decir, no identificaban la necesidad de calcularla y a su vez necesitaban orientación para poder hacerlo.

Los demás estudiantes mostraron una concepción objeto inadecuada del concepto de desviación estándar. Dos de los cinco estudiantes que habían desarrollado una concepción objeto inapropiada, creían erróneamente que la desviación estándar en un conjunto de datos indica la distancia que hay entre cada uno de ellos, los otros tres estudiantes creían que la desviación estándar es un dato individual y que no está relacionado con el conjunto de datos del cual fue calculada.

Los investigadores sugieren que estas concepciones erróneas son el resultado de un proceso de encapsulación inadecuado, ya que en ningún momento los estudiantes asumieron la desviación estándar como una medida de dispersión.

Respecto al teorema central del límite:

En primer lugar se plantea que el análisis se hará con base en las siguientes estructuras y mecanismos mentales necesarios para la adecuada comprensión de teorema central del límite:

> *Para entender el teorema del límite central hay que entender la diferencia entre una población y una muestra. Una muestra individual debe ser un objeto cognitivo en una colección de todas las muestras posibles. La media para cada muestra debe ser también un objeto, por lo que es necesario manejar el concepto de "Distribución". Antes de la recopilación de los datos de las entrevistas, se conjetura que la comprensión del teorema central del límite consistiría en coordinar de una manera muy precisa los dos objetos matemáticos de media poblacional y la media muestral con los dos objetos adicionales que son la desviación estándar de la población y desviación estándar de la muestra. (p. 9)*

A partir del análisis de las respuestas con base en esta descomposición genética, se llega a las siguientes conclusiones:

Los estudiantes no presentaron ninguna de las estructuras mentales establecidas por la Teoría APOE, ni siquiera la más elemental, pero no menos importante, que es la concepción acción. Esto puede deberse a que el estudiante debe coordinar de una manera muy precisa los objetos matemáticos de población, muestra, media, desviación estándar y distribución para tener una concepción objeto del teorema central del límite.

Mathews y Clark (2007), teniendo en cuenta la Teoría APOE, consideran que estos estudiantes continuarán teniendo dificultades cognitivas con todos los temas de estadística inferencial hasta el momento en que se desarrollen las concepciones objeto adecuadas de media y desviación estándar. Sólo después de desarrollar estas concepciones objeto, van a tener lo esencial y necesario para la construcción de un esquema viable para el teorema central del límite. Para finalizar, se advierte que los problemas y situaciones planteadas en los textos utilizados por los estudiantes y profesores parece no tener el efecto deseado para el desarrollo cognitivo relativo a los conceptos estadísticos.

Mathews y Clark (2007) no definen cuándo una concepción objeto es inadecuada o adecuada. Suponemos que hacen referencia a las interpretaciones erradas que hacen los estudiantes sobre los conceptos estadísticos estudiados.

Clark, Kraut, Mathews y Wimbish (2007) presentan los resultados de un estudio cuya finalidad fue validar y agregar un conjunto de conocimientos sobre el desarrollo de conocimientos estadísticos en los estudiantes universitarios basándose en la descomposición genética planteada por Mathews y Clark (2007). Este estudio contó con la participación de 9 estudiantes universitarios de posgrado de tres universidades diferentes.

Los resultados se presentan de acuerdo a los objetos matemáticos en estudio que son la media, la desviación estándar y el teorema central del límite a la luz de la Teoría APOE.

En cuanto a la media, 3 de los 9 estudiantes se encuentran en una concepción proceso de la media, sin embargo, ir más allá de esta concepción fue difícil para estos estudiantes. Los otros 6 presentan una concepción objeto débil de la media.

Respecto a la desviación estándar, 3 de los 9 estudiantes se limitan a una concepción acción de la desviación estándar. De los 6 restantes, 4 presentan una concepción objeto débil. Los otros dos estudiantes evidenciaron una concepción objeto exitosa de la desviación estándar, ya que la reconocen como una medida de dispersión, y hacen conclusiones de un conjunto de datos a partir de la desviación estándar y la media. Clark y colaboradores (2007) resaltan que estos estudiantes son de posgrado y tienen buenos razonamientos matemáticos.

En lo que concierne al teorema central de límite, 3 de los 9 estudiantes no recordaban nada sobre el teorema central del límite, de hecho insistieron en que ese tema no se había visto en el curso. Otros tres dijeron que sus instructores les habían hablado del tema, les habían señalado la importancia del mismo pero no pudieron dar ninguna descripción del teorema. Esto se puede deber a que los estudiantes no tienen claridad en varios conceptos necesarios para que haya una comprensión del teorema central del límite, como son: distribución, media, desviación estándar, población, tamaño de la muestra y muestreo.

Sólo uno de los 9 estudiantes mostró claridad respecto al teorema central del límite. Se trataba de un estudiante talentoso, que durante la entrevista mostró fuertes concepciones objeto de la media, de distribución normal, de desviación estándar, de toma de muestras y de distribución. Clark y colaboradores (2007) no presentan evidencias de dicha concepción objeto.

Reuniendo los resultados de los dos estudios mencionados se llega a las siguientes conclusiones:

- Los 17 estudiantes tienen una concepción proceso de la media. Sólo 2 de los 17 mostraron una concepción objeto exitosa de la media.

- Más de un tercio de los estudiantes en ambos estudios no habían progresado más allá de concepciones de acción de desviación estándar.
- Sólo dos de los 17 estudiantes alcanzaron una concepción objeto exitosa de desviación estándar.
- Respeto al teorema central del límite, solo un estudiante presentó una concepción objeto, los demás no evocaron una definición útil, de hecho ni recordaron el tema.

En general se observó que los estudiantes ven la estadística como el análisis de una colección de datos, haciendo referencia a un análisis descriptivo, olvidando la naturaleza inferencial de la misma. A pesar de que estos estudiantes tuvieron éxito en la estimación de intervalos de confianza y la realización de prueba de hipótesis. Al parecer desconectaron estos procesos del análisis descriptivo.

Estas dos investigaciones realizadas en el marco de la Teoría APOE dan muestra de la necesidad de construir estructuras y mecanismos mentales para llegar a un buen entendimiento de un concepto matemático, en el caso particular del teorema central del límite se plantea la necesidad de relacionar de manera adecuada algunos conceptos que subyacen y son importantes para su comprensión, hecho que no se evidenció en los estudiantes que fueron parte del estudio.

En cuanto a la media pareciera que es un concepto que presenta dificultad para los estudiantes ya que la mayoría de los que participaron en el estudio presentaron una concepción proceso, es decir, pueden describir en términos generales la manera de calcularla y a su vez reflexionan sobre el resultado captando la idea de que representa una característica de un conjunto de datos.

El concepto de desviación estándar presentó mayor dificultad para los estudiantes, desde nuestro punto de vista debido a la falta de una concepción objeto de media, ya que este concepto es fundamental para su cálculo, resaltando una vez más la necesidad de concepciones previas.

Las investigaciones presentadas en este capítulo son de gran relevancia para lograr el objetivo propuesto en este estudio. En la mayoría de las investigaciones se sugiere que aparte de la instrucción y cálculos manuales, se debe hacer uso de las herramientas computacionales para estos cálculos y llevar más bien a los estudiantes a la comprensión y análisis de los resultados que estos nos presentan, donde se puede analizar cada uno de los conceptos que intervienen. Sin esa comprensión, los estudiantes, se limitarán a un enfoque instrumental de técnicas inferenciales tales como pruebas de hipótesis y estimación con intervalos de confianza, sin una comprensión de su utilidad y de cómo se ven afectados por cada uno de los conceptos matemáticos que intervienen en su construcción.

El siguiente capítulo se dedica a la presentación del marco teórico que sustenta este estudio.

2. MARCO DE TRABAJO

Dubinsky (2000) establece que la forma como se produce la construcción mental de un concepto matemático por parte de un individuo puede ser “observada” desde un marco teórico específico y a través de él dar con base en ello una explicación de aquello que los individuos pueden haber aprendido y plantear las construcciones mentales que utiliza para la comprensión de un concepto. Puesto que esta investigación se centra en comprender la manera como los profesores de matemáticas en formación construyen el concepto de intervalo de confianza y así describir las estructuras y mecanismos mentales necesarias para la construcción e interpretación de dicho concepto, este estudio se fundamenta en la Teoría APOE la cual proporciona una estructura para la conceptualización y diseño de la investigación que a continuación se describe.

2.1 Teoría APOE

A partir de la perspectiva teórica del constructivismo, específicamente en el concepto de abstracción reflexiva desarrollado por Piaget, Dubinsky propuso la Teoría APOE para describir las construcciones mentales utilizadas en el aprendizaje de conceptos matemáticos basándose en las estructuras (acciones, procesos, objetos y esquemas) que cada individuo desarrolla sobre los conceptos matemáticos que aprende y que son resultado de la aplicación de mecanismos mentales (abstracciones reflexivas) llamados interiorización, coordinación, encapsulación y des-encapsulación (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, 2014). La relación entre las estructuras y mecanismo mentales se puede observar en la Figura 1. Dubinsky desarrolla esta teoría considerando que:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones (Dubinsky, 1996, p. 32-33).

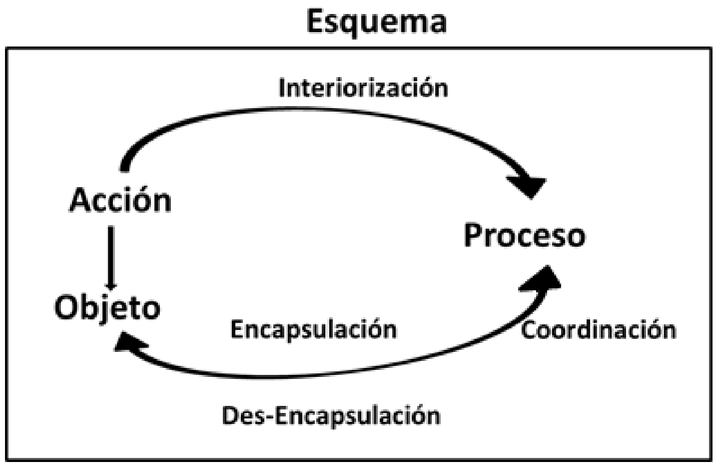


Figura 1: Construcciones mentales que intervienen en el proceso de comprensión de un concepto matemático.
(Tomado de Arnon et al., 2014, p. 10)

Con esto en mente, la construcción de un concepto matemático inicia con la manipulación, de manera física o mental, de objetos o estructuras construidas previamente por el sujeto. Esta manipulación recibe el nombre de acción y consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a motivaciones externas. Cuando el individuo reflexiona sobre estas acciones, que son de tipo dinámico, pueden interiorizarse en un proceso y así el individuo puede pensar en un concepto en términos generales sin necesidad de hacer cálculos explícitos o de recibir motivaciones externas. Una vez se da esta interiorización el individuo pasa a formar un proceso el cual es de tipo dinámico; cuando el individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso como un todo y realiza transformaciones (acciones) que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces ha encapsulado este proceso en un objeto. Un objeto se puede des-encapsular para volver al proceso que le dio origen y de esta manera coordinarlo con otro proceso, para obtener un único proceso que posteriormente será encapsulado. Luego un sujeto puede llegar a la construcción de un proceso de dos formas, ya sea mediante la interiorización de acciones o a partir de la coordinación de dos o más procesos. Un objeto cognitivo es una estructura estática, ya que es considerado como un todo y se pueden aplicar nuevas acciones sobre él (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

A continuación se presenta una descripción más detallada de estas estructuras y mecanismos mentales presentes en el proceso de comprensión de un concepto matemático, en específico para la media de un conjunto de datos.

Acción: La acción es una de las estructuras más elementales, sin embargo, es necesaria para construir la estructura siguiente (Proceso) y ésta, a la vez, para construir el objeto. Todo concepto matemático inicia con una transformación, ya sea mental o física, realizada por el individuo de forma explícita, en otras palabras, una acción es la transformación de un objeto percibida por el individuo como externa. (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996). Por ejemplo, cuando un individuo para calcular la media de un conjunto de datos se basa sólo en las acciones previstas por la fórmula, es decir, suma todos los datos y divide en el total de datos, se dice que este se limita a una concepción acción (Mathews y Clark, 2007). Dicho de otra manera, el individuo no es capaz de realizar este cálculo si no tiene la fórmula, luego su conocimiento está limitado al acceso que pueda tener de dicha fórmula.

Proceso: Cuando un individuo repite una acción reflexionando sobre ella y no es dirigida por estímulos externos, sino que es una construcción interna, entonces se dice que la acción ha sido interiorizada en un proceso. En el proceso el individuo puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso puede invertirlos, es decir, tiene más control de la transformación (Asiala et al., 1996). Retomando el ejemplo planteado por Mathews y Clark (2007), la acción de calcular la media de un conjunto de datos se interioriza en un proceso cuando el individuo puede describir en términos generales la manera de calcularla y a su vez reflexiona sobre el resultado captando la idea de que la media representa una característica de un conjunto de datos. En este caso se dice que el individuo posee una concepción proceso de media muestral.

El *mecanismo de interiorización*, es la construcción mental de un proceso que tiene que ver con una serie de acciones sobre objetos cognitivos y está determinada por la constante reflexión sobre las acciones que se realizan (Asiala et al., 1996).

En particular, un proceso es una estructura mental que lleva a cabo las mismas operaciones que las acciones, pero totalmente en la mente del sujeto, permitiendo así que el individuo pueda imaginar la realización de la transformación sin tener que ejecutar cada paso de forma explícita (Dubinsky 1991). Como se mencionó anteriormente, un proceso puede ser resultado de la interiorización de una acción o de la coordinación de varios procesos.

Una vez construidos los procesos estos pueden ser relacionados a partir del *mecanismo de coordinación*, el cual consiste en el acto cognitivo de coger dos o más procesos y usarlos para construir un nuevo proceso, es decir, buscar nexos que permitan conectarlos (Arnon et al., 2014). La coordinación se da por la necesidad de encontrar elementos comunes en los procesos relacionados, de tal manera que permita al individuo construir un nuevo proceso que posteriormente puede ser encapsulado en un objeto cognitivo.

Objeto: Cuando un individuo da cuenta de las transformaciones realizadas a un determinado proceso y es capaz de visualizar el proceso como un todo, sobre el cual se pueden aplicar acciones, entonces se dice que el proceso ha sido encapsulado y transformado en un objeto cognitivo. Cuando el individuo piensa en la media como una de las medidas de tendencia central que da información sobre un conjunto de datos y reflexiona sobre sus propiedades, se dice que el individuo posee una concepción objeto (Mathews y Clark 2007).

Una vez construidos los procesos y objetos, estos pueden ser relacionados de varias maneras, una de estas es mediante el *mecanismo de des-encapsulación* que surge de la necesidad de volver al proceso que dio origen al objeto cognitivo con la finalidad de conocer las características de dicho proceso, la otra manera es con el mecanismo de coordinación que es indispensable en la construcción de algunos objetos. Dos objetos se pueden des-encapsular, sus procesos ser coordinados, y en el proceso de encapsulación coordinada formar un nuevo objeto (Arnon et al., 2014).

Esquema: La interacción de estas estructuras y mecanismos mentales dan lugar a un esquema, el cual está determinado por la capacidad del individuo de reflexionar sobre su utilidad para resolver un problema matemático particular. Según Dubinsky (1991), un esquema es caracterizado por su reconstrucción continua y está determinado por la actividad matemática del sujeto. Cuando el individuo asume la media como una de las medidas de tendencia central, que por sí sola no permite describir el conjunto de datos que representa, reconociendo la necesidad de otros estadísticos asociados, se dice que el individuo posee un esquema de media (Mathews y Clark 2007), que una vez tematizado, pasa a ser un nuevo objeto cognitivo (Arnon et al., 2014).

Es importante que los individuos lleguen a la concepción esquema, ya que es señal de que el individuo se ha apropiado de un conocimiento matemático y que tiene la habilidad de decidir si es apropiado utilizarlo para resolver situaciones matemáticas específicas. El desarrollo de un esquema es un proceso dinámico y cambiante para el que se consideran tres niveles, Intra, Inter y Trans, el paso de un nivel al siguiente no se caracteriza por un aumento en los conocimientos con respecto al nivel anterior, sino por una reinterpretación de los conocimientos matemáticos que se tienen.

Arnon y colaboradores (2014) plantean que el *nivel Intra* está determinado por la capacidad del individuo de centrarse en aspectos individuales aislados de ciertas acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. En este nivel el individuo no ha construido ninguna relación entre ellos. El *nivel Inter* está determinado por la construcción de relaciones entre acciones, procesos y objetos. En este nivel se da inicio a la agrupación de información de naturaleza similar. El nivel *Trans* está determinado por la capacidad del individuo de construir una estructura subyacente completa en la que las relaciones descubiertas en el nivel inter son comprendidas dando coherencia al esquema; en este nivel el individuo ha establecido relaciones adecuadas con otros esquemas de naturaleza similar. Entonces la construcción y/o evolución de un nuevo esquema se determina por la capacidad del individuo para establecer relaciones entre todos los elementos que lo componen para luego aplicarlo en la solución de situaciones que se plantean fuera del contexto que le da origen.

A pesar de que la descripción de estas estructuras mentales (Acción, proceso, Objeto y Esquema) se da de forma lineal no significa que eso suceda cuando un individuo aprende un concepto matemático (Asiala et al., 1996).

Estos mecanismos y estructuras mentales señalan que la Teoría APOE es principalmente un modelo para describir cómo se pueden aprender conceptos matemáticos, y a la vez permite explicar cómo los individuos mentalmente construyen su comprensión de los conceptos matemáticos, luego no se ocupa sólo en identificar dificultades, a su vez, señala cómo superarlas e intenta explicar el origen de las mismas (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

2.1.1 Paradigma de investigación planteado por la Teoría APOE

La Teoría APOE cuenta con un conjunto de acuerdos explícitos sobre las cuestiones presentes en el momento de hacer una investigación. En particular, plantea tres componentes (ver Figura 2), el Análisis Teórico, el Diseño e Implementación de Enseñanza y la Observación, Análisis y Verificación de datos.

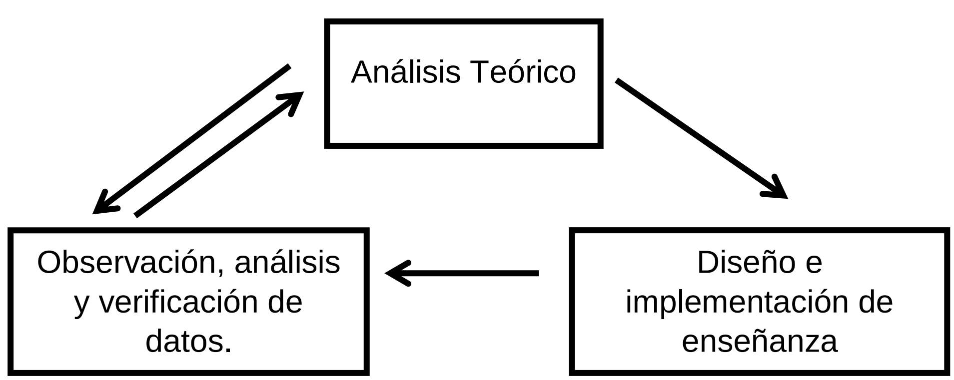


Figura 2: Ciclo de investigación planteado por la Teoría APOE
Tomado de Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, p. 96

La interacción entre estos componentes es llamada ciclo de investigación. Teniendo en mente esto, la investigación se inicia con un análisis teórico del concepto matemático en estudio que da lugar a una descomposición genética preliminar, la cual es fundamento para el diseño e implementación de un instrumento, la ejecución de esta componente da lugar a la recolección de datos e información que una vez analizada, a la luz de la teoría, permite validar la descomposición genética preliminar. A continuación se presenta una descripción detallada de estos componentes.

Análisis Teórico**:** El análisis teórico permite hacer un estudio a profundidad pues comprende un análisis epistemológico del concepto matemático en estudio, su historia, un análisis de libros, una revisión detallada de los resultados de investigaciones previas y la experiencia del investigador o investigadores. Asiala y colaboradores (1996) consideran que esta componente se debe guiar por las siguientes preguntas, *¿Qué significa comprender un concepto matemático? Y ¿Cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo?* ya que permiten al investigador reflexionar constantemente sobre el concepto matemático en estudio y la forma como los estudiantes lo perciben.

Este análisis teórico permite al investigador plantear una descomposición genética preliminar, es decir, permite hacer una descripción de las estructuras y mecanismos mentales específicos que se espera un individuo desarrolle para comprender un concepto matemático. Luego la descomposición genética inicial se construye haciendo énfasis en aquellas cosas que el investigador sabe o supone que son difíciles de construir por los individuos y que busca darles una explicación en términos de que no se logran las estructuras adecuadas porque no están los mecanismos apropiados.

Arnon y colaboradores (2014) definen la *descomposición genética* como un modelo cognitivo viable para la construcción de un concepto matemático; dicho modelo es un conjunto estructurado de constructos mentales, los cuales describen cómo un concepto o noción matemática puede ser desarrollado en la mente de un individuo. Este modelo es sólo un acercamiento de lo que realmente está pasando en la mente del individuo, luego para un mismo concepto pueden coexistir diferentes descomposiciones genéticas.

Diseño e Implementación de la Instrucción: La descomposición genética preliminar construida en el componente anterior es utilizada para el diseño de uno o más instrumentos con el objetivo de promover las construcciones y mecanismos mentales sugeridos en el análisis teórico.

El desarrollo de este componente requiere de tiempo y de varios investigadores, ya que para su desarrollo se establece una estrategia pedagógica llamada por sus siglas en inglés ACE: Actividades (Activities), Discusión en clase (Classroom Discussion) y Ejercicios (Exercises) que se explican a continuación.

Las *actividades* permiten que los individuos trabajen cooperativamente los instrumentos diseñados para ayudarles a construir las estructuras mentales planteadas en la descomposición genética preliminar. En esta etapa se puede hacer uso de herramientas computacionales, ya que promueven en el individuo la abstracción reflexiva (Arnon et al., 2014). La *discusión en clase* permite a los individuos plantear y argumentar sus resultados, dándoles la oportunidad de reflexionar sobre su trabajo; el docente es el encargado de unificar lo planteado por los individuos, para evitar interpretaciones erradas. Por último los individuos abordarán problemas (Ejercicios) diseñados para reforzar las actividades y la discusión en clase y a su vez ayudar en la construcción de las estructuras y mecanismos mentales específicos que se propusieron en la descomposición genética preliminar que busca desarrollar una mejor comprensión del concepto matemático en estudio.

Esta estrategia pedagógica permite a los investigadores validar la primera componente del ciclo de investigación y a su vez es una espacio para la recolección de datos que da lugar a la tercera componente (Arnon et al., 2014).

Observación, Análisis y Verificación de Datos: Esta componente tiene dos objetivos, el primero es medir lo que los individuos aprendieron sobre el concepto matemático en estudio y el segundo determinar si los individuos alcanzaron las estructuras y mecanismos mentales planteados en la descomposición genética preliminar, propiciando la oportunidad de validar la primera componente del ciclo (Dubinsky 1991).

La tercera componente también implica el diseño de instrumentos que permiten la recolección de información para su posterior análisis. Este diseño depende de la descomposición genética planteada a partir del análisis teórico y de los objetivos de cada estudio. Los instrumentos diseñados pueden ser cuestionarios, evaluaciones, entrevistas didácticas. A partir del análisis teórico, del análisis a priori de los instrumentos, de las entrevistas y del seguimiento que se hace a lo que dice y escribe el individuo, se compara lo que se obtiene de los sujetos con lo planteado en la descomposición genética preliminar y se trata de detectar lo que no está pasando. Es decir, qué es lo que el estudiante está dejando de hacer (o no tiene claro), y a su vez se pueden detectar elementos que no se tuvieron en cuenta en la descomposición genética preliminar.

Las entrevistas didácticas son definidas por Roa-Fuentes y Oktaç (2012) como aquellas entrevistas que buscan motivar a los individuos a la reflexión y a la construcción de estructuras que les sirvan de guía al enfrentarse a las situaciones o preguntas planteadas. Las entrevistas didácticas se caracterizan por su interés en generar reflexiones en los individuos sobre aspectos que normalmente no se perciben en la construcción de los conceptos matemáticos.

Al finalizar el ciclo de investigación propuesto por la Teoría APOE, se espera llegar a una descomposición genética refinada que debe reflejar las construcciones mentales identificadas en el análisis teórico. Por lo tanto, esta descomposición genética es una contribución importante no sólo a la investigación en educación matemática sino en términos pedagógicos, ya que se convierte en una potente herramienta que impulsa el diseño de actividades de enseñanza que contribuyen a la construcción adecuada del concepto estudiado (Arnon et al., 2014).

En nuestra investigación se adoptan dos componentes del ciclo de investigación propuesto por la Teoría APOE, el *Análisis teórico* (Primer Componente) y la Observación, análisis y verificación de datos (Tercer componente) que llamaremos en adelante *Análisis y discusión de los resultados*.

2.2 Investigaciones realizadas en el marco de la Teoría APOE

Arnon y colaboradores (2014) en el capítulo 12 presentan de manera sucinta 120 publicaciones sobre investigaciones en torno a diferentes conceptos matemáticos que han sido de gran impacto para la educación matemática. Estos trabajos se han realizado en un periodo de 25 años alrededor del mundo (Para más detalle sobre estos estudios, consultar Arnon et al., 2014).

De esas 120 publicaciones ninguna ha abordado conceptos estadísticos, sin embargo (Arnon et al., 2014) menciona los resultados de dos estudios no publicados realizados por Mathews y Clark (2007) y Clark y colaboradores (2007) en torno a la media, la desviación estándar y el teorema central del límite. Estos dos estudios fueron comentados en los antecedentes y son de gran relevancia para este trabajo.

En el siguiente capítulo se describe con detalle la metodología utilizada en esta investigación.

3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación se presenta la metodología que sustenta esta investigación, la cual es básicamente cualitativa, sin embargo, se hace uso de algunos elementos cuantitativos asociados a las respuestas correctas e incorrectas del cuestionario.

Para dar inicio con la descripción de la metodología utilizada, se presenta, en primer lugar, una descripción de la población de estudio y el porqué de su elección. En segundo lugar, se plantean los aspectos a tener en cuenta en el análisis teórico y en el análisis y discusión de los resultados permitiendo al lector identificar la relación que guarda la metodología de este estudio con el paradigma de investigación planteado por la Teoría APOE.

3.1 Descripción de la población de estudio

La población de interés en esta investigación son los profesores de matemáticas en formación, más específicamente, los estudiantes de las carreras de Matemática y Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, matriculados en un curso de didáctica de la probabilidad y la estadística durante el segundo semestre del año 2013 y que previamente cursaron y aprobaron dos cursos de Estadística Básica.

En el estudio participaron 15 estudiantes, de los cuales 9 son estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y los demás, 6, estudiantes de Matemáticas. El tema de intervalos de confianza lo abordaron en el curso de Estadística básica II aproximadamente 4 semestres antes de iniciada esta investigación.

El interés de trabajar con esta población proviene del deseo de tratar con futuros maestros cuya comprensión de los conceptos estadísticos se va a reflejar durante mucho tiempo en su labor docente afectando a una enorme cantidad de estudiantes (Behar 2001). Los nombres de los estudiantes que participaron en esta investigación han sido cambiados para preservar su identidad.

3.2 Metodología de la investigación

Como bien se mencionó en el capítulo anterior, la Teoría APOE cuenta con un conjunto de acuerdos explícitos sobre las cuestiones presentes en el momento de realizar una investigación. En particular, para este estudio se consideraron la primera componente, A*nálisis Teórico*, y la tercera componente *Análisis y discusión de los resultados* (ver Figura 3. Componentes utilizados en el presente estudio.) con la finalidad de identificar las estructuras y mecanismos mentales presentes en la construcción del concepto de intervalo de confianza en los profesores de matemáticas en formación que son parte de este estudio y a su vez plantear un modelo cognitivo viable para la construcción e interpretación de un intervalo de confianza para la media poblacional.

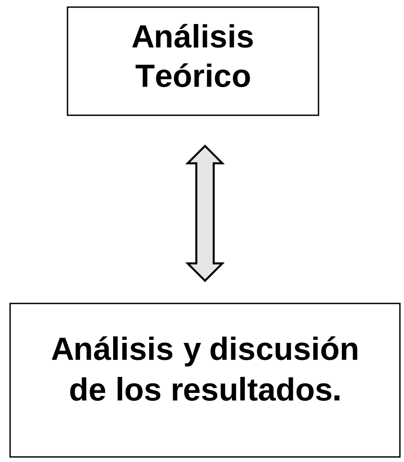


Figura 3. Componentes utilizados en el presente estudio.
Tomado con adaptaciones de Arnon et al., 2014. p. 10

La investigación se inicia con un análisis teórico del concepto de intervalo de confianza que da lugar a una descomposición genética hipotética preliminar, la cual es fundamento para el diseño e implementación de un cuestionario. Dado que en esta investigación no se aborda la segunda componente (instrucción) se asumió la descomposición genética como base para el diseño e implementación de una entrevista didáctica que permitió recolectar información para su posterior análisis y discusión de resultados. Este análisis que se realiza a la luz de la teoría permite refinar la descomposición genética preliminar. A continuación se presenta una descripción detallada de estas componentes.

3.2.1 Análisis teórico del concepto de intervalo de confianza

Para el análisis teórico del concepto de intervalo de confianza se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

i. Una revisión de las investigaciones de corte didáctico realizadas en torno a los intervalos de confianza.
ii. Análisis de los textos utilizados por los estudiantes que son parte del estudio.
iii. Análisis a priori de la construcción matemática de un intervalo de confianza para la media poblacional.

iv. Diseño, aplicación y análisis de un cuestionario para identificar las concepciones que tienen los estudiantes que son parte del estudio.

El primer aspecto es abordado en el capítulo de los antecedentes. El segundo y tercer aspecto son descritos con detalle en el capítulo dedicado al análisis teórico.

El diseño del cuestionario se presenta a continuación.

3.2.1.1 Diseño y aplicación del cuestionario

Para el diseño del cuestionario se tuvo en cuenta los resultados de las investigaciones de corte didáctico alrededor de los intervalos de confianza que son parte de los antecedentes y a su vez el cuestionario planteado por Behar (2001) y validado por Olivo (2008).

El cuestionario está conformado por ocho ítems, los cuales fueron validados mediante una prueba piloto que fue aplicada a un grupo de estudiantes que ya habían visto el tema de intervalos de confianza, esta prueba piloto tuvo como objetivo validar cada ítem para así evitar posibles ambigüedades.

El objetivo del cuestionario final es identificar los tipos de concepciones y dificultades que tienen los individuos que son parte del estudio alrededor de los intervalos de confianza y sus propiedades.

A continuación se presenta en detalle el cuestionario utilizado explicando las razones que motivaron cada uno de los ítems propuestos.

Ítem 1. Un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (μ) es:

a. El intervalo que contiene el 45% de los valores posibles de la media muestral ($\bar{x}$). F__ V__
b. Un intervalo más ancho que el intervalo de confianza del 95%. F__ V__
c. Un intervalo de valores calculado a partir de los datos de la muestra. En el 45% de las muestras de una población, el intervalo calculado contiene a la media de la población. F__ V__
d. Dos veces más ancho que el intervalo de confianza del 90%. F__ V__

Este ítem fue tomado y adaptado de Olivo (2008) y pretende conocer la interpretación de los estudiantes sobre un intervalo de confianza y los valores que están contenidos en él. La opción correcta es la *c.* que da una interpretación adecuada para un intervalo con un 45% de confianza.

Con la opción *a.* se quiere observar si los profesores en formación asumen que un intervalo de confianza contiene los posibles valores del parámetro que se desea estimar, en este caso la media poblacional, y no los posibles valores de la media muestral.

Con la opción *b.* y *d.* se pretende observar si los profesores asocian de manera adecuada el nivel de confianza con el tamaño de un intervalo de confianza para la media poblacional.

Ítem 2. Si se aumenta el tamaño muestral, conservando los demás datos constantes, el intervalo de confianza se hace más ancho. F__ V__

Este ítem es tomado y adaptado de Behar (2001) y su objetivo principal radica en analizar los conocimientos adquiridos por los profesores en formación sobre los elementos que intervienen en la estimación de un intervalo de confianza, en particular el tamaño muestral y su efecto en el ancho del intervalo. La respuesta a esta afirmación es falsa, ya que en la medida que el tamaño muestral aumenta, la desviación estándar asociada a la variable aleatoria $\bar{x}$ se hace más pequeña y por ende el error de estimación se hace más pequeño, lo cual conlleva a un intervalo más angosto.

Ítem 3. Si se aumenta el nivel de confianza, manteniendo los demás datos constantes, el intervalo de confianza se vuelve más angosto. F__ V__

Este ítem es tomado y adaptado de Behar (2001) y pretende observar las concepciones de los profesores en formación sobre el nivel de confianza y su efecto en el tamaño del intervalo. La respuesta a esta afirmación es falsa dado que entre más grande sea el nivel de confianza, más ancho se hace el intervalo.

Ítem 4. Si la desviación estándar de la población aumenta, el intervalo de confianza disminuye en la anchura. F__ V__

Este ítem es tomado de Behar (2001) y su propósito es conocer lo que piensan los profesores en formación sobre el efecto de la desviación estándar poblacional sobre el tamaño del intervalo. La respuesta a esta afirmación es falsa, ya que un aumento en la desviación estándar poblacional implica un aumento en el acho del intervalo.

Ítem 5. Asumiendo un nivel de confianza del 95%:

a. Si se toman muchas muestras y con cada una se construye el intervalo respectivo, la media muestral caerá, aproximadamente, en el 95% de los intervalos construidos. F__ V__
b. La probabilidad de que la media muestral caiga dentro de un intervalo de confianza calculado de una muestra específica es 0.95. F__ V__

c. Si se toman muchas muestras de igual tamaño, aproximadamente el 95% de los intervalos de confianza calculados contendrían a la media poblacional. F__ V__

Este ítem es tomado y adaptado de Olivo (2008) con el propósito de observar lo que piensan los profesores en formación sobre el nivel de confianza y su significado. La opción correcta es la *c.* ya que da la interpretación correcta del nivel de confianza al asumirlo como un mecanismo aleatorio que produce intervalos a partir de muestras aleatorias. Las opciones *a.* y *b.* son distractores, ya que la media muestral siempre está contenida en el intervalo de confianza para la media poblacional, pues es su centro.

Ítem 6. Si el tamaño de la muestra es muy pequeño, no se puede construir un intervalo de confianza del 99% de confianza. F__ V__

Este ítem es tomado de Behar (2001) y tiene como propósito conocer la claridad que tienen los profesores en formación sobre el tamaño muestral necesario para la estimación de un intervalo de confianza y las implicaciones del teorema central del límite. Sin embargo no se trata de si se puede o no construir un intervalo de confianza, se trata de la utilidad del mismo para estimar un parámetro poblacional.

Ítem 7. Si aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional. F__ V__

Este ítem y el siguiente fueron propuestos por el director de este trabajo y pretende conocer lo que piensan los docentes en formación sobre la precisión de un intervalo de confianza y su relación con el tamaño muestral. En otros estudios se ha indagado sobre el tamaño muestral y su efecto en el ancho del intervalo, sin embargo, son pocos los estudios donde se indague por el tamaño muestral y su efecto en la precisión de la estimación.

La afirmación es verdadera, ya que la precisión de un intervalo está asociada al tamaño del mismo, entre más pequeño sea el intervalo más precisa es la estimación. Recordemos que en la medida que se aumenta el tamaño muestral, el ancho del intervalo disminuye.

Ítem 8. Si aumenta el nivel de confianza, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional. F__ V__

El objetivo de este ítem es conocer lo que piensan los docentes en formación sobre la precisión de un intervalo de confianza y su relación con el nivel de confianza. Los estudios encontrados hasta el momento centran su atención en el significado que tienen los individuos sobre el nivel de confianza y su efecto en el tamaño del intervalo, sin embargo no se han encontrado estudios que indaguen explícitamente por la relación entre el nivel de confianza y la precisión de la estimación.

Esta afirmación es falsa, ya que al aumentar el nivel de confianza el ancho del intervalo aumenta y, por lo tanto, la precisión disminuye.

El cuestionario fue validado a partir de una prueba piloto aplicada a 17 estudiantes con el objetivo de evitar ambigüedades y malas interpretaciones. Una vez validado y discutido el cuestionario con un grupo de investigadores se procedió a aplicar el cuestionario a 15 profesores de matemáticas en formación que ya habían visto el tema de intervalos de confianza, la aplicación tuvo una duración de una hora.

El respectivo análisis del cuestionario se presenta en el capítulo dedicado al análisis y discusión de resultados.

El objetivo principal de este análisis teórico fue el planteamiento de una descomposición genética preliminar hipotética que es base para el diseño e implementación de la entrevista de corte didáctico realizada en la tercera componente que a continuación se detalla.

3.2.2 Análisis y Discusión de resultados

Esta componente tiene dos objetivos, el primero es identificar las estructuras y mecanismos mentales que los profesores de matemáticas en formación que participan en el estudio construyeron sobre los intervalos de confianza, y el segundo determinar si los individuos alcanzaron las estructuras y mecanismos mentales planteados en la descomposición genética preliminar planteada a partir del análisis teórico. Para dar cumplimiento a estos objetivos se diseñó y aplicó una entrevista didáctica, la cual es presentada a continuación.

3.2.2.1 Diseño y realización de la entrevista

Teniendo en cuenta que la finalidad de la entrevista didáctica es motivar la reflexión de los estudiantes sobre los intervalos de confianza y su utilidad en el campo de la inferencia estadística, se diseñó una entrevista base con 3 preguntas básicas, que a continuación se presentan explicando las razones que las motivaron.

Pregunta 1. ¿Qué es un intervalo de confianza?

Esta pregunta se plantea de manera abierta. Tiene la intención de detectar qué entiende el estudiante por intervalo de confianza antes de intentar construir un intervalo de confianza en ejercicios y/o ejemplos concretos.

Con esta pregunta se espera que los estudiantes asuman que un intervalo de confianza es un rango de valores, que con cierto nivel de confianza, contiene al parámetro que se desea estimar.

Pregunta 2. ¿Qué motiva la construcción de un intervalo de confianza?

Con esta pregunta abierta se busca identificar si los estudiantes comprenden la necesidad de construir un intervalo de confianza o si su construcción se debe sólo a motivaciones externas.

En este caso se espera que los estudiantes manifiesten que los intervalos de confianza son utilizados para estimar determinada característica de una población a partir de la información suministrada por una muestra aleatoria tomada de la misma. En nuestro caso, la característica de interés es la media poblacional μ.

Pregunta 3. ¿Qué información requiere para construir un intervalo de confianza de la media poblacional?

Con esta pregunta abierta se busca indagar sobre la necesidad (utilidad) de relacionar los conceptos estadísticos que intervienen tanto de forma directa como indirecta en la construcción de un intervalo de confianza. A la vez se pretende observar dos cosas. Primero, averiguar si el estudiante ha interiorizado el concepto de intervalo de confianza (concepción proceso) o bien lo ha encapsulado (concepción objeto), así como las estrategias que utiliza para construir un intervalo de confianza y por tanto la comprensión de dicho concepto, lo cual nos dará información acerca de las dificultades que se puedan presentar. Segundo, identificar si el estudiante no recuerda la expresión algebraica y recurre a sus concepciones construidas alrededor de los intervalos de confianza o si la recuerda y se limita a expresarla de forma escrita sin reflexionar sobre ella.

La entrevista fue realizada con 4 de los 15 estudiantes que respondieron el cuestionario. Estos 4 estudiantes fueron elegidos teniendo en cuenta su argumentación en cada ítem. La duración de cada entrevista tuvo un tiempo aproximado de 2 horas. La entrevista inició con la primera pregunta, las demás se realizaron en la medida que el estudiante avanzaba en sus argumentos y era adecuado hacerlas sin alejarlo de sus planteamientos. El estudiante contó con tablero, marcadores y borrador para escribir sus argumentos y en la mayoría de las veces reflexionar sobre lo escrito, permitiéndole identificar cosas de las cuales no se había percatado.

Cabe resaltar que durante las entrevistas se buscó ganar mayor claridad respecto a las respuestas dadas a los ítems propuestos en el cuestionario. Estas entrevistas fueron filmadas y realizadas conjuntamente con el director de este trabajo quien es, precisamente, el profesor del curso de didáctica de la estadística y la probabilidad.

Para el análisis de cada una de las entrevistas se realizó su respectiva transcripción, la cual permitió hacer un seguimiento sobre lo que dijo y escribió el estudiante. Se comparó lo que se obtuvo de cada uno de ellos con lo planteado en la descomposición genética preliminar y se identificó lo que no estaba pasando, es decir, lo que el estudiante estaba dejando de hacer, o no tenía claro y lo estaba llevando a tener dificultades y a hacer interpretaciones equivocadas sobre los conceptos que intervienen tanto de manera directa como indirecta en la construcción de un intervalo de confianza, y que pueden ser causa de las dificultades y tipos de concepciones reportados hasta el momento alrededor del concepto de intervalo de confianza. El respectivo análisis de las entrevistas se presenta en el capítulo dedicado al análisis y discusión de resultados.

En el siguiente capítulo se presenta el *Análisis teórico* realizado alrededor de los intervalos de confianza.

4. ANÁLISIS TEÓRICO

En este capítulo se presenta de manera detallada el análisis teórico del concepto de intervalo de confianza, durante el cual se realizó un análisis de textos, se tuvo en cuenta la experiencia de los investigadores, se consultaron los resultados de las investigaciones previas, se diseñó y aplicó un cuestionario para identificar los tipos de concepciones que tiene los profesores en formación que son parte del estudio, y se hizo un análisis a priori de la construcción de un intervalo de confianza para la media poblacional.

El objetivo principal de este análisis teórico es el planteamiento de una descomposición genética preliminar hipotética como base para el diseño de los instrumentos a aplicar que se esperan contribuyan a responder la pregunta de investigación planteada para este estudio.

4.1 Análisis de textos

Sánchez y Contreras de la Fuente (1988) plantean que el análisis de libros da lugar, en parte, a la explicación de las concepciones de un individuo, en particular determinadas por las interpretaciones que él hace de lo que lee, y que se manifiestan cuando se hace necesario utilizar los conceptos estudiados en diferentes contextos. El análisis de textos, como lo plantea Olivo (2008) permite inferir consecuencias acerca de la enseñanza, y muy posiblemente del aprendizaje de un concepto estadístico; en este caso, el de intervalo de confianza, porque de alguna manera las concepciones que manifiestan los profesores y los estudiantes, son influenciadas por las que contienen los libros de texto de estadística.

Es así que a continuación se presenta un análisis de los textos guías (Tabla 1) más utilizados por los estudiantes que son parte de este estudio. Para este análisis se tendrá en cuenta la forma como los intervalos de confianza son abordados en cada uno de los textos identificando las causas posibles que puedan llevar a los estudiantes a errores.

Nos centraremos en la estimación de la media de una población con desviación estándar conocida. Los criterios que tendremos en cuenta para este análisis son los siguientes:

- Introducción y construcción de intervalos de confianza.
- Representaciones utilizadas.
- Tipos de ejemplos y problemas.

Tabla 1: Textos utilizados por los estudiantes.

	Título	Autores	Editorial	Edición
A	Estadística aplicada básica	David S. Moore	Antoni Bosch Editor S.A.	1995
B	Chance Encounters: A first course in data analysis and inference	Christopher J. Wild George A. F. Seber	John Wiley & Sons, Inc.	2000
C	Estadística Matemática con aplicaciones	Dennis D. Wackerly Willliam Mendenhall III Richard L. Scheaffer	Cengage Learning Editores, S.A.	2008

4.1.1 Introducción y construcción del concepto de intervalo de confianza

En primer lugar analizaremos las distintas formas en que se presentan los intervalos de confianza y cómo es el proceso de su construcción.

El texto titulado *Estadística aplicada básica* (A), está estructurado en tres partes: la parte 1 (Comprensión de los datos) está compuesta por tres capítulos (I, II y III) dedicados al estudio del análisis de distribuciones, análisis de relaciones y obtención de datos. La segunda parte (Comprensión de la inferencia) consta de cuatro capítulos (IV, V, VI y VII) dedicados al estudio de las distribuciones muestrales y probabilidad, introducción a la inferencia estadística, inferencia para distribuciones e inferencia para proporciones. La tercera parte (Temas relacionados con la inferencia) comprende tres capítulos (VIII, IX y X) dedicados al estudio de inferencia para tablas de contingencia, análisis de varianza de un factor e inferencia para la regresión. Los intervalos de confianza aparecen en la segunda parte (Capítulo V y VI) en dos momentos distintos: primero cuando se conoce σ que es el caso que nos interesa, y luego de una introducción a pruebas de hipótesis, se retoman los intervalos de confianza con σ desconocida (pág. 420 hasta la 431)

Para el estudio del concepto de intervalo de confianza cuando se conoce σ, el autor plantea cinco apartados los cuales se analizan a continuación:

1. Estimación con confianza: Se presenta un ejemplo que permite al lector identificar la necesidad de sacar conclusiones para una población a partir de una muestra, y propone un gráfico que permite retomar las principales propiedades y características de la distribución de la media muestral, como el teorema central del límite y el hecho de que la media muestral es un estimador insesgado de la media poblacional.

2. Confianza estadística: Se recuerda la regla del 68-95-99,7 (propiedad de la distribución normal) y se realiza un análisis de la misma a partir de un gráfico y un ejemplo resaltando la importancia de la confianza de los resultados obtenidos, aclarando que esta confianza es una característica “que se refiere a lo que ocurriría después de muchas repeticiones” (p. 334). Esta aclaración sin duda es importante ya que una de las concepciones que se trata de explicar es el hecho de no asociar el nivel de confianza con una frecuencia relativa.

Luego de esto definen un intervalo de confianza como el conjunto de números situados entre dos valores cuya estructura es

$$Estimación\ \pm error\ de\ estimación$$

Y definen que “el error de estimación indica la precisión que creemos que tiene nuestra suposición, basada en la variabilidad de la estimación” (p. 335) lo cual permite asumir que la precisión de un intervalo de confianza está asociado al tamaño del intervalo, siendo $z^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ la que determina el tamaño del intervalo y por lo tanto la precisión.

Después de esta introducción se plantean varios ejercicios, cuya naturaleza comentaremos más adelante, para así dar paso a los intervalos de confianza.

3. Intervalos de Confianza: Antes de definir de manera formal qué es un intervalo de confianza se plantea que “cualquier intervalo de confianza tiene dos partes: Un intervalo calculado a partir de los datos y un nivel de confianza que da la probabilidad de que el método produzca un intervalo que contenga el parámetro […] llamaremos C al nivel de confianza expresado en tanto por uno” (pág. 338). Luego de definir qué es el nivel de confianza se plantea la siguiente definición de intervalo de confianza para la estimación de un parámetro poblacional.

> *Un* ***intervalo de confianza de nivel C*** *para un parámetro poblacional es un intervalo calculado a partir de los datos de una muestra por un método que tiene una probabilidad C de producir un intervalo que contenga el verdadero valor del parámetro (p. 338).*

No obstante que la definición anterior es clara en adjudicar la probabilidad al método que produce el intervalo, ante la dificultad de caracterizar el método como un evento probabilístico puede generarse la idea de que la probabilidad se asigna al intervalo obtenido, como efectivamente lo han reportado varias investigaciones (Behar 2001, Olivo 2008).

Después de la definición de intervalo de confianza el autor menciona que la

> "fórmula para calcular un intervalo de confianza de nivel C para la media poblacional μ de una población, cuando los datos son una muestra aleatoria simple de tamaño n se basa en el hecho de que la distribución de la media muestral $\bar{x}$ es aproximadamente normal". (p.339)

Esta mención hace referencia al Teorema Central del Límite para identificar la distribución de $\bar{x}$. Las instrucciones que se dan en este libro para la estimación de un intervalo de confianza son las que siguen:

He aquí cómo calcular un intervalo de confianza de nivel C:

- *Cualquier curva normal tiene una probabilidad C entre el punto situado z^* desviaciones típicas a la izquierda de su media y el punto situado a z^* desviaciones típicas a la derecha de su media.*
- *La desviación típica de la distribución de $\bar{x}$ es $\sigma/\sqrt{n}$, y su media es la media de la población μ. Por tanto, existe una probabilidad C de que la media muestral observada $\bar{x}$ tome un valor entre*

$$\mu - Z^* \sigma/\sqrt{n} \text{ y } \mu + Z^* \sigma/\sqrt{n}$$

- *Siempre que ocurre lo anterior, la media poblacional μ se encuentra entre*

$$\bar{x} - Z^* \sigma/\sqrt{n} \text{ y } \bar{x} + Z^* \sigma/\sqrt{n}$$

Éste es nuestro intervalo de confianza. La estimación de la media desconocido μ es $\bar{x}$, y el error de estimación es $Z^* \sigma/\sqrt{n}$ (p. 341).

Estas instrucciones no justifican el paso final que pasa de un intervalo centrado en μ al intervalo centrado en $\bar{x}$. Si bien se podría razonar que como $\bar{x}$ es un estimador de μ es razonable remplazar el uno por el otro, el problema está en afirmar que esta sustitución produce un intervalo que contiene a μ. El libre intercambio entre el parámetro y su estimador puede ser el causante de las malas interpretaciones acerca de los contenidos de los intervalos de confianza: valores posibles de la variable original $\bar{x}$ en lugar de valores posibles del parámetro μ, que es otro de los resultados reportados en las investigaciones (Behar 2001; Cumming, Williams y Fidler 2004; Cumming 2005; Olivo 2008; Salcedo et al., 2011).

4. Comportamiento de los intervalos de confianza: En este apartado Moore (1995) expresa que un intervalo de confianza está determinado por el error de estimación ($z^* \sigma/\sqrt{n}$) ya que cuando este error es pequeño "significa que la estimación del parámetro poblacional es bastante precisa" (p. 345) en otras palabras la precisión de un intervalo de confianza está asociado al tamaño del intervalo que está caracterizado en términos del nivel de confianza expresado en términos del valor z^* y del error estándar del estimador. A su vez, el autor afirma que el error de estimación se hace menor cuando el nivel de confianza y la desviación típica poblacional son pequeños y el tamaño muestral es grande.

5. Algunas precauciones: El autor hace una serie de recomendaciones asociadas al tamaño muestral y a la distribución de la población las cuales se mencionan a continuación:

- Para la toma de los datos se debe hacer un muestreo aleatorio simple.
- La expresión $\bar{x} \pm Z^* \sigma/\sqrt{n}$ no es adecuada para sistemas de muestreo más complejos.
- Las muestras obtenidas sin la ayuda del muestreo no son útiles para la inferencia.
- Dado que la media muestral es sensible a los datos, es importante revisar si hay datos atípicos y tomar decisiones al respecto.
- Cuando la distribución de la población no es normal se recomienda tomar muestras grandes.
- Cuando se conoce la desviación típica de la población se sigue el procedimiento visto hasta el momento, en caso de no conocerse, la desviación típica muestral es un estimador no sesgado de la poblacional y se tiene en cuenta la distribución t-student.

Luego de estas recomendaciones se plantean varios ejercicios para dar paso a las pruebas de significación donde el autor aclara que en el campo de la estadística inferencial los intervalos de confianza son utilizados con “el objetivo de estimar un parámetro poblacional” (p.356) sin ser ésta una estimación puntual y que las pruebas de significación tienen el objetivo de “valorar la evidencia proporcionada por los datos a favor de alguna hipótesis sobre la población” (p. 357). Hace una introducción a las pruebas de significación y trabaja dicho concepto para dar paso así a la inferencia para distribuciones (capítulo VI) en el cual se retoma la estimación de intervalos de confianza para poblaciones con distribución normal y desviación típica desconocida, proceso para el cual se cambia z^* (asociado a la distribución normal estándar) por t^* (asociado a la distribución t-student) donde el proceso de estimación del intervalo de confianza es similar al procedimiento para z^*.

B. Chance Encounters: A first course in data analysis and inference

El *texto titulado Chance Encounters: A first course in data analysis and inference* contiene 14 capítulos. Los intervalos de confianza son tratados en el capítulo VIII, desde la página 327 hasta la 355. En este capítulo se continúa con la estimación de la media poblacional cuando se desconoce la desviación estándar de la población ya que en el capítulo VII (distribuciones muestrales de estimaciones) se aborda la construcción de un intervalo de confianza para la media con desviación estándar desconocida bajo el nombre de intervalo de "dos-errores-estándar" (p. 290). Esta construcción la realiza con base en el "celular de la normal": la regla del 68-95-99,7 afirmando que "si queremos estimar el verdadero valor de μ es bastante seguro que se encuentre en el rango $\bar{x} - 2\,\frac{s_x}{\sqrt{n}}\ a\ \bar{x} + 2\frac{s_x}{\sqrt{n}}$ (p. 290) donde $s_x/\sqrt{n}$ es llamado error estándar ($se(\bar{x})$). Es importante resaltar que en el capítulo VII no se hace mención del nivel de confianza ya que se trabaja implícitamente con el nivel de confianza del 95%.

El capítulo VIII tiene como objetivo comprender la naturaleza de los intervalos de confianza y la interpretación de los mismos. Para lograrlo dividen el capítulo en 6 apartados, de los cuales analizaremos los dos primeros que están asociados a la estimación de un intervalo de confianza para la media poblacional cuando se desconoce la desviación estándar de la población, los restantes cuatro se dedican a la estimación de intervalos de confianza para proporciones y comparación de proporciones.

El primer apartado (8.1) se divide en dos sesiones, la primera (Introducción) retoma los conceptos trabajados en el capítulo 7 para destacar la importancia de las diferencias en la longitud de un intervalo de confianza afirmando que "aquí el ancho dependerá de la cantidad de "*confianza*" que queramos tener en el intervalo como medio para capturar el verdadero valor del parámetro" (p. 328) afirmación que destaca el efecto que tiene el nivel de confianza sobre el ancho del intervalo.

El ejemplo que plantean para explicar esta idea es la estimación de varios intervalos con muestras diferentes de la misma población, mostrando que a medida que aumenta el tamaño muestral, disminuye el ancho del intervalo y concluyen que "podríamos esperar una mayor precisión a más datos" (p. 329).

Para continuar se plantea la constante necesidad de estimar un parámetro (θ) a partir de un estimador ($\hat{\theta}$), para esto se define que "un tipo de intervalo que contiene el verdadero valor del parámetro para el 95% de las muestras tomadas se llama un intervalo de confianza del 95% de ese parámetro" (p. 329). Los autores continúan definiendo que "un intervalo de confianza (IC) para el verdadero valor del parámetro está dado por $estimación\ \pm\ t\ errores\ estándar$" (p. 330)

Esta definición es planteada para cualquier situación en la que la distribución de $T = \frac{(\hat{\theta}-\theta)}{s_x}$ se aproxime a la distribución t-student. En el caso de que se deseara estimar la media poblacional tomaríamos $\hat{\theta} = \bar{x}$ y $\theta = \mu$ y σ desconocido. Sin embargo, no presenta tal definición para σ conocido ya que este caso raramente sucede.

En la segunda sesión (Ajuste del nivel de confianza) se hace mención del nivel de confianza a partir de un ejemplo mediado por simulación donde se evidencia y resalta que un intervalo estimado con un 95% de confianza hace referencia a que si se hace varias veces el muestreo y se calcula un intervalo de confianza para cada muestra, se espera que el 95% de los intervalos contenga el parámetro que se desea estimar. Además plantea dos escenarios en los cuales operan los intervalos de confianza y que son explicados a continuación.

Caso 1: Cuando se hacen muchos estudios.

Se refiere a que "si un gran número de investigadores realizan estudios de forma independiente, el 95% de los investigadores capturarán el verdadero valor del parámetro en sus intervalos, mientras que el 5% de ellos no lo harán" (p. 331)

Caso 2: Cuando se planifica un estudio.

Para este caso los autores expresan que "Si me he propuesto hacer un estudio en el futuro en el que voy a tomar una muestra aleatoria y calcular un intervalo, hay un 95% de probabilidad de que voy a coger el verdadero valor del parámetro en mi intervalo y 5% de probabilidad de que voy a perderlo" (p. 331)

En estos dos escenarios se presenta de forma clara el nivel de confianza y su significado, lo cual es de gran importancia para las conclusiones que se dan a partir de la estimación de un intervalo de confianza. En este apartado los autores se preguntan ¿cómo podemos hacer una estimación precisa con cierta confianza? Y la respuesta que ofrecen es que "si se quiere estimar un intervalo de confianza muy preciso con un determinado nivel de confianza se necesita una gran cantidad de datos" (p. 333) ya que al aumentar el tamaño muestral, la desviación estándar asociada al estimador se reduce, haciendo que el tamaño del intervalo disminuya y por lo tanto que su precisión aumente.

En el segundo apartado (8.2) se aborda la estimación de un intervalo de confianza para la media poblacional, donde se afirma que la media muestral es un estimador puntual de la media poblacional.

En este apartado se presenta en forma más clara la estructura de un intervalo *de confianza:*

"El intervalo de confianza para la verdadera media poblacional μ *es:* $media\ muestral\ \pm t\ errores\ estandar$ *o* $\bar{x} \pm t\ se(\bar{x})$ *donde* $se(\bar{x}) = {}^{s_x}\!/_{\sqrt{n}}$ *y* $df = n - 1$*" (p. 335).*

Esta definición es planteada pensando en el hecho de que se desconoce la desviación estándar de la población y que *t* está asociado al nivel de confianza y además que la muestra tiene una distribución aproximadamente normal. A esta definición le sigue un ejemplo en que se hace uso del computador para la estimación del intervalo de confianza.

Lo presentado hasta el momento es la forma como se abordan los intervalos de confianza para la media poblacional, sin embargo en todo el texto se asume que se desconoce la desviación estándar poblacional y que su estimador es la desviación estándar muestral. Es decir, solo se asocia el nivel de confianza con la distribución t-student omitiéndose cualquier referencia a la normal como caso especial.

C. Estadística Matemática con aplicaciones

El texto titulado *Estadística Matemática con aplicaciones* consta de 16 capítulos de los cuales dedica uno (capítulo VIII: Estimación) para introducir y trabajar los intervalos de confianza desde la página 406 a la 421.

El capítulo VIII tiene 10 sesiones de las cuales dedica 4 (8.5, 8.6, 8.7, 8.8 y 8.9) para trabajar los intervalos de confianza. En este análisis solo se presentan las sesiones 8.5, 8.6 y 8.8 que son las que abordan la construcción de un intervalo de confianza cuando se conoce y desconoce la desviación estándar poblacional. La sesión 8.7 no se analiza ya que hace referencia a la utilidad de los intervalos de confianza para la escogencia del tamaño muestral cuando se desea realizar un estudio.

El capítulo VIII inicia con una introducción a la inferencia estadística, específicamente, la estimación puntual y la estimación por intervalos de confianza a la que llaman “un estimador de intervalo” (p. 390) haciendo especial énfasis en la utilidad de estas estimaciones en varios campos como lo son la ingeniería, la sicología y el estudio de mercados.

La sesión 8.5 (Intervalo de confianza) inicia definiendo que:

> *Un estimador de intervalo es una regla que especifica el método para usar las mediciones muestrales en el cálculo de dos números que forman los puntos extremos del intervalo […] el intervalo resultante tiene dos propiedades: primero contiene al parámetro objetivo θ y segundo que su amplitud es relativamente pequeña. Uno o ambos puntos extremos del intervalo, siendo funciones de las mediciones muestrales, variarán aleatoriamente de una muestra a otra. Entonces, la longitud y ubicación del intervalo son cantidades aleatorias; no podemos estar seguros de que el parámetro objetivo θ (fijo) caiga entre los puntos extremos de cualquier intervalo individual calculado a partir de una sola muestra.” (p.406)*

Esta definición deja ver varias características importantes de un intervalo de confianza. En primer lugar hace mención a la variabilidad de los valores extremos del intervalo (límites de confianza del intervalo); en segundo lugar resalta la precisión de la estimación (la cual está asociada al tamaño del intervalo, entre más pequeño más preciso) y a su vez trata la incertidumbre de lograr atrapar el parámetro en la estimación. Estas tres características son importantes en el momento de hacer inferencias. Sin embargo son mencionadas de manera escueta de tal manera que su significado podría escapársele al lector. Este fenómeno ocurre en todos los textos.

La siguiente definición que se presenta en el texto es la de nivel de confianza, y es como sigue:

> *"la probabilidad de que un intervalo de confianza (aleatorio) incluya a θ (una cantidad fija) se llama coeficiente de confianza. Desde un punto de vista práctico, el coeficiente de confianza identifica la fracción de veces, en muestreo repetido, que los intervalos construidos contienen al parámetro objetivo θ. Si sabemos que el coeficiente de confianza asociado con nuestro estimador es alto, podemos estar suficientemente seguros de que cualquier intervalo de confianza, construido con el uso de los resultados de una sola muestra, contendrá a θ" (p. 406).*

Cuando se afirma que el nivel de confianza es "la probabilidad" de que el intervalo contenga el parámetro que se desea estimar, el lector puede asumir una interpretación bayesiana del intervalo de confianza al suponer que el nivel de confianza es la probabilidad a posteriori de obtener el parámetro dentro del intervalo, una vez recogida la muestra, afirmación que desde el punto de la estadística clásica no es cierta. Esta interpretación errónea fue identificada en varios estudios (Behar, 2001; Olivo, 2008; Olivo y Batanero, 2007; Salcedo et al., 2011). Sin embargo, el asunto está en que los extremos son variables aleatorias, lo que hace que no se refiera a un intervalo específico sino a toda una familia de ellos.

> *Suponga que $\hat{\theta}_L$ y $\hat{\theta}_U$ son los límites de confianza (aleatorios) superior e inferior, respectivamente, para un parámetro θ. Entonces si*
>
> $$P\left(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U\right) = 1 - \alpha,$$
>
> *La probabilidad $(1 - \alpha)$ es el coeficiente de confianza. El intervalo resultante definido por [$\hat{\theta}_L$, $\hat{\theta}_U$] se denomina intervalo de confianza bilateral.*
>
> *También es posible formar un intervalo de confianza unilateral tal que*

$$P\left(\hat{\theta}_L \leq \theta \right) = 1 - \alpha$$

Aun cuando sólo $\hat{\theta}_L$ es aleatorio en este caso, el intervalo de confianza es [$\hat{\theta}_L, \infty$]. Del mismo modo, podríamos tener un intervalo de confianza unilateral superior tal que

$$P\left(\theta \leq \hat{\theta}_U \right) = 1 - \alpha$$

El intervalo de confianza implicado aquí es [$-\infty, \hat{\theta}_U$] (p. 406-407)

Para finalizar la sesión se plantea un método para estimar intervalos de confianza llamado *método del pivote* que

Consiste en determinar una cantidad que actúe como pivote y que posea las dos siguientes características:

1. Que sea una función de las medidas muestrales y el parámetro desconocido θ, donde θ sea la única cantidad desconocida.

2. Que su distribución de probabilidad no dependa del parámetro θ.

Si se conoce la distribución de probabilidad de la cantidad que actúa como pivote, el siguiente procedimiento lógico puede usarse para obtener la estimación por intervalos deseada. Si Y es cualquier variable aleatoria, $c > 0$ es una constante y $P(a \leq Y \leq b) = 0.7$; entonces ciertamente $P(ca \leq cY \leq cb) = 0.7$. Del mismo modo, para cualquier constante d, $P(a + d \leq Y + d \leq b + d) = 0.7$. Esto es, la probabilidad del evento $(a \leq Y \leq b)$ no resulta afectada por un cambio de escala o una traslación de Y. Entonces, si conocemos la distribución de probabilidad de una cantidad pivote, podemos usar operaciones como éstas para formar la estimación por intervalos que buscamos (p. 407)

El ejemplo presentado por los autores para explicar el método del pivote es el que sigue:

Suponga que tomamos una muestra de tamaño $n = 1$ de una distribución uniforme definida en el intervalo $[0, \theta\,]$, donde θ es desconocida. Encuentre un límite de confianza inferior de 95% para θ.

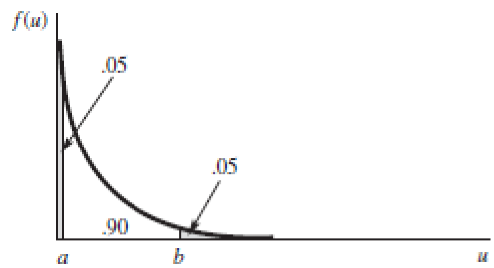
Como Y es uniforme en $[0, \theta\,]$, los métodos del Capítulo 6 se pueden usar para demostrar que $U = Y/\theta$ está uniformemente distribuida en [0, 1]. Esto es,

$$f_U(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq 1 \\ 0, & en\ cualquier\ otro\ punto \end{cases}$$

La función de densidad para U aparece graficada en la Figura 8.5 $U = Y/\theta$ es una función de Y (la medición muestral) y θ, y la distribución de U no depende de θ. Entonces, podemos emplear $U = Y/\theta$ como cantidad pivote. Como buscamos un estimador de intervalo con coeficiente de confianza igual a .90, encontramos dos números a y b tales que

$$P(a \leq U \leq b) = .90.$$

Figura 8.5 Función de densidad para U



Una forma de hacer esto es elegir a y b para satisfacer

$$P(U < a) = \int_0^a e^{-u}\, du = .05 \ \text{ y } P(U > b) = \int_b^\infty e^{-u}\, du = .05$$

Estas ecuaciones dan como resultado

$$1 - e^{-a} = .05 \ \text{ y } 1 - e^{-b} = .05 \ \text{ o bien } a = .051,\ b = 2.996.$$

Por consiguiente

$$.90 = P(.051 \leq U \leq 2.996) = P\left(.051 \leq \frac{Y}{\theta} \leq 2.996\right)$$

Como estamos buscando un estimador de intervalo para u, manipulamos las desigualdades que describen el evento para aislar u en el centro. Y tiene una distribución exponencial, de modo que $P(Y > 0) = 1$ y mantenemos la dirección de las desigualdades si dividimos todo entre Y. Esto es,

$$.90 = P\left(.051 \leq \frac{Y}{\theta} \leq 2.996\right) = P\left(\frac{.051}{Y} \leq \frac{1}{\theta} \leq \frac{2.996}{Y}\right)$$

Tomando recíprocos (y por tanto invirtiendo la dirección de las desigualdades) obtenemos

$$.90 = P\left(\frac{Y}{.051} \geq \theta \geq \frac{Y}{2.996}\right) = P\left(\frac{Y}{2.996} \leq \theta \leq \frac{Y}{.051}\right)$$

Entonces, vemos que $Y/2.996$ y $Y/.051$ forman los límites de confianza inferior y superior, respectivamente, que estábamos buscando. Para obtener los valores numéricos de estos límites debemos observar un valor real para Y y sustituirlo en las fórmulas dadas para los límites de confianza. Sabemos que límites de la forma ($Y/2.996, Y/.051$) incluirán los valores (desconocidos) verdaderos de θ para 90% de los valores de Y que obtendríamos por muestreo repetido a partir de esta distribución exponencial. (p.407-408)

Si bien la construcción de un intervalo de confianza a partir de la expresión $\bar{x} \pm Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ presenta dificultad para los individuos, como lo señalan los estudios presentados en el capítulo dedicado a los antecedentes, pensemos ahora en el método del pivote que requiere de procesos algebraicos más avanzados e incluso de conceptos propios del cálculo diferencial e integral.

La sesión termina con un ejemplo similar al anterior y con un listado de ejercicios cuya naturaleza se analizará más adelante.

En la sesión 8.6 (Intervalos de confianza en una muestra grande), a partir de un ejemplo se presenta la construcción de un intervalo de confianza. Dicha construcción es dada en términos generales, lo que obliga a que el lector deba dirigirse a la tabla 8.1 ubicada en la página 397 donde se presentan algunos valores esperados y errores estándar de algunos estimadores puntuales para decidir cuál es el parámetro a estimar (parámetro objetivo) su respectivo estimador puntual y el error estándar del estimador.

Para la construcción del intervalo de confianza los autores resaltan la necesidad de conocer la distribución que sigue la variable aleatoria $\hat{\theta}$, y para esto retoman el teorema central del límite y plantean la existencia de una cantidad que llaman Z, la cual tiene una distribución normal estándar.

Sea $\hat{\theta}$ un estadístico que esta normalmente distribuido con media θ y error estándar σ_θ. Encuentre un intervalo de confianza para θ que posea un coeficiente de confianza igual a ($1-\alpha$).

Solución: la cantidad

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_\theta}$$

tiene una distribución normal estándar. Ahora seleccione dos valores de las colas de esta distribución, $z\alpha/_2$ y $-z\alpha/_2$, tales que

$$P(-z\alpha/_2 \leq Z \leq z\alpha/_2) = 1 - a.$$

Sustituyendo por Z en el enunciado de probabilidad, tenemos

$$P(-z_{\alpha/2} \le \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma_\theta} \le z_{\alpha/2}) = 1 - a.$$

Multiplicando por σ_θ obtenemos

$$P(-z_{\alpha/2}\sigma_\theta \le \hat{\theta}-\theta \le z_{\alpha/2}\sigma_\theta) = 1 - a.$$

y restando $\hat{\theta}$ de cada término de la desigualdad, obtenemos

$$P(-\hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_\theta \le -\theta \le -\hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_\theta) = 1 - a.$$

Por último, multiplicando cada término por –1 y, en consecuencia, cambiando la dirección de las desigualdades, tenemos

$$P(\hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_\theta \le \theta \le \hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_\theta) = 1 - a.$$

Entonces, los puntos extremos para un intervalo de confianza de $100(1 - a)\%$ para θ están dados por

$\hat{\theta}_L = \hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_\theta$ *y* $\hat{\theta}_U = \hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_\theta$. *(p. 412)*

Seguida de esta construcción se plantea un ejemplo de la estimación de un intervalo de confianza para la media poblacional, el cual se limita a la identificación de los elementos que intervienen en la fórmula y el remplazo de los mismos para la obtención del intervalo.

El resto de la sesión es dedicado a la estimación de intervalos de confianza para la diferencia de medias, proporciones y diferencia de proporciones la cual finaliza con la siguiente afirmación:

En esta sección hemos empleado el método del pivote para deducir intervalos de confianza de una muestra grande para los parámetros μ, p, $\mu_1 - \mu_2$ y $p_1 - p_2$ de acuerdo con las condiciones de la Sección 8.3. La fórmula básica es

$$\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2}\sigma_\theta$$

donde los valores de $\hat{\theta}$ y σ_θ aparecen en la Tabla 8.1. Cuando $\theta = \mu$ es el parámetro objetivo, entonces $\hat{\theta} = \bar{Y}$ y $\sigma_\theta^2 = \sigma^2/n$, donde σ^2 es la varianza poblacional. Si se conoce el valor verdadero de σ^2, debe usarse en el cálculo del intervalo de confianza; si σ^2 no se conoce y n es grande, no *hay demasiada pérdida de precisión si s^2 se sustituye por σ^2 en la fórmula del intervalo de confianza. (p.415)*

La anterior definición permite al lector el uso de la expresión para construir intervalos de confianza cuando se conoce o desconoce la desviación estándar poblacional.

Para finalizar la sesión se plantean varios ejercicios cuya naturaleza se analizará más adelante.

La sesión 8.7 (Selección del tamaño muestral) presenta una de las aplicaciones de los intervalos de confianza en el diseño de experimentos y en la estimación del tamaño muestral.

La sesión 8.8 (Intervalos de confianza de una muestra pequeña para μ y $\mu_1 - \mu_2$) presenta la construcción de un intervalo de confianza para la media poblacional a partir de la variable aleatoria $\bar{Y}$ cuando la muestra es pequeña y se desconoce la desviación estándar poblacional.

La construcción del intervalo de confianza presentada es similar a la expuesta en la sesión 8.6 con la diferencia de que la cantidad $T = \frac{Y-\mu}{S/\sqrt{n}}$ cuya distribución es t-student con $(n-1)$ grado de libertad remplaza a la cantidad $Z = \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma_\theta}$ cuya distribución es aproximadamente normal estándar, de tal manera que el intervalo resultante es $\bar{Y} \pm t\alpha/_2 \frac{s}{\sqrt{n}}$.

En esta construcción se invita al lector a retomar los teoremas y definiciones tratados en el capítulo VII con los cuales se puede presentar la cantidad T asociada a la distribución que sigue la variable aleatoria $\bar{Y}$. Una vez más se plantea un ejemplo en el cual se hace uso de la fórmula.

El resto de la sesión se dedica a la estimación de intervalos de confianza para la diferencia de medias y la diferencia de proporciones.

4.1.2 Representaciones utilizadas.

Las representaciones utilizadas en los tres textos son de tipo algebraico, en el cual se hace uso del lenguaje propio de la estadística, y de tipo gráfico como manera de apoyar lo dicho en forma algebraica. Por tanto, estos dos tipos de representación no van separados.

Por ejemplo, el texto A (Estadística Aplicada Básica) para explicar el significado del nivel de confianza para un intervalo de confianza se apoya en el siguiente gráfico que aparece en la página 336.

Los textos B (Chance Encounters: A first course in data analysis and inference) y C (Estadística Matemática con aplicaciones) utilizan un gráfico similar para explicar el significado del nivel de confianza para un intervalo de confianza.

Los tres textos analizados hacen uso de conceptos propios de la estadística y la probabilidad, sin embargo, el texto C (Estadística Matemática con aplicaciones) también hace uso de conceptos propios del cálculo integral para la construcción de un intervalo de confianza, tal como la integral definida.

Ilustración 2: Representación gráfica asociada al nivel de confianza.

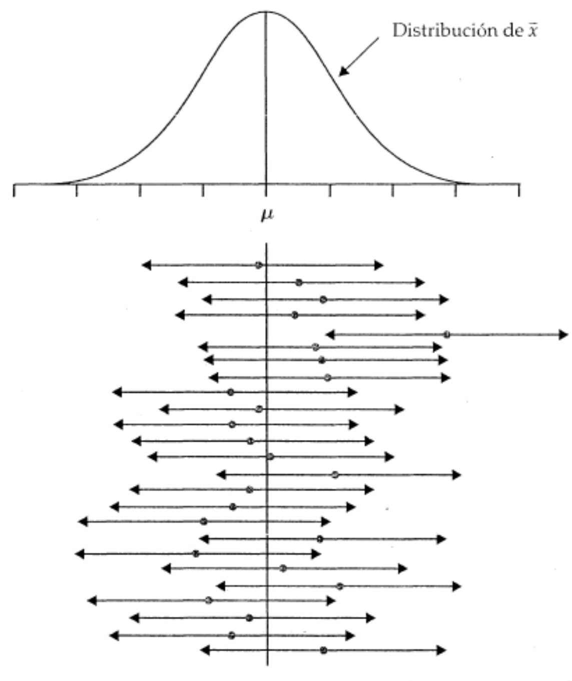


Figura 5.3. Veinticinco muestras de la misma población dieron estos intervalos de confianza del 95%. Después de muchos muestreos, un 95% de las muestras dan intervalos que contienen la media poblacional μ.

4.1.3 Tipos de ejemplos y problemas.

Para el análisis de la naturaleza de los ejemplos y problemas propuestos en los tres textos vamos a tener en cuenta las siguientes categorías:

I. **Uso de la definición de intervalo de confianza**: El individuo debe identificar los elementos que intervienen en la definición: el nivel de confianza, la desviación estándar poblacional (en caso que se conozca), la media muestral, la desviación estándar asociada a la media muestral y el tamaño muestral para luego remplazarlos y obtener los límites del intervalo.
II. **Problemas de decisión**: Vamos a considerar dos casos

Caso 1. El individuo debe construir el intervalo de confianza a partir de la información suministrada por una muestra aleatoria y tomar decisiones a partir de la estimación obtenida.

Caso 2. Problemas de interpretación de resultados obtenidos con la ayuda de un software donde se contempla el análisis y la toma de decisiones a partir de la información suministrada por el software.

III. **Problemas conceptuales**: El individuo recibe información sobre algunas estimaciones (intervalos de confianza) que debe ser interpretada por el lector y con base en esto realizar análisis y sacar conclusiones (en esta categoría están incluidos los problemas de opción múltiple y los problemas de falso y verdadero).

IV. **Ejercicios de simulación computacional**: Son problemas planteados para resolver con la ayuda de la simulación computacional, en ellos se dan instrucciones que una vez realizadas van a permitir al individuo reflexionar sobre las propiedades de los intervalos de confianza y del efecto de algunos elementos que intervienen en su construcción.

A continuación se presenta el análisis de este tercer criterio para cada uno de los textos.

A. Estadística aplicada básica

Los ejemplos presentados inicialmente en este libro tienen como propósito que el lector capte la importancia y la necesidad de la estadística inferencial para la toma de decisiones en diferentes campos. Luego se plantean ejemplos enfocados en la construcción e interpretación de intervalos de confianza, estos ejemplos van acompañados de figuras que ayudan y facilitan la interpretación de la estimación. Los ejemplos son presentados en la medida que se va avanzando en la construcción del intervalo de confianza y por ende en los elementos que subyacen a su construcción.

Los problemas planteados como ejercicios, donde el parámetro a estimar es la media poblacional, son en total 28 y su naturaleza en término de las categorías descritas anteriormente es la siguiente (ver Tabla 2):

10 ejercicios están planteados de tal manera que el lector debe utilizar de manera directa la expresión que da lugar a la construcción del intervalo de confianza, no se le pide interpretar el intervalo obtenido; 9 ejercicios diseñados para construir e interpretar el intervalo de confianza obtenido y 9 ejercicios en los cuales el lector recibe información sobre algunas estimaciones (intervalos de confianza) para que sea interpretada y con base en esto realizar análisis y sacar conclusiones. En este libro no se contemplan ejercicios para ser resueltos con la ayuda de la simulación, así como tampoco ejercicios dirigidos a analizar, interpretar y tomar decisiones a partir de resultados obtenidos con la ayuda de un software.

Tabla 2: Distribución de los problemas del texto A

Categoría I	Categoría II		Categoría III	Categoría IV
	Caso 1	Caso 2		
10	9	0	9	0

B. Chance Encounters: A first course in data analysis and inference

Los ejemplos presentados en este texto buscan inicialmente introducir al lector en el uso de los intervalos de confianza como una herramienta útil para hacer inferencias de una población a partir de la información suministrada en una muestra en diferentes contextos. A medida que se van abordando los elementos que intervienen en la construcción de un intervalo de confianza se plantea un ejemplo, acompañado de un gráfico, como ayuda en el proceso de aprendizaje. Algunos ejemplos planteados inicialmente son retomados en la medida que se avanza en la construcción de un intervalo de confianza.

En algunos de los ejemplos se invita al lector a hacer uso de software para la construcción de un intervalo de confianza, los software que se recomiendan son Minitab y Excel.

Al finalizar cada aparte los autores plantean un quiz cuya estructura responde a la categoría I (Preguntas de tipo conceptual).

Los autores plantean 23 problemas relacionados con los intervalos de confianza para estimar la media poblacional (ver Tabla 3), la naturaleza de dichos problemas en término de las categorías planteadas es la siguiente:

Tabla 3: Distribución de los problemas del texto B

Categoría I	Categoría II		Categoría III	Categoría IV
	Caso 1	Caso 2		
6	3	3	7	4

6 ejercicios dirigidos al uso de la expresión algebraica que da lugar a la construcción del intervalo de confianza, no se pide interpretar los resultados obtenidos; 3 ejercicios donde se debe construir el intervalo de confianza y tomar decisiones a partir del mismo; 3 ejercicios para analizar, interpretar y tomar decisiones con base en los resultados obtenidos con la ayuda de un software; 7 ejercicios en los cuales el lector debe analizar información sobre algunas

estimaciones (intervalos de confianza) y tomar decisiones; y 4 ejercicios para ser resueltos con la ayuda de la simulación computacional, en el texto se recomienda el uso de Minitab o Excel.

C. Estadística Matemática con aplicaciones

Los ejemplos presentados en este texto se clasifican en dos tipos: el primer tipo son aquellos ejemplos que son utilizados para presentar, en términos generales una definición. El segundo tipo de ejemplos son casos particulares con información obtenida en diferentes contextos. En los dos casos los ejemplos van acompañados de figuras como apoyo en la ilustración.

En el texto se presentan 25 problemas asociados a la estimación de la media poblacional (ver Tabla 4), la distribución de estos problemas es la que sigue:

Tabla 4: Distribución de los problemas del texto C

Categoría I	Categoría II		Categoría III	Categoría IV
	Caso 1	Caso 2		
7	2	0	12	4

7 ejercicios dedicados al uso de la expresión algebraica que da lugar a la construcción de un intervalo de confianza, no se pide interpretar los resultados obtenido; 2 ejercicios para construir un intervalo de confianza a partir de la información suministrada por una muestra aleatoria y a su vez interpretar la estimación obtenida; 12 ejercicios donde se recibe información y esta debe ser analizada e interpretada par así sacar conclusiones de la misma.

En los tres textos los ejercicios abordan diferentes contextos, cuando se suministran datos, en su mayoría se referencian como datos reales. Es de resaltar que solo los textos B y C plantean ejercicios para ser resueltos con simulación computacional.

Durante el análisis de los tres textos se identificó, con base en los tres aspectos estudiados y la metodología en sí misma, sus bondades y los posibles efectos en la comprensión de los intervalos de confianza. A continuación se presentan comentarios finales alrededor del análisis de los textos.

Si bien en los tres libros, para abordar los intervalos de confianza se plantea la frecuente necesidad de hacer estimaciones para una población a partir de una muestra aleatoria, haciendo énfasis en el uso de los intervalos de confianza como un método inferencial confiable ya que se cuenta con un rango de valores y no con una estimación puntual, se identificaron algunas definiciones y comentarios en cada texto que, desde nuestra perspectiva, pueden generar confusión en el lector. A continuación se hace mención de ellas:

En el libro A cuando define el nivel de confianza claramente adjudica la probabilidad al método que produce el intervalo, sin embargo, ante la dificultad de caracterizar el método como un evento probabilístico puede generarse la idea de que la probabilidad se asigna al intervalo obtenido, como de hecho muchas veces ocurre entre los estudiantes. A su vez, cuando se presenta el proceso que da lugar a la construcción del intervalo a partir de una serie de instrucciones, no justifica el paso final que va de un intervalo centrado en μ al intervalo centrado en $\bar{x}$. El problema está, precisamente, en afirmar que esta sustitución produce un intervalo que contiene a μ. Este libre intercambio entre el parámetro y su estimador puede ser el causante de las malas interpretaciones acerca de los valores contenidos en un intervalo de confianza, como por ejemplo, que el intervalo contiene los valores posibles de la variable $\bar{x}$ en lugar de valores posibles del parámetro μ, que es uno de los resultados reportados en varias investigaciones (Behar 2001; Cumming, Williams y Fidler 2004; Cumming 2005; Olivo 2008; Salcedo et al., 2011).

Para finalizar el autor hace una serie de recomendaciones asociadas al tamaño muestral y a la distribución de la población, entre ellas plantea que es importante revisar si en la muestra hay datos atípicos ya que la media muestral es sensible a los datos, lo cual obliga a tomar decisiones al respecto. Esta recomendación que se detectó en las entrevistas que es tenida en cuenta por la mayoría de los estudiantes, no es analizada en el texto de Moore y se queda a nivel de recomendación.

En el libro B en general se asume que se desconoce la desviación estándar poblacional y que su estimador es la desviación estándar muestral. Es decir, solo se asocia el nivel de confianza con la distribución t-student omitiéndose cualquier referencia a la normal como caso especial y por tanto a sus propiedades entre ellas el teorema central del límite.

En el libro C se afirma que el nivel de confianza es “la probabilidad” de que el intervalo contenga el parámetro que se desea estimar, lo cual permite al lector asumir una interpretación bayesiana del intervalo de confianza al suponer que el nivel de confianza es la probabilidad a posteriori de obtener el parámetro dentro del intervalo, una vez recogida la muestra, afirmación que desde el punto de la estadística clásica no es cierta. Esta interpretación errónea fue identificada en varios estudios (Behar, 2001; Olivo, 2008; Olivo y Batanero, 2007; Salcedo et al., 2011).

A diferencia de los libros de texto A y B, este libro plantea un método para estimar intervalos de confianza llamado método del pivote, para el cual el lector requiere claros conocimientos del cálculo integral. Este método, que no es convencional, amplia la construcción de un intervalo de confianza, sin embargo, requiere que el lector tenga conocimientos no solo de conceptos propios de la estadística sino también de otras áreas del conocimiento. Además la notación utilizada para la media muestral y la media poblacional difiere de la utilizada por los otros dos textos.

4.2 Análisis a priori de la construcción matemática de un intervalo de confianza para la media poblacional.

Teniendo en cuenta las investigaciones de corte didáctico realizadas alrededor de los intervalos de confianza, la forma en que es abordado el concepto de intervalo de confianza para la media poblacional en los libros de texto analizados y las sugerencias de varios investigadores del campo de la estadística durante la construcción y desarrollo de esta investigación, a continuación se presenta de manera detallada, desde nuestra perspectiva, la fundamentación matemática que subyace a la construcción de un intervalo de confianza para la estimación de la media de una población, que consideramos es más compacta que la presentada en los libros de texto y permite entrever los conceptos necesarios para su construcción.

4.2.1 Intervalos de confianza

Un intervalo de confianza es un conjunto de valores que, con cierto nivel de confianza, se espera contenga el parámetro que se desea estimar. Los valores extremos reciben el nombre de límites del intervalo.

Para su construcción se parte de una población X con media μ y desviación estándar σ. Se extrae una muestra aleatoria $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ de tamaño *n* de la población siendo $\bar{X}$ la media de la muestra y ${}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}$ la desviación estándar muestral.

Para continuar con la construcción del intervalo de confianza para la media poblacional es necesario conocer la distribución que sigue $\bar{X}$. Consideramos dos casos:

Caso 1: Se conoce el valor de σ. Si la distribución de la población es normal, entonces la distribución de la media muestral es normal, es decir, $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, pero esto raramente sucede. Por el contrario, si la distribución de la población no es normal, y el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande ($n \geq 30$), el teorema central de límite permite afirmar que la distribución de las medias muestrales es aproximadamente normal, es decir, $\bar{X} \sim N\left(\mu\, , {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right)$. Al estandarizar obtenemos que

$$\frac{\bar{X}-\mu}{{}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}} = Z \sim N(0\,,1) \quad \textbf{(1)}$$

Dado que $\bar{X}$ sigue una distribución normal es posible tomar un valor α (nivel de significancia) para hallar un intervalo que con cierta probabilidad $(1-\alpha)$ contenga los valores de la variable aleatoria normal, entonces el intervalo más pequeño que cumple este criterio es el que tiene como límites $-\boldsymbol{Z}_{1-\alpha/2}$ y $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{2}}$ ya que Z sigue una distribución normal estándar. El valor $(1-\alpha)$ es el nivel de confianza y está representado en los valores $-\boldsymbol{Z}_{1-\alpha/2}$ y $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{2}}$.

Luego la probabilidad de que $\boldsymbol{Z}$ esté entre $-\boldsymbol{Z}_{1-\alpha/2}$ y $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{2}}$ es de $1-\alpha$, es decir,

$$P\left(-\boldsymbol{Z}_{1-\alpha/2} < \boldsymbol{Z} < \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{2}}\right) = 1-\alpha \quad \textbf{(2)}$$

Sustituyendo a $\boldsymbol{Z}$ por su valor en (1) en (2) se obtiene

$$P\left(-\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{2}} < \frac{\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}/\sqrt{\boldsymbol{n}}} < \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{2}}\right) = 1-\alpha,$$

Realizando operaciones algebraicas y aplicando las propiedades de las desigualdades se obtiene

$$P\left(\bar{X} - \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{2}}\,\boldsymbol{\sigma}/\sqrt{\boldsymbol{n}} < \boldsymbol{\mu} < \bar{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{2}}\,\boldsymbol{\sigma}/\sqrt{\boldsymbol{n}}\right) = 1-\alpha \qquad \textbf{(3)}$$

Los valores $\bar{X} - \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{2}}\,\sigma/\sqrt{n}$ y $\bar{X} + \boldsymbol{Z}_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$ son los límites del intervalo, cuya naturaleza aleatoria está determinada por $\bar{X}$ puesto que μ es una constante.

El intervalo estimado a partir de **(3)** cumple con las siguientes propiedades que se observan al variar los diferentes elementos que lo componen.

- Al incrementar el tamaño de la muestra, manteniendo los demás elementos constantes, el ancho del intervalo disminuye.
- Al incrementar el nivel de confianza, manteniendo los demás elementos constantes, el ancho del intervalo aumenta.
- Al disminuir la dispersión de la población, la estimación es más precisa, es decir, el ancho del intervalo disminuye.

Caso 2: No se conoce el valor de σ y es necesario estimarlo. En este caso la desviación estándar muestral, s, es un estimador insesgado de σ y la media muestral sigue una distribución t-student con $(n-1)$ grados de libertad, es decir $\bar{X} \sim T_{n-1}$, cuando la muestra se extrae de una población normal. Si la población madre no es normal, es necesario que el tamaño muestral sea suficientemente grande $(n \geq 30)$ para que la distribución del estadístico $\bar{X}$ tenga distribución t-student.

El estadístico a emplear relacionado con el parámetro μ para estimar el intervalo de confianza es $t = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$.

La construcción del intervalo de confianza es similar a lo expuesto en el caso 1, produciendo el siguiente resultado

$$P\left(\bar{X} - \boldsymbol{t}_{\alpha/2}\, \boldsymbol{s}/\sqrt{\boldsymbol{n}} < \boldsymbol{\mu} < \bar{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{t}_{\alpha/2}\, \boldsymbol{s}/\sqrt{\boldsymbol{n}}\right) = 1 - \alpha$$

donde $\bar{X} - \boldsymbol{t}_{\alpha/2}\, \boldsymbol{s}/\sqrt{\boldsymbol{n}}$ y $\bar{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{t}_{\alpha/2}\, \boldsymbol{s}/\sqrt{\boldsymbol{n}}$ son los límites del intervalo.

Dado que la curva de la distribución t Student es más plana que la de la distribución normal, entonces, los valores $t_{\alpha/2}$ están más alejados de 0 que $Z_{1-\alpha/2}$ de μ.

4.2.2 Nivel de confianza de un intervalo de confianza

El nivel de confianza, denotado $1-\alpha$, nos dice la probabilidad de que el mecanismo de producir intervalos de confianza genere uno que contenga el parámetro a estimar, α es el complementario del nivel de confianza y es llamado nivel de significancia. Generalmente se construyen intervalos con confianza $(1-\alpha) = 95\%$ (o significancia $\alpha = 5\%$).

La interpretación de un intervalo de confianza con un nivel de confianza del $(1-\alpha)100\%$, es que si se repite el muestreo m veces, entonces se obtendrán m medias, y si se estima el intervalo de confianza con cada una de ellas, se espera que un porcentaje igual a $(1-\alpha)100\%$ de dichos intervalos contengan el parámetro poblacional μ, y por lo tanto existan algunos intervalos que no lo contengan. Esto se aprecia mejor en la Ilustración 3.

A modo de ejemplo, un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95%, indica que si se repite el muestreo m veces, se obtendrán m medias muestrales $\bar{X}$, y si se estima un intervalo de confianza para cada una de ellas con el mismo nivel de confianza, se espera que el 95% de ellos contengan el parámetro y, por lo tanto, el 5% posiblemente no lo contendrán.
Como se aprecia en la construcción, los intervalos de confianza se relacionan íntimamente con una serie de conceptos básicos que son prerrequisitos para poder entender tanto su construcción como su significado. Estos conceptos son los siguientes: Probabilidad, Población, Muestra aleatoria, Tamaño de la muestra, Variable aleatoria, Distribución de probabilidad de una variable aleatoria, Estadístico, Estimador puntual, Nivel de confianza, Precisión, Función de densidad de probabilidad, Distribución normal, Teorema central del límite, Distribución t-student.

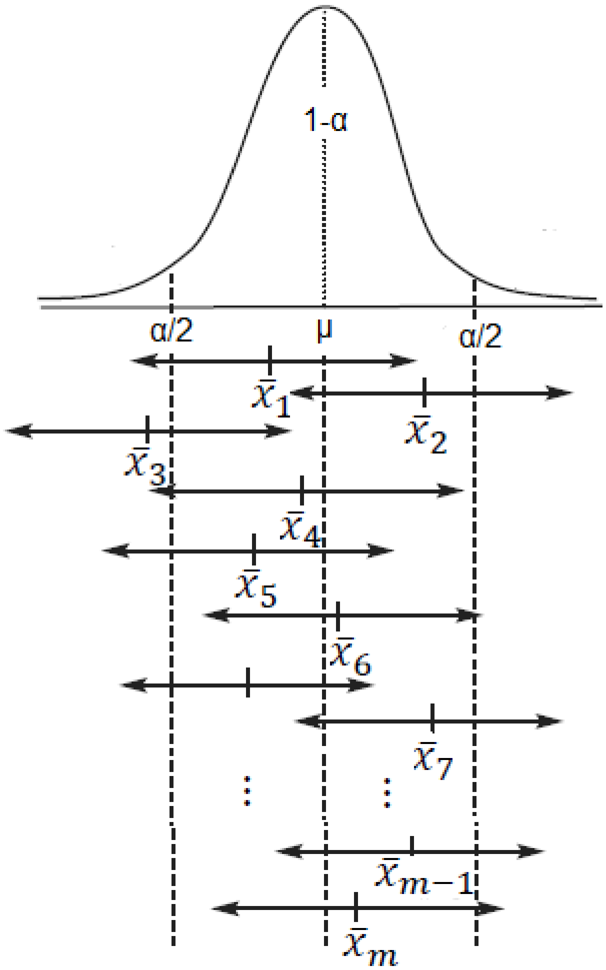


Ilustración 3: Construcción repetida de un intervalo de confianza para μ.
Tomado y adaptado de Salcedo et al., 2011.

Si bien algunos estudios (Tauber, 2001; Inzunsa, 2006; Alvarado, 2007; Rangel-Ruiz, 2010; Brown, 2014) realizados alrededor de varios de estos conceptos reportan las dificultades presentes en estudiantes universitarios cuando se enfrentan a situaciones que requieren del uso e interpretación de los mismos para dar solución a un problema, pensemos ahora en la dificultad que encierra el aprendizaje y la enseñanza de los intervalos de confianza, que como bien se muestra, requiere que el individuo tenga en cuenta una gran variedad de conceptos estadísticos, que por sí solos ya causan conflictos.

Es por esto que con base en la información recogida durante el análisis teórico y los elementos teóricos planteados por la Teoría APOE se diseñó la siguiente descomposición genética preliminar sobre los intervalos de confianza, la cual se espera, una vez refinada, sea de utilidad para el diseño de actividades que contribuyan en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de intervalo de confianza.

4.3 Descomposición genética preliminar del concepto de intervalo de confianza: Un esquema

Las investigaciones sobre los intervalos de confianza han permitido identificar variedad de dificultades y concepciones presentes en las personas cuando se enfrentan a situaciones que requieren de su construcción e interpretación, desde nuestra perspectiva, debidas en gran medida a la cantidad de conceptos estadísticos que subyacen a su construcción y que necesitan ser integrados de manera adecuada. En consecuencia, consideramos que la construcción de un intervalo de confianza debe empezar por el establecimiento de relaciones adecuadas entre estos conceptos, de tal manera que si un individuo logra construir dichas relaciones, podrá alcanzar una mejor comprensión de los intervalos de confianza.

A continuación describiremos de manera hipotética cómo un individuo puede construir un buen entendimiento de intervalo de confianza para estimar la media poblacional asumiendo que se conoce la desviación estándar poblacional σ, independientemente del contexto para el cual se requiera su construcción e interpretación.

Cuando un individuo se enfrenta a una situación en la que se requiere de la construcción e interpretación de un intervalo de confianza, se espera tenga en cuenta los siguientes conceptos estadísticos previos.

A. Probabilidad
B. Población
C. Parámetro
D. Muestra aleatoria
E. Estadístico
F. Estimadores puntuales
G. Distribución de probabilidad de una variable aleatoria
H. Función de densidad de probabilidad
I. Distribución normal
J. Distribuciones muestrales
K. Teorema Central del Límite

Esto conceptos estadísticos deben ser relacionados de manera coherente, lo cual requiere de ciertas concepciones alrededor de dichos conceptos, las cuales se presentan a continuación.

Concepciones previas necesarias

A continuación describimos las concepciones previas que se espera tenga un individuo alrededor de cada uno de los anteriores conceptos para construir de manera exitosa una concepción válida de intervalo de confianza.

Concepción proceso de probabilidad: Cuando un individuo asocia el valor de probabilidad con las repeticiones de un evento y tiene en cuenta que la frecuencia relativa de los resultados de un cierto experimento aleatorio tienden a estabilizarse alrededor de cierto número, que es precisamente el valor de su probabilidad; y además tiene en cuenta que para que se dé esta convergencia las diversas repeticiones del experimento deben ser independientes, y que el valor de probabilidad se obtiene como valor límite, decimos que tiene una concepción proceso de probabilidad. Esta concepción es requerida o reflejada en la interpretación del nivel de confianza de los intervalos de confianza cuando, por ejemplo, se asume que un nivel de confianza del 95% me indica que si se toman 100 muestras del mismo tamaño de una misma población y se construye un intervalo de confianza para cada una, en 95 de ellos se espera esté el parámetro que se desea estimar y por tanto existan algunos que no lo contengan. Ahora bien, esta concepción proceso de probabilidad convive con la interpretación subjetiva de la probabilidad que hace referencia al grado de confianza que se adjudica a la realización del evento que se está considerando. Esta interpretación subjetiva puede también generar un valor numérico que va a depender del conocimiento particular que la persona posee sobre el experimento que se esté realizando y que, por supuesto, no puede repetirse a libertad.

Concepción objeto- proceso de población: Se caracteriza por la capacidad del individuo de asumir la población como un todo y en la cual sus valores posibles se presentan de una forma tal que responden a su distribución de probabilidad. Además, que esta distribución se caracteriza por un conjunto de parámetros que siendo constantes son imposibles de conocer exactamente pero que es necesario estimar.

Concepción proceso de muestra aleatoria: Se caracteriza por la capacidad del individuo de reflexionar sobre la importancia de la forma como se seleccionó la muestra, es decir, a partir de un muestreo aleatorio y que de esto depende la confiabilidad de los resultados y su generalización. Además, el individuo debe ser consciente que el tamaño muestral tiene un efecto en la estimación de los parámetros poblacionales.

Concepción objeto de parámetro: En este caso el individuo debe tener claro que un parámetro es una característica asociada a los datos, más concretamente, a la distribución que estos tienen. Es consciente de que un parámetro es una constante y por tanto un valor que representa a toda una población. En nuestro caso, el parámetro es la media poblacional (μ) y se sabe que es imposible conocer su valor exacto, luego lo único que se puede hacer es una estimación y no una búsqueda de su valor exacto.

Concepción objeto de estadístico: Cuando un el individuo asume que un estadístico, el estimador del parámetro, es una variable aleatoria ya que su valor depende de la muestra seleccionada y que, por lo tanto, es necesario conocer su distribución de probabilidad. Además es consciente de que se pueden realizar acciones sobre ese estadístico representadas en operaciones aritméticas.

Concepción proceso de estimación puntual: Cuando el individuo reconoce que el valor obtenido del estimador a partir de una muestra es una estimación del parámetro buscado y aunque el estimador es insesgado (en el caso de $\bar{x}$ como estimador de μ) su calidad como estimador no está garantizada porque la probabilidad de que su valor sea exactamente la del parámetro buscado es nula. En esta dirección, para que la estimación tenga probabilidad positiva de acierto debe incluir todo un conjunto de valores, un intervalo, cuya construcción, precisamente, es la que se desea realizar.

Concepción proceso de distribución de probabilidad de una variable aleatoria: Un individuo tiene una concepción proceso de distribución cuando asume la distribución como la descripción de los valores posibles de la variable y de su probabilidad (en el caso discreto), o densidad de probabilidad de ocurrencia, en el caso continuo. Aunque bien podría pensarse en la concepción objeto de distribución para poder plantear la distribución de una variable que se define a partir de otra u otras, consideramos que para el caso específico de los intervalos de confianza es suficiente con la concepción proceso ya que solo se requiere el carácter dinámico que encierra en sí mismo este concepto.

Concepción proceso de función de densidad de probabilidad: Si bien en el caso de las variables aleatorias discretas es suficiente definir la función de probabilidad asociada a cada valor posible, en el caso continuo las cosas son bien diferentes porque los valores posibles no son contables. Para este caso, se opta por definir una función de densidad de probabilidad que identifica las regiones donde la probabilidad es más o menos densa, es decir, las regiones donde intervalos del mismo tamaño tengan más o menos probabilidad de contener los resultados de los experimentos asociados. El individuo debe tener claro que la función de densidad de probabilidad no es una probabilidad y que las probabilidades en este caso, solo tienen sentido en intervalos y que se calculan con base en el área comprendida debajo de la curva que representa a la función de densidad en el intervalo deseado. Siendo X una variable aleatoria continua y $f(x)$ su función de densidad, se tiene

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Donde a y b son números reales. En verdad, este concepto más que proceso es todo un esquema ya que se puede asumir tanto como proceso, como objeto además de que debe coordinarse con otros conceptos no estadísticos tales como la integral.

Concepción objeto de Distribución Normal: Una evidencia de esta concepción objeto se da cuando para la construcción del intervalo de confianza para la media poblacional el individuo reflexiona sobre la distribución normal y sus propiedades asumiéndola como la distribución que sigue la variable aleatoria $\bar{X}$, tal como lo afirma el teorema central del límite, el cual afirma que la distribución de las medias muestrales es aproximadamente normal, es decir, $\bar{X} \sim N\left(\mu\, , {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right)$. Al estandarizar, es decir, al aplicar acciones sobre la variable aleatoria $\bar{X}$, va a obtener que

$$\frac{\bar{X} - \mu}{{}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}} = Z \sim N(0\,,1)$$

Expresión clave para determinar el percentil de la normal estándar asociado al nivel de confianza representado por $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. La acción de estandarización efectuada sobre la variable aleatoria $\bar{X}$ no solo permite encapsularla como un objeto sino que también hace lo propio con la distribución normal.

Concepción proceso del Teorema Central del Límite: El individuo reconoce la necesidad de saber o conocer la distribución que sigue la variable aleatoria que va a ser utilizada como estimador. Precisamente el Teorema Central del Límite (TCL) es la forma de obtener una distribución aproximada para la variable aleatoria $\bar{X}$. Más específicamente, el TCL afirma que la distribución de $\bar{X}$ es aproximadamente normal con media el parámetro μ que se quiere estimar y desviación estándar la misma desviación de la población dividida por la raíz cuadrada del tamaño muestral. Algebraicamente toma la forma:

$$\bar{X} \sim N(\mu, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}})$$

La aproximación es mejor cuánto más se aumenta el tamaño muestral y va a depender de la población en estudio, sin embargo estudios de simulación garantizan que con muestras al menos con 30 datos la aproximación es bastante buena. Si el estudiante posee estas ideas se puede asumir que tiene una concepción proceso del teorema central del límite con visos de esquema ya que contempla la relación de varias estructuras alrededor de la media muestral $\bar{X}$, la distribución de probabilidad, la distribución normal y la distribución normal estándar.

Una vez que un individuo tenga las concepciones anteriormente descritas, debe relacionarlas. El mecanismo que le va a permitir relacionar las concepciones proceso es el de la *coordinación*, el cual consiste en el acto cognitivo de tomar dos o más procesos y relacionarlos de manera adecuada para llegar a un nuevo proceso, es decir, buscar nexos que permitan conectarlos (Arnon et al., 2014). Este mecanismo se da por la necesidad de encontrar elementos comunes en los procesos relacionados de tal manera que permitan al individuo construir un nuevo proceso que posteriormente puede ser encapsulado en un objeto cognitivo.

Establecimiento de relaciones entre las concepciones previas necesarias

Asumiendo que el objetivo final de la enseñanza de un concepto estadístico es la interpretación del mismo y su aplicación a situaciones concretas, a continuación se describe la forma como se da la coordinación entre las concepciones previas necesarias para advertir la necesidad de construir un intervalo de confianza a partir de un objeto construido previamente llamado estimador puntual sobre el cual se realizan acciones con el objetivo de construir el intervalo de confianza.

En nuestro caso, se inicia con la necesidad de conocer un parámetro de localización de la distribución de los datos de una población, la media poblacional (μ), que debe ser asumida como una característica asociada a la población, más concretamente, a la distribución de la población.

Entonces ¿cómo se obtiene la media? La media no se puede conocer con exactitud, ya que la población puede ser infinita, o si es finita, es demasiado grande, por lo que el individuo se va a ver en la necesidad de tomar un pedacito de ella, una muestra conformada por n datos. Ahora, el problema es saber qué hacer con esos datos para que le brinden información sobre el valor de la media poblacional. Si tiene claro el significado de la esperanza como un promedio de todos los datos poblacionales puede pensar en calcular el promedio de los valores de la muestra, esto es, calcular el valor de $\bar{x}$. El valor obtenido es apenas una estimación y es el resultado de realizar algunas operaciones (acciones) sobre los datos.

Ya calculado este estadístico, el estimador puntual del parámetro que se desea estimar, surge la pregunta ¿qué tan buena es esa estimación puntual? En este punto el individuo se da cuenta de que si cambia la muestra, muy seguramente cambia el valor del estimador. En este punto las acciones han sido interiorizadas y se da paso a una concepción proceso de estadístico. Un individuo que muestra una concepción proceso de estadístico puede pensar que por cada muestra que tome va a obtener un valor distinto para $\bar{x}$, luego $\bar{x}$ es una variable aleatoria y, por lo tanto, hay que buscar un modo de estudiarla en forma global, es decir, se debe conocer su distribución de probabilidad.

Justo en este momento es cuando entra en juego el teorema central del límite. El individuo, a través de procesos de simulación (acciones computarizadas), debe percibir la forma acampanada de las distribuciones muestrales (es decir del estadístico $\bar{X}$) y, luego de verificar que además de la simetría la distribución cumple con regla del 68-95-99,7 puede conjeturar que $\bar{X}$ sigue una distribución normal con media, precisamente μ, (que hace de $\bar{X}$ un estimador insesgado) y con una desviación estándar que es inversamente proporcional al tamaño muestral, es decir,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu , {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right) \quad \textbf{(1)}$$

Hasta el momento, a partir de la coordinación de algunas concepciones previas necesarias se cuenta con una concepción proceso de estimación puntual asociada a un estadístico cuya distribución de probabilidad se asemeja a una distribución normal en la que el parámetro que se desea conocer es su valor esperado. Una vez encapsulada esta concepción proceso de estimador puntual se da paso a la construcción del intervalo de confianza.

Construcción del intervalo de confianza

Si bien se cuenta con la concepción proceso de estimador puntual, la cual da lugar a conocer la distribución aproximada del estimador $\bar{X}$ (expresión 1), se hace necesario llevarla a la normal estándar, acción que se conoce como la estandarización de la variable aleatoria (acciones sobre el objeto $\bar{X}$), para poder calcular probabilidades, es aquí donde el individuo asume dicho estimador puntual como un todo al cual se le puede aplicar acciones dando lugar a la expresión (2).

$$\frac{\bar{X}-\mu}{{}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}} = Z \sim N(0\,,1) \quad \textbf{(2)}$$

Se trata ahora de construir el intervalo de menor tamaño que con cierta probabilidad $(1-\alpha)$ contenga los valores de la variable aleatoria normal. Este intervalo tiene como límites $-\boldsymbol{Z}_{1-\alpha/2}$ y $\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}/\mathbf{2}}$ ya que Z sigue una distribución normal estándar. El valor $(1-\alpha)$ es el nivel de confianza y está representado en los valores $-\boldsymbol{Z}_{1-\alpha/2}$ y $\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}/\mathbf{2}}$. Luego

$$P\left(-Z_{1-\alpha/2} < Z < Z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \quad \textbf{(3)}$$

De aquí en adelante las acciones que se realizan son algebraicas: sustituyendo a $\boldsymbol{Z}$ por su valor en (2), se obtiene

$$P\left(-Z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha, \quad \textbf{(4)}$$

Al despejar $\boldsymbol{\mu}$ se obtiene

$$P\left(\bar{X} - Z_{1-\alpha/2}\,{}^{\sigma}/_{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\alpha/2}\,{}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \quad \textbf{(5)}$$

La expresión (5) define un intervalo centrado en $\bar{X}$ que contiene al parámetro μ con probabilidad $(1-\alpha)$. Este intervalo que, necesariamente, depende del valor de $\bar{X}$, tiene la forma:

$$\bar{X} \pm Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \textbf{(6)}$$

La probabilidad $1-\alpha$ que es precisamente el nivel de confianza del intervalo, merece una explicación. El valor de probabilidad se asocia con una variable aleatoria y hace referencia a los posibles valores que ella puede asumir. En nuestro caso, este valor se interpreta de la siguiente forma: En promedio de cada 100 intervalos construidos con base en 100 muestras y, por ende, en 100 valores $\bar{X}$, $(1-\alpha)$*100 de ellos satisfacen las restricciones dadas en (5), es decir, contienen el parámetro μ.

Ahora bien, la expresión (6) muestra claramente que el intervalo de confianza está centrado en $\bar{X}$ y que su radio depende del nivel de confianza, de la desviación poblacional y de la raíz cuadrada del tamaño muestral, las dos primeras en forma directamente proporcional y la tercera en forma inversamente proporcional. Una interpretación diferente retoma la estimación puntual diciendo que la estimación por intervalo es un proceso que la asume pero que acepta que contiene un error que depende de los tres factores mencionados.

Teniendo en mente los conceptos estadísticos que intervienen tanto de forma indirecta, mencionados al inicio de la descomposición genética, y de forma directa en la construcción de un intervalo de confianza, a continuación se plantean las estructuras mentales que puede desarrollar un individuo cuando aprende el concepto de intervalo de confianza.

Comprensión de los intervalos de confianza

A continuación se describen los tipos de concepciones, en términos de las estructuras mentales, que se espera desarrolle un individuo cuando comprende el proceso de construcción de intervalos de confianza para la media poblacional asumiendo que la desviación estándar poblacional se conoce.

Acción: es una transformación de un objeto matemático, que es percibida por el individuo que la realiza como externa, es decir, no reflexiona sobre lo que hace. En el caso de los intervalos de confianza, es cuando el individuo con la ayuda del lápiz y el papel hace uso de la expresión

$$\bar{X} \pm Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

para construir el intervalo de confianza sin reflexionar sobre lo que significa en sí misma. En este caso se dice que el individuo tiene una **concepción acción** de intervalo de confianza. Cuando estas acciones se hacen con la ayuda de un software el estudiante lo que hace es digitar la información que le pide el software pero desconoce el proceso que subyace a su construcción, es decir, el individuo ni siquiera es consciente de la acción que realiza. Es pertinente aclarar que estar en una concepción acción no se traduce, necesariamente, en una incomprensión del significado de intervalo de confianza, el individuo puede ser consciente con base en procesos de reflexión intuitivos de los elementos que pueden afectar la precisión de un intervalo. Ejemplos de este tipo se observaron en las entrevistas a profundidad que se realizaron con algunos de los estudiantes que participaron en esta investigación.

Proceso: Cuando el individuo reflexiona sobre las acciones que realiza sobre el objeto matemático y es capaz de describirlas sin ayudas externas, se dice que las interiorizó y está en una concepción proceso del objeto.

En el caso de los intervalos de confianza, cuando el individuo no tiene la necesidad de hacer los cálculos explícitos reflexionando sobre los efectos de los elementos que intervienen de forma directa en la construcción de un intervalo de confianza, como lo son el nivel de confianza, el tamaño muestral y la desviación estándar poblacional (en el caso de que se conozca) o la desviación estándar de la media muestral (en el caso de que no la conozca), se dice que el individuo tiene una **concepción proceso** de intervalos de confianza.

Objeto: cuando el individuo es consciente del proceso como una totalidad y puede pensar en él como un todo, de tal manera que reflexiona sobre las propiedades del proceso, se dice que el individuo tiene una concepción objeto del objeto en estudio.

En el caso de los intervalos de confianza, el individuo tiene una **concepción objeto** cuando puede extrapolar el proceso descrito para obtener un intervalo de confianza para un parámetro a un parámetro que es el resultado de operaciones realizadas sobre varios parámetros. Es este el caso de la estimación de intervalos de confianza para la diferencia de medias, para la diferencia de varianzas, para el cociente de medias, entre otros.

A su vez, el individuo posee una concepción objeto de intervalo de confianza cuando discrimina claramente sus propiedades, en particular, cuando conoce el efecto que sobre su precisión tienen los elementos que lo componen: tamaño muestral, nivel de confianza y desviación estándar poblacional (o muestral).

Esquema: Cuando el individuo establece relaciones adecuadas y coherentes entre todos los elementos, mecanismos y estructuras ya constituidas para luego aplicarlas en la solución de situaciones que se plantean fuera del contexto que le da origen, se dice que posee un esquema de intervalo de confianza.

El esquema asociado a los intervalos de confianza se refleja en la concepción que sobre todo el proceso de construcción de dicho concepto posea. Los elementos que lo conforman y las relaciones que poseen entre sí que son las que permiten obtener los intervalos de confianza como un proceso de estimación válido de parámetros poblacionales. Un ejemplo de esquema es el descrito en el apartado Construcción del intervalo de confianza. No obstante la importancia de los esquemas en la formación de conocimiento válido de un concepto matemático, en este trabajo su descripción será apenas superficial, de hecho, una descripción más amplia daría lugar a un trabajo de investigación mayor y válido por sí mismo.

Si bien esta descomposición genética, resultado del análisis teórico, es solo un acercamiento sobre aquello que suponemos es necesario y suficiente para la construcción e interpretación adecuada de un intervalo de confianza, es base fundamental para el diseño y aplicación de la entrevista didáctica con la cual se busca motivar la reflexión de los estudiantes a partir de cuestionamientos guiados que les permitan reflexionar sobre algunos conceptos estadísticos y su relación con los intervalos de confianza, de los cuales no se habían percatado.

Posteriormente al análisis de los resultados del cuestionario y de las entrevistas realizadas, se presentará una versión más refinada de esta descomposición genética que esté más acorde con las estructuras y mecanismos que se hubieran podido detectar en los profesores de matemáticas en formación que hicieron parte del estudio.

El siguiente capítulo se dedica al análisis y discusión de resultados, tercera componente del ciclo de investigación planteado por la Teoría APOE.

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Con la aplicación de la tercera componente propuesta por la Teoría APOE, llamada en este estudio análisis y discusión de resultados, se pretende, en primer lugar, identificar las estructuras y mecanismos mentales que los profesores de matemáticas en formación que participan en el estudio construyeron sobre los intervalos de confianza, y determinar si los individuos alcanzaron las estructuras y mecanismos mentales planteados en la descomposición genética preliminar planteada a partir del análisis teórico. Para lo cual, la primera parte del análisis se realiza teniendo en cuenta los siguientes criterios:

I. Identificación de los tipos de concepciones presentes en los profesores de matemáticas en formación que son parte del estudio sobre los intervalos de confianza y los conceptos asociados, a través del análisis de sus respuestas al cuestionario aplicado y que se describe ampliamente en el capítulo de Metodología.
II. Identificación de las estructuras y mecanismos mentales presentes en los sujetos que participan en el estudio en torno al concepto de intervalos de confianza mediante el análisis de cada una de las entrevistas realizadas.
III. Planteamiento de las estructuras y mecanismos mentales alcanzadas por los profesores de matemáticas en formación planteadas en la descomposición genética preliminar del concepto de intervalo de confianza para la media poblacional.

La segunda parte del análisis está dirigida a identificar, en término de las estructuras y mecanismos mentales, las posibles causas de la interpretaciones que hacen los estudiantes de matemáticas en formación en torno a los intervalos de confianza y al efecto que sobre ellos tienen los conceptos estadísticos que intervienen de manera directa en su construcción.

5.1 Análisis y discusión del cuestionario

A continuación se presenta con detalle el análisis hecho a las respuestas ofrecidas por los profesores en formación. Inicialmente se realiza un análisis cuantitativo para presentar en forma compacta las respuestas obtenidas; posteriormente se hace un análisis cualitativo de ellas con el objetivo de identificar los tipos de concepciones presentes en los sujetos que participan en el estudio.

En la

Tabla 5 se muestra el resumen de las respuestas dadas para cada ítem.

Tabla 5. Análisis de las respuestas

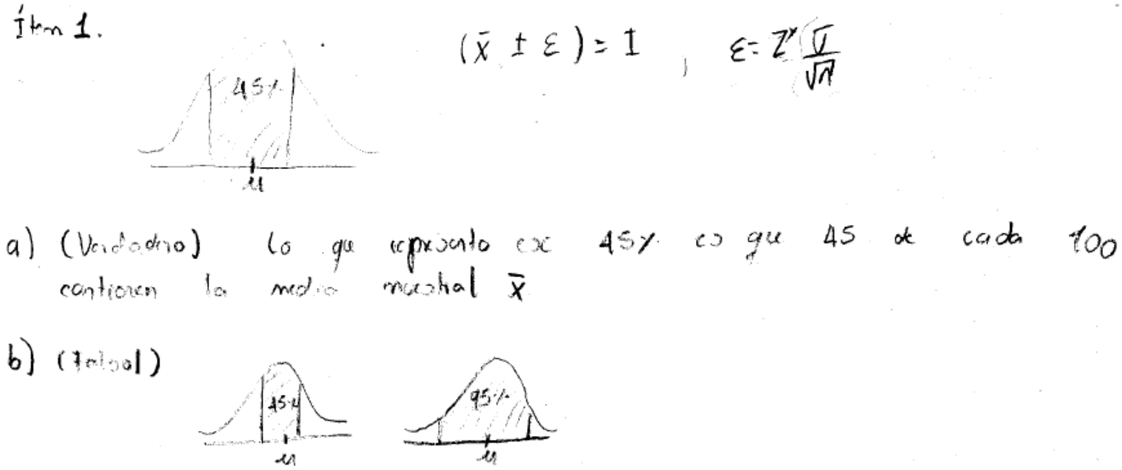
	Ítem 1				Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5			Ítem 6	Ítem 7	Ítem 8	Ítem 9
	A	B	C	D				A	B	C				
Respuestas Correctas	7	12	7	13	8	8	9	7	2	8	7	12	4	5
Respuestas Erradas	8	3	6	1	7	7	5	8	13	7	8	3	11	10
No respuestas	-	-	2	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-
Totales	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Ítem 1. *Un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (μ) es:*

a) *El intervalo que contiene el 45% de los valores posibles de la media muestral ($\bar{x}$). F__ V__*
b) *Un intervalo más ancho que el intervalo de confianza del 95%. F__ V__*
c) *Un intervalo de valores calculado a partir de los datos de la muestra. En el 45% de las muestras de una población, el intervalo calculado contiene a la media de la población. F__ V__*
d) *Dos veces más ancho que el intervalo de confianza del 90%. F__ V__*

7 de los 15 profesores en formación (47%) consideran que un intervalo de confianza contiene los posibles valores de la media muestral y no los posibles valores de la media poblacional. Esta confusión fue reportada en varios estudios previos (Ver Behar, 2001; Cumming et al., 2004; Cumming, 2005; delMas, Garfield, Ooms y Chance, 2007; Olivo, 2008) La Ilustración 4 lo evidencia.

Ilustración 4. Respuesta del profesor en formación 2 al ítem 1 parte a y b



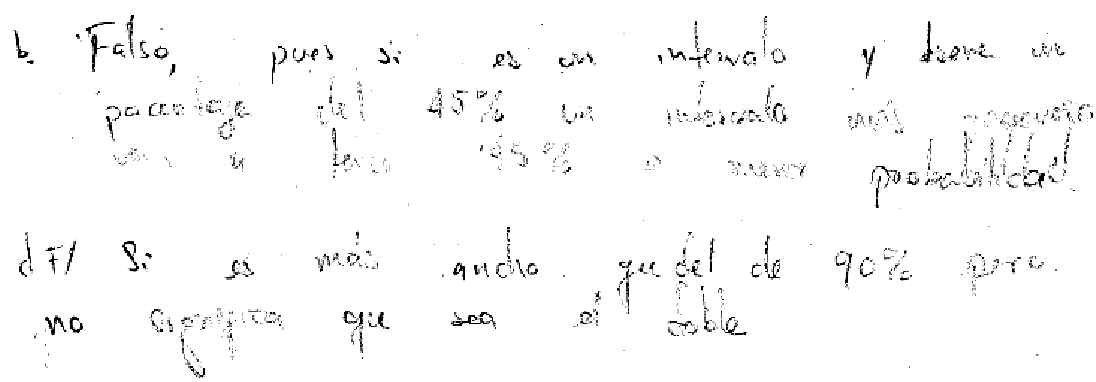
a) (Verdadero) *lo que representa ese 45% es que 45 de cada 100 contienen la media muestral* $\bar{x}$.

b) (Falso)

En la respuesta anterior también se observa que el profesor ubica a la media poblacional en el centro del intervalo.

8 de los 15 profesores en formación (54%) consideran que el ancho de un intervalo con 45% de confianza es mayor que el ancho de un intervalo de 95% de confianza, en otras palabras consideran que el tamaño del intervalo es inversamente proporcional al nivel de confianza, hecho que ha sido reportado en varias investigaciones. Ver Behar, 2001; Cumming et al., 2004; Cumming, 2005; Olivo, 2008; Salcedo et al., 2011.

Ilustración 5: Respuesta del profesor en formación 11 al ítem 1 parte b y d.

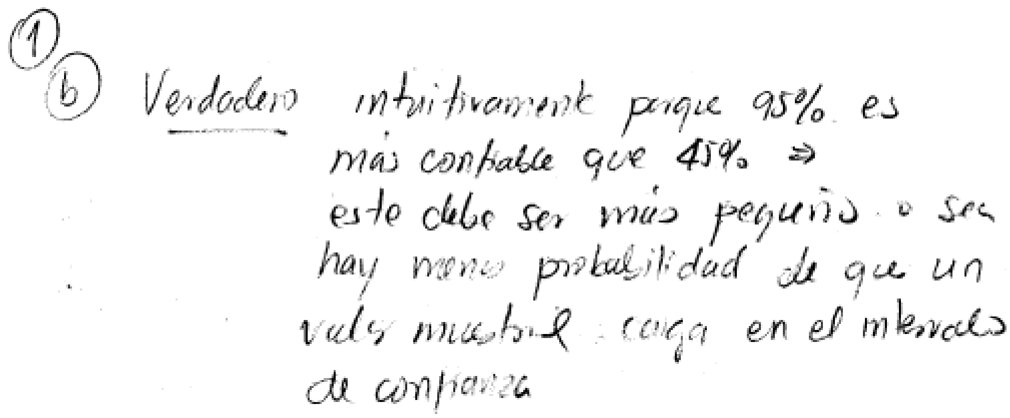


b. Falso, pues si es un intervalo y tiene un porcentaje de 45% un intervalo más pequeño va a tener 45% o menor probabilidad.

d. F/ si es más ancho que del 90% pero no significa que sea el doble.

Las respuestas del profesor 11 evidencian la proporcionalidad inversa del tamaño respecto al nivel de confianza.

Ilustración 6: Respuesta del profesor en formación 13 al ítem 1 parte b.

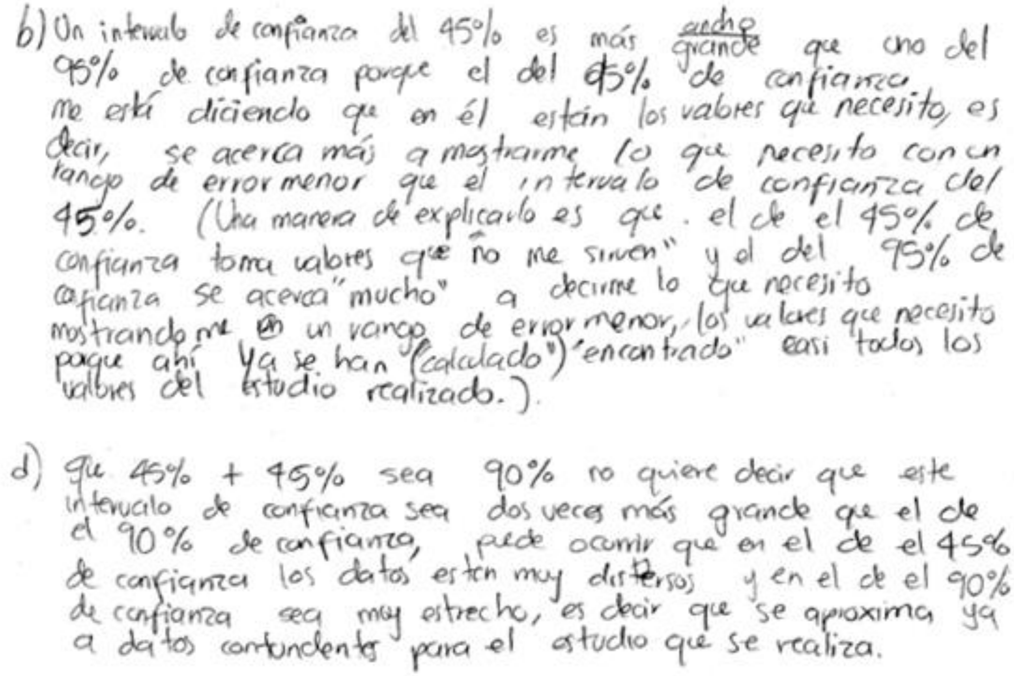

1 b Verdadero intuitivament porque 95% es más confiable que 45% ⇒ esto debe ser más pequeño o sea hay meno probabilidad de que un valo muestral caiga en el intervalo de confianza

<u>Verdadero</u> intuitivamente porque 95% es más confiable que 45% entonces este debe ser más pequeño o sea hay menos probabilidad de que un valor muestral caiga en el intervalo de confianza.

El profesor 13 considera de manera natural que a mayor nivel de confianza mayor confiabilidad de la estimación y por lo tanto menor tamaño del intervalo, y a partir de esto deduce que el tamaño del intervalo de 45% es mayor que el del intervalo con 95% de confianza, lo cual es una contradicción, mostrando la falta de claridad en el efecto del nivel de confianza en el tamaño del intervalo.

Otro ejemplo de este hecho se observa en la respuesta del profesor 9, Ilustración 7

Ilustración 7. Respuesta del profesor en formación 9 al ítem 1 parte b y d


b) Un intervalo de confianza del 45% es más ancho grande que uno del 95% de confianza porque el del 95% de confianza me está diciendo que en él están los valores que necesito, es decir, se acerca más a mostrarme lo que necesito con un rango de error menor que el intervalo de confianza del 45%. (Una manera de explicarlo es que el de el 45% de confianza toma valores que "no me sirven" y el del 95% de confianza se acerca "mucho" a decirme lo que necesito mostrandome un rango de error menor, los valores que necesito porque ahí ya se han (calculado") "encontrado" casi todos los valores del estudio realizado.)

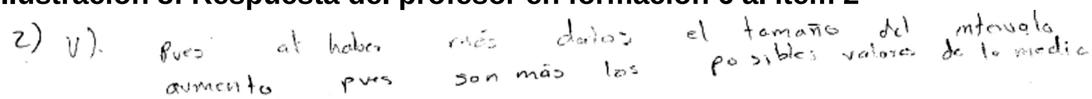
d) que 45% + 45% sea 90% no quiere decir que este intervalo de confianza sea dos veces más grande que el de el 90% de confianza, puede ocurrir que en el de el 45% de confianza los datos estén muy dispersos y en el de el 90% de confianza sea muy estrecho, es decir que se aproxima ya a datos contundentes para el estudio que se realiza.

b) Un intervalo del 45% es más grande (ancho) que uno del 95% de confianza, porque el de 95% de confianza me está diciendo que en él están los valores que necesito, es decir, se acerca más a mostrarme lo que necesito con un rango de error menor que el intervalo de confianza del 45%. (una manera de explicarlo es que el del 45% de confianza toma valores que "no me sirven" y el del 95% de confianza se acerca "mucho" a decirme lo que necesito mostrándome un rango de error menor, los valores que necesito porque ahí ya se han (calculado) "encontrado" casi todos los valores del estudio revisado)
d) que 45%+45% sea 90% no quiere decir que este intervalo de confianza sea más grande que el del 90% de confianza, puede ocurrir que en el de 45% de confianza los datos estén muy dispersos y en el 90% sea muy estrecho, es decir, que se aproxima ya a datos contundentes para el estudio que se realiza.

Ítem 2. *Si se aumenta el tamaño muestral, conservando los demás datos constantes, el intervalo de confianza se hace más ancho. F__ V__*

9 de 15 profesores en formación (60%) consideran que el tamaño muestral es directamente proporcional al tamaño del intervalo, consideración reportada en estudios previos (Ver Behar, 2001; Cumming et al., 2004; Cumming, 2005; Olivo, 2008; Salcedo et al., 2011, entre otros).

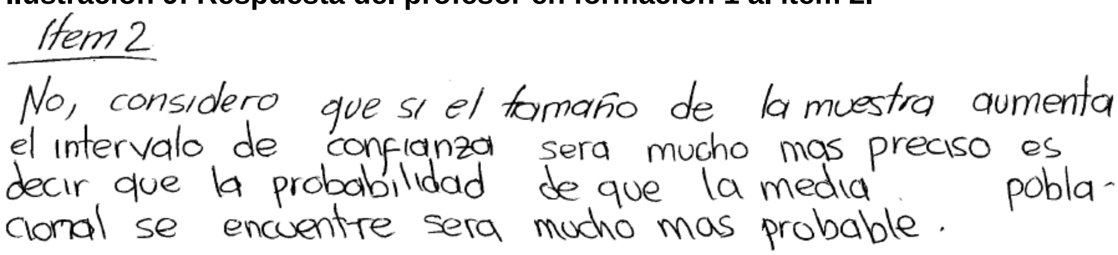
Ilustración 8: Respuesta del profesor en formación 6 al ítem 2


2) V). Pues al haber más datos el tamaño del intervalo aumenta pues son más los posibles valores de la media

V) pues al haber más datos el tamaño del intervalo aumenta pues son más los posibles valores de la media.

La respuesta anterior (Ver Ilustración 8) ratifica la hipótesis de que las concepciones de los estudiantes respecto a los intervalos de confianza tienen su origen en la media muestral $\overline{X}$, mejor dicho en la concepción de que los intervalos de confianza se asocian exclusivamente con la distribución de probabilidad de esta variable aleatoria y sus posibles valores. En este caso, el estudiante asume que al ser mayor el tamaño muestral son más las formas distintas de obtener valores distintos de la media muestral razón que obliga a tener un intervalo mayor que las pueda contener. Esta creencia no es del todo cierta, en poblaciones finitas llega un momento que el número de muestras se reduce cuando aumenta el tamaño muestral.

Ilustración 9: Respuesta del profesor en formación 1 al ítem 2.


Ítem 2

No, considero que si el tamaño de la muestra aumenta el intervalo de confianza sera mucho mas preciso es decir que la probabilidad de que la media poblacional se encuentre sera mucho mas probable.

Ítem 2

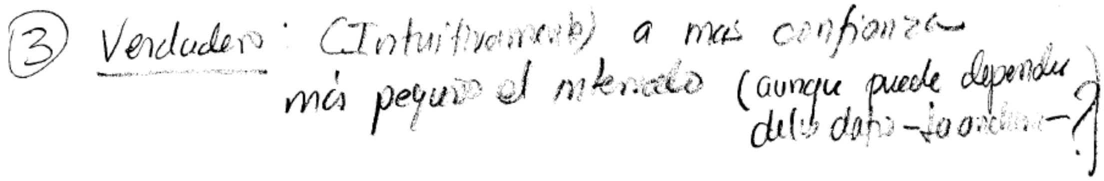
No, considero que si el tamaño de la muestra aumenta el intervalo de confianza será mucho más preciso, es decir que la probabilidad de que la media poblacional se encuentre será mucho más probable.

La respuesta anterior (Ver Ilustración 9) muestra la asociación que establece el estudiante entre el tamaño muestral y la precisión del intervalo. El problema es el significado que le adjudica a la precisión que la asocia con la probabilidad de que el intervalo contenga la media poblacional y no con el tamaño del intervalo. Esta concepción sobre la precisión, que discutiremos en detalle más adelante, se equipara a la concepción que sobre el nivel de confianza tienen muchos estudiantes que lo consideran, en igual forma, como el valor de probabilidad de que el intervalo contenga la media poblacional.

Ítem 3. *Si se aumenta el nivel de confianza, manteniendo los demás datos constantes, el intervalo de confianza se vuelve más angosto. F__ V__*

8 de los 15 profesores en formación (54%) consideran que a medida que aumenta el nivel de confianza, el ancho del intervalo disminuye. Una evidencia de esto se observa en la Ilustración 10.

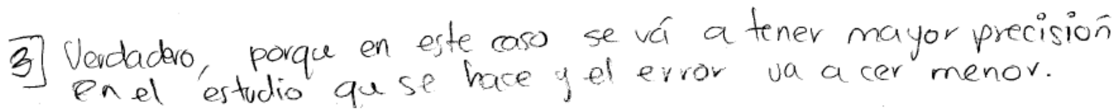
Ilustración 10. Respuesta del profesor en formación 13 al ítem 3



Verdadero: (intuitivamente) a más confianza más pequeño el intervalo (aunque puede depender de los datos – la anchura- ?)

Otro ejemplo de esto se presenta a continuación.

Ilustración 11: Respuesta del profesor en formación 9 al ítem 3.



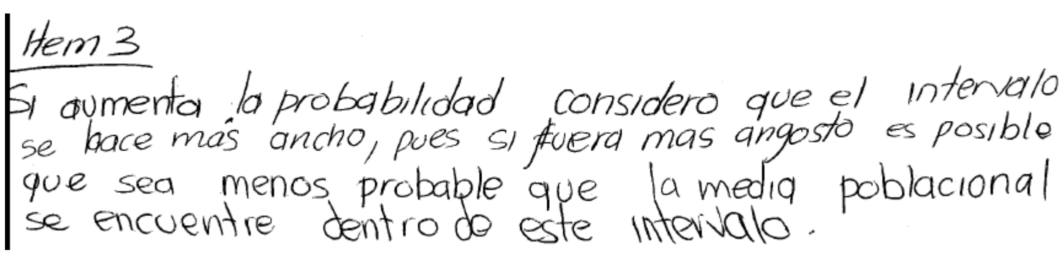
3) verdadero porque en este caso se va a tener mayor precisión en el estudio que se hace y el error va a ser menor.

En esta respuesta (Ver Ilustración 11) se observa que se está asociando el nivel de confianza con la precisión del intervalo, confusión que no ha sido reportada en las investigaciones consultadas.

Entre las respuestas válidas la más popular es la que asocia el nivel de confianza con el valor de probabilidad que tiene el intervalo de contener la media poblacional, tal como lo han reportado gran parte de los estudios de investigación realizados alrededor de los intervalos de confianza.

Con este ítem también se pudo identificar que al nivel de confianza se le asocia una interpretación bayesiana como se observa en la Ilustración 12.

Ilustración 12: Respuesta del profesor en formación 1 al ítem 3.

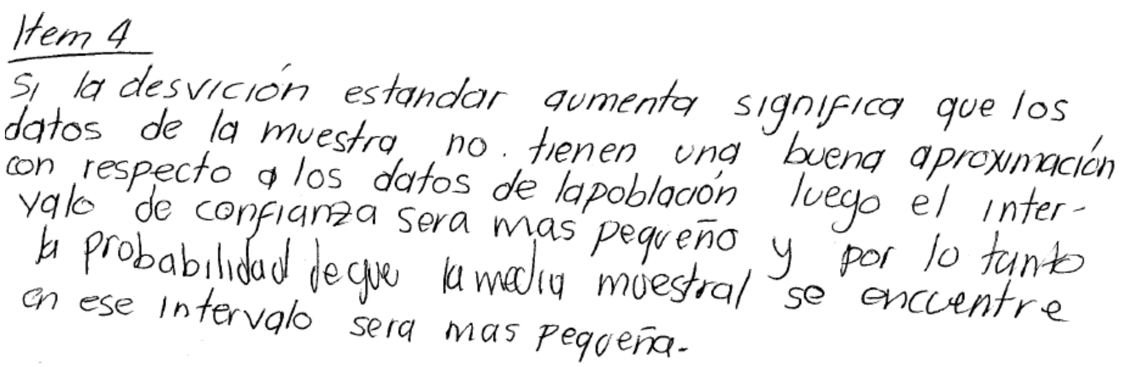


<u>Ítem 3</u> Si aumenta la probabilidad considero que el intervalo se hace más ancho, pues si fuera más angosto es posible que sea menos probable que la media poblacional se encuentre dentro de ese intervalo

Ítem 4. Si la desviación estándar de la población aumenta, el intervalo de confianza disminuye en la anchura. F__ V__

6 de 15 profesores en formación (40%) consideran que a medida que aumenta la desviación estándar de la población, el tamaño del intervalo disminuye. Una evidencia de esta creencia se muestra a continuación (Ver Ilustración 13).

Ilustración 13: Respuesta del profesor en formación 1 al ítem 4.


Ítem 4
Si la desvición estandar aumenta significa que los
datos de la muestra no. tienen una buena aproximación
con respecto a los datos de lapoblación luego el inter-
valo de confianza sera mas pequeño y por lo tanto
la probabilidad deque la media muestral se encuentre
en ese intervalo sera mas pequeña-

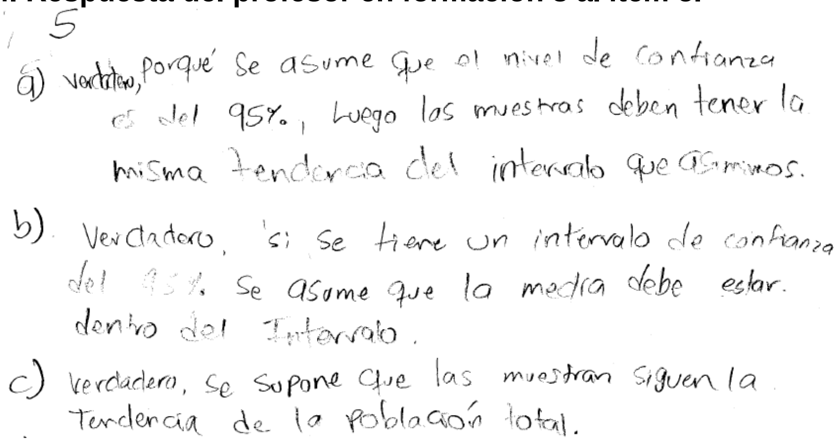
Ítem 5. Asumiendo un nivel de confianza del 95%:

a. Si se toman muchas muestras y con cada una se construye el intervalo respectivo, la media muestral caerá, aproximadamente, en el 95% de los intervalos construidos. F__ V__
b. La probabilidad de que la media muestral caiga dentro de un intervalo de confianza calculado de una muestra específica es 0.95. F__ V__
c. Si se toman muchas muestras de igual tamaño, aproximadamente el 95% de los intervalos de confianza calculados contendrían a la media poblacional. F__ V__

Los 15 profesores en formación (100%) que respondieron el cuestionario no tienen claridad en el significado del nivel de confianza, pues no lo asocian con una frecuencia relativa, en otras palabras, no asumen que el nivel de confianza lo que dice es que si se repite el muestreo muchas veces y se construye un intervalo para cada muestra, se espera que un porcentaje igual al nivel de confianza de intervalos contenga el parámetro que se desea estimar y por lo tanto existan algunos intervalos que no lo contengan. Este hecho ha sido detectado y reportado por Behar (2001); Cumming et al., (2004); Cumming, (2005); Olivo y Batanero (2007); Olivo (2008) y Salcedo et al., (2011). En las respuestas del ítem 5 también se observa la creencia de que el intervalo contiene los posibles valores de la media muestral y no los de la media poblacional.

A continuación (Ilustración 14) se muestra evidencia de este hallazgo en los profesores de matemáticas en formación que son parte de este estudio.

Ilustración 14. Respuesta del profesor en formación 8 al ítem 5.


5

a) verdadero, porqué se asume que el nivel de confianza es del 95%, Luego las muestras deben tener la misma tendencia del intervalo que asumimos.

b). Verdadero, si se tiene un intervalo de confianza del 95% Se asume que la media debe estar. dentro del Intervalo.

c) verdadero, se supone que las muestran siguen la Tendencia de la población total.

a) verdadero, porque se asume que el nivel de confianza es del 95% luego las muestras deben tener la misma tendencia del intervalo que asumimos.

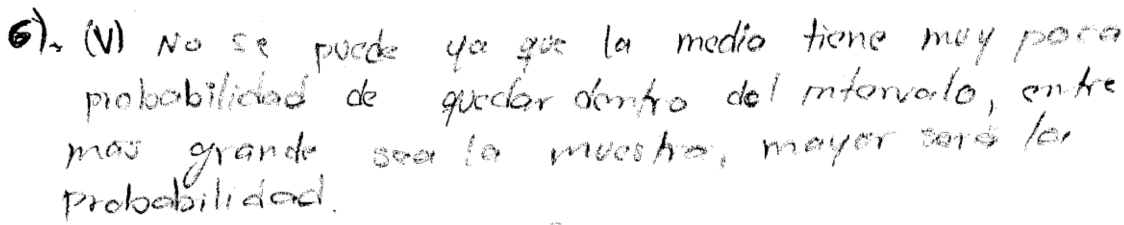
b) verdadero, si se tiene un intervalo de confianza del 95% se asume que la media debe estar dentro del intervalo.

c) verdadero, se supone que las muestras siguen la tendencia de la población total.

Ítem 6. *Si el tamaño de la muestra es muy pequeño, no se puede construir un intervalo de confianza del 99% de confianza. F__ V__*

10 de los 15 profesores en formación (66,7%) no admiten que se puede construir un intervalo de confianza del 99% con un tamaño muestral muy pequeño. Este hecho fue reportado por Behar (2001) quien detectó lo que él llamó una “debilidad conceptual” en la comprensión de cómo se relacionan los distintos elementos asociados con un intervalo de confianza, en especial el ancho del intervalo, el tamaño muestral y el nivel de confianza. A continuación se presentan algunas respuestas al ítem 6, las cuales muestran que los estudiantes no niegan la posibilidad de construirlo sino que la probabilidad de contener al parámetro buscado es muy pequeña.

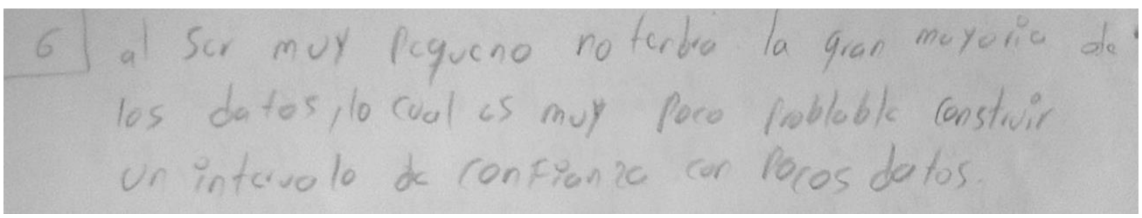
Ilustración 15. Respuesta del profesor en formación al ítem 6.


6). (V) No se puede ya que la medio tiene muy poca probabilidad de quedar dentro del intervalo, entre mas grande sea la muestra, mayor será la probabilidad.

(v) no se puede ya que la media tiene muy poca probabilidad de quedar dentro del intervalo, entre más grande sea la muestra, mayor será la probabilidad.

En esta respuesta (Ilustración 15) el estudiante asume que en la medida que aumenta el tamaño de la muestra aumenta la probabilidad de que el intervalo contenga el parámetro que se desea estimar, explicación dada por varios estudiantes ante la afirmación del ítem 6. Se podría interpretar esta intuición en términos del valor esperado de $\bar{x}$ que es igual al parámetro buscado μ. Ahora, como ese valor esperado es un límite al infinito de las medias muestrales, los estudiantes asumen que para pequeños tamaños muestrales el valor de $\bar{x}$ está tan lejano del parámetro μ que es muy poca la probabilidad de que el intervalo lo contenga. En esta interpretación se evidencia la existencia en los estudiantes de una asociación inversamente proporcional entre el nivel de confianza y el tamaño muestral: si aumenta el tamaño muestral aumenta el nivel de confianza.

Ilustración 16: Respuesta del profesor en formación 5 al ítem 6.


6 | al Ser muy Pequeno no terbra la gran mayoria de los datos, lo cual es muy Poco Probable construir un intervalo de confianza con Pocos datos.

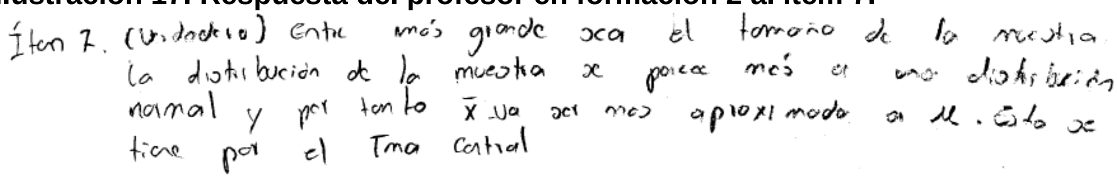
Al ser muy pequeño no tendrá la gran mayoría de los datos, lo cual es muy poco probable construir un intervalo de confianza con pocos datos.

Esta respuesta (Ver Ilustración 16) admite, al menos, dos explicaciones: 1) el estudiante asume que los valores que contiene el intervalo son los valores de la media muestral. Como la media se forma con muy pocos datos entonces deduce, erróneamente, que los valores posibles para la media muestral también son pocos; 2) el estudiante asume que el intervalo contiene los valores muestrales, y al ser muy pequeña la muestra es poco probable construir un intervalo de confianza.

Ítem 7. *Si aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional. F__ V__*

La mayoría de los estudiantes (12; 80%) asumieron como verdadera la afirmación del ítem 7, sus argumentaciones se fundamentan, principalmente, en la ley de los grandes números y en el teorema central del límite.

Ilustración 17. Respuesta del profesor en formación 2 al ítem 7.


Ítem 7. (Verdadero) Entre más grande sea el tamaño de la muestra la distribución de la muestra se parece más a una distribución normal y por tanto $\bar{x}$ va ser mas aproximado a μ. Esto se tiene por el Tma Central

(Verdadero) entre más grande sea el tamaño de la muestra, la distribución de la muestra se parece más a una distribución normal y por tanto $\bar{x}$ va a ser más aproximada a μ. Esto se tiene por el teorema central del límite.

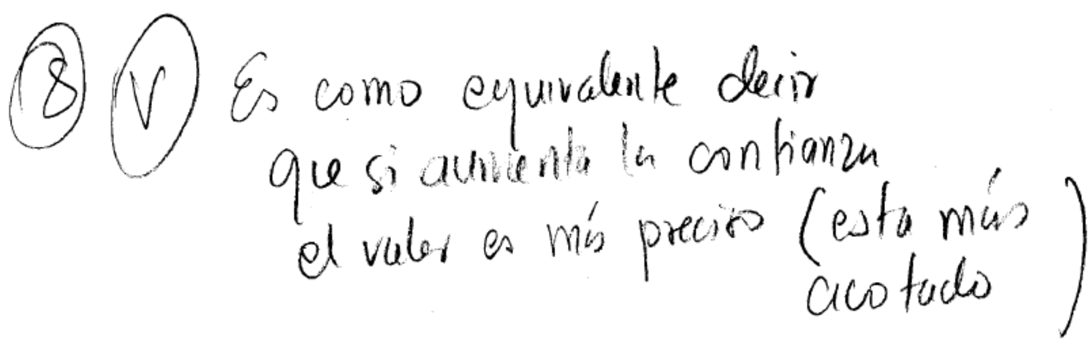
Esta contundente respuesta (ver Ilustración 17) resalta la importancia que tiene saber interpretar el Teorema Central del Límite (TCL), previamente a la construcción del intervalo de confianza. No obstante que el estudiante no lo explicita, se podría pensar que la aproximación de $\bar{x}$ a μ, a medida que aumenta el tamaño muestral, es producto del empequeñecimiento de la desviación estándar de la distribución: $\sigma/\sqrt{n}$

Ítem 8. *Si aumenta el nivel de confianza, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional. F__ V__*

11 de los 15 profesores en formación (73,4%) asocian la precisión con el nivel de confianza, a mayor nivel de confianza, mayor precisión. Los otros 4 profesores que respondieron falso no presentan argumentos en pro de su respuesta.

A continuación se presentan las respuestas de algunos de los estudiantes a este ítem (Ver Ilustración 18 e Ilustración 19)

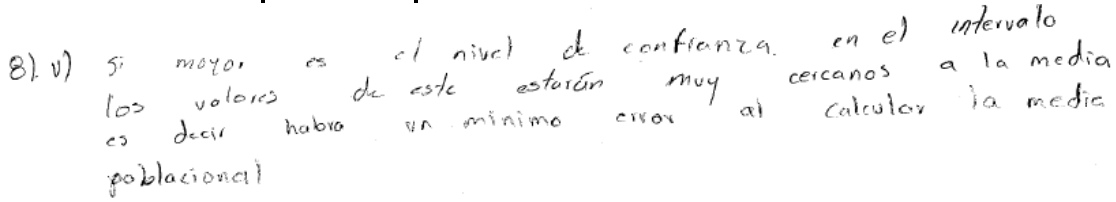
Ilustración 18. Respuesta del profesor en formación 13 al ítem 8.


8 V Es como equivalente decir
que si aumenta la confianza
el valor es más preciso (esta más
acotado)

Es como equivalente decir que si aumenta la confianza el valor es más preciso (está más acotado)

Tal y como sospechábamos, algunos estudiantes equiparan el nivel de confianza con la precisión: “es como equivalente”. Las ilustraciones 15 y 16 dan cuenta de esta concepción que va en contravía del significado del nivel de confianza.

Ilustración 19: Respuesta del profesor en formación 6 al ítem 8.


8). v) si mayor es el nivel de confianza en el intervalo los valores de este estarán muy cercanos a la media. es decir habra un minimo error al calcular la media poblacional

Si mayor es el nivel de confianza en el intervalo los valores de este estarán muy cercanos a la media, es decir, habrá un mínimo error al calcular la media poblacional.

A partir del análisis anterior se logró detectar los siguientes tipos de concepciones y dificultades ya reportadas (Behar, 2001; Bower, 2003; Cumming et al., 2004; Cumming, 2005; Olivo y Batanero, 2007, Olivo, 2008; Yáñez y Behar, 2009; Behar y Yáñez, 2009; Yáñez y Behar, 2010; Salcedo et al., 2011) en los individuos que participan en este estudio.

- Asociar el nivel de confianza con el porcentaje de datos poblacionales que caen dentro del intervalo.
- Hacer una interpretación bayesiana de nivel de confianza al no asumirlo como un referente frecuencial.
- Asumir que altos niveles de confianza, manteniendo los demás datos constantes, conlleva a un intervalo más angosto.
- Asumir que al aumentar el tamaño muestral, manteniendo los demás datos constantes, se aumenta el tamaño del intervalo.
- Asumir que los valores contenidos en un intervalo de confianza son los posibles valores de la media muestral y no los posibles valores de la media poblacional.

Adicionalmente se identificaron los siguientes tipos de concepciones que no han sido reportadas hasta el momento.

- Los estudiantes infieren que el tamaño del intervalo es inversamente proporcional al nivel de confianza.
- Los estudiantes asocian la confianza con precisión, a más confianza mayor precisión.
- Los estudiantes presentan conflicto entre la estimación puntual y la estimación por intervalos.

A su vez las justificaciones ofrecidas a cada ítem muestra la falta de claridad en cuanto a la precisión de un intervalo de confianza y el efecto de varios conceptos estadísticos que intervienen en su construcción.

5.2 Análisis y discusión de las entrevistas

A continuación se presentan las entrevistas realizadas y su respectivo análisis, con lo cual se busca identificar las estructuras y mecanismos mentales presentes en los profesores de matemáticas en formación que participan en el estudio en torno al concepto de intervalos de confianza para la media poblacional. Las estructuras detectadas se toman como medida de la pertinencia de la descomposición genética planteada inicialmente y, en consecuencia, para su depuración.

Entrevista con Santiago.

Santiago es un estudiante de matemáticas que aprobó dos cursos de estadística básica y uno de didáctica de la estadística y la probabilidad. El curso donde estudió el concepto de intervalo de confianza lo realizó 4 semestres antes de iniciada esta investigación y utilizó como texto guía el libro de Estadística aplicada básica (Moore, 1995).

> *Entrevistador: ¿Qué es para usted un intervalo de confianza?*
>
> *Santiago: Bueno, lo que yo recuerdo es más que todo que se basan en la distribución normal. Entonces a la distribución normal, que es más o menos de este estilo (*Ilustración 20*), donde aquí está la media (ubica la media en el centro de la distribución) No recuerdo si la notación era esta (escribe μ) o esta (escribe $\bar{x}$) creo que una era la poblacional y la otra la muestral.*

Ilustración 20. Dibujo de Santiago para la distribución normal.

Santiago, de entrada, plantea que los intervalos de confianza están asociados con la distribución normal. A su vez, da señas de confusión sobre quién es el centro de la distribución: la media muestral $\bar{x}$ o la poblacional μ, dejando entrever que no distingue cuál es cada una. Esta dificultad ha sido reportada en varios estudios (Behar 2001, Inzunsa 2009, Olivo 2008) donde se señala que tanto estudiantes como expertos e investigadores de diferentes áreas tienen esta confusión. La dificultad de Santiago en cuanto a quién ubicar en el centro de la distribución puede deberse a una mala interpretación producto del giro algebraico que comienza con μ como centro para luego cambiarse por $\bar{x}$, ver el capítulo dedicado al análisis teórico la parte que se dedica al análisis a priori de la construcción del intervalo de confianza.

Santiago: El intervalo de confianza…Como el mismo nombre lo indica, lo que me dice es qué probabilidad hay de que la media esté en ese intervalo, o sea que la media muestral esté en el intervalo que contiene a la media poblacional.

Es llamativo que Santiago asocia la confianza con la probabilidad: "Como el mismo nombre lo indica, lo que me dice es qué probabilidad hay de que la media esté en ese intervalo", concepción que se reporta en todos los estudios revisados hasta el momento.

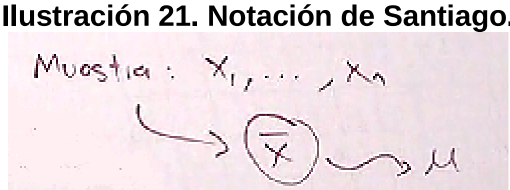
Esta concepción de confianza para el valor de probabilidad no es otra cosa que una probabilidad subjetiva, es la seguridad o certeza que se tiene sobre la realización de un evento asociado al valor numérico de la probabilidad: entre más alta la probabilidad más alta la certeza o la confianza en que el evento se realice. Vista de otra forma, la probabilidad subjetiva, muchas veces, es la única forma de asignar un valor de probabilidad a un evento no repetible o a un experimento donde los resultados posibles no son equiprobables. Esta asignación de probabilidad se basa en conocimientos previos que de forma no explícita permiten realizar la estimación del valor de probabilidad. Más adelante veremos como Sebastián, tiene clara la interpretación frecuencial del nivel de confianza y, sin embargo, sigue asumiéndolo como la probabilidad de que el intervalo contenga a la media poblacional μ.

Entrevistador: ¿Cómo así?

Santiago: o sea… ehhh… digamos que… por ejemplo hagamos una situación, como siempre el ejemplo, el ejemplo lo salva a uno siempre. Digamos que queremos analizar el promedio de los estudiantes de la UIS, más concreto, de los estudiantes de matemáticas de la UIS, entonces mi población en este caso son los estudiantes de matemáticas de la UIS. Esa es mi población, pero no voy a estudiar todos los estudiantes, si no que voy a tomar una muestra, esa muestra debe ser representativa, por que si no va a ser dificil estimar para esa población.

Entonces yo cojo una muestra y pues de esa cantidad de datos que tomo, que voy a llamar muestra, le voy a calcular la media. Entonces necesito ver qué tan certera es esa media con respecto a la media poblacional (Ver Ilustración 21*).*

Ilustración 21. Notación de Santiago.



Santiago: Entonces se habla del intervalo de confianza, y es con qué certeza, o sea qué tan certero es que esta media (señala la media muestral) se parezca a la poblacional.

Santiago está asumiendo que el intervalo en sí mismo responde por la certeza de la estimación realizada a partir de $\bar{X}$. En otras palabras, asume que el intervalo es una medida de la calidad de la estimación puntual.

Santiago: O sea, digamos que por alguna razón el promedio de la población sea, no sé 3,5 si, pero yo no la conozco y obtuve una media muestral de 3.8. ¿Será que yo puedo tomar esta muestra como válida? O sea, ¿asegurar que esa muestra me está representando la población? Pues para esto actúa el intervalo de confianza.

Aquí Santiago retoma la representatividad de la muestra. Santiago está poniendo en tela de juicio la calidad de la muestra y su representatividad en términos del $\bar{X}$ obtenido y su cercanía al parámetro μ. La respuesta a estas inquietudes, según Santiago, la brinda el intervalo de confianza. La explicación de la forma como el intervalo de confianza se convierte en criterio para definir la representatividad de la muestra, se quedó en el aire ya que el entrevistador siguió otro camino.

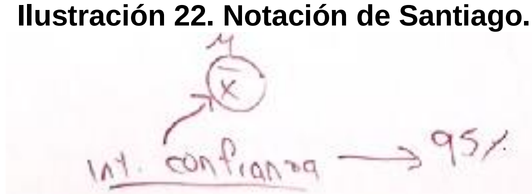
Entrevistador: El μ usted no lo conoce, ¿cómo garantiza que la media muestral está cerca de algo que usted no conoce?

Santiago: Exacto.

Entrevistador: ¿Qué hay detrás que me pueda garantizar que el intervalo, tal como usted lo acaba de decir, garantiza una cierta cercanía?

Santiago: Pues es una idea probabilística, o sea qué tan probable es que es intervalo en el que yo me encuentro… Así, ya lo recuerdo, es al revés, es que el intervalo de confianza es con respecto a la media muestral que es la que conozco y necesito ver si la media poblacional está en ese intervalo o no está. Entonces necesito ver qué tan probable es eso, y normalmente se habla… normalmente en los ejercicios que uno trabaja le dicen por ejemplo construya un intervalo de confianza que tenga una confianza del 95% (Escribe en el tablero, ver Ilustración 22*)*

Ilustración 22. Notación de Santiago.

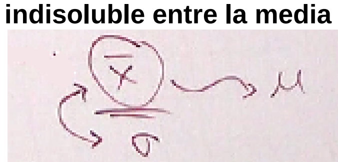


Santiago identifica que se trata de un problema de estimación de un parámetro poblacional y que esta estimación solo se puede realizar a través de una muestra (a la cual le exige representatividad). Identifica el estimador puntual y lo relaciona con el intervalo de confianza diciendo que éste es el encargado de medir la exactitud (¿precisión?) de la estimación. En sus palabras: “Entonces se habla del intervalo de confianza, *y es con qué certeza, o sea qué tan certero* es que esta media (señala la media muestral) se parezca a la poblacional”.

Como se observa, Santiago describe en términos generales cómo se construye un intervalo de confianza a partir de una problemática particular, hecho que refleja una concepción proceso de intervalo de confianza.

> *Entrevistador: ¿Qué significa el nivel de confianza del 95%?*
>
> *Santiago: Que prácticamente de cada 100, de cada 100 tipos de muestra que yo tome, de medias de muestras diferentes que yo tome, aproximadamente 95 van a estar en esa, los intervalos con esta media (señala la media muestral) contienen la media poblacional. Entonces también se habla de desviaciones, hmmm y se habla del matrimonio homosexual entre la media y la desviación, que es está sigma (Escribe el símbolo de la desviación estándar debajo de la media muestral como se observa en la* Ilustración 23*)*

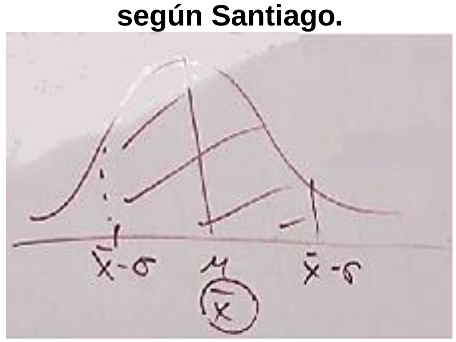
Ilustración 23. Relación indisoluble entre la media y la desviación estándar.



Santiago hace referencia al “matrimonio homosexual indisoluble” entre la media y la desviación, ya que en sus cursos de estadística, el profesor insistía en que la media muestral por sí sola no da información suficiente, luego es necesario que esté acompañada de la desviación estándar muestral, es decir, la media muestral y la desviación estándar tienen una relación indisoluble.

> *Santiago: Hmm, el nivel de confianza lo que trabaja es el número de desviaciones estándar a las que se encuentra, entonces si no estoy mal es* $\bar{x}-\sigma$ *y* $\bar{x}+\sigma$ *(las ubica en el grafico que había dibujado inicialmente, ver Ilustración 24)*

Ilustración 24. Relación del nivel de confianza y la desviación estándar según Santiago.

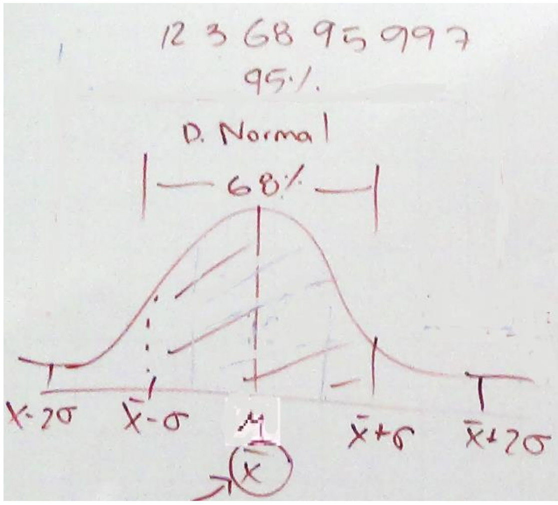


Y pues el intervalo contenido en ellos tenía una confianza del 95%, y ahí se tiene en cuenta… Se me olvidó el "celular de la normal" (nombre que le asigna el profesor de Santiago a la regla del 68-95-99,7 que es una propiedad de la distribución de la normal).

Hmmm, era… 1 2 3 hmmm y el 95 está en la mitad, el otro creo que es 99.7 y el otro es 68 (escribe esa información en el tablero, Ver Ilustración 25*).*

Listo, entonces este es un intervalo del 68% de certeza de que contenga a la media poblacional. Con dos desviaciones estándar tengo el 95% de certeza (hmmm, es al revés, aquí más y aquí menos)

Ilustración 25: El celular de la normal.



Santiago reconoce que la media por sí sola no es suficiente y menciona la relación indisoluble que tiene con la desviación estándar, lo cual lo lleva a concebir la media como un todo y aplica acciones (suma y resta) sobre ella, lo cual es evidencia de que ha encapsulado el proceso en un objeto, es decir, tiene una concepción objeto de media.

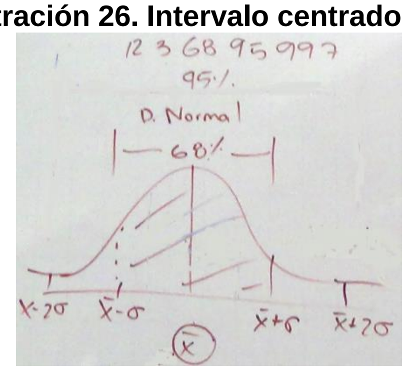
También se observa que Santiago se percata de una de las propiedades de la distribución normal ("el celular de la normal"), en este caso, pareciera que Santiago tiene un esquema a nivel Intra de la distribución normal ya que utiliza dicha propiedad para resolver una situación fuera del contexto que le dio origen.

A su vez, Santiago asume, en primera instancia, una interpretación funcional del intervalo de confianza: "*es el número de desviaciones estándar a las que se encuentra",* mostrando claridad sobre la forma cómo influye este concepto en el ancho del intervalo, además de que lo relaciona con la confianza o probabilidad, como los estudiantes dicen, de que la media poblacional se encuentre en el intervalo. Nótese que ahora Santiago puntualiza mejor la intención del intervalo describiéndolo como un proceso de estimación ampliado: el intervalo como un todo que contiene o no al parámetro buscado. Además define claramente el significado del nivel de confianza en términos frecuenciales. En el momento de la construcción del intervalo hace referencia a las desviaciones estándar y recuerda el "celular de la normal", y lo asocia con la distribución normal. Aunque no lo ha mencionado, Santiago parece asumir que la distribución de la media muestral es normal, el enredo que tiene es que no tiene claro si el centro de la distribución es μ o $\bar{x}$. Es la confusión de centros: μ el de la distribución y $\bar{x}$ el del intervalo. Este cambio de centro se genera a partir de manipulaciones algebraicas que comenzando con μ como centro termina cambiándolo por $\bar{x}$. Cabe recordar que la notación que se usa $\bar{x}$ actúa como pivote, es decir, como expresión que se mueve libremente sobre el intervalo con centro en μ; posteriormente la que se mueve libremente en el intervalo centrado en $\bar{x}$ es μ.

Entrevistador: Pero si uno se guía por ese gráfico el μ siempre está en el intervalo.

Santiago: Hmmm, no, el centro del intervalo es $\bar{x}$ (borra a μ, Ver Ilustración 26*)*

Ilustración 26. Intervalo centrado en $\bar{x}$.



Entrevistador: ¿En dónde interviene el 95%? ¿Por qué el intervalo es $\bar{x}$ más o menos una cierta cantidad de desviaciones estándar? ¿Esas desviaciones estándar de quién son?

Santiago: Bueno, pues la desviación estándar la tomo de la muestra, pues es lo que conozco, la de la población no la puedo conocer. Cuando tengo una población la idea es si yo pudiera trabajar con toda la población pues no necesitaría un intervalo de confianza, si no que iría a lo concreto, pero en la vida real eso no pasa y pues entonces lo que uno hace es recoger muestras.

Entrevistador: ¿Entonces utilizó la desviación estándar de la muestra?

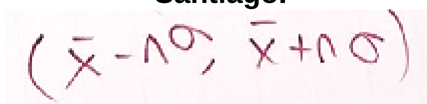
Santiago: Sí, de la muestra.

Santiago asume la desviación estándar muestral como un estimador de la desviación estándar poblacional. Sin embargo, es claro que no tiene claro que la desviación estándar que se utiliza es la variable aleatoria $\overline{\mathrm{X}}$**.** De hecho no hace mención al tamaño muestral en la expresión para esta desviación.

Entrevistador: Entonces el intervalo qué forma tiene, ¿Cómo se construye?

Santiago: El intervalo en últimas va a ser $\bar{x}$ *más o menos una cantidad de desviaciones estándar (escribe en el tablero, ver* Ilustración 27*)*

Ilustración 27. Expresión que da lugar a la construcción del IC según Santiago.



Y de acuerdo con las veces que aparezca la desviación estándar se tiene la confianza de este intervalo. Y pues cómo se construye, para eso se recurre al cálculo y se tiene en cuenta a la media muestral y a la desviación estándar muestral.

Santiago realiza un resumen de la construcción del intervalo de confianza: Es un intervalo centrado en $\overline{\mathrm{X}}$ y con radio una cierta cantidad de desviaciones estándar que van a definir, precisamente, la confianza del intervalo. Todos los valores requeridos se estiman con base en los valores muestrales. De esta forma Santiago da muestras de poseer una concepción proceso del intervalo de confianza si bien no claramente justificado respecto al origen de los elementos que lo conforman, aspecto, este último, que se refleja en la utilización de la desviación estándar poblacional y no de la media muestral $\overline{\mathrm{X}}$**.**

Cuando Santiago menciona la *n* está haciendo referencia al número de desviaciones estándar, no al tamaño de la muestra. Si bien no hay claridad en cuanto a la forma como se construye el intervalo de confianza, Santiago se apoya en la regla del 68-95-99,7 (propiedad de la distribución normal) para determinar el nivel de confianza.

Entrevistador: Usted utiliza la distribución de la normal dando a entender que la distribución normal juega un papel importante en la construcción del intervalo, ¿eso por qué?

Santiago: ¿La distribución normal? Porque la estimación de la muestra de una población me arroja una distribución normal.

Entrevistador: ¿qué cosa?

Santiago: O sea, los datos que nos arroja la media de una muestra tiende a volverse una distribución normal.

Entrevistador: y ¿cómo se llama ese resultado?

Santiago: ¿Teorema del límite central?... hmm es Teorema central del límite

Santiago, si bien muestra alguna idea del teorema central del límite no lo empata con el problema de la estimación de la media poblacional, carencia ésta que va también va a presentarse en los demás profesores que fueron entrevistados.

Ya analizado el camino conceptual de Santiago, vamos a ver qué tan claro es a la hora de interpretar la influencia de los factores que determinan el intervalo de confianza sobre el tamaño y la precisión del intervalo.

Entrevistador: Ahora le voy a leer algunas afirmaciones y usted me va a decir si son verdaderas o falsas y por supuesto el porqué de su respuesta.

Santiago: Listo

Entrevistador: Un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (μ) es el intervalo que contiene el 45% de los valores posibles de la media muestral $\bar{x}$.

Santiago: El intervalo que contiene el 45% de los valores posibles de la media muestral $\bar{x}$… No, yo no lo tomaría así, porque prácticamente está diciendo que de todos los posibles valores que puedan llegar a tomar la media muestral… ¿muestral o poblacional?

Entrevistador: muestral.

Santiago: Hmm, entonces debe ser falso, porque pues la media… ese 45% de probabilidades se está refiriendo a que en este intervalo caiga la media poblacional. Dependiendo de qué tan grande sea la muestra, pues habrán algunas medias poblacionales que se salgan de ese intervalo, ¿pues habrán más del qué? del 55%.

Santiago rechaza la interpretación del nivel de confianza como proporción de valores, se trata es de la probabilidad de que el intervalo contenga la media poblacional, valor que explica diciendo que en el 55% de los casos las medias poblacionales se saldrán del intervalo. Aunque en este momento no explica con claridad el significado del nivel de confianza, antes sí lo había hecho.

Pareciera que Santiago está diciendo que no le importan los posibles valores que puede tomar $\bar{x}$, pues para él el intervalo es para encajonar, para atrapar a la media de la población. Ahora, nos queda el interrogante de por qué dijo “Dependiendo de qué tan grande sea la muestra”. Esta asociación tamaño muestral y nivel de confianza la abordará más adelante.

Entrevistador: ¿Entonces un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (μ) es el intervalo que contiene el 45% de los valores posibles de la media poblacional?

Santiago: ¿De la media poblacional? Ehhhhh… No, no creo, porque de todas formas si trabajamos con que ese 45% de que… de los resultados que puede tener la media poblacional, quiere decir que… o sea, tengo un intervalo y me está diciendo que entonces también el 55%, es decir los otros posibles resultados de la media poblacional, y pues no, me parece que es al revés, la media poblacional es la que tiene el 45% de probabilidad de caer en el intervalo, no que el intervalo tenga el 45%

Entrevistador: ¿La media poblacional es una variable?

Santiago: No, es algo fijo.

Entrevistador: Entonces usted no puede hablar de que ella tenga una medida de probabilidad.

Santiago: Hmm, siii

Entrevistador: ¿Usted puede hablar de la probabilidad de que ese valor constante esté en un intervalo? ¿Eso tiene sentido?

Santiago: Sii, porque igual lo que yo estoy variando es el intervalo, yo puedo tener un valor fijo, pues lo que estoy cambiando es el intervalo dependiendo de la muestra que tenga, entonces pues no siempre va a quedar en ese mismo punto.

Entrevistador: ¿Pero hablar del 45% de los valores posibles de una constante tiene sentido?

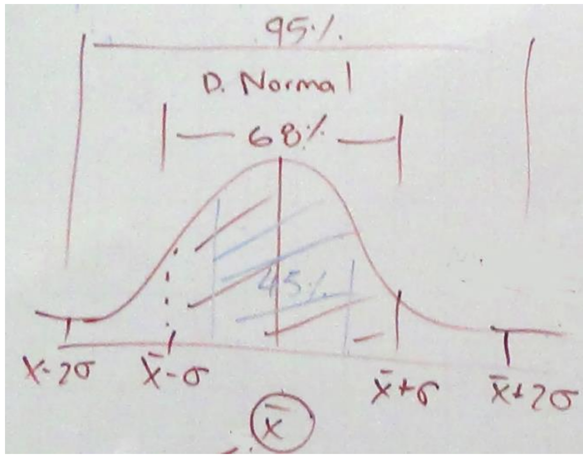
Santiago: (Se queda pensando) No, no tiene sentido, pues la media poblacional es una constante.

Para Santiago el nivel de confianza es del parámetro que se está estimando y no del proceso aleatorio que da lugar a la construcción del intervalo. Esa idea se mantiene por un rato durante la entrevista hasta que a partir de la confrontación Santiago concluye que no tiene sentido asignar un valor de probabilidad a una constante y que éste valor se relaciona es con los diferentes intervalos que se generen.

Entrevistador: Un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (μ) es un intervalo más ancho que el intervalo de confianza del 95%.

Santiago: No, no, pues eso prácticamente lo podemos ver… me lo garantiza el "celular de la normal". Entonces por aquí (señala una parte del dibujo que tiene en el tablero ver Ilustración 28*) me quedaría el intervalo que me da el 45%*

Ilustración 28. Efecto del nivel de confianza en el tamaño del intervalo.



Mejor dicho, yo sé que a 1 desviación estándar fijo está el 68%, o sea ya estoy por encima de ese 45%, entonces a 2 desviaciones estándar pues ya tengo el 95%, entonces fijo el del 95% va a ser más ancho.

Santiago da evidencias de conocer el efecto que tiene el nivel de confianza sobre el tamaño del intervalo y para esto se apoya en “el celular de la normal”.

Entrevistador: Entonces un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (μ) es un intervalo de valores calculado a partir de los datos de la muestra. En el 45% de las muestras de una población, el intervalo calculado contiene a la media de la población.

Santiago: Sii, pues yo calculo el intervalo del 45% de confianza a partir de una muestra, entonces si a partir de la muestra obtengo el intervalo, hay una confianza del 45% de que ahí va a estar la media de la población.

Entrevistador: ¿Entonces la confianza es aplicada sobre el intervalo que se obtuvo a partir de la muestra seleccionada?

Santiago: La confianza es… (Se queda pensando)

Entrevistador: En otras palabras le están preguntando qué significa el nivel de confianza.

Santiago: El nivel de confianza sí. Pues el nivel de confianza es qué tan probable es que cuando yo tengo un intervalo, él contenga a la media poblacional, entonces, prácticamente están diciendo qué va primero, si con la confianza determino el intervalo o si con el intervalo determino la confianza.

Este diálogo evidencia el proceso de confrontación que vive Santiago con las dos concepciones de probabilidad: la subjetiva y la frecuencial. De ambas conoce bien su significado, sin embargo no termina de integrarlas como representaciones del mismo concepto, situación que según Hacking (1995) fue una de las causales que impidió el desarrollo de la teoría de la probabilidad.

Entrevistador: La afirmación anterior lo que está diciendo es que si se toman 100 muestras y para cada una de esas 100 muestras construyo un intervalo de confianza, entonces si la confianza es del 45%, en promedio 45 de esos intervalos van a contener la media poblacional. ¿Está usted de acuerdo?

Santiago: No, no porque está trabajando con un intervalo de confianza para cada uno de los elementos de la muestra, o sea, está teniendo 100 intervalos y cada intervalo lo está trabajando con los 100 elementos de la muestra y pues para cada uno se construye un intervalo.

Entrevistador: ¿De cada elemento de la muestra se construye un intervalo?

Santiago: Siii, pues eso es lo que se está diciendo.

Entrevistador: No, se toman 100 muestras y cada una de esas muestras define un intervalo, no cada elemento.

Santiago: Ahhh si, entonces si cada muestra define un intervalo entonces las muestras deben cumplir las condiciones del teorema central del límite.

Entrevistador: ¿Las muestras deben cumplir las condiciones del teorema central del límite? ¿Qué dice el teorema central del límite?

Santiago: Pues habla más que todo en cuanto a la cantidad de elementos de la muestra, que tantos se deben tomar. O sea yo no puedo tomar una… Mejor dicho me está hablando de si la muestra representa satisfactoriamente la población.

Entrevistador: ¿Eso dice el teorema central del límite?

Santiago: Ehhh… (Se queda pensando)

Entrevistador: ¿Cuál es el teorema central del límite?

Santiago: Pues habla es de… a partir… si la muestra tiene una cantidad de elementos mayor que un número determinado, pues la muestra, la muestra tiene… La distribución de los elementos de la muestra tiende a normalizarse.

Entrevistador: ¿La distribución de la muestra?

Santiago: Si, de la muestra… No, de los elementos de la muestra, la formula nos dice que la distribución de los elementos tiende a ser normal. Yo recuerdo que empezamos a trabajar el teorema central del límite cuando la muestra tenía 30 o más elementos.

Entrevistador: ¿Para qué esas muestras tengan una distribución normal?

Santiago: Para que tienda a normalizarse.

A pesar de que el entrevistador insiste y trata de llevarlo a caer en cuenta de que no son los elementos de la muestra los que tienen una distribución normal, Santiago no lo percibe. Aunque tiene razón en cuanto a que el teorema central del límite hace referencia a muestras de tamaños cada vez más grandes. Aquí se observa que Santiago asume la muestra y su distribución en lugar de la distribución de las medias muestrales de todas las muestras de un mismo tamaño, confusión que fue reportada por Inzunsa (2009). Santiago hace hincapié en el tamaño muestral para poder usar con propiedad el teorema central del límite, concepción que muestra que posee claridad de este resultado como un proceso al límite.

> *Entrevistador: Y ¿qué tiene que ver el teorema central del límite con los intervalos de confianza?*
>
> *Santiago: Hmmm pues sí, es cierto (se queda pensando). Ehhh, pues yo lo tomo más bien, pues que ehhh… si yo tengo el teorema central del límite y cumple las condiciones pues que recuerdo que cumplía pues había una normal y pues entonces al aparecer la normal ya puedo utilizar las propiedades de la normal. Que si no se cumple lo que pide el teorema central del límite entonces la distribución no va a ser normal y podría ser cualquier otra distribución y pues en otro tipo de distribución no tengo ni idea de cómo funciona el intervalo de confianza.*

En el diálogo alrededor del teorema central del límite se observan dos cosas, primero que Santiago si bien sabe que dicho teorema está relacionado con la distribución normal, no tiene claridad en qué sentido. En segundo lugar, no lo asocia con el comportamiento que sigue la variable aleatoria $\bar{x}$ y por tanto no tiene clara la importancia de este teorema para la construcción del intervalo de confianza. Lo anterior refleja la ausencia de un esquema a nivel inter que relacione los intervalos de confianza con el teorema central del límite.

> *Entrevistador: Si se aumenta el tamaño muestral, conservando los demás datos constantes, el intervalo de confianza se hace más ancho.*
>
> *Santiago: No, yo creo que… que se mantiene, o sea a partir de cierto punto se mantiene.*
>
> *Entrevistador: ¿A partir de cierto punto?*
>
> *Santiago: A partir de cierto punto se estabiliza. De ahí yo tomo la palabra límite del teorema central del límite. Sí, a partir de cierto número se debe mantener, porque igual la muestra cuando ya toma una cantidad de elementos considerables tiende a mantenerse tanto la media como la desviación, o sea, se va pareciendo mucho más a la de la población. Entonces si yo le aumento más, pues el intervalo como que se mantiene igual, o sea que la media y la desviación estándar no cambiarían mucho. Igual cualquier variación que sufra*

la media muestral pues va a afectar muy poco a la desviación, pero en algún…

Entrevistador: Entonces su afirmación es que si el tamaño muestral se aumenta, llega un momento en que no tiene efecto sobre el ancho del intervalo de confianza.

Santiago: Si

Entrevistador: Pero antes de llegar a ese momento ¿Si yo voy aumentado de a poquito el tamaño muestral qué pasa con el tamaño del intervalo, crece o no crece?

Santiago: Hmmm, yo creo que se hace más angosto.

Entrevistador: ¿Por qué?

Santiago: Porque… porque si el tamaño creciera, tendría más… menos certeza de lo que estaría trabajando, porque a medida que voy aumentando la muestra, pues la gracia es que la muestra se vaya aproximando más a la población. Entonces como la muestra se va aproximando más a la población, el valor que toma la media muestral se debe aproximar más a la de la población. Entonces como se aproxima más, yo tengo la idea de límite en los reales por así decirlo, entonces el intervalo se vuelve más pequeño. Mejor dicho, lo que yo trato de decir es que… (se queda pensando) si yo pienso que cuando la población tiende a ese número esperado, si, que donde yo creo que ya no va a cambiar mucho, la gracia es que el intervalo se vaya volviendo más compacto, más pequeño.

Santiago no intenta responder la pregunta dentro de los intervalos de confianza, pues como se ha visto en la expresión que él asume para construir el intervalo no aparece por ninguna parte el tamaño muestral. Por esta razón, lo aborda desde un proceso de acercamiento del estimador puntual $\bar{x}$ al parámetro a estimar del estimador μ. Asume, además, una población finita y aplica un razonamiento intuitivo válido: al aumentar la muestra, ésta se parece más a la población, por lo tanto la media de la muestra debe parecerse mucho a la media de la población.

Es interesante, desde otro punto de vista, la alusión de Santiago al concepto de límite en las funciones reales, ya que como la idea es muy semejante se puede pensar que en alguna forma influye sobre el pensamiento de los estudiantes acerca de los límites estocásticos. En este caso él la aborda desde la matemática pura para interpretar una situación netamente estadística. Santiago da a entender que como se trata de un límite de una sucesión, dada cualquier distancia respecto al supuesto límite L siempre es posible encontrar un momento a partir del cual todos los demás valores de la sucesión se encuentran a menos de esa distancia dada. Si se toma una distancia pequeña pues no se avanzará mucho si sigo aumentando el tamaño muestral mucho más allá del hallado.

Santiago: O sea, si el intervalo es más pequeño es porque uno ya tiene una certeza más grande. O sea, mejor dicho, lo que yo trato de decir es que si yo trabajo con un intervalo más grande pues se supone que ahí deben haber más posibilidades de valores, sí, un número más grande de valores. Y si el intervalo es más pequeño pues el número de posibles valores es más reducido, estamos diciendo que ambos son intervalos del 95% de confianza, entonces algún papel debe jugar la muestra y si espero una estabilidad en cualquier punto, lo que voy a estar esperando que en algún momento mejoren las condiciones.

Entrevistador: Entonces en concreto, antes de llegar a ese punto en especial ¿a medida que vamos aumentando el tamaño muestral, qué va pasando con el tamaño del intervalo?

Santiago: Se va volviendo más pequeño.

Si bien no lo argumenta en términos del error de estimación de la media muestral $\bar{x}$ se tiene que reconocer que Santiago posee un esquema inter que le permite relacionar adecuadamente el efecto que sobre el tamaño del intervalo tiene el tamaño muestral.

Entrevistador: ¿y si se aumenta el nivel de confianza, manteniendo los demás datos constantes, el intervalo de confianza se vuelve más angosto?

Santiago: No, no porque yo ya tengo que el 68% tiene una desviación estándar a ambos lados, el 95% tiene dos desviaciones y el 99.7% tiene tres desviaciones estándar, entonces yo lo que estoy haciendo ahí es ampliar el intervalo.

Una vez más, el "celular de la normal" le permite identificar el efecto de nivel de confianza sobre el tamaño del intervalo.

Entrevistador: ¿Pero si se aumenta el nivel de confianza, se aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional?

Santiago: Sii…No no. Bueno, cuando yo aumento el nivel de confianza lo que estoy dando es un intervalo y pues por lo mismo que yo estoy diciendo el intervalo va a ser más grande, o sea yo ya sé en qué intervalo va a quedar si, en que intervalo tengo una probabilidad muy grande de que quede, pero yo no voy a saber cuál valor del intervalo va a ser. Entonces pues la precisión depende es del tamaño de la muestra.

Entrevistador: ¿El nivel de confianza no tiene nada que ver con la precisión?

Santiago: El nivel de confianza… (Se queda pensando)

Entrevistador: ¿Si yo aumento el nivel de confianza aumento la precisión?

Santiago: Me parece que es más preciso porque… o sea con la confianza lo que estoy dando es un intervalo, un intervalo con cierta confianza.

Entrevistador: ¿Eso significa que el intervalo es más preciso? ¿Entre más confianza le dé, el intervalo es más preciso?

Santiago: Si

Entrevistador: ¿Por qué?

Santiago: Si porque ehh… la confianza justamente lo que me está diciendo es qué tan probable es que el intervalo contenga la media poblacional, entonces si el intervalo tiene una confianza mucho mayor, pues más… pues por la misma definición de probabilidad en su enfoque frecuencial, o sea de tantos va a ser una cantidad de veces de que la media poblacional este ahí.

Santiago asocia confianza con precisión, a más confianza mayor precisión pero no asociada con el tamaño del intervalo. La relación que él construye la fundamenta en la interpretación del nivel de confianza que garantiza que al aumentarse habrá más intervalos que contengan el valor del parámetro buscado. Este hecho de más intervalos conteniendo el parámetro lo asimila Santiago con precisión.

En términos generales se observa que Santiago plantea de forma clara las motivaciones que llevan a la construcción de un intervalo de confianza para la media, sin embargo, la concepción que tiene sobre el intervalo de confianza está íntimamente relacionada con la calidad representativa de la muestra, tanto a así que recurre a conceptos propios del cálculo, como es el concepto de límite, para interpretar el efecto del tamaño muestral en la estimación puntual y no en el intervalo.

Entrevista con María

María es estudiante de licenciatura en matemáticas que aprobó dos cursos de estadística básica y uno de didáctica de la estadística y la probabilidad. El curso donde estudió el concepto de intervalo de confianza lo realizó 4 semestres antes de iniciada esta investigación. El texto guía utilizado fue el de Estadística aplicada básica (Moore, 1995).

Entrevistador: ¿Qué es para usted un intervalo de confianza?

María: Un intervalo, pues como su nombre lo indica pues es un intervalo, pero a ese intervalo se le da una confianza, una confianza de que suceda más o menos.

Entrevistador: ¿Confianza de que suceda qué?

María: O sea, lo que yo recuerdo del intervalo de confianza era… lo que hacíamos era como una estimación de la… ¿cuál era?... ¿de la media estándar?

Entrevistador: ¿Media estándar?

María: No, de la… es que está la media poblacional, la media muestral y la otra, es que no me acuerdo como se llama ¿cómo es que se llama? (Se queda pensando) El miu (se ayuda haciendo señas con la mano de la forma del símbolo μ) el parámetro.

Entrevistador: ¿Esa es la media de quién?

María: ¿Estándar, no?

Entrevistador: No, estándar sólo se usa con la desviación.

María: Hmmmm (se queda pensando)

Entrevistador: ¿pero un intervalo qué es lo que hace? usted estaba diciendo que un intervalo es un conjunto de números, pero ¿para qué sirve ese conjunto de números?

María: hmm... es donde yo voy a estimar un valor.

Entrevistador: ¿Para estimar un valor?

María: si, decíamos... para eso se le daba la confianza, que es la probabilidad de que ese valor esté en ese intervalo es tanta, esa es la confianza que se le daba al intervalo.

Entrevistador: Pero ¿qué es eso de la confianza?

María: O sea, digamos que si el intervalo de confianza era del 90% entonces la probabilidad de que ese valor que estábamos estimando esté en este intervalo es del 90%

María *al igual que Santiago a*sume el nivel de confianza como la probabilidad de que el intervalo contenga el parámetro buscado.

Entrevistador: ¿y ese valor que estamos estimando de quién es? ¿De dónde es?

María: De la... de la población.

Entrevistador: ¿ese es el μ del que usted hablaba?

María: Hmm, ya claro, el de la población y lo que nosotros tomábamos para estimarlo era el $\bar{x}$ que era de la muestra, la media de la muestra.

Entrevistador: ¿y μ qué era de la población?

María: creo que la media de la población.

Entrevistador: entonces, ¿qué motiva la construcción de un intervalo de confianza? ¿Para qué se construye un intervalo de confianza?

María: Para hacer como una inferencia sobre una población… eh, yo quiero hacer una estimación de cuál es el promedio de la nota de matemáticas de los *alumnos de sexto grado, entonces, para eso es que yo utilizo un intervalo de confianza pero lo que hago es… cojo una muestra aleatoria y eso lo aplico es a esa muestra, entonces sobre esa muestra es que yo hago una inferencia para decir que… para estimar el valor de ese promedio de la población, digamos que en este caso la población serían los estudiantes de sexto grado.*

María a partir de su reflexión y los cuestionamientos del entrevistador empieza a diferenciar entre la media de la población y la media de la muestra, dando lugar a asumir la media muestral como un estimador de la media poblacional. Es interesante que María plantee la necesidad de un problema que motive la construcción de un intervalo lo cual da indicios de que ha interiorizado el concepto de intervalo de confianza ya que no se limita a seguir instrucciones externas, por el contrario, reflexiona en términos generales sobre la motivación para construirlo.

Entrevistador: entonces toma una muestra aleatoria, y ¿qué es tomar una muestra aleatoria?

María: Escoger aleatoriamente de esa población unos individuos.

Entrevistador: ¿qué se hace con esos individuos?

María: con esos individuos, pues en este caso como estamos mirando la nota, entonces tomo las notas que tiene esos individuos en la materia de matemáticas y hallo el promedio, bueno sobre ese es que yo hallo el intervalo de confianza.

Entrevistador: ¿y por qué no se contenta con ese valor que encontró cómo el valor de la estimación que se quería hacer?

María: no me contento porque yo sólo estoy tomando una muestra y necesitaría entonces es toda la población y entonces para eso es que yo calculo o hallo el intervalo de confianza que es la media muestral más o menos un error, entonces el error es lo que me mueve a partir de la media de la muestra, a la derecha o la izquierda, entonces yo le digo que… o estimo que el valor de la nota de la población va a estar en ese intervalo con la probabilidad de que este, según la confianza que yo le dé.

María reconoce la media muestral como un estimador puntual de la media poblacional, pero como la muestra no es igual a toda la población se da cuenta que necesariamente ese valor de la media muestral no tiene porqué ser el valor exacto de la media poblacional y que es necesario asumir que se comete un error por encima o por debajo, conduciendo de forma natural a presentar un intervalo al cual de paso, se le puede definir una probabilidad de éxito, en el sentido de que contiene o no la media poblacional. El asumir la media muestral de forma general a la cual es necesario sumarle y restarle un error, denota que María posee una concepción objeto de la media muestral.

Entrevistador: pero ¿por qué no contentarse con el promedio que me da la muestra? Usted tomó, por ejemplo 20 estudiantes, le tomó la nota a cada uno, halló que el promedio o la media de esas notas es 3.8 ¿por qué no dice que 3.8 es la media de la población?

María: Porque es que sólo estoy tomando una parte.

Entrevistador: Tomó una sola muestra, sí.

María: Por eso mismo

Entrevistador: Entonces, ¿por qué es que no es? ¿Por qué ese estimador no es tan bueno?

María: porque eso depende también de las personas que yo tome.

Entrevistador: Claro, eso la obliga a hacer una escogencia adecuada, aleatoria como usted dijo.

María: Debe ser aleatoria, sí.

Entrevistador: Pero ¿qué pasa con ese valor 3.8? sacó una muestra y obtuvo 3.8

María: No porque hay también datos atípicos, o sea… no se… puede que… (La estudiante se queda pensando) puedo decir que el promedio va a estar más o menos aproximado a eso, pero entonces sería como una estimación.

El punto de vista de María sobre la necesidad de construir un intervalo de valores no nace del carácter aleatorio de la media muestral sino de la inexactitud que posee la media muestral como consecuencia del hecho de seleccionar una muestra y no toda la población. Adicionalmente añade la necesidad de una buena selección de la muestra.

Entrevistador: ¿Esa $\bar{x}$ es un valor fijo constante?

María: No, ese varía.

Entrevistador: ¿Varía?

María: Si varía, en este caso varía de acuerdo a las notas que tenga de los estudiantes.

Entrevistador: ¿De cuáles estudiantes?

María: De la muestra que yo tomé.

Entrevistador: ¿Y entonces cuándo varía?

Entrevistador: Cuando yo cojo otra muestra.

Entrevistador: ¿Entonces si tomo otra muestra del mismo tamaño y calculo la media, ese valor no va a ser 3.8?

María: No, no necesariamente da 3.8

Entrevistador: Entonces le hago nuevamente la misma pregunta ¿Por qué ese estimador no es tan bueno? ¿Por qué no me puedo conformar con él como el que brinda la información definitiva?

María: Pues porque lo que estamos diciendo, eso es solo una muestra.

Entrevistador: Entonces tendría que ver como ese $\bar{x}$ *cambia…*

María: hay que ver cómo se comporta para otras personas. El comportamiento, tendría que ver el comportamiento de ese $\bar{x}$ *para otra población.*

Entrevistador: ¿Para otra población?

María: Para otras muestras que yo tome.

Entrevistador: ¿Para cuántas muestras más?

María: Para muchas.

Entrevistador: Pero ese $\bar{x}$ *no es constante.*

María: No

Entrevistador: Entonces ¿si no es constante qué es?

María: Una variable aleatoria

Entrevistador: Y entonces ¿usted qué necesita saber de esa $\bar{x}$*?*

María: El comportamiento que sigue

Entrevistador: y ¿qué comportamiento sigue esa $\bar{x}$*?*

María: el comportamiento es la distribución de $\bar{x}$.

Entrevistador: ¿Y usted sabe cuál es la distribución de probabilidad de $\bar{x}$*?*

María: Hmmm, no.

Entrevistador: ¿Entonces no se necesita saber la distribución de probabilidad de ese $\bar{x}$ *para hallar ese intervalo de confianza?*

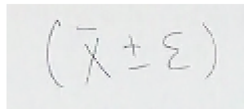
María: Si la necesito, pero no recuerdo cuál es.

María en conformidad con los cuestionamientos guiados se percata de la variabilidad de $\bar{x}$, producto de considerar las “muchas” muestras que se pueden tomar de la población. En este punto María refleja una concepción proceso y objeto de la media muestral y un esquema que le permite percibir su carácter aleatorio y, por consiguiente la necesidad de conocer su distribución de probabilidad. Sin embargo, no recuerda que la distribución que sigue la variable aleatoria $\bar{x}$ es normal por el teorema central del límite.

Entrevistador: Ayudémonos con el tablero. ¿Cómo se representa un intervalo?

María: El intervalo, hmmm así, $\bar{x}$ más o menos un error ($\bar{x} \pm \varepsilon$) (ver Ilustración 29*)*

Ilustración 29. Representación de un intervalo según María.



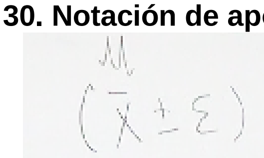
Entrevistador: Entonces hasta el momento ¿qué nos falta para determinarlo?

María: El error

Entrevistador: ¿cómo determinamos el error?

María: Para el error miro la desviación que tiene la media muestral con respecto a μ (escribe el símbolo μ en la parte superior de la media muestral, ver Ilustración 30*).*

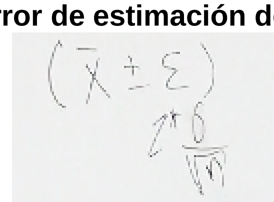
Ilustración 30. Notación de apoyo de María



Entrevistador: ¿Y eso cómo se calcula ese error?

*María: Yo recuerdo que había una fórmula que era zeta asterisco y la desviación típica muestral que era el sigma sobre raíz de n ($z^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (*Ilustración 31*)*

Ilustración 31. Error de estimación de un IC para María



Entrevistador: ¿Ese es el error?

María: Si, ese es el error.

Entrevistador: ¿Qué es zeta asterisco?

María: ahhh ya, para construir el intervalo necesito saber la distribución que sigue la media muestral, porque el zeta asterisco lo sacaba de una tabla de la distribución normal.

Entrevistador: ¿Distribución normal?

María: Si, de la distribución normal.

Entrevistador: ¿Y por qué de una distribución normal?

María: porque es que, creo que cuando uno toma o hace la escogencia de los datos de manera aleatoria entonces van a seguir una distribución normal.

Entrevistador: ¿Quién sigue una distribución normal?

María: La $\bar{x}$ (escribe en el tablero esa información, ver Ilustración 32*)*

Ilustración 32. Distribución que sigue la variable aleatoria $\bar{x}$.

Entrevistador: ¿y eso por qué lo sabe?

María: pues que yo recuerde también es que mirábamos la campana (hace el dibujo en el tablero, Ver Ilustración 33*)*

Ilustración 33. Dibujo de la curva de la distribución normal.

Entonces mirábamos los datos, y mirábamos era que no hubieran datos atípicos. Que recuerde mirábamos que no tuviera datos atípicos y que tuvieran esta forma (señala la campana que dibujó en el tablero).

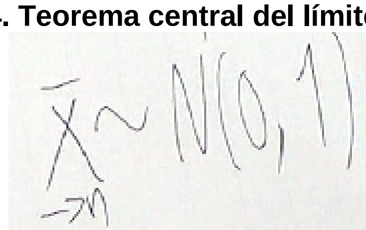
Entrevistador: ¿Usted ha oído hablar del teorema central del límite?

María: ehhh, siii, si me acuerdo del teorema central del límite.

Entrevistador: ¿Qué dice el teorema central del límite?

María: Que entre más datos… que la media muestral… no sé cómo decirlo. Era que entre más datos tenga, la media muestral va a seguir una distribución normal de media 0 y desviación estándar 1 (ver Ilustración 34*)*

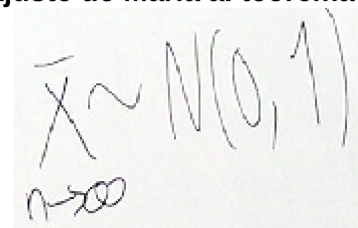
Ilustración 34. Teorema central del límite según María.



Entrevistador: Entonces si conocemos la distribución de $\bar{X}$

María: si, la conocemos, es normal, pero este es un resultado cuando n tiende a infinito (hace un ajuste a lo escrito en el tablero, ver Ilustración 35*).*

Ilustración 35. Ajuste de María al teorema central del límite.



Ya en este momento de la entrevista, María recuerda la necesidad de contar con la distribución de la media muestral para poder definir el error, incluso recuerda que ésta es la normal, sin embargo equivocadamente asume la normal estándar, obviando el proceso de estandarización que debe sufrir la media muestral para que su distribución sea la normal estándar.

Entrevistador: ¿pero en la práctica qué se hace?

María: Pues el n representa el número de la muestra.

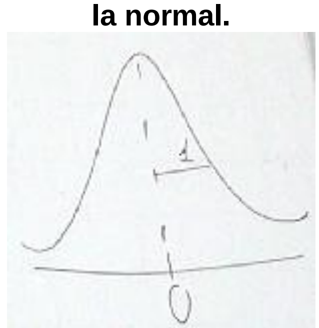
Entrevistador: ¿y ese cero es quién en la normal?

María: Es la media

Entrevistador: ¿y el 1?

María: Sería este valor (escribe sobre el dibujo que tenía de la normal, ver Ilustración 36*) es a cuánto se encuentra de la media.*

Ilustración 36. Identificación del teorema central del límite en la curva de la normal.



Entrevistador: ¿A cuánto se encuentra de la media quién?

María: ¿El intervalo?

Entrevistador: No, pero ahí no estamos definiendo ningún intervalo. Cero es la media ¿y el 1?

María: Es la desviación estándar

Entrevistador: ¿Qué es la desviación estándar de un conjunto de datos?

María: Es… a cuanto más o menos está de la media. Lo que se desvía de la media.

Entrevistador: ¿Quién?

María: Sería la muestra que yo tomo.

Entrevistador: A partir de la muestra que usted toma, ¿cómo calcula la media y la desviación estándar de esa muestra?

María: pues para calcular la desviación estándar entonces debería tener la media de la población, el miu (escribe en el tablero el símbolo μ) entonces sería heeee.

Entrevistador: Entonces ¿Usted no podría calcular la desviación estándar de una muestra? ¿De un conjunto de datos cualquiera?

María: jum, no recuerdo.

Entrevistador: ¿La desviación estándar es sólo de la población?

María: Pero es que voy a comparar la media poblacional μ con la media muestral $\bar{X}$.

Entrevistador: Olvidémonos por un momento de los intervalos de confianza y centrémonos en la desviación estándar.

Tengo un conjunto de datos x_1, x_2, x_3 hasta x_n. ¿Cuánto vale la media de ese conjunto de datos?

María: $\bar{X}$

Entrevistador: y ¿cómo se obtiene ese $\bar{X}$?

María: Pues es el promedio de los valores.

Entrevistador: ¿y la desviación estándar cómo se calcula?

María: hmmm… entonces sería…. Miramos el valor de cada un dato y entonces lo comparamos con respecto a la media y así obtenemos la desviación, es decir, cuanto se desvía de la media.

Entrevistador: ¿Entonces la desviación estándar en ultimas qué es lo que mide?

María: A cuánto esta cada dato de la media (plantea de forma algebraica dicha distancia, ver Ilustración 37*).*

Ilustración 37. Notación de María

$$X_i - \bar{X}$$

Entrevistador: ¿Esa es la desviación de quién?

María: del dato.

Entrevistador: ¿Qué dato?

María: del dato x_i

Entrevistador: Pero son n *datos ¿Entonces cómo se calcula la desviación estándar de todo los datos?*

María: La sumatoria de esas distancias (ver Ilustración 38*)*

Ilustración 38. Notación de María para la desviación estándar muestral

$$\sum_{i=1}^{n} X_i - \bar{X}$$

Entrevistador: ¿Entonces es la suma de las desviaciones?

María: si

Entrevistador: y si le digo que eso da cero ¿me creería?

María: hmmm

Entrevistador: Si tenemos en cuenta la sumatoria que usted plantea, entonces la desviación estándar de un conjunto de datos es cero. Además le falta un paréntesis.

María: uy sí (agrega el paréntesis, ver Ilustración 39*)*

Ilustración 39. Ajuste en la notación de María

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})$$

María: Pues igual aquí (señala la sumatoria) voy a encontrar una distancia, así sea mínima, pero va a haber una distancia.

Entrevistador: Que puede ser negativa o positiva

María: Si

Entrevistador: ¿Usted no me cree que eso dé cero?

María: Es que para que fuera cero, en cualquier momento se deberían ir anulando las diferencias.

Entrevistador: Si, por eso es que la media, en términos físicos, es el centro de gravedad de los datos. Luego esa suma da cero, ¿Podría demostrarlo?

María: hmmm, no.

Entrevistador: Bueno, entonces volvamos a la idea de desviación estándar. Para que eso no de cero, entonces se eleva al cuadrado esa diferencia y entonces todas las distancias quedan positivas. Escríbalo.

María: (agrega la información suministrada por el entrevistador, ver Ilustración 40*)*

Ilustración 40. Ajuste en la notación de María por sugerencia del entrevistador.

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

Entrevistador: Supongamos que esa es la desviación estándar de una muestra de 5 datos. Si estimo la desviación estándar de otra muestra de 10 datos, ¿cuál tendrá mayor variación, la de 5 datos o la de 10?

María: hmmm

Entrevistador: ¿Cuál es más probable que tenga el valor más grande, teniendo en cuenta esa sumatoria?

María: La de 10

Entrevistador: claro, y ¿eso tiene sentido? ¿La dispersión depende exclusivamente del número de datos?

María: si, pues no es que dependa tanto del número, sino también de la si hay o no datos atípicos.

Entrevistador: ¿Datos atípicos qué significa?¿qué es un dato atípico?

María: que él es diferente a los demás...Pues cuando yo le calcule la desviación estándar con el valor atípico pues me va a dar un valor muy grande… o bueno si, el valor atípico influye para la muestra.

Entrevistador: ¿Cómo así que influye para la muestra?

María: porque veamos que… si miramos el ejemplo del que hablábamos, el de las notas, si yo tengo que cuatro notas están entre 3.8 y 3.7 más o menos, *entonces si habíamos tomado 5 personas y la quinta nota es 1.0. Entonces eso es lo que es un dato atípico, que sea muy diferente a los demás.*

Entrevistador: bueno, resumamos, ¿cuál es la información que brinda la desviación estándar de un conjunto de datos?

María: Jum…es como a la distancia que va a estar de la muestra, del promedio.

Entrevistador: tengo un conjunto de datos, ¿la desviación estándar de ese conjunto de datos qué me dice?

María: la distancia de cada dato a la media. Pero recuerdo que en algunos ejercicios me daban el listado de los datos, la desviación estándar de los datos, entonces no era la desviación de cada uno de los datos, era la desviación de la muestra. Me daban un solo número.

Entrevistador: y entonces ¿ese número qué es lo que representa de la muestra?

María: hmmm, pues….

Entrevistador: si le dicen que la desviación estándar de un conjunto de datos es 1.3 ¿Qué quiere decir eso para usted?

María: Sé que es a cuánto se desvía, pero entonces el problema es que no sabría decir con respecto a qué es que se desvía. Digamos en este caso donde sólo me dan una desviación.

Entrevistador: Siempre le dan una sola.

María: pues sí, pero no recuerdo mucho sobre este tema.

Curiosamente María, además de ubicar la desviación estándar en el punto de la inflexión de la normal, conoce su significado: "*Es a cuanto más o menos está de la media... Lo que la muestra se desvía de la media".* Sin embargo no es capaz de expresarlo matemáticamente, tampoco se da cuenta de que la suma de las desviaciones de los datos respecto a la media muestral es cero, ni tampoco asocia la idea de que cuando se dice que la desviación es de toda la muestra lo que se está queriendo decir es que se trata de un valor promedio. Más adelante corroboraremos si esta falta de claridad sobre el proceso de construcción de la desviación estándar tiene alguna consecuencia en su comprensión de los intervalos de confianza o de algunas de sus propiedades.

María muestra preocupación por los datos atípicos, en particular porque percibe que ellos pueden aumentar la estimación de la desviación estándar y, tal vez porque sabe, como se verá más adelante, en consecuencia aumenta el tamaño del intervalo, disminuyendo su precisión.

Hasta el momento se observa que María asume que el intervalo de confianza es un intervalo centrado en $\bar{x}$ y que se tiene en cuenta un nivel de confianza. Dicho intervalo se estima con base en los valores muestrales. De esta forma María da muestras de poseer una concepción proceso del intervalo de confianza si bien no ha justificado qué otros conceptos estadísticos intervienen en su construcción.

Ya analizado el camino conceptual de María, vamos a ver qué tan clara es a la hora de interpretar la influencia de los factores que determinan el intervalo de confianza en términos de su tamaño y precisión.

Entrevistador: Un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (μ) es el intervalo que contiene el 45% de los valores posibles de la media muestral $\bar{x}$.

María: yo creo que es falso

Entrevistador: falso, ¿por qué?

María: porque el 45% es el nivel de confianza, pero lo que el nivel de confianza me quiere decir es la probabilidad. Y creo que lo que están afirmando ahí es que es el 45% de la población. Y eso es independiente, no tiene nada que ver el nivel de confianza con el pedazo que yo tome de la población.

Entrevistador: Un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (μ) es un intervalo más ancho que el intervalo de confianza del 95%.

María: Falso, es más pequeño

Entrevistador: ¿Es más pequeño, por qué?

María: Porque… Porque si yo calculara a partir de una muestra un intervalo de 45% de confianza y uno de 95% entonces el de 95% va a ser más grande y eso se ve es por la fórmula con la que se calcula el intervalo de confianza (Dibuja los dos intervalos en el tablero, ver Ilustración 41*)*

Ilustración 41. Efecto del nivel de confianza en un IC

Entrevistador: ¿Cuál fórmula?

María: $\bar{x}$ más o menos este zeta asterisco por la desviación estándar de la muestra (ver Ilustración 42*)*

Ilustración 42. Expresión algebraica que da lugar al IC

$$I = \left(\bar{x} \pm z^{*} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

> *Entonces para calcular el intervalo dependo del zeta asterisco. Entonces en la medida que el nivel de confianza aumente entonces el intervalo va a ser más grande, o sea, el error va a ser más grande (María señala el error en la expresión algebraica, ver* Ilustración 43*).*

Ilustración 43. Efecto del nivel de confianza en el error de estimación de un IC

$$I = \left(\bar{x} \pm \underbrace{z^{*} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\varepsilon}\right)$$

Contrario a lo pensado anteriormente María recuerda la expresión algebraica utilizada para construir el intervalo, es interesante el hecho de que sólo hasta el momento la haya traído a colación, es como si se tratara sólo de su memorización pero no de su relación con el teorema central del límite. También se observa que interpreta el nivel de confianza como una probabilidad y su conocimiento de la expresión que da lugar al intervalo de confianza le permite responder acertadamente sobre el efecto del valor del nivel de confianza sobre el tamaño del intervalo.

> *Entrevistador: Un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (μ) es un intervalo de valores calculado a partir de los datos de la muestra. En el 45% de las muestras de una población, el intervalo calculado contiene a la media de la población.*
>
> *María: Sí, eso es cierto. Porque si yo tomo las muestras, cómo le digo, si yo tomo varias muestras, digamos que tomo 100 muestras, 45…en 45… Hmmm no sé cómo decirlo. O sea, ese valor que yo estoy estimando ehhh… va a estar en 45 de esos 100.*
>
> *Entrevistador: ¿por qué?*
>
> *María: porque el nivel de confianza lo que me da es la probabilidad.*
>
> *Entrevistador: ¿La probabilidad de qué?*
>
> *María: de que el valor que estoy estimando se encuentre en ese intervalo.*
>
> *Entrevistador: ¿En ese intervalo?*

María: Sí.

Entrevistador: Pero aquí estamos hablando de varios intervalos. ¿Usted cómo asume la probabilidad? Cuando yo digo que la probabilidad de obtener cara, al lanzar una moneda, es un medio, ¿eso qué significa?

María: Hmmm, un medio. Que de 100 monedas que yo tire, 50 van a caer cara.

Entrevistador: ¿y eso es lo que usted está asumiendo para el nivel de confianza?

María: Sí.

Como es claro, María responde acertadamente las tres preguntas planteadas: la primera asumiendo el nivel de confianza como la probabilidad de que el intervalo contenga la media poblacional; la segunda por su claro conocimiento de la expresión que define el radio del intervalo, en tanto que la tercera por la interpretación frecuencial de la probabilidad. Igual que Santiago, María convive con las interpretaciones subjetiva y frecuencial de la probabilidad sin hacerse ningún problema.

En términos de la Teoría APOE, podría asumirse que María tiene una concepción acción del nivel de confianza. Aunque en realidad parece más una concepción objeto, pues María la ve como algo estático por el sólo hecho de conocer la expresión que da lugar a la construcción del intervalo de confianza.

Entrevistador: Un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (μ) es dos veces más ancho que el intervalo de confianza del 90%.

María: Falso.

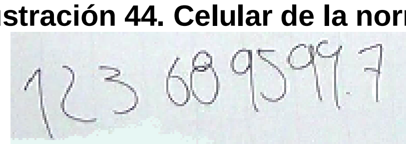
Entrevistador: ¿Por qué?

María: porque, como ya le había dicho depende de la zeta asterisco.

Entrevistador: Pero en este caso el nivel de confianza es el doble.

María: Aun así no creo, porque que yo recuerde el número del "celular de la normal" es 123 6895997(ver Ilustración 44*)*

Ilustración 44. Celular de la normal



Entonces a una desviación estándar está el 68% de los datos, a dos desviaciones estándar está el 95% de los datos y a tres desviaciones estándar está el 99,7% de los datos (ver Ilustración 45*)*

Ilustración 45. Explicación del celular de la normal.

Entonces no encuentro una relación donde el nivel de confianza dependa de su anterior. Para mi estos zetas (señala el celular de la normal) van a ser diferentes. Cada nivel de confianza tiene su respectivo zeta, independientemente. Que eso ocurriera entonces no tendría sentido tener tantos valores para zeta asterisco y bastaría con sacar mitades o dividir por algo.

Entrevistador: ¿si eso pasara, significaría que tenemos una relación de qué tipo?

María: hmm, no sé, lineal.

Ahora María con base en el "celular de la normal" se da cuenta que los valores asociados a los valores de confianza no son lineales lo que le permite negar la veracidad de la afirmación. Interesante que su utilización del celular no es para negar que el nivel de confianza es menos ancho que el de 90 sino para rechazar la duplicidad del uno respecto al otro.

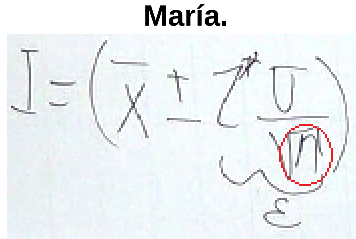
Entrevistador: Si se aumenta el tamaño muestral, conservando los demás datos constantes, el intervalo de confianza se hace más ancho.

María: No, se va a hacer más pequeño.

Entrevistador: ¿Por qué?

María: ehh, por esta n (Señala en el tablero el tamaño muestral, ver Ilustración 46*)*

Ilustración 46. Identificación del tamaño muestral en la notación de María.



Pues lo que me representa es el tamaño de la muestra, entonces si n aumenta entonces el error va a ser más pequeño, entonces el intervalo va a ser más pequeño.

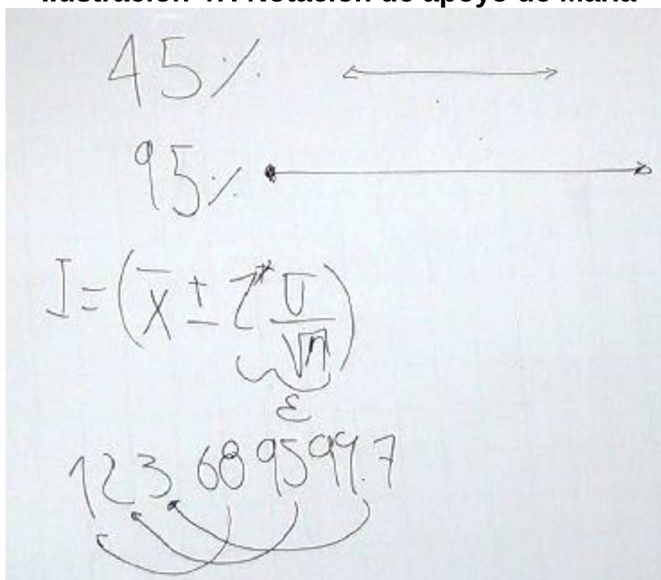
Una vez más el tener presente la expresión que da lugar a la construcción del intervalo de confianza le permite a María darse cuenta del efecto del tamaño muestral.

> *Entrevistador: Si se aumenta el nivel de confianza, manteniendo los demás datos constantes, el intervalo de confianza se vuelve más angosto.*
>
> *María: Falso va a aumentar, va a ser más grande*
>
> *Entrevistador: ¿Por qué?*
>
> *María: porque si se aumenta el nivel de confianza va a aumentar el zeta asterisco y por tanto el error muestral.*
>
> *Entrevistador: Si aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional.*
>
> *María: ehhh, es verdadera*
>
> *Entrevistador: ¿Por qué?*
>
> *María: por el teorema central del límite.*
>
> *Entrevistador: ¿Por qué?*
>
> *María: porque si es más grande… porque entre más grande sea la muestra… No, por el… ehhhh, oh. ¿Lo puede volver a repetir?*
>
> *Entrevistador: Claro. Si aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional.*
>
> *María: hmmm, pues sí, es verdadero, pero me parece como muy obvio.*
>
> *Entrevistador: ¿Qué significa precisión para usted? ¿Qué significa precisión de la estimación?*
>
> *María: Que va a ser más exacta, más precisa, más exacta. La media, la $\bar{x}$ va a ser más aproximada a μ.*
>
> *Entrevistador: ¿La $\bar{x}$?*
>
> *María: Sí, la $\bar{x}$*
>
> *Entrevistador: Entonces, ¿aumenta la precisión cuando aumenta el tamaño muestral?*
>
> *María: Sí, pero creo que eso depende de si los datos son aleatorios. O partamos de que si lo son. Entonces sí.*
>
> *Entrevistador: Y ¿por qué?*
>
> *María: Porque sí (risas)*

Entrevistador: En términos de los intervalos de confianza, ¿Cómo asegura que la media muestral está más cerca de μ?

María: (Mira lo que tiene escrito en el tablero, ver Ilustración 47*)*

Ilustración 47. Notación de apoyo de María

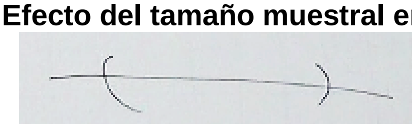


Pues porque es que entre, si yo, si yo aumento demasiado la muestra entonces el intervalo va a ser mucho más grande.

Entrevistador: ¿Más grande si aumento la muestra?

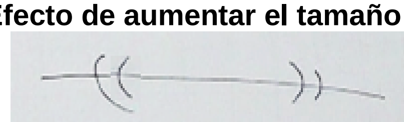
María: Ehh, si aumento… Mentiras, mentiras, es más pequeño. Entonces, entre yo más aumente, pensemos que empecé aquí (dibuja un intervalo de confianza, ver Ilustración 48*)*

Ilustración 48. Efecto del tamaño muestral en el ancho del IC



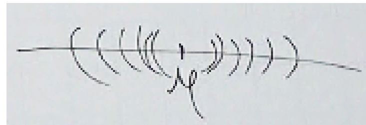
Entonces, entre yo más la aumente, voy a obtener algo así (ver Ilustración 49*),*

Ilustración 49. Efecto de aumentar el tamaño muestral en el IC



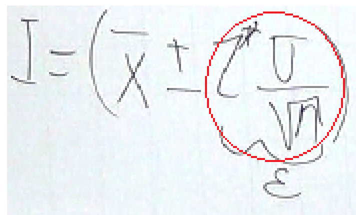
Entonces entre más aumente, más cercano y por eso es que va a ser más preciso el valor que estoy estimando (ver Ilustración 50*).*

Ilustración 50. Tamaño del intervalo vs precisión.



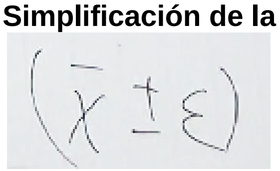
Porque cada vez que se va a haciendo más pequeño el error, este error (señala la expresión que tiene en el tablero, ver Ilustración 51*) se va a hacer más pequeño.*

Ilustración 51. Efecto del tamaño muestral en el error de estimación del IC



Escribámoslo así (Ver Ilustración 52*)*

Ilustración 52. Simplificación de la ilustración 48.



Se va haciendo más pequeño el error, entonces como este intervalo es un estimador del μ, entonces la media muestral $\bar{x}$ va a estar más cercano a μ. Porque el error de estimación va a ser más pequeño.

María identifica adecuadamente el efecto del tamaño muestral en cuanto a la precisión del intervalo de confianza. Si bien, en un principio, asumió el resultado “como muy obvio” y con dificultades para justificarlo, posteriormente, al asociar precisión con el tamaño del intervalo, lo fundamenta basándose nuevamente en la expresión dada para el error. María al contrario de Santiago centra su atención en el intervalo, es decir, en la medida que aumenta el tamaño muestral el error se hace más pequeño, por tanto el intervalo se achica y el centro del intervalo que es la media muestral va a ser una estimación más precisa de la media poblacional.

Entrevistador: y si se aumenta el nivel de confianza, aumenta la precisión de la media poblacional.

María: Ehh, si se aumenta el nivel de confianza del intervalo, yo creería que no.

Entrevistador: ¿Por qué?

María: porque es que si yo aumento el nivel de confianza, entonces zeta asterisco va a ser más grande, entonces el intervalo va a estar muy abierto.

Entrevistador: ¿Entonces la confianza no tiene nada que ver con la precisión?

María: pues es que también estoy pensando que el nivel de confianza es la probabilidad de que… de que el… ciento por… es que no sé cómo decirlo. El nivel de confianza es un valor de probabilidad, ¿pero de qué? No sé si es la probabilidad de que este (señala a μ) se encuentre en el intervalo, o sea que…

Yo pensaba era que, que en el caso del nivel de confianza del 45%, sería que 100, que de cada 100… Pero es que no se 100 de cada que… de cada 100 el μ se encuentre en 45 de ese intervalo.

Entrevistador: ¿A partir de que genera usted un intervalo? ¿Qué tiene que tener para construir un intervalo?

María: ehhh, pues los datos, muestras.

Entrevistador: Entonces supongamos que tenemos 100 muestras y para cada muestra construimos un intervalo para la media poblacional. Entonces como tengo 100 muestras tengo 100 intervalos. Entonces ¿qué es el nivel de confianza de 45%?

María: ahhh, que de esos 100 intervalos, μ va a estar en 45 de ellos.

Entrevistador: Volvamos a la pregunta ¿si yo aumento el nivel de confianza aumento la precisión del estimador?

María: (Se queda pensando)

Entrevistador: ¿Si hay más confianza hay más precisión?

María: Tanto como precisión, yo creo que no porque… porque digamos que yo puedo asegurar que mi nota en un examen va a estar en, va a ser, digamos, 3 más o menos 2, y lo puedo hacer con un nivel de confianza del 99%.

Entrevistador: ¿Entonces usted puede asignarle un nivel de confianza a un intervalo que ya construyó a partir de un procedimiento particular? Es decir, su nota está entre 3 y 3.2, eso es todo un intervalo, ¿a eso yo le puedo asignar un nivel de confianza?

María: Si le asigno una confianza, pero creo que la que yo quiera, eso es independiente.

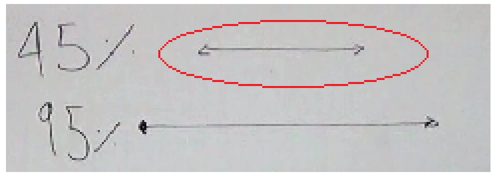
Entrevistador: ¿No están íntimamente relacionados la confianza y el intervalo y el tamaño de intervalo? Es decir, ¿yo puedo hacer procesos distintos, primero construyo el intervalo y después le asigno un nivel de confianza?

María: Eh, no porque yo para construir el intervalo necesito conocer el nivel de confianza.

Entrevistador: ¿Entonces si aumento el nivel de confianza aumento la precisión de la estimación?

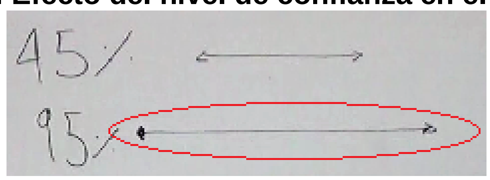
María: Pues, estoy confundida porque digamos que, para un intervalo del 45% de confianza me dio esto (señala el primer intervalo que tiene dibujado en el tablero, ver Ilustración 53*)*

Ilustración 53. Efecto del nivel de confianza en el tamaño del IC.



Y del 95 % me dio esto (señala el segundo intervalo, ver Ilustración 54*)*

Ilustración 54. Efecto del nivel de confianza en el tamaño del IC



Entonces el 95% significaría que de cada 100 intervalos el μ va a estar en 95 de esos intervalos.

Entrevistador: Ajá

María: Entonces si va a ser como más preciso porque el intervalo va a ser más grande.

Entrevistador: Usted puede garantizar que va a estar en más intervalos, es decir, en del 95% se puede decir que va a estar en 95 de cada 100 y en del 45% se puede decir que va a estar en 45 de cada 100.

María: Pues sí.

Entrevistador: Entonces ¿cuál de los dos es más preciso?

María: El del 95%

Igual que Santiago, María, no sin confundirse, asume finalmente que la precisión es directamente proporcional al nivel de confianza: como el nivel de confianza hace referencia al porcentaje de intervalos que contienen la media poblacional, entonces es de mayor precisión, es, en últimas, su argumentación.

En términos generales se observa que María plantea de forma clara las motivaciones que llevan a la construcción de un intervalo de confianza para la media, sin embargo, al igual que Santiago la concepción que tiene sobre el intervalo de confianza está íntimamente relacionada con la calidad de la muestra. María sin embargo, no se centra sólo en la estimación puntual ya que, con base en la expresión algebraica que recuerda, hace una interpretación adecuada del efecto de los conceptos que intervienen de manera directa en la construcción del intervalo, como lo son el tamaño muestral y el nivel de confianza y la desviación estándar poblacional.

Entrevista con Fabio

Fabio es estudiante de Matemática pura y aprobó dos cursos de estadística básica y uno de didáctica de la estadística y la probabilidad. El curso donde estudió el concepto de intervalo de confianza lo realizó 4 semestres antes de iniciada esta investigación y utilizó como texto guía el libro de Estadística Matemática con aplicaciones (Wackerly, Mendenhall III y Scheaffer, 2008)

> *Entrevistador: ¿Qué motiva la construcción de un intervalo de confianza?*
>
> *Fabio: Bueno, pues se tiene una población grande y se toma una muestra, entonces se quiere saber qué tan cerca está la media de la muestra de la media de la población. Eh, bueno entonces se hacen unos cálculos y el intervalo de confianza lo que quiere decir, es con qué probabilidad la media de esa muestra es igual a la media de la población. Digamos que tengo un 95%, eso quiere decir que esa media de la muestra es muy cercana a la de la población.*

Inicialmente se perciben tres ideas en Fabio:

1. "Se quiere saber qué tan cerca está la media de la muestra de la media de la población".
2. "…se hacen unos cálculos y el intervalo de confianza lo que quiere decir, es con qué probabilidad la media de esa muestra es igual a la media de la población".
3. "Digamos que tengo un 95%, eso quiere decir es que esa media de la muestra es muy cercana a la de la población".

Para Fabio los intervalos de confianza responden la cuestión de qué tan parecida es la media muestral con la media poblacional (1), parecido que se define, en primer lugar, en términos del nivel de confianza que para Fabio no es más que la probabilidad del evento $\overline{X} = \mu$ (2). Luego amplía este concepto y asume que el nivel de confianza es una medida de la precisión o de la cercanía de $\overline{X}$ a μ.

Si bien en un principio, Fabio asimila el intervalo de confianza con una estimación puntual en la que se quiere saber con qué probabilidad se acierta, y donde el nivel de confianza es esa probabilidad, después amplía esta concepción asumiendo que el nivel de confianza es una medida de la cercanía de la media muestral a la poblacional. Esta última concepción, si bien es errada, y podría estar reflejando la concepción de que aumentar el nivel de confianza aumenta la precisión de la estimación, es decir, disminuye el tamaño del intervalo, al menos supera la concepción primera de acierto total de la media muestral respecto a la poblacional.

Entrevistador: ¿Ese 95% cómo es que se llama?

Fabio: La probabilidad de que suceda.

Entrevistador: ¿y cómo se llama eso?

Fabio: Nivel de confianza.

Entrevistador: ¿usted dijo que cuando el nivel de confianza es muy alto sucede qué cosa?

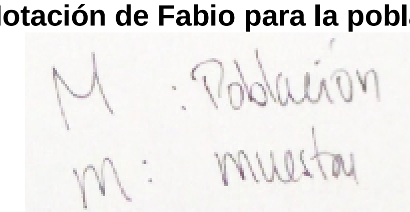
Fabio: Que la media de la muestra se parece bastante a la media de la población. Por ejemplo si el nivel de confianza fuera 100% las medias serían iguales.

Fabio confirma su posición inicial al afirmar que cuando el nivel de confianza es del 100% se produce la certeza absoluta de que las dos medias son iguales.

Entrevistador: ¿Si fuera 100%?

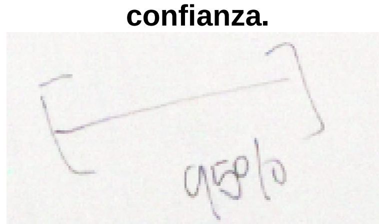
Fabio: Sí, si el nivel de confianza fuera 100%. Lo que querría decir el 100% es que la media poblacional sí estaría en el intervalo de confianza. Bueno, a veces me confundo, digamos que esta M *es la media de la población y esta* m *es la media de la muestra (A la vez va escribiendo en el tablero lo que dice, ver* Ilustración 55*)*

Ilustración 55. Notación de Fabio para la población y la muestra



Entonces el intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95% (hace un dibujo en el tablero, Ilustración 56*)*

Ilustración 56. Representación de un intervalo de confianza del 95% de confianza.



Lo que me quiere decir es que con un 95% de confianza la media de la población cae en el intervalo.

Entrevistador: ¿Y qué quiere decir eso del "95% de confianza"?

Fabio: que es muy probable que caiga en el intervalo.

Entrevistador: ¿El 95% es una probabilidad?

Fabio: Sí.

Entrevistador: ¿Entonces, esa confianza es un indicativo de qué? ¿O es una medida de qué?

Fabio: Es una medida de la probabilidad de que la media poblacional caiga en el intervalo de confianza y ese intervalo de confianza se hace con respecto a esta m (señala la media de la muestra)

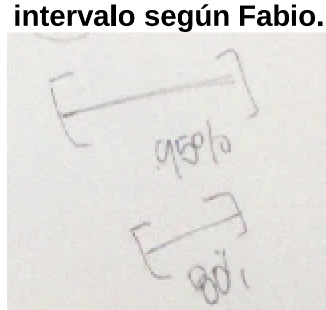
Fabio da un giro completo en su significado de intervalo de confianza: ahora se trata realmente de un intervalo y el nivel de confianza hace referencia a la probabilidad de que éste contenga la media poblacional. Además, añade que el intervalo se construye con referencia a la media muestral m.

Nótese que Fabio asume el nivel de confianza como la probabilidad sobre el intervalo obtenido asumiendo implícitamente que la incertidumbre que le permite hablar de probabilidad se relaciona con el hecho de que contenga o no la media poblacional.

Entrevistador: y si nos dan un intervalo con una confianza del 80% ¿Qué podemos decir del intervalo del 80% de confianza con respecto al intervalo del 95% de confianza? ¿Qué relación hay entre ellos? ¿Cuál es más grande? ¿Cuál es más pequeño?

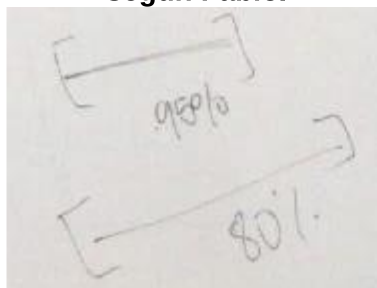
Fabio: hmmm, Es más grande el del 95% creo (Ver la Ilustración 57*)*

Ilustración 57. Representación del efecto del nivel de confianza en el tamaño del intervalo según Fabio.



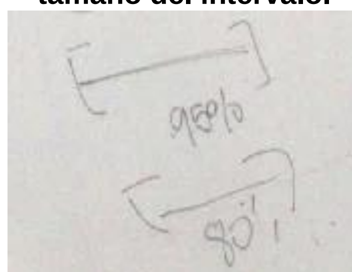
No, no mentiras es más grande el de 80% (dibuja un nuevo intervalo, ver Ilustración 58*)*

Ilustración 58. Efecto del nivel de confianza en el tamaño del intervalo según Fabio.



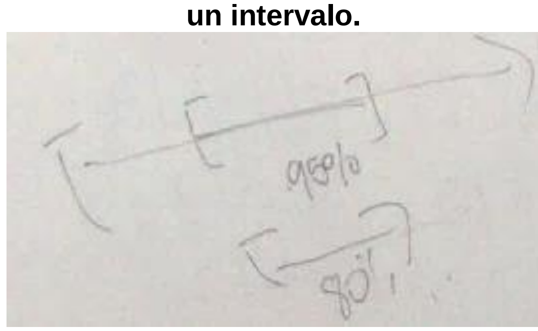
Pues porque… hmm (se queda mirando lo que tiene en el tablero) no, espere, espere (borra el intervalo que acabó de dibujar y hace otro, ver Ilustración 59*)*

Ilustración 59. Representación del efecto del nivel de confianza en el tamaño del intervalo.



Es más grande el de 95%... ya sé, si tengo más seguridad de que va a caer ahí, pues más posibilidades tengo para escoger. Si el nivel de confianza es más grande (agranda el intervalo de 95% de confianza, ver Ilustración 60*)*

Ilustración 60. Efecto de aumentar el nivel de confianza en el tamaño de un intervalo.



Pues entonces yo tengo más confianza de que la media va a estar ahí porque tengo más posibilidades de que caiga.

La interpretación del nivel de confianza como una probabilidad le permite a Fabio responder adecuadamente sobre el efecto del valor del nivel de confianza sobre el tamaño del intervalo. Fabio, igual que Santiago y María asume el nivel de confianza como probabilidad, falta ver si posee, al igual que sus colegas, la concepción frecuencial.

Entrevistador: ¿Pero lo ideal es que el intervalo sea grande o que el intervalo sea pequeño?

Fabio: No, lo ideal es que sea pequeño.

Entrevistador: ¿Y usted puede tener, cambiando alguna cosa, un intervalo pequeño con una confianza grande?

Fabio: Ehhh (se queda pensando) No sé.

Entrevistador: En términos de precisión, ¿es mejor tener un intervalo grande o un intervalo pequeño?

Fabio: Un intervalo pequeño.

Entrevistador: Pero entonces ¿cómo hacemos para que conservando la confianza del 95% del intervalo de arriba sea igual en tamaño al intervalo de abajo que es el del 80% de confianza? ¿Qué tendríamos que cambiar para lograr eso?

Fabio: Pues hay algo que se me ocurre, pero a la vez se me contradice un poco… Bueno, o sea, bueno, si uno aumenta la muestra quiere decir que más población, si tomara toda la población pues da lo que estoy buscando que es la media poblacional. Lo que yo digo es que si se aumenta la muestra, el intervalo se puede hacer más pequeño, pues que toma uno más datos de la población.

Pero a la vez si se aumenta la muestra cogiendo los datos que están más alejados de la media pues…

Fabio relaciona de manera adecuada la precisión de un intervalo con su tamaño. Además de conocer el efecto del nivel de confianza y del tamaño muestral en el tamaño del intervalo, Fabio relaciona el efecto del nivel de confianza unido al efecto del tamaño muestral con el tamaño del intervalo. Lo cual podría ser una evidencia de la coordinación entre estos dos conceptos necesarios para la interpretación de un intervalo de confianza.

Fabio, al igual que María y Santiago, le atribuye importancia a la calidad de los datos, se preocupa por los datos alejados de la media.

Entrevistador: ¿Usted puede escoger los datos cercanos o lejanos de la media?

Fabio: pues sí

Entrevistador: ¿Usted conoce la media de la población?

Fabio: Ese valor no se puede ni calcular, digamos que fuera el agua del mar, eso uno nunca va a saberlo.

Entrevistador: ¿El M qué es?

Fabio: Es la media de la población, pero nunca la voy a conocer de verdad.

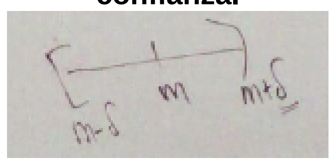
Entrevistador: ¿Entonces usted afirma que si se aumenta el tamaño muestral el intervalo se hace más pequeño?

Fabio: si, se empequeñece. Sí, claro, todo depende es de la población. Entonces entre más datos tenga pues es más acertado.

Entrevistador: ¿y cómo se calcula un intervalo de confianza?

Fabio: No me acuerdo la verdad… hmmm, uno calcula la media y yo sé que en el intervalo está la media y le pone uno un error (hace un dibujo en el tablero, Ilustración 61*)*

Ilustración 61. Representación de la estructura de un intervalo de confianza.



Entrevistador: ¿Y ese error quién es?

Fabio: No lo sé.

Entrevistador: refresquemos la memoria, usted dice que ese δ (delta) es el error.

Fabio: si, es el que dice el tamaño del intervalo.

Entrevistador: Entonces, ¿dónde está centrado el intervalo?

Fabio: en la media muestral m

Si bien Fabio no recuerda la expresión que da lugar a los intervalos de confianza, de forma clara asume que el centro del intervalo es la media muestral y que el tamaño del intervalo está determinado por el error que él llama δ (delta). Fabio está asumiendo la media muestral como un todo y aplica acciones sobre ella, lo cual es evidencia de una concepción objeto de media muestral.

Además Fabio está asumiendo la media muestral como un estimador de la media poblacional.

Entrevistador: ¿El error de quien va a depender?

Fabio: pues primero depende de los datos que se tomen.

Entrevistador: ¿por qué de los datos que se tomen? ¿entre otras cosas, cómo se escogen los datos?

Fabio: Los datos se pueden escoger… Puede ser al azar, entonces se hace un estudio previo y se dice vamos a escoger tantos del estrato tal, tantos del *este otro estrato, y pues entonces ahí hay como un criterio, pues se sabe cuántos tomar de cada estrato, o, digamos, clase de la población.*

Fabio tiene claridad en cuanto a la necesidad de escoger de manera aleatoria la muestra, en este caso en particular menciona el muestreo aleatorio estratificado.

Entrevistador: ¿Pero cuando usted dice que entonces el error va a depender de la muestra que se escoja, qué quiere decir con eso?

Fabio: bueno pues, yo… supongamos que no sé en ultimas qué tan alejados están los datos de la muestra, o sea… de la muestra no, de la media, entonces de eso depende. Digamos que la media de la edad de un grupo fuera 18 años, entonces ese error varía dependiendo de las personas que yo escoja, porque si escojo de 20 años, de 30 años o de 45 años, esos están alejados. Entonces ese error es como lo que están diferentes de la media, pues entonces ahí están, depende de los que yo escoja, porque si escojo por ejemplo de 17, de 16, de los que están alrededor de la media pues el error no es tanto y pues si tomo los que están alejados más grande va a ser el error.

Entrevistador: ¿Y usted cómo sabe que tan cerca están los datos de la media? ¿Cómo hago para saber si es o no una buena muestra?

Fabio: El problema es que yo no sé eso.

Entrevistador: Entonces, ¿de qué más puede depender el error?

Fabio: (se queda pensando)

Entrevistador: ¿El error determina qué del intervalo?

Fabio: El tamaño

Entrevistador: ¿Entonces qué otras cosas intervienen en el tamaño?

Fabio: hmmm, el error depende también de cuántos coja de la población, digamos que si la población es muy grande y yo tomo muy poquitos entonces el error es grande.

Entrevistador: ¿Entonces se puede decir que el error es proporcional o inversamente proporcional al tamaño de la muestra?

Fabio: El error es inverso porque si tomo más entonces el error es menor.

Entrevistador: ¿Qué otros elementos intervienen en ese error?

Fabio: (se queda pensando) bueno pues hay cosas que no manejo muy bien, pero creo que la desviación, aunque creo que eso se calcula y me dice qué tan lejos está cada dato de la media. Pero no sé muy bien.

Como se aprecia en las respuestas, Fabio está reflexionando en términos generales, en la forma de construir un intervalo de confianza, asume que a partir de la información de una muestra se estima la media de la población. Además es consciente de que el centro del intervalo está determinado por la media muestral que él llama m. Su enfoque es de estimación puntual, el error depende es de la cercanía del tamaño muestral al tamaño poblacional, entre más cercanos están el error es menor. En este sentido asume, igual que María, que el error es producto de realizar una estimación con parte de la población, no considera el factor aleatorio asociado a diferentes muestras.

> *Entrevistador: ¿La desviación?*
>
> *Fabio: Pues no lo tengo muy claro, trato de recordar, pero no sé.*
>
> *Entrevistador: No trate de recordar, ¿usted qué cree?*
>
> *Fabio: Yo creo que la desviación estándar… esto… la desviación estándar lo que me dice es a qué distancia está cada dato de la muestra, de la media, de la media de la muestra, pues yo creo que entonces eso debe influir de alguna manera, porque si uno calcula qué tan lejos está cada dato de la media, cierto, entonces ahí está… Es como… Como estamos viendo qué tan alejados están los datos de m, entonces eso debe influir ahí.*
>
> *Entrevistador: ¿En forma directa o en forma inversa?*
>
> *Fabio: Si la desviación estándar es muy grande entonces quiere decir que los datos están muy alejados y si la desviación estándar es más pequeña entonces los datos van a estar más cerca de m. Yo diría que lo afecta directamente.*

Fabio identifica de manera adecuada el efecto y la necesidad de considerar la desviación estándar en la construcción del intervalo de confianza. Al igual que María, considera que "*la desviación estándar lo que me dice es a qué distancia está cada dato de la muestra, de la media de la muestra",* asimilando la media de las desviaciones como el valor para cada dato.

> *Entrevistador: ya tenemos que en el error interviene el tamaño de la muestra de forma inversamente proporcional y la desviación estándar de manera directa, ¿Qué otra cosa afectará?*
>
> *Fabio: hmmm, (se queda mirando lo que tiene escrito en el tablero) aaahhh, con qué confianza lo voy a tomar. Si yo quiero un intervalo de confianza del 0.5 de probabilidad entonces pues el tamaño es diferente, así que depende del valor de confianza.*
>
> *Entrevistador: ¿Del nivel de confianza?*
>
> *Fabio: si, eso, del nivel de confianza.*
>
> *Entrevistador: ¿Y el nivel de confianza lo afectará de forma directa o de forma inversa?*

Fabio: pues si es más confianza más grande el intervalo, entonces es como directa. A más confianza, más grande.

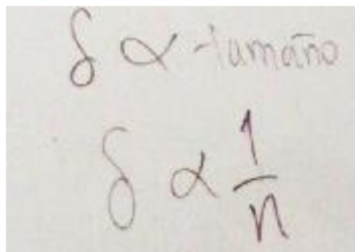
Entrevistador: ¿Entonces delta es proporcional a qué?

Fabio: Digamos que n es el tamaño de la muestra, entonces si tomo más entonces delta es menos, entonces es inverso.

Entrevistador: ¿Y cómo se escribe esa relación?

Fabio: Delta es inversamente proporcional a 1 sobre n, creo que así (escribe la expresión en el tablero, ver Ilustración 62*)*

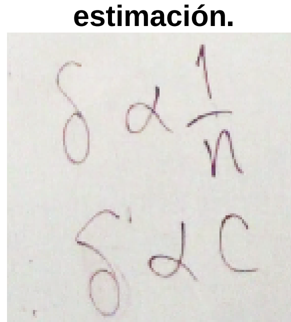
Ilustración 62. Relación entre el tamaño muestral y el error de estimación.



Entrevistador: y los otros dos elementos que mencionó, ¿cómo quedarían ahí?

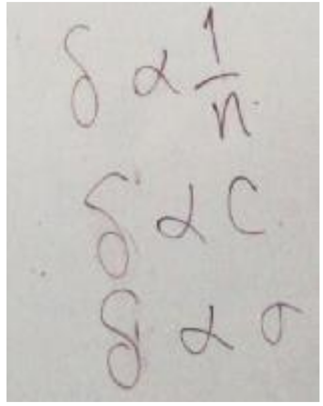
Fabio: Hmmm, la confianza es directa, entonces nos queda que el error es proporcional a la confianza C (ver Ilustración 63*)*

Ilustración 63. Relación entre el nivel de confianza y el error de estimación.



Entonces si la desviación es grande el tamaño del intervalo es más grande, entonces es directamente proporcional (Ver Ilustración 64*).*

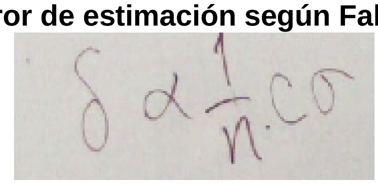
Ilustración 64. Relación entre la desviación estándar y el error muestral.



Entrevistador: ¿y cómo junta esas tres en una sola?

Fabio: hmmm, pues así (ver Ilustración 65*)*

Ilustración 65. Identificación de la expresión que permite determinar el error de estimación según Fabio.



Si bien Fabio no recuerda la expresión que da lugar a la construcción del intervalo de confianza, su reflexión sobre el nivel de confianza, el tamaño muestral y la desviación estándar, conceptos que intervienen de manera directa en dicha construcción, y la relación adecuada que establece entre ellos y el efecto en el intervalo de confianza le permiten plantear dicha expresión. Lo anterior es evidencia de un esquema a nivel Inter de intervalo de confianza. Su argumentación se resume así: *al aumentar la muestra la precisión aumenta, por lo tanto el intervalo debe ser más pequeño; si se aumenta la confianza es porque más seguridad se gana de que el intervalo contenga la media poblacional, por lo tanto el intervalo debe contener más valores; ahora si los datos están muy dispersos de la media, entonces la estimación debe ser menos buena y por lo tanto el intervalo debe ser más amplio.* Ninguna referencia a aleatoriedad ni a nada con ella relacionada, sin embargo las conclusiones son válidas y deducidas con argumentos muy elementales.

Ya analizada la forma como Fabio construye un intervalo de confianza para la media poblacional a partir de la información suministrada por una muestra y con base en el establecimiento de relaciones adecuadas entre varios conceptos que subyacen a su construcción, veamos cómo interpreta el efecto de dichos conceptos en el tamaño y precisión del intervalo.

Entrevistador: Voy a leer algunas afirmaciones y usted me va a decir si son verdaderas o falsas y porqué.

Si se aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional.

Fabio: Si, es verdadera

Entrevistador: si, ¿por qué?

Fabio: bueno, es que si toma más datos, pues puede ser, es que a veces me confundo no sé. Si uno tomas más datos tienen más ehh, digamos que uno se puede acercar más a la media que uno busca. Pero también puede uno tomar datos que no sirvan y pues se alejaría uno más.

Surge nuevamente la confrontación entre la calidad y la cantidad de los datos.

Entrevistador: ¿y usted cómo resuelve esa inquietud? Pues a usted lo que lo tiene preocupado no es el tamaño de la muestra si no la calidad de la muestra.

Supongamos que usted toma una muestra de tamaño 100 y le construye un intervalo, luego toma otra muestra de tamaño 100 y le construye un intervalo, ¿qué pasa, le da el mismo intervalo?

Fabio: No, pues cambia, pero depende de qué tan representativa es la muestra de la población.

Entrevistador: ¿Y entonces usted cómo resuelve ese conflicto? Porque es que usted toma muestra y muestras y obtiene valores distintos e intervalos distintos con el mismo nivel de confianza y el mismo tamaño muestral, lo único que va a variar es el valor de la media y por ende de la desviación. ¿Pero usted cómo resuelve eso? Porque es que en la práctica usted toma sólo una muestra y sin embargo uno se atreve a decir que con ese sólo hay una cierto nivel de confianza para decir que ese intervalo contiene a la media poblacional.

Fabio: Entonces el problema es escoger una muestra que sea la más óptima.

Entrevistador: ¿Usted cree que es problema de escoger la mejor muestra? ¿Cuál sería esa mejor muestra cuando usted está buscando algo que no conoce?

Fabio: pues sí, ni siquiera sé que me va a dar, entonces cómo hago para escogerla. ¿Entonces uno qué podría hacer? Pues uno pensaría… pues uno toma una muestra y esa le dio a uno una media, entonces se observan los demás datos, pero eso sería como forzar las cosas. Entonces si tomo los que me sirven pues esa muestra me quedaría mal.

Entrevistador: ¿cómo así? No entendí.

Fabio: Tomo una muestra de 100 y de ahí saco la media, entonces voy y tomo otros datos que se parezcan a la media que obtuve, pero entonces queda mal pues estoy sesgando.

Entrevistador: lo que usted dice es que yo calculo mi media muestral y me da 8.5 y entonces tomo otra muestra a ver si esos datos se parecen a 8.5 y si no se parece pues entonces no estoy bien.

Fabio: No, lo que yo digo es que usted toma la muestra cierto, y digamos que la media le dio 8.5.

Entrevistador: Sí

Fabio: lo que yo decía era que empiezo a buscar otra muestra con los elementos que se parezcan a la media, es decir que estén cercanos de 8.5. Por eso digo que está mal.

Entrevistador: ¿entonces cómo resuelve ese problema?

Fabio: creo que… no sé… o sea, ¿el problema es cómo, en últimas, achicar el intervalo? No tengo… es que sea más seguro de que la media poblacional caiga ahí (señala un intervalo) y que el intervalo sea pequeño.

Entrevistador: pues eso es lo más conveniente.

Fabio: ¿Entonces cómo hace uno eso?.... (Se queda pensando)

Entrevistador: Estamos hablando del problema de la selección, pues usted está tomando sólo una muestra. Si usted está haciendo un estudio aquí y otro investigador está realizando su mismo estudio en otro lugar, entonces consultan individuos distintos y construyen un intervalo de confianza y a cada investigador le dio un intervalo diferente, ¿entonces a cuál investigador le creemos?

Fabio: quién hizo el mejor estudio por decirlo así.

Entrevistador: Entonces debe haber algo subyacente que los dos investigadores manejen y que les permite a ambos afirmar con cierto grado de certeza que están en lo correcto. ¿Qué es eso que los dos investigadores manejan y que les permite hacer tales afirmaciones?

Fabio: hmmmm

Entrevistador: Esa media que usted llama m*, en realidad se representa con* $\bar{x}$

Fabio: Ahh sí, la media muestral.

Entrevistador: ¿Esa $\bar{x}$ *es una constante?*

Fabio: No, pues toma diferentes valores.

Entrevistador: ¿y eso cómo se llama en estadística?

Fabio: Variable aleatoria

Fabio: entonces es saber cuál es el que más me sirve.

Entrevistador: ¿El que más me sirve?

Fabio: No, el mejor. Supongamos en el estudio que decíamos, varios hicieron el estudio, entonces todos tienen una media distinta, entonces la idea es saber cuál de esas medias es la mejor y se me va a acercar a la media poblacional.

Entrevistador: Claro, entonces volvámonos atrás, por eso hay que estudiar las variables aleatorias solas, olvidémonos del problema de estar estimando una media de una población. Olvidémonos de eso por ahora. Ubiquémonos en una variable aleatoria, cómo usted mismo dijo, es algo que toma diferentes valores. Entonces, ¿qué es lo interesante de conocer si yo sé que hay varios valores?

Yo tiro dos dados si yo sumo las caras que caen y yo sé que puede dar 2 y 3 y 4 y 5 y 7, hasta 12. ¿Qué es lo interesante de eso, saber qué más?

Fabio: hmmm

Entrevistador: Si usted fuera jugador de los que lanzan dados, ¿qué le gustaría saber antes de apostar?

Fabio: Digamos que me gustaría saber cuáles valores pueden caer más

Entrevistador: ¿Eso cómo se llama?

Fabio: ¿La probabilidad de que caída?

Entrevistador: La distribución de probabilidad de la variable aleatoria.

Fabio: Hmmm, sí.

Entrevistador: Entonces volviendo a nuestro problema, $\bar{x}$ *tiene que tener una distribución de probabilidad, porque toda variable aleatoria la tiene. ¿Cuál será esa distribución de probabilidad de la variable* $\bar{x}$*?*

Fabio: Hmmm, la verdad no tengo bien claro eso.

Entrevistador: ¿usted ha oído hablar del teorema central del límite?

Fabio: Por allá una vez lo escuché, pero no lo recuerdo.

Entrevistador: ¿y la ley de los grandes números?

Fabio: de esa si no he escuchado nunca

Si bien el entrevistador intenta conducir a Fabio al terreno de lo aleatorio, el intento es fallido porque Fabio no se da para nada aludido con la idea de distribución de probabilidad, ni mucho menos con el teorema central del límite que, aunque reconoce que alguna vez lo escuchó, no lo recuerda.

Entrevistador: Bueno, y si yo tengo un intervalo de confianza del 90% y construyo otro del 45%, ¿puedo decir que el de 90% es dos veces más grande que el de 45%?

Fabio: Ah no, no porque si dependiera sólo del n.

Entrevistador: Todo eso igual, la misma muestra, la misma media, la misma desviación estándar, lo único que cambio es el nivel de confianza. Entonces para esa muestra construyo un intervalo con el 90% de confianza y a la vez construyo otro intervalo para esa muestra con una confianza del 45%

Fabio: No, yo diría que es falso, el de 90% no es el doble del de 45%.

Entrevistador: ¿por qué?

Fabio: porque todo está dependiendo de la C que es la confianza, entonces depende de ella (ver Ilustración 65*).*

Entrevistador: ¿Entonces en esa expresión yo cambio a esa C por 95%?

Fabio: Sí.

Entrevistador: Entonces el error da muy grande.

Fabio: Ahhh, entonces ese valor lo toman de la… es que no sé cómo decirlo

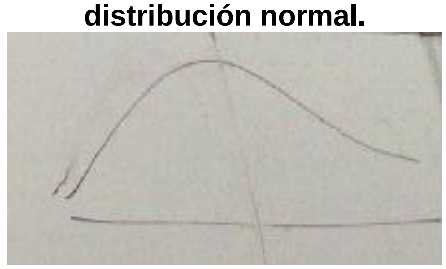
Entrevistador: ¿De dónde? Dígalo.

Fabio: De la distribución Normal

Entrevistador: Dibuje la distribución normal

Fabio: (realiza un dibujo en el tablero, ver Ilustración 66*)*

Ilustración 66. Representación gráfica de la función de densidad de la distribución normal.



Entrevistador: ¿Esa es la normal?

Fabio: Si

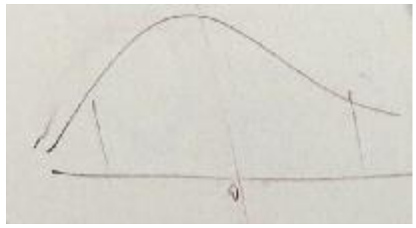
Entrevistador: ¿Entonces cómo es la historia con el nivel de confianza del 95%?

Fabio: Uno dice que aquí… la normal estándar creo que es centrada en…

Entrevistador: ¿Centrada dónde?

Fabio: Creo que en el cero, pero no estoy seguro (ubica el cero en el centro del dibujo, ver Ilustración 67*)*

Ilustración 67. Identificación del centro de la distribución normal estándar.

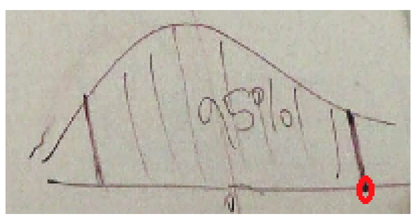


Fabio: Entonces, uno, dice que un intervalo que tenga el 95%, entonces esa es la probabilidad, el área bajo la curva es la probabilidad (ver Ilustración 68*).*

Ilustración 68. Probabilidad bajo la curva de la normal estándar.

Entonces uno tiene el 95% entonces toma este valor (señala un extremo del intervalo del 95%, Ilustración 69*)*

Ilustración 69. Ubicación del percentil de la normal estándar asociado al nivel de confianza en la representación gráfica de la distribución normal estándar.



Entrevistador: ¿Qué valor es ese?

Fabio: Hmmm… ¿me está preguntando el número exacto?

Entrevistador: Si, o una aproximación

Fabio: No, es que ese valor está… ese es el problema cuando uno aprende mecánicamente, como yo tenía la tabla, entonces simplemente lo buscaba y nunca me preocupe por aprendérmelo o por saber de dónde salía ese valor. Pero era como 1 algo…

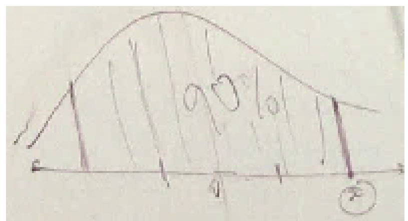
Entrevistador: Bueno, hay un número asociado. Entonces si yo tengo la misma muestra y por lo tanto la misma media y la misma desviación estándar, y calculo un intervalo con una confianza del 90% y alguien me dice que como ya *tiene el de 90% pues el de 45% es muy fácil, pues sólo es dividir por dos porque el de 90% es el doble del de 45%.*

Fabio: No, eso no es así porque uno no pone el 90, pone es otro número, llamémoslo x.

Entrevistador: Dibuje el de 90%

Fabio: Hmmm… (Realiza el siguiente dibujo, ver Ilustración 70*)*

Ilustración 70. Representación de un intervalo del 90% de confianza a partir de la distribución normal.



Entrevistador: Entonces divida ese por dos y dibuje el de 45%.

Fabio: No, no porque ese es otro, aquí hay más bastante, mire (se enfoca en el centro de la distribución) entonces el de 45% es más pequeño.

Entonces si x *es el que da 90%, entonces* $x/2$ *no es el que da el de 45%*

Entrevistador: ¿Entonces el de 45% no es exactamente la mitad del de 90%?

Fabio: No, es más pequeño, es este (lo dibuja en el tablero, ver Ilustración 71*)*

Ilustración 71. Representación de un intervalo del 45% de confianza a partir de la distribución normal

Si bien Fabio no recuerda el proceso para determinar el percentil de la normal estándar asociado al nivel de confianza, recuerda que hay un proceso asociado a la normal estándar que permite determinar dicho valor. Además tiene claro que los percentiles asociados a una distribución normal no siguen un modelo lineal: "aquí hay más bastante".

Entrevistador: ¿En últimas qué es el nivel de confianza para usted?

Fabio: Digamos que diciéndolo de manera subjetiva es como qué tan seguro estoy yo de que me va a caer… de que algo pasa, en este caso de que la *media esté en el intervalo. O sea, si es 95% puedo estar como seguro de que ahí si va a caer la media, o sea de que el estudio que estoy haciendo si…*

En este pasaje, Fabio asume abiertamente su concepción subjetiva del nivel de confianza asimilándolo con la seguridad de que la media esté en el intervalo.

Entrevistador: Asumiendo un nivel de confianza del 95% si se toman muchas muestras y con cada una se construye el intervalo respectivo, la media muestral caerá, aproximadamente, en el 95% de los intervalos construidos.

Fabio: pues ese 95% no está midiendo eso, está midiendo es…Ese 95% lo que me está diciendo es si la media poblacional cae en el intervalo.

Entrevistador: Asumiendo un nivel de confianza del 95% la probabilidad de que la media muestral caiga dentro de un intervalo de confianza calculado de una muestra específica es 0.95.

Fabio: No sé, es lo que estaba diciendo ahorita, de que la confianza del 95% es la probabilidad de que la media poblacional caiga en el intervalo.

Entrevistador: pero aquí le están afirmando es que es la media muestral la que cae en el intervalo.

Fabio: No, pues esa siempre está en el intervalo.

Entrevistador: ¿y si cambiamos por la media poblacional si sería cierto?

Fabio: Hmm, si, si sería cierto.

Una vez más Fabio muestra claridad en cuanto a que el intervalo de confianza se construye con la finalidad de estimar la media poblacional y que este intervalo siempre va a contener la media muestral.

Entrevistador: y entonces asumiendo un nivel de confianza del 95% si se toman muchas muestras de igual tamaño, aproximadamente el 95% de los intervalos de confianza calculados contendrían a la media poblacional.

Fabio: se parece a la primera.

Entrevistador: Si, en la primera le hablan de la media muestral y ahora de la media poblacional. ¿Entonces no funciona para la media poblacional?

Fabio: No, no funciona.

Al contrario de Santiago y María, Fabio no reconoce el significado frecuencial del nivel de confianza.

En cuanto al tipo de estructura presente en Fabio sobre el nivel de confianza es una concepción objeto, y como bien él plantea existen tablas que permiten hacer eso, asume su significado de manera subjetiva e identifica de manera acertada su efecto en el tamaño del intervalo,

Fabio, igual que María, está muy preocupado con los valores extraños que se puedan seleccionar en la muestra escogida lo que disminuiría la *precisión* o tal vez la *confianza* de obtener un intervalo adecuado. Esta preocupación responde a su planteamiento general que conduce a asumir el error como resultado de tomar una muestra, que es un subconjunto propio del espacio muestral, y no como resultado de la diversidad de muestras que se pueden obtener del mismo tamaño. Es como si estuviera pensando: “si tomo una parte de la población y con valores extraños pues los resultados no son los mejores”.

Adicionalmente, Fabio no conoce la ley de los grandes números y no recuerda el teorema central del límite, sin embargo reflexiona sobre los conceptos de manera separada y luego los relaciona para dar lugar a una expresión que le permite interpretar de manera acertada el efecto del nivel de confianza y del tamaño muestral en el ancho del intervalo. Lo anterior es evidencia de un esquema a nivel Inter de intervalo de confianza. Este proceso deductivo de Fabio, lo consideramos de gran interés, ya que con ideas intuitivas, todas válidas, deduce la expresión para el radio del intervalo, con la excepción de la raíz cuadrada para el tamaño muestral. Incluso puede ser camino previo al proceso de construcción formal del intervalo a partir del teorema central del límite.

Notemos que hasta el momento Santiago, María y Fabio asumen el nivel de confianza como la probabilidad de que el intervalo contenga el parámetro que se desea estimar, sin embargo los tres identifican de manera acertada el efecto del nivel de confianza en el intervalo de confianza. Luego, ¿habrá necesidad de superar la interpretación bayesiana o subjetiva que tienen los individuos sobre el nivel de confianza para lograr una adecuada construcción e interpretación de un intervalo de confianza, cuando dicha concepción no está afectando dicha construcción e interpretación? Como puede ser la preocupación de algunos de los investigadores consultados (Álvarez, Fernández y Andrade, 2013)

Entrevista con Carlos

Carlos es un estudiante de matemática pura, aprobó dos cursos de estadística básica para ingenieros. El curso donde estudió el concepto de intervalo de confianza lo realizó 3 semestres antes de iniciada esta investigación. Utilizó en sus cursos el texto de Estadística Matemática con aplicaciones (Wackerly, Mendenhall III y Scheaffer, 2008).

> *Entrevistador: ¿Cuál es la necesidad de construir un intervalo de confianza? ¿Qué motiva la construcción de un intervalo de confianza?*
>
> *Carlos: Si no estoy mal es, yo sé que quiero estudiar una población, entonces yo saco una muestra, entonces se quieren estudiar ciertas características de*

la población a partir de una muestra. Entonces uno trabaja con intervalos para encontrar más o menos dónde está el verdadero valor que uno quiere conocer a partir de los datos de la muestra.

Entrevistador: Supongamos que la característica que queremos estudiar es la media poblacional, ¿cómo se denota la media poblacional?

Carlos: Sí, con Mu (μ).

Entrevistador: Entonces según su planteamiento, usted toma una muestra y a partir de ella calcula un intervalo.

Carlos: Sí

En la respuesta de Carlos se observa claridad en cuanto a la necesidad de construir un intervalo de confianza, identifica que se trata de un problema de estimación de un parámetro poblacional y que esta estimación solo se puede realizar a través de una muestra.

Entrevistador: ¿Qué información le ofrece ese intervalo que usted construye a partir de la muestra?

Carlos: Bueno, primero debo tener en cuenta el porcentaje de confianza de ese intervalo. Pues como uno trabaja con el porcentaje de confianza… (El estudiante se queda pensando)

Entrevistador: ¿Porcentaje de confianza?

Carlos: Si, porcentaje de confianza. Entonces, bueno, con esos datos que me da el intervalo y hay esa confianza de que el valor verdadero de μ esté en ese intervalo.

Entrevistador: ¿Qué es lo que significa el porcentaje de confianza?

Carlos: el porcentaje de que el verdadero valor de la media poblacional este en ese intervalo.

Entrevistador: ¿Cómo así que el porcentaje?

Carlos: O sea, la probabilidad.

Entrevistador: Entonces si uno trabaja con un intervalo del 90% de porcentaje de confianza, como usted mismo lo dice, ¿significa que en ese intervalo hay un 90% de probabilidad de que la media poblacional esté en dicho intervalo?

Carlos: Sí.

Aquí nuevamente aparece la concepción del nivel (o porcentaje como lo llama Carlos) de confianza como la probabilidad de que la media poblacional esté en el intervalo. Independiente de lo errada que pueda ser esta respuesta, no tiene consecuencias desde el punto interpretativo de los intervalos, incluso ni siquiera desde el punto de vista teórico. Además, quién dice que no esté pensando en términos de montones de intervalos obtenidos de montones de muestras del mismo tamaño, simplemente lo que hace es adjudicarle la probabilidad al único representante que tiene de esa montonera: la muestra que tomó, en una clara interpretación subjetiva de probabilidad.

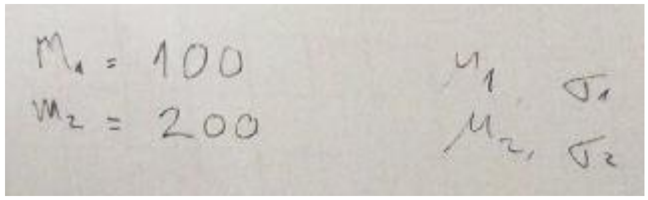
> *Entrevistador: ¿Se puede hablar de un intervalo con el 100% de probabilidad de que contenga a la media poblacional?*
>
> *Carlos: No*
>
> *Entrevistador: No, ¿por qué?*
>
> *Carlos: Hmmm (se queda pensando)*
>
> *Entrevistador: ¿Por qué cree que no se trabaja con el 100%?*
>
> *Carlos: Porque no se está trabajando con toda la población si no con una muestra. Entonces no se puede decir con esa certeza que el valor que estoy estimando está en el intervalo de confianza.*

Carlos, igual que los otros estudiantes, asume el proceso desde el punto de vista de su muestra y nada más, no asume la existencia de otras muestras y, por ende se evita considerar la aleatoriedad de los resultados. La idea es bien intuitiva: si aumento el tamaño muestral hasta tener toda la población voy a obtener el valor exacto del parámetro y si tengo que crear un intervalo asociado pues este necesariamente tiene un porcentaje de confianza del 100%, pero estos intervalos no se tienen porque siempre se trabaja con muestras y no con toda la población. En el razonamiento de Carlos, los efectos del nivel de confianza y del tamaño muestral van en el mismo sentido: si se aumenta el tamaño muestral se aumenta el nivel de confianza, mostrando una dependencia del nivel de confianza respecto al tamaño muestral. Sigamos con la entrevista a ver si los efectos de estos dos elementos terminan separándose.

> *Entrevistador: Entonces si se aumenta el tamaño de la muestra, ¿qué pasa con el intervalo de confianza? Si en vez de tener 100 datos tiene 200 datos ¿qué relación hay entre el intervalo de 100 y el intervalo de 200?*
>
> *Carlos: Pues depende de la media muestral y de la varianza muestral. O sea no depende del tamaño, sino de cómo varían esos valores.*
>
> *Entrevistador: ¿Cómo así?*
>
> *Carlos: hmmm, pues tengo una muestra de 100 y una muestra de 200.*
>
> *Entrevistador: Listo, entonces vamos a estimar a μ a partir de cada una de esas muestras. Ambos intervalos con el mismo "porcentaje" de confianza.*

Carlos: Bueno, en realidad lo que cambia es la media muestral y la desviación estándar. (Escribe dicha información para cada muestra, ver Ilustración 72*) Entonces pues el tamaño no interfiere tanto, lo que importa es cómo varía la media y la desviación estándar de cada muestra.*

Ilustración 72. Notación de Carlos para la media muestral y la desviación estándar muestral de dos muestras diferentes.

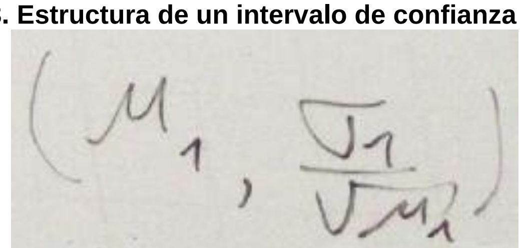


Carlos, si bien tiene razón en que al cambiar la muestra se cambia la media muestral (el centro del intervalo) y la desviación estándar muestral (que cambia el tamaño del intervalo), y que ambos valores afectan la construcción del intervalo, no reconoce el efecto que sobre la desviación o error estándar tiene el tamaño muestral. Carlos podría estar pensando exclusivamente en la distribución muestral en sí misma, razón que lo asiste para descartar la influencia del tamaño muestral en su dispersión. No relaciona el intervalo de confianza con $\bar{X}$ como variable aleatoria y por lo tanto asume la varianza de la muestra y no la varianza de $\bar{X}$.

Entrevistador: ¿Por qué?

Carlos: Porque… Bueno, yo sé que el intervalo de confianza es de la forma (Escribe una expresión en el tablero, ver Ilustración 73*)*

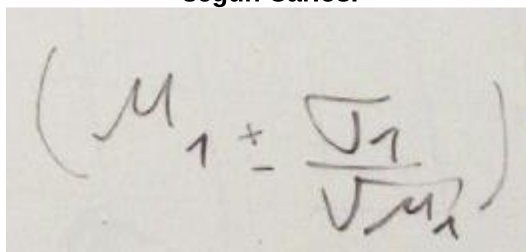
Ilustración 73. Estructura de un intervalo de confianza según Carlos.



Entrevistador: De acuerdo a eso el extremo inferior del intervalo es μ_1 y el extremo superior es $\frac{\sigma_1}{\sqrt{\mu_1}}$

Carlos: No, μ_1 es el centro y $\frac{\sigma_1}{\sqrt{\mu_1}}$ determina el tamaño del intervalo. Hmmm, no es más o menos (ver Ilustración 74*).*

Ilustración 74. Expresión algebraica que da lugar a la construcción del intervalo según Carlos.



Entrevistador: ¿Lo que está dentro de la raíz cuadrada es m*?*

Carlos: No, es μ_1*, la media muestral.*

Entrevistador: ¿Entonces en el intervalo interviene la media muestral dos veces?

Carlos: Sí… aunque no estoy seguro.

Entrevistador: Bueno, entonces de acuerdo a lo que dice $\frac{\sigma_1}{\sqrt{\mu_1}}$ *define el tamaño del intervalo. ¿Qué información brinda la desviación estándar* σ_1*?*

Carlos: La distancia a la que están separados los datos.

Entrevistador: ¿cómo así que separados?

Carlos: Si, la distancia que separa los datos.

Entrevistador: ¿Entonces si σ_1 *es grande qué se puede decir?*

Carlos: Que los datos estás más separados entre sí.

Entrevistador: ¿y si σ_1 *es pequeño?*

Carlos: Que los datos no están tan separados.

Carlos adopta la desviación estándar como medida de dispersión o separación entre los datos, sin ninguna referencia a la dispersión respecto a la media, como sí lo hacen sus pares en las entrevistas ya descritas. Tampoco habla de un valor medio de separación de los datos entre sí.

Entrevistador: ¿Qué sentido tiene dividir la dispersión de los datos en la raíz cuadrada de la media muestral?

Carlos: Pues la media muestral es el promedio de los datos…Hmm no sé.

Entrevistador: ¿Entonces la cantidad de datos no tiene nada que ver con el tamaño del intervalo?

Carlos: No, no tiene nada que ver.

Nótese que para Carlos el tamaño muestral no tiene efecto en el ancho del intervalo. Con su respuesta Carlos deja claro que su particular forma de definir el error de estimación es una mala pasada de su memoria.

> *Entrevistador: Entonces a la luz de eso dan lo mismo los intervalos para la muestra de 100 datos y la muestra de 200 datos. ¿Hay algo que me permita compararlos de alguna forma?*
>
> *Carlos: Hmmm… (Se queda pensando)*
>
> *Entrevistador: Supongamos, en gracia de discusión, que la desviación estándar de la muestra 1 es igual a la desviación estándar de la muestra 2, las medias muestrales son diferentes. Supongamos que con la muestra m_1 se construye el intervalo I_1 y con la muestra m_2 se construye el intervalo I_2. ¿Hay algo que pueda decir de esos dos intervalos?*
>
> *Carlos: Hmmm… (Se queda pensando)*
>
> *Entrevistador: ¿El hecho de tener más datos para producir el intervalo I_2 me dice algo?*
>
> *Carlos: Hmmm, sí debería ser más efectivo el intervalo I_2.*
>
> *Entrevistador: ¿Más efectivo?*
>
> *Carlos: Sí, más efectivo.*
>
> *Entrevistador: ¿Qué significa eso?*
>
> *Carlos: Pues que I_2 me sirve más para encontrar la media poblacional.*
>
> *Entrevistador: ¿y eso que sirve más a qué hace referencia en el tamaño del intervalo? ¿Qué característica va a tener I_2 en comparación con I_1 que fue generado con menos datos cuando las desviaciones muestrales son las mismas?*
>
> *Carlos: Pues es más grande el intervalo.*
>
> *Entrevistador: ¿Cuál es más grande?*
>
> *Carlos: el intervalo I_2*
>
> *Entrevistador: ¿Y por qué es más grande?*
>
> *Carlos: Pues porque hay más valores y entonces hay más posibilidades de que se encuentra la media poblacional.*

Con esta respuesta está dando a entender que el intervalo debe contener a los valores muestrales, razón por la cual si la muestra es mayor entonces el intervalo que se construye a partir de ella debe ser también mayor y, por lo tanto más "efectivo".

Entrevistador: ¿Esa es su definición de efectivo?

Carlos: Sí.

Carlos usa el calificativo efectivo para caracterizar un intervalo que tiene "más valores", es decir, es más grande y como piensa que al aumentar el tamaño muestral se está más cerca del parámetro poblacional asume que por lo tanto el intervalo debe ser más grande para estar más seguros de que el intervalo va a contener el parámetro buscado.

Entrevistador: Y en términos de precisión ¿cuál de los dos sería más preciso?

Carlos: (El estudiante se queda pensando) Pues si tenemos en cuenta el porcentaje de confianza, o sea si los dos intervalos tienen el mismo, entonces el intervalo I_1 sería más pequeño, o sea que el primero debería ser más preciso.

Ahora, Carlos, relaciona la precisión del intervalo con su tamaño cuando se cuenta con el mismo porcentaje de confianza en el sentido correcto: entre más pequeño el intervalo más preciso es.

Entrevistador: ¿Entonces la precisión tiene que ver con el tamaño del intervalo?

Carlos: Sí, entre más pequeño más preciso.

Entrevistador: Pero usted dijo que I_2 era más efectivo porque habían más datos y por lo tanto más grande el intervalo y entonces mayor probabilidad de que la media poblacional caiga en el intervalo. Y ahora dice que el intervalo I_1 es más preciso porque el tamaño del intervalo es más pequeño. Pero usted también dijo que si se tomaban más datos permitía acercarse más a la población y por lo tanto se estaba más cerca del valor verdadero. ¿Cómo resolvemos esa contradicción?

Carlos: pues precisión no implica exactitud, pero… No, no, olvídelo… (Se queda pensando) Estoy pensando que el I_1 es más grande que el I_2

Entrevistador: ¿El I_1 más grande que el I_2? ¿Por qué?

Carlos: Hmm, no sé… (Se queda pensando)

Entrevistador: ¿Cuál es más preciso?

Carlos: el más pequeño

Entrevistador: ¿y qué es más preciso, tener 100 datos o 200 datos?

Carlos: 200 datos

Entrevistador: ¿y cuál es más preciso?

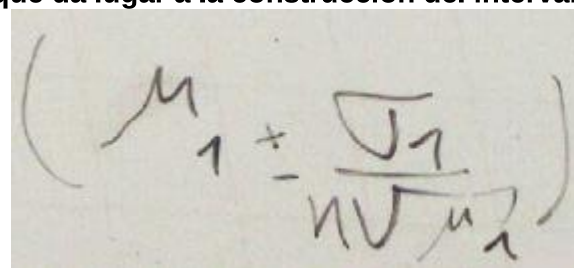
Carlos: I_2

Ahora Carlos resuelve la contradicción que él mismo había creado, al corregir su conclusión anterior: ahora es más grande el que tiene menos datos.

Entrevistador: Entonces en esa expresión que define el intervalo de confianza, ¿usted no cree que el tamaño muestral juegue un papel importante?

Carlos: Hmmm, pues sí, a más datos más pequeño el intervalo, entonces debe estar dividiendo en algún lado, pero no sé dónde. Hmmm, creo que aquí (la ubica dividiendo al desviación estándar, ver Ilustración 75*).*

Ilustración 75. Nuevo elemento que interviene en la expresión algebraica que da lugar a la construcción del intervalo.



Su razonamiento matemático lo lleva a colocar el n del tamaño muestral en el denominador, y, sin mayores argumentos, propone su forma lineal. Además cambió de manera radical su posición inicial de que el tamaño de la muestra no afecta al intervalo, a partir de la confrontación y del razonar de manera general sobre casos particulares, mostró un cambio en su concepción, evidenciando un esquema inter que le permite relacionar el tamaño muestral con el tamaño del intervalo.

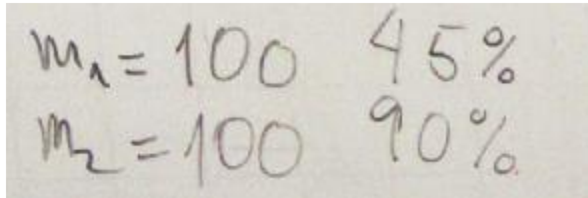
Entrevistador: ¿y usted le ve alguna explicación que a la desviación estándar la esté dividiendo la raíz cuadrada de la media muestral?

Carlos: Hmm, no sé, tal vez es una mala memoria.

Entrevistador: Ahora vamos a suponer que los tamaños muestrales son los mismos, es decir, tenemos dos muestras de tamaño 100. Y supongamos que m_1 *tiene un nivel de confianza del 45% y que* m_2 *tiene un nivel de confianza del 90%.*

Carlos: (Escribe en el tablero al información suministrada por el entrevistador, ver Ilustración 76*)*

Ilustración 76. Notación de la nueva información con la que cuenta Carlos.



Entrevistador: al construir un intervalo para cada muestra, ¿cuál es más preciso?

Carlos: El de m_2

Entrevistador: ¿El de m_2? ¿Por qué?

Carlos: Porque es que en el intervalo de m_1 es menos probabilidad de que la media poblacional esté.

Entrevistador: ¿cómo así?

Carlos: En el intervalo de m_1 es más probable que esté por fuera.

Entrevistador: ¿esté por fuera quién?

Carlos: La media poblacional. En cambio es más seguro que esté en el intervalo de m_2.

Carlos asume la precisión como equivalente al nivel de confianza: entre mayor sea el nivel de confianza hay mayor precisión.

Entrevistador: Entonces el más efectivo, como usted lo llamó, ¿cuál sería?

Carlos: El de m_2.

Entrevistador: Y para usted ¿qué es lo que significa efectivo?

Carlos: Que sí está la media poblacional.

Entrevistador: y entonces si eso se traduce en términos de tamaño, ¿cómo se hace un intervalo más efectivo?

Carlos: Pues más grande.

Carlos corrobora la equivalencia que ha establecido durante la entrevista entre el nivel de confianza y la precisión de la estimación.

Entrevistador: ¿y cuál de los dos es más grande?

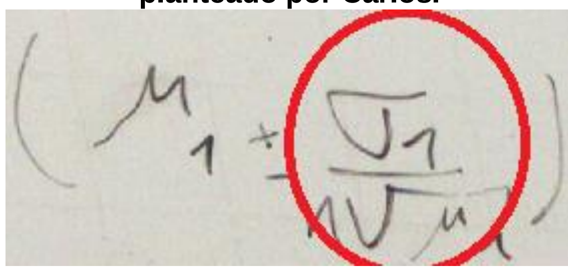
Carlos: De tamaño son iguales.

Entrevistador: ¿Entonces los dos son igualmente efectivos?

Carlos: No, no sé… (Se queda pensando)

Entrevistador: Entonces si nos apoyamos en la expresión que usted escribió sobre los intervalos de confianza el centro está determinado por la media muestral, por lo tanto es distinto. Pero el tamaño del intervalo está definido por esto (señala una parte de esa expresión que escribió Carlos, ver Ilustración 77*)*

Ilustración 77. Expresión que determina el tamaño de intervalo según lo planteado por Carlos.



Por lo tanto están ubicados en la recta real en lugares distintos. ¿Entonces la efectividad usted la mide en términos del radio del intervalo o también tiene que ver la ubicación?

Carlos: Pues a efectivo me refiero a que contenga la media poblacional, o sea no importa si tiene diferentes centros y diferentes tamaños.

Entrevistador: ¿Los tamaños no importan?

Carlos: O sea, si importa, pero yo estoy más seguro de encontrar la media poblacional en el intervalo de m_2 que en el intervalo de m_1.

Entrevistador: ¿pero sí tienen el mismo tamaño?

Carlos: pero en los intervalos que yo construyo no está la media poblacional.

Entrevistador: ¿Eso usted lo puede saber?

Carlos: o sea, es más probable que esté en el intervalo de m_2 que en el intervalo de m_1

Entrevistador: ¿Siendo del mismo tamaño? ¿Por qué?

Carlos: Por el porcentaje de confianza.

Entrevistador: ¿Entonces ese porcentaje de confianza o nivel de confianza no afecta el tamaño del intervalo?

Carlos: Creo que el intervalo de m_2 es más grande que el intervalo de m_1

Entrevistador: ¿Por qué?

Carlos: vamos a suponer que tienen las mismas, que es la misma muestra y digamos que voy a mirar dos intervalos, uno del 45% y otro del 90%, entonces pues van a tener el mismo centro, pero entonces uno va a estar contenido en el otro, si el de adentro tiene digamos el 45% el de afuera debe tener al menos un 90%, entonces ese va a ser más grande. Entonces por lo tanto el intervalo de m_2 va a ser más grande.

Carlos imagina el mismo centro para los dos intervalos y vuelve a ser coherente con su concepción de porcentaje de confianza permitiéndole responder adecuadamente a la pregunta. Utiliza el argumento simple de la relación que existe entre eventos (uno contenido en el otro) con sus respectivos valores de probabilidad (una menor que la otra).

Entrevistador: ¿y en términos de precisión con muestras distintas?

Carlos: (Se queda pensando)

Entrevistador: ¿Quién es más preciso?

Carlos: Yo diría que el intervalo de m_1

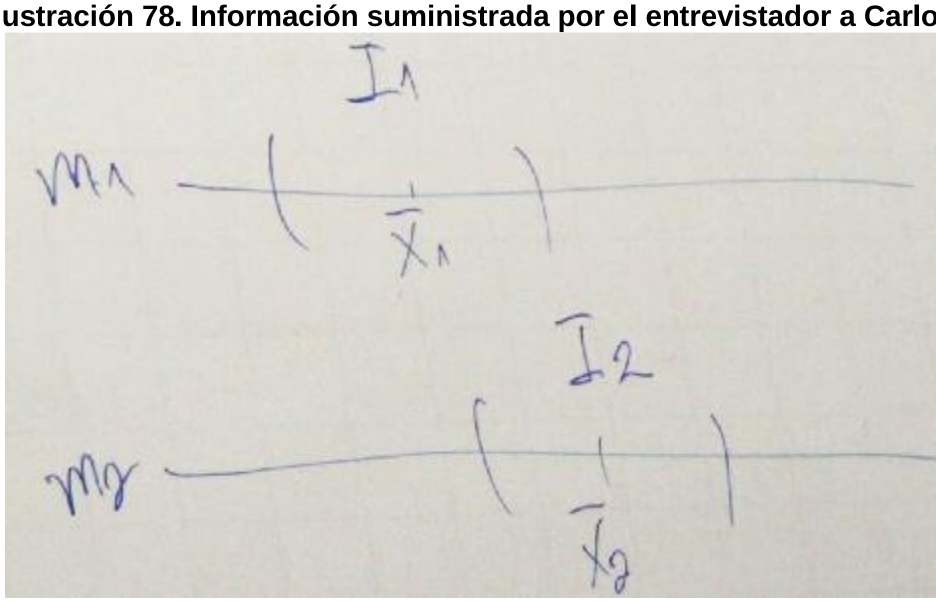
Entrevistador: ¿Por qué?

Carlos: porque es más pequeño.

Ahora la precisión la asume en términos del tamaño del intervalo, es decir, entre más pequeño mayor su precisión.

Entrevistador: Vamos a suponer que tiene un intervalo para una muestra m_1 y un intervalo para una muestra m_2 (el entrevistador hace un dibujo en el tablero, ver Ilustración 78*)*

Ilustración 78. Información suministrada por el entrevistador a Carlos.



¿Con cuál de esos dos intervalos se queda?

Carlos: Con el I_2

Entrevistador: ¿Por qué?

Carlos: pues hay más probabilidad de que ahí esté la media.

Entrevistador: ¿Por qué?

Carlos: Hmmm… (Se queda pensando)

Entrevistador: Supongamos que las muestras son del mismo tamaño, una la toma usted y la otra la tomo yo y estimamos la media de cada muestra. ¿Las dos medias muestrales son iguales?

Carlos: No, son distintas

Entrevistador: Cada una construye un intervalo para su muestra, usted construye el intervalo I_1 *y yo el intervalo* I_2*. ¿Quién es más acertado, usted o yo?*

Carlos: (Se queda pensando)

Entrevistador: ¿Usted necesita más información para poder tomar la decisión?

Carlos: Bueno, ¿cuál es el porcentaje de confianza de ambos?

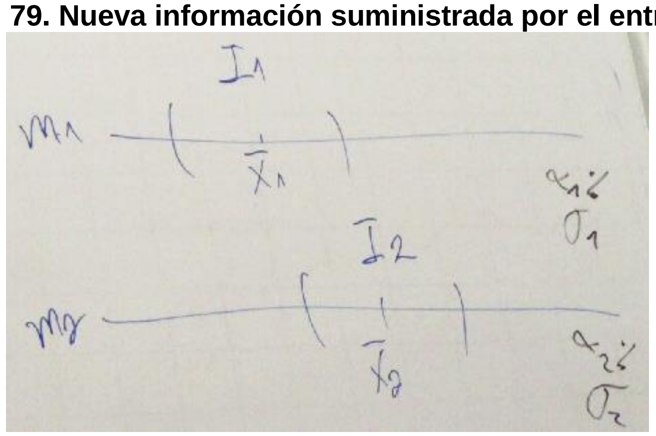
Entrevistador: Para I_1 *el nivel de confianza es* α_1 *y para* I_2 *el nivel de confianza es* α_2*.*

Carlos: Bueno, ¿cuál es la desviación estándar de ambos?

Entrevistador: Para I_1 *la desviación es* σ_1 *y para* I_2 *la desviación es* σ_2*.*

Carlos: (Escribe la información suministrada en el tablero, ver Ilustración 79*)*

Ilustración 79. Nueva información suministrada por el entrevistador.



Me quedaría con el α más grande.

Entrevistador: ¿Independiente de quien sea σ_1 y σ_2?

Carlos: si, yo creo que sí.

Entrevistador: Bueno usted dice que mira cuál de los dos α es más grande y se quedó con ese. Eso es lo primero que usted miraría

Carlos: Sí porque yo tengo más probabilidad de que la media poblacional esté en ese intervalo.

Para Carlos el nivel de confianza se impone a cualquier consideración, se impone el estar más seguro de encontrar el parámetro en el intervalo (mayor probabilidad) que ser más preciso.

Entrevistador: ¿En segundo lugar que miraría?

Carlos: En segundo lugar… (Se queda pensando)

Entrevistador: Vamos a suponer que los dos tienen el mismo nivel de confianza.

Carlos: El que tenga la menor desviación estándar.

Entrevistador: pero la desviación estándar es de la muestra y eso ¿qué tiene que ver con la población?

Carlos: Pues es que la desviación estándar muestral es una estimación de la desviación estándar poblacional.

Carlos justifica la consideración de la desviación estándar de la muestra por ser un estimador de la desviación poblacional, y que por lo tanto el menor estimador es el más conveniente.

Entrevistador: En términos de la media, ¿si los dos intervalos tuvieran todo igual, yo podría decir que el intervalo I_1 es mejor porque tiene una media más pequeña?

Carlos: No, eso no. Es que un intervalo es más preciso porque es más pequeño.

Entrevistador: Algunos colegas suyos dicen que el problema aquí es que si se toman muestras distintas pues voy a obtener valores distintos y por tanto puedo encontrarme con datos atípicos y entonces eso me va a complicar las cosas, ¿usted qué opina de eso?

Carlos: No es que los dañe pero la estimación va a tener una dispersión más grande. Entonces pues va a tener un intervalo, del 95% por ejemplo, pero va a ser más grande a comparación de otra muestra.

Entrevistador: ¿En términos de precisión qué pasa?

Carlos: es un intervalo menos preciso.

Entrevistador: ¿y cómo hace uno para evitar esas cosas? Porque al final de cuentas usted solo cuenta con una muestra y a partir de la información que ella suministra usted construye el intervalo.

Carlos: (Se queda pensando…) No sé.

Entrevistador: En su respuesta al ítem 5 parte a (a continuación se relaciona)

***Ítem 5**. Asumiendo un nivel de confianza del 95%:*

d. *Si se toman muchas muestras y con cada una se construye el intervalo respectivo, la media muestral caerá, aproximadamente, en el 95% de los intervalos construidos. F__ V__*
e. *La probabilidad de que la media muestral caiga dentro de un intervalo de confianza calculado de una muestra específica es 0.95. F__ V__*
f. *Si se toman muchas muestras de igual tamaño, aproximadamente el 95% de los intervalos de confianza calculados contendrían a la media poblacional. F__ V__*

Usted responde:

"¿Muestras representativas? Si es así los intervalos de confianza me darían un intervalo donde la media poblacional se encuentre y por lo tanto debería caer en más del 95%"

Si la muestra es representativa el intervalo que se construya a partir de ella debe contener la media poblacional, parece decir Carlos.

¿Qué es para usted una muestra representativa?

Carlos: Que no existe ningún sesgo al tomar esa muestra, o sea que es una buena representante de la población y pues para eso miro también que el tamaño de la muestra sea lo suficientemente grande.

Entrevistador: ¿Entonces una muestra con datos atípicos no sería representativa?

Carlos: Pues no porque, o sea la tomamos de la población pero hay unos muy… Pues no sé, dependería de la población.

Durante la entrevista Carlos relaciona el nivel de confianza con la probabilidad de que la media poblacional se encuentre en el intervalo. Además, Carlos puntualiza mejor la intención del intervalo describiéndolo como un proceso de estimación ampliado: el intervalo como un todo que contiene o no al parámetro buscado.

Carlos, al igual que Fabio y María, le dan bastante importancia a los valores extraños que se puedan seleccionar en la muestra escogida lo que disminuiría la precisión o tal vez la confianza de obtener un intervalo adecuado. La explicación que insinúa se relaciona con la el cálculo del error muestral que se hace mayor si existen valores extraños lo que conlleva un aumento del tamaño del intervalo y una disminución de la precisión.

A pesar de que la expresión algebraica que da lugar a la construcción de intervalo de confianza planteada por Carlos no es la correcta, le permite, en gran medida, reflexionar sobre algunos elementos que intervienen en dicha expresión y llegar a conclusiones acertadas.

Lo anterior permite sugerir que Carlos tiene un esquema a nivel Inter dado que la naturaleza misma de los intervalos de confianza, su expresión algebraica, se relaciona directamente con conceptos como la media muestral, el error estándar de la estimación y con el tamaño muestral que son conceptos que poseen su razón de ser independientemente de los intervalos. No ocurre lo mismo con el nivel de confianza que sí es propio de los intervalos de confianza.

Una vez analizadas cada una de las entrevistas, se procede a identificar el camino que cada uno de los entrevistados sigue para la construcción de un intervalo de confianza, los cuales se presentan a continuación.

Caminos identificados en la construcción del intervalo de confianza.

Camino de Santiago

Santiago plantea de entrada que los intervalos de confianza están relacionados con la distribución normal e identifica que se trata de un problema de estimación de un parámetro poblacional y que esta estimación solo se puede realizar a través de una muestra. Identifica el estimador puntual $\bar{x}$ y lo relaciona con la desviación estándar. Con esto en mente Santiago afirma que un intervalo de confianza está centrado en $\bar{x}$ y tiene un radio determinado por cierta cantidad de desviaciones estándar que van a definir, precisamente, la confianza del intervalo. La expresión algebraica planteada por Santiago es $\bar{x} \pm n\sigma$.

Con base en eso Santiago puntualiza mejor la intención del intervalo centrado en $\bar{x}$ describiéndolo como un proceso de estimación ampliado, es decir, el intervalo como un todo que contiene o no al parámetro buscado. Además define claramente el significado del nivel de confianza en términos frecuenciales sin negarse la interpretación subjetivista o bayesiana como dicen otros investigadores (Behar, 2001; Olivo, 2008; Henriques, 2012; Andrade, Fernández y Álvarez, 2014) de la probabilidad.

A pesar de que Santiago no tiene claridad en cuanto a la forma como se construye el intervalo de confianza, se apoya en el “celular de la normal” (123- 6895997) para determinar el nivel de confianza y conocer el efecto que tiene sobre el tamaño del intervalo.

La interpretación del teorema central del límite que sobrevive en su memoria está asociada a la muestra, es la muestra la que al aumentar su tamaño adquiere una distribución normal. De hecho, insiste en que para aplicar el teorema central del límite se requiere que la muestra tenga al menos 30 datos, es el único estudiante que hace referencia a este punto en particular.

Curiosa, por decir lo menos, su interpretación del efecto del tamaño muestral sobre el tamaño del intervalo en la medida que aumenta, pues asume un tamaño muestral muy cercano al tamaño de la población y no considera el aumentarla de a poco. En el caso de que el tamaño muestral es muy cercano al tamaño de la población, Santiago asume que el estimador puntual $\bar{x}$ se acerca solito a la media poblacional μ, olvidándose de intervalo. En otras palabras, se centra en el estimador puntual $\bar{x}$ reflejando un conflicto entre la estimación puntual y la estimación por intervalos de confianza, ya que en últimas asume los intervalos de confianza como un control para la estimación puntual, en este caso $\bar{x}$. Desde nuestra perspectiva, dicho conflicto se debe a la relación que Santiago establece entre la ley de los grandes números y el estimador puntual $\bar{x}$.

A partir de la reflexión que realiza Santiago guiado por los cuestionamientos del entrevistador, asume la idea de acercarse de a poquito y así entre más aumente el tamaño de la muestra, pues entonces el intervalo se va achicando y por ende $\bar{x}$ va a parecerse más a μ.

Cuando se indaga sobre el efecto del nivel de confianza en el tamaño muestral, Santiago asocia nivel de confianza con precisión, a más confianza mayor precisión. Sin embargo, se observa que no se asocia la precisión con un intervalo pequeño.

Camino de María

María plantea que un intervalo de confianza se utiliza para la estimación de la media poblacional μ a partir de la información suministrada por una muestra aleatoria, particularmente a partir de la media muestral $\bar{x}$.

Dado que se tomó un pedazo de la población, y que por tanto no se cuenta con la totalidad de la misma, María plantea que la media muestral $\bar{x}$ no es un valor exacto, es decir, no es el valor de la media poblacional, lo cual la lleva a asumir que se está cometiendo un error; asume que un intervalo se representa como la media muestral más o menos un error ($\bar{x} \pm \varepsilon$). Esta concepción que tiene María sobre el origen del error, no obstante que no le permite conocer exactamente los factores que lo determinan, y que la mantiene ajena al problema de la aleatoriedad de $\bar{x}$ y, por ende, de su distribución de probabilidad, sí posee una naturaleza intuitiva que podría ser utilizada didácticamente.

A partir de la confrontación y de la insistencia del entrevistador, María asume que $\bar{x}$ es una variable aleatoria y que por tanto tiene una distribución de probabilidad, recuerda que ésta es la normal, concretamente la normal estándar.

En cuanto a la desviación estándar muestral, María posee un significado simple ("separación o distancia de los datos respecto a la media"), que no es capaz de expresarlo en forma matemática. Sin embargo, esta falta de claridad sobre el proceso de construcción de la desviación estándar no tiene ninguna consecuencia en su comprensión del efecto que ésta tiene sobre el tamaño de los intervalos de confianza.

María se preocupa por los datos atípicos que pueda contener la muestra, en particular porque percibe que ellos pueden aumentar la estimación de la desviación estándar. Recordemos que el libro que ella utilizó como guía (A), menciona que la media muestral es sensible a los datos y por tanto hay que tener cuidado con los datos atípicos. Y dado que María sabe que la desviación se incrementa con los datos atípicos y que su aumento afecta directamente la precisión de la estimación, prefiere evitarlos.

Cuando se indaga por el significado respecto al nivel de confianza, se observa que María lo asume como la probabilidad de que el intervalo contenga la media poblacional y a su vez trae a colación la expresión algebraica utilizada para construir el intervalo $\bar{x} \pm z^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, donde $z^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es el error de estimación. El conocimiento de dicha expresión le permite responder acertadamente sobre el efecto del nivel de confianza y del tamaño muestral en el ancho del intervalo.

Respecto a la confrontación entre nivel de confianza, el tamaño muestral y la precisión de la estimación María identifica adecuadamente el efecto del tamaño muestral en cuanto a la precisión del intervalo de confianza y lo fundamenta basándose nuevamente en la expresión dada para el error. María al contrario de Santiago centra su atención en el intervalo, es decir, en la medida que aumenta el tamaño muestral el error se hace más pequeño, por tanto el intervalo se achica y el centro del intervalo que es la media muestral va a ser una estimación más precisa de la media poblacional.

María al igual que Santiago asume finalmente que la precisión es directamente proporcional al nivel de confianza.

Camino de Fabio

Inicialmente para Fabio los intervalos de confianza responden a la cuestión de qué tan parecida es la media muestral con la media poblacional, parecido que se define en términos del nivel de confianza como una medida de la precisión o de la cercanía de $\bar{X}$ a μ.

A partir de la reflexión guiada del entrevistador, Fabio amplía esta concepción asumiendo que el intervalo de confianza se construye con base en la información suministrada por una muestra aleatoria y que el centro del intervalo es la media muestral. Fabio, al igual que María, asume que $\bar{x}$ no es igual a μ, ya que la media muestral se obtiene de un subconjunto propio de la población.

En un proceso de construcción guiado por el entrevistador, Fabio describe claramente que el error muestral está determinado por el tamaño muestral, la desviación estándar muestral y el nivel de confianza, incluso, infiere con argumentos intuitivos, la forma directa o inversa en que influyen sobre la precisión del intervalo.

En cuanto al tamaño muestral asume que el error depende es de la cercanía del tamaño muestral al tamaño poblacional, entre más cercanos están, el error es menor. Infiere que afecta al tamaño del intervalo en forma inversamente proporcional, su deficiencia está en que no considera la raíz cuadrada del tamaño muestral sino simplemente su valor original. De hecho, conocer que se trata es de la raíz cuadrada requiere conocer el teorema central del límite para poder asociar el error con la desviación estándar de la media muestral.

En cuanto al nivel de confianza, Fabio lo asume como la probabilidad de que el intervalo contenga a la media poblacional. La interpretación del nivel de confianza como una probabilidad le permite a Fabio responder adecuadamente sobre el efecto del valor del nivel de confianza sobre el tamaño del intervalo. Fabio, igual que Santiago y María asume el nivel de confianza como probabilidad, sin embargo no reconoce el significado frecuencial del nivel de confianza. Esta concepción de probabilidad tiene un sentido claramente subjetivo, en el sentido de la seguridad que se tiene de que un intervalo en particular pueda contener al parámetro buscado.

Fabio, igual que María, presta atención a los valores extraños que se puedan seleccionar en la muestra escogida ya que disminuiría la *precisión* o tal vez la *confianza* de obtener un intervalo adecuado.

Es de resaltar que Fabio menciona que ha escuchado del teorema central del límite, sin embargo no lo recuerda y por tanto no lo relaciona con los intervalos de confianza.

Camino de Carlos

Carlos, al igual que Santiago, María y Fabio, presenta claridad en cuanto a la necesidad de construir un intervalo de confianza, ya que identifica que se trata de la estimación de un parámetro a partir de la información suministrada por una muestra aleatoria.

Carlos plantea que para poder construir el intervalo de confianza se necesita conocer el nivel de confianza, que él llama porcentaje de confianza, y que, al igual que sus compañeros, asume como la probabilidad de que la media poblacional esté en el intervalo, en una clara interpretación subjetiva de la probabilidad.

Además al igual que los otros estudiantes, asume la construcción del intervalo desde el punto de vista de una muestra y nada más, no asume la existencia de otras muestras y, por ende se evita considerar la aleatoriedad de los resultados, de hecho plantea que si se aumenta el tamaño de la muestra hasta contar con toda la población se va a obtener el valor exacto del parámetro y al crear un intervalo de confianza asociado pues este necesariamente tiene un nivel de confianza del 100%, sin embargo esto no sucede pues siempre se trabaja con un subconjunto de la población. Notemos que Carlos infiere una asociación entre el nivel de confianza y el tamaño muestral: si aumenta el tamaño muestral aumenta el nivel de confianza.

Cuando se confronta esta idea de trabajar con un subconjunto de la población, Carlos plantea que al cambiar de muestras se cambia el centro del intervalo y la desviación estándar muestral y que los dos valores intervienen en la construcción del intervalo.

Carlos adopta la desviación estándar como medida de dispersión o separación entre los datos, sin ninguna referencia a la dispersión respecto a la media, como sí lo hacen sus pares en las entrevistas ya descritas. Carlos asume que la desviación estándar muestral es un estimador de la desviación estándar poblacional.

Carlos considera que el tamaño muestral no afecta el intervalo, sin embargo a partir de cuestionamientos guiados que estimulan su reflexión, y de su razonamiento matemático, coloca el n del tamaño muestral en el denominador, y, sin mayores argumentos, propone su forma lineal. Es a partir de esto que intuye que a medida que se aumenta el tamaño muestral disminuye el tamaño del intervalo.

Carlos no relaciona el teorema central del límite con los intervalos de confianza, por el contrario al igual que María considera que el error de estimación existe gracias a que se cuenta con una muestra y no con toda la población y por lo tanto la media muestral no es totalmente confiable.

Es de recalcar que para Carlos el nivel de confianza se impone a cualquier consideración, se impone el estar más seguro de encontrar el parámetro en el intervalo (mayor probabilidad) que ser más preciso. Además asume la precisión como equivalente al nivel de confianza: entre mayor sea el nivel de confianza hay mayor precisión.

Una vez identificados los caminos de cada estudiante, se observa, en términos generales, que hay claridad en cuanto a la motivación de construir un intervalo de confianza, siendo esta la necesidad de estimar la media poblacional μ a partir de la información suministrada por una muestra aleatoria. La construcción del intervalo varía dependiendo, en gran medida, del error de estimación y la forma como cada estudiante lo plantea en función de los elementos que considera intervienen y son necesarios para su determinación.

En el siguiente capítulo se presentan los principales resultados obtenidos en esta investigación.

6. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan los principales resultados obtenidos en esta investigación. El capítulo se divide en 4 apartes. En primer lugar se presentan las estructuras mentales identificadas en los sujetos que participaron en el estudio alrededor de los intervalos de confianza y los conceptos estadísticos que intervienen en su construcción. En segundo lugar, se presenta la descomposición genética refinada sobre los intervalos de confianza como resultado del análisis de los datos empíricos. En tercer lugar, se presentan algunas consideraciones didácticas y para finalizar algunas reflexiones alrededor de la investigación realizada y se sugieren futuras investigaciones relacionadas con los intervalos de confianza.

6.1 Estructuras y mecanismos mentales asociados a los intervalos de confianza en los profesores de matemáticas en formación.

Para iniciar con la presentación de este apartado, y en aras de dar mayor claridad a la presentación, es necesario aclarar que los profesores en formación que participaron en este estudio habían cursado su segundo curso de estadística, en el cual estudiaron los intervalos de confianza, dos años antes de la realización de esta investigación. Este hecho es importante, porque como es apenas razonable han olvidado muchos detalles de los intervalos y lo que es directamente observable, a través del cuestionario y las entrevistas realizadas, son las concepciones que finalmente les quedaron alrededor de los diferentes objetos involucrados. Este hecho es importante ya que difiere de la metodología utilizada en los estudios encontrados hasta el momento ya que los instrumentos aplicados en dichos estudios fueron aplicados inmediatamente después de la instrucción o como método de instrucción, como es el caso de Andrade, Fernández y Álvarez (2014).

Para la descripción del esquema de intervalo de confianza vamos a determinar cada una de las estructuras y mecanismos mentales que lo componen y las relaciones que guardan entre sí.

A partir del análisis y discusión realizados en torno al cuestionario y a las entrevistas, a continuación se plantean las estructuras mentales identificadas en los sujetos que participan en el estudio con relación a los conceptos que intervienen de forma directa e indirecta en la construcción de intervalo de confianza y cómo los relacionan.

Concepción proceso de probabilidad: Durante las entrevistas se observó que los estudiantes adoptan tanto el enfoque frecuencial de la probabilidad como el enfoque subjetivista. El primero, asociado con el nivel de confianza, se manifiesta cuando asumen que un nivel de confianza del 95% indica que si se toman 100 muestras de una misma población y se construye un intervalo de confianza para cada una, en promedio, 95 de ellos contienen el parámetro buscado. El enfoque subjetivista lo manifiestan cuando adjudican el valor de probabilidad al intervalo hallado, tal como ha sido reportado en diversos estudios sobre este tema (Behar, 2001; Cumming et al., 2004; Cumming, 2005; Olivo y Batanero, 2007, Olivo, 2008; Salcedo et al., 2011) y que ha sido interpretado como una interpretación bayesiana que asume que la media poblacional es una variable aleatoria. Sin embargo, para nosotros este uso del valor de la probabilidad es indicativo de una representación subjetiva asociada a la seguridad que se tiene de que el intervalo obtenido realmente contenga al parámetro.

Concepción proceso de muestra aleatoria: Los estudiantes en general plantean la necesidad de tomar una muestra aleatoria de la población, de tal manera que la información suministrada por dicha muestra sea confiable, esto es, que sea representativa de la población. Los estudiantes, como se comentará más adelante, adoptaron la muestra como el eje fundamental de todos los razonamientos a seguir.

Además se observó que los estudiantes asignan importancia al hecho de que al tomar la muestra aleatoria sólo se está tomando un subconjunto de la población, lo cual conlleva a asumir un error de estimación al calcular la media poblacional a partir de la media muestral obtenida de dicho muestra.

Concepción objeto de media muestral: Esta concepción se evidenció cuando los profesores en formación realizaron operaciones aritméticas que la incluían, fundamentalmente las que definen el intervalo de confianza teniendo a $\bar{x}$ como centro; cuando la asumían como estimador puntual inexacto de la media poblacional μ y cuando se refieren a ella para describir la desviación estándar muestral.

Concepción objeto de desviación estándar: A partir del análisis de las entrevistas y de las respuestas al cuestionario se observó que del concepto de desviación estándar lo único que quedó fue su significado, pues se observa que es asumido como un todo al cual se le aplican acciones, sin embargo esta concepción objeto está completamente desligada de la concepción proceso que le dio origen, ya que no recuerdan dicho proceso.

Concepción proceso de estimador puntual: En general los estudiantes asumen que la media muestral $\bar{x}$ es un estimador puntual de la media poblacional μ. El reconocimiento de la inexactitud de esta estimación la fundamentan en el hecho de que su valor se obtiene con base en un pedazo de la población y, aunque, de aquí podría inferirse la aleatoriedad de $\bar{x}$, los estudiantes no lo explicitan.

Concepción proceso de distribución de probabilidad: En este caso se observó que, en una actividad de reflexión dirigida por el entrevistador, reconocen el carácter aleatorio de $\bar{x}$ y que, por lo tanto, es necesario conocer la forma como se distribuyen los valores posibles de esta variable, esto es, su distribución de probabilidad. Es aquí donde aparece en juego la distribución normal gracias al teorema central del límite, resultado que los estudiantes solo utilizan para calcular el percentil asociado al nivel de confianza.

Concepción proceso de función de densidad de probabilidad: Se observó que los estudiantes tienen una concepción proceso de la función de densidad de la normal cuando identifican su representación gráfica y a su vez identifican las regiones de mayor probabilidad con base en el área bajo la curva comprendida en la región dada.

Concepción objeto de distribución normal: Añadido a las evidencias dadas para respaldar su concepción de densidad de probabilidad, los profesores en formación, o al menos algunos de ellos, mostraron conocimiento de la regla 68-95-99,7 que asocia el nivel de confianza en términos del número de desviaciones estándar alejadas de la media. Utilizaron esta propiedad para justificar el efecto que sobre el tamaño del intervalo tiene el aumento del nivel de confianza.

Concepción proceso del teorema central del límite: En este caso se identificó que la mayoría de los estudiantes recuerdan el teorema central del límite, sin embargo su descripción no es la adecuada. En el mejor de los casos lo asumen simplemente diciendo: “la media muestral tiene distribución normal”, lo que lo hace importante para ellos es el papel que juega la distribución normal en la construcción del intervalo y que es necesaria para determinar el percentil de la normal estándar asociado al nivel de confianza.

Concepción objeto de nivel de confianza: En primer lugar se identificó que los estudiantes asumen el nivel de confianza como un todo ya que le aplican acciones aritméticas para así determinar su efecto en el tamaño del intervalo. A su vez dicho valor es asumido como una probabilidad, tanto frecuencial como subjetiva como se describió previamente.

En la descomposición genética preliminar no se plantea una concepción previa de este concepto ya que aparece durante la construcción del intervalo de confianza. Las demás concepciones previas planteadas en la descomposición genética preliminar fueron identificadas en los profesores de matemáticas en formación y se reflejan de forma clara en los caminos que cada uno de los entrevistados sigue para construir el intervalo de confianza.
La forma como se relacionan estás estructuras no es muy clara en las entrevistas, sin embargo se observó como a partir de la confrontación y constante guía del entrevistador, los profesores de matemáticas en formación lograron relacionar dichas estructuras dando lugar a una da lugar a una comprensión del concepto de intervalo de confianza suficiente desde el punto de vista funcional.

Ya determinadas las diferentes concepciones que presentaron los estudiantes de los conceptos relacionados de una u otra forma con los intervalos de confianza, damos paso a la presentación de un esquema general que si bien no responde exactamente al utilizado por los estudiantes involucrados en el estudio, sí podría considerarse como el más general. Este esquema es el que sobrevive dos años después de que los estudiantes estudiaran formalmente el tema en el salón de clase.

Para mayor claridad lo presentamos en una serie de pasos:

1. Los estudiantes tienen claro que un intervalo de confianza es un intervalo construido con referencia a un nivel de confianza y que se utiliza para estimar el valor de un parámetro, en particular, de la media poblacional.
2. El procedimiento se inicia con la obtención de una muestra aleatoria de la población con base en la cual se calcula el estimador puntual $\bar{x}$.
3. Como este valor se obtiene a partir de un subconjunto de población y no de la población entera (hacen referencia a poblaciones finitas) necesariamente se tiene que aceptar que el valor de $\bar{x}$ no coincide con el valor del parámetro μ.
4. Esto lleva al reconocimiento de un error en la estimación puntual que define el intervalo donde es probable que se encuentre el valor de la media poblacional.
5. Para determinar el error recuerdan que la distribución normal juega un rol importante, incluso, claramente dicen que se requiere para determinar el nivel de confianza que es la probabilidad que tiene el intervalo construido de contener la media poblacional.
6. Si bien un solo estudiante recuerda la expresión exacta del error que define el radio del intervalo, los otros, y como resultado de un proceso de reflexión estimulado por el entrevistador, terminan reconociendo que se relaciona con el tamaño muestral (en forma inversamente proporcional), y con la desviación estándar de la muestra y el nivel de confianza en forma directamente proporcional.

Si bien el esquema planteado, en términos generales, garantiza una comprensión de los intervalos de confianza suficiente desde el punto de vista funcional, no se mostró muy sólido a la hora de responder algunas de las preguntas formuladas en el formulario o durante las entrevistas realizadas.

A continuación intentamos algunas explicaciones a los tipos de concepciones identificadas en el cuestionario y que han sido reportadas repetidas veces en las investigaciones consultadas.

i. *El aumento del nivel de confianza disminuye el tamaño del intervalo*.

La mayoría de los estudiantes de nuestra muestra (54%) asumen que en la medida que el nivel de confianza aumenta el tamaño de intervalo disminuye. Este porcentaje contrasta con el obtenido en otras investigaciones, por ejemplo en Behar (2001) el 17% de los expertos y el 42,1% de los no expertos, en Olivo y Batanero (2007) el 30% de los estudiantes y en Olivo, Batanero y Díaz (2008) el 26,2% de los estudiantes.

La explicación para este hecho, extraída de las entrevistas con los estudiantes, puede ser producto de una relación que los estudiantes establecen entre el nivel de confianza y la precisión de la estimación, más exactamente con los significados múltiples que le adjudican al concepto de precisión. Para algunos de ellos, dado que el nivel de confianza es la probabilidad de que el intervalo construido contenga la media poblacional, es natural que al aumentar esta probabilidad se gane precisión en el intervalo en el sentido de que se está más seguro en que contenga la media poblacional. Ahora, como la precisión implica mayor cercanía entre media muestral y media poblacional, y esta cercanía está regida por el tamaño del intervalo, éste necesariamente tiene que hacerse más pequeño.

ii. El aumento del tamaño muestral aumenta el tamaño del intervalo

La mayoría de los estudiantes de nuestra muestra (60%) asumen que en la medida que se aumenta el tamaño muestral el tamaño de intervalo aumenta. Este porcentaje contrasta con el obtenido en otras investigaciones, por ejemplo en Behar (2001) el 7% de los expertos y el 45,8% de los no expertos, en Fidler y Cumming (2005) el 84% de los estudiantes, en Olivo y Batanero (2007) el 65% de los estudiantes y en Olivo, Batanero y Díaz (2008) el 33,3% de los estudiantes.

Si bien los estudiantes entrevistados que pudieron haber estado de acuerdo con esta afirmación en el momento de responder al cuestionario, modificaron su parecer en la entrevista, sus respuestas iniciales, unidas a las escritas por otros estudiantes en el cuestionario, permiten conjeturar la siguiente explicación.

Una de las características predominantes en el razonamiento de los estudiantes, como se ha resaltado en varios momentos de este documento, es el asumir la muestra como soporte clave para responder a las diferentes preguntas propuestas. En este caso, la argumentación se basa en decir que al aumentar el tamaño muestral se cuenta con mayor cantidad de valores que están dentro del intervalo lo que hace que necesariamente aumente el tamaño del intervalo. El error de esta argumentación está en la creencia de que el intervalo debe contener a los valores de la muestra, concepción errada que en alguna forma se relaciona con la creencia de que el intervalo de confianza lo que contiene son valores poblacionales o los valores posibles de la media muestral (Behar, 2001; Cumming et al., 2004; Cumming, 2005; delMas et al., 2007; Olivo, 2008)

La siguiente concepción que relaciona el tamaño muestral con el nivel de confianza no ha sido reportada previamente.

iii. Al aumentar el tamaño muestral aumenta el nivel de confianza

Una de las características que poseen los elementos que definen el error de estimación en un intervalo de confianza es su total independencia entre ellos, ninguno está condicionado por el valor de los otros dos. Sin embargo, algunos estudiantes asumen que el aumento del tamaño muestral produce un aumento en el nivel de confianza. La argumentación utilizada se realiza a través de la precisión del intervalo y su relación con el nivel de confianza de la siguiente forma: al aumentar el tamaño muestral se tiene más información que necesariamente repercute en la calidad de la estimación lo que hace que el intervalo sea más preciso y, por lo tanto, tenga mayor probabilidad de contener el parámetro buscado, es decir, mayor nivel de confianza.

En términos de la Teoría APOE estas concepciones pueden deberse a que no se relaciona de manera adecuada algunas estructuras mentales propuestas en la descomposición genética preliminar e identificadas a partir del análisis de las entrevistas, como son: Concepción proceso de Muestra aleatoria, concepción objeto de estadístico, concepción proceso de probabilidad y concepción objeto de nivel de confianza.

6.2 Descomposición genética refinada sobre los intervalos de confianza.

Como resultado de los resultados encontrados y de los análisis realizados, se presenta una nueva descomposición genética de los intervalos de confianza que creemos puede repercutir en una mejor comprensión de los intervalos de confianza por parte de los estudiantes. En forma simultánea con esta descomposición, se presentan algunas actividades que formarían parte de una hipotética secuencia didáctica que podría garantizar la formación en los estudiantes del esquema de intervalo de confianza.

En realidad, solamente hacemos referencia a la necesidad de agregar una nueva concepción a las sugeridas en la descomposición genética preliminar, las demás concepciones se siguen considerando en la misma forma que fueron propuestas en la descomposición genética inicial.

Inicialmente se planteó la necesidad de que los individuos presentaran una concepción objeto de estadístico, ya que esta concepción da lugar a asumir que el estadístico estimador puntual del parámetro, es una variable aleatoria ya que su valor depende de la muestra seleccionada y que, por lo tanto, es necesario conocer su distribución de probabilidad, además de tener presente que se pueden realizar acciones sobre ese estadístico representadas en operaciones aritméticas. Sin embargo, a partir del análisis teórico, se observó la necesidad de que los individuos presenten adicionalmente una estructura de esquema de media muestral. A continuación se define dicha estructura.

***Esquema de la media muestral**:* Como se evidenció en la presente investigación los profesores de matemáticas en formación si bien tienen claro el proceso que conlleva la obtención del valor $\bar{x}$ a partir de los datos contenidos en una muestra, su carácter aleatorio y, por consiguiente, su distribución de probabilidad, no lo relacionan con el teorema central del límite y las distribuciones muestrales conceptos que tienen que estar estrechamente relacionados con el concepto de media muestral.

Para lograr este objetivo proponemos un tratamiento integrado del teorema central del límite como parte del proceso de estimación por intervalos y no separado como tema aparte como tradicionalmente se presenta en los libros de texto. Este tratamiento debe realizarse con ayuda de los computadores para poder simular la obtención de diversas muestras tomadas de diferentes poblaciones: finitas en un principio, respondiendo a la intuición de los estudiantes cuando adoptan el error como el resultado de la incompletez de la muestra con respecto a la población entera, y posteriormente infinitas definidas a través de sus funciones de densidad. Debe tenerse en cuenta que este tema forma parte de uno más general que se conoce como distribuciones muestrales que bien se sabe, es un hueso duro de roer para los estudiantes (Inzunsa, 2006).

Adicionalmente, es necesario destacar el hecho de que este proceso de estimación de la media muestral coexiste simultáneamente con otra estimación como es la de la desviación estándar poblacional, necesaria para definir el radio del intervalo. Esta estimación tiene entre otras consecuencias la de tener que considerar la distribución t-Student en lugar de la distribución normal. Esta simultaneidad de estimaciones añade nuevas especificidades al problema tratado y requiere investigaciones más amplias que la aquí realizada.

6.3 Consideraciones didácticas

Bien se puede afirmar que esta investigación reportó resultados que permiten conocer con mayor claridad las asociaciones que realizan los estudiantes entre los diversos objetos que intervienen en la construcción de los intervalos de confianza y que los conducen, en muchos casos, a las concepciones y dificultades reportadas en la literatura. Este conocimiento, sin duda, permitirá que los profesores, al ser conscientes de estos razonamientos orienten su actividad a confrontarlos directamente en el salón de clase en sesiones de reflexión grupal que puedan permitir superarlos.

Ahora bien, es necesario tener claro que esta investigación está enmarcada dentro de un contexto que asume la enseñanza de estos temas a la luz del conocimiento institucionalizado de la comunidad estadística, es decir, desde una perspectiva que podríamos denominar formal. Ahora bien, tal como lo muestra esta investigación, este enfoque puede no ser el más adecuado para personas (en nuestro caso profesores de matemáticas en formación) que solo buscan adquirir conocimientos para poder aplicarlos con suficiencia y saber enseñarlos de tal manera que se generen concepciones válidas y útiles en sus estudiantes. En consecuencia, vale la pena replantearse este enfoque institucional y empezar a pensar en formas de enseñanza que no siendo tan formales garanticen que los estudiantes formen estructuras suficientes para una buena interpretación de los resultados estadísticos. Este enfoque que estamos proponiendo se ve reforzado con el uso de los computadores y de programas estadísticos que se encargan de realizar las acciones que permiten obtener los resultados requeridos que se requieren para interpretar adecuadamente los datos dentro del contexto en el cual se obtuvieron. En resumen, lo que proponemos es cambiar la estructura actual desbalanceada a favor de lo formal por una estructura también desbalanceada pero a favor de la interpretación en contexto.

6.4 Limitaciones y extensiones de la investigación

Esta investigación se realizó con estudiantes que en su mayoría habían abordado el tema de los intervalos de confianza dos años antes, situación que si bien es cierto permitió conocer las concepciones de los estudiantes que permanecieron a lo largo del tiempo, impidió de otro lado conocer las que pudieron tener en un principio recién aprendido el tema y que luego desaparecieron con el tiempo. Esta situación propone realizar tanto una investigación con estudiantes que acaban de estudiar el tema como una de corte longitudinal que permita conocer cómo y porqué se dan esas transformaciones conceptuales en los estudiantes.

Una limitación de este estudio fue la de trabajar con estudiantes que habían recibido una instrucción que no fue diseñada ni controlada por los investigadores, aspecto que no permitió después inferir sobre los mecanismos que pudieron estar presentes en la formación de concepciones por parte de los estudiantes. Para superar esta deficiencia se propone realizar una investigación que, partiendo de la descomposición genética aquí propuesta, realice una instrucción guiada que permita establecer relaciones causa efecto entre la enseñanza y el aprendizaje.

Otra investigación que valdría la pena realizar es una que pretenda conocer los esquemas que se generan en los estudiantes cuando son sometidos a un proceso de instrucción basado en el computador y dirigido fundamentalmente a la interpretación en contexto de los resultados relacionados con los intervalos de confianza.

BIBLIOGRAFÍA

Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2013). Apos theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer.

Alvarado, H. (2007). Significados Institucionales y Personales del Teorema Central del Límite en la enseñanza de estadística en ingeniería. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, Granada, España

Álvarez, I., Fernández, F., y Andrade, L. (2013). ¿Confía en los intervalos de confianza? *VII Congreso Iberomericano de Educación Matemática.* (pp 278-289). Montevideo: Santillana.

Andrade, L., Fernández, F., y Álvarez, I. (2014). Fostering changes in confidence intervals interpretation. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Behar, R. (2001). Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje de la estadística. Tesis doctoral no publicada. Universidad Politécnica de Catalunya. Barcelona, España.

Behar, R. y Yáñez, G. (2009). Experts and students' conceptions regarding confidence intervals. *Heurística* 16, 5-12

Brown, E. (2014). Students' inferential reasoning about sample size. In K. Makar, B. de Sousa, y R. Gould (Eds.), Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Bower, D. (2003). Some Misconceptions about Confidence Intervals. *Six Sigma Forum-American Society for Quality*, July.

Behar, R. (2001). Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje de la estadística. Tesis doctoral no publicada. Universidad Politécnica de Catalunya. Barcelona, España.

Behar, R. y Yáñez, G. (2009). Experts and students' conceptions regarding confidence intervals. *Heurística* 16, 5-12

Brown, E. (2014). Students’ inferential reasoning about sample size. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Bower, D. (2003). Some Misconceptions about Confidence Intervals. *Six Sigma Forum-American Society for Quality*, July.

Callaert, H. (2007). Understanding confidence intervals. En Pantazi, D. & Philippou, G. (Ed.) *Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 692-701).* Lárnaca: Board

Chance, B. y McGaughey, K. (2014). Impact of a simulation/randomization based curriculum on student understanding of p-values and confidence intervals. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Clark, J., Kraunt, G., Mathews, D. y Wimbish, J. (2007). The “Fundamental Theorem" of Statistics: Classifying Student Understanding of Basic Statistical Concepts. Recuperado el 07 de Octubre del 2013 de http://www1.hollins.edu/faculty/clarkjm/stat2c.pdf

Cumming, G., Williams, J. y Fidler, F. (2004). Replication, and researchers’ understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics* 3, 299 – 311.

Cumming, G. y Fidler, F. (2005). Interval estimates for statistical communication: problems and possible solutions. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). Satellite Conference on Statistics Education and the Communication of Statistics (IASE). Sydney, Australia.

delMas, R.C., Garfield, J.B., Ooms, A. y Chance, B.L. (2007). Assessing students’ conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 28-58.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la Perspectiva Piagetana a la Educación Matemática Universitaria. *Educación Matemática*, 8, 3, 24-41.

Dubinsky, E. (2000). Using a Theory of Learning in College Mathematics Courses. Teaching and Learning Undergraduate Mathematics. Recuperado el 19 de Agosto de 2014 de http://mathstore.ac.uk/newsletter/may2001/pdf/learning.pdf

Fidler, F., y Cumming, G. (2005). Teaching confidence intervals: Problems and potential solutions. Recuperado el 18 de Julio de 2013 de www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php.

Finzer, W., Erickson, T. y Binker, J. (2000), Fathom: Dynamic Statistics. Key Curriculum Press.

Garfield J., delMas R., y Chance B. (1999) The rol of the assessment in research on teaching and learning statistic. Paper presented at the AERA Annual Meeting. Montreal, Canadá.

Hacking, I., (1995), *La domesticación del azar*. Gedisa, España. [Traducido del original en inglés *The taming of Chance*, 1990].

Henriques, A. (2012). Students' difficulties in understanding of confidence intervals. 12th International Congress on Mathematical Education. Coex, Seoul, Korea.

Inzunsa, S. (2006). *Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica*. Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV).

Inzunsa, S. (2009). Construcción de significados sobre distribuciones muestrales. *Educación Matemática*, 21(1), 119-149.

Kahneman, D., Slovic, P y Tversky, A. (Eds) (1982) *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. New York: Cambridge University Press.

Kalinowski, P. (2010) Identifying misconceptions about confidence intervals. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg.

Mathews, D., y Clark, J. (2007). Successful Students' Conceptions of Mean, Standard Deviation, and The Central Limit Theorem. Recuperado el 07 de Octubre de 2013 de http://www1.hollins.edu/faculty/clarkjm/stats1.pdf

Moore, D. S. (1995). Estadística aplicada básica. España: Antoni Bosch.

Olivo, E. y Batenero C. (2007). Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza. *Revista Iberoamericana de Educación Matemátic,.* 12(1),73-51

Olivo, E., Batanero, C., y Díaz, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios. *Educación Matemática,* 20 (3), 5-32

Olivo, E. (2008). Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.

Rangel-Ruiz (2010) Concepciones que sobre la distribución normal tienen algunos profesores de matemáticas en formación. Tesis de pregrado. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis 'teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en 'Matemática Educativa* 13 (1), 89 - 112.

Roa-Fuentes, S. y Oktac, A. (2012) Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 15 (2), 199-232.

Salcedo, A., Lira, B., González, J. y Yáñez, G. (2011). Interpretación de intervalos de confianza por docentes en formación. En Blanco, E. (Comp), *Investigación Educativa: Venezuela en Latinoamérica Siglo XXI* (pp. 209-229), Venezuela: Centro de Investigaciones Educativas (CIES).

Sánchez, C y Contreras de la Fuente, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción del obstáculo. En: *Rev. Enseñanza de las ciencias.* Vol. 16 No. 1, Pp. 73 – 84.

Sarmiento, C. y Osma, W. (2010). Comprensión de los intervalos de confianza en estudiantes de educación superior. Tesis de Pregrado. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.

Tauber, L.M. (2001). La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Sevilla y Granada, Sevilla (España)

Terán, T. (2006). Elements of meaning and its role in the interaction with a computational program. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). Proceeding of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador (Bahía), Brasil, IASE.

Vallecillos, A. (1994). Estudio teórico - experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios. Tesis doctoral Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Vallecillos, A. (1995). Consideraciones epistemológicas sobre la inferencia estadística: implicaciones para la práctica docente. UNO, 5, 80-90.

Vallecillos, A. y Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 17, núm. 1, pp. 29-48.

Wackerly, D., Mendenhall III, W. y Scheaffer, R. (2008). Estadística Matemática con aplicaciones. México, D.F:Cengage Learning Editores, S.A.

Wild, C. y Seber, G. (2000). *Chance Encounters: A first course in data analysis and inference*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Yáñez, G y Behar, R (2009). Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los intervalos de confianza y algunas explicaciones plausibles. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.*

Yáñez, G. y Behar, R. (2010). The confidence intervals: A difficult matter, even for experts. In *Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics*, Slovenia.

ANEXO A

Nombre: ____

¿CUÁLES DE LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES SON VERDADERAS? EXPLIQUE SU RESPUESTA

Ítem 1. Un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (*μ*) es:

a) El intervalo que contiene el 45% de los valores posibles de la media muestral ($\bar{x}$). F__ V__
b) Un intervalo más ancho que el intervalo de confianza del 95%. F__ V__
c) Un intervalo de valores calculado a partir de los datos de la muestra. En el 45% de las muestras de una población, el intervalo calculado contiene a la media de la población. F__ V__
d) Dos veces más ancho que el intervalo de confianza del 90%. F__ V__

Ítem 2. Si se aumenta el tamaño muestral, conservando los demás datos constantes, el intervalo de confianza se hace más ancho. F__ V__

Ítem 3. Si se aumenta el nivel de confianza, manteniendo los demás datos constantes, el intervalo de confianza se vuelve más angosto. F__ V__

Ítem 4. Si la desviación estándar de la población aumenta, el intervalo de confianza disminuye en la anchura. F__ V__

Ítem 5. Asumiendo un nivel de confianza del 95%:

a. Si se toman muchas muestras y con cada una se construye el intervalo respectivo, la media muestral caerá, aproximadamente, en el 95% de los intervalos construidos. F__ V__
b. La probabilidad de que la media muestral caiga dentro de un intervalo de confianza calculado de una muestra específica es 0.95. F__ V__
c. Si se toman muchas muestras de igual tamaño, aproximadamente el 95% de los intervalos de confianza calculados contendrían a la media poblacional. F__ V__

Ítem 6. Si el tamaño de la muestra es muy pequeño, no se puede construir un intervalo de confianza del 99% de confianza. F__ V__

Ítem 7. Si aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional. F__ V__

Ítem 8. Si aumenta el nivel de confianza, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional. F__ V__