SUPERFICIES CUÁDRICAS ROTADAS Y VECTORES CARACTERÍSTICOS

SERGIO ANDRÉS SÁNCHEZ JAIMES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2004

SUPERFICIES CUÁDRICAS ROTADAS Y VECTORES CARACTERÍSTICOS

SERGIO ANDRÉS SÁNCHEZ JAIMES

Monografía para optar título de

Licenciado en Matemáticas

Director

Rosalba Osorio Aguillón

Licenciada en Matemáticas

MSC en Educación

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2004

TITULO:

SUPERFICIES CUÁDRICAS ROTADAS Y VECTORESCARACTERÍSTICOS *

AUTOR:

Sergio Andrés Sánchez Jaimes **

Palabras Claves:

Superficies Cuádricas, Desrotación, Valores característicos, Vectores característicos, Matrices Simétricas, Diagonalización de Matrices, Ortogonalización.

Contenido

En el presente trabajo se reúnen conceptos fundamentales de Geometría Analítica y Álgebra Lineal, con el propósito de Identificar superficies cuádricas rotadas. Se inicia con una descripción de las secciones cónicas teniendo en cuenta algunas de las formas en que pueden ser definidas: intersección de un plano con un cono circular recto, como lugares geométricos, y analíticamente por medio del estudio de la ecuación de segundo grado en dos variables. De igual forma se estudia la parte correspondiente a superficies cuádricas, donde se analiza la ecuación general de segundo grado en tres variables, las correspondientes superficies y sus graficas, para terminar con una tabla de identificación. Se presenta una síntesis de valores y vectores característicos, diagonalización de matrices, matrices simétricas, Diagonalización ortogonal y bases ortogonales, y matrices simétricas asociadas a transformaciones lineales. Para aplicar posteriormente estos conceptos a la identificación de una cuádrica rotada.

El proposito fundamental es establecer conexiones entre las superficies cuádricas y las propiedades de ortogonalidad de los vectores característicos correspondientes a matrices simétricas, a través de la matriz asociada a la forma cuadrática.

La identificación de cuádricas rotadas y trasladadas, sus nuevos ejes con base en los

[0]* Proyecto de grado.

[0]** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Asesor: Rosalba Osorio A

vectores característicos y su correspondiente gráfica, cierran el trabajo, quedando a disposición de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas un documento de fácil interpretación.

TITLE:

CUADRIC ROTATED SURFACE AND CHARACTERISTIC VECTORS

AUTHOR:

Sergio Andrés Sánchez Jaimes * *

Key words:

Cuadric Surfaces, Unrotation, Characteristic Values, Characteristic Vectors, Symmetrical Matrix, Diagonalitation of Matrix, Ortogonalization.

Content

Presently work meets fundamental concepts of Analytic Geometry and Lineal Algebra, with the purpose of identifying cuadric rotated surfaces. It begins with a description of the conical sections keeping in mind some in the ways in that they can be defined: intersection of a plane with a right circular cone, as geometric places, and analytically by means of the study of the equation of second grade in two variables. In this form it study the cuadric surfaces, where the general equation of second grade is analyzed in three variables, the corresponding surfaces and its graphs, to finish with an identification chart.

It is presented a synthesis of values and characteristic vectors, diagonalization of matrix, symmetrical matrix, diagonalization ortogonal and bases ortogonales, and symmetrical matrix associated to lineal transformations. To apply these concepts later on to the identification of a rotated cuadric.

The fundamental purpose is to establish connections between the cuadrics surface and the properties of ortogonalidad of the characteristic vectors corresponding to symmetrical matrix, through the associated matrix to the quadratic form.

The identification of cuadric rotated and translated, their new axes with base in the characteristic vectors and their corresponding graph, close the work, being to the students' of the Degree disposition in Mathematics a document of easy interpretation.

.CONTENIDO.

Tabla de figuras

.INTRODUCCIÓN.

A través de la historia, la matemática ha sido fundamento del progreso material de la humanidad, desde el hombre prehistórico que al parecer registraba un número cortando muescas en un palo o en un trozo de hueso, hasta los modernos y complicados algoritmos utilizados en la actualidad, convirtiéndose para el ser humano en una herramienta indispensable para el desarrollo de sus sociedades.

En ese sentido, cada una de sus ramas ha hecho aportes en distintos campos como la física, la economía, la estadística, la teoría cuántica, la química, la computación entre otros, tratando por medio de sus diversos grados de análisis enfrentar los problemas que afronta la sociedad.

En esa misma dirección, el álgebra lineal juega un papel fundamental, tanto en las matemáticas puras como aplicadas. Entre los temas que estudia encontramos las matrices, espacios y subespacios vectoriales, valores y vectores característicos, con algunas aplicaciones.

Este trabajo es una revisión bibliográfica encaminada a identificar superficies cuádricas rotadas a partir de los valores y vectores característicos como una aplicación del álgebra lineal.

En una primera parte se consideran las secciones cónicas teniendo en cuenta una breve reseña histórica y algunas de las formas en que pueden ser definidas: intersección de un cono circular recto, lugares geométricos, y analíticamente.

Se presenta una revisión de las superficies cuádricas, dado nuestro interés de identificarlas. Para tal propósito, se revisa la ecuación general de segundo grado en tres variables y las diferentes superficies obtenidas, con sus respectivas graficas y a continuación se presenta una tabla para su identificación.

Para finalizar se hace una síntesis de los valores y vectores característicos incluyendo la parte correspondiente a matrices simétricas asociadas a transformaciones lineales, para finalizar con la aplicación de estos conceptos a la desrotación de cuádricas.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1. SECCIONES CÓNICAS

Las secciones cónicas se conocían desde hacía más o menos un siglo y medio cuando Apolonio de Perga ($262 - 190$ $a.c$) compuso su famoso tratado "Las Cónicas".

A pesar de que Aristóteles y Euclides también escribieron tratados sobre las cónicas, "Las Cónicas" de Apolonio desplazaron a todos sus rivales en este campo, llegando a ser, junto con "Los Elementos" de Euclides, las mejores obras en su género en la matemática antigua.

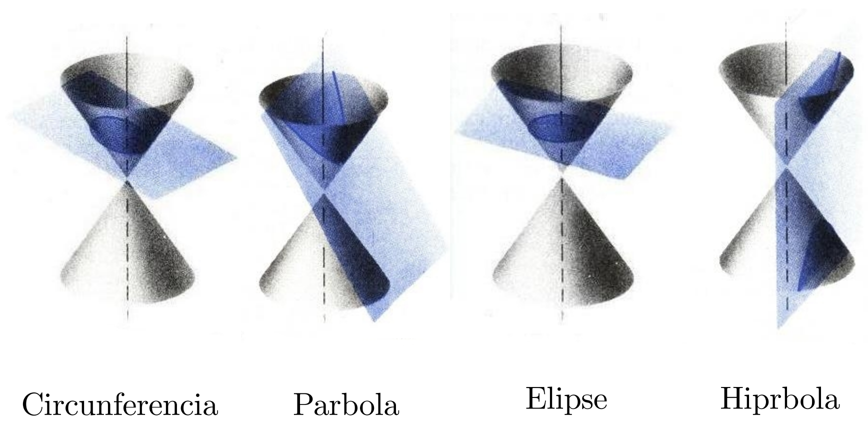
Anteriormente a Apolonio, la elipse, la parábola y la hipérbola se obtenían como secciones de la intersección de un plano con tres tipos de conos circulares rectos distintos según que el ángulo en el vértice fuese agudo, recto u obtuso. "Parece ser que Apolonio demostró por primera vez y de una manera sistemática que es suficiente considerar un cono de dos hojas”.[1]

Actualmente tenemos varias formas de definir las cónicas:

1.1.1. Las secciones cónicas como intersección de un cono circular recto con un plano

Las secciones cónicas son curvas que se obtienen al intersecar un cono circular recto con un plano. Si el plano es paralelo a la generatríz del cono, la curva resultante se llama **parábola**. Si el plano es oblicuo a la generatríz del cono e interseca sólo una sección del cono, entonces la curva es una **elipse**. La elipse genera una **circunferencia** si el plano es perpendicular al eje del cono. Si el plano interseca ambas secciones del cono, la curva resultante es una **hipérbola**.

Figura 1: Las secciones cónicas como intersección de un cono circular recto con un plano



[1]Boyer B, Carl. Historia de la Matemática. Primera edición. España: Alianza Editorial. 1986. p. 136

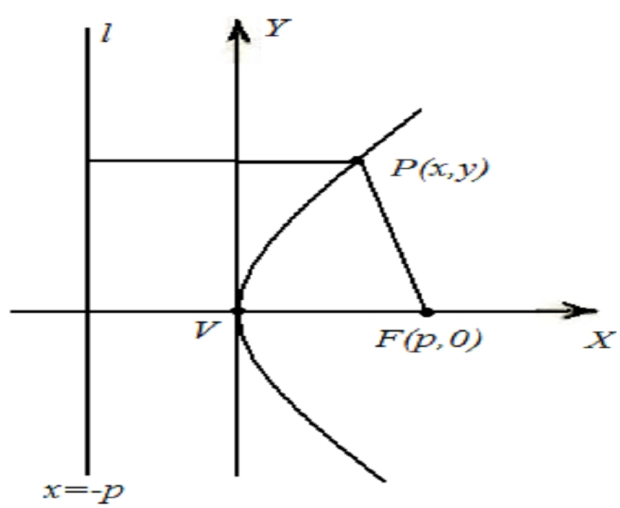
1.1.2. Las secciones cónicas como lugares geométricos:

La Parábola

" Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco, y de una recta fija llamada directríz". [2]

La recta x que pasa por el foco y es perpendicular a la directríz se llama *eje de la parábola*; y el punto V de intersección del eje con la parábola se llama *vértice*.

.Figura 2: Parábola como lugar geométrico.



La Elipse

"Es el conjunto de los puntos de un plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, del mismo plano, llamados focos es constante".[3]

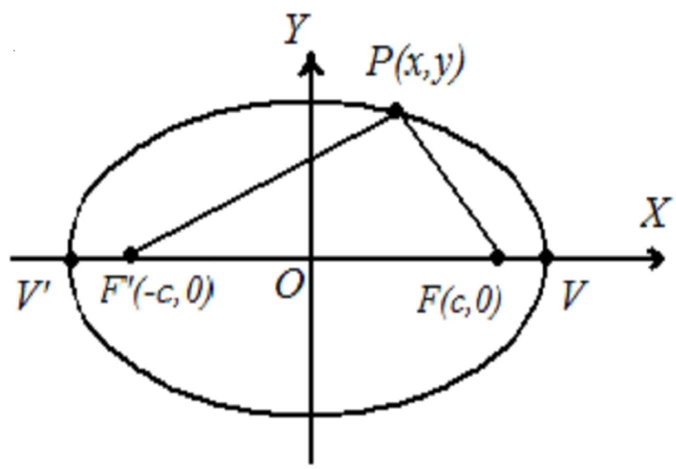
Designaremos con F y $F\prime$ los focos de la elipse, y con O el centro o punto medio de $FF\prime$. La recta X que pasa por los focos se denomina *eje mayor*. El eje mayor corta

[2]PATIÑO DUQUE, Gustavo. Elementos de Matemáticas. Bogotá: Editorial Bedout S.A. 1974. p.228.

[3]Ibid., p.228.

a la elipse en dos puntos V y $V\prime$ llamados *vértices*. La recta Y que pasa por O y es perpendicular al eje mayor se llama *eje menor*. Si P es un punto cualquiera de la elipse, los segmentos FP y $F\prime P$ que unen los focos con el punto P se llaman *radios vectores* de P.

Figura 3: Elipse como lugar geométrico



La Hipérbola

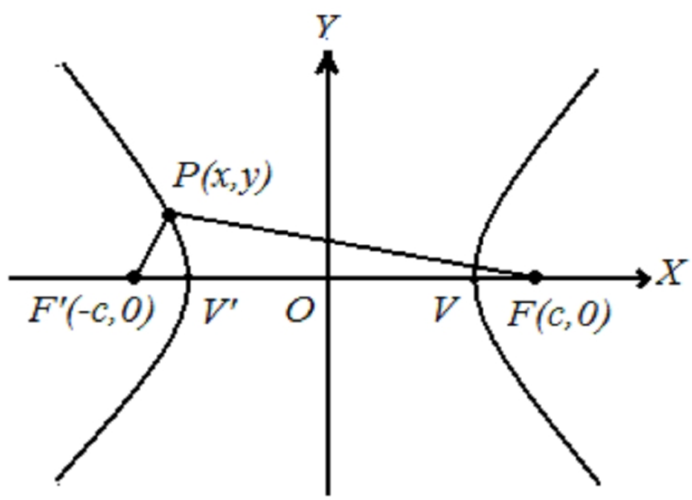
> "*Es el conjunto de puntos de un plano, tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, del mismo plano, llamados focos es constante*".[4]

La hipérbola consta de dos ramas diferentes de longitud infinita; los focos están designados por F y $F\prime$. La recta X que pasa por los focos se denomina *eje focal*. El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos V y $V\prime$, llamados *vértices*. La porción del eje comprendida entre los vértices se llama

[4]Ibid., p.228.

eje transverso. El punto medio O del eje transverso se llama *centro*. La recta Y que pasa por O y es perperndicular al eje focal se llama *eje normal*. El eje normal no corta a la hipérbola.

Figura 4: Hipérbola como lugar geométrico



1.1.3. Las secciones cónicas desde el punto de vista analítico

Desde el punto de vista analítico se puede definir una cónica como la curva en el plano que satisface una ecuación del tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

Los valores que toman A, B, C, D, E, F, determinan el tipo de cónica y su representación en el plano; en donde uno, por lo menos, de los tres coeficientes A, B o C es diferente de cero, para que la ecuación sea de segundo grado. Si $C \neq 0$, se dice que la curva está rotada con respecto a los ejes coordenados.

Si $A = 0$, $B \neq 0$ y $D \neq 0$, $C = 0$ la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo (o coincide) al eje X. Si, en cambio, $D = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje X, dos rectas coincidentes paralelas al eje X, o ningún lugar geométrico, según que las raices de $By^2 + Ey + F = 0$ sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.

Si $A \neq 0$, $B = 0$ y $E = 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo (o coincide) al eje Y. Si, en cambio, $E = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas el eje Y, dos rectas coincidentes paralelas al eje Y, o ningún lugar geométrico, según que las raices de $Ax^2 + Dx + F = 0$ sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.

Si $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$, $D \neq 0$, $E \neq 0$ y los coeficientes A y B son del mismo signo la ecución representa una elipse de ejes paralelos a los cordenados, o bien un punto, o no representa ningún lugar geométrico real. Además, si $A = B$, la ecuación representa una circunferencia de ejes paralelos a los coordenados.

Si A y B son de signos contrarios, la ecuación representa una hipérbola de ejes paralelos a los cordenados, o bien dos rectas que se cortan.

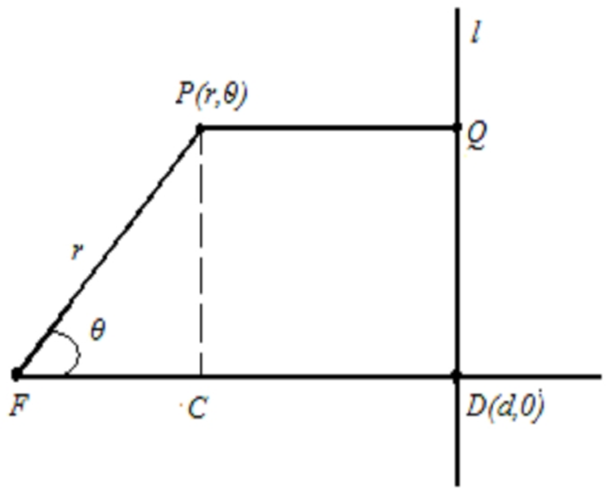
1.1.4. Las secciones cónicas en coordenadas Polares

Una definición más general de cónicas nos sirve para encontrar sus ecuaciones en coordenadas polares:

"*Sean F un punto fijo y l una recta fija en un plano. El conjunto de todos los puntos P del plano tales que la razón* $\frac{\mathrm{d(P,F)}}{\mathrm{d(P,Q)}}$ *es una constante positiva e, donde d(P,Q) es la distancia de P a l, es una sección cónica. La cónica es una parábola si e = 1, una elipse si 0 < e <1, una hipérbola si e > 1*".[5]

[5] SWOKOWSKY, Earl. Algebra y trigonometría con geometría analítica. México: Grupo Editorial Iberoamérica,1983. p.546

Figura 5: Cónicas en coordenadas polares



De acuerdo con esta definición. Una ecuación polar de la forma

$$r = \frac{de}{1 \pm e\cos\theta} \quad o \quad r = \frac{de}{1 \pm e\sin\theta}$$

representa una sección cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$, una hipérbola si $e > 1$.

1.2. SUPERFICIES CUÁDRICAS

DEFINICIONES

1. "*Una* ***superficie cuadrática*** *en el espacio es el lugar geométrico de un polinomio . de grado dos en x, y, z*"[6].

[6]FRALEIGH, John B. Cálculo con geometría analítica. México: Fondo educativo Interamericáno, 1980. p.470.

2. *"La gráfica de una ecuación de segundo grado en tres variables x, y, z,*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + k = 0$$

se conoce como superficie ***cuádrica****. Dichas superficies corresponden a las secciones cónicas en el plano"* [7]*.*

En resumen:

Una ***superficie cuadrática*** *o simplemente* ***cuádrica*** *en el espacio es el lugar geométrico de un polinomio de grado dos en tres variables igualado a cero. Una sección plana de una cuádrica es una cónica o una forma degenerada, o límite de ésta.*

La ecuación general de segundo grado en tres variables es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + k = 0 \tag{1}$$

en donde uno, por lo menos, de los seis coeficientes $A, B, C, D, E,\ F$ *es diferente de cero.*

Los términos en xy, xz, yz, representan rotaciones y los términos en x, y, z representan traslaciones de la superficie.

Si la superficie no tiene rotaciones ni traslaciones su ecuación es de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + k = 0 \tag{2}$$

y si todos los coeficientes son diferentes de cero, se puede reescribir

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1; \tag{3}$$

La ecuación (3) se denomina la ***forma canónica*** *de la cuádrica; específicamente una cuádrica con centro en el origen, tres planos de simetría y tres ejes de simetría.*

[7] LEITHOLD, Louis. El Cálculo con geometría analítica. Quinta Edición. México. Harper y Row Latinoamericana, 1817. p.1226

Dependiendo de los signos de los términos cuadráticos, se obtienen diferentes ecuaciones:

Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperboloide de una hoja

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned}$$

Hiperboloide de dos hojas

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1. \end{aligned}$$

Ningún lugar geométrico

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

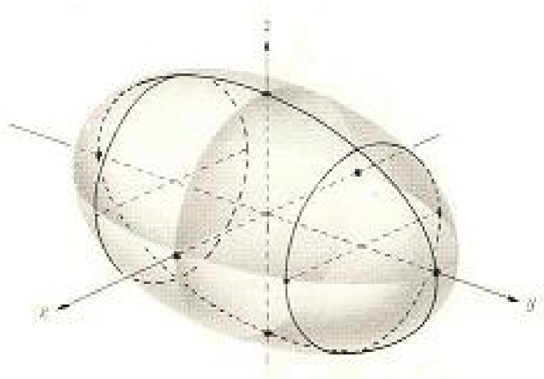
1.2.1. Elipsoide

La forma canónica de la ecuación del elipsoide es

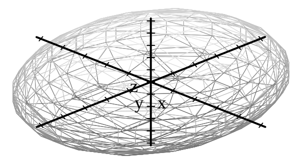
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

y su gráfica se observa en la figura 6.

.Figura 6: Elipsoide.



Trazas de un Elipsoide



Elipsoide generado por computador

"Las intercepciones con los ejes X, Y, Z son, $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, respectivamente. Los seis puntos de intersección del elipsoide y los ejes coordenados se llaman vértices.

Las trazas en los planos xy, xz e yz son, respectivamente, las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$.

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, todos los ejes coordenados y al origen.

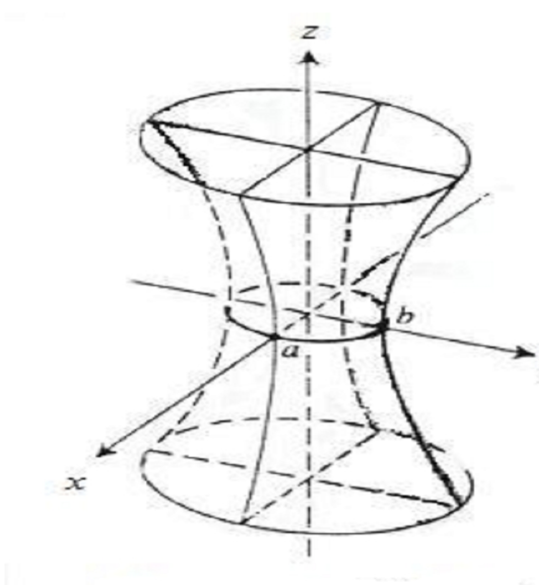
Si $a = b = c$, la superficie es una esfera de radio a; mientras que si dos cualesquiera de los tres coeficientes de la ecuación son iguales, la superficie es un elipsoide de revolución. En particular, si $a > b$ y $c = b$, tenemos el elipsoide alargado, una superficie de revolución que se obtiene haciendo girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$,en torno a su eje mayor, siendo un ejemplo de tal superficie un balón de fútbol americano. Por otra parte, si $a > b$ y

$c = a$, tenemos el elipsoide achatado o esferoide, que es una superficie de revolución que se obtiene haciendo girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$" [8].

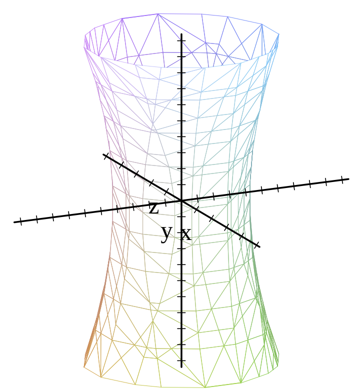
La tierra tiene, aproximadamente, la forma de un esferoide, con sección ecuatorial, circular y siendo menor la distancia entre los polos norte y sur, que el diámetro del círculo ecuatorial.

1.2.2. Hiperboloide de una hoja

Figura 7: Hiperboloide de una Hoja



Trazas de un elipsoide



Hiperboloide generado por computador

Analizaremos sólo una de las ecuaciones puesto que las tres superficies

[8]LEHMANN, Charles H. Geometría Analítica. México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Amaricana 1968. p.428.

difieren solamente en sus posiciones en relación a los ejes coordenados.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

"Las intercepciones con los ejes X y Y son $\pm a$ y $\pm b$, respectivamente. No hay intercepciones con el eje Z, debido a que tenemos que resolver la ecuación $-\frac{z^2}{c^2}=1$,que no tiene soluciones reales, por lo tanto la superficie no corta al eje Z.

Las trazas sobre los planos XY, XZ y YZ son respectivamente, la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$, y las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$.

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y el origen. La superficie no es cerrada sino que se extiende indefinidamente. Cualquier hiperboloide de una hoja se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es negativo en la forma canónica de la ecuación.

Las secciones de la superficie por planos paralelos al plano XY son las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$, $z=k$, las secciones se incrementan en tamaño conforme al plano intersector $z=k$ se aleja del origen. Si $a=b$, las secciones son círculos , y la superficie será de revolución.

Si en la ecuación canónica $a=b$, la superficie es un hiperboloide de revolución de una hoja que puede engendrarse haciendo girar la hipérbola $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, x=0$, en torno del eje Z"[9].

[9] Ibid., p.429

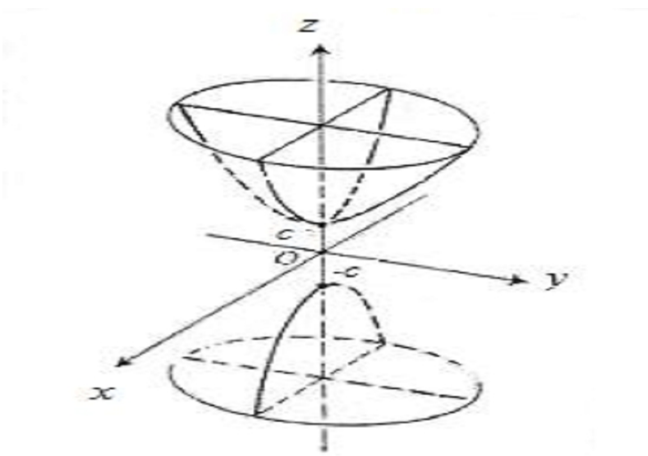
1.2.3. Hiperboloide de dos hojas

Analizaremos la ecuación

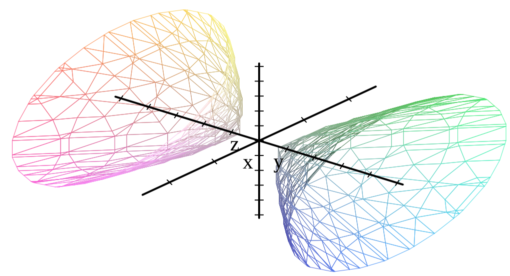
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

así como lo hicimos con el hiperboloide de una hoja, debido a que se presenta la misma situación.

Figura 8: Hiperboloide de dos Hojas



Trazas de un hiperboloide de dos hojas



Hiperboloide de dos Hojas

"Observemos que $| x | > | a |$*, porque de lo contrario sería* $(\frac{x^2}{a^2}) < 1$ *y el primer miembro de la ecuación anterior resultraría menor que el segundo miembro.*

Las intercepciones con el eje X *son* $\pm a$*. No hay intercepciones con los ejes* Y *y* Z*. Las trazas sobre los planos* XY *y* YZ *son, respectivamente, las hipérbolas* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, *y* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$*. No hay traza sobre el plano* YZ *debido a que tendríamos que resolver la ecuación* $-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

que no tiene solución. La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.

Las secciones de esta superficie por planos paralelos al plano YZ *son las elipses* $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1$, $x = k$, *siempre que* $\mid k \mid > a$. *Para* $k = \pm a$, *tenemos solamente los dos puntos de intersección con el eje* X, $(\pm a, 0, 0)$. *Para valores de* k *comprendidos en el intervalo* $-a < k < a$, *no hay lugar geométrico. De esto se sigue que la superficie no es cerrada sino que está compuesta por dos hojas o ramas diferentes que se extienden indefinidamente. Cualquier hiperboloide de dos hojas se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es positivo en la forma canónica de la ecuación.*

Si en la forma canónica de la ecuación $b = c$, *la superficie es un hiperboloide de revolución de dos hojas que puede engendrarse haciendo girar la hipérbola* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, *en torno al eje* X*”[10].*

Los elipsoides e hiperboloides, por tener centro de simetría se denominan ***cuádricas con centro.***

Otras superficies cuádricas, son los paraboloides, que por no tener centro de simetría son llamadas ***cuádricas sin centro,*** *y sus ecuaciones son de la forma:*

Paraboloides elípticos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= cz, \quad c > 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} &= cy \\ \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} &= cx \end{aligned}$$

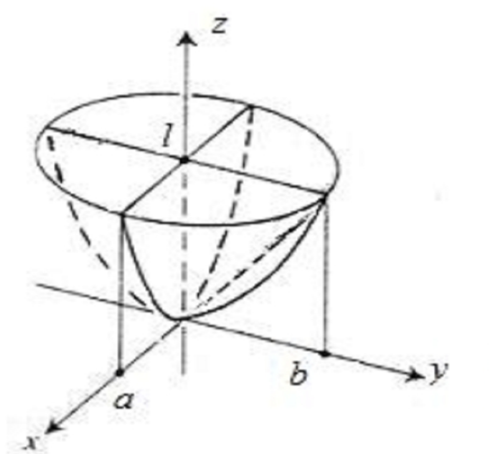
[10]Ibid., p.429

Paraboloides hiperbólicos

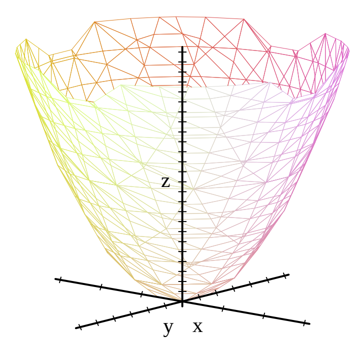
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= cz, \quad c > 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} &= cy \\ \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} &= cx \end{aligned}$$

1.2.4. Paraboloide elíptico

Figura 9: Paraboloide elíptico



Trazas de un paraboloide elptico



Paraboloide eliptico generado por computador

Una forma canónica del paraboloide elíptico es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz.$$

Para cada forma podemos tener dos variaciones según que c sea positivo o negativo.

"La superficie pasa por el origen. No hay intercepciones con los ejes coordenados. Ninguna parte de la superficie está debajo del plano XY porque no hay valores reales de x y y que correspondan a valores negativos de z. Las trazas sobre los planos XY, XZ y YZ son, respectivamente, el origen, la parábola $\frac{x^2}{a^2} = cz$, $y = 0$, y la parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz$, $x = 0$.

La superficie es simétrica con respecto a los planos YZ y XZ y con respecto al eje Z.

Las secciones de las superficies por planos paralelos al plano XY son las curvas $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck$, $z = k$.

Estas curvas son elipses si c y k son del mismo signo; si c y k tienen signos contrarios, no hay lugar geométrico. Si tomamos a c como positivo, k debe ser positivo. A medida que k aumenta de valor, los planos de corte se alejan del plano XY y las elipses de la ecuación anterior crecen en tamaño.

Evidentemente, la superficie no es cerrada sino que se extiende indefinidamente, alejándose del plano XY.

Si $a = b$, tenemos un paraboloide de revolución y las secciones por los planos $z = k$, $k > 0$, son circunferencias. Para este caso la superficie puede engendrarse girando la traza xz o la yz alrededor del eje z"[11].

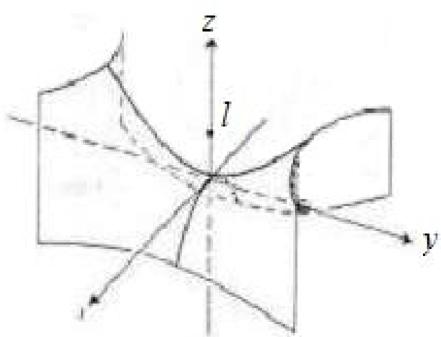
1.2.5. Paraboloide hiperbólico

Una forma canónica del paraboloide hiperbólico es

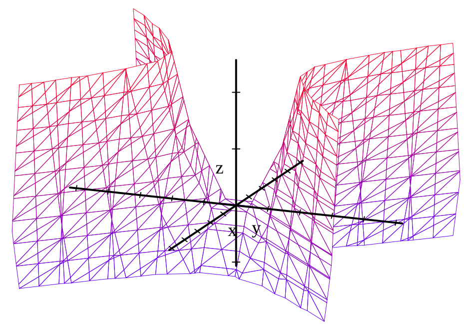
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz,$$

[11]Ibid., p.434

.Figura 10: Paraboloide hiperbólico.



Trazas de un paraboloide hiperblico



Paraboloide hiperbolico generado por computador

Para cada forma podemos tener dos variaciones según que c sea positivo o negativo.

"La superficie pasa por el origen. No hay intercepciones con los ejes coordenados. Las trazas sobre los planos XY, XZ y YZ son, respectivamente, las rectas que se cortan $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$, $(z=0)$ *y* $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, $(z=0)$; *la parábola* $\frac{x^2}{a^2}=cz$, $y=0$, *y la parábola* $\frac{y^2}{b^2}=-cz$, $(x=0)$.

La superficie es simétrica con respecto a los planos YZ y XZ y con respecto al eje Z. Las secciones de la superficie por planos paralelos, pero no coincidentes con el plano XY son las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=ck$, $z=k\neq 0$.

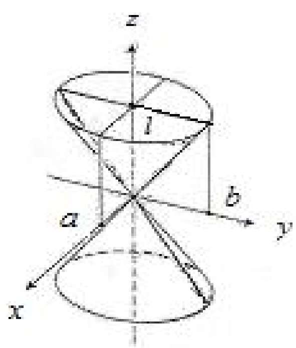
Evidentemente, a medida que k crece numéricamente, las ramas de estas hipérbolas se alejan más y más del eje Z. Por tanto, la superficie no es cerrada, sino que se extiende indefinidamente.

Las secciones de la superficie por planos paralelos al plano YZ son las parábolas $\frac{x^2}{a^2}=cz+\frac{k^2}{b^2}$, $z=k$, *las cuales se abren hacia arriba o hacia* *abajo según que c sea positivo o negativo.*

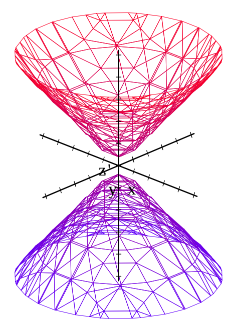
Las secciones de las superficies por planos paralelos al plano YZ son las parábolas $\frac{y^2}{b^2} = -cz + \frac{k^2}{a^2}$, $x = k$, que se abren hacia abajo o hacia arriba según que c sea positivo o negativo. La superficie tiene la forma de ***silla de montar*** *y se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la varible de primer grado en la forma canónica de su ecuación"*[12].

1.3. CONO ELÍPTICO

Figura 11: Cono elíptico



Trazas de un cono



Cono eliptico generado por computador

Si en la ecuación (3) el término independiente es cero, y además la podemos llevar a una de las formas

[12]Ibid., p.435

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}; \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} \ =\frac{y^2}{b^2}; \qquad ó \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2};$$

la ecuación representa un cono elíptico

La superficie pasa por el origen. Todas sus intercepciones con los ejes coordenados son cero. Las trazas sobre los planos XZ, XY *y* YZ *son, respectivamente,* $\frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}=0$, $y=0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, $z=0$ *y* $\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $x=0$. *Estas ecueaciones revelan que la traza* XY *es el origen, y que cada una de las otras dos trazas es un par de rectas que se intersectan en el origen. Las secciones paralelas al plano* XY *son elipses y aquellas paralelas a los otros dos planos son hipérbolas. Para el caso* $a=b$, *el cono es un cono circular recto.*

Si alguno (o todos) de los coeficientes G, H, I, *es diferente de cero, la cuádrica está trasladada y se pueden encontrar sus nuevos ejes, llevando la ecuación a una forma similar a (2)*

A continuación se presentan dos tablas de identificación de las superficies cuádricas . Estos lugares geométricos incluyen las superficies del cilindro y el cono rectos y a ciertas formas degeneradas que constan de dos planos diferentes, dos planos coincidentes (o un solo plano), dos planos que se cortan, una sola recta (una forma límite de un cilindro) y un punto.

Si ningún coeficiente es cero, las tablas muestran que el lugar geométrico, si existe, es una de las tres superficies cuádricas con centro: el elipsoide y los hiperboloides de una y dos hojas, y las dos cuádricas no centrales: los paraboloides elíptico e hiperbólico.

1

SUPERFICIES

Clasificación de las cuádricas

TIPO (I). $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$

COEFICIENTES		LUGAR GEOMÉTRICO
R*	**M, N, P**	
> 0	Todos positivos	Elipsoide
	Todos negativos	Ningún lugar geométrico
	Dos positivos, uno negativo	Hiperboloide de una hoja
	Uno positivo, dos negativos	Hiperboloide de dos hojas
	Uno cero, dos positivos	Cilindro elíptico (o circular) recto
	Uno cero, dos negativos	Ningún lugar geométrico
	Uno cero, uno positivo, uno negativo	Cilindro hiperbólico recto
	Dos cero, uno positivo	Dos planos paralelos diferentes
	Dos cero, uno negativo	Ningún lugar geométrico
= 0	Todos del mismo signo	Un solo punto, el origen
	Dos positivos, uno negativo	Cono recto
	Uno cero, dos del mismo signo	Todos los puntos sobre un eje coordenado
	Uno cero, dos de signos contrarios	Dos planos que se cortan
	Dos cero	Un plano coordenado (dos planos coincidentes)

* Cuando R < 0, se invierten los signos de los coeficientes M, N y P; los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para R > 0.

$_{2}2.pdf$

2

TIPO (II). $Mx^2 + Ny^2 = Pz$

COEFICIENTES		LUGAR GEOMÉTRICO
S**	**M, N**	
> 0	Del mismo signo	Paraboloide elíptico
	Signos opuestos	Paraboloide hiperbólico
	Uno cero	Cilindro parabólico recto
= 0	Del mismo signo	Todos los puntos sobre un eje coordenado
	Signos opuestos	Dos planos que se cortan
	Uno cero	Un plano coordenado (dos planos coincidentes)

** Cuando S < 0, se invierten los signos de los coeficientes M, N; los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para S > 0.

Tomada de LEHMANN, Charles H. Geometría analítica. P 427.

$_{2}3.pdf$

Capítulo 2

VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS

Sea $T : V \to V$ *una transformación lineal de un espacio vectorial* V *de dimensión* n *en sí mismo. El escalar* λ *se denomina* ***valor característico*** *de* T *si existe un vector* $\boldsymbol{v}$ *en* V *distinto de cero tal que*

$$T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Todo vector $\boldsymbol{v}$ *diferente de cero que satisfaga esta ecuación se denomina* ***vector característico*** *de* T *asociado con el valor característico* λ.

Los valores característicos también se denominan ***eigenvalores*** *o* ***valores propios*** *y los vectores característicos también se denominan* ***eigenvectores*** *o* ***vectores propios****.*

Como el espacio vectorial V *tiene dimensión finita, entonces la transformación* T *se puede representar por una matriz* $A_{T.}$ *Es decir,*

Definición 2.1 *"Sea* A *una matriz de* $n \times n$ *con componentes reales. El número* λ*(real o complejo) se llama* ***valor característico*** *de* A *si existe un vector* $\boldsymbol{v}$ *diferente de cero* *en* $\mathbb{C}^n$ *tal que*

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

El vector $\mathbf{v} \neq 0$ *se llama* ***vector característico*** *de* A *correspondiente al valor característico* λ*".* [1]. ♣

Teorema 2.1 *"Si* A *es una matriz de* $n \times n$*, entonces*

i) $\det(A - \lambda I)$ *es un polinomio* $p(\lambda)$ *de grado* n*.*

ii) Los valores característicos de A *son las soluciones de* $p(\lambda) = 0$*.*

iii) Si λ_0 *es un valor característico, cualquier solución no trivial de* $(A - \lambda_0 I)\mathbf{v} = 0$ *es un vector característico de* A *correspondiente a* $\lambda_{0.}$

i). *Si* A *es de* 2×2*, entonces* $\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$*, el cual es un polinomio en* λ *de grado 2. Para proceder por inducción, supóngase que para una matriz de* $k \times k$ *el determinante de* $A - \lambda I$ *es un polinomio de grado k. Si* B *es una matriz de* $(k+1) \times (k+1)$*,entonces se calcula* $\det(B - \lambda I)$ *usando la definición y la columna 1. En esta forma se ve que el determinante es un polinomio de grado* $(k+1)$*, y por el principio de inducción matemática se demuestra la parte i)*

ii). *Un escalar* λ *es un valor característico si y sólo si* $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$*. Por tanto,* $A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$*. Las ecuaciones homogéneas tienen soluciones no triviales si y sólo si el determinante de la matriz de coeficientes es cero. Inversamente, si* $\det(A - \lambda I) = 0$*,entonces la ecuación* $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *tiene soluciones no triviales y* λ *es valor característico de* A*. Por otro lado, si* $\det(A - \lambda I) \neq 0$*, entonces la única solución de* $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *es* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *de manera que* λ *no es valor característico de* A*. Por tanto,* λ *es un valor característico de* A *si y sólo si* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$*.*

iii). *Sea* $\mathbf{v}$ *cualquier solución no trivial de* $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$*. Entonces* $A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}I = \lambda_0\mathbf{v}$*.*

[1] STANLEY I, Grossman. Algebra Lineal, quinta edición. México: McGraw-Hill, 1996. p.532.

La ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$ *se llama* ***ecuación característica*** *de* A*. La expresión* $\det(A - \lambda I)$ *es siempre un polinomio (de grado* n *si* A *es de* $n \times n$*) y se llama el* ***polinomio característico*** *de* A*. Según el teorema fundamental de álgebra, cualquier polinomio de grado* n *con coeficientes reales o complejos tiene exactamente* n *raices (contando multiplicidades); por tanto, una matriz de* $n \times n$ *tiene exactamente* n *valores característicos, repetidos o no"*[2]. ✓

Para hallar los valores caracteríticos de una matríz A *de* $n \times n$ *dada,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

encontramos

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$p(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + a_0\right] = 0 \qquad (1)$$

La ecuación (1) tiene n *raices, repetidas o no. Si* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_m$ *son las diferentes raíces de (1) con multiplicidades* $r_1, r_2, \ldots, r_m$*, respectivamente, entonces (1) se puede factorizar para obtener*

[2]PERRY, William. Algebra Lineal con aplicaciones. México: McGraw-Hill, 1990. p.348. [modificaciones por el autor].

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{r_m} = 0 \qquad (2)$$

debemos hallar las raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

En consecuencia, para calcular valores y vectores característicos de una matriz A de $n \times n$ dada, se encuentra $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, enseguida se encuentran las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_m$ de $p(\lambda) = 0$ y por último se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda I_i)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, correspondiente a cada valor característico λ_i.

Teorema 2.2 *"Sea A una matriz de $n \times n$ y sea $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_m$ valores característicos distintos de A (esdecir, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) con vectores característicos correspondientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m$. Entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m$ son linealmente independientes. Esto es: "los vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos son linealmente independientes".* [3].

Teorema 2.3 *"Los valores característicos de una matriz triangular son las componentes diagonales de la matriz.*

Demostración. *Si*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces

[3]La demstración la puede encontrar en STANLEY I, OP. cit., p.536

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

y como el determinante de una matriz triangular es igual al producto de las componentes de la diagonal, se ve que

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda)$$

con ceros $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

La demostración para una matriz triangular inferior es prácticamente idéntica"[4]. ✓

Definición 2.2 *"Sea* λ *un valor característico de la matriz* A*; entonces la multliplicidad geométrica de* λ *es la dimensión del espacio propio correpondiente a* λ (E_λ) .

Multliplicidad geométrica de $\lambda = \dim E_\lambda$ ". ♣

2.1. MATRICES SEMEJANTES Y DIAGONALIZACIÓN

Definición 2.3 *"Se dice que dos matrices* A *y* B *de* $n \times n$ *son semejantes si existe una matriz invertible* C *de* $n \times n$ *tal que*

$$B = C^{-1}AC \qquad o \qquad CB = AC \text{ ''}. \ ♣$$

Teorema 2.4 *"Si* A *y* B *son matrices semejantes de* $n \times n$*, entonces* A *y* B *tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, tienen los mismos valores característicos.*

[4] Ibib., p.541

Demostración. *Como A y B son semejantes, existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que $B = C^{-1}AC$ y*

$\det(B-\lambda I) = \det(C^{-1}AC-\lambda I) = \det[C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda I)C] = \det[C^{-1}(A-\lambda I)C] =$

$= \det C^{-1}\det(A-\lambda I)\det C = \det C^{-1}\det C\det(A-\lambda I) = \det(C^{-1}C)\det(A-\lambda I) =$

$= \det I \det(A-\lambda I) = \det(A-\lambda I)$. ✓

Esto significa que A y B tienen la misma ecuación característica y como los valores característicos son raices de la ecuación caraterística, tienen los mismos valores característicos"[5].✓

Definición 2.4 *"Una matriz A de $n\times n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D que es semejante a A".*[6]♣

Teorema 2.5 *"Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores característicos linealmente independientes. En tal caso, la matriz diagonal D semejante a A está dada por*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

de donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores característicos de A, y $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Si C es una matriz cuyas columnas son vectores característicos linealmente independientes de A, entonces

$$D = C^{-1}AC$$

[5] Ibib., p.566

[6] Ibib., p.560

Demostración. *Primero se supone que A tiene n vectores característicos linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ que corresponden a los valores característicos (no necesariamente diferentes) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$.*

Sea

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}$$

y sea

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces C es invertible ya que sus columnas son linealmente independientes. Ahora bien

$$AC = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \vdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

y se ve que la columna i de AC es $A \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix} = A\mathbf{v}_i = \lambda \mathbf{v}_i$. *Así AC es la matriz cuya* *columna i es* $\lambda_i\mathbf{v}_i$ *y*

$$AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & \cdots & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 c_{n1} & \lambda_2 c_{n2} & \cdots & \lambda_n c_{nn} \end{pmatrix}$$

Pero

$$CD = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Entonces

$$AC = CD$$

y como C *es invertible, se pueden multiplicar ambos lados de la ecuación por la izquierda por* C^{-1} *para obtener*

$$D = C^{-1}AC$$

Esto prueba que si A *tiene* n *vectores característicos linealmente independientes, entonces* A *es diagonalizable. Inversamente, suponga que* A *es diagonalizable; esto es, suponga que* $D = C^{-1}AC$ *se cumple para alguna matriz invertible* C*. Sean* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *las columnas de* C*. Entonces* $AC = CD$*, e invirtiendo los argumentos anteriores, se ve de inmediato que* $A\mathbf{v}_i = \lambda\mathbf{v}_i$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Entonces* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *son vectores característicos de* A *y son linealmente independientes porque* C *es invertible"*[7]*.*✓

> *Ahora ya sabemos que una matriz* A *de* $n \times n$ *es diagonalizable si y sólo si tiene* n *vectores característicos linealmente independientes.*

[7]Ibib., p.566

Teorema 2.6 *"Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con bases $\beta_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\beta_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Si A_T es la representación matricial de T respecto a la base β_1 y si C_T es la representación matricial de T respecto a la base β_2, entonces A_T y C_T son semejantes.*

Demostración. *T es una trasformación lineal de V en si mismo. Entonces se tiene*

$$(T\mathbf{v})_{\beta_1} = A_T (\mathbf{v})_{\beta_1} \tag{1}$$

y

$$(T\mathbf{v})_{\beta_2} = C_T (\mathbf{v})_{\beta_2} \tag{2}$$

Sea M la matriz de transición de β_1 a β_2. Entonces

$$(\mathbf{v})_{\beta_2} = M (\mathbf{v})_{\beta_1} \tag{3}$$

*para todo **v** en V. Además,*

$$(T\mathbf{v})_{\beta_2} = M (T\mathbf{v})_{\beta_1} \tag{4}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2) se llega a

$$M (T\mathbf{v})_{\beta_1} = C_T M (\mathbf{v})_{\beta_1} \tag{5}$$

La matriz M es invertible. Si se multiplican ambos lados de (5) por M^{-1} (que es la matriz de transición de la base β_2 a la base β_1), se obtiene

$$(T\mathbf{v})_{\beta_1} = M^{-1} C_T M (\mathbf{v})_{\beta_1} \tag{6}$$

Comparando (1) y (6), se tiene

$$A_T (\mathbf{v})_{\beta_1} = M^{-1} C_T M (\mathbf{v})_{\beta_1} \tag{7}$$

Como (7) se cumple para todo $\mathbf{v} \in V$, *se concluye que*

$$A_T = M^{-1} C_T M$$

Es decir, A_T *y* C_T *son semejantes"*[8]*.* ✓

2.2. MATRICES SIMÉTRICAS Y DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL

Ahora consideremos la diagonalización de matrices simétricas $(A = A^t)$.

En la teoria que hemos desarrollado acerca de los valores característicos de una matriz A *cuyos elementos son números reales hemos venido suponiendo que lo valores característicos de* A *son números reales. No se deduce, sin embargo que las raices de la ecuación característica sean números reales, puesto que las raices de una ecuación de polinomio con coeficientes reales pueden ser complejas.*

Sin embargo, si A *en la ecuación* $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ *es una matriz simétrica, entonces podemos demostrar el siguiente teorema.*

Teorema 2.7 *"Todas las raices del polinomio característico de una matriz simétrica son números reales.*

Demostración. *Sea* λ *un valor característico de* A *con vector característico* ***v****; es decir,* $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$*. El vector* ***v*** *está en* $\mathbb{C}^n$*, el producto interno se define como*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}^T \mathbf{w}$$

[8] Ibib., p.571

y con $\alpha \in \mathbb{R}$ *satisface*

$$\alpha\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \alpha\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\right) \qquad y \qquad \mathbf{v}\cdot\alpha\mathbf{w} = \bar{\alpha}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\right) \tag{1}$$

Entonces, usando el hecho que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ *y* (1) *se tiene*

$$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \lambda\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) \tag{2}$$

Más aún, por propiedades de la mutiplicación de matrices, (1) *y el hecho de que*

$$A = A^t A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \left(A\mathbf{v}\right)^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T A^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T A\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot A\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\lambda\mathbf{v} = \bar{\lambda}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) \tag{3}$$

igualando (2) y (3) se tiene

$$\lambda\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = \bar{\lambda}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) \tag{4}$$

Pero $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \| \mathbf{v} \|^2 \neq 0$*, ya que* $\boldsymbol{v}$ *es un vector propio. Entonces se puede dividir ambos lados de (4) entre* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ *para obtener*

$$\lambda = \bar{\lambda} \tag{5}$$

Si $\lambda = a + bi$*, entonces* $\bar{\lambda} = a - bi$ *y de (5) se tiene*

$$a + bi = a - bi$$

lo que se cumple sólo si $b = 0$*. Esto muestra que* $\lambda = a$*; por lo tanto* λ *es real y la demostración queda completa*[9]*".* ✓

Teorema 2.8 *"Si* A *es una matriz simétrica de* $n \times n$*, entonces los vectores característicos que corresponden a valores característicos distintos de A son ortogonales.*

Demostración. *Sean* $\mathbf{v}_1$ *y* $\mathbf{v}_2$ *vectores característicos de* A*, los cuales están asociados con los valores característicos distintos* λ_1 *y* λ_2 *de* A*. Tenemos entonces* $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ *y* $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$.

[9] Ibib., p.576

Ahora

$$A\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot_2) \tag{1}$$

y

$$A\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot A^t \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}_2) = \lambda_2 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \tag{2}$$

combinando (1) y (2), se tiene $\lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = \lambda_2 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$ *y como* $\lambda_1 \neq \lambda_2$*, se concluye que* $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$*. Esto es lo que se quería demostrar"*[10]. ✓

Definición 2.5 *"Una matriz Q de $n \times n$ es "ortogonal" si $Q^t = Q^{-1}$. Desde luego, también podemos decir que Q es ortogonal si $Q^t Q = I$".* ♣

Teorema 2.9 *"La matriz Q de $n \times n$, es ortogonal si y sólo si las columnas (y filas) de Q forman un conjunto ortogonal.*

Demostración. *Sea Q una matriz ortogonal de $n \times n$, es decir, $Q^t Q = I$ y veamos que las columnas de Q son mutuamente ortogonales.*

Sea

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

tal que los $\|\mathbf{u}_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Como $Q^t Q = I$ *tenemos,*

$$QQ^t = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_n & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por igualdad de matrices tenemos, $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$, *y* $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$, *para todo* $i \neq j$; *por tanto los n vectores son ortonormales y cualquier n vectores mutuamente ortonormales forman un conjunto ortonormal.*

[10]KOLMAN, Bernard. Algebra Lineal, México: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. 1986. p.242. [Interpretación del autor]

Análogamente, supongamos que los n vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{11} \\ \mathbf{u}_{21} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{12} \\ \mathbf{u}_{22} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{1n} \\ \mathbf{u}_{2n} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{nn} \end{pmatrix}$$

forman un conjunto ortonormal; es decir,

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1,\ \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0, paratodoi \neq j; \|\mathbf{u}_i\| = 1, i = 1, 2, \ldots, n$$

.y veamos que la matriz Q formada por los n vectores es ortonormal.

Sea

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

Si hacemos QQ^t *y teniendo en cuenta que* $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$, *para todo* $i \neq j$, *se tiene*

$$QQ^t = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

luego Q es ortogonal y como $\|\mathbf{u}_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *se tiene que Q es ortonormal."*✓

Teorema 2.10 *"Si la matriz Q de* $n \times n$ *es ortogonal, entonces* $\det(Q) = \pm 1$

Demostración. $I = Q^{-1}Q = QQ^{-1}$. *Por hipótesis,* $Q^t = Q^{-1}$, *luego* $I = Q^tQ = QQ^t$, *por tanto,* $\det(I) = \det(Q^tQ) = \det(QQ^t)$, *o* $\det(I) = \det(Q^t)\det(Q) = \det(Q^t)\det(Q) = (\det(Q))^2$.

Como $1 = \det(I) = (\det(Q))^2$ *(pues* $\det(Q) = \det(Q^t)$*)*

tenemos

$(\det(Q))^2 = 1,$ *entonces* $\det(Q) = \pm 1.$ "✓

Teorema 2.11 (Proceso de otonormalización de Gram-Schmidt) *"Sea H un subespacio de dimensión m de $\mathbb{R}^n$. Entonces H tiene una base ortonormal.*

Demostración. *Sea $\delta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ una base de H. Se probará el teorema construyendo una base ortonormal a partir de los vectores en δ. Antes de dar los pasos para esta construcción, se observa el hecho sencillo de que un conjunto de vectores linealmente independiente no contiene al vector cero.*

Paso 1. Elección de primer vector unitario *Sea*

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\| \mathbf{v}_1 \|}$$

Entonces

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = \left(\frac{\mathbf{v}_1}{\| \mathbf{v}_1 \|} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{v}_1}{\| \mathbf{v}_1 \|} \right) = \left(\frac{1}{\| \mathbf{v}_1 \|^2} \right) \cdot (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) = 1$$

de manera que $\| u_1 \| = 1$.

Paso 2. Elección de un segundo vector ortogonal a $\mathbf{u}_1$ *En $\mathbb{R}^2$ el vector*

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|^2} \mathbf{v}$$

es ortogonal a $\mathbf{v}$. En este caso

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|^2} \mathbf{v}$$

es la proyección de $\mathbf{u}$ sobre v.

Resulta que el vector $\boldsymbol{w}$ dado es ortogonal a $\boldsymbol{v}$ cuando $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{v}$ están en $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n \geq 2$. observese que como $\boldsymbol{u}_1$ es un vector unitario,

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\| \mathbf{u}_1 \|} \mathbf{u}_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\, \mathbf{u}_1$$

para cualquier vector $\boldsymbol{v}$.

Sea

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1$$

entonces

$$\mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\,(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\,1 = 0$$

de manera que $\mathbf{v}_2'$ *es ortogonal a* $\mathbf{u}_1$. *Más aún, como un conjunto ortonormal de vectores diferentes de cero es linealmente independiente,* $\mathbf{u}_1$ *y* $\mathbf{v}_2$ *son linelmente independientes.* $\mathbf{v}_2' \neq \mathbf{0}$ *porque de otra manera*

$$\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 = \frac{(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)}{\parallel \mathbf{v}_1 \parallel}\mathbf{v}_1,$$

lo que contradice la independencia de $\mathbf{v}_1$ *y* $\mathbf{v}_2$.

Paso 3. Elección de un segundo vector unitario *Sea*

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{\parallel \mathbf{v}_2' \parallel}$$

entonces es evidente que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ *es un conjunto ortonormal.*

Suponga que se han construido los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ $(k < m)$ *y que forman un conjunto ortonormal. Se mostrará como construir* $\mathbf{u}_{k+1}$.

Paso 4. Continuación del proceso *Sea*

$$\mathbf{v}_{k+1}' = \mathbf{v}_{k+1} - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 - \cdots - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k$$

entonces para $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{k+1}' \cdot \mathbf{u}_i &= \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_1)\,(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i) - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_2)\,(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_i) - \cdots - \\
&\quad - \cdots - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i)\,(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i) \\
&\quad - \cdots - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_k)\,(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_i)
\end{aligned}$$

Pero $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_i = 0$ *si* $j \neq i$ *y* $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$. *Por lo tanto,*

$$\mathbf{v}'_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i - \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

Así $\left\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}'_{k+1}\right\}$ *es un conjunto linealmente independiente, ortogonal y* $\mathbf{v}'_{k+1} \neq \mathbf{0}$.

Paso 5. *Sea*

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{\mathbf{v}'_{k+1}}{\|\mathbf{v}'_{k+1}\|}$$

Entonces es claro que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$ *es un conjunto ortonormal y se puede continuar de esta manera hasta que* $k + 1 = m$ *con lo que se completa la prueba.* ✓ *”*[11]

Se puede demostrar que si A *tiene un valor característico* λ *de multlipicidad* k, *entonces el espacio solución del sistema homogeneo* $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *tiene dimensión* k. *Esto significa que existen* k *vectores característicos de* A *lineanmente independientes asociados al valor característico* λ.

Teorema 2.12 *“Si un valor característico* λ_j *de la matriz simétrica* A *de orden* n, *tiene multliplicidad* $k \geq 2$, *existen* k *vectores característicos ortonormales (y linealmente independientes) correspondientes al valor característico* λ_j; *en efecto, existe un número infinito de conjuntos de* k *vectores característicos ortonormales correspondientes a* λ_j. *Por otro lado, no puede haber más de* k *vectores característicos linealmente independientes con el mismo valor característico* λ_j *por tanto, si un valor característico tiene multiplicidad* k, *los vectores característicos correspondientes generan un subespacio de* $\mathbb{R}^n$ *de dimensión* k. *Entonces, si se reunen los conjuntos de vectores característicos*

[11]STANLEY I, OP. cit., p.395-396

correspondientes a todos los valores característicos diferentes, es posible obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. *Para demostrar que existen* k *vectores característicos linealmente independientes, correspondientes a un valor característico* λ_j *de multiplicidad* k, *debemos demostrar que la nulidad de* $A - \lambda_j I$ *es mayor o igual que* k. *Para hacer esto, comencemos por notar que hay por lo menos un vector característico con valor característico* λ_j, *digamos* $\mathbf{u}_j$. *Sabemos que existen* $n-1$ *vectores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ *tales que el conjunto* $\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ *es una base ortonormal de* $\mathbb{R}^n$.
Consideremos la matriz

$$Q_1 = (\mathbf{u}_j,\ \ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})\,;$$

entonces

$$AQ_1 = (A\mathbf{u}_j,\ A\mathbf{v}_1,\ A\mathbf{v}_2, \ldots,\ A\mathbf{v}_{n-1}) = (\lambda_j\mathbf{u}_j\ A\mathbf{v}_1,\ A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_{n-1})$$

y

$$Q^t AQ_1 = \begin{pmatrix} \lambda_j & \mathbf{u}_j^t A\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_j^t A\mathbf{v}_{n-1} \\ \lambda_j \mathbf{v}_1^t \mathbf{u}_j & \mathbf{v}_1^t A\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1^t A\mathbf{v}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_j^t \mathbf{v}_{n-1}\mathbf{u}_j & \mathbf{v}_{n-1}^t A\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_{n-1}^t A\mathbf{v}_{n-1} \end{pmatrix}$$

sin embargo,

$$\mathbf{v}_i^t \mathbf{u}_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

y

$$\mathbf{u}_j^t A\mathbf{v} = \left(\mathbf{u}_j^t A\mathbf{v}_i\right)^t = \mathbf{v}_i^t A\mathbf{u}_j = \lambda_i \mathbf{v}_i^t \mathbf{u}_j = 0 \qquad\quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)\,.$$

Entonces

$$A_1 = Q_1^t A Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_1^t A \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1^t A \mathbf{v}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbf{v}_{n-1}^t A \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_{n-1}^t A \mathbf{v}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Es decir, la inversa de Q_1 es igual a la transpuesta de dicha matriz. Según esto, A_1 es semejante a A, y A_1, A tienen los mismos valores característicos.
Ahora, también es cierto que no puede haber más de k vectores característicos ortonormales con valor caracterítico λ_j si λ_j tiene multiplicidad k. Esto se concluye en virtud de que cada vector característico corrrespondiente a λ_j es ortogonal a cualquier otro vector característico diferente de λ_j"[12].

> *Los vectores característicos asociados con valores característicos disintos son ortonormales, si formamos el conjunto de todos vectores característicos obtenemos un conjunto ortonormal. Entonces la matriz Q cuyas columnas son los vectores característicos es ortonormal.*

Teorema 2.13 *"Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica. Los valores característicos de A están localizados en la diagonal principal de D.*

Demostración. *Sea A una matriz simétrica. Entonces por el teorema (11) , A es diagonalizable ortogonalmente con la matriz Q cuyas columnas son los vectores característicos reales ortonormales de A.*
Inversamente, suponga que A es diagonalizable ortogonalmente. Entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^tAQ = D$. Multiplicando esta ecuación a izquierda por Q y por la derecha por Q^t, y usando el hecho de que $Q^tQ = QQ^t = I$, se obtiene

[12] G Hatley. Algebra Lineal. Colombia: Fondo educativo Interamericáno. 1969,. p.242-244

$A = QDQ^t$.

Entonces $A^t = \left(QDQ^t\right)^t = \left(Q^t\right)^t D^t Q^t = QDQ^t = A$. *Así,* A *es simétrica y el teorema queda demostrado.* ”✓

Antes de dar unos ejemplos, es indispensable proporcionar un procedimiento para encontrar una matríz ortogonal Q *que diagonaliza la matríz simétrica* A.

Procedimiento para encontrar una matriz diagonalizante Q

i. *Encuentre una base para cada espacio propio de* A.

ii. *Encuentre una base ortonormal para cada espacio propio de* A *usando el proceso de Gram-Schmidt o algún otro.*

iii. *Escriba* Q *como la matriz cuyas columnas son los vectores propios ortonormales obtenidos en el paso ii).*

Capítulo 3

SUPERFICIES CUÁDRICAS ROTADAS

Las técnicas del álgebra lineal son frecuentemente utilizadas para trabajar con expresiones no lineales, tales como, las superficies cuádricas.

Es de interés, estudiar la ecuación general de segundo grado en tres variables; es decir,

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz \quad (1)$$

La ecuación determina un único valor de F para cada tripla de números. Los términos en xy, xz, yz representan rotaciones de la superficie y los términos lineales rapresentan una traslación.

La ecuación de la cuádrica se puede representar en forma matricial de la *siguiente manera:*

$$F\left(x,y,z\right)=\left(x,\ y,\ z\right)\begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\left(g,\ h,\ i\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que las matrices simétricas tienen características especiales como lo señalamos anteriormente, también podemos escribir la ecuación así:

$$F\left(x,y,z\right)=\left(x,\ y,\ z\right)\begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\left(g,\ h,\ i\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$F\left(x,y,z\right)=\mathbf{v}^{t}A\mathbf{v}+\mathbf{g}\mathbf{v} \tag{2}$$

Donde A se denomina la matriz asociada a la forma cuadrática.

Por ser A una matriz simétrica, se puede diagonalizar ortogonalmente por medio se una matriz ortogonal Q, $\left(Q^{t}=Q^{-1}\right)$ cuyas columnas son los vectores característicos (Teoremas 8, 9) ortonormales de A, es decir

$$A=QDQ^{t}$$

Reemplazando A en la ecuación tenemos:

$$\mathbf{v}^{t}\left(QDQ^{t}\right)\mathbf{v}+\mathbf{g}\mathbf{v}=F$$

$$\left(\mathbf{v}^{t}Q\right)D\left(Q^{t}\mathbf{v}\right)+\mathbf{g}\mathbf{v}=F \tag{3}$$

Si $\mathbf{w}=Q^{t}\mathbf{v}$ *entonces,* $\mathbf{v}=Q\mathbf{w}$, *(3) se transforma en*

$$\mathbf{w}^{t}D\mathbf{w}+\mathbf{g}Q\mathbf{w}=F \tag{4}$$

Que representa la ecuación en los nuevos ejes (desrotación). Completando los cuadrados en (4) se encuentra la traslación de la cuádrica.

Observe que los vectores ortonormales de la matriz Q son los nuevos ejes correspondientes a la rotación. Es recomendable que el determinante de Q sea 1 (Teorema 10) para que la rotación sea como normalmente la trabajamos, es decir, en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

Ejemplo 3.1 *Identifique la superficie y haga un bosquejo de su gráfica en los nuevos ejes.*

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2 + x + y + z = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Para diagonalizar la matriz simétrica A encontramos sus valores y vectores característicos

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(-1)\right] - (-1)\left[(-1)(1-\lambda)\right] = \\ &= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

de donde $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3.$

Para $\lambda_1 = 0$ *se tiene*

$$(A-\lambda_1 I)\,\mathbf{v}=(A-0I)\,\mathbf{v}=\begin{pmatrix} 1-0 & -1 & 0 \\ -1 & 2-0 & -1 \\ 0 & -1 & 1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reduciendo por renglones se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} --\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} --\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

De donde $x_1=x_2=x_3$. $E_0=gen\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}\right\}=gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Para $\lambda_2=1$ *se tiene* $(A-\lambda I)\,\mathbf{v}=$

$$(A-I)\,\mathbf{v}=\mathbf{0}\quad\begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto lleva a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} --\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, $x_2=0,\ x_1=-x_3$. $E_1=gen\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}\right\}=gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$

Para $\lambda_3 = 3$ *se tiene*

$$(A-\lambda I)\,\mathbf{v} = (A-3I)\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\left(\begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & | & 0 \\ -1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{array}\right) -- \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{array}\right) -- \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, $-2x_1 = x_2$, $-2x_3 = x_2$, *o* $x_1 = x_3$.

$$E_1 = gen \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como era de esperarse, los vectores característicos son ortogonales porque corresponden a valores característicos distintos (teorema 8).

Como $\parallel \mathbf{v}_1 \parallel = \sqrt{3}$, $\boldsymbol{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\parallel \mathbf{v}_2 \parallel = \sqrt{2}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ *y*

$\parallel \mathbf{v}_3 \parallel = \sqrt{6}$, *así,* $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Por tanto

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

de tal manera que $det(Q) = 1$ *para que la rotación se haga en sentido antihorario.*

Ahora

$$D = Q^t A Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{6}} & -\sqrt{6} & \frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si escribimos la ecuación (5) en su forma equivalente (4), $\mathbf{w}^t D Q \mathbf{w} + \mathbf{G} Q \mathbf{w} = F(x, y, z)$,

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

tenemos

$$\begin{pmatrix} x', & y', & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$$

$$(x')^2 + 3(z')^2 + \sqrt{3}y' = 0$$

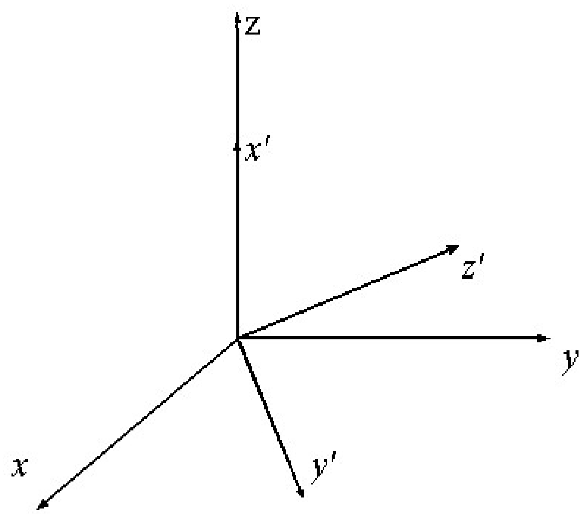
es decir,

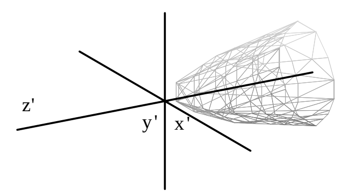
$$(x')^2 + 3(z')^2 = -\sqrt{3}y'$$

Al hacer las operaciones se obtiene una cuádrica sin centro que corresponde a un paraboloide elíptico que se extiende a lo largo del eje y' negativo. Los vectores de la matriz Q representan los nuevos ejes, la primera columna representa el eje x', la segunda, el eje y', y la tercera el eje z'.

Veamos la representación de los nuevos ejes y la cuádrica desrotada (en los nuevos ejes).

figura 12: Paraboloide elíptico en los nuevos ejes





Paraboloide rotado

Identifique la superficie y elabore su gráfica

$$z = xy$$

Despejando tenemos

$$-xy + z = 0 \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Para diagonalizar la matriz simétrica A encontramos sus valores y vectores característicos

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) = 0.$$

de donde los valores característicos de A son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, y $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$.

Para λ_1 *se tiene,*

$$(A-\lambda_1 I)=(A-0I)=A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

reduciendo por renglones tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

.*de donde* $E_0 = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}\right\} = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Para $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ *se tiene*

$$(A-\lambda_2 I)=(A-\tfrac{1}{2}I)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

se reduce por renglones

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix} --\rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix}.$$

de donde $E_{\frac{1}{2}} = gen\left\{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

De igual forma para λ_3 *se tiene*

$$(A-\lambda I)=(A-\left(-\frac{1}{2}\right)I)=(A+\frac{1}{2}I)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Reduciendo por renglones tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix} --\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix},$$

de donde $E_{-\frac{1}{2}} = gen\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

como era de esperarse, los vectores son ortogonales. Solo nos resta normalizarlos.

$$\| \mathbf{v}_1 \| = 1, \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \| \mathbf{v}_2 \| = \sqrt{2}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \| \mathbf{v}_3 \| = \sqrt{2},\ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto hacemos

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de tal manera que $det(Q) = 1$ *para que la rotación se haga en sentido antihorario.*

Ahora

$$D = Q^t A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Así que (1) se puede escribir en términos de las nuevas variables x', y', z' como

$$\begin{pmatrix} x', & y', & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$$

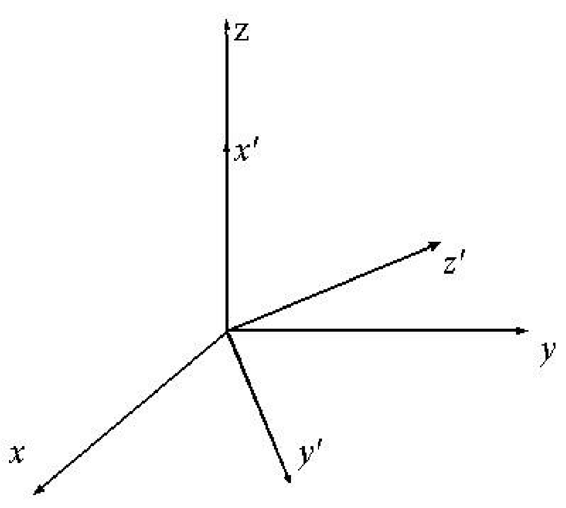
$$-\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2}(z')^2 + x' = 0$$

que equivale a

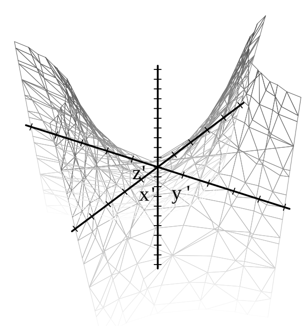
$$\frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}(z')^2 = x'$$

Al hacer las operaciones se obtiene una cuádrica sin centro que corresponde a un paraboloide hiperbólico (silla de montar) que se extiende a lo largo del eje x. Veamos su gráfica y representación en los nuevos ejes.

Figura 13: Paraboloide hiperbólico



Nuevos ejes de rotacin



Paraboloide hiperbolico rotado

Ejemplo 3.2 *Identifique la superficie y haga un bosquejo de su gráfica en los nuevos ejes.*

$$7x^2 - 32xy + 7y^2 + 16yz - 5z^2 - 16xz + 3x + 2y - z = \frac{355}{162}$$

De la ecuación tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & -8 \\ -16 & 7 & 8 \\ -8 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 3, & 2, & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -16 & -8 \\ -16 & 7-\lambda & 8 \\ -8 & 8 & -5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 405\lambda - 2187 = \\ &= (\lambda - 27)(\lambda + 9)^2 = 0 \end{aligned}$$

de donde $\lambda_1 = 27, \ \ \lambda_2 = \lambda_3 = -9$

Para λ_1 *se tiene,* $\det(A - \lambda I)\mathbf{v} = \det(A - 27I)\mathbf{v} = 0$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 7-27 & -16 & -8 \\ -16 & 7-27 & 8 \\ -8 & 8 & -5-27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{pmatrix} -20 & -16 & -8 \\ -16 & -20 & 8 \\ -8 & 8 & -32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reduciendo por renglones se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -20 & -16 & -8 & 0 \\ -16 & -20 & 8 & 0 \\ -8 & 8 & -32 & 0 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -16 & -20 & 8 & 0 \\ -8 & 8 & -32 & 0 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$- \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} - \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} - \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

De donde

$$x_1 = -2x_{3,} \quad x_2 = 2x_3 . E_{27} = gen \left\{ \begin{pmatrix} -2x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = gen \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Para $\lambda_2 = \lambda_3 = -9$, *se tiene* $\det(A - \lambda_2 I)\mathbf{v} = \det(A + 9I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 7+9 & -16 & -8 \\ -16 & 7+9 & 8 \\ -8 & 8 & -5+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{pmatrix} 16 & -16 & -8 \\ -16 & 16 & 8 \\ -8 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reduciendo por renglones se obtiene

$$\begin{pmatrix} 16 & -16 & -8 & | & 0 \\ -16 & 16 & 8 & | & 0 \\ -8 & 8 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} - - \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

De donde $x_1 = x_2 + \frac{1}{2}x_3$.

$$E_{-9} = gen \left\{ \begin{pmatrix} x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es indispensable ortonormalizar los vectores característicos correspondientes al valor característico $\lambda_2 = \lambda_3 = -9$, *ya que no son mutuamente ortogonales, (teorema 11). Para ello, utilicemos el proceso de "Gram-Scmith".*

Como $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, *tenemos que* $\|\mathbf{v}_1\| = 3$. *Así que* $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

De igual forma, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *de tal manera que* $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tenemos que $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, *para hallar* $\mathbf{u}_3$ *procedemos de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3' &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De esta manera, $\|\mathbf{v}_3\| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ *y* $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}2 \end{pmatrix}$.

Ahora podemos hallar Q *con las vectores característicos de la matriz* A, *teniendo en cuenta que* $\det Q = 1$ *para que la rotación se haga en sentido contrario a las manecillas del reloj.*

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ahora

$$D = Q^tAQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{2} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -16 & -8 \\ -16 & 7 & 8 \\ -8 & 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{2} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}\sqrt{2} & -18 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{9}{2}\sqrt{2} & 18 & \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 9 & -6\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Obteniendo así

$$D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Si escribimos la ecuación (5) en su forma equivalente (4), $\mathbf{w}^tDQ\mathbf{w} + \mathbf{G}Q\mathbf{w} = F(x, y, z)$,

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

tenemos

$$\begin{pmatrix} x', & y', & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 3, & 2, & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \frac{355}{162} = 0$$

que equivale a

$$-9(x')^2 + 27(y')^2 - 9(z')^2 + 2\sqrt{2}x' + \frac{4}{3}\sqrt{3}y' - \frac{1}{3}\sqrt{6}z' - \frac{355}{162} = 0$$

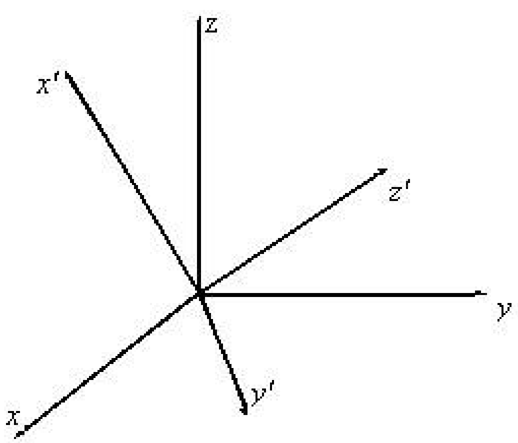
Completando cuadrados y multiplicando por (-1) *se tiene*

$$-\left(3x' - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\sqrt{27}y' + \frac{2}{9}\right)^2 - \left(3z' + \frac{\sqrt{6}}{18}\right)^2 = 2$$

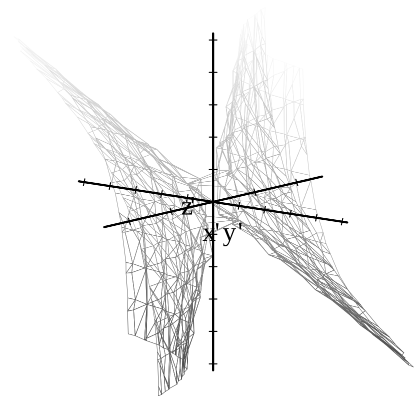
Que corresponde a un hiperbolóide de dos hojas que se extiende a lo largo del eje y'.

Veamos su representación en los nuevos ejes

Figura 14: Hiperbolide de dos hojas



Nuevos ejes de rotacin



Hiperbolide de dos hojas rotado

CONCLUSIONES

La revisión bibliográfica sobre las superficies cuádricas rotadas y vectores característicos además de ser una experiencia muy agradable, me permitió afianzar algunos conocimientos y al mismo tiempo darme cuenta de algunas relaciones entre ramas tan importantes de la matemáticas como el Álgebra Lineal y la Geometría Analítica, relaciones que en un principio no son muy evidentes.

En este proceso de revisión, pude explorar por separado los conceptos de superficies cuádricas y la parte correspondiente a valores y vectores característicos para luego aplicarlas a la desrotación de dichas superficies. En la parte correspondiente a la identificación de superficies cuádricas, tema que se revisa no muy detalladamente pude colmar mis expectativas profundizando en el tema, algo que no logré conseguir en el curso de cálculo debido a la simplicidad con que se estudia.

El trabajo me permitió afianzar los conocimientos en álgebra lineal al poder repasar con mayor detenimiento los valores y vectores característicos y las bases ortogonales, situación por medio de la cual pude obtener un mayor entendimiento y por ende un mejor dominio del tema.

En el informe presentado he tratado de plasmar de una forma clara y concreta los conceptos e ideas fundamentales de los temas estudiados dada la diversidad de formas en que se pueden abarcar. Esta labor es solo el principio de un trabajo que deja abierta la posibilidad de profundizar con mayor rigor en el análisis de estos temas, que a mi parecer son de gran relevancia para el desarrollo de la matemática y para establecer conexiones con otras áreas tanto de la misma matemática, como de las demás disciplinas.

BIBLIOGRAFIA

BOYER B. Carl. Historia de la Matemática. 1 ed. España: 1986. 807 p.

FRALEIGH, John B. Cálculo con geometría analítica. México: Fondo educativo Interamericano, 1980. 879 p.

G, Hatley. Álgebra Lineal. Colombia: Fondo educativo Interamericano. 1869.

KOLMAN, Bernard. Álgebra Lineal. México: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. 1986. 304 p.

LEHMANN, Charles H. Geometría analítica. México: Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana. 1968. 494 p.

LEITHOLD, Louis. El Cálculo con geometría analítica. 5 ed. México: Harper & Row Latinoamericana.1817.

MURRAY, H Protter y CHARLES B Morrey. Cálculo con geometría analítica. 3 ed. México: Fondo educativo Interamericano. 1980.

PATIÑO DUQUE, Gustavo. Elementos de Matemáticas. Bogotá: Editorial Bedout S.A. 1974, 354p.

PERRY, William. Álgebra Lineal con aplicaciones. México: McGraw-Hill. 1990. 540p.

STANLEY I, Grossman. Algebra Lineal, 5 ed. México: McGraw-Hill. 1996. 634p.

STRANG, Gilbert. Álgebra Lineal con aplicaciones. México: Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1982. 454 p.

SWOKOWSKY, Earl. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Grupo Editorial Iberoamarica. 1983. 603 p.