

Modelado y Simulación de Sistemas Eléctricos, Mecánicos y Electromecánicos con la Ecuación
de Euler-Lagrange

Juan Sebastián Victoria Romero

Trabajo de Grado para Optar al Título de Ingeniero Electricista

Director

Profesor Rodrigo Correa

Codirector

Dr. Herman Raúl Vargas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Físico- Mecánicas

Escuela de Ingeniería Eléctrica

Pregrado en Ingeniería Eléctrica

Bucaramanga

2025

Dedicatoria

Dedico este logro a mi madre, la persona que más me ha ayudado y motivado a perseguir y alcanzar este maravilloso objetivo. Su amor y apoyo incondicional han sido mi faro en este viaje. A mis demás familiares, gracias por estar ahí para brindar su ayuda de la mejor manera. Cada uno de ustedes ha contribuido a este triunfo con su presencia y aliento constante.

A mis queridos compañeros de la UIS, cuya compañía en este viaje académico ha sido invaluable. Su espíritu de superación y apoyo mutuo no solo enriqueció mi experiencia, sino que también me enseñó la importancia de la colaboración y el aprendizaje colectivo. Aprecio profundamente haber compartido este proceso con personas tan motivadas y excepcionales.

Finalmente, a mis profesores, seres grandiosos que me han fijado un objetivo y un modelo a seguir. Gracias por compartir su conocimiento y permitirme adentrarme en este maravilloso mundo del saber.

Agradecimiento

Mi más profundo reconocimiento a la Universidad Industrial de Santander, mi estimada alma mater, y a los distinguidos profesores de la escuela de ingeniería eléctrica. Su dedicación y excelencia no solo han marcado mi trayectoria, sino que también han sido el pilar de una comunidad académica excepcional. Gracias por su inagotable atención y por estar siempre dispuestos a compartir su conocimiento y recursos.

A mis directores de tesis, el Profesor Rodrigo Correa y el Profesor Herman Vargas, cuya guía experta y apoyo constante fueron cruciales en mi camino hacia la culminación de este grado. Su presencia fue una luz en momentos de duda, y su colaboración, la mejor herramienta para despejar el horizonte de mis inquietudes.

Tabla de contenido

	Pág.
Introducción	9
1 Objetivos	11
1.1 Objetivo General.....	11
1.2 Objetivos Específicos.....	11
2 Modelos Matemáticos	12
2.1 Ecuaciones de movimiento de Lagrange	12
2.1.1 Coordenadas generalizadas.....	13
2.1.2 Lagrangiano	14
2.1.3 Función de disipación de Rayleigh	14
3 Metodología	15
3.1 Abordaje de los Ejemplos	15
3.1.1 Ejemplo 1. Modelo Físico.....	16
3.1.2 Metodología para resolver circuitos por Euler Lagrange	25
3.1.3 Ejemplo 2: Modelo eléctrico	27
3.1.4 Ejemplo 3. Sistema Electromecánico.....	33
3.1.5 Resolución del ejemplo usando Matlab	39
4 Conclusiones.....	42
Referencias Bibliográficas	44
Apéndices.....	46

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1. Coordenadas generalizadas para un sistema con resorte.....	13
Figura 2. Bastón lanzado al aire.....	16
Figura 3. Script del bastón lanzado al aire	23
Figura 4. Circuito eléctrico RLC	27
Figura 5. Script circuito eléctrico	30
Figura 6. Motor eléctrico controlando un péndulo	33
Figura 7. Script de motor controlando un péndulo.	39

Lista de Apéndices

	Pág.
Apéndice A. lista de funciones de Matlab utilizadas.....	46
Apéndice B. Scripts utilizados a lo largo del documento.....	47

Resumen

Título: Modelado y simulación de sistemas eléctricos, mecánicos y electromecánicos con la ecuación de Euler-Lagrange.*

Autor: Juan Sebastián Victoria Romero**

Palabras Clave: Matlab, Sistemas, coordenadas generalizadas, lagrangiano, energía cinética y potencial.

Descripción: Esta tesis de ingeniería desarrollará un código en Matlab utilizando la ecuación de Euler-Lagrange para analizar y resolver problemas de diversos sistemas físicos simples. Este enfoque proporciona una alternativa más eficiente y elegante a los métodos tradicionales, como la formulación newtoniana de la mecánica.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar cómo la ecuación de Euler-Lagrange puede simplificar el modelado de sistemas físicos, permitiendo una comprensión más profunda de su comportamiento. Este enfoque tiene el potencial de abrir nuevas vías para la investigación y el desarrollo en el campo de la física teórica y la ingeniería.

Además, este proyecto no solo se limitará a la implementación del código, sino que también se centrará en su aplicación a problemas reales. Se presentan soluciones detalladas y análisis exhaustivos de los resultados obtenidos.

Finalmente, el código desarrollado y las soluciones obtenidas se presentarán en forma de un archivo ejecutable. Esto permitirá que otros investigadores y profesionales puedan utilizar y adaptar el código para sus propios proyectos, promoviendo así la colaboración y el intercambio de conocimientos en la comunidad científica.

En resumen, esta tesis se propone demostrar el poder y la versatilidad de la ecuación de Euler-Lagrange en la modelización de sistemas físicos, y cómo su implementación en Matlab puede facilitar y mejorar la investigación en ingeniería y física.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Eléctrica. Director Carlos Rodríguez Correa Cely. Codirector: Herman Raúl Vargas Torres

Abstract

Title: Modeling and Simulation of Electrical, Mechanical, and Electromechanical Systems Using the Euler-Lagrange Equation

Author: Juan Sebastián Victoria Romero

Keywords: Matlab, Systems, Generalized Coordinates, Lagrangian, Kinetic and Potential Energy

Description: This engineering thesis develops a Matlab code that uses the Euler-Lagrange equation to analyze and solve problems in various simple physical systems. This approach offers a more efficient and elegant alternative to traditional methods, such as the Newtonian formulation of mechanics.

The primary objective of this work is to demonstrate how the Euler-Lagrange equation can simplify the modeling of physical systems, enabling a deeper understanding of their behavior. This approach has the potential to open new avenues for research and development in the fields of theoretical physics and engineering.

Additionally, this project goes beyond the implementation of the code by focusing on its application to real-world problems. Detailed solutions and thorough analyses of the results obtained are presented.

Finally, the developed code and resulting solutions will be presented as an executable file. This will allow other researchers and professionals to use and adapt the code for their own projects, thereby promoting collaboration and knowledge exchange within the scientific community.

In summary, this thesis aims to demonstrate the power and versatility of the Euler-Lagrange equation in the modeling of physical systems and how its implementation in Matlab can facilitate and enhance research in engineering and physics.

* Degree Work

** Faculty of Physicomechanics. School of Electrical Engineering. Director Carlos Rodríguez Correa Cely. Co-director: Herman Raúl Vargas Torres

Introducción

La ingeniería, como disciplina, se basa en la capacidad de modelar y comprender sistemas complejos. Esto plantea la necesidad de herramientas que permitan analizar estos sistemas de manera eficiente y precisa. En este contexto, la ecuación de Euler-Lagrange se presenta como una solución poderosa, proporcionando un marco más elegante y práctico que las leyes de Newton para modelar sistemas físicos, especialmente en problemas con múltiples grados de libertad.

El presente trabajo desarrolla un código en Matlab que implementa la ecuación de Euler Lagrange para resolver problemas en sistemas físicos simples. Este enfoque facilita la formulación de ecuaciones de movimiento, optimizando el análisis y permitiendo construir modelos matemáticos robustos. Como resultado, el proyecto entrega un archivo ejecutable que puede ser utilizado por investigadores y profesionales para abordar desafíos similares.

Este proyecto tiene aplicaciones significativas en campos como la robótica, la automatización y la física, áreas donde el modelado preciso y eficiente es crucial. Además, esta metodología proporciona a los estudiantes herramientas que les permiten enfocarse en el análisis conceptual, reduciendo la complejidad de las derivaciones matemáticas y mejorando la comprensión de los sistemas dinámicos.

El objetivo principal es demostrar cómo la ecuación de Euler-Lagrange puede simplificar el modelado y la simulación de sistemas físicos, ofreciendo una alternativa eficiente a los métodos tradicionales. A su vez, este proyecto busca impactar en la formación académica, proporcionando conocimientos esenciales para cursos avanzados de control de sistemas eléctricos y abordando la carencia de asignaturas específicas en modelado dinámico.

En resumen, esta tesis no solo explora las capacidades de la ecuación de Euler-Lagrange, sino que también contribuye al aprendizaje práctico y al avance en la investigación aplicada en ingeniería.

1 Objetivos

1.1 Objetivo General

Diseñar e implementar una metodología para resolver sistemas utilizando algunas herramientas disponibles como un código en Matlab, en una serie de ejemplos ilustrativos que permita apreciar las ventajas y facilite a los estudiantes de ingeniería eléctrica adquirir algunos conocimientos básicos de modelado y simulación de sistemas eléctricos, mecánicos y electromecánicos.

1.2 Objetivos Específicos

1. Desarrollar códigos en MATLAB que se puedan utilizar para modelar circuitos eléctricos, mecánicos y electromecánicos utilizando la formulación de Euler-Lagrange.
2. Diseñar una metodología para construir el modelo matemático de un sistema utilizando MATLAB, de tal forma que construya la formulación de Euler-Lagrange para una situación en particular, y a partir del lagrangiano suministrado por el usuario.
3. Desarrollar numéricamente varios ejemplos ilustrativos sobre el uso de los programas propuestos.

2 Modelos Matemáticos

Para analizar un sistema dinámico, es importante realizar una descripción apropiada del modelo. Utilizar un modelo matemático adecuado, permite identificar los parámetros necesarios. En este proyecto se plantea un método eficiente y práctico para el análisis de varios modelos dinámicos. (Espinosa Bedoya & Gil parra, 2019)

2.1 Ecuaciones de movimiento de Lagrange

El modelado de sistemas se basa en los principios fundamentales de la ley de conservación de energía para derivar las ecuaciones de movimiento. Aunque este proceso es relativamente sencillo en sistemas simples, el método de Lagrange resulta más eficaz en sistemas con múltiples grados de libertad. En este contexto, es esencial definir las coordenadas generalizadas y la Lagrangiana para aplicar el principio de Hamilton.

A continuación, se presentan las ecuaciones y principios clave para implementar la ecuación de movimiento de Lagrange en un sistema no conservativo con una fuerza impulsora (Q_i). Esta ecuación también es aplicable a sistemas conservativos sin dicha fuerza.

La ecuación correcta es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

donde:

- L es la Lagrangiana del sistema,
- D es la función de disipación,
- Q_i es la fuerza impulsora,
- q_i y \dot{q}_i son las coordenadas generalizadas y sus derivadas temporales respectivamente.

Las ecuaciones proporcionadas por esta expresión son las ecuaciones de movimiento de Lagrange, fundamentales para el análisis y diseño de sistemas dinámicos.

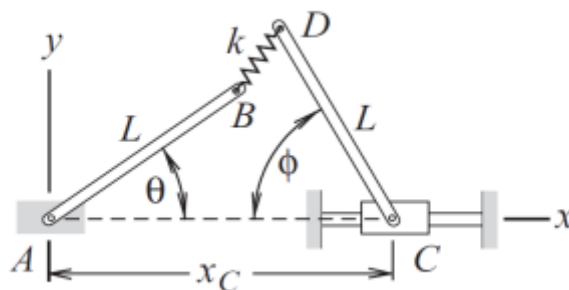
2.1.1 Coordenadas generalizadas

Las coordenadas generalizadas son un conjunto de parámetros independientes que se necesitan para describir completamente la dinámica de un sistema. El número de grados de libertad es igual al número de coordenadas generalizadas necesarias para describir el movimiento del sistema.

Si un sistema requiere n coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n , necesitamos considerar n coordenadas generalizadas como componentes del vector q en un espacio n -dimensional. Entonces, en cualquier instante, el sistema se caracteriza como un punto en este espacio n -dimensional (Ogata, 1987 p. 596). Por ejemplo, en el caso de un sistema de péndulo triple, las coordenadas generalizadas podrían incluir los ángulos que cada parte del péndulo forma con la vertical.

Figura 1.

Coordenadas generalizadas para un sistema con resorte



Nota. El sistema tiene tres grados de libertad que son (θ, Φ, x_C) que son igual al número de coordenadas generalizadas. Tomado de (Ginsberg, 2008)

2.1.2 Lagrangiano

El Lagrangiano es una función fundamental en la dinámica de sistemas. Se puede expresar de la siguiente manera:

Energía cinética del sistema - Energía potencial del sistema = Lagrangiano

El Lagrangiano (L) es una función general de las coordenadas q_i , sus derivadas con respecto al tiempo \dot{q}_i ($i=1, 2, \dots, n$), y el tiempo t. Este concepto es esencial para describir completamente el movimiento de un sistema.

Ecuación del Lagrangiano

$$\mathbf{L} = \mathbf{T} - \mathbf{U}, \quad (2)$$

donde:

- T es la energía cinética del sistema.
- U es la energía potencial.

2.1.3 Función de disipación de Rayleigh

En sistemas no conservativos, a menudo referidos como sistemas amortiguados, se produce una disipación de energía. Para cuantificar esta disipación, Rayleigh formuló una función de disipación (D) que puede ser utilizada para calcular la fuerza de amortiguamiento. Si consideramos un sistema que incluye r amortiguadores viscosos, la función de disipación se define de la siguiente manera:

$$D = \left(\frac{1}{2}\right) (b_1 \delta_1^2 + b_2 \delta_2^2 + \dots + b_r \delta_r^2) \quad (3)$$

Aquí:

- (b) representa la constante de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento viscoso.
- (δ) es la diferencia de velocidad. Por lo tanto, (δ) puede ser expresada como una función de las velocidades generalizadas (\dot{q}_i). (Ogata, 1987, p. 603)

3 Metodología

El propósito de esta metodología es guiar el modelado y simulación de sistemas eléctricos, mecánicos y electromecánicos, enfocándonos en la resolución manual inicial y la posterior verificación utilizando la biblioteca de MATLAB desarrollada por Mansour Torabi. Se presentarán tres ejemplos representativos: un ejercicio físico, uno electromecánico y otro eléctrico, cada uno acompañado de su respectiva figura ilustrativa.

3.1 Abordaje de los Ejemplos

Ejercicio Físico: Comenzaremos con la posición del sistema, avanzaremos hacia la determinación de la velocidad y, a partir de ahí, calcularemos la energía cinética y potencial.

Ejercicio Eléctrico: Proporcionaremos una introducción y las ecuaciones necesarias para el análisis por mallas y nodos.

Ejercicio Electromecánico: Integramos los conceptos de los ejercicios físico y eléctrico debido a la naturaleza combinada de este sistema.

Resolución Manual y Formulación de Ecuaciones Dinámicas Cada ejemplo se resolverá manualmente para llegar a las ecuaciones dinámicas pertinentes, estableciendo una base sólida para la comparación con los resultados obtenidos mediante MATLAB.

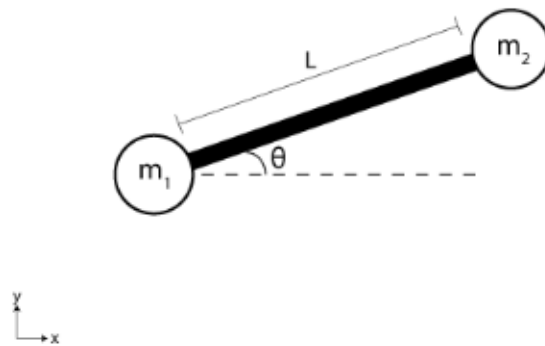
Aplicación de la Biblioteca de MATLAB utilizaremos la biblioteca, desarrollada por Mansour Torabi, para ingresar la energía cinética y potencial previamente calculadas y generar automáticamente las ecuaciones dinámicas del sistema. El enfoque de Torabi ejemplifica una aplicación avanzada del método de Lagrange utilizando notaciones simbólicas como 'D' y 'DD' para derivadas, y funciones de Matlab como syms y diff. Este método ha sido una referencia clave en el desarrollo de las soluciones propuestas en este estudio debido a su precisión y eficiencia en la manipulación de ecuaciones complejas.

Comparación y Análisis, para finalizar, compararemos los procedimientos manual y computacional, analizando las ventajas que ofrece cada uno en términos de precisión, eficiencia y aplicabilidad en diferentes escenarios.

3.1.1 Ejemplo 1. Modelo Físico.

Figura 2.

Bastón lanzado al aire



Nota. Adaptado de *Solve Equations of Motion for Baton* por MathWorks (s.f.), disponible en (<https://www.mathworks.com/help/matlab/math/solve-equations-of-motion-for-baton.html>.)

Copyright pertenece a MathWorks.

Primero resolveremos el modelo de un bastón lanzado al aire manualmente, con una fuerza inicial \mathbf{F} aplicada verticalmente. Asumimos que las masas del bastón m_1 y m_2 , varían en el tiempo, representadas con una función decreciente Euler

$$m_1(t) = M_1 e^{-bt}; \quad m_2(t) = M_2 e^{-kt}$$

Establecemos un sistema de coordenadas X y Y. para determinar la posición y la velocidad de cada centro de masa.

Para la posición tenemos:

$$P1 = (X, Y); \quad P2 = (X + L \cos \theta, Y + L \sin \theta);$$

Derivamos estas ecuaciones para obtener la velocidad

$$V1 = (\dot{X}, \dot{Y}); \quad V2 = (\dot{X} - \dot{\theta} L \sin \theta, \dot{Y} + \dot{\theta} L \cos \theta);$$

Con la velocidad, podemos definir la energía cinética T y la energía potencial U, la energía cinética es:

$$T1 = \frac{1}{2} m_1(t) V1^2 = \frac{1}{2} m_1(t) (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)$$

$$T2 = \frac{1}{2} m_2(t) V2^2 = \frac{1}{2} m_2(t) ((\dot{X} - \dot{\theta} L \sin \theta)^2 + (\dot{Y} + \dot{\theta} L \cos \theta)^2)$$

Energía cinética total T, es la suma de T1 y T2:

$$T = T1 + T2 = \frac{1}{2} m_1(t) (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2} m_2(t) ((\dot{X} - \dot{\theta} L \sin \theta)^2 + (\dot{Y} + \dot{\theta} L \cos \theta)^2) \quad (4)$$

La energía potencial U, depende de la altura, la masa y la gravedad:

$$\begin{aligned} U &= m_1(t) * g * Y + m_2(t) * g * (Y + L \sin \theta) = m_1(t) * g * Y + m_2(t) * g * Y + m_2(t) * g * L \sin \theta \\ &= g * Y * (m_1(t) + m_2(t)) + m_2(t) * g * (L \sin \theta) \quad (5) \end{aligned}$$

Con la energía cinética y potencial, definimos el lagrangiano del Sistema:

$$L = T - U$$

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}m_1(t)(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}m_2(t)((\dot{X} - \dot{\theta}L \sin \theta)^2 + (\dot{Y} + \dot{\theta}L \cos \theta)^2) - m_1(t) * g * Y \\ & - m_2(t) * g * Y - m_2(t) * g * (L \sin \theta) \quad (6) \end{aligned}$$

Remplazamos los valores de las masas:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}M_1e^{-bt}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}M_2e^{-kt}((\dot{X} - \dot{\theta}L \sin \theta)^2 + (\dot{Y} + \dot{\theta}L \cos \theta)^2) - M_1e^{-bt} * g * \\ & Y - M_2e^{-kt} * g * Y - M_2e^{-kt} * g * (L \sin \theta) . \end{aligned}$$

Definimos la función de disipación de Rayleigh, representada por la fricción del aire:

$$D = \frac{1}{2}CV^2$$

Donde V es la velocidad y C el coeficiente de fricción

Entonces remplazamos:

$$D = \frac{1}{2}C(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + (\dot{X} - \dot{\theta}L \sin \theta)^2 + (\dot{Y} + \dot{\theta}L \cos \theta)^2)$$

Procedemos con las derivadas parciales para cada coordenada generalizada, para θ :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dq} = \frac{dL}{d\theta} &= \frac{1}{2}M_2e^{-kt}[2(\dot{X} - \dot{\theta}L \sin \theta) * (-\dot{\theta}L \cos \theta) + 2(\dot{Y} + \dot{\theta}L \cos \theta) * (-\dot{\theta}L \sin \theta)] \\ & - M_2e^{-kt} * g * L \cos \theta \\ &= M_2e^{-kt}[-\dot{X}\dot{\theta}L \cos \theta + \dot{\theta}^2L^2 \sin \theta * \cos \theta - \dot{Y}\dot{\theta}L \sin \theta - \dot{\theta}^2L^2 \sin \theta * \cos \theta - gL \cos \theta] \\ &= M_2Le^{-kt}[-\dot{X}\dot{\theta} \cos \theta - \dot{Y}\dot{\theta} \sin \theta - g \cos \theta] \end{aligned}$$

Derivamos el lagrangiano respecto a la primera derivada $\dot{\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{q}} = \frac{dL}{d\dot{\theta}} &= \frac{1}{2}M_2e^{-kt}[2(\dot{X} - \dot{\theta}L \sin \theta) * (-L \sin \theta) + 2(\dot{Y} + \dot{\theta}L \cos \theta) * (L \cos \theta)] \\ &= M_2e^{-kt}[-\dot{X}L \sin \theta + \dot{\theta}L^2 \sin \theta^2 + \dot{Y}L \cos \theta + \dot{\theta}L^2 \cos \theta^2] \\ &|= M_2e^{-kt}[-\dot{X}L \sin \theta + \dot{Y}L \cos \theta + \dot{\theta}L^2 (\cos \theta^2 + \sin \theta^2)] \\ &= M_2e^{-kt}[-\dot{X}L \sin \theta + \dot{Y}L \cos \theta + \dot{\theta}L^2] \end{aligned}$$

Multiplicamos la ecuación anterior y derivamos con respecto al tiempo, aplicamos la regla del producto y de la cadena:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}} &= \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}} = -M_2 e^{-kt} \dot{X} L \sin \theta + M_2 e^{-kt} \dot{Y} L \cos \theta + M_2 e^{-kt} \dot{\theta} L^2 \\
&= -M_2 L [-k e^{-kt} \dot{X} \sin \theta + e^{-kt} \ddot{X} \sin \theta + e^{-kt} \dot{X} \cos \theta * \dot{\theta}] + M_2 L [-k e^{-kt} \dot{Y} \cos \theta \\
&\quad + e^{-kt} \ddot{Y} \cos \theta + e^{-kt} \dot{Y} (-\sin \theta) * \dot{\theta}] + M_2 L^2 [-k e^{-kt} \dot{\theta} + e^{-kt} \ddot{\theta}] \\
&= M_2 L e^{-kt} [k \dot{X} \sin \theta - \ddot{X} \sin \theta - \dot{X} \dot{\theta} \cos \theta - k \dot{Y} \cos \theta + \ddot{Y} \cos \theta - \dot{Y} \dot{\theta} \sin \theta - k L \dot{\theta} \\
&\quad + L \ddot{\theta}]
\end{aligned}$$

Ahora procedemos a derivar la ecuación de disipación de Rayleigh con respecto a la derivada de la coordenada generalizada θ

$$\begin{aligned}
\frac{dD}{d\dot{\theta}} &= \frac{1}{2} c [2(\dot{X} - \dot{\theta} L \sin \theta)(-L \sin \theta) + 2(\dot{Y} + \dot{\theta} L \cos \theta)(L \cos \theta)] \\
&= c [-X L \sin \theta + \dot{\theta} L^2 \sin^2 \theta + \dot{Y} L \cos \theta + \dot{\theta} L^2 \cos^2 \theta] \\
&= c [\dot{Y} L \cos \theta - X L \sin \theta + \dot{\theta} L^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)] \\
&= c [\dot{Y} L \cos \theta - X L \sin \theta + \dot{\theta} L^2]
\end{aligned}$$

Con todos los términos obtenidos, procedemos a hallar la ecuación dinámica para la coordenada θ

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} + \frac{dD}{d\dot{\theta}} &= M_2 L e^{-kt} [k \dot{X} \sin \theta - \ddot{X} \sin \theta - \dot{X} \dot{\theta} \cos \theta - k \dot{Y} \cos \theta + \ddot{Y} \cos \theta \\
&\quad - \dot{Y} \dot{\theta} \sin \theta - k L \dot{\theta} + L \ddot{\theta}] - M_2 L e^{-kt} [-\dot{X} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{Y} \dot{\theta} \sin \theta - g \cos \theta] \\
&\quad + c [\dot{Y} L \cos \theta - X L \sin \theta + \dot{\theta} L^2] \\
&= M_2 L e^{-kt} [k \dot{X} \sin \theta - \ddot{X} \sin \theta - \dot{X} \dot{\theta} \cos \theta - k \dot{Y} \cos \theta + \ddot{Y} \cos \theta - \dot{Y} \dot{\theta} \sin \theta \\
&\quad - k L \dot{\theta} + L \ddot{\theta} + \dot{X} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{Y} \dot{\theta} \sin \theta + g \cos \theta] + c [\dot{Y} L \cos \theta \\
&\quad - X L \sin \theta + \dot{\theta} L^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= M_2 L e^{-kt} [k\dot{X} \sin \theta - \ddot{X} \sin \theta - k\dot{Y} \cos \theta + \ddot{Y} \cos \theta - kL\dot{\theta} + L\ddot{\theta} + g \cos \theta] + \\
 &\quad c[\dot{Y}L \cos \theta - XL \sin \theta + \dot{\theta}L^2] \quad (7)
 \end{aligned}$$

Para la siguiente coordenada X

$$\frac{dL}{dq} = \frac{dL}{dX} = 0$$

Derivamos el lagrangiano respecto a la primera derivada \dot{X}

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{d\dot{q}} &= \frac{dL}{d\dot{X}} = \frac{1}{2} M_1 e^{-bt} (2\dot{X}) + \frac{1}{2} M_2 e^{-kt} [2(\dot{X} - \dot{\theta}L \sin \theta)] \\
 &= M_1 e^{-bt} (\dot{X}) + M_2 e^{-kt} [(\dot{X} - \dot{\theta}L \sin \theta)] \\
 &= M_1 \dot{X} e^{-bt} + M_2 \dot{X} e^{-kt} - M_2 L \dot{\theta} e^{-kt} \sin \theta
 \end{aligned}$$

Al derivar respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}} &= \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{X}} = M_1 [\ddot{X} e^{-bt} - b\dot{X} e^{-bt}] + M_2 [\ddot{X} e^{-kt} - k\dot{X} e^{-kt}] \\
 &\quad - M_2 L [-k\dot{\theta} e^{-kt} \sin \theta + \ddot{\theta} e^{-kt} \sin \theta + \dot{\theta} e^{-kt} \cos \theta * (\dot{\theta})] \\
 &= M_1 e^{-bt} [\ddot{X} - b\dot{X}] + M_2 e^{-kt} [\ddot{X} - k\dot{X}] + M_2 L e^{-kt} [k\dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 e^{-kt} \cos \theta]
 \end{aligned}$$

Para D:

$$\frac{dD}{d\dot{X}} = \frac{1}{2} c [2(\dot{X})(1) + 2(\dot{X} - \dot{\theta}L \sin \theta)(1)] = c [2\dot{X} - \dot{\theta}L \sin \theta]$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{X}} \right) - \frac{dL}{dX} + \frac{dD}{d\dot{X}} &= M_1 e^{-bt} [\ddot{X} - b\dot{X}] + M_2 e^{-kt} [\ddot{X} - k\dot{X}] \\
 &\quad + M_2 L e^{-kt} [k\dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 e^{-kt} \cos \theta] + c [2\dot{X} - \dot{\theta}L \sin \theta] \\
 &= M_1 e^{-bt} [\ddot{X} - b\dot{X}] + M_2 e^{-kt} [\ddot{X} - k\dot{X}] + M_2 L e^{-kt} [k\dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 e^{-kt} \cos \theta] \\
 &\quad + c [2\dot{X} - \dot{\theta}L \sin \theta] \quad (8)
 \end{aligned}$$

Para la coordenada Y

$$\frac{dL}{dq} = \frac{dL}{dY} = -M_1 e^{-bt} g - M_2 e^{-kt} g = -g(M_1 e^{-bt} + M_2 e^{-kt})$$

Derivamos el lagrangiano respecto a la primera derivada \dot{Y}

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{q}} &= \frac{dL}{d\dot{Y}} = \frac{1}{2} M_1 e^{-bt} (2\dot{Y}) + \frac{1}{2} M_2 e^{-kt} [2(\dot{Y} + \dot{\theta} L \cos \theta)] \\ &= M_1 \dot{Y} e^{-bt} + M_2 \dot{Y} e^{-kt} + M_2 L e^{-kt} \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

Al derivar respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}} &= \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{Y}} = M_1 (-b e^{-bt} \dot{Y} + \ddot{Y} e^{-bt}) + M_2 (-k e^{-kt} \dot{Y} + \ddot{Y} e^{-kt}) \\ &+ M_2 L [-K e^{-kt} \dot{\theta} \cos \theta + e^{-kt} \ddot{\theta} \cos \theta + e^{-kt} \dot{\theta} (-\sin \theta (\dot{\theta}))] \\ &= M_1 e^{-bt} (\ddot{Y} - b \dot{Y}) + M_2 e^{-kt} (\ddot{Y} - k \dot{Y}) \\ &+ M_2 L e^{-kt} [\ddot{\theta} \cos \theta - K \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta] \end{aligned}$$

Para D:

$$\frac{dD}{d\dot{q}} = \frac{dD}{d\dot{Y}} = \frac{1}{2} c [2(\dot{Y})(1) + 2(\dot{Y} + \dot{\theta} L \cos \theta)(1)] = c [2\dot{Y} + \dot{\theta} L \sin \theta]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{Y}} - \frac{dL}{dY} + \frac{dD}{d\dot{Y}} &= M_1 e^{-bt} (\ddot{Y} - b \dot{Y} + g) + M_2 e^{-kt} (\ddot{Y} - k \dot{Y} + g) \\ &+ M_2 L e^{-kt} [\ddot{\theta} \cos \theta - K \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta] + \\ &c [2\dot{Y} + \dot{\theta} L \sin \theta] \end{aligned}$$

Dado que actúa una fuerza F verticalmente, esto se representada en la coordenada Y.

Utilizamos la ecuación de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{Y}} - \frac{dL}{dY} + \frac{dD}{d\dot{Y}} = F$$

Entonces la ecuación dinámica para la coordenada Y queda:

$$M_1 e^{-bt} (\ddot{Y} - b\dot{Y} + g) + M_2 e^{-kt} (\ddot{Y} - k\dot{Y} + g) + M_2 L e^{-kt} [\ddot{\theta} \cos \theta - K \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta] + c [2\dot{Y} + \dot{\theta} L \sin \theta] = F \quad (9)$$

Estas tres ecuaciones definen el comportamiento del sistema.

Ahora procedemos a hallar las ecuaciones dinámicas utilizando la biblioteca de Matlab de Mansour Torabi.

1. Definición de Variables: Utilizamos la función syms de Matlab, definimos las coordenadas generalizadas, sus derivadas y todas las constantes del sistema.

2. Cálculo de Velocidades: Establecemos la velocidad de cada centro de masa, basándonos en su posición.

3. Funciones de Masa: Representamos la variación de cada masa con una exponencial decreciente con coeficientes distintos.

4. Energía Cinética: Formulamos la ecuación de la energía cinética usando las velocidades previamente definidas.

5. Energía Potencial: Introducimos la ecuación de la energía potencial, basada en la altura de cada centro de masa.

6. Lagrangiano: Definimos el lagrangiano como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial.

7. Función de Disipación de Rayleigh: Modelamos la fricción con el aire, proporcional al cuadrado de la velocidad con un coeficiente c.

8. Vectores de Coordenadas y Derivadas: Definimos el vector q para las coordenadas generalizadas y el vector D_q para sus primeras derivadas.

9. Vector de Fuerzas Actuantes: Definimos el vector q_F , que representa las coordenadas en las que actúa la fuerza del sistema.

10. Vector de Fuerzas: Finalmente, definimos el vector F , que incluye el valor de la fuerza que actúa en el sistema.

Figura 3.

Script del bastón lanzado al aire

```
syms th Dth x Dx y Dy % Definicion de las coordenadas generalizadas
syms l g t M1 M2 b k F_y c % Definicion de parametros simbolicos

% Velocidades de los centros de masa
V1 = (Dx)^2 +(Dy)^2; % Centro de masa 1
V2 = (Dx - l*Dth*sin(th))^2 + (Dy + l*Dth*cos(th))^2; % Centro de masa 2

% Masas decrecientes en el tiempo
m1=M1*exp(-b*t); % masa 1
m2=M2*exp(-k*t); % masa 2

T = 1/2*(m1*V1) + 1/2*(m2*V2); % Energia Cinetica
V = m1*g*y + m2*g*(y +l*sin(th)); % Energia Potencial

L = T - V; % Lagangriano

G=1/2*c*(V1+V2); %funcion de disipacion de Rayleith (friccion)

% Coordenadas generalizadas y sus derivadas
q = [th, x, y];
Dq = [Dth, Dx, Dy];

q_F = [0, 0, y]; % Coordenadas en las que aparecen fuerzas

F = [0, 0, F_y]; % Fuerzas que actuan en cada respectiva coordenada

% Derivar ecuaciones de movimiento usando Lagrange
Eq = LagrangeDynamicEqDeriver(L, G, q, Dq, F, q_F);
```

Nota. Script modificado para el desarrollo del ejemplo. El código mostrado se basa en una adaptación del trabajo original de Mansour Torabi (MATLAB Euler-Lagrange Library), disponible en (<https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/86563-matlab-euler->

lagrange-library?s_tid=prof_contriblnk.) Las modificaciones realizadas incluyen adaptaciones para los sistemas físicos presentados en esta tesis.

La función LagrangeDynamicEqDeriver, desarrollada por Mansour Torabi, es una herramienta poderosa para el análisis de sistemas dinámicos. Esta función utiliza los siguientes componentes:

1. Lagrangiano: Diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema.
2. Función de Disipación de Rayleigh: Modela la pérdida de energía, como la fricción con el aire.
3. Vectores clave: El vector de coordenadas generalizadas y sus derivadas, vector de fuerza y el que indica la coordenada donde se aplica la fuerza.

Con estos componentes, LagrangeDynamicEqDeriver genera las ecuaciones dinámicas del sistema, fundamentales para entender y predecir su comportamiento.

1. $1 * \exp(-k * t) * (DDth * M2 * 1 + DDy * M2 * \cos(th) - DDx * M2 * \sin(th) + M2 * g * \cos(th) + Dth * c * 1 * \exp(k * t) - Dy * M2 * k * \cos(th) + Dx * M2 * k * \sin(th) + Dy * c * \exp(k * t) * \cos(th) - Dx * c * \exp(k * t) * \sin(th) - Dth * M2 * k * 1 - Dth * Dx * c * \exp(k * t) * \cos(th) - Dth * Dy * c * \exp(k * t) * \sin(th))$
2. $2 * Dx * c + DDx * M1 * \exp(-b * t) + DDx * M2 * \exp(-k * t) - Dth * c * 1 * \sin(th) - Dx * M1 * b * \exp(b * t) - Dx * M2 * k * \exp(-k * t) - Dth^2 * M2 * 1 * \exp(-k * t) * \cos(th) - DDth * M2 * 1 * \exp(k * t) * \sin(th) + Dth * M2 * k * 1 * \exp(-k * t) * \sin(th)$
3. $2 * Dy * c - F_y + DDy * M1 * \exp(-b * t) + DDy * M2 * \exp(-k * t) + M1 * g * \exp(-b * t) + M2 * g * \exp(-k * t) + Dth * c * 1 * \cos(th) - Dy * M1 * b * \exp(-b * t) - Dy * M2 * k * \exp(-k * t) - Dth^2 * M2 * 1 * \exp(-k * t) * \sin(th) + DDth * M2 * 1 * \exp(-k * t) * \cos(th) - Dth * M2 * k * 1 * \exp(-k * t) * \cos(th)$

Nota: $Dx = \dot{X}$; $DDx = \ddot{X}$ notación para primera y segunda derivada coordenada X.

Las respuestas generadas por MATLAB coinciden con las obtenidas manualmente en las ecuaciones (7),(8) y (9), aunque la presentación puede variar. El uso de este código simplifica el cálculo de las derivadas, que es una de las partes más tediosa del desarrollo.

Es importante notar que, aunque estos cálculos son esenciales, no profundizan en la comprensión del modelado en sí. La complejidad del sistema puede aumentar con más grados de libertad o con elementos que varían con el tiempo. Por ejemplo, la masa podría representar un material que se oxida y se desgasta con el tiempo, proporcionando un enfoque más realista al modelado.

En resumen, el uso de MATLAB ahorrar tiempo, reduce la complejidad y permite un enfoque más realista en el modelado.

3.1.2 Metodología para resolver circuitos por Euler Lagrange

El análisis para resolver circuitos varía según el método aplicado: nodos o mallas.

1. Análisis por nodos se usan las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}^* - \mathbf{T} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\lambda}_j} \right) - \frac{dL}{d\lambda_j} + \frac{dJ}{d\lambda_j} = I_j, \quad (10)$$

donde:

\mathbf{L} representa el lagrangiano del sistema

I_j es la fuente de corriente generalizada al j-esimo enlace

λ_j representa el j-esimo nodo seleccionado

$$\mathbf{U}^* = \frac{1}{2} C_j \dot{\lambda}_j^2 \quad (11) \quad \mathbf{U}^* \text{ es la energía co- capacitiva total}$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2L_j} \lambda_j^2 \quad (12) \quad \mathbf{T} \text{ es la energía inductiva total}$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2R_j} \dot{\lambda}_j^2 \quad (13) \quad \mathbf{J} \text{ es el co- contenido total de resistores}$$

2. Análisis por mallas

$$L^* = \mathbf{T}^* - \mathbf{U} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dL^*}{d\dot{Q}_j} \right) - \frac{dL^*}{dQ_j} + \frac{dG}{dQ_j} = V_j, \quad (14)$$

donde:

L^* representa el co-lagrangiano del sistema

V_j es la fuente de tensión generalizada al j-esimo malla

Q_j representa la j-esima malla

$$\mathbf{T}^* = \frac{1}{2} L_j \dot{Q}_j^2 \quad (15) \quad \mathbf{T}^* \text{ es la co-energía inductiva total}$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2c_j} Q_j^2 \quad (16) \quad \mathbf{U} \text{ es la energía capacitiva total}$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} R_j \dot{Q}_j^2 \quad (17) \quad \mathbf{G} \text{ es el contenido energético total del sistema}$$

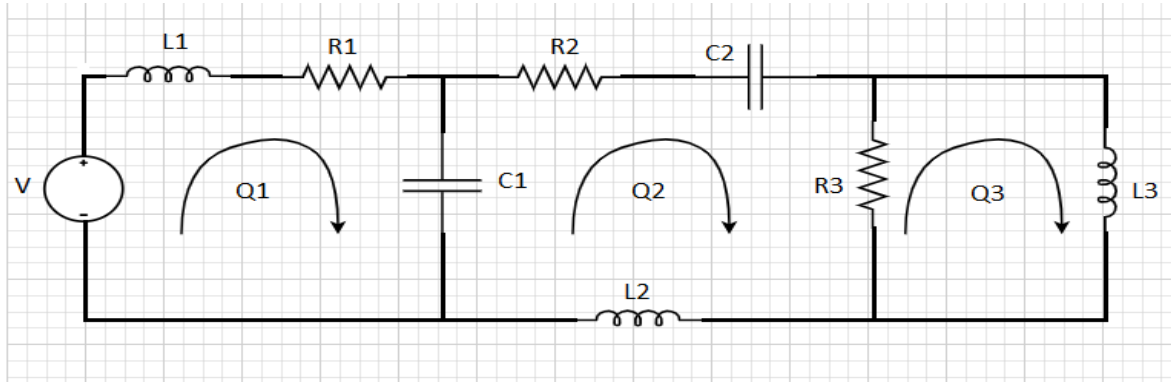
Este análisis asume que las ecuaciones involucran elementos lineales e invariantes en el tiempo. De lo contrario, se necesita una representación matemática más general para reflejar dicha no linealidad.

Es crucial seleccionar el método adecuado para evitar esfuerzos innecesarios y prolongados. Si hay muchas mallas interconectadas en un nodo, se recomienda el método variacional nodal. Si hay muchos elementos interconectados, es preferible el método de mallas, dado que la conexión de dos o más elementos en un solo punto crea un nodo y cada nodo sin restricción genera una ecuación. (Zúñiga Aguilar, C. J. (2019). Modelado de circuitos por método E-L (Documento No. 245896248). Modelado de Sistemas físicos [Documento académico]. <https://es.scribd.com/document/245896248/Modelado-de-Circuitos-Euler-Lagrange#>)

3.1.3 Ejemplo 2: Modelo eléctrico

Figura 4.

Circuito eléctrico RLC



Nota. Circuito eléctrico realizado mediante Circuit Diagram (<https://www.circuit-diagram.org/editor/>)

Para resolver este circuito, se empleará el análisis por mallas debido a la presencia de múltiples elementos interconectados. El uso del análisis nodal resultaría en un mayor número de ecuaciones, prolongando el trabajo innecesariamente.

Consideramos un elemento del circuito como un micrófono capacitivo, modelado como una capacitancia variable $c_1 = C1e^{-kt}$ (ver ecuación 22).

Aplicando las fórmulas para el análisis de mallas, tenemos:

La co-energía inductiva total es:

$$T^* = \frac{1}{2}L1\dot{Q}1^2 + \frac{1}{2}L2\dot{Q}2^2 + \frac{1}{2}L3\dot{Q}3^2 \quad (18)$$

La energía capacitiva total es:

$$U = \frac{1}{2c1}(Q1 - Q2)^2 + \frac{1}{2c2}Q2^2 \quad (19)$$

Contenido Energético del sistema es:

$$G = \frac{1}{2}R1\dot{Q}1^2 + \frac{1}{2}R2\dot{Q}2^2 + \frac{1}{2}R3(\dot{Q}2 - \dot{Q}3)^2 \quad (20)$$

Para el co-lagrangiano, formulamos:

$$L^* = T^* - U$$

$$L^* = \frac{1}{2}L_1\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{Q}_2^2 + \frac{1}{2}L_3\dot{Q}_3^2 - \frac{1}{2c_1}(Q_1 - Q_2)^2 - \frac{1}{2c_2}Q_2^2 \quad (21)$$

Incluimos el efecto de la capacitancia variable, reemplazando c_1 , nos queda:

$$L^* = \frac{1}{2}L_1\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{Q}_2^2 + \frac{1}{2}L_3\dot{Q}_3^2 - \frac{1}{2c_1e^{-kt}}(Q_1 - Q_2)^2 - \frac{1}{2c_2}Q_2^2 \quad (22)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para este análisis es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL^*}{d\dot{Q}_j} \right) - \frac{dL^*}{dQ_j} + \frac{dG}{d\dot{Q}_j} = V_j$$

Aplicamos la derivación parcial para cada término, usando la regla de la cadena.

Para la coordenada generalizada Q_1 tenemos:

Derivada del co-lagrangiano con respecto a Q_1 :

$$\frac{dL^*}{dQ_1} = -\frac{1}{2c_1e^{-kt}} * 2(Q_1 - Q_2) * (1) = -c_1^{-1}e^{kt}(Q_1 - Q_2)$$

Derivada del co-lagrangiano con respecto a la primera derivada \dot{Q}_1

$$\frac{dL^*}{d\dot{Q}_1} = \frac{1}{2}L_1 * 2 * \dot{Q}_1 * (1) = L_1\dot{Q}_1$$

Ahora, derivamos este término con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL^*}{d\dot{Q}_1} \right) = L_1\ddot{Q}_1$$

Derivamos el contenido energético del sistema con respecto a \dot{Q}_1 :

$$\frac{dG}{d\dot{Q}_1} = \frac{1}{2}R_1 * 2 * \dot{Q}_1 = R_1\dot{Q}_1$$

Dado que la fuente de voltaje está en el recorrido de la malla en el circuito, la coordenada generalizada Q_1 debe ser igual a este voltaje, ya que representa la fuerza actuante en el sistema para esta coordenada.

Teniendo todos los términos de la ecuación de Euler-Lagrange, remplazamos para obtener la ecuación dinámica para la coordenada generalizada Q1:

$$L1\ddot{Q}1 + C1^{-1}e^{Kt}(Q1 - Q2) + R1\dot{Q}1 = Voltaje \quad (23)$$

Seguimos el mismo procedimiento realizado con anterioridad para las demás coordenadas generalizadas.

Para Q2:

Derivada del co-lagrangiano con respecto a Q2:

$$\begin{aligned} \frac{dL^*}{dQ_2} &= -\frac{1}{2C1} * 2 * (Q1 - Q2) * (-1) - \frac{1}{2C2} * 2 * Q2 \\ &= \frac{1}{C1e^{-Kt}}(Q1 - Q2) - \frac{1}{C2}Q2 \\ &= C1^{-1}e^{Kt}(Q1 - Q2) - C2^{-1}Q2 \end{aligned}$$

Derivada del co-lagrangiano con respecto a la primera derivada $\dot{Q}2$

$$\frac{dL^*}{d\dot{Q}_2} = \frac{1}{2}L2 * 2 * \dot{Q}2 = L2\dot{Q}2$$

Ahora, derivamos este término con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL^*}{d\dot{Q}_2} \right) = L2\ddot{Q}2$$

Derivamos el contenido energético del sistema con respecto a $\dot{Q}2$:

$$\frac{dG}{d\dot{Q}_2} = R2\dot{Q}2 + R3(\dot{Q}2 - \dot{Q}3) = \dot{Q}2(R2 + R3) - \dot{Q}3R3$$

Remplazando los términos de la ecuación dinámica nos queda:

$$L2\ddot{Q}2 - (C1^{-1}e^{Kt}(Q1 - Q2) - C2^{-1}Q2) + \dot{Q}2(R2 + R3) - \dot{Q}3R3 = 0$$

Multiplicando por el signo menos tenemos:

$$L2\ddot{Q}2 + C2^{-1}Q2 - C1^{-1}e^{Kt}(Q1 - Q2) + \dot{Q}2(R2 + R3) - \dot{Q}3R3 = 0 \quad (24)$$

Ahora para Q3 entonces:

$$\frac{dL^*}{dQ_3} = 0$$

$$\frac{dL^*}{dQ_1} = L_3 \dot{Q}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL^*}{d\dot{Q}_1} \right) = L_3 \dot{Q}_3$$

$$\frac{dG}{d\dot{Q}_1} = -R_3(\dot{Q}_2 - \dot{Q}_3)$$

Luego reemplazando tenemos:

$$L_3 \ddot{Q}_3 - R_3(\dot{Q}_2 - \dot{Q}_3) = 0 \quad (25)$$

Estas son las 3 ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento de este sistema.

Ahora, igual que para el primer ejemplo utilizaremos la biblioteca de Mansour Torabi.

Figura 5.

Script circuito eléctrico

```
% Definición de las variables simbólicas
syms Q1 DQ1 Q2 DQ2 Q3 DQ3 %Coordenadas generalizadas y sus derivadas
syms L1 L2 L3 R1 R2 R3 C1 C2 k t %Constantes del sistema
syms Voltaje % Fuerzas externa

c1=C1*exp(-k*t); % Capacitancia variable decreciente en el tiempo

% Energia Co-inductiva total
T = 1/2*(L1*(DQ1)^2) + 1/2*(L2*(DQ2)^2) + 1/2*(L3*(DQ3)^2);

V = 1/(2*c1)*(Q1-Q2)^2 + 1/(2*C2)*Q2^2; % Energia Capacitiva

L = T - V; % Lagangriano

%Contenido energetico del sistema
G = 1/2*(R1*(DQ1)^2) + 1/2*(R2*(DQ2)^2) + 1/2*(R3*(DQ2-DQ3)^2);

%Cordenadas generalizadas y sus derivadas
q = [Q1, Q2, Q3]; Dq = [DQ1, DQ2, DQ3];

q_F = [Q1, 0]; % Coordenadas con fuerza aplicada

F = [Voltaje, 0]; % Fuerzas aplicada

% Derivar ecuaciones de movimiento usando Lagrange
Eq = LagrangeDynamicEqDeriver(L, G, q, Dq, F, q_F);
```

Nota. Script modificado para el desarrollo del ejemplo. El código mostrado se basa en una adaptación del trabajo original de Mansour Torabi (MATLAB Euler-Lagrange Library), disponible en (https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/86563-matlab-euler-lagrange-library?s_tid=prof_contriblnk.) Las modificaciones realizadas incluyen adaptaciones para los sistemas físicos presentados en esta tesis.

1. Definición de variables: Define las variables que representan las cantidades físicas de tu sistema: cargas (Q_1, Q_2, Q_3), sus derivadas (DQ_1, DQ_2, DQ_3), inductancias (L_1, L_2, L_3), resistencias (R_1, R_2, R_3) y capacitancias (C_1, C_2). Introducimos la constante k y la variable t para el tiempo. Definir cualquier fuerza externa, en este caso, el voltaje.

2. Definición de la función: Definimos cómo cambia la capacitancia c_1 en el tiempo, representada con una exponencial decreciente con un factor k .

3. Cálculo de energía: Introduce manualmente la energía co-inductiva total (energía cinética) y la energía capacitiva (energía potencial) del sistema en el código.

4. Cálculo del Lagrangiano: El código calcula el Lagrangiano como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial.

5. Cálculo del contenido energético: Este se calcula manualmente con la definición previamente mostrada y se introduce en el código.

6. Definición de vectores de coordenadas: Procede a escribir el vector de coordenadas generalizadas y el vector de sus respectivas primeras derivadas.

7. Definición de vector q_F : Define un vector llamado $q_F = [Q_1, 0]$, que indica las coordenadas generalizadas a las que se aplica la fuerza externa.

8. Definición de vector F: Define el vector $F = [\text{Voltaje}, 0]$, donde Voltaje es la fuerza externa, el cero se debe a que no hay más fuerzas que actúen sobre el sistema, en caso contrario se deben introducir.

9. Derivación de ecuaciones de movimiento utiliza la función “LagrangeDynamicEqDeriver” para derivar las ecuaciones de movimiento a partir del Lagrangiano y el contenido energético del sistema. Debes proporcionar las coordenadas generalizadas (q), sus derivadas (Dq), las fuerzas externas (F) y las coordenadas a las que se aplican estas fuerzas (q_F).

10. Ejecución del código: Una vez definidas todas las variables y sus valores, ejecuta el código. Esto te proporcionará las ecuaciones de movimiento del sistema.

11. Interpretación de los resultados: Se interpretan los resultados del código según el vector de coordenadas generalizadas, es decir la primera ecuación representa la primera coordenada escrita en el vector, cada ecuación se iguala a cero:

$$Eq = [Q1, Q2, Q3]$$

Eq =

$$\begin{aligned} & DDQ1*L1 - \text{Voltaje} + DQ1*R1 + (Q1*\exp(k*t))/C1 - (Q2*\exp(k*t))/C1 \\ Q2/C2 + DDQ2*L2 + DQ2*R2 + DQ2*R3 - DQ3*R3 - (Q1*\exp(k*t))/C1 + (Q2*\exp(k*t))/C1 \\ & DDQ3*L3 - DQ2*R3 + DQ3*R3 \end{aligned}$$

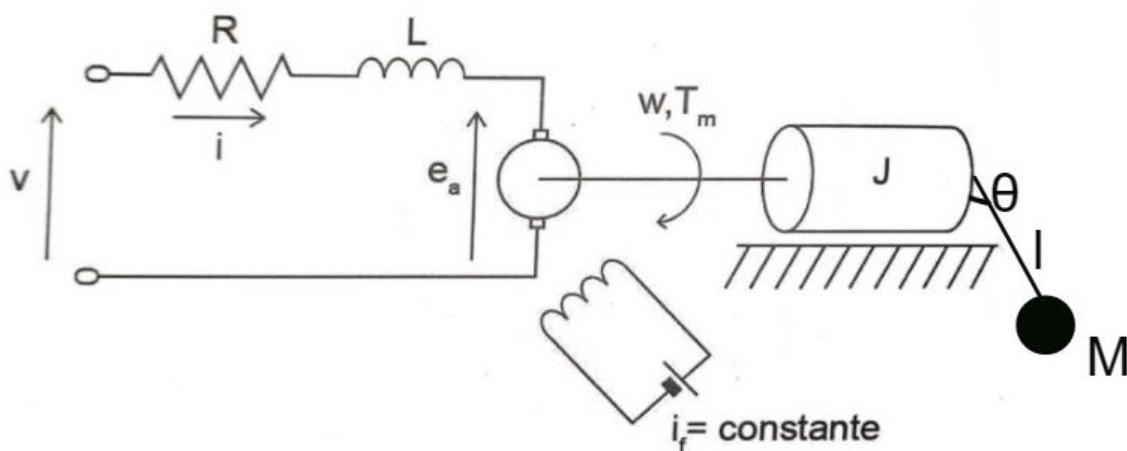
Como en el ejemplo previo, las respuestas coinciden con las obtenidas manualmente en las ecuaciones (23),(24) y (25) variando solo en su organización. En este caso, se realizó un ajuste menor al código para incorporar elementos disipadores de energía y una fuerza de entrada. Esto requirió modificar la función “LagrangeDynamicEqDeriver”.

3.1.4 Ejemplo 3. Sistema Electromecánico.

Analizaremos un motor eléctrico que controla el movimiento de un péndulo. Este sistema electromecánico puede ser estudiado utilizando la ecuación de Euler-Lagrange para derivar las ecuaciones de movimiento (Goldstein, 2002, p. 45). Este ejercicio involucraría tanto la dinámica rotacional del motor como la oscilación del péndulo, resultando en un problema de control interesante y complejo.

Figura 6.

Motor eléctrico controlando un péndulo



Nota. Adaptado de "Modelo de Motor DC," por Control Automático Educación, s.f. Recuperado de (<https://controlautomaticoeducacion.com/analisis-de-sistemas/modelo-de-motor-dc/>).

Derechos reservados.

La resistencia en sistemas físicos puede variar con el tiempo debido a factores como el calentamiento del material resistivo o cambios ambientales. En un motor, la resistencia puede fluctuar debido al calentamiento o a cambios en la carga. Además, variar la resistencia en el tiempo puede ser una estrategia para controlar la velocidad del motor. Por tanto, es crucial considerar esta variación al modelar un sistema para asemejarlo a la realidad.

Para desarrollar el ejercicio del motor eléctrico controlando un péndulo, seguimos estos pasos:

1. Definición de Variables y Parámetros:

- (θ): Ángulo de oscilación del péndulo desde la vertical.
- (M): Masa del péndulo.
- (l): Longitud del péndulo.
- (J): Momento de inercia del motor.
- (b): Coeficiente de fricción del motor y el péndulo.
- (K): Constante de par motor (proporcionalidad entre la corriente y el par de torsión).
- (V): Voltaje aplicado al motor.
- (I): Corriente del motor.
- (R_0): Resistencia eléctrica inicial del motor.
- (L): Inductancia del motor
- (g): Aceleración debido a la gravedad.
- (C_a): es el coeficiente de arrastre aerodinámico
- (X): Tasa de cambio de la resistencia

La energía Cinética del Péndulo: Se determina a partir de la velocidad angular:

$$T_{\text{pendulo}} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (26)$$

La energía cinética del motor es:

$$T_{\text{motor}} = \frac{1}{2} L I^2 \quad (27)$$

La energía cinética total del sistema se calcula considerando las contribuciones individuales del péndulo y del motor eléctrico. En este trabajo, se asume un modelo ideal en el que

el momento de inercia del motor (\mathbf{J}) no contribuye de manera significativa a la dinámica del sistema. Por tanto, la energía cinética total se expresa como:

$$T = T_{\text{pendulo}} + T_{\text{motor}} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}LI^2 \quad (28)$$

Cabe mencionar que, en un modelo más realista, la energía cinética total también incluiría la contribución del momento de inercia del motor. En dicho caso, el término asociado al momento de inercia se expresaría como:

$$T_{\text{motor(rotacional)}} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

Por lo tanto, la energía cinética total del sistema sería:

$$T = T_{\text{pendulo}} + T_{\text{motor}} + T_{\text{motor(rotacional)}} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

Esta formulación es necesaria para representar con mayor precisión las dinámicas rotacionales del motor, especialmente en sistemas donde \mathbf{J} tiene un valor significativo. Sin embargo, para el propósito de este trabajo, se ha optado por un modelo idealizado.

La energía potencial del sistema, considerando que el ángulo θ se mide desde la vertical (con $\theta = 0$ en la posición más alta del péndulo). es:

$$U = mgl(1 - \cos(\theta)) \quad (29)$$

El Lagrangiano (L) del sistema, que es la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, se expresa como:

$$L = T - U = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}LI^2 - Mgl(1 - \cos(\theta)) \quad (30)$$

Se consideran ahora las pérdidas en el sistema aplicando la función de disipación de

Rayleigh (G) (Rayleigh, 1873). En un sistema con un motor DC y un péndulo, hay dos componentes principales de pérdidas por fricción. La primera corresponde a la fricción del motor, estas pérdidas están vinculadas al cuadrado de su velocidad angular. La segunda se debe a la fricción del péndulo, la fricción genera una disipación de energía proporcional al cuadrado de su velocidad angular.

Ambos elementos contribuyen a la disipación total de energía. Consideramos que el coeficiente de fricción total **b** es la suma de los coeficientes de fricción del péndulo (**b1**) y del motor (**b2**), y que la velocidad angular es la misma para ambos.

$$\textit{Pérdidas por fricción} = \frac{1}{2} b \dot{\theta}^2$$

Observación: En un sistema real, la velocidad angular del motor puede ser diferente de la velocidad angular del péndulo debido a factores como la inercia, la fricción en el sistema de transmisión, y las diferencias en la relación de transmisión.

Pérdidas óhmicas en el motor eléctrico. Aquí, R es la resistencia eléctrica del motor y I es la corriente eléctrica que fluye a través del motor. Las pérdidas óhmicas ocurren cuando la energía eléctrica se convierte en calor debido a la resistencia eléctrica de los devanados del motor (Chapman, 2005, p. 331). Consideramos una resistencia variable $R = R_0 + X t$

$$\textit{Perdidas resistivas} = \frac{1}{2} R I^2$$

Pérdidas aerodinámicas debidas al movimiento del péndulo a través del aire. Aquí C_a es el coeficiente de arrastre aerodinámico y v es la velocidad del péndulo. Las pérdidas aerodinámicas ocurren cuando la energía cinética del péndulo se disipa en el aire circundante

$$\textit{Perdidas aerodinamicas} = \frac{1}{2} C_a v^2$$

Donde $v = l \dot{\theta}$

Remplazando las pérdidas en la ecuación de Rayleigh, tenemos:

$$G = \frac{1}{2}b\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(R_0 + Xt)i^2 + \frac{1}{2}C_a v^2$$

Equivalente a:

$$G = \frac{1}{2}b\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(R_0 + Xt)i^2 + \frac{1}{2}C_a l^2 \dot{\theta}^2 \quad (31)$$

Ahora, derivamos el Lagrangiano con respecto a cada coordenada generalizada para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema (Marion & Thornton, 1995, p. 65). Las coordenadas generalizadas son el ángulo del péndulo (θ) y la corriente en el motor (I).

Las ecuaciones de movimiento se obtienen aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a cada coordenada generalizada. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial G}{\partial \dot{q}} = F_q$$

1. Para (θ): Primero, calculamos la derivada del lagrangiano respecto a la coordenada generalizada θ

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -Mgl \sin(\theta)$$

Después la derivada del lagrangiano con respecto a su primera derivada $\dot{\theta}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = Ml^2 \dot{\theta}$$

Luego, derivamos la ecuación anterior con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = Ml^2 \ddot{\theta}$$

Derivamos la ecuación de Rayleigh con respecto a $\dot{\theta}$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{\theta}} = b\dot{\theta} + C_a l^2 \dot{\theta}$$

Teniendo todos los términos derivados que conforman el lagrangiano, consideramos la fuerza que actúa en esta coordenada generalizada, para este caso, el par es $F_\theta = \tau = KI\theta$

Finalmente, sustituimos estas derivadas en la ecuación de Euler-Lagrange para obtener la ecuación de movimiento para (θ):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial \dot{\theta}} = F_\theta$$

Remplazando, obtenemos:

$$Ml^2\ddot{\theta} + Mgl \sin(\theta) + b\dot{\theta} + C_a l^2 \dot{\theta} = KI\theta \quad (32)$$

2. Para (I): De manera similar al caso anterior, calculamos las derivadas parciales necesarias:

$$\frac{\partial L}{\partial I} = LI$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{I}} = 0$$

Luego, derivamos la ecuación anterior del lagrangiano con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{I}} \right) = 0$$

Derivamos la ecuación de Rayleigh con respecto a la primera derivada de \dot{I}

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{I}} = (R_0 + Xt)\dot{I}$$

Ahora, consideramos la fuerza que actúa sobre la coordenada I. En este caso, la tensión de entrada menos caída de tensión en la resistencia:

$$F_I = V - (R_0 + Xt)I.$$

Finalmente, sustituimos estas derivadas en la ecuación de Euler-Lagrange para obtener la ecuación de movimiento para (I):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{i}} \right) - \frac{\partial L}{\partial i} + \frac{\partial G}{\partial i} = F_i$$

Remplazando todos los términos tenemos:

$$0 - LI + (R_0 + Xt)\dot{I} = V - (R_0 + Xt)I$$

Organizando, obtenemos:

$$(R_0 + Xt)\dot{I} + (R_0 + Xt)I - LI = V \quad (33)$$

3.1.5 Resolución del ejemplo usando Matlab

Figura 7.

Script de motor controlando un péndulo.

```
% Definición de las variables simbólicas
syms th Dth I DI %Coordenadas generalizadas y sus primeras derivadas
syms M l g L_inductancia K b R0 Vdc Ca t X %constantes del sistema

% Energias cineticas
T1 = 1/2*((M*(l)^2)*(Dth)^2); % Debida al pendulo
T2 = 1/2*(L_inductancia*(I)^2); % Debida a la corriente del motor
T = T1+T2 ; % Energia Cinetica total

V = M*g*l*(1-cos(th)); % Energia potencial gravitacional

L = T - V; % Lagangriano

R=R0+X*t; % Resistencia variable linealmente en el tiempo

% Ecuacion de Rayleith Perdidas por frccion y por resistencia
G = 1/2*(b*(Dth)^2)+1/2*(R*(DI)^2)+ 1/2*(Ca*((l)^2)*(Dth)^2);

F_th= K*I*th; % fuerza del par sobre la cordenada th|
F_I= Vdc-I*R; % fuerza electromotriz sobre la cordenada I

q = [th, I]; Dq = [Dth, DI];% Cordenadas generalizadas y sus derivadas

q_F = [th, I]; % Coordenadas con fuerzas aplicadas
F = [F_th, F_I]; % Fuerzas aplicadas

% Derivar ecuaciones de movimiento usando Lagrange
Eq = LagrangeDynamicEqDeriver(L, G, q, Dq, F, q_F);
```

Nota. Script modificado para el desarrollo del ejemplo. El código mostrado se basa en una adaptación del trabajo original de Mansour Torabi (MATLAB Euler-Lagrange Library), disponible en (https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/86563-matlab-euler-lagrange-library?s_tid=prof_contriblnk.) Las modificaciones realizadas incluyen adaptaciones para los sistemas físicos presentados en esta tesis.

1. Definimos las variables simbólicas que representan las coordenadas generalizadas (θ , I) y sus respectivas primeras derivadas ($D\theta$, DI), así como las constantes del sistema (M , l , g , $L_{\text{inductancia}}$, K , b , R_0 , V_{dc} , C_a , t , X).
2. Calculamos la energía cinética total (T) del sistema, que es la energía cinética del péndulo (T_1) y la energía cinética del motor (T_2).
3. Determinamos la energía potencial (V) del sistema, que en este caso es la energía potencial gravitacional
4. Modelamos la resistencia como una función linealmente variable
5. Formulamos el lagrangiano (L) del sistema como la diferencia entre la energía cinética total y la energía potencial.
6. Consideramos las pérdidas en el sistema debidas a la fricción, resistencia y fuerzas aerodinámicas (G), utilizando la ecuación de Rayleigh.
7. Definimos las fuerzas que actúan en el sistema (F_{θ} y F_I), el vector de coordenadas generalizadas (q) y sus derivadas primeras (Dq), así como las coordenadas generalizadas a las que se aplican las fuerzas (q_F) y las fuerzas externas (F).
8. El código llama a la función “LagrangeDynamicEqDeriver” para derivar y obtener las ecuaciones de movimiento del sistema (Eq).

9. Interpretamos los resultados. La función Eq arroja dos ecuaciones dinámicas que caracterizan el sistema en orden en el que se introdujo el vector q. Estas ecuaciones son iguales a las obtenidas manualmente en las ecuaciones (32) y (33).

Eq =

$$\begin{aligned} & Dth*b - I*K*th + Ca*Dth*1^2 + DDth*M*1^2 + M*g*1*sin(th) \\ & I*(R0 + X*t) - Vdc - I*L_inductancia + DI*R0 + DI*X*t \end{aligned}$$

4 Conclusiones

La utilización del funcional de Euler-Lagrange ofrece una visión más amplia y elegante para el modelado de sistemas dinámicos. A diferencia de los métodos tradicionales que requieren enfoques distintos según el sistema, la ecuación de Euler-Lagrange permite abordar diversos sistemas si con una metodología única. Esta ventaja se hace especialmente evidente cuando se trata de sistemas complejos, donde la definición de energía cinética y potencial es suficiente para describir completamente el sistema.

El presente trabajo ha demostrado la viabilidad y efectividad de diseñar e implementar una metodología para resolver sistemas utilizando MATLAB, enfocándose en sistemas eléctricos, mecánicos y electromecánicos. A través de la formulación de Euler-Lagrange, hemos podido modelar y simular estos sistemas, proporcionando una herramienta valiosa para la enseñanza y aprendizaje en ingeniería eléctrica.

Los principales hallazgos incluyen:

1. Desarrollo de una Metodología Eficaz: Hemos diseñado una metodología que permite construir modelos matemáticos de sistemas utilizando MATLAB, permitiendo a los usuarios generar automáticamente las ecuaciones dinámicas a partir del lagrangiano suministrado. Aunque el desarrollo del código principal fue realizado por Mansour Torabi, se han realizado ajustes significativos para incluir la función de disipación de Rayleigh y las fuerzas externas.
2. Aplicación del Código de Torabi: La biblioteca de MATLAB desarrollada por Mansour Torabi ha sido una herramienta esencial en este proceso. Su uso simplifica la derivación de ecuaciones dinámicas y permite una manipulación precisa y eficiente de ecuaciones complejas. Sin embargo, se ha adaptado para

abordar las limitaciones originales, incorporando aspectos adicionales como la disipación y fuerzas externas.

3. Ejemplos Ilustrativos: Se han desarrollado varios ejemplos ilustrativos que muestran claramente cómo utilizar los programas propuestos, destacando las ventajas y facilidades que ofrece el uso de MATLAB para el modelado y simulación de sistemas complejos. Estos ejemplos proporcionan una guía práctica y educativa para estudiantes y profesionales.
4. Comparación Manual vs. Computacional: Comparar los métodos manual y computacional destaca las ventajas de utilizar MATLAB en términos de precisión y eficiencia. La biblioteca de Torabi, junto con nuestras adaptaciones, ha demostrado ser altamente efectiva para el modelado y simulación.

En conclusión, este trabajo no solo cumple con los objetivos planteados, sino que también proporciona una herramienta didáctica que facilita a los estudiantes adquirir conocimientos básicos de modelado y simulación. La metodología y los códigos desarrollados representan una contribución significativa a la enseñanza en ingeniería eléctrica, y con la continua evolución de las herramientas computacionales, es probable que veamos aún más mejoras en la eficiencia y precisión del modelado de sistemas dinámicos en el futuro.

Referencias Bibliográficas

- Brunton, S. L., & Kutz, J. N. (2017). *Data Driven Science & Engineering - Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. Cambridge University Press. Recuperado de <http://databookuw.edu>
- Chapman, S. J. (2005). *Electric Machinery Fundamentals* (4th ed.). McGraw-Hill.
- Cortés Cardona, G. (2017). *Diseño, Simulación y Control de un Péndulo Invertido Doble Lineal para el Laboratorio de Automática de la IEEE de UNIVALLE*. Universidad del Valle.
- Deb, K. A. R. (1995). Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex Systems*.
- Espinosa Bedoya, A., & Gil Paras, S. A. (2019). Modelo cinemático del martillo de un molino de martillos operando sin carga empleando la mecánica de Lagrange. *Ingenierías USBMed*, 10, 28–33.
- Ginsberg, J. (2008). *Engineering Dynamics*. Cambridge University Press.
- Goldstein, H. (2002). *Classical Mechanics* (3rd ed.). Addison-Wesley.
- Marion, J. B., & Thornton, S. T. (1995). *Classical Dynamics of Particles and Systems* (4th ed.). Saunders College Publishing.
- MATLAB. (n.d.). MATLAB® para ingenieros.
- Ogata, K. (1987). *Dinámica de sistemas* (1ª ed.). Prentice Hall.

Rayleigh, Lord. (1873). Some general theorems relating to vibrations. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-4(1), 357–368.

René, B., & Jaimes, A. (2014). Desarrollo de una herramienta en Matlab para sintonización de controladores PID, utilizando algoritmos genéticos basado en técnicas de optimización multiobjetivo. *Senomova [Colombia]*, 1(99), 80–103.

Sala Piqueras, A. (2019). Linealización de sistemas dinámicos y paso a representación normalizada. Universidad Politécnica de Valencia.

Toraabi, S. M., & Mansourt, M. T. (2024). Solución de ecuaciones diferenciales para sistemas dinámicos usando DynamicEqSolver. Recuperado el 12 de abril de 2024, de https://github.com/Mansourt/Matlab_EulerLagrange_Library_for_Deriving_Equations_of_Dynamic_Systems

Apéndices

Apéndice A. lista de funciones de Matlab utilizadas

1. **syms**: Crea variables simbólicas.
 - **Sintaxis**: `syms x y z`
2. **diff**: Calcula derivadas.
 - **Sintaxis**: `diff(f, x)`
3. **subs**: Sustituye variables o expresiones en una expresión simbólica
 - **Sintaxis**: `subs(f, x, v)`
4. **symfun**: Crea una función simbólica.
 - **Sintaxis**: `f = symfun(expr, vars)`
5. **simplify**: Simplifica una expresión simbólica
 - **Sintaxis**: `simplify(expr)`
6. **expand**: Expande una expresión simbólica.
 - **Sintaxis**: `expand(expr)`
7. **char**: Convierte una variable numérica o simbólica en una cadena de caracteres.
 - **Sintaxis**: `char(x)`
8. **str2sym**: Convierte una cadena de caracteres en una variable simbólica.
 - **Sintaxis**: `str2sym('x')`
9. **length**: Obtiene la longitud de un vector.
 - **Sintaxis**: `length(x)`
10. **zeros**: Crea una matriz de ceros.
 - **Sintaxis**: `zeros(n, m)`
11. **sym**: Convierte una variable en una variable simbólica.

- **Sintaxis:** `sym(x)`

12. Función Definida por el Usuario:

```
function output = functionName(input1, input2, ..., inputN)

% Aquí va el cuerpo de la función

end
```

- **function:** Palabra clave que indica la definición de una función.
- **output:** Variable de salida de la función.
- **functionName:** Nombre de la función.
- **(input1, input2, ..., inputN):** Variables de entrada de la función.
- **end:** Palabra clave que indica el final de la función

Apéndice B. Scripts utilizados a lo largo del documento

1. Ejemplo físico - Bastón lanzado al air

```
syms th Dth x Dx y Dy % Definición de las coordenadas generalizadas
syms l g t M1 M2 b k F_y c % Definición de parámetros simbólicos

% Velocidades de los centros de masa
V1 = (Dx)^2 + (Dy)^2; % Centro de masa 1
V2 = (Dx - l*Dth*sin(th))^2 + (Dy + l*Dth*cos(th))^2; % Centro de masa 2

% Masas decrecientes en el tiempo
m1=M1*exp(-b*t); % masa 1
m2=M2*exp(-k*t); % masa 2

T = 1/2*(m1*V1) + 1/2*(m2*V2); % Energía Cinética
V = m1*g*y + m2*g*(y +l*sin(th)); % Energía Potencial

L = T - V; % Lagrangiano

G=1/2*c*(V1+V2); %función de disipación de Rayleigh (fricción)

% Coordenadas generalizadas y sus derivadas
q = [th, x, y];
Dq = [Dth, Dx, Dy];

q_F = [0, 0, y]; % Coordenadas en las que aparecen fuerzas

F = [0, 0, F_y]; % Fuerzas que actúan en cada respectiva coordenada

% Derivar ecuaciones de movimiento usando Lagrange
Eq = LagrangeDynamicEqDeriver(L, G, q, Dq, F, q_F);
```

2. Ejemplo eléctrico – Circuito RLC

```

% Definición de las variables simbólicas
syms Q1 DQ1 Q2 DQ2 Q3 DQ3 %Coordenadas generalizadas y sus derivadas
syms L1 L2 L3 R1 R2 R3 C1 C2 k t %Constantes del sistema
syms Voltaje % Fuerzas externa

c1=C1*exp(-k*t); % Capacitancia variable decreciente en el tiempo

% Energía Co-inductiva total
T = 1/2*(L1*(DQ1)^2) + 1/2*(L2*(DQ2)^2) + 1/2*(L3*(DQ3)^2);

V = 1/(2*c1)*(Q1-Q2)^2 + 1/(2*C2)*Q2^2; % Energía Capacitiva

L = T - V; % Lagangriano

%Contenido energético del sistema
G = 1/2*(R1*(DQ1)^2) + 1/2*(R2*(DQ2)^2) + 1/2*(R3*(DQ2-DQ3)^2);

%Coordenadas generalizadas y sus derivadas
q = [Q1, Q2, Q3]; Dq = [DQ1, DQ2, DQ3];

q_F = [Q1, 0]; % Coordenadas con fuerza aplicada

F = [Voltaje, 0]; % Fuerzas aplicada

% Derivar ecuaciones de movimiento usando Lagrange
Eq = LagrangeDynamicEqDeriver(L, G, q, Dq, F, q_F);

```

3. Ejemplo electromecánico – motor DC controlando un péndulo

```

% Definición de las variables simbólicas
syms th Dth I DI %Coordenadas generalizadas y sus primeras derivadas
syms M l g L_inductancia K b R0 Vdc Ca t X %constantes del sistema

% Energías cinéticas
T1 = 1/2*((M*(l)^2)*(Dth)^2); % Debida al péndulo
T2 = 1/2*(L_inductancia*(I)^2); % Debida a la corriente del motor
T = T1+T2 ; % Energía Cinética total

V = M*g*l*(1-cos(th)); % Energía potencial gravitacional

L = T - V; % Lagangriano

R=R0+X*t; % Resistencia variable linealmente en el tiempo

% Ecuación de Rayleith Perdidas por frccion y por resistencia
G = 1/2*(b*(Dth)^2)+1/2*(R*(DI)^2)+ 1/2*(Ca*((l)^2)*(Dth)^2);

F_th= K*I*th; % fuerza del par sobre la coordenada th
F_I= Vdc-I*R; % fuerza electromotriz sobre la coordenada I

q = [th, I]; Dq = [Dth, DI];% Coordenadas generalizadas y sus derivadas

```

```

q_F = [th, I]; % Coordinadas con fuerzas aplicadas
F = [F_th, F_I]; % Fuerzas aplicadas

% Derivar ecuaciones de movimiento usando Lagrange
Eq = LagrangeDynamicEqDeriver(L, G, q, Dq, F, q_F);

```

4. Código de la función “LagrangeDynamicEqDeriver”

```

function Eq = LagrangeDynamicEqDeriver(L, G, q, Dq, F, q_F)
    % Agrega los argumentos F y q_F a la función. F es un vector de fuerzas
    % externas y q_F es un vector de las coordenadas generalizadas a las que se aplican
    % las fuerzas.

    N = length(q);
    syms t

    %% Cálculo de L_q = r.L/r.q y L_Dq = r.L/r.Dq
    L_q = sym(zeros(N,1));
    L_Dq = sym(zeros(N,1));

    for ii = 1:N
        L_q(ii) = diff(L, q(ii));
        L_Dq(ii) = diff(L, Dq(ii));
    end

    %% Cálculo de L_Dq_dt = qd/dt( r_Dq )
    L_Dq_dt = sym(zeros(N,1));

    for ii = 1:N
        for jj = 1:N
            q_dst = [char(q(jj)), '(t)'];
            Dq_dst = ['diff(', q_dst, ',t)'];
            L_Dq(ii) = subs(L_Dq(ii), {q(jj), Dq(jj)}, {str2sym(q_dst),
str2sym(Dq_dst)});
        end

        L_Dq_fcn = symfun(L_Dq(ii), t);
        L_Dq_dt(ii) = diff(L_Dq_fcn, t);

        for jj = 1:N
            q_orig = [char(q(jj)), '(t)'];
            Dq_orig = ['diff(', q_orig, ',t)'];
            DDq_orig = ['diff(', q_orig, ',t,t)'];

            DDq_dst = ['DD', char(q(jj))];

            L_Dq_dt(ii) = subs(L_Dq_dt(ii), {str2sym(q_orig), str2sym(Dq_orig),
str2sym(DDq_orig)}, ...
                {q(jj), Dq(jj), str2sym(DDq_dst)});
        end
    end
end

```

```
% Cálculo de  $G_q = r.G/r.q$  y  $G_{Dq} = r.G/r.Dq$ 
G_q = sym(zeros(N,1));
G_Dq = sym(zeros(N,1));
for ii = 1:N
    G_q(ii) = diff(G, q(ii));
    G_Dq(ii) = diff(G, Dq(ii));
end

%% Ecuaciones de Lagrange (Segundo tipo)
Eq = sym(zeros(N,1));

for ii = 1:N
    Eq(ii) = simplify(expand(L_Dq_dt(ii) - L_q(ii) + G_q(ii) + G_Dq(ii)));
    for jj = 1:length(q_F)
        if q(ii) == q_F(jj)
            Eq(ii) = Eq(ii) - F(jj); % Resta la fuerza externa del lado
            izquierdo de la ecuación de movimiento correspondiente
        end
    end
end
end
```