

ESTUDIO DE LA FASE CUÁNTICA POR TRANSFORMACIÓN DE FOURIER
FRACCIONARIA Y SUS APLICACIONES A LOS PRINCIPALES ESTADOS DEL
CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

DIEGO ARMANDO GALEANO RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2016

ESTUDIO DE LA FASE CUÁNTICA POR TRANSFORMACIÓN DE FOURIER
FRACCIONARIA Y SUS APLICACIONES A LOS PRINCIPALES ESTADOS DEL
CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

DIEGO ARMANDO GALEANO RODRÍGUEZ

Trabajo de grado para optar al título de Físico

Director
RAFAEL TORRES AMARÍS
Doctor en Ciencias Naturales (Física)

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2016

*Dedicado a
Yahaira Calderón Iriarte*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi director Rafael Torres por la realización de este proyecto, por su infinita paciencia, por haberme brindado las asesorías pertinentes para el fin de mi proyecto de grado y por guiarme en la realización del mismo.

A mis calificadores el profesor Yezid Torres y el profesor Francisco García por sus aportes y por el tiempo dedicado a la lectura del documento.

A todos los que fueron mis profesores en este proceso, por formarme en este mundo maravilloso de la física.

Agradecimiento especial a mi familia por su apoyo incondicional desde principio a fin.

A mis compañeros y amigos Cesar E. Pachón, Joseph F. Vergel, Néstor A. Granados, Elkin Santos, Oswaldo Nieto y muchos más que fueron de gran apoyo en la preparación de conceptos físicos.

A mi novia Yahaira Calderón que ha sido una fuente de motivación y apoyo en este proceso.

Doy especial agradecimiento a la escuela de física de la universidad industrial de Santander que me ha brindado la mayor acogida para formarme como un profesional.

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|--|-----------|
| INTRODUCCIÓN | 13 |
| 1 TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONARIA Y ESTUDIO DE LOS FORMALISMOS DE LA FASE | 15 |
| 1.1 TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONARIA (TFFr) | 15 |
| 1.2 FASE DE DIRAC | 16 |
| 1.3 FORMALISMO DE SUSSKING Y GLOGOWER | 18 |
| 1.4 FORMALISMO DE PEGG Y BARNETT | 20 |
| 1.5 ESTADOS NÚMERO DE FOTONES $ n\rangle$ | 21 |
| 1.6 ESTADOS COHERENTES $ \alpha\rangle$ | 23 |
| 1.7 ESTADOS ESTRANGULADOS (SQUEEZED) $ \alpha, \xi\rangle$ | 25 |
| 1.8 ESTADOS TÉRMICOS | 27 |
| 1.9 DISTRIBUCIONES DE FASE DE LOS PRINCIPALES ESTADOS DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO | 28 |
| 1.9.1 Distribución de fase para los estados número de fotones | 28 |
| 1.9.2 Distribución de fase para los estados coherentes | 29 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1.9.3 | Distribución de fase para los estados térmicos | 30 |
| 1.9.4 | Distribución de fase para los estados de fase $ \Phi\rangle$ | 31 |
| 2 | PLANTEAMIENTO DE LA FASE INCLUYENDO LA TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONARIA | 33 |
| 2.1 | TFFr EN LOS ESTADOS DE FASE DE SUSSKING Y GLOGOWER | 34 |
| 2.2 | TFFr EN LOS ESTADOS DE FASE DE PEGG Y BARNETT | 35 |
| 2.2.1 | Propiedades del estado $ \#\rangle$ | 36 |
| 2.3 | OPERADOR DE FASE CUÁNTICO | 38 |
| 2.3.1 | Operador exponencial de fase | 39 |
| 3 | FASE EN LOS PRINCIPALES ESTADOS DEL MODO ÚNICO DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO | 48 |
| 3.1 | ANÁLISIS DE LA FASE DE LOS ESTADOS NÚMERO DE FOTONES $ n\rangle$ | 48 |
| 3.2 | ANÁLISIS DE LA FASE DE LOS ESTADOS COHERENTES $ \alpha\rangle$ | 52 |
| 3.3 | ANÁLISIS DE LA FASE DE LOS ESTADOS TÉRMICOS | 55 |
| 3.4 | ANÁLISIS DE LA FASE DE LOS ESTADOS ESTRANGULADOS (SQUEEZED) $ \xi\rangle$ | 56 |
| 4 | CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS | 58 |
| | REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 60 |
| | APÉNDICE | 61 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Representación de un estado número de fotones en el espacio de cuadraturas. | 23 |
| 1.2 | Representación gráfica del estado coherente $ \alpha\rangle$ en el espacio de cuadraturas de amplitud α y ángulo θ | 24 |
| 1.3 | Elipse de incertidumbre para un estado Squeezed (Estrangulado) en el plano de cuadraturas. | 26 |
| 1.4 | Representación de un estado número de fotones en el espacio de cuadraturas y su respectiva distribución de fase. | 29 |
| 1.5 | Representación de un estado coherente en el espacio de cuadraturas y su respectiva distribución de fase para $ \alpha \gg 1$ | 30 |
| 1.6 | Distribución de fase para los estados de fase | 32 |
| 2.1 | Distribución de fase para los estados de fase cero | 38 |
| 3.1 | Distribución de fase para los estados número de fotones | 50 |
| 3.2 | Distribución de fase para los estados coherentes | 53 |

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO DE LA FASE CUÁNTICA POR TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONARIA Y SUS APLICACIONES A LOS PRINCIPALES ESTADOS DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO ¹.

AUTOR: DIEGO ARMANDO GALEANO RODRÍGUEZ².

PALABRAS CLAVES: Fase cuántica, transformación de Fourier fraccionaria, estados número de fotones, estados térmicos, estados coherentes, estados estrangulados (squeezed), distribución de fase cuántica.

DESCRIPCIÓN:

La correcta descripción de la fase cuántica del campo electromagnético es un problema que aún es objeto de estudio; Dirac abre la discusión de la fase cuántica proponiendo una relación entre los operadores aniquilación, creación y la fase, pero el modelo de Dirac posee dificultades matemáticas. Estudios subsecuentes hechos por Sussking y Glogower proponen operadores exponenciales complejos de fase no unitarios, que conllevan a inferir que la fase cuántica no es un operador Hermítico, e implican la existencia de varios operadores de fase, por tal razón evaden el problema del operador de fase y se concentran en las distribuciones de fase, por último Pegg y Barnett estudian la fase en un subespacio del espacio de Hilbert donde la fase llega a ser un operador Hermítico y bien definido.

Con base en los estados de fase de Sussking y Glogower y Pegg y Barnett, se deduce la existencia de la transformación de Fourier fraccionaria lo cual abre un nuevo camino para estudiar la fase. A continuación y a partir del operador de fase de Pegg y Barnett se formula un operador de fase Hermítico donde está presente la transformación de Fourier fraccionaria, éste operador es de gran uso para determinar la estadística de fase de los estados número (estados de Fock), coherentes, térmicos y estrangulados (squeezed) del campo electromagnético y se demuestra que reproducen completamente la estadística ya conocida para los estados propios del campo electromagnético mencionados.

¹Trabajo de Grado

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director Dr. Rafael Torres.

ABSTRACT

TITLE: STUDY OF QUANTUM PHASE BY FRACTIONAL FOURIER TRANSFORMATION AND ITS APPLICATIONS TO THE MAIN STATES OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD.¹.

AUTHOR: DIEGO ARMANDO GALEANO RODRÍGUEZ ².

KEYWORDS: Quantum phase, fractional Fourier transform, photon number state, thermal states, coherent states, squeezed states, quantum phase distribution.

DESCRIPTION:

The correct description of the quantum phase of the electromagnetic field is a problem that is still under study; Dirac opens the discussion of quantum phase proposing a relationship between annihilation creation and phase operators, but the model has Dirac mathematical difficulties. Subsequent studies by Sussking and Glogower propose complex non-unitary phase exponential operators, leading to infer that the quantum phase is not a Hermitian operator, and imply the existence of several phase operators, for this reason they evade the problem of phase operator and they focus on phase distributions, finally Pegg and Barnett study phase in a subspace of the Hilbert space where the phase becomes a Hermitian operator and well defined. Based on the phase states of Sussking and Glogower and Pegg and Barnett suggests the existence of fractional Fourier transformation which opens a new way to study the phase. Here and from operator phase Pegg and Barnett operator Hermitian phase where the transformation of fractional Fourier present is formulated, the operator is of great use to determine statistical phase state number (Fock states), coherent, thermal and squeezed of the electromagnetic field and shown to completely reproduce the statistics already known to the eigenstates of the aforementioned electromagnetic field.

¹Bachelor Thesis.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director Dr. Rafael Torres.

INTRODUCCIÓN

La fase es de gran importancia tanto en óptica clásica como en óptica cuántica, en óptica clásica determina si dos ondas interfieren y es la encargada de establecer la coherencia entre ellas, en óptica cuántica en fenómenos tales como la interferencia cuántica la cual se manifiesta por condiciones de fase entre las ondas. Sin embargo la fase cuántica es un problema que se ha intentado abordar sin mucho éxito, debido a que no se puede obtener un operador de fase que reúna todas las propiedades y que permita extraer la fase de un determinado estado.

Inicialmente Dirac realiza una descomposición polar del operador aniquilación \hat{A} y creación \hat{A}^\dagger en función del operador de fase hermítico $\hat{\Phi}$ [3], esta idea permite establecer una relación de conmutación entre el operador número de fotones \hat{N} y el operador de la fase $\hat{\Phi}$ dado por $[\hat{\Phi}, \hat{N}] = i$, donde este conmutador conduce a irregularidades cuando se desea determinar los elementos matriciales del operador exponencial complejo de la fase $e^{i\hat{\Phi}}$ y al comprobar la hermiticidad [8], por consiguiente se hace necesario replantear y estudiar más a fondo la propuesta hecha por Dirac. Sussking y Glogower definen los operadores exponenciales de fase $e^{i\hat{\phi}}$ y su adjunto conjugado $(e^{i\hat{\phi}})^\dagger$ donde $\hat{\phi}$ es la fase, semejantes a los planteados por Dirac, estos operadores no conmutan y no son unitarios por lo cual no permiten la existencia de un único operador de fase hermítico, este formalismo no se centra en el operador de fase pero si en los estados propios de este operador $|\phi\rangle$ [13] que pueden ser usados para definir distribuciones de probabilidad. Otra descripción de la fase es dada por Pegg y Barnett en la cual proponen estados de fase $|\theta_m\rangle$ que forman una base completa en un subespacio $s+1$ -dimensional del espacio de Hilbert [11] por lo tanto son asociados con una fase bien definida. Estos dos modelos son convenientes para determinar propiedades de fase de los estados correspondientes del campo electromagnético [12] como:

- Estados número de fotones $|n\rangle$,
- Estados coherentes $|\alpha\rangle$.
- Estados estrangulados (Squeezed) $|\alpha, \xi\rangle$,

- Estados térmicos.

Tanto en el formalismo de fase cuántica hecho por Sussking y Gloggower y el formalismo de Pegg y Barnnet aparecen estados de fase que fueron el punto de partida de esta investigación, inicialmente notando que la transformación de Fourier fraccionaria está presente en ellos como se demuestra en el capítulo 3, y se enfatiza el estudio en el formalismo de Pegg y Barnnet ya que a partir de su operador se formula el operador de fase con la particularidad de poseer la transformación de Fourier fraccionaria la cual abre una nueva forma de estudiar la fase que no había sido explorada. En el capítulo 4 se muestra cómo los estados de fase junto con el operador de fase escritos como función del operador transformación de Fourier fraccionaria permiten encontrar propiedades de fase del modo único del campo electromagnético encontrando como son la distribución de fase, sus respectivos momentos y reproduciendo los valores conocidos para los estados número de fotones, térmicos, coherentes y estrangulados (squeezed). Finalmente en el capítulo 5 presentamos las conclusiones de nuestro trabajo.

Capítulo **1**

TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONARIA Y ESTUDIO DE LOS FORMALISMOS DE LA FASE

En este capítulo se expondrá la base teórica , empezando por la definición de la transformación de Fourier fraccionaria y los diferentes estudios de fase tales como la fase de Dirac, Sussking y Glogower y el estudio de Pegg y Barnett, luego se pasará a estudiar las distribuciones de fase para los estados número de fotones, coherentes, térmicos y estados estrangulados (squuesed) .

SECTION 1.1

TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONARIA (TFFr)

La transformación de Fourier fraccionaria [7] es una generalización de la transformación de Fourier estándar, por tal razón es una herramienta de gran importancia y con una

amplia aplicación a diferentes ramas de la física, incluida la mecánica cuántica [9]. En consideraciones teóricas es útil considerar la transformación de Fourier de una función como un operador lineal que actúa sobre la función. Denotaremos al operador Transformación de Fourier por $(\widehat{\mathcal{F}})$.

Usamos la base de Hermite-Gauss ya que son funciones cuadrado integrables y son funciones propias del operador transformación de Fourier, es decir, para las funciones de Hermite-Gauss se cumple la ecuación de valores propios

$$\widehat{\mathcal{F}}|\mathcal{H}_n(x)\rangle = e^{in\pi/2}|\mathcal{H}_n(x)\rangle, \quad (1.1)$$

donde $|\mathcal{H}_n(x)\rangle$ es precisamente la función propia del operador $\widehat{\mathcal{F}}$ cuyo valor propio es $e^{in\pi/2}$.

Para ir de esto a la Transformación de Fourier fraccionaria, Namias [7] considera a $\widehat{\mathcal{F}}$ como un operador lineal

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\pi/2}|\mathcal{H}_n(x)\rangle = e^{-in\pi/2}|\mathcal{H}_n(x)\rangle. \quad (1.2)$$

Se construye un operador que satisfaga la ecuación de valores propios

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\alpha}|\mathcal{H}_n(x)\rangle = e^{-in\alpha}|\mathcal{H}_n(x)\rangle, \quad (1.3)$$

donde $\widehat{\mathcal{F}}_{\alpha}$ se puede representar en la forma $e^{-i\widehat{N}\alpha}$, donde \widehat{N} es el operador número de fotones dado por $\widehat{N} = \widehat{A}^{\dagger}\widehat{A}$, luego la ecuación de valores propios está expresada por

$$e^{-i\widehat{N}\alpha}|\mathcal{H}_n(x)\rangle = e^{-in\alpha}|\mathcal{H}_n(x)\rangle \quad (1.4)$$

donde

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\alpha} = e^{-i\widehat{N}\alpha}, \quad (1.5)$$

este es precisamente el Operador Transformación de Fourier fraccionaria de orden α .

SECTION 1.2

FASE DE DIRAC

Dirac [3] inicialmente factoriza los operadores de aniquilación y creación en función del operador de fase, tomando la función de onda clásica [4]

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_x E_0 [e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t + \Phi)} + e^{-i(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t + \Phi)}], \quad (1.6)$$

donde E_o es la amplitud del campo, \vec{e}_x es la polarización y Φ es la fase. Y realiza una Comparación con la ecuación del operador campo eléctrico cuántico

$$\widehat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{e}_x [\widehat{A} e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t + \Phi)} - \widehat{A}^\dagger e^{-i(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t + \Phi)}]. \quad (1.7)$$

donde \widehat{A} es el operador aniquilación y \widehat{A}^\dagger es el operador creación de fotones. Las ecuaciones llegan a ser similares si el operador \widehat{A} y \widehat{A}^\dagger son factorizados en su forma polar como:

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= e^{i\widehat{\Phi}} \sqrt{\widehat{N}}, \\ \widehat{A}^\dagger &= \sqrt{\widehat{N}} e^{-i\widehat{\Phi}}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde \widehat{N} es el operador número de fotones dado por $\widehat{N} = \widehat{A}^\dagger \widehat{A}$ y $\widehat{\Phi}$ es el operador de fase. De la ecuación (1.8) se demuestra que

$$e^{i\widehat{\Phi}} = \widehat{A} \sqrt{\widehat{N}}, \quad (1.9)$$

$$e^{-i\widehat{\Phi}} = \sqrt{\widehat{N}} \widehat{A}^\dagger = (e^{i\widehat{\Phi}})^\dagger. \quad (1.10)$$

Donde a partir de (1.14) Dirac encuentra su relación de conmutación [3, 5, 8]

$$[\widehat{\Phi}, \widehat{N}] = i\hbar \widehat{1}. \quad (1.11)$$

Ésta relación de conmutación indica que estas dos cantidades son observables complementarias, por tal razón satisfacen una relación de incertidumbre [14]

$$\Delta\widehat{\Phi} \Delta\widehat{N} \geq \frac{1}{2}, \quad (1.12)$$

esta incertidumbre indica que el número de fotones y la fase no pueden ser medidos simultáneamente. El conmutador (1.11) lleva a problemas cuando se desea determinar los elementos matriciales en la base de estados propios de \widehat{N} [5]

$$(m - n) \langle n | \widehat{\Phi} | m \rangle = i\hbar \delta_{nm}, \quad (1.13)$$

esto implica que la matriz de elementos de Φ es indefinida. En particular, el lado derecho es cero a menos que $m = n$ pero eso significa que Φ es diagonal en la base de estados número y por lo tanto debe conmutar con \widehat{N} , por otra parte el lado izquierdo de (1.13) es cero si $m = n$ lo cual no cumple con la igualdad [5].

Otro problema en la formulación de Dirac radica en la interpretación del operador de fase como un operador hermítico. Si $\widehat{\Phi}$ es hemítico como lo planteo Dirac, su exponencial complejo $e^{i\widehat{\Phi}}$ debe ser un operador unitario [4, 8], de la ecuación (1.8) se demuestra que

$$e^{i\widehat{\Phi}} = \widehat{A}\sqrt{\widehat{N}}, \quad (1.14)$$

$$e^{-i\widehat{\Phi}} = \sqrt{\widehat{N}}\widehat{A}^\dagger = (e^{i\widehat{\Phi}})^\dagger. \quad (1.15)$$

permite que

$$e^{-i\widehat{\Phi}}e^{i\widehat{\Phi}} = \widehat{N}^{-1/2}\widehat{A}^\dagger\widehat{A}\widehat{N}^{-1/2} = \widehat{1}, \quad (1.16)$$

pero

$$e^{i\widehat{\Phi}}e^{-i\widehat{\Phi}} = \widehat{A}\widehat{N}^{-1}\widehat{A}^\dagger \neq \widehat{1} \quad (1.17)$$

lo que indica que sólo se cumple media unitariedad, y por lo tanto no está de acuerdo con la idea original de hermiticidad del operador de fase cuántico $\widehat{\Phi}$ de Dirac [4].

Los estudios hechos por Dirac, a pesar de sus errores, fueron de gran inspiración a dos formalismos: el primero hecho por Sussking y Glogower y el segundo hecho por Pegg y Barnett que estudiaron más a fondo la fase.

SECTION 1.3

FORMALISMO DE SUSSKING Y GLOGOWER

Susskind y Glogower [13] proponen los operadores exponenciales de la fase

$$\widehat{\mathcal{E}} = (\widehat{N} + 1)^{-1/2}\widehat{A} = (\widehat{A}\widehat{A}^\dagger)^{-1/2}\widehat{A}, \quad (1.18)$$

$$\widehat{\mathcal{E}}^\dagger = \widehat{A}^\dagger(\widehat{N} + 1)^{-1/2} = \widehat{A}^\dagger(\widehat{A}\widehat{A}^\dagger)^{-1/2} \quad (1.19)$$

que aplicados a los estados número de fotones $|n\rangle$ producen:

$$\widehat{\mathcal{E}}|n\rangle = \begin{cases} |n-1\rangle & \text{para } n \neq 0 \\ 0 & \text{sí } n = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

$$\widehat{\mathcal{E}}^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle.$$

que permite escribir los operadores (1.18) y (1.19) de forma

$$\widehat{\mathcal{E}} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|, \quad (1.21)$$

$$\widehat{\mathcal{E}}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|. \quad (1.22)$$

se demuestra para estos operadores que el producto

$$\widehat{\mathcal{E}}\widehat{\mathcal{E}}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|n'+1\rangle\langle n'| = \widehat{1}, \quad (1.23)$$

pero

$$\widehat{\mathcal{E}}^\dagger\widehat{\mathcal{E}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|n'\rangle\langle n'+1| = \widehat{1} - |0\rangle\langle 0|, \quad (1.24)$$

esto denota que el operador $\widehat{\mathcal{E}}$ no es un operador unitario ya que aparece el operador proyección $|0\rangle\langle 0|$ [4].

Si observamos el conmutador

$$[\widehat{\mathcal{E}}, \widehat{\mathcal{E}}^\dagger] = |0\rangle\langle 0| \quad (1.25)$$

los operadores exponenciales (1.21) y (1.22) no conmutan, por lo cual el formalismo de Sussking y Gloglower no permite la existencia de un único operador de fase. Los operadores exponenciales (1.21) y (1.22) no son operadores Hermíticos por tal razón no son observables.

Susking y Gloglower intentan introducir operadores que sean Hermíticos y proponen los operadores

$$\widehat{\cos(\Phi)} = \frac{1}{2}(\widehat{E} + \widehat{E}^\dagger), \quad (1.26)$$

$$\widehat{\sin(\Phi)} = \frac{1}{2i}(\widehat{E} - \widehat{E}^\dagger), \quad (1.27)$$

Pero si se observa el conmutador de estos operadores

$$[\widehat{\cos(\Phi)}, \widehat{\sin(\Phi)}] = \frac{i}{2}|0\rangle\langle 0|, \quad (1.28)$$

Se nota que no conmutan y por lo tanto da lugar a que aparezcan dos operadores de fase diferentes [6].

Sussking y Gloglower poseen problemas en sus formulaciones ya que no pueden formular un operador de fase cuántico [4, 8], pero sugirieron que la descripción más apropiada de la fase no es a través de un operador de fase sino a través de los estados de fase (Apéndice A) [13]

$$|\Phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Phi} |n\rangle, \quad (1.29)$$

donde estos estados son estados no normalizables de fase.

La clave de esta formulación es que permite asignar directamente a cualquier estado $|\psi\rangle$ una distribución de fase de la forma $P(\Phi) = |\langle\Phi|\psi\rangle|^2$ sin necesidad de pasar por una definición previa de un operador de fase.

SECTION 1.4

FORMALISMO DE PEGG Y BARNETT

Pegg y Barnett [11, 12] consideran en un espacio Ψ_s , $(s + 1)$ -dimensional un conjunto de estados de fase $|\theta_m\rangle$ el cual contiene los estados propios de energía o estados número de fotones $|n\rangle : n = 0, 1, 2, \dots, s$ dado por

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (1.30)$$

donde el ángulo de fase está definido por $\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1}$ para $m = 0, 1, \dots, s$ y θ_0 es un ángulo de fase real análogo al origen de la representación de posición.

El conjunto $|\theta_m\rangle : m = 0, 1, \dots, s$ es una base ortonormal completa para Ψ_s es decir cumple que

$$\langle\theta_{m'}|\theta_m\rangle = \frac{1}{s+1} \sum_{n=0}^s e^{in(\theta_m - \theta_{m'})} = \delta_{m,m'}, \quad (1.31)$$

y su relación de completéz

$$\sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle\langle\theta_m| = \hat{1}, \quad (1.32)$$

demostrando así que en este sub-espacio los estados de fase forman una base completa, ortonormalizable y linealmente independiente.

Si tomamos el exponencial complejo del operador de fase tenemos:

$$e^{i\hat{\Phi}\theta} = \sum_{m=0}^s e^{i\theta_m} |\theta_m\rangle\langle\theta_m|, \quad (1.33)$$

$$(e^{i\hat{\Phi}\theta})^\dagger e^{i\hat{\Phi}\theta} = e^{i\hat{\Phi}\theta} (e^{i\hat{\Phi}\theta})^\dagger = \hat{1}, \quad (1.34)$$

lo que demuestra claramente que el operador de fase en el espacio Ψ_s es un operador Hermítico debido a la unitariedad de $e^{i\hat{\Phi}}$.

Se construye [2] un operador directamente desde los estados de fase ortonormales (1.30)

$$\hat{\Phi}_\theta = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad (1.35)$$

El operador de fase de Pegg y Barnett escrito en la base de estados número tiene la forma:

$$\hat{\Phi}_m = \theta_o + \frac{s}{s+1}\pi + \frac{2\pi}{s+1} \sum_{n \neq n'}^s \frac{\exp[i(n-n')\theta_o] |n\rangle \langle n'|}{\exp[i(n-n')2\pi/(s+1)] - 1} \quad (1.36)$$

este operador de fase tiene propiedades de hermiticidad en el espacio $s+1$ dimensional, lo cual sólo tiene sentido cuando se aplica el límite cuando s tiende a infinito para ir al espacio de Hilbert.

SECTION 1.5

ESTADOS NÚMERO DE FOTONES $|n\rangle$

El operador hamiltoniano está escrito de la siguiente forma [14]

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2}) \quad (1.37)$$

donde el producto del operador creación \hat{A}^\dagger con el operador daniquilación \hat{A} , da lugar a un nuevo operador llamado operador número de fotones \hat{N}

$$\hat{N} = \hat{A}^\dagger \hat{A} \quad (1.38)$$

donde es un obserbable y sus valores propios toman valores enteros de cero hasta infinito.

Los estados de este operador $|n\rangle$ son autoestados del operador hamiltoniano \hat{H} y por ende del operador \hat{N} .

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (1.39)$$

Estos estados son llamados estados número de fotones.

La aplicación de los operadores aniquilación \hat{A} y creación \hat{A}^\dagger sobre los estados número

$$\hat{A}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (1.40)$$

$$\hat{A}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (1.41)$$

donde estos operadores crean y destruyen fotones.

Los operadores creación y aniquilación se pueden expresar mediante otros dos nuevos operadores Hermíticos conocidos como operadores cuadratura X y Y , que se relacionan con los operadores \hat{A} y \hat{A}^\dagger de la siguiente forma:

$$\hat{A} = \hat{X} + i\hat{Y} \quad (1.42)$$

$$\hat{A}^\dagger = \hat{X} - i\hat{Y} \quad (1.43)$$

Los operadores cuadratura \hat{X} y \hat{Y} en función de los operadores \hat{A} y \hat{A}^\dagger se expresan como:

$$\hat{X} = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^\dagger) \quad (1.44)$$

$$\hat{Y} = \frac{i}{2}(\hat{A}^\dagger - \hat{A}) \quad (1.45)$$

donde estos operadores son en esencia el operador posición y momentum lineal pero adimensional.

Un estado número puede ser representado en el plano de cuadraturas como un círculo de radio n , donde se observa que la incertidumbre en n es cero y la incertidumbre en fase es 2π .

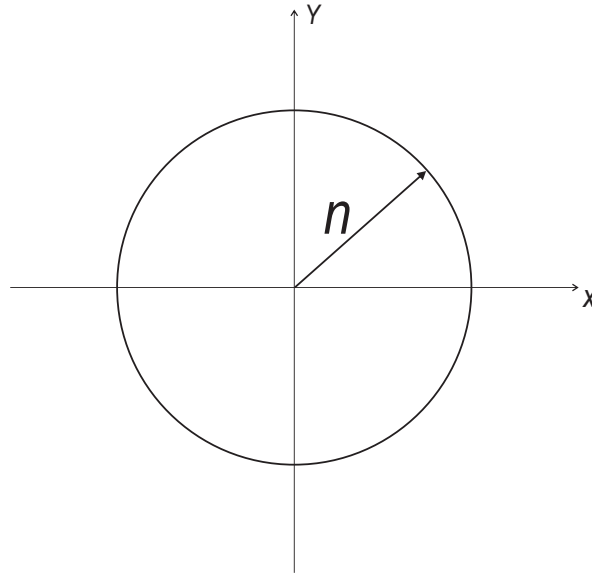


Figura 1.1: Representación de un estado número de fotones en el espacio de cuadraturas.

SECTION 1.6

ESTADOS COHERENTES $|\alpha\rangle$

Los estados coherentes del oscilador armónico $|\alpha\rangle$ o estados de Glauber, el cual se definen como los estados propios del operador aniquilación de fotones A , esto es:

$$\hat{A}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.46)$$

donde el valor propio α es un número complejo debido a que el operador aniquilación de fotones \hat{A} es un operador no hermítico.

El estado coherente puede escribirse en términos de los estados de Fock o estados número $|n\rangle$, como:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (1.47)$$

donde se ha tenido en cuenta la actuación de los operadores de creación y aniquilación dada por las ecuaciones (1.40) y (1.41).

La ecuación (1.47) demuestra que el estado coherente correspondiente a $\alpha = 0$ es el estado fundamental del oscilador, $|0\rangle$, definido por $\hat{A}|0\rangle = |0\rangle$.

Los estados coherentes pueden construirse mediante la aplicación al estado de vacío de un operador unitario llamado operador desplazamiento, denotado por $\hat{D}(\alpha)$. Los estados coherentes se escriben como:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \quad (1.48)$$

donde

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{A}^\dagger - \alpha^*\hat{A}}. \quad (1.49)$$

La expresión (1.48) permite interpretar el estado coherente como una forma desplazada del estado fundamental del oscilador armónico.

Podemos ilustrar gráficamente un estado coherente como un disco de incertidumbre en el plano de amplitud compleja debido a que la parte real y la parte imaginaria de la amplitud compleja fluctúan de igual forma ($\Delta X = \Delta Y = \frac{1}{2}$), lo que implica que $\Delta X_\theta = \frac{1}{2}$ para cualquier θ . La representación del estado coherente es:

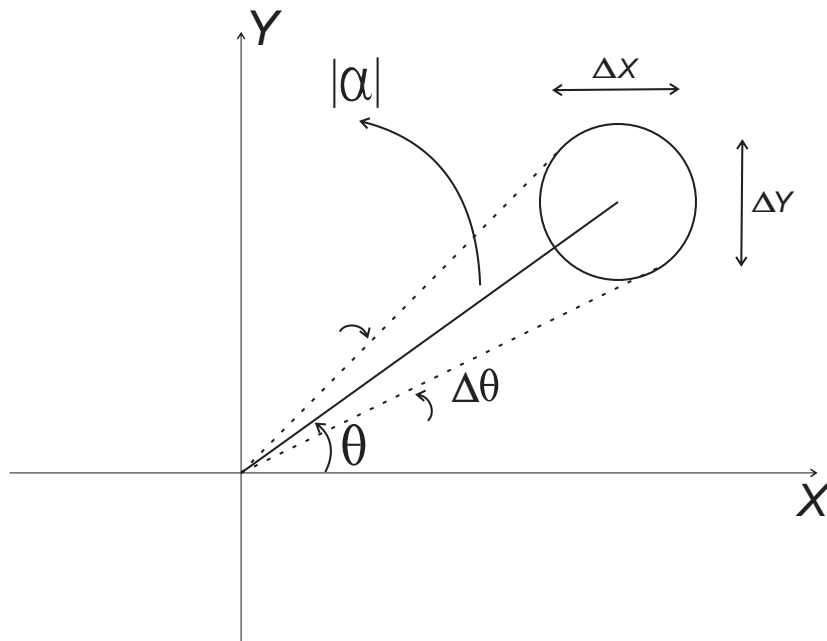


Figura 1.2: Representación gráfica del estado coherente $|\alpha\rangle$ en el espacio de cuadraturas de amplitud α y ángulo θ

éste círculo representa el área de incertidumbre del estado coherente, el centro del círculo está localizado a una distancia $|\alpha| = \langle \hat{N} \rangle^{1/2}$ desde el origen y un ángulo θ desde el eje de posición X , además $\Delta\theta$ representa la incertidumbre en fase del estado coherente y se observa en la (figura 2.2) que $\Delta\theta$ disminuye al aumentar $|\alpha|$.

El producto de incertidumbres de los operadores de cuadratura es mínima, por tal razón los estados coherentes permiten ser definidos como estados de mínima incertidumbre y exhiben iguales incertidumbres en cada cuadratura.

SECTION 1.7

ESTADOS ESTRANGULADOS (SQUEEZED) $|\alpha, \xi\rangle$

Es un estado de incertidumbre mínima en las cuadraturas en donde a diferencia de los estados coherentes estos poseen la característica que las incertidumbres en las cuadraturas son diferentes $\Delta X \neq \Delta Y$, para esto se pueden dar los siguientes dos casos:

$$\Delta X > \frac{1}{2} > \Delta Y \quad (1.50)$$

$$\Delta Y > \frac{1}{2} > \Delta X \quad (1.51)$$

Podemos ilustrar gráficamente un estado estrangulado como una elipse de incertidumbre en el plano amplitud compleja ya que la incertidumbre de la cuadratura X es distinta a la de la cuadratura Y , lo que implica que ya no se da que $\Delta X_\theta = \frac{1}{2}$ para cualquier θ . La representación es la siguiente:

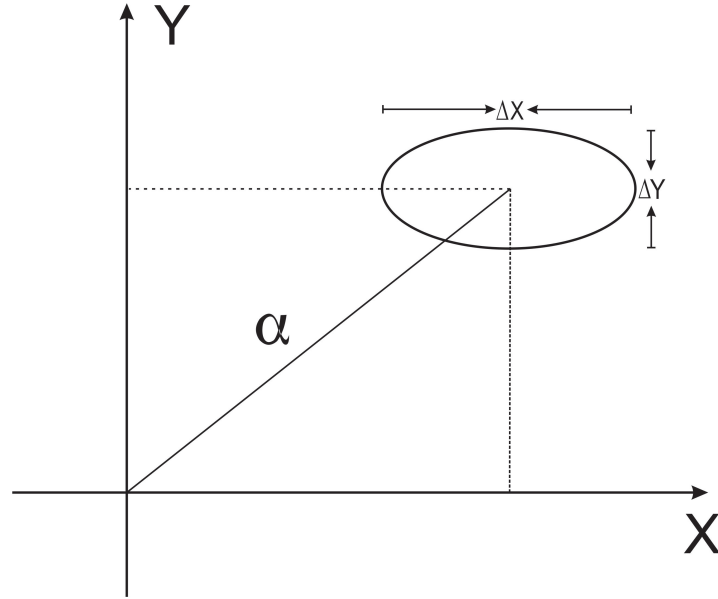


Figura 1.3: Elipse de incertidumbre para un estado Squeezed (Estrangulado) en el plano de cuadraturas.

El estado squeezed o estrangulado está definido como

$$|\alpha, \xi\rangle = \widehat{D}(\alpha)\widehat{S}(\xi)|0\rangle \quad (1.52)$$

donde $D(\alpha)$ es el operador desplazamiento 1.49 y $\widehat{S}(\xi)$ es el operador unitario denominado operador de squeezing (estrangulamiento) dado por

$$\widehat{S}(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi^* \widehat{A}^2 - \xi \widehat{A}^{\dagger 2})\right] \quad (1.53)$$

donde \widehat{A} y \widehat{A}^\dagger son los operadores aniquilación y creación de fotones y $\xi \equiv r e^{i\theta}$ es conocido como parámetro de squeezing o parámetro de estrangulamiento.

SECTION 1.8

ESTADOS TÉRMICOS

La radiación emitida por un objeto ideal conocido como cuerpo negro, que es un perfecto emisor y absorbente de radiación. Un cuerpo negro puede ser modelado como una cavidad que contiene radiación en equilibrio térmico con sus paredes, asumiendo un acoplamiento débil de acuerdo a la teoría de la mecánica estadística se puede tratar el campo como un sistema aislado que es descrito por un ensamble microcanónico [4]. Se considera el modo simple del campo en equilibrio térmico con paredes a una temperatura T , de acuerdo a la mecánica estadística, la probabilidad P_n de que el modo sea excitado térmicamente en el n -ésimo nivel es:

$$P_n = \frac{e^{-E_n/K_B T}}{\sum_n e^{-E_n/K_B T}} \quad (1.54)$$

donde E_n y K_B es el campo del modo y la constante de Boltzmann respectivamente. El operador densidad para el campo térmico $\hat{\rho}_{Th}$ está dado por

$$\hat{\rho}_{Th} = \frac{e^{-\hat{H}/K_B T}}{Tr[e^{-\hat{H}/K_B T}]} \quad (1.55)$$

donde $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2})$ es el hamiltoniano y Tr simboliza la traza dada por:

$$Tr[e^{-\hat{H}/K_B T}] = \sum_n e^{-E_n/K_B T} \quad (1.56)$$

En base en esto se calcula el número promedio de fotones para un estado térmico [4]

$$\bar{n} = \frac{e^{-\hbar\omega/K_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega/K_B T}}, \quad (1.57)$$

de tal forma que el operador densidad puede ser escrito como

$$\hat{\rho}_{Th} = \frac{1}{1 - \bar{n}} \sum_n \left(\frac{\bar{n}}{1 - \bar{n}}\right)^n |n\rangle\langle n| \quad (1.58)$$

y la probabilidad de encontrar n fotones en el campo en términos de \bar{n}

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} \quad (1.59)$$

SECTION 1.9

DISTRIBUCIONES DE FASE DE LOS PRINCIPALES ESTADOS DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

La distribución de fase nos asigna una probabilidad a cada medida de la fase para un estado determinado del campo electromagnético.

La distribución de fase para un estado arbitrario $|\Psi\rangle$ está dada por

$$P(\Phi) = \frac{1}{2\pi} |\langle \Phi | \Psi \rangle|^2 \quad (1.60)$$

las propiedades de fase son fácilmente extraídas usando la distribución de probabilidad.

1.9.1 Distribución de fase para los estados número de fotones

La distribución de fase para los estados número de fotones $|n\rangle$ por proyección de los estados de fase $|\Phi\rangle$ está dada por [4]

$$P_n(\Phi) = \frac{1}{2\pi} |\langle \Phi | n \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad (1.61)$$

La independencia del número de fotones demuestra que en este estado la fase es completamente aleatoria, es decir que para cualquier estado número la fase es indeterminada, puede tomar cualquier valor entre 0 y 2π .

Se puede ilustrar gráficamente un estado número como una círculo donde cada estado posee la misma probabilidad como se muestra en la figura 1.4, y posee una distribución de Dirac para cada valor de fase del estado número de fotones donde cada estado es igualmente probables con probabilidad $1/2\pi$.

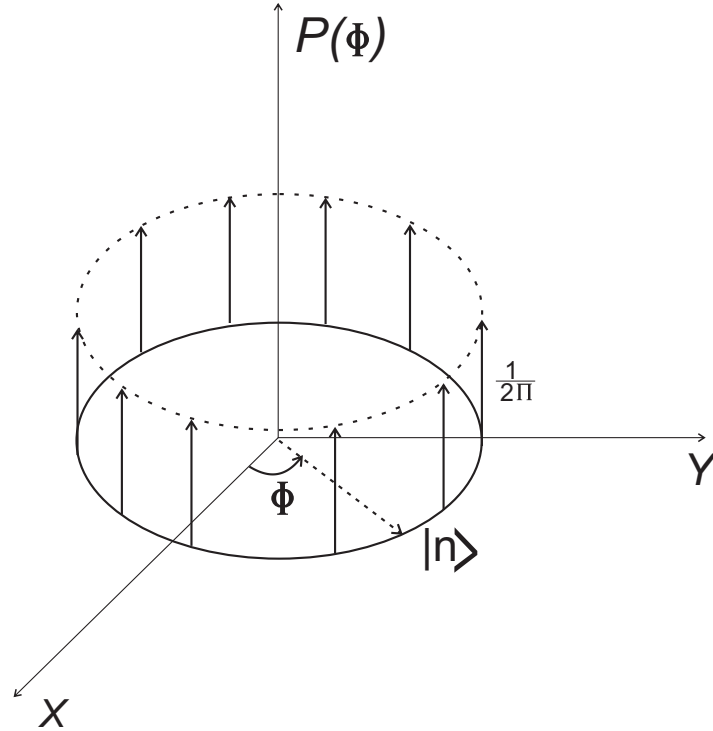


Figura 1.4: Representación de un estado número de fotones en el espacio de cuadraturas y su respectiva distribución de fase.

1.9.2 Distribución de fase para los estados coherentes

La distribución de fase para los estados coherentes $|\alpha\rangle$, con $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ está dada por [1]

$$P(\Phi) = |\langle \Phi | \alpha \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} e^{[-in(\Phi-\theta)]} \right|^2 \quad (1.62)$$

la cual no tiene una solución analítica sencilla. Sin embargo, para $|\alpha| \gg 1$ esto permite aproximar la distribución Poissoniana de número de fotones en el estado coherente por una Gaussiana, de esta manera la distribución que se obtiene es:

$$P(\Phi) = \left(\frac{2|\alpha|^2}{\pi} \right)^{1/2} e^{-2|\alpha|^2(\Phi-\theta)^2} \quad (1.63)$$

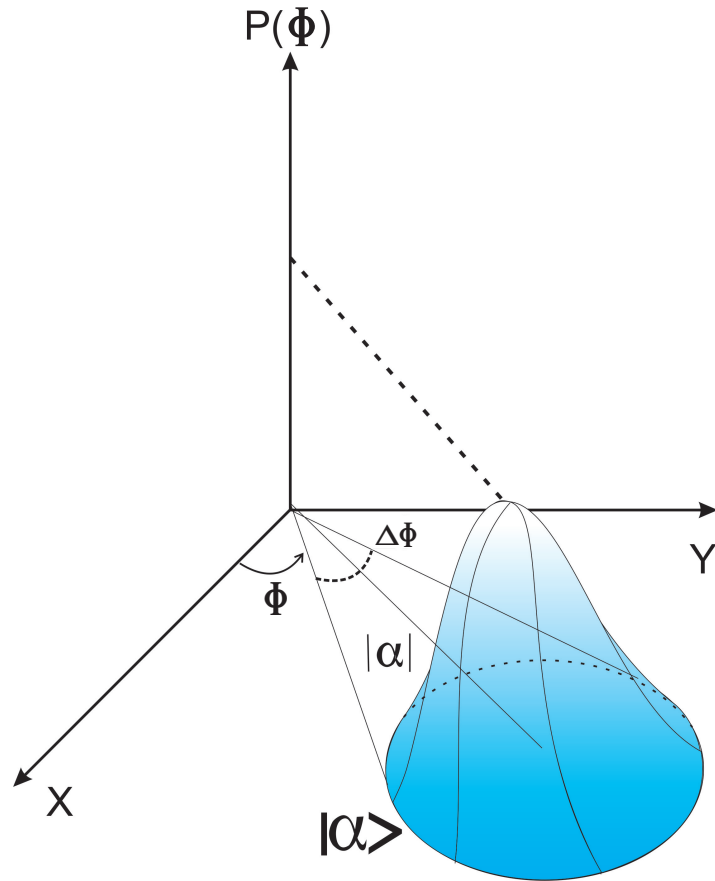


Figura 1.5: Representación de un estado coherente en el espacio de cuadraturas y su respectiva distribución de fase para $|\alpha| \gg 1$.

Tenemos precisamente que los estados coherentes poseen una distribución de fase gaussiana.

1.9.3 Distribución de fase para los estados térmicos

Debido a que los estados térmicos son estados mixtos, es decir no se puede definir para ellos un estado propio que describa sus propiedades estos quedan completamente representados por el operador densidad dado por (1.58) y la distribución de fase para

estos estados térmicos

$$P(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \langle \Phi | \hat{\rho}_{Th} | \Phi \rangle. \quad (1.64)$$

Reemplazamos los estados de fase de Sussking y Glogower (10) y el operador densidad dado por (1.58) obtenemos que la distribución de fase para los estados térmicos está dada por

$$P(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n \quad (1.65)$$

al resolver esta serie el resultado de la distribución de fase es

$$P(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \quad (1.66)$$

al igual que los estados número de fotones la distribución de fase de los estados térmicos es una distribución constante lo que indica que la fase es completamente aleatoria, está entre 0 y 2π cada valor de fase es igualmente probable como se muestra en la figura 1.4.

1.9.4 Distribución de fase para los estados de fase $|\Phi\rangle$

La distribución de fase para los mismos estados de fase $|\Phi\rangle$ que son estados propios del operador de fase $\hat{\Phi}$ (ver Apéndice 10) está dada por

$$p(\Phi) = |\langle \Phi | \Phi_m \rangle|^2 \quad (1.67)$$

dónde $|\Phi_m\rangle$ es un estado de fase arbitrario. La proyección de los estados de fase arbitrarios $|\Phi_m\rangle$ sobre estos estados de fase $|\Phi\rangle$ en el formalismo de Sussking Y Glogower está dado por

$$\langle \Phi | \Phi_m \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in(\Phi - \Phi_m)} \quad (1.68)$$

esta serie es una serie de Fourier y su resultado es una delta de Kronecker, luego se tiene que la proyección de un estado de fase arbitrario sobre los estados de fase es:

$$\langle \Phi | \Phi_m \rangle = \delta_{\Phi, \Phi_m} \quad (1.69)$$

en base en este resultado la distribución de fase para los estados de fase es una funcione delta bidimensional.

Se ilustra gráficamente un estado de fase y su respectiva probabilidad figura 1.6, donde se muestra que sus respectivas proyecciones sobre los estados de fase son un delta de Kronecker.

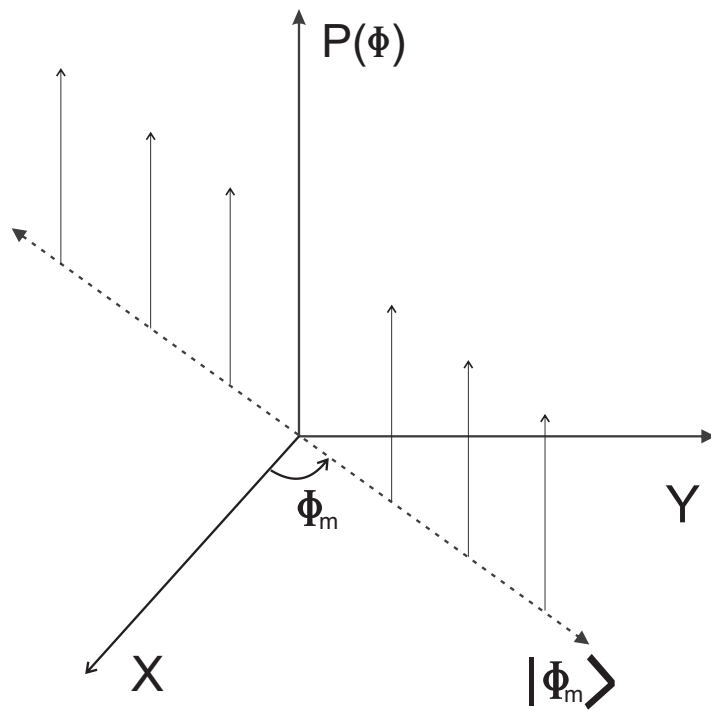


Figura 1.6: Distribución de fase para los estados de fase

Capítulo 2

PLANTEAMIENTO DE LA FASE INCLUYENDO LA TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONARIA

En este capítulo se demuestra como la transformación de Fourier fraccionaria está presente en los estados de fase de los formalismos de Sussking y Glogower y Pegg y Barnett. El operador de fase de Pegg y Barnett que está definido en el espacio finito-dimensional también se puede formular introduciendo la transformación de Fourier fraccionaria donde aparece un nuevo operador que se define como un operador exponencial de la fase y estudiamos algunas de sus propiedades.

SECTION 2.1

TFFr EN LOS ESTADOS DE FASE DE SUSSKING Y GLOGOWER

Los estados de fase $|\Phi\rangle$ deducidos a partir del formalismo de Sussking y Glogower (10)

$$|\Phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Phi} |n\rangle,$$

observando que $e^{in\Phi} |n\rangle$ dentro de la sumatoria es el resultado de aplicar el operador exponencial complejo $e^{i\hat{N}\Phi}$ (donde \hat{N} es el operador número de fotones) sobre el estado $|n\rangle$ que son sus funciones propias ya que cumple la ecuación de valores propios

$$e^{i\hat{N}\Phi} |n\rangle = e^{in\Phi} |n\rangle, \quad (2.1)$$

donde el operador exponencial complejo $e^{i\hat{N}\Phi}$ precisamente se puede escribir semejante al operador transformación de Fourier fraccionaria (1.5) donde la phase Φ es el orden fraccionario como se muestra

$$\hat{\mathcal{F}}_{\Phi} = e^{i\hat{N}\Phi}. \quad (2.2)$$

Introduciendo este nuevo resultado a los estados de fase $|\Phi\rangle$ se obtiene

$$|\Phi\rangle = \hat{\mathcal{F}}_{\Phi} \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \quad (2.3)$$

si se define el estado numeral $|\#\rangle$ a la suma de estados número en el espacio infinito dimensional como:

$$|\#\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \quad (2.4)$$

que facilita la escritura de los estados de fase como una transformación de Fourier fraccionaria del estado numeral $|\#\rangle$

$$|\Phi\rangle = \hat{\mathcal{F}}_{\Phi} |\#\rangle. \quad (2.5)$$

Este es nuestro primer resultado que muestra cómo la transformación de Fourier fraccionaria comienza a ser parte del estudio de la fase. En la ecuación (2.5) se observa cómo los estados de fase $|\Phi\rangle$ y el estado numeral $|\#\rangle$ (suma de estados número de fotones) son un par de Fourier de orden fraccional, es decir se puede ir de un espacio a otro con una transformación de Fourier fraccionaria, lo cual facilita los cálculos y muestra una interpretación del significado de la fase cuántica.

SECTION 2.2

TFFr EN LOS ESTADOS DE FASE DE PEGG Y BARNETT

De igual forma que los estados de fase de Sussking y Glogower, los estados de fase orto-normales en el subespacio $(s+1)$ -dimensional $|\theta_m\rangle$ propuestos por Pegg y Barnett

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_m} |n\rangle. \quad (2.6)$$

Lo de adentro de la sumatoria es el resultado de aplicar el operador exponencial complejo $e^{i\hat{N}\theta_m}$ sobre el estado $|n\rangle$.

$$e^{i\hat{N}\theta_m} |n\rangle = e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (2.7)$$

este operador se puede escribir como el operador transformación de Fourier fraccionaria

$$\hat{\mathcal{F}}_{\theta_m} = e^{i\hat{N}\theta_m}, \quad (2.8)$$

donde θ_m es el orden fraccionario en el espacio $(s+1)$ -dimensional.

Los estados de fase quedan escritos introduciendo el operador transformación de Fourier fraccionario (2.8) como:

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \sum_{n=0}^s |n\rangle. \quad (2.9)$$

Sí se define el estado numeral a la suma de los estados número en el subespacio Ψ_s como:

$$|\#\rangle_s = \sum_{n=0}^s |n\rangle \quad (2.10)$$

Esto facilita la escritura de los estados de fase como una transformada de Fourier Fraccionaria de la suma de estados número en el subespacio Ψ_s $(s+1)$ -dimensional como:

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m} |\#\rangle_s. \quad (2.11)$$

Al igual que con los estados de fase de Sussking y Glogower los estados de fase de Pegg y Barnett también poseen una transformación de Fourier fraccionaria implícita, que

permite asimismo utilizar sus propiedades.

Sí tomamos el producto interno Los estados (2.9) son una base ortonormal completa para Ψ_s como se muestra

$$\begin{aligned}
\langle \theta_{m'} | \theta_m \rangle &= \frac{1}{s+1} \sum_{n'=0}^s \sum_{n=0}^s \langle n' | \hat{\mathcal{F}}_{\theta_{m'}}^\dagger \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m} | n \rangle \\
&= \frac{1}{s+1} \sum_{n=0}^s e^{in(\theta_m - \theta_{m'})} \\
&= \frac{1}{s+1} \sum_{n=0}^s e^{2\pi i n(m-m')/s+1} \\
&= \frac{1 - e^{2i\pi(m-m')}}{(s+1)[1 - e^{2i\pi(m'-m)/s+1}]} \\
&= \delta_{mm'}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1}$. este resultado demuestra que la base $|\theta_m\rangle$ es un conjunto ortonormal.

Se demuestra su relación de completez dada por:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle \langle \theta_m| &= \frac{1}{s+1} \sum_{m=0}^s \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \left(\sum_{n=0}^s |n\rangle \langle n| \right) \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger \\
&= \frac{1}{s+1} \sum_{m=0}^s \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger \\
&= \hat{1}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

lo cual prueba que $|\theta_m\rangle$ es conjunto completo.

2.2.1 Propiedades del estado $|\#\rangle$

El estado numeral $|\#\rangle$ (2.10) es un estado cuya norma es infinita es decir

$$\langle \# | \# \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | n \rangle \longrightarrow \infty \tag{2.14}$$

este estado es la suma de todos los posibles estados número de fotones.

De los estados de fase del formalismo de Sussking y Glogower (10), tomando $\Phi = 0$ se tiene que

$$|\Phi = 0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(0)} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \quad (2.15)$$

comparando este resultado con lo que se definió como estado numeral 2.10, se tiene que los estados de fase cero $|\Phi = 0\rangle$ son los mismos estados $|\#\rangle$ es decir

$$|\Phi = 0\rangle = |\#\rangle. \quad (2.16)$$

La proyección de los estados de fase cero $|\Phi = 0\rangle$ sobre los estados de fase $|\Phi\rangle$ está dada por:

$$\langle\Phi|\Phi = 0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} e^{-in\Phi} \langle n|n'\rangle \quad (2.17)$$

$$\langle\Phi|\Phi = 0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\Phi} \quad (2.18)$$

lo cual es una serie de Fourier y el resultado de esta serie es la función delta de Dirac bidimensional.

$$\langle\Phi|\Phi = 0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\Phi} = \delta(\Phi) \quad (2.19)$$

Gráficamente mostramos este resultado

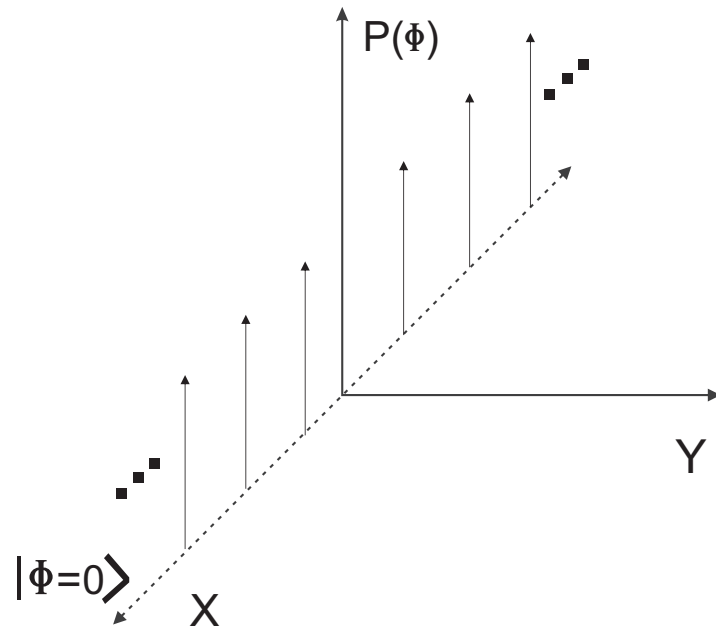


Figura 2.1: Distribución de fase para los estados de fase cero

donde el estado de fase cero está sobre el eje de cuadratura X y su distribución de probabilidad es una función bidimensional de Dirac.

SECTION 2.3

OPERADOR DE FASE CUÁNTICO

Para obtener el operador de fase introduciendo la transformación de Fourier fraccionaria se sustituyen los estados de fase encontrados (2.9) en la ecuación del operador de fase

(12)

$$\widehat{\Phi}_\theta = \theta_o + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_m^s m \left(\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \sum_n^s |n\rangle \right) \left(\sum_{n'}^s \langle n' | \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger \right) \quad (2.20)$$

Las dos sumatorias sobre n implica la suma de dos valores, uno cuando tienen valores iguales $n = n'$, y otro cuando son diferentes $n \neq n'$

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_\theta &= \theta_o + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_m^s m \left[\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \left(\sum_{n=n'}^s |n\rangle \langle n'| + \sum_{n \neq n'}^s |n\rangle \langle n'| \right) \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger \right] \quad (2.21) \\ &= \theta_o + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_m^s m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_m^s m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \sum_{n \neq n'}^s |n\rangle \langle n'| \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger \\ &= \theta_o + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \frac{s(s+1)}{2} + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_m^s \sum_{n \neq n'}^s m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} |n\rangle \langle n'| \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger \\ &= \theta_o + \pi \frac{s}{(s+1)} + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_m^s \sum_{n \neq n'}^s m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} |n\rangle \langle n'| \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger. \end{aligned}$$

el operador de fase queda descrito a través de la siguiente expresión

$$\widehat{\Phi}_\theta = \theta_o + \pi \frac{s}{(s+1)} + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_m^s m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \left(\sum_{n \neq n'}^s |n\rangle \langle n'| \right) \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger \quad (2.22)$$

Este operador de fase posee la transformación de Fourier fraccionaria, y permite ser aplicado para la búsqueda de los momentos de los estados cuánticos del campo electromagnético como lo son: los estados número de fotones, coherentes y estrangulados (squeezed).

2.3.1 Operador exponencial de fase

El operador que se tiene dentro del operador de fase (2.22) que llamaremos como

$$\widehat{\mathcal{R}}_m = \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \left(\sum_{n \neq n'}^s |n\rangle \langle n'| \right) \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger \quad (2.23)$$

que posee la forma de una transformación de similaridad [10] la cual genera una rotación del operador $\sum_{n \neq n'} |n\rangle\langle n'|$, que denotaremos como \hat{E}_Φ

$$\hat{E}_\Phi = \sum_{n \neq n'}^s |n\rangle\langle n'| \quad (2.24)$$

se toma $s \rightarrow \infty$ en la sumatoria de la ecuación (2.24), ya que es donde el operador \hat{E}_Φ tiene un significado físico. Tomando los diferentes valores de la suma

$$\hat{E}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1| \quad (2.25)$$

$$\hat{E}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+2| \quad (2.26)$$

⋮

$$\hat{E}_m = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+m| \quad (2.27)$$

Donde m toma cualquier valor entero diferente de cero $m \neq 0$ y que cumpla con la condición $n+m \geq 0$.

Observando \hat{E}_1 de la ecuación (2.34) y comparando con el operador exponencial de fase de Sussking y Glogower (1.21) se aprecia que son los mismos operadores.

Debido a que los estados de fase de Sussking y Glogower (10) son estados propios del operador exponencial de fase (2.34), investigamos si los mismos estados de fase son también estados propios del conjunto de los anteriores operadores (2.27).

Para esto aplicamos el operador exponencial (2.27) sobre los estados de fase (10)

$$\hat{E}_m|\Phi\rangle = \sum_{n'}^{\infty} \sum_n^{\infty} |n'\rangle\langle n'+m|n\rangle e^{in\Phi} \quad (2.28)$$

donde el producto interno $\langle n'+m|n\rangle = \delta_{n'+m,n}$, solamente cuando $n' = n - m$ el resultado es 1, y para valores diferentes es cero, aplicando esto se tiene que

$$\hat{E}_m|\Phi\rangle = \sum_{n=m}^{\infty} e^{in\Phi} |n-m\rangle \quad (2.29)$$

tomando los diferentes valores de la sumatoria

$$\sum_{n=m}^{\infty} e^{in\Phi} |n-m\rangle = e^{im\Phi} |0\rangle + e^{i(m+1)\Phi} |1\rangle + e^{i(m+2)\Phi} |2\rangle + \dots \quad (2.30)$$

factorizando $e^{im\Phi}$ se tiene:

$$e^{im\Phi} |0\rangle + e^{i(m+1)\Phi} |1\rangle + e^{i(m+2)\Phi} |2\rangle + \dots = e^{im\Phi} [|0\rangle + e^{i\Phi} |1\rangle + e^{i2\Phi} |2\rangle + \dots] \quad (2.31)$$

$$= e^{im\Phi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Phi} |n\rangle \quad (2.32)$$

donde la $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Phi} |n\rangle$ es el estado de fase $|\Phi\rangle$ ecuación (10)

$$\widehat{E}_m |\Phi\rangle = e^{im\Phi} |\Phi\rangle \quad (2.33)$$

esto muestra que los estados de fase (10) son estados propios del operador exponencial (2.27) con valor propio $e^{im\Phi}$.

Mostraremos algunas propiedades del operador exponencial \widehat{E}_m . Los respectivos adjuntos conjugados de los diferentes operadores de las ecuaciones (2.34),(2.26),(2.27) están dados de la siguiente manera

$$\widehat{E}_1^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle \langle n| \quad (2.34)$$

$$\widehat{E}_2^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+2\rangle \langle n| \quad (2.35)$$

⋮
⋮
⋮

$$\widehat{E}_m^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+m\rangle \langle n| \quad (2.36)$$

estos resultados permiten verificar la unitariedad de los operadores exponencial. Se conoce que el operador de Sussking y Glogower \widehat{E}_1 no es un operador unitario, ya que aparece el operador proyección $|0\rangle \langle 0|$ como se demostró en la ecuación 1.24. Para el operador \widehat{E}_2 se tiene

$$\widehat{E}_2 \widehat{E}_2^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+2| n'+2\rangle \langle n'| = \widehat{1} \quad (2.37)$$

pero

$$\widehat{E}_2^\dagger \widehat{E}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} |n'+2\rangle \langle n'|n\rangle \langle n+2| = \sum_{n=0}^{\infty} |n+2\rangle \langle n+2| = \widehat{1} - |1\rangle \langle 1| - |0\rangle \langle 0| \quad (2.38)$$

Se observa que la presencia de los operadores proyección $|1\rangle \langle 1|$ y $|0\rangle \langle 0|$ hacen que el operador \widehat{E}_2 no sea un operador unitario

Si se analiza ahora el producto del m-ésimo operador exponencial de fase \widehat{E}_m , con su operador adjunto \widehat{E}_m^\dagger como sigue

$$\widehat{E}_m \widehat{E}_m^\dagger = \widehat{1} \quad (2.39)$$

pero

$$\widehat{E}_m^\dagger \widehat{E}_m = \widehat{1} - \sum_{n=0}^{m-1} |n\rangle \langle n| \quad (2.40)$$

Al igual que para \widehat{E}_2 el operador $\sum_{n=0}^{m-1} |n\rangle \langle n|$ estropea la unitariedad del operador \widehat{E}_m .

Es importante notar que cuando $m \rightarrow \infty$ se tiene que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{m-1} |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \widehat{1} \quad (2.41)$$

luego se tiene

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{E}_m^\dagger \widehat{E}_m = \widehat{0} \quad (2.42)$$

El conmutador de este operador exponencial con su adjunto conjugado es

$$\begin{aligned} [\widehat{E}_m, \widehat{E}_m^\dagger] &= \widehat{1} - \left(\widehat{1} - \sum_{n=0}^{m-1} |n\rangle \langle n| \right) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} |n\rangle \langle n| \end{aligned} \quad (2.43)$$

si se toma $m \rightarrow \infty$ el conmutador es

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\widehat{E}_m, \widehat{E}_m^\dagger] = \widehat{1}. \quad (2.44)$$

El conmutador entre el operador exponencial de fase \widehat{E}_m y el operador número de fotones \widehat{N} , reemplazando el valor de \widehat{E}_m ecuación (2.27) se obtiene:

$$[\widehat{E}_m, \widehat{N}] = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+m| \widehat{N} - \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{N} |n\rangle\langle n+m| \quad (2.45)$$

donde tenemos en cuenta el resultado de aplicar el operador \widehat{N} a la izquierda al dual correspondiente del estado $|n+m\rangle$ que resulta en $\langle n+m| \widehat{N} = (n+m)$, y aplicarlo al estado $|n\rangle$ que es $\widehat{N}|n\rangle = n$, reemplazando estos resultados

$$\begin{aligned} [\widehat{E}_m, \widehat{N}] &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) |n\rangle\langle n+m| - \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle\langle n+m| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle\langle n+m| + \sum_{n=0}^{\infty} m |n\rangle\langle n+m| - \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle\langle n+m| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} m |n\rangle\langle n+m| \\ &= m \widehat{E}_m \end{aligned} \quad (2.46)$$

Realizando cálculos semejantes se demuestra el valor del conmutador entre el operador exponencial de fase \widehat{E}_m^\dagger con el operador número de fotones \widehat{N} , para esto se toma en cuenta el valor de \widehat{E}_m^\dagger dado por la ecuación (2.36)

$$\begin{aligned} [\widehat{E}_m^\dagger, \widehat{N}] &= \widehat{E}_m^\dagger \widehat{N} - \widehat{N} \widehat{E}_m^\dagger \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |n+m\rangle\langle n| \widehat{N} - \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{N} |n+m\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n |n+m\rangle\langle n| - \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) |n+m\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n |n+m\rangle\langle n| - \sum_{n=0}^{\infty} n |n+m\rangle\langle n| - \sum_{n=0}^{\infty} m |n+m\rangle\langle n| \\ &= -m \sum_{n=0}^{\infty} |n+m\rangle\langle n| \\ &= -m \widehat{E}_m^\dagger. \end{aligned} \quad (2.47)$$

La aplicación del operador exponencial \widehat{E}_m de fase sobre el estado número de fotones $|n\rangle$ es:

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_m |n\rangle &= \sum_{n'}^{\infty} |n'\rangle \langle n' + m | n \rangle \\
&= \sum_{n'}^{\infty} |n'\rangle \delta_{n'+m, n} \\
&= |n - m\rangle \quad \forall n \geq m
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Es de notar que la aplicación del operador exponencial actúa como un operador escalera que disminuye m -veces el estado de energía.

Cuando $n = m$ la aplicación del operador exponencial sobre el estado $|m\rangle$ es precisamente el estado de vacío

$$\widehat{E}_m |m\rangle = |0\rangle \tag{2.49}$$

El operador \widehat{E}_m^\dagger aplicado sobre los estados $|n\rangle$

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_m^\dagger |n\rangle &= \sum_{n'} |n' + m\rangle \langle n' | n \rangle \\
&= \sum_{n'} |n' + m\rangle \delta_{n', n} \\
&= |n + m\rangle
\end{aligned} \tag{2.50}$$

(2.51)

que actúa como un operador de creación que aumenta m -veces el estado de energía.

Con lo anterior podemos deducir la aplicación del operador exponencial y su adjunto conjugado sobre los estados numeral (2.10)

$$\widehat{E}_m |n\rangle = \sum_n |n - m\rangle \quad \forall n \geq m \tag{2.52}$$

$$\widehat{E}_m^\dagger |n\rangle = \sum_n |n + m\rangle \tag{2.53}$$

De la misma forma se demuestran las diferentes relaciones de conmutación entre el operador exponencial, su adjunto conjugado y la transformación de Fourier fraccionaria.

Conmutador entre el operador exponencial y el operador transformación de Fourier fraccionario

$$[\widehat{E}_m, \widehat{\mathcal{F}}_\Phi] = \widehat{E}_m \widehat{\mathcal{F}}_\Phi - \widehat{\mathcal{F}}_\Phi \widehat{E}_m \tag{2.54}$$

reemplazando el valor del operador exponencial (2.27)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+m| \widehat{\mathcal{F}}_{\Phi} - \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_{\Phi} |n\rangle \langle n+m| \quad (2.55)$$

operando la transformación de Fourier fraccionaria a los estados número

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+m| e^{i(n+m)\phi} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi} |n\rangle \langle n+m| \quad (2.56)$$

abriendo el exponencial

$$= e^{im\Phi} \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+m| e^{in\Phi} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Phi} |n\rangle \langle n+m| \quad (2.57)$$

factorizando

$$= (e^{im\Phi} - 1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Phi} |n\rangle \langle n+m| \quad (2.58)$$

y donde el resultado de $e^{in\Phi} |n\rangle = \widehat{\mathcal{F}}_{\Phi} |n\rangle$ entonces se tiene

$$= (e^{im\Phi} - 1) \widehat{\mathcal{F}}_{\Phi} \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+m| \quad (2.59)$$

$$= (e^{im\Phi} - 1) \widehat{\mathcal{F}}_{\Phi} \widehat{E}_m \quad (2.60)$$

Conmutador entre el operador exponencial de fase \widehat{E}_m con el adjunto del operador transformación de Fourier fraccionaria $\widehat{\mathcal{F}}_{\Phi}^{\dagger}$.

$$\begin{aligned} [\widehat{E}_m, \widehat{\mathcal{F}}_{\Phi}^{\dagger}] &= \widehat{E}_m \widehat{\mathcal{F}}_{\Phi}^{\dagger} - \widehat{\mathcal{F}}_{\Phi}^{\dagger} \widehat{E}_m \quad (2.61) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+m| \widehat{\mathcal{F}}_{\Phi}^{\dagger} - \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_{\Phi}^{\dagger} |n\rangle \langle n+m| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+m| e^{i(n+m)\Phi} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\Phi} |n\rangle \langle n+m| \\ &= (e^{-im\Phi} - 1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Phi} |n\rangle \langle n+m| \\ &= (e^{-im\Phi} - 1) \widehat{\mathcal{F}}_{\Phi}^{\dagger} \widehat{E}_m. \end{aligned}$$

Conmutador entre el adjunto del operador exponencial de fase \widehat{E}_m con el operador transformación de Fourier fraccionaria

$$\begin{aligned}
[\widehat{E}_m^\dagger, \widehat{\mathcal{F}}_\Phi] &= \widehat{E}_m^\dagger \widehat{\mathcal{F}}_\Phi - \widehat{\mathcal{F}}_\Phi \widehat{E}_m^\dagger \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |n+m\rangle \langle n| \widehat{\mathcal{F}}_\Phi - \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_\Phi |n+m\rangle \langle n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |n+m\rangle \langle n| e^{in\Phi} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+m)\Phi} |n+m\rangle \langle n| \\
&= (1 + e^{im\Phi}) \sum_{n=0}^{\infty} |n+m\rangle \langle n| e^{in\Phi} \\
&= (1 + e^{im\Phi}) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |n+m\rangle \langle n| \right) \widehat{\mathcal{F}}_\Phi \\
&= (e^{im\phi} - 1) \widehat{E}_m^\dagger \widehat{\mathcal{F}}_\Phi.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Conmutador entre el adjunto del operador exponencial de fase \widehat{E}_m con el adjunto del operador transformación de Fourier fraccionaria

$$\begin{aligned}
[\widehat{E}_m^\dagger, \widehat{\mathcal{F}}_\Phi^\dagger] &= \widehat{E}_m^\dagger \widehat{\mathcal{F}}_\Phi^\dagger - \widehat{\mathcal{F}}_\Phi^\dagger \widehat{E}_m^\dagger \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |n+m\rangle \langle n| \widehat{\mathcal{F}}_\Phi^\dagger - \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_\Phi^\dagger |n+m\rangle \langle n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |n+m\rangle \langle n| e^{-in\Phi} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+m)\Phi} |n+m\rangle \langle n| \\
&= (1 + e^{im\Phi}) \sum_{n=0}^{\infty} |n+m\rangle \langle n| e^{-in\Phi} \\
&= (1 - e^{-im\Phi}) \widehat{\mathcal{F}}_\Phi^\dagger \widehat{E}_m^\dagger.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Estas propiedades son de gran importancia ya que se desea determinar el resultado de aplicar el operador de fase cuántico (2.22) a los estados de fase, para esto deseamos saber el resultado de aplicar los operadores $\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \widehat{E}_m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger$ a los estados de fase $|\Phi\rangle$

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \widehat{E}_m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger |\Phi\rangle = \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \widehat{E}_m \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\Phi-\theta_m)} |n\rangle \tag{2.64}$$

dónde $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\Phi-\theta_m)} |n\rangle$ es el estado $|\Phi - \theta_m\rangle$ se tiene

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \widehat{E}_m \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\Phi-\theta_m)} |n\rangle = \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \widehat{E}_m |\Phi - \theta_m\rangle \tag{2.65}$$

$$= \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} e^{im(\Phi-\theta_m)} |\Phi - \theta_m\rangle \quad (2.66)$$

$$= e^{im(\Phi-\theta_m)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Phi} |n\rangle \quad (2.67)$$

$$= e^{im(\Phi-\theta_m)} |\Phi\rangle \quad (2.68)$$

este resultado demuestra que la aplicación del operador $\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \widehat{E}_m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger$ agrega una fase θ_m a los estados de fase $|\Phi\rangle$.

Capítulo 3

FASE EN LOS PRINCIPALES ESTADOS DEL MODO ÚNICO DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

En la sección previa encontramos una nueva forma de escribir los estados de fase introduciendo la transformación de Fourier fraccionaria y que lleva a un operador de fase cuántico que permite medir la fase cuántica para describir las propiedades de fase de los principales estados del campo electromagnético.

SECTION 3.1

ANÁLISIS DE LA FASE DE LOS ESTADOS NÚMERO DE FOTONES $|n\rangle$

Empezamos nuestro análisis de la fase determinando la distribución de fase para los estados número de fotones, donde la probabilidad de medir un valor particular de la

fase en el espacio $s + 1$ dimensional es

$$P_n(\theta_m) = \frac{s+1}{2\pi} |\langle \theta_m | n \rangle|^2 \quad (3.1)$$

los estados de fase $|\theta_m\rangle$ son los estados que tienen incluida la transformación de Fourier fraccionaria en el subespacio $s+1$ dimensional (2.9), realizando el producto interno

$$\langle \theta_m | n \rangle = \sum_{n=0}^s \langle n | \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger | n \rangle \quad (3.2)$$

operando la transformación de Fourier fraccionaria sobre los estados número

$$\langle \theta_m | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n'=0}^s \langle n' | n \rangle e^{-in\theta_m} = \frac{1}{\sqrt{s+1}} e^{-in\theta_m} \quad (3.3)$$

con el anterior resultado la norma al cuadrado está dada por

$$|\langle \theta_m | n \rangle|^2 = \frac{1}{s+1} \quad (3.4)$$

reemplazando estos valores en la ecuación de distribución de fase para los estados número (3.1), obtenemos

$$P_n(\theta_m) = \frac{1}{2\pi}. \quad (3.5)$$

Esto muestra que la distribución de fase de los estados número es aleatoria, es decir que toda fase es igualmente probable, lo cual es consistente con las medidas de incertidumbre en fase para los estados número de fotones.

Gráficamente

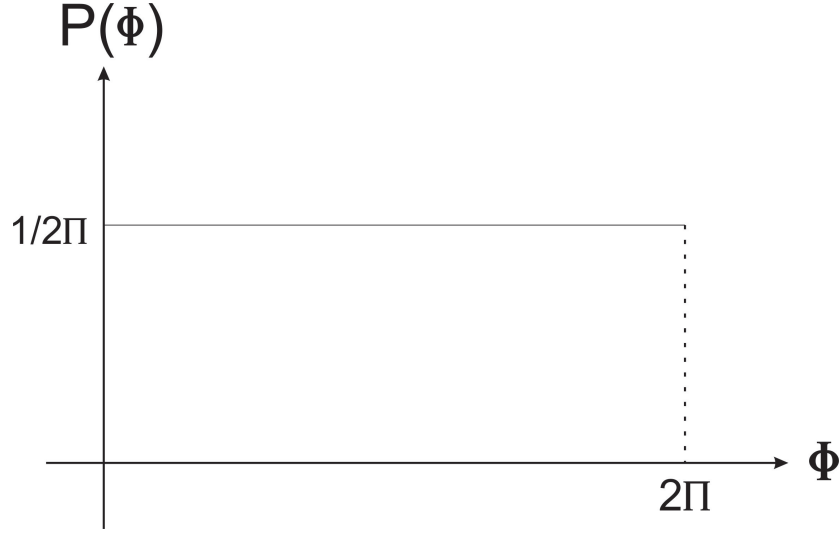


Figura 3.1: Distribución de fase para los estados número de fotones

En la figura 3.1 se muestra que la distribución de fase de los estados número es una distribución de fase uniforme como se esperaba.

El operador encontrado (2.22), permite una descripción de las propiedades de fase de los estados del campo electromagnético.

El valor esperado del operador de fase en un estado número está dado por la siguiente:

$$\langle n | \widehat{\Phi}_\theta | n \rangle = \langle n | \left[\theta_o + \pi \frac{s}{(s+1)} + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_m^s \sum_{n \neq n'} m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} | n \rangle \langle n' | \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger | n \rangle \right] | n \rangle \quad (3.6)$$

$$\langle n | \widehat{\Phi}_\theta | n \rangle = \theta_o \langle n | n \rangle + \pi \frac{s}{(s+1)} \langle n | n \rangle + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_m^s \sum_{n \neq n'} m \langle n | \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} | n \rangle \langle n' | \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger | n \rangle \quad (3.7)$$

$$\langle n | \widehat{\Phi}_\theta | n \rangle = \theta_o + \pi \frac{s}{(s+1)} \quad (3.8)$$

éste resultado llega a ser un valor esperado real en el límite cuando s tiende a infinito [2]

$$\langle n | \widehat{\Phi}_\theta | n \rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\theta_o + \pi \frac{s}{(s+1)} \right) = \theta_o + \pi \quad (3.9)$$

De forma similar se usan los resultados encontrados con la transformación de Fourier fraccionaria para determinar las fluctuaciones de fase para los estados número de fotones.

Se toma el operador cuadrado de fase y reemplazamos los valores de los estados escritos como una TFF_r se obtiene:

$$\widehat{\Phi}_\theta^2 = \sum_{n=0}^s \theta_m^2 |\theta_m\rangle \langle \theta_m| \quad (3.10)$$

las fluctuaciones de fase está dada por

$$\langle n | \widehat{\Phi}_\theta^2 | n \rangle = \sum_{n=0}^s \theta_m^2 |\langle \theta_m | n \rangle|^2 \quad (3.11)$$

donde

$$\theta_m^2 = \left(\theta_o + \frac{2\pi}{s+1} m \right)^2 \quad (3.12)$$

tomando los valores obtenidos en la ecuación (3.4) la fluctuación de fase será

$$\begin{aligned} \langle n | \widehat{\Phi}_\theta^2 | n \rangle &= \frac{1}{s+1} \sum_{m=0}^s \left(\theta_o^2 + \frac{4\pi}{s+1} m + \frac{4\pi^2}{(s+1)^2} m^2 + \frac{\pi s}{s+1} \right) \\ &= \frac{1}{s+1} \sum_{m=0}^s \theta_o^2 + \frac{4\pi}{(s+1)^2} \sum_{m=0}^s m + \frac{4\pi^2}{(s+1)^3} \sum_{m=0}^s m^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

realizando las sumatorias y simplificando, la fluctuación de fase es

$$\langle n | \widehat{\Phi}_\theta^2 | n \rangle = \theta_o^2 + 2\theta_o\pi \frac{s}{s+1} + \frac{2}{3}\pi^2 \frac{s(2s+1)}{(s+1)^2} \quad (3.14)$$

este es el resultado para las fluctuaciones de fase de los estados número en el subespacio $s+1$ dimensional usando los estados de fase como una transformación de Fourier fraccionaria.

Tomando el límite cuando s tiende a infinito

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \langle \widehat{\Phi}_\theta^2 \rangle_n = \theta_o^2 + 2\theta_o\pi + \frac{4}{3}\pi^2 \quad (3.15)$$

se obtiene para todo estado número incluyendo el estado de vacío

$$\langle n | \widehat{\Phi}_\theta^2 | n \rangle - \langle n | \Phi_\theta | n \rangle^2 = \frac{\pi^2}{3}. \quad (3.16)$$

Este resultado verifica que todo estado número incluyendo el estado de vacío posee una fase completamente aleatoria como es de esperar, ya que cumple el principio de incertidumbre debido a que una incertidumbre nula del número de fotones implica una máxima incertidumbre en la fase.

SECTION 3.2

ANÁLISIS DE LA FASE DE LOS ESTADOS COHERENTES $|\alpha\rangle$

Las propiedades de los estados coherentes son examinadas desde el punto de vista del formalismo de Pegg y Barnett incluyendo la definición encontrada de los estados de fase como una transformación de Fourier fraccionaria del estado de fase cero. La distribución de fase de los estados coherentes está dada por

$$P_\alpha(\theta_m) = |\langle\theta_m|\alpha\rangle|^2 \quad (3.17)$$

reemplazamos el valor del estado coherente en la base de estados número de fotones (1.47) al igual que los estados de fase (1.30) para encontrar la amplitud de fase

$$\langle\theta_m|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \langle\#|\widehat{F}_{\theta_m}^\dagger|\alpha\rangle \quad (3.18)$$

Escribiendo α en su forma polar, en términos de una amplitud r y una fase ξ de tal forma que $\alpha = re^{i\xi}$, se tiene:

$$\langle\theta_m|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} e^{-r^2/2} \sum_n^s \sum_{n'}^\infty \frac{r^{n'}}{\sqrt{n'!}} e^{in'\xi} \langle n|\widehat{F}_{\theta_m}^\dagger|n'\rangle \quad (3.19)$$

aplicando la transformación de Fourier fraccionaria al estado número de fotones

$$\langle\theta_m|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} e^{-r^2/2} \sum_n^s \frac{r^n}{\sqrt{n!}} e^{in(\xi-\theta_m)}. \quad (3.20)$$

Con éste resultado se calcula la distribución de fase cuántica de los estados coherentes

$$P_\alpha(\theta_m) = \frac{1}{s+1} |e^{-r^2/2} \sum_n^s \frac{r^n}{\sqrt{n!}} e^{in(\xi-\theta_m)}|^2 \quad (3.21)$$

Graficando esta expresión para $r = 0, 1, 4$, y se toma un valor grande para r con el fin de garantizar que los resultados sean posibles. Por ejemplo $s = 100$, y se escoge el valor de θ_0 como $-\pi$

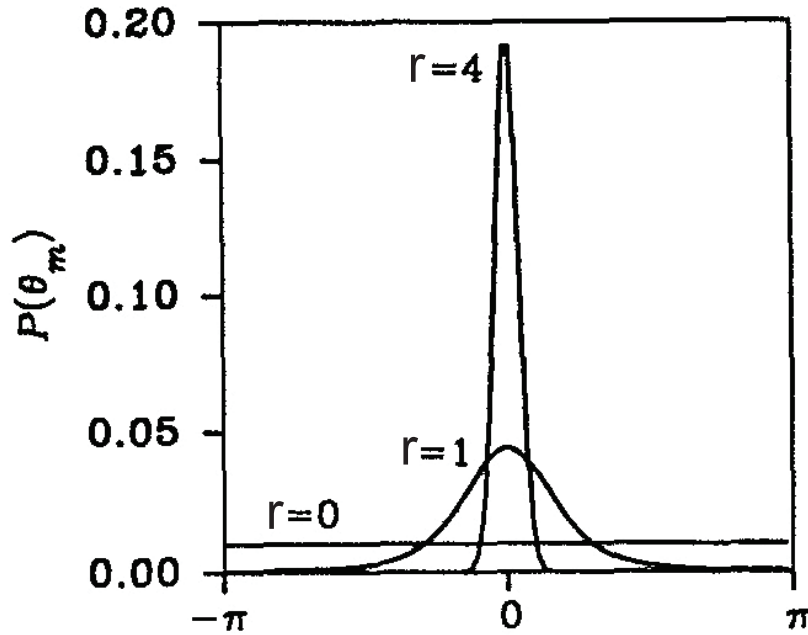


Figura 3.2: Distribución de fase para los estados coherentes

En la figura anterior 3.2 para $r = 0$ se tiene el estado de vacío, la distribución de fase es uniforme y tiene el mismo valor que la distribución de fase de los estados número de fotones como era de esperar, (ver figura 3.1). Para los otros valores de r las distribuciones son gaussianas donde se muestra que al aumentar r la varianza es más pequeña.

El valor esperado del operador de fase (2.22) para los estados coherentes es:

$$\langle \alpha | \hat{\Phi}_\theta | \alpha \rangle = \langle \alpha | \theta_o + \pi \frac{s}{(s+1)} + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_m^s m \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \hat{E}_\Phi \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger | \alpha \rangle \quad (3.22)$$

reemplazando el valor del estado coherente en base de estados número de fotones se tiene:

$$\langle \alpha | \hat{\Phi}_\theta | \alpha \rangle = \theta_o + \pi \frac{s}{s+1} + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \langle \alpha | \sum_m^s m \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \hat{E}_\Phi \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger | \alpha \rangle \quad (3.23)$$

determinamos el resultado de la aplicación de estos operadores sobre el estado coherente

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \widehat{E}_m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger |\alpha\rangle \quad (3.24)$$

Se empieza por la aplicación del operador transformación de Fourier fraccionaria adjunto conjugado $\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger$ sobre el estado coherente $|\alpha\rangle$

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-in\theta_m} |n\rangle \quad (3.25)$$

Escribiendo $\alpha = re^{i\xi}$:

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger |\alpha\rangle = e^{-r^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\sqrt{n!}} e^{in(\xi-\theta_m)} |n\rangle. \quad (3.26)$$

Aplicando el operador exponencial \widehat{E}_m sobre este mismo estado (3.26)

$$\widehat{E}_m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger |\alpha\rangle = e^{-r^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\sqrt{n!}} e^{in(\xi-\theta_m)} \widehat{E}_m |n\rangle \quad (3.27)$$

Haciendo uso de la propiedad del operador exponencial de fase (2.22) tenemos:

$$\widehat{E}_m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger |\alpha\rangle = e^{-r^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\sqrt{n!}} e^{in(\xi-\theta_m)} |n-m\rangle. \quad (3.28)$$

Y por último aplicando el operador transformación de Fourier fraccionario al resultado anterior

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \widehat{E}_m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger |\alpha\rangle = e^{-r^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\sqrt{n!}} e^{in(\xi-\theta_m)} e^{i(n-m)\theta_m} |n-m\rangle \quad (3.29)$$

simplificando

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m} \widehat{E}_m \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger |\alpha\rangle = e^{-r^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\sqrt{n!}} e^{i(n\xi-m\theta_m)} |n-m\rangle \quad (3.30)$$

reemplazando el valor del estado coherente en la base de estados número la parte donde se involucra este estado:

$$\langle \alpha | \widehat{\Phi}_\theta | \alpha \rangle = \theta_o + \pi \frac{s}{s+1} + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \langle \alpha | \sum_m m e^{-r^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\sqrt{n!}} e^{i(n\xi-m\theta_m)} |n-m\rangle \quad (3.31)$$

reemplazando el valor del estado coherente adjunto conjugado $\langle \alpha |$ en la base de estados número se tiene:

$$= \theta_0 + \frac{\pi s}{s+1} + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_m m e^{-r^2} \sum_n \sum_{n'} \frac{r^{2n-m}}{\sqrt{(n-m)!} \sqrt{n!}} e^{-in'\xi} e^{in(\xi-\theta_m)} e^{i(n-m)\theta_m} \langle n' | n-m \rangle \quad (3.32)$$

del producto interno tenemos:

$$\langle n' | n-m \rangle = \delta_{n', n-m} \quad (3.33)$$

simplificando obtenemos que el valor esperado tiene la siguiente forma:

$$\langle \alpha | \hat{\theta}_m | \alpha \rangle = \theta_0 + \frac{\pi s}{s+1} + \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_m m e^{-r^2} \sum_n \frac{r^{2n-m}}{\sqrt{(n-m)!} \sqrt{n!}} e^{im(\xi-\theta_m)} \quad (3.34)$$

este es el valor esperado de fase en la base de estados coherentes.

SECTION 3.3

ANÁLISIS DE LA FASE DE LOS ESTADOS TÉRMICOS

La distribución de fase para los estados térmicos está dada por

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \langle \theta | \hat{\rho}_{Th} | \theta \rangle \quad (3.35)$$

donde consideramos los estados de fase (2.9) y el operador densidad dado para los estados térmicos (1.58)

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi(s+1)(1+\bar{n})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n \langle \# | \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger | n \rangle \langle n | \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m} | \# \rangle \quad (3.36)$$

reemplazando el valor de los estados $|\# \rangle$ dados por la ecuación (2.10) obtenemos

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi(s+1)(1+\bar{n})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n \sum_{n'=0}^s \langle n' | \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger | n \rangle \langle n | \hat{\mathcal{F}}_{\theta_m} | n' \rangle \quad (3.37)$$

operando la transformación de Fourier fraccionaria a los estados número $|n\rangle$ y realizando la suma tenemos

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi(1-\bar{n})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n \quad (3.38)$$

cuyo resultado es

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad (3.39)$$

Donde este resultado es característico de un sistema que posee una fase completamente aleatoria que está [4] entre 0 y 2π , muy semejante a los resultados obtenidos para la distribución de fase de los estados número de fotones $|n\rangle$. Estos son consistentes con los resultados obtenidos en la teoría [6]. esta distribución puede ser usada para calcular los promedios, tales como el valor esperado dado por

$$\langle \hat{\theta} \rangle_{Th} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta P(\theta) d\theta \quad (3.40)$$

y la fluctuación de fase

$$\langle \hat{\theta}^2 \rangle_{Th} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta^2 P(\theta) d\theta \quad (3.41)$$

Debido a que la distribución de fase es uniforme el valor esperado es π y la fluctuación de fase $4\pi^2/3$ y así su incertidumbre es

$$\Delta \hat{\theta} = \sqrt{\langle \hat{\theta}^2 \rangle_{Th} - \langle \hat{\theta} \rangle_{Th}^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (3.42)$$

que son los mismos resultados obtenidos para los estados número de fotones y está de acuerdo con la teoría de que son estados de fase aleatoria.

SECTION 3.4

ANÁLISIS DE LA FASE DE LOS ESTADOS ESTRANGULADOS (SQUEEZED) $|\xi\rangle$

La distribución de la fase para los estados estrangulados está escrita por

$$P_{\xi}(\theta) = |\langle \theta | \alpha, \xi \rangle|^2 \quad (3.43)$$

donde los estados estrangulados están dados por la ecuación (1.52), y reemplazando junto con los estados de fase (2.9) tenemos que la densidad de fase para los estados estrangulados está dada por la expresión

$$P_\xi(\theta) = \frac{1}{s+1} \left| \sum_{n=0}^s \langle n | \widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger \widehat{D}(\alpha) \widehat{S}(\xi) | 0 \rangle \right|^2 \quad (3.44)$$

Donde se aprecia la transformación de Fourier fraccionaria. En estudios subsecuentes se deben a realizar los cálculos pertinentes para determinar la distribución de la fase aplicando las propiedades de la transformación de Fourier de orden fraccional y realizando los diferentes conmutadores entre los operadores $\widehat{\mathcal{F}}_{\theta_m}^\dagger$, $\widehat{D}(\alpha)$ y $\widehat{S}(\xi)$.

Capítulo 4

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

El desarrollo del trabajo contempla el estudio de la fase cuántica teniendo en cuenta la transformación de Fourier fraccionaria que es deducida en los estados de la fase en los formalismos de Sussking-Glogower y Pegg-Barnett.

Inicialmente se da cuenta que en los formalismos de Sussking - Glogower y Pegg - Barnett hay una transformación de Fourier de orden fraccional que permite formular los estados de la fase de una forma más sencilla y permite utilizar las propiedades de la transformación de Fourier fraccionaria al estudio de la fase.

Se formula el operador de fase cuántico que incluye la transformación de Fourier fraccionaria, el cual es utilizado para determinar el valor esperado, fluctuaciones y la incertidumbre en la fase de los estados del campo electromagnético tratados en el presente trabajo.

Encontramos las distribuciones de fase para los estados número, coherentes, térmicos y estrangulados (squeezed), usando los estados de la fase en el formalismo de Pegg y Barnett, que incluyen la transformación de Fourier fraccionaria, con lo cual se abre un nuevo camino para estudiar la fase.

Con éste trabajo se da apertura a una nueva forma de estudiar la fase cuántica, un tema que ha sido de gran debate a lo largo de la historia y que aún es objeto de estudio. Se espera seguir con estudios de la fase cuántica aplicando esta nueva formulación que como se muestra en el trabajo es consistente con los resultados obtenidos en la teoría

hasta ahora desarrollada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BARNETT, S., AND PEGG, D. On the hermitian optical phase operator. *Journal of Modern Optics* 36, 1 (1989), 7–19.
- [2] BARNETT, S. M., AND VACCARO, J. A. *The quantum phase operator: a review*. Taylor & Francis, 2007.
- [3] DIRAC, P. A. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. In *Proc. Royal Soc. London, Series A* (1927), vol. 114, p. 243.
- [4] GERRY, C., AND KNIGHT, P. *Introductory quantum optics*. Cambridge university press, 2005.
- [5] LOUISELL, W. Amplitude and phase uncertainty relations. *Physics Letters* 7, 1 (1963), 60–61.
- [6] MANDEL, L., AND WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press, 1995.
- [7] NAMIAS, V. The fractional order fourier transform and its application to quantum mechanics. *IMA Journal of Applied Mathematics* 25, 3 (1980), 241–265.
- [8] NIETO, M. M. Quantum phase and quantum phase operators: some physics and some history. *Physica scripta* 1993, T48 (1993), 5.
- [9] OZAKTAS, H. M., KUTAY, M. A., AND MENDLOVIC, D. Introduction to the fractional fourier transform and its applications. *Advances in imaging and electron physics* 106 (1999), 239–291.
- [10] PARKER, M. A. *Physics of optoelectronics*. CRC Press, 2005.
- [11] PEGG, D., AND BARNETT, S. Unitary phase operator in quantum mechanics. *EPL (Europhysics Letters)* 6, 6 (1988), 483.
- [12] PEGG, D. T., AND BARNETT, S. M. Quantum optical phase. *Journal of Modern Optics* 44, 2 (1997), 225–264.

- [13] SUSSKIND, L., AND GLOGOWER, J. Quantum mechanical phase and time operator. Tech. rep., Cornell Univ., Ithaca, NY, 1964.
- [14] ZETTLI, N. *Quantum mechanics: concepts and applications*. John Wiley & Sons, 2009.

Apéndice **A**

ESTADOS PROPIOS DE FASE

Demostración de los estados de fase de Sussking y Glogower.

Los operadores exponenciales de Sussking y Glogower (1.21) son una función exponencial del operador de fase por lo cual es correcto afirmar que se cumple la ecuación de valores propios

$$\hat{\mathcal{E}}|\Phi\rangle = e^{i\Phi}|\Phi\rangle \quad (\text{A.1})$$

donde $|\Phi\rangle$ son los estados propios del operador de fase $\hat{\Phi}$. Los estados de fase se pueden escribir como una combinación lineal de los estados de número de fotones o estados de Fock $|n\rangle$

$$|\Phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Se determina el valor de la constante C_n , para esto se sustituye el operador exponencial ecuación (1.21) y los estados de fase (2) de la ecuación (1) se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+1| \left(\sum_{n'=0}^{\infty} C_{n'} |n'\rangle \right) = e^{i\Phi} \sum_{n'=0}^{\infty} C_{n'} |n'\rangle \quad (\text{A.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} C_{n'} |n\rangle \langle n+1|n'\rangle = e^{i\Phi} \sum_{n'=0}^{\infty} C_{n'} |n'\rangle \quad (\text{A.4})$$

donde el producto interno $\langle n + 1 | n' \rangle = \delta_{n+1, n'}$ la delta de Dirac es igual a uno solo cuando $n = n' - 1$ tenemos la ecuación

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n'} |n' - 1\rangle = e^{i\Phi} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} |n + 1\rangle \quad (\text{A.5})$$

esta ecuación se satisface solo si los coeficientes de ambos lados son iguales

$$C_{n+2} = e^{i\Phi} C_{n+1} \quad (\text{A.6})$$

luego se cumple

$$C_n = e^{i\Phi} C_{n-1} \quad (\text{A.7})$$

esta es una fórmula de recurrencia luego por acción repetida tenemos

$$C_n = e^{i\Phi} C_{n-1} = e^{i2\Phi} C_{n-2} = \dots = e^{in\Phi} C_o \quad (\text{A.8})$$

así que los estados de fase son

$$|\Phi\rangle = C_o \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Phi} |n\rangle \quad (\text{A.9})$$

tomando la constante $C_o = 1$ se tiene los estados de fase como

$$|\Phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Phi} |n\rangle, \quad (\text{A.10})$$

Apéndice **B**

OPERADOR DE FASE DE PEGG Y BARNETT

El operador hermítico que representa el ángulo de fase introducido por Pegg y Barnet [1], dado por la ecuación 1.35, y tomando $\theta_m = \theta_o + \frac{2\pi m}{s+1}$ y reemplazando este valor en el operador (1.35) se tiene:

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_\theta &= \sum_{m=0}^s \left(\theta_o + \frac{2\pi m}{s+1} \right) |\theta_m\rangle\langle\theta_m| \\ &= \theta_o \sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle\langle\theta_m| + \frac{2\pi}{s+1} \sum_{m=0}^s m |\theta_m\rangle\langle\theta_m|\end{aligned}\tag{B.1}$$

tomando en cuenta que $|\theta_m\rangle$ es una base completa ortonormal como se demostro en la ecuación (2.13) resulta

$$\widehat{\Phi}_\theta = \theta_o + \frac{2\pi}{s+1} \sum_{m=0}^s m |\theta_m\rangle\langle\theta_m|\tag{B.2}$$