

**ESTIMACIÓN DE LA GENERACIÓN INTERNA DE CALOR VARIABLE EN EL  
TIEMPO EN SÓLIDOS CALENTADOS CON MICROONDAS, MEDIANTE  
ANÁLISIS DE SU CORRESPONDIENTE PROBLEMA INVERSO**

**JUAN CARLOS LÓPEZ ROJAS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA  
Y DE TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA**

**2016**

**ESTIMACIÓN DE LA GENERACIÓN INTERNA DE CALOR VARIABLE EN EL  
TIEMPO EN SÓLIDOS CALENTADOS CON MICROONDAS, MEDIANTE  
ANÁLISIS DE SU CORRESPONDIENTE PROBLEMA INVERSO**

**JUAN CARLOS LÓPEZ ROJAS**

**Trabajo de grado para optar al título de  
Ingeniero electrónico**

**DIRECTOR:**

**Profesor RODRIGO CORREA, Ph.D.**

**CODIRECTOR**

**Estudiante de maestría, Ing. EDGAR GARCÍA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA  
Y DE TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA**

**2016**

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	13
1 DESCRIPCIÓN DE TRABAJO DE GRADO.....	15
1.1 Planteamiento del problema .....	15
1.2 Objetivo general.....	15
1.3 Objetivos específicos.....	15
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....	16
2.1 Carburo de silicio (sic) .....	16
2.2 Calentamiento con microondas.....	17
2.3 Aplicadores de microondas.....	18
2.4 Generación de calor.....	20
2.5 Problemas inversos .....	22
2.6 Algoritmo optimización de la espiral.....	22
3 PRUEBAS DEL MÉTODO DEL ALGORITMO ESPIRAL .....	26
3.1 Función rastrigin .....	27
3.2 Función de schwefel's .....	30
3.3 Función de griewank.....	33
3.4 Función de 2n mínima .....	36
4 PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS DIRECTO E INVERSO .....	41
4.1 Planteamiento del problema directo.....	41
4.1.1 Solución del problema directo.....	42
4.2 Planteamiento del problema inverso .....	43
5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO PARA LA ESTIMACIÓN DE LA GENERACIÓN INTERNA DE CALOR EN UN SÓLIDO CON GEOMETRÍA ESFÉRICA .	45
5.1 Selección de los parámetros radio ( $R$ ) y theta ( $\theta$ ).....	45

5.2 Estimación de la generación interna de calor por medio del algoritmo de la espiral.....	50
5.2.1 resultados obtenidos. ....	50
5.3 contraste de resultados.....	52
5.3.1 contraste del metodo de la espiral con levenberg marquardt.....	53
6 CONCLUSIONES.....	57
7 RECOMENDACIONES.....	59
CITAS BIBLIOGRÁFICAS .....	60
BIBLIOGRAFÍA.....	61
ANEXOS .....	62

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Espiral en dos dimensiones.....	25
Figura 2. Trayectoria de la espiral en 2 dimensiones con $\Theta = \pi/4$ y $R = 0,95$ , en la función Rastrigin.....	29
Figura 3. Convergencia del algoritmo en la función Rastrigin. ....	29
Figura 4. Trayectoria de la espiral en 2 dimensiones con $\Theta = \pi/4$ y $R = 0,95$ , en la función Schwefel's. ....	32
Figura 5. Convergencia del algoritmo en la función Schwefel's. ....	32
Figura 6. Trayectoria de la espiral en 2 dimensiones con $\Theta = \pi/4$ y $R = 0,99$ , en la función Griewank. ....	35
Figura 7. Convergencia del algoritmo en la función Griewank. ....	36
Figura 8. Trayectoria de la espiral en 2 dimensiones con $\Theta = \pi/4$ y $R = 0,99$ , en la función 2N Mínima. ....	38
Figura 9. Convergencia del algoritmo en la función 2N Mínima. ....	39
Figura 10. Distribución de temperatura en la esfera. Con $0 \leq ru < 1, 0 \leq t < 1$ . ....	43
Figura 11. Variación de la temperatura a través del tiempo en el sensor ubicado en el radio de la esfera $ru = 0.5$ . ....	51
Figura 12. Estimación de la generación interna de calor para diferentes niveles de ruido. ....	52
Figura 13. Generación interna de Calor para diferentes niveles de ruido. ....	54
Figura 14. Función Rastrigin para dos dimensiones. ....	62
Figura 15. Grafica de la función Schwefel's, para dos dimensiones. ....	63
Figura 16. Función Griewank, en dos dimensiones. ....	64
Figura 17. Función 2N Mínima, en dos dimensiones. ....	65
Figura 18. Diagrama de bloques del método de la espiral. ....	66
Figura 19. Espirales para $R = 0,1$ y theta $\Theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2$ . ....	67
Figura 20. Espirales para $R = 0,2$ y theta ( $\theta$ ) = $\pi/4, \pi/3, \pi/2$ ....	68
Figura 21. Espirales para $R = 0,3$ y theta ( $\theta$ ) = $\pi/4, \pi/3, \pi/2$ ....	68
Figura 22. Espirales para $R = 0,4$ y theta ( $\theta$ ) = $\pi/4, \pi/3, \pi/2$ ....	69
Figura 23. Espirales para $R = 0,5$ y theta ( $\theta$ ) = $\pi/4, \pi/3, \pi/2$ ....	69

Figura 24. Espirales para  $R = 0,6$  y  $\theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2$  ..... 70  
Figura 25. Espirales para  $R = 0,7$  y  $\theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2$  ..... 70  
Figura 26. Espirales para  $R = 0,8$  y  $\theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2$  ..... 71  
Figura 27. Espirales para  $R = 0,9$  y  $\theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2$  ..... 71  
Figura 28. Espirales para  $R = 0,95$  y  $\theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2$  ..... 72

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Propiedades del Carburo de Silicio. ....	16
Tabla 2. Características del equipo de cómputo.....	26
Tabla 3. Parámetros de las espirales de prueba. ....	27
Tabla 4. Resultados obtenidos con la función Rastrigin.....	28
Tabla 5. Resultados obtenidos con la función de Schwefel’s.....	30
Tabla 6. Resultados obtenidos con la función de Griewank. ....	33
Tabla 7. Resultados obtenidos con la función de 2N Mínima.....	37
Tabla 8. Resultados de las Funciones de Prueba para 200 espirales .....	40
Tabla 9. Planteamiento del problema directo .....	41
Tabla 10. Variables ecuación (13).....	42
Tabla 11. Planteamiento del problema inverso. ....	44
Tabla 12. Parámetros $R$ y theta ( $\theta$ ) utilizados en las pruebas del anexo C.....	46
Tabla 13. Valores óptimos de $R$ y theta ( $\theta$ ) del algoritmo de la espiral.....	46
Tabla 14. Variables a estimar. ....	47
Tabla 15. Estimaciones de $\lambda$ , $A_0$ .....	47
Tabla 16. Preselección ( $R$ ) y ( $\theta$ ) desviación estándar, error y tiempo promedio. ....	48
Tabla 17. Características obtenidas de las espirales de prueba seleccionadas .....	49
Tabla 18. Resultados del problema inverso para diferentes niveles de ruido.....	51
Tabla 19. Estimación de la variable $\lambda$ y $A_0$ . ....	53
Tabla 20. Contraste de Resultados del método Levenberg Marquardt con el algoritmo de la Espiral.....	56

## LISTA DE ANEXOS

Anexo A : Funciones de prueba para el algoritmo de la espiral .....	62
Anexo B: Diagrama de flujo método de la espiral modificado. ....	65
Anexo C. Pruebas realizadas variando $r$ y theta ( $\theta$ ).....	67
Anexo D. Resultados de funciones de prueba .....	73

## RESUMEN

**Título:** Estimación de la generación interna de calor variable en el tiempo en sólidos calentados con microondas, mediante análisis de su correspondiente problema inverso.<sup>1</sup>

**Autor:** Juan Carlos López Rojas.<sup>2</sup>

**Palabras claves:** problema inverso, método de la espiral, microondas, generación interna de calor, Carburo de Silicio.

En el presente trabajo de investigación aplicada se hizo uso del algoritmo de optimización global de la espiral con el fin de resolver un problema inverso. La base principal de este problema consistió en realizar la estimación de la generación interna de calor en un sólido con geometría esférica de Carburo de Silicio (SiC), el cual se seleccionó debido a sus propiedades eléctricas y capacidad de absorción de energía, cuando éste es sometido a un proceso de calentamiento con microondas.

Inicialmente, se hace el planteamiento de la primera ley de la termodinámica en conjunto con las Ecuaciones de Maxwell, para así formular el planteamiento del modelo de calentamiento con microondas (problema directo) y, a partir de su solución, obtener la manera de estructurar el problema inverso correspondiente. Por otro lado, se presentan las diferentes pruebas que se realizaron al algoritmo de la espiral para verificar así su eficacia. Seguidamente, se procedió a dar solución al problema inverso a través del método de la espiral, para de esta manera, estimar la generación interna de calor en el sólido cuando éste es sometido a calentamiento con microondas. Finalmente, los resultados obtenidos se compararon con los obtenidos utilizando el convencional método determinístico de Levenberg-Marquardt.

---

<sup>1</sup> Trabajo de grado

<sup>2</sup> Facultad de ingenierías fisicomecánicas. Escuela de ingenierías eléctrica, electrónica y de telecomunicaciones. Director: Carlos Rodrigo Correa Cely. Codirector: Edgar Sneyder García.

## ABSTRACT

**Title:** Estimation of the internal heat generation variability in time in solids heated with microwave, by analyzing its corresponding inverse problem.<sup>3</sup>

**Author:** Juan Carlos López Rojas.<sup>4</sup>

**Keywords:** inverse problem, Spiral method, microwave, internal heat generation, Silicon carbide.

In the present applied research work, was used the Spiral global optimization algorithm for resolve a inverse problem. This problem consisted in estimate the internal heat generation in a solid with spherical geometry of Silicon carbide (SiC), which was selected due to its electrical properties and energy absorption capacity when it is subjected to a process of microwave heating.

Initially, were proposed the first law of thermodynamics with Maxwell equations in order to formulate the plantation of the microwave heating model (direct problem) and, from its solution, structure the corresponding inverse problem. On the other hand, different tests performed to the Spiral algorithm are presented to verify its efficiency. Subsequently proceeded to solve the inverse problem through the Spiral method, for this way, estimate the internal heat generation in the solid when it is subjected to microwave heating. Finally, the results obtained were compared with the obtained using the Levenberg Marquardt deterministic conventional method.

---

<sup>3</sup> Degree work

<sup>4</sup> Faculty of physico-mechanical engineering. School of electrical, electronics and telecommunications engineering. Advisor: Carlos Rodrigo Correa Cely. Coadvisor: Edgar Sneyder García.

## INTRODUCCIÓN

La generación interna de calor en sólidos, ha sido una variable de interés para diferentes sectores industriales tales como la ingeniería metalúrgica y nuclear, y en campos como las microondas, procesos de fundición y soldaduras, estudio de aleaciones y plásticos, entre otros. Sin embargo, la medición de esta variable en la mayoría de los casos, es difícil de determinar. Esto se debe principalmente a los diferentes sensores de medida, ya sea por su tamaño, espacio disponible para su ubicación o accesibilidad, y por la posible existencia de ambientes corrosivos o explosivos, entre otros [1]. Por ejemplo, para el caso particular de medir la generación interna de calor o alguna otra propiedad térmica durante el calentamiento con microondas en un sólido, es necesario tener en cuenta que no se deben utilizar sensores de contacto, o sensores que estén contruidos con metales ya que resultan afectados por el campo electromagnético irradiado, y consecuentemente pueden tomar lecturas erróneas por la aparición de corrientes inducidas en éste o, peor aún, que éstos puedan actuar como antenas y emitan radiación hacia el exterior [2]. En vista de los hechos resaltados, se ha hecho necesario para la estimación de la generación interna de calor, el planteamiento y solución de un problema inverso de transferencia de calor, el cual, a partir de mediciones de temperatura tomadas en algunos puntos del sólido puede estimar con cierta precisión parámetros del modelo. Estas mediciones son obtenidas a través de la solución de un problema directo, en el que son conocidas las características térmicas del medio, condiciones de frontera, condiciones iniciales, flujo térmico, entre otras y donde su solución satisface el criterio de estabilidad y unicidad [3].

En el presente trabajo se busca estimar la generación interna de calor variable en el tiempo en un sólido, el cual es calentado con microondas. Para ello se resolverá

el modelo matemático que gobierna el calentamiento con microondas, y a partir de su solución, se planteará y desarrollará el correspondiente problema inverso, mediante una estrategia de optimización global, la cual es el método de la espiral. El material seleccionado fue el carburo de silicio (SiC), debido a que es un material que absorbe en gran medida la energía por microondas y es muy efectivo como ejemplo demostrativo. Cuenta con una alta conductividad térmica que asegura velocidades excepcionales de calentamiento y enfriamiento. Por otro lado, por la trascendencia que representa para los fabricantes de dispositivos electrónicos en la actualidad, tiende a desplazar al silicio convencional en áreas importantes como en la fabricación de dispositivos de control de potencia.

# 1 DESCRIPCIÓN DE TRABAJO DE GRADO

## 1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el presente trabajo de investigación aplicada, pretende a través de la solución de un problema inverso, estimar la generación interna de calor variable en el tiempo, para un sólido calentado con microondas.

## 1.2 OBJETIVO GENERAL

Estimar la generación interna de calor variable en el tiempo, cuando un sólido de geometría definida se somete a calentamiento con microondas.

## 1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Plantear el modelo matemático del problema directo de transferencia de calor y resolverlo mediante un método numérico.
- Formular el problema inverso correspondiente, a partir del problema directo de transferencia de calor.
- Estimar la generación interna de calor variable en el tiempo, resolviendo el problema inverso, mediante una técnica de optimización global.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Con el fin de mantener una extensión razonable del presente documento, se evitó tratar temas en profundidad y que aparecen debidamente explicados en la literatura. No obstante, se sugieren algunas referencias que se recomiendan consultar al lector interesado en profundizar en el tema.

### 2.1 CARBURO DE SILICIO (SiC)

El Carburo de Silicio (SiC), es un material que pertenece a la familia de los cerámicos no óxidos, el cual está adquiriendo una gran relevancia por sus características como semiconductor frente al silicio tradicional, a tal punto, de ser utilizado en la fabricación de dispositivos electrónicos de alta potencia como tiristores. Sin embargo, los dispositivos de carburo de silicio todavía están en desarrollo, y la mayor parte de los dispositivos se fabrican con silicio. En la Tabla 1 se resumen algunas de las propiedades más importantes del SiC [4].

Tabla 1. Propiedades del Carburo de Silicio.

<b>FÓRMULA</b>	<b>SiC</b>
<b>CONSTANTE DIELECTRICA (<math>\epsilon_R</math>)</b>	<b>9.66</b>
<b>FACTOR DE DISIPACIÓN</b>	<b>0.003</b>
<b>COEFICIENTE DE TEMPERATURA</b>	<b>ppm/°C</b>
<b>RESISTIVIDAD VOLUMÉTRICA</b>	<b>1E5 Ohm-cm</b>
<b>COEFICIENTE DE RESISTIVIDAD/TEMPERATURA (TCR)</b>	<b>ppm/°C</b>

<b>DENSIDAD</b>	<b>3.2 gr/cc</b>
<b>CALOR ESPECÍFICO</b>	<b>0.69 J/g/°C</b>
<b>CONDUCTIVIDAD TÉRMICA (K)</b>	<b>350 W/m°C</b>
<b>COEFICIENTE DE TEMPERATURA DE EXPANSIÓN (TCE)</b>	<b>4.8 ppm/°C</b>
<b>PUNTO DE FUSIÓN</b>	<b>2700°C , 4892°F</b>

Fuente: Microwave encyclopedia.

El SiC es un material que absorbe en gran medida la energía por microondas, gracias a sus propiedades eléctricas ( $\epsilon'$  y  $\epsilon''$ ). Por otro lado, cuenta con una alta conductividad térmica que asegura un incremento rápido y eficiente de la temperatura. Existen más de 400 diferentes tipos de carburo de silicio conocidos, siendo los politipos alfa los más estudiados, 4H y 6H, debido a que son más estables. La mayoría de los de tipos de SiC varían en cuanto a su absorción de radiación, solamente cuando se alcanzan temperaturas elevadas por encima de los 300°C, tiene la capacidad de absorber energía electromagnética. Frecuentemente la concentración de SiC debe mantenerse baja, para evitar degradación de las propiedades y características que componen. Si se desean alcanzar temperaturas más elevada es común hacer combinaciones con materiales tales como bloques solidos que implican la mezcla del SiC con otro material, logrando alcanzar temperaturas entre los 600-800 °C [5].

## 2.2 CALENTAMIENTO CON MICROONDAS

El calentamiento de materiales a través de ondas electromagnéticas ubicadas en la banda de microondas 300 MHz - 300 GHz, se ha hecho posible desde hace muchos años, y han sido aplicadas principalmente para calentamiento industrial o para el calentamiento de alimentos. Este calentamiento nace de la interacción del

campo eléctrico con las moléculas, haciéndolas rotar pero manteniendo su estructura molecular intacta [6]. Se cree en la actualidad que los mecanismos que describen la interacción que se produce entre los materiales y las microondas son:

- Interacción dipolar: la cual se produce cuando las moléculas polares intentan alinearse con el campo eléctrico cambiante de la radiación de microondas, el movimiento rotacional de las moléculas al intentar orientarse con el campo produce fricciones y colisiones las cuales son responsables del calentamiento.
- La conducción iónica: la cual tiene lugar si hay iones libres o especies iónicas libres presentes en la disolución. El movimiento iónico es generado por el campo eléctrico cuando las cargas intentan orientarse con el cambio del campo eléctrico de la radiación microondas, y de forma análoga a la rotación dipolar se produce un supercalentamiento.

### *2.3 APLICADORES DE MICROONDAS*

Los aplicadores de microondas son estructuras metálicas que están diseñadas para asegurar la transferencia de energía desde el generador de microondas hasta la muestra, confinando la energía en el volumen donde se encuentra el material que se requiere tratar térmicamente. Existen dos tipos de aplicadores, el aplicador multimodo y el aplicador monomodo; de los cuales este último fue seleccionado arbitrariamente para la aplicación de microondas en la ejecución del trabajo de grado.

- **APLICADORES MULTIMODO:** Estos aplicadores en general, se caracterizan por ser estructuras metálicas, de un tamaño notablemente superior a la longitud de onda, los cuales presentan diversas zonas de máximos y mínimos de campo eléctrico. Estos patrones de campo eléctrico están generados por la interferencia entre los múltiples modos presentes en su interior. El ejemplo más conocido es el horno de microondas. Una de las principales desventajas de este tipo de aplicador, es la escasa uniformidad del campo eléctrico sobre el material procesado. Para contrarrestar esta dificultad, existen diferentes técnicas que se pueden utilizar para mejorar la uniformidad del campo eléctrico, como lo es la utilización de agitadores de modos, para evitar ondas estacionarias y lograr distribuciones de campo eléctrico más uniformes. Otra técnica es hacer que la muestra cambie de posición en el aplicador de microondas, para conseguir cambiar las condiciones de contorno electromagnéticas de la cavidad, lo que produce un cambio en la posición de máximos y mínimos, además el movimiento de la muestra hace que transite por diferentes zonas de máximos y mínimos; como por ejemplo el horno de microondas domestico el cual tiene un plato giratorio donde se colocan los alimentos [2].
- **APLICADORES MONOMODO:** Éstos son estructuras cerradas de tamaño comparable con el de la longitud de onda, en las que solo se propaga un modo electromagnético, el cual está enfocado directamente a la muestra a través de una guía de ondas. Como la radiación está focalizada hacia la cavidad no solo hace que la radiación sea más intensa, sino que también sea más homogénea en toda la cavidad, logrando una distribución de energía más uniforme en comparación que el aplicador multimodo; lo que permite un mejor control de la distribución de temperatura de la muestra y de la potencia de radiación. Sin embargo, como desventaja de este

aplicador está la necesidad de utilizar sistemas de ajuste, debido a que estos se desintonizan durante el calentamiento, por las variaciones de las propiedades dieléctricas de los materiales con la temperatura, otra desventaja es la limitación del tamaño del material que puede ser tratado [2].

## 2.4 GENERACIÓN DE CALOR

El modelado de este proceso parte de la primera ley de la termodinámica, que expresa que el aumento de la cantidad de calor deberá ser igual al flujo neto de calor y, por ende, la producción neta de calor dentro de dicho volumen. Partiendo de la relación de continuidad definida anteriormente, se tiene entonces que la temperatura en un material puede determinarse a partir de la ecuación de balance de energía, que se puede expresar como [2]:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K_T \cdot \nabla T) + Q_{gen} \quad (1)$$

El primer término de la ecuación (1), determina la energía almacenada como calor, donde:

$\rho$  = Densidad del material, dado en  $\frac{kg}{cm^3}$

$C_p$  = Calor específico del material en  $\frac{J}{kg \cdot K}$

$T$  = Temperatura en  $K$ .

$t$  = Tiempo en segundos.

El término que se encuentra en la parte derecha en la ecuación (1), determina entonces la entrada neta de calor por conducción, donde:

$K_T$  = Conductividad térmica en  $\frac{W}{m \cdot K}$

$Q_{gen}$  = Generación de calor dentro del volumen del material.

Esta producción neta de calor  $Q_{gen}$ , es la energía generada debido a la absorción de microondas. Por otra parte, para modelar  $Q_{gen}$ , se tiene que la potencia media disipada por unidad de volumen, se encuentra descrita por la expresión que se muestra a continuación.

$$P = \frac{1}{2} 2\pi f \epsilon_0 \epsilon'' \int_V E \cdot E^* dV \quad (3)$$

Donde, en general, tanto el factor de pérdidas como el campo electromagnético variarán en el interior del cuerpo dieléctrico y el campo eléctrico se expresa en valores pico. Si se expresa en calor volumétrico  $Q_{gen}$ , este término es proporcional

a la frecuencia, al factor de pérdidas del material que lo compone y al cuadrado del campo eléctrico, tal y como se evidencia en el capítulo 5.

## *2.5 PROBLEMAS INVERSOS*

Los problemas inversos de transferencia de calor se fundamentan principalmente en medidas de temperatura experimentales, para estimar funciones o parámetros como: la generación de energía, las propiedades termofísicas, las condiciones de contorno, las condiciones iniciales, los flujos de calor, entre otros, para situaciones en donde resulta extremadamente difícil realizar mediciones. Para la solución del problema inverso transitorio, se precisa de un conjunto de temperaturas o “medidas experimentales” tomadas a intervalos de tiempo regulares en una determinada posición (o varias) del sólido, en donde se recurre a modificar los valores obtenidos de la solución del problema directo mediante un método de optimización, afectándolos un error aleatorio o ruido blanco. Este es un procedimiento común en la literatura cuando se trata de verificar los métodos de solución de los problemas inversos[1].

## *2.6 ALGORITMO OPTIMIZACIÓN DE LA ESPIRAL*

El método de la Espiral, es un algoritmo metaheurístico, desarrollado por Kenechi Tamura y Keiichiro Yasura en el 2011. El cual está basado en una analogía a la espiral logarítmica presente en diversos patrones de la naturaleza, como por ejemplo en conchas de caracol, en la formación de tornados y tormentas, e incluso en las galaxias, etc [7]. El fenómeno de la espiral centrada está asociado con la disminución gradual del radio, cuando el vector gira con referencia a los puntos

anteriores. Un modelo de dos dimensiones utiliza el vector de rotación como se indica en la ecuación (4). El movimiento de las partículas esta descrito por la ecuación (6).

$$x' = R_{1,2}^2(\theta)x \quad (4)$$

Donde la matriz de rotación está dada por:

$$R_{1,2}^2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Para un sistema n-dimensional la matriz de rotación se modifica como se muestra en la ecuación (4). Adicionalmente para obtener una espiral se multiplica dicha matriz por un factor r.

$$x' = rR_{n-1,n}^n(\theta_{n-1,n})x \quad (5)$$

Donde el factor de r debe estar en un rango entre  $0 < r < 1$ , para que tenga convergencia. La actualización de la posición se da por la ecuación (6).

$$x_{i(k+1)}' = S_n(r, \theta)x_{i(k)} - (S_n(r, \theta) - In)x * \quad (6)$$

El término  $S_n$  es igual a la matriz de rotación de la ecuación (5), es decir  $S_n(r, \theta) = x'$ , el ángulo se encuentra en el rango  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $In$  representa la matriz identidad de orden  $(n \times n)$ , el término  $x_{i(k)}$  son los puntos de inicio y  $x^*$  representa el punto de convergencia. El algoritmo propuesto por los autores se divide en 5 pasos [7]:

Paso 0: [preparación]

Seleccione el número de puntos de búsqueda  $m \geq 2$ , los parámetros  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 < r < 1$ , para  $S_n(r, \theta)$ , y el número máximo de iteraciones  $k_{max}$  con  $k = 0$ .

Paso 1: [Inicialización]

Definir los puntos iniciales  $x_{i(0)}$  en la región factible de posibles soluciones de forma aleatoria, y el centro  $x^* = x(0)_{ig}$ ,  $i_g = \arg \min f(x_i(0))$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Paso 2: [Actualización]

Actualizar  $x_i$ ,  $x'_{i(k+1)} = rR_{n-1,n}^n(\theta_{n-1,n})x_{i(k)} - (rR_{n-1,n}^n(\theta_{n-1,n}) - In)x^*$ , donde,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Paso 3: [Actualización]

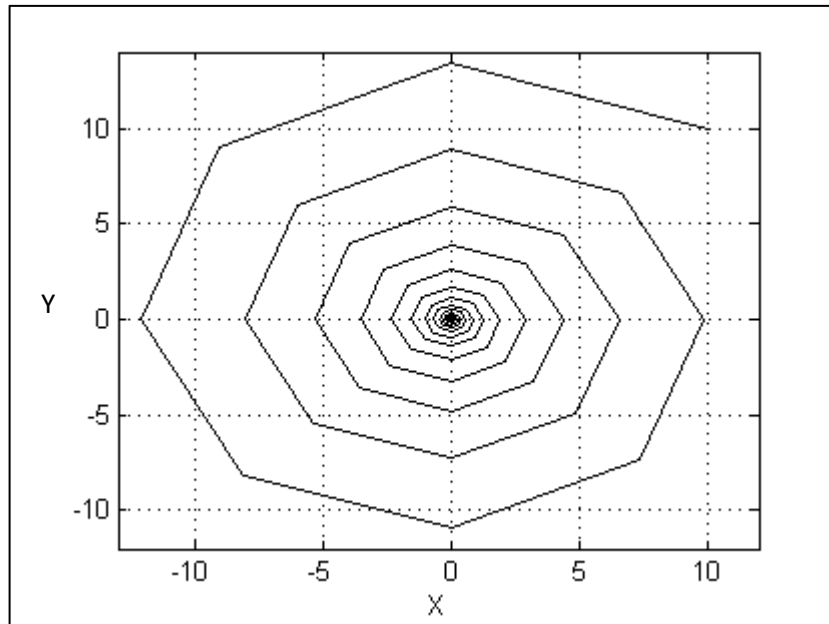
Actualizar  $x^*$ ,  $x^* = x_{i_g}(k+1)$ ,  $i_g = \arg \min f(x_i(k+1))$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Paso 4: [Chequear el criterio de terminación]

Si  $k = k_{max}$  termine, de lo contrario establezca  $k = k + 1$  y regrese a Step 2.

A continuación, se muestra una simulación realizada en Matlab, de la ecuación (6), en dos dimensiones Figura 1:

Figura 1. Espiral en dos dimensiones.



En donde se puede apreciar el punto inicial  $[10,10]$  y el punto final en  $[0,0]$ . En este método se evidencia que la combinación de las características en diversificación e intensificación, hacen del método de la espiral, un buen método metaheurístico, en donde la diversificación es la que se presenta en la fase inicial, y actúa como estrategia para buscar la solución que más se adecúe en una región amplia del dominio de la búsqueda que se realiza; por otro lado la intensificación, es la que se presenta en la fase final, y es aquella que va a permitir buscar la mejor solución en un rango de un punto óptimo de solución. El método metaheurístico de la espiral, combina estas dos estrategias de forma individual y natural, para cualquier punto de convergencia, por lo que también puede considerarse un método de optimización.

### 3 PRUEBAS DEL METÓDO DEL ALGORITMO ESPIRAL

En este capítulo se realizan un conjunto de pruebas del método de la espiral, con funciones unimodales y multimodales, que permiten constatar el correcto funcionamiento del algoritmo elegido para dar solución al problema inverso. Las gráficas de las funciones de prueba se encuentran en el anexo A, además en el anexo B se encuentra el diagrama de bloques del algoritmo implementado para resolver el problema inverso. En la tabla 2, que se muestra a continuación, están evidenciadas las características del equipo de cómputo que fue utilizado para la realización de las pruebas.

Tabla 2. Características del equipo de cómputo.

Alimentación	120 [V] – 60 [Hz]
Procesador	Intel Core i5 – 2450 [MHz]
Memoria RAM	6 [GB]
Sistema Operativo	Windows 8.1 – 64 bits

Los parámetros de las espirales que se utilizaron para realizar las pruebas se muestran a continuación en la siguiente tabla:

Tabla 3. Parámetros de las espirales de prueba.

ESPIRAL	$R$	Theta ( $\theta$ )
1	0,95	$\pi/4$
2	0,95	$\pi/2$
3	0,99	$\pi/4$
4	0,99	$\pi/2$

### 3.1 FUNCIÓN RASTRIGIN

La función Rastrigin es utilizada como prueba de rendimiento en los algoritmos de optimización. Es una función multimodal no lineal en dos dimensiones, por lo tanto, contiene varios mínimos locales y un mínimo global. Esta función está dada por la ecuación (7) para  $n$  dimensiones:

$$f_{(x)} = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10\cos 2\pi x_i + 10) \quad (7)$$

Para buscar el mínimo de la función Rastrigin, se utilizó el algoritmo de la espiral para 2 y 3 dimensiones; los resultados obtenidos en las correspondientes simulaciones se muestran en la Tabla 4. Para lograr esto, se hicieron pruebas con las cuatro espirales de la Tabla 3, en donde se ubicaron 30 espirales en el espacio solución, el cual se encuentra en esta función en un rango de valores entre  $-5 \leq x_i \leq 5$ .

Tabla 4. Resultados obtenidos con la función Rastrigin.

<b>N</b>	<b>Cálculos</b>	<b>Espiral 1</b>	<b>Espiral 2</b>	<b>Espiral 3</b>	<b>Espiral 4</b>
2	Más alto	0	0,99	0	0,99
	Más bajo	0	0	0	0
	Media	0	0,21214286	0	0,28285714
	Desv. Est.	0	0,40622264	0	0,44723641
	Iteración	491	503,857143	2291,78571	2359,78571
	t promedio	0,26908571	0,27888571	2,2991	2,40787357
3	Más alto	4,72	4,97	1,99	5,97
	Más bajo	0	0,99	0	0
	Media	1,61428571	1,91642857	0,56857143	2,28428571
	Desv. Est.	1,05005928	1,21669698	0,61960652	1,60560498
	Iteración	500,928571	506,714286	2355,42857	2379,64286
	t promedio	0,28729286	0,29586286	3,23687857	3,32386429

Según los datos obtenidos en la Tabla 4, se puede observar que la espiral 3 fue la que mejores resultados obtuvo en cada una de las pruebas que se hicieron, arrojando de esa forma la menor media y la menor desviación estándar, demostrando que la dispersión de datos se encuentra en un rango pequeño.

En la Figura 2 se puede apreciar el camino que toma la espiral para encontrar el mínimo de la función cuando van transcurriendo las iteraciones. Además, en la Figura 3 se observa la cantidad de iteraciones que necesitó el algoritmo para encontrar el resultado más aproximado al óptimo global.

Figura 2. Trayectoria de la espiral en 2 dimensiones con  $\Theta = \pi/4$  y  $R = 0,95$ , en la función Rastrigin.

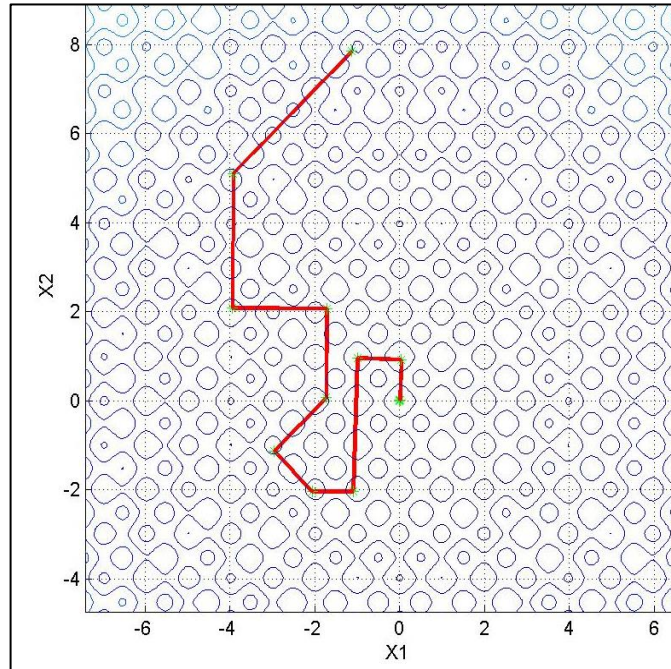
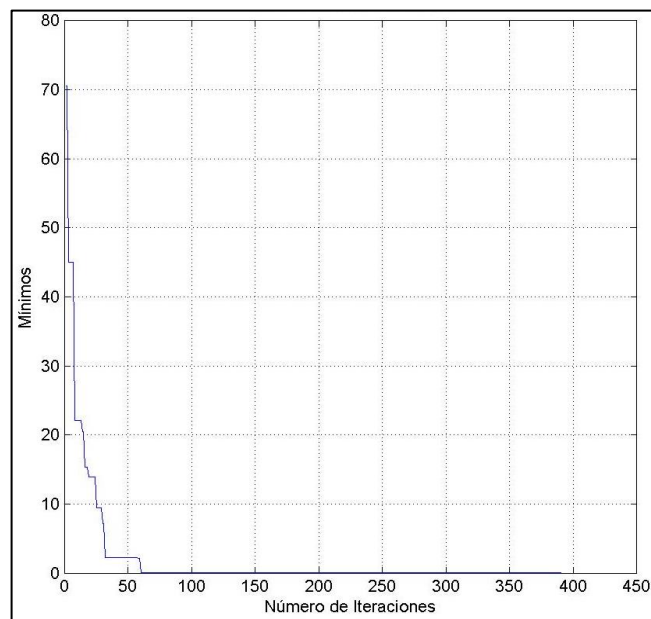


Figura 3. Convergencia del algoritmo en la función Rastrigin.



### 3.2 FUNCIÓN DE SCHWEFEL 'S

También conocida como función de rotación de Híper-elipsoide, es una función continua, convexa y unimodal; ya que presenta solo un mínimo global en todo el rango del espacio solución con un valor de 0, en la coordenada (0,0,0, ...,0). Esta función está dada por la siguiente ecuación (8):

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i x_j \right)^2 \quad (8)$$

Para buscar el mínimo de esta función, se procedió utilizando el método de la espiral para 2 y 3 dimensiones respectivamente, con los 4 tipos de espirales de prueba, definidos al inicio del capítulo y que se muestran en la tabla 3. Para la realización de la prueba se ubicaron 30 espirales en el espacio solución, en donde cada una de ellas tiene los valores correspondientes de theta ( $\theta$ ) y  $R$ , según sea el caso. Los resultados obtenidos en las correspondientes simulaciones, se encuentran registrados en la tabla 5 que se muestra a continuación.

Tabla 5. Resultados obtenidos con la función de Schwefel's.

N	Cálculos	Espiral 1	Espiral 2	Espiral 3	Espiral 4
2	Más alto	0	0	0	0
	Más bajo	0	0	0	0
	Media	0	0	0	0
	Desv. Est.	0	0	0	0
	Iteración	487	500	2289	2351
	t promedio	0,3445	0,3509	2,6931	2,8285

3	Más alto	0	0	0	0
	Más bajo	0	0	0	0
	Media	0	0	0	0
	Desv. Est.	0	0	0	0
	Iteración	501	507	2356	2383
	t promedio	0,3973	0,3979	0,3826	3,9314

En la Tabla 5, se puede observar que los resultados obtenidos mediante las diferentes pruebas, es de cero (0); corroborando así que la dispersión de estas espirales es cero lo cual indica que las cuatro espirales son muy precisas para encontrar el mínimo de esta función. Sin embargo, revisando las iteraciones y el tiempo promedio, se puede analizar que la espiral 1 es la que mejor resultado obtuvo, ya que su cantidad de iteraciones es mínima respecto a la de las demás espirales, y su tiempo promedio es uno de los más bajos en cada una de las pruebas realizadas.

En la Figura 4 se aprecia la corta trayectoria que tuvo la espiral para encontrar el mínimo de esta función, y para evidenciar esto, en la Figura 5 se observa la rápida convergencia que tuvo el algoritmo.

Figura 4. Trayectoria de la espiral en 2 dimensiones con  $\Theta = \pi/4$  y  $R = 0,95$ , en la función Schwefel's.

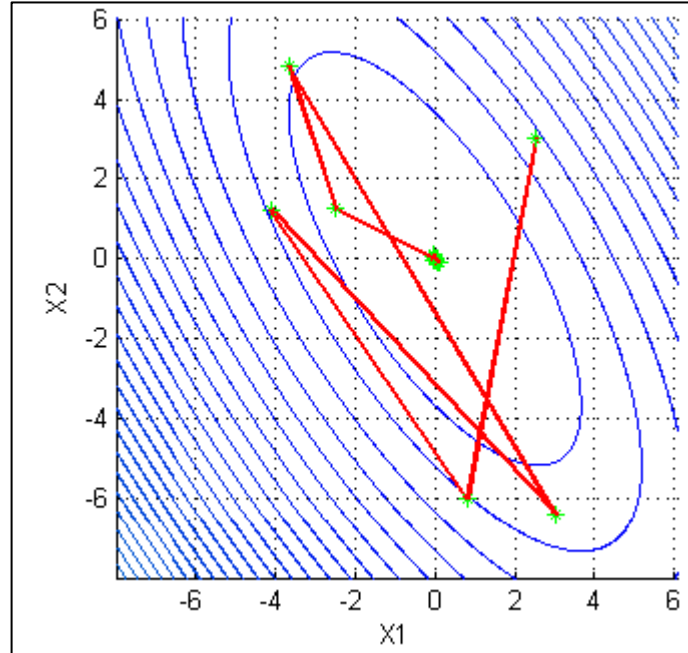
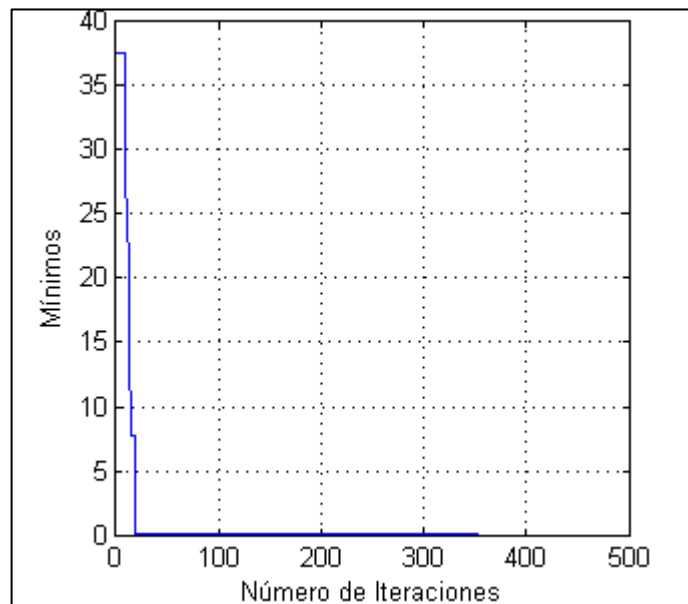


Figura 5. Convergencia del algoritmo en la función Schwefel's.



### 3.3 FUNCIÓN DE GRIEWANK

La función de Griewank, es una función que cuenta con varios mínimos locales y un mínimo global, se clasifica como función multimodal, lo cual hace que el método de la espiral presente una falla y sea propenso a quedarse encerrado en un mínimo local y, en consecuencia, no encontrar el mínimo global de la función. La ecuación que describe esta función, es la que se presenta a continuación:

$$f(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1 \quad (9)$$

Para buscar el mínimo de esta función el cual está ubicado en la coordenada (0,0,0, ...,0), con un valor aproximado de (0), se procedió utilizando el método de la espiral para 2 y 3 dimensiones, con los 4 tipos de espirales de prueba, definidos al inicio del capítulo en la tabla 3. Al igual que para las demás funciones de prueba se ubicaron 30 espirales en el espacio solución, el cual se encuentra en un rango de valores entre  $-50 \leq x_i \leq 50$  como es evidente en la Figura 4. Los resultados obtenidos en las correspondientes simulaciones, se encuentran registrados en la tabla 6 que se muestra a continuación.

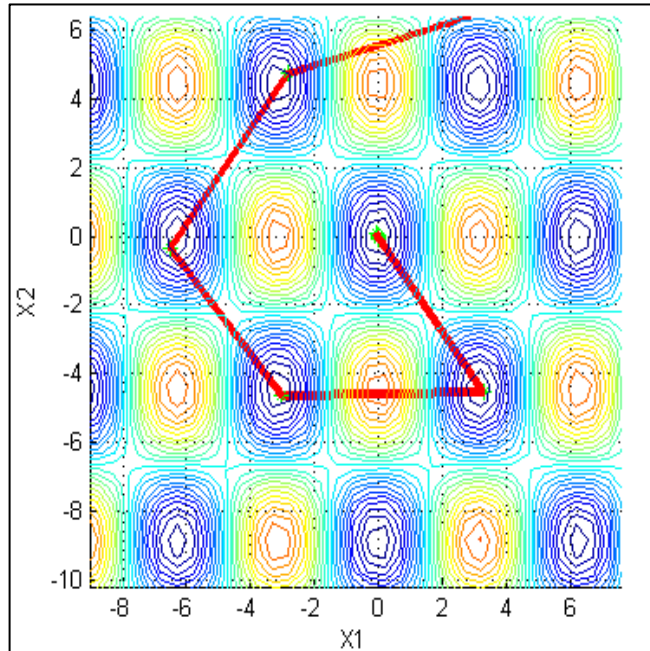
Tabla 6. Resultados obtenidos con la función de Griewank.

<b>N</b>	<b>Cálculos</b>	<b>Espiral 1</b>	<b>Espiral 2</b>	<b>Espiral 3</b>	<b>Espiral 4</b>
2	Más alto	0,03	0,03	0,01	0,01
	Más bajo	0	0	0	0
	Media	0,01071429	0,01071429	0,00285714	0,00357143
	Desv. Est.	0,00883523	0,0059333	0,00451754	0,00479157
	Iteración	492,285714	502,714286	2299,85714	2351,85714

	t promedio	0,35107143	0,363	2,67790714	2,73895714
3	Más alto	0,11	0,16	0,05	0,15
	Más bajo	0	0,01	0	0,01
	Media	0,02571429	0,05714286	0,01642857	0,04142857
	Desv. Est.	0,02583306	0,04043135	0,01230978	0,03795809
	Iteración	497,928571	505,857143	2359,21429	2383,57143
	t promedio	0,39876429	0,40787857	3,71821429	3,79528571

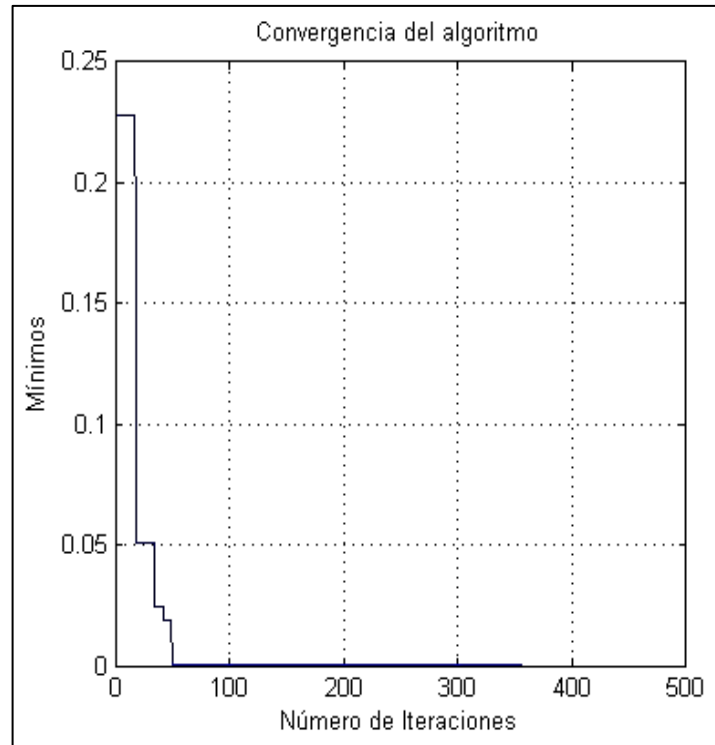
En la Tabla 6, se puede observar que los resultados obtenidos mediante las diferentes pruebas, son muy cercanos de cero (0); corroborando así que la dispersión de estas espirales es muy baja y que tienden al mismo mínimo. Además, todas las espirales cuentan con una baja desviación estándar, lo que indica que la dispersión de las espirales es poca. Revisando la media, las iteraciones y el tiempo promedio, se puede observar que la espiral 1 es la que mejor resultado obtuvo, ya que presenta una buena media, corroborando que es una buena opción para hallar el mínimo de la función, su cantidad de iteraciones es mínima respecto a la de las demás espirales, y su tiempo promedio es uno de los más bajos en cada una de las pruebas realizadas. Para ver la trayectoria que sigue el algoritmo al buscar el mínimo de la función de prueba, se procedió a graficar conforme transcurren las iteraciones, y el resultado obtenido para dos dimensiones con  $\Theta = \pi/4$  y  $R = 0,99$  se encuentra en la Figura 6, donde es evidente que la espiral converge rápidamente al mínimo.

Figura 6. Trayectoria de la espiral en 2 dimensiones con  $\Theta = \pi/4$  y  $R = 0,99$ , en la función Griewank.



En la Figura 7 es posible observar nuevamente la rápida convergencia del algoritmo, el cual realiza alrededor de 380 iteraciones para llegar al mínimo de la función de prueba.

Figura 7. Convergencia del algoritmo en la función Griewank.



### 3.4 FUNCIÓN DE 2N MÍNIMA

La función 2N Mínima, presenta a diferencia de las funciones vistas anteriormente, tres mínimos locales en todo el espacio solución, por lo que es una función multimodal con un mínimo global el cual se encuentra en la coordenada  $(2.9, 2.9, \dots, 2.9)$  con un valor que se aproxima a  $-78n$ .

La ecuación que describe esta función, es la que se presenta a continuación:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i) \quad (10)$$

Para buscar el mínimo de esta función, se procedió utilizando el método de la espiral para 2, 20 y 100 dimensiones, con los 4 tipos de espirales de prueba, definidos al inicio del capítulo y que se muestran en la tabla 3. Se ubicaron 20 espirales en el espacio solución, que como se aprecia en la figura 4, se encuentra en un rango de valores entre  $-5 \leq x_i \leq 5$ . Los resultados obtenidos en las correspondientes simulaciones, se encuentran registrados en la tabla 7 que se muestra a continuación.

Tabla 7. Resultados obtenidos con la función de 2N Mínima.

n	Cálculos	Espiral 1	Espiral 2	Espiral 3	Espiral 4
2	Más alto	-156,66	-156,66	-156,66	-156,66
	Más bajo	-156,66	-156,66	-156,66	-156,66
	Media	-156,66	-156,66	-156,66	-156,66
	Desv. Est.	2,8422E-14	2,84217E-14	2,84217E-14	2,84217E-14
	Iteración	491,285714	503,2857143	2290,857143	2367,571429
	t promedio	0,2711643	0,28900714	2,301735	2,44671429
3	Más alto	-236	-235	-234,99	-235
	Más bajo	-206,72	-206,72	-235	-178,45
	Media	-233,134	-220,832222	-234,999286	-216,3621429
	Desv. Est.	7,0653	14,1126	0,0026	16,8478
	Iteración	501,4667	507,8333	2355,4286	2383,5000
	t promedio	0,298727	0,303244	3,302971	3,358514

En la tabla 7, se puede observar que los resultados obtenidos mediante las diferentes pruebas, son muy cercanos del mínimo correspondiente para cada una de las espirales. Siendo -156 el mínimo para la prueba de 2 dimensiones, y -234 el mínimo para la prueba de 3 dimensiones; corroborando así que la dispersión de estas espirales es baja y que tienden al mismo mínimo. La espiral 3 cuenta con la menor desviación estándar, lo que indica que la dispersión de esta espiral es menor con respecto a las demás; al igual que la media, número de iteraciones y tiempo promedio, ratificando que es la mejor opción de las cuatro espirales de prueba. En la Figura 8 se puede apreciar el camino que sigue la espiral para encontrar el mínimo de la función a medida que transcurren las iteraciones. Además, en la Figura 9 se observa la convergencia de el algoritmo, el cual necesito realizar 500 iteraciones para encontrar el resultado más óptimo.

Figura 8. Trayectoria de la espiral en 2 dimensiones con  $\Theta = \pi/4$  y  $R = 0,99$ , en la función 2N Mínima.

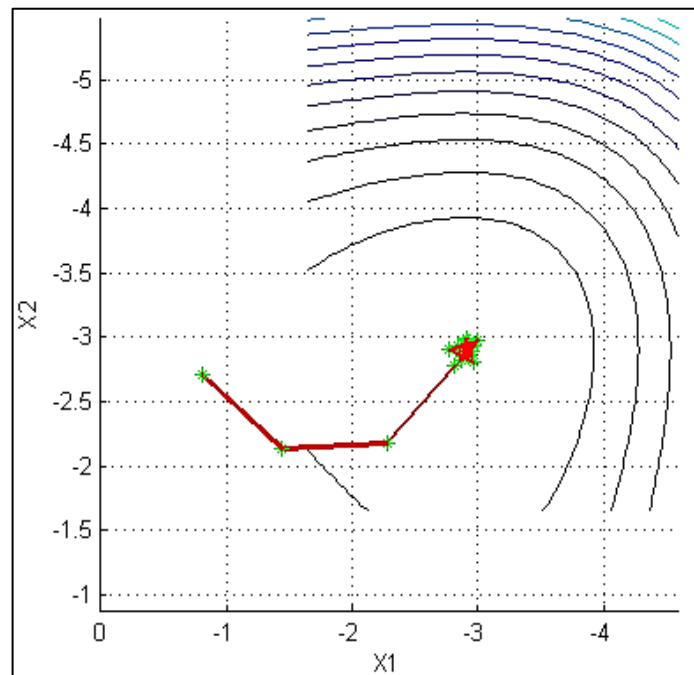
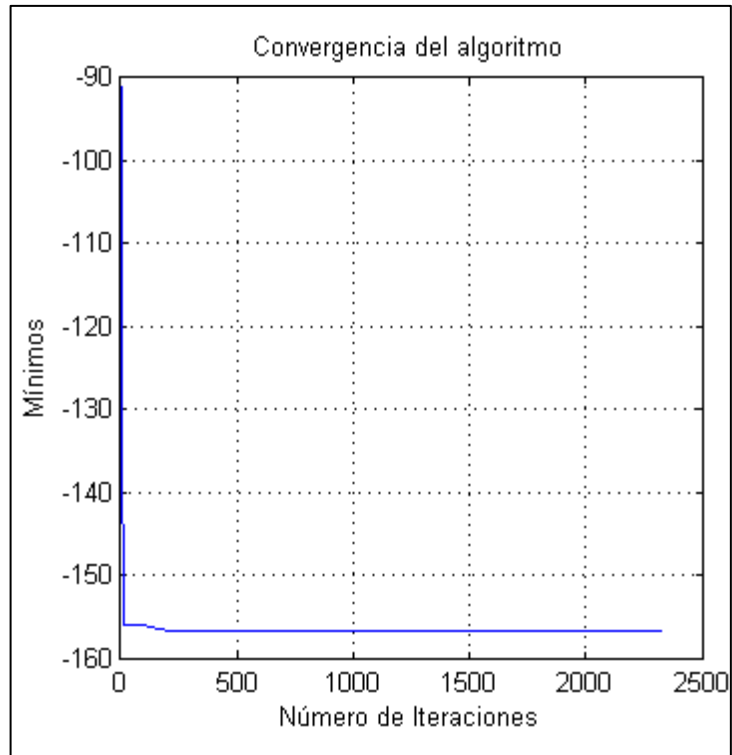


Figura 9. Convergencia del algoritmo en la función 2N Mínima.



En la Tabla 8 se encuentran los resultados obtenidos de dos de las funciones de prueba para 200 espirales en el espacio solución (los dos restantes se encuentran en el anexo D), esto para verificar qué tan correctos fueron los resultados obtenidos con las pruebas realizadas anteriormente, ya que entre más espirales haya en el espacio solución, más probabilidades hay de encontrar los resultados esperados. Se puede visualizar que los cambios son mínimos, por lo que los resultados de las pruebas realizadas son satisfactorios.

Tabla 8. Resultados de las Funciones de Prueba para 200 espirales

FUNCIÓN DE SCHWEFEL'S						FUNCIÓN RASTRIGIN					
<b>n</b>	Cálculos	Espiral 1	Espiral 2	Espiral 3	Espiral 4	<b>N</b>	Cálculos	Espiral 1	Espiral 2	Espiral 3	Espiral 4
<b>2</b>	Más alto	0	0	0	0	<b>2</b>	Más alto	0	0,87954	0	0,9834
	Más bajo	0	0	0	0		Más bajo	0	0,00231	0,00675	0,0475
	Media	0	0	0	0		Media	0	0,3452	0,001	0,76546
	Desv. Est.	0	0	0	0		Desv. Est.	0	0,54002	0	0,7678
	Iteración	594	687	2440	2493		Iteración	505	776	2500	2750
	t promedio	0,55	0,865	3,68	3,994		t promedio	0,3456	0,756	3,294	3,754
<b>3</b>	Más alto	0	0	0	0	<b>3</b>	Más alto	4,85	5,45	2,542	5,98
	Más bajo	0	0	0	0		Más bajo	0	0,998	0	0
	Media	0	0	0	0		Media	1,8232	2,01	0,58423	2,58667
	Desv. Est.	0	0	0	0		Desv. Est.	1,432	1,33	0,76	1,765
	Iteración	645	657	2489	2532		Iteración	700	745	2697	2743
	t promedio	0,612	0,634	0,662	4,678		t promedio	0,342	0,3667	3,4765	3,7564

## 4 PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS DIRECTO E INVERSO

### 4.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DIRECTO

A una esfera de radio  $0 \leq r < a$  de material Carburo de Silicio (SiC), con temperatura inicial y superficial cero, se le aplican microondas a través de un aplicador tipo monomodo seleccionado arbitrariamente, el cual utiliza un magnetrón para producir alrededor de 1 [kW] de potencia radiada a una frecuencia de 2,450 [GHz], con una intensidad de campo eléctrico uniforme de 2 [kV/m] [8]. Como consecuencia de la aplicación, se genera una fuente de calor transitoria en el centro del sólido  $Q_{gen}(t)\delta(r = 0)$  [W/m<sup>3</sup>]. El planteamiento del problema directo corresponde al modelo matemático mostrado en la Tabla 9.

Tabla 9. Planteamiento del problema directo

Ecuación diferencial	$\frac{1}{k} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{Q_{gen}(t)\delta(r)}{K} \quad 0 < r < a, \quad t > 0$
Generación de Calor	$Q_{gen}(t) = A_0 e^{-\lambda t} \quad , \quad A_0 = w \epsilon_0 \epsilon''  E ^2 \quad [W/m^3]$
Condición de contorno	$T(a, t) = 0$

4.1.1 *SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO.* Resolviendo el problema directo planteado anteriormente, a través del método de Duhamel [9], se llega a la siguiente solución (ecuación tomada del libro “Carsalw and Jaeger”):

$$T = \frac{kA_0}{K\lambda} e^{-\lambda t} \left( \frac{a \sin r \left(\frac{\lambda}{k}\right)^{\frac{1}{2}}}{r \sin a \left(\frac{\lambda}{k}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) + \frac{2 a^3 A_0}{r \pi^3 K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n^2 - \frac{\lambda a^2}{k\pi^2})} \sin \frac{n\pi r}{a} e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{a^2}}$$

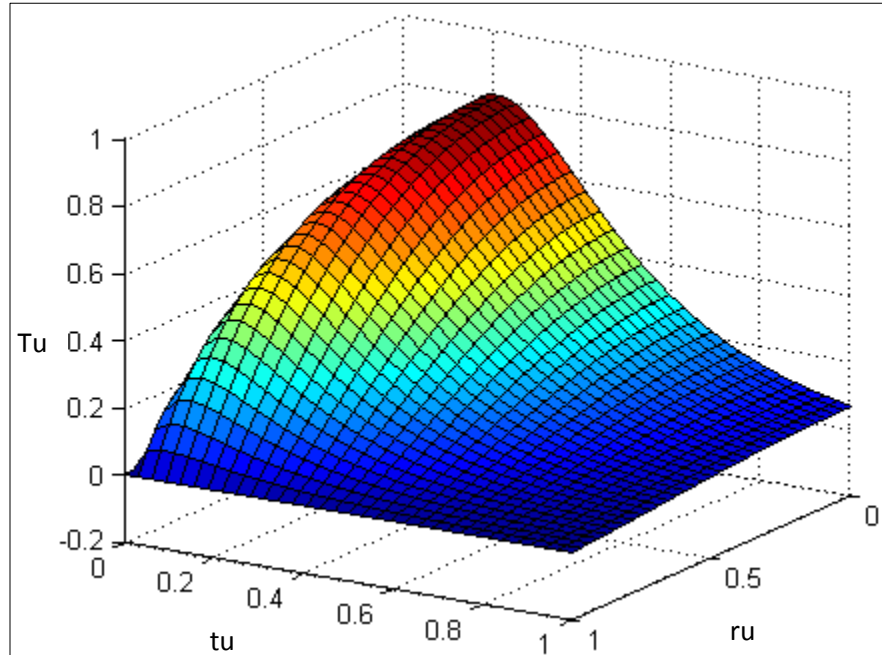
(13)

Tabla 10. Variables ecuación (13)

Conductividad térmica	$K = 333,6063 [W / K m]$
Calor específico	$C_p = 0,65023 [kJ/kg K]$
Densidad	$\rho = 3020,1 [kg / m^3]$
Difusividad térmica	$k = 1,6988 \times 10^{-4} [m^2/s]$
Constante lambda	$\lambda = 10$
Constante $A_0$	$A_0 = 15,8 [kW/m^3]$

En la Figura 10 se puede observar el perfil de temperatura en la esfera con  $Tu = \frac{K\lambda}{kA_0} T$  en función del tiempo ( $tu$ ) y del radio ( $ru = r/a$ ); donde  $Tu$ ,  $tu$  y  $ru$  son la temperatura, tiempo y radio normalizados respectivamente.

Figura 10. Distribución de temperatura en la esfera. Con  $0 \leq ru < 1, 0 \leq t < 1$ .



#### 4.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA INVERSO

En la Tabla 11 se encuentra el planteamiento del problema inverso, en donde el término generación interna de calor  $Q_{gen}(t)$ , es considerada como una incógnita. Para compensar la falta de información sobre este término, a partir de la solución del problema directo, se tomaron medidas de temperatura transitorias a través de un “sensor” de temperatura, ubicado en un punto del sólido  $T_{DP}(ru_{0.5}, t_j)$ .

Tabla 11. Planteamiento del problema inverso.

Ecuación diferencial	$\frac{1}{k} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dv}{dr} \right) + \frac{Q_{gen}(t)}{K} \quad 0 < r < a, \quad t > 0$
Condición adicional	$T_{DP}(ru_{0.5}, t_j)$
Condición de contorno	$T(a, t) = 0$

La solución del problema inverso para la estimación de la generación interna de calor, consiste en la minimización de la norma ordinaria de mínimos cuadrados dada por la ecuación 14, donde  $S$  es la suma de los cuadrados de los errores o función objetivo,  $T_{DP}$  y  $Y_i$  son las temperaturas medidas y estimadas, respectivamente. Para las estimaciones realizadas en el capítulo 6 el sensor se ubicó en la posición de la esfera  $ru = 0,5$ .

$$S = \sum_{i=1}^{11} (Y_i - T_{DP})^2 \quad (14)$$

## 5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO PARA LA ESTIMACIÓN DE LA GENERACIÓN INTERNA DE CALOR EN UN SÓLIDO CON GEOMETRÍA ESFÉRICA

En este capítulo se describen y explican las pruebas que se realizaron para encontrar los parámetros más apropiados del algoritmo de la Espiral, con el propósito de obtener la mejor solución al momento realizar la estimación de la función incógnita. Además, se encuentran los resultados obtenidos de las estimaciones correspondientes y se realiza un contraste con los resultados obtenidos mediante el método convencional de Levenberg Marquardt.

### 5.1 SELECCIÓN DE LOS PARÁMETROS RADIO ( $R$ ) y THETA ( $\theta$ )

Para analizar en qué valores de  $R$  y theta ( $\theta$ ) el algoritmo de la espiral cumple con las especificaciones de la diversificación en la fase inicial de búsqueda e intensificación de la fase final de búsqueda; características de los métodos heurísticos, se realizaron diferentes pruebas variando  $R$  y theta ( $\theta$ ) como se puede apreciar en la Tabla 12, los resultados obtenidos de estas pruebas se encuentran en el anexo C, donde, desde la Figura 19 a la Figura 22 no cumplen con esta característica de diversificación e intensificación, ya que convergen rápidamente al punto deseado sin explorar otras opciones del espacio solución, mientras que de la Figura 23 a la Figura 28 sí lo hacen.

Tabla 12. Parámetros  $R$  y theta ( $\theta$ ) utilizados en las pruebas del anexo C.

$R$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
( $\theta$ )	$\pi/4, \pi/3, \pi/2$									

En base a los resultados obtenidos del anexo C, en la Tabla 13 se encuentran los parámetros de las espirales de la Figura 23 a la Figura 28 para los que el algoritmo cumple con el criterio de diversificación e intensificación.

Tabla 13. Valores óptimos de  $R$  y theta ( $\theta$ ) del algoritmo de la espiral.

Radio ( $R$ )	Theta ( $\theta$ )
0,5	$\pi/4, \pi/3, \pi/2$
0,6	$\pi/4, \pi/3, \pi/2$
0,7	$\pi/4, \pi/3, \pi/2$
0,8	$\pi/4, \pi/3, \pi/2$
0,9	$\pi/4, \pi/3, \pi/2$
0,95	$\pi/4, \pi/3, \pi/2$

Debido a que varias espirales, cumplen con el criterio de diversificación e intensificación, se decidió realizar una prueba posterior aplicada a resolver el problema inverso, donde las variables a estimar son las que se encuentran registradas en la Tabla 14. Para realizar la selección de los valores óptimos de  $R$  y theta ( $\theta$ ), se resolvió el problema inverso para 18 espirales de prueba, cuyos resultados se muestran en las Tabla 15 y 16, ejecutándose el algoritmo, para cada una de las espirales de prueba 33 veces; todo ello para hacer una pre-selección de las mejores espirales, teniendo como criterio de selección, las mejores estimaciones, es decir, los valores más aproximados a los valores reales de

$A_0$  y  $\lambda$ ; definidos previamente en el capítulo 5, mínimo global denotado como (Mínimo Obj) el cual está en cero, porcentaje de error y desviación estándar.

Tabla 14. Variables a estimar.

$A_0$	15,8 [kW/m <sup>3</sup> ]
$\lambda$	10

Tabla 15. Estimaciones de  $\lambda$ ,  $A_0$ .

Espiral	$R$	theta ( $\theta$ )	Mínimo Obj	$\lambda$	$A_0$	Iteración promedio
espiral 1	0,5	$\pi/4$	1,22E+00	11,317003	14,787966	45
espiral 2	0,5	$\pi/3$	1,30E+00	11,554299	15,027038	49
espiral 3	0,5	$\pi/2$	3,97E-01	10,583520	15,652547	49
espiral 4	0,6	$\pi/4$	1,05E+00	11,176942	15,283854	64
espiral 5	0,6	$\pi/3$	1,30E+00	11,010674	15,779513	64
espiral 6	0,6	$\pi/2$	2,01E-01	10,309388	15,720312	65
espiral 7	0,7	$\pi/4$	8,07E-01	10,906767	15,914816	90
espiral 8	0,7	$\pi/3$	5,78E-01	10,523579	15,773306	90
espiral 9	0,7	$\pi/2$	3,51E-27	9,9908490	15,821100	91
espiral 10	0,8	$\pi/4$	3,81E-02	9,9801834	15,844268	140
espiral 11	0,8	$\pi/3$	2,93E-27	10,000000	15,800000	140
<b>espiral 12</b>	<b>0,8</b>	<b><math>\pi/2</math></b>	<b>1,62E-27</b>	<b>10,000000</b>	<b>15,800000</b>	<b>142</b>
<b>espiral 13</b>	<b>0,9</b>	<b><math>\pi/4</math></b>	<b>5,56E-27</b>	<b>10,000000</b>	<b>15,800000</b>	<b>288</b>
<b>espiral 14</b>	<b>0,9</b>	<b><math>\pi/3</math></b>	<b>2,31E-27</b>	<b>10,000000</b>	<b>15,800000</b>	<b>294</b>
<b>espiral 15</b>	<b>0,9</b>	<b><math>\pi/2</math></b>	<b>1,62E-27</b>	<b>10,000000</b>	<b>15,800000</b>	<b>297</b>
<b>espiral 16</b>	<b>0,95</b>	<b><math>\pi/4</math></b>	<b>4,27E-27</b>	<b>10,000000</b>	<b>15,800000</b>	<b>593</b>
<b>espiral 17</b>	<b>0,95</b>	<b><math>\pi/3</math></b>	<b>2,60E-27</b>	<b>10,000000</b>	<b>15,800000</b>	<b>599</b>
<b>espiral 18</b>	<b>0,95</b>	<b><math>\pi/2</math></b>	<b>2,34E-27</b>	<b>10,000000</b>	<b>15,800000</b>	<b>606</b>

Tabla 16. Preselección ( $R$ ) y ( $\theta$ ) desviación estándar, error y tiempo promedio.

Espiral	Desv. Est. Mínimo Obj	Desv. Est. $\lambda$	Desv. Est. $Ao$	% Error $\lambda$	%Error $Ao$	t Prom.
espiral 1	5,848E-01	0,49264	0,99289	0,1317	0,06405	0,79877
espiral 2	5,653E-01	0,72309	0,73970	0,1554	0,04892	0,86490
espiral 3	5,839E-01	0,69061	0,22706	0,0584	0,00933	0,88959
espiral 4	7,426E-01	0,66387	0,78268	0,1177	0,03267	1,15590
espiral 5	2,522E+00	1,75685	0,30419	0,1011	0,00130	1,15637
espiral 6	4,638E-01	0,65526	0,17395	0,0309	0,00504	1,16960
espiral 7	5,757E-01	0,65161	0,13577	0,0907	0,00727	1,61248
espiral 8	7,208E-01	0,81109	0,36130	0,0524	0,00169	1,60674
espiral 9	2,077E-28	0,00000	3,55E-15	3,55E-16	0,00000	1,60617
espiral 10	9,221E-02	0,18866	0,13725	0,001982	0,00280	2,43429
espiral 11	1,326E-27	4,67E-14	2,57E-14	2,31E-15	0,00000	2,46289
<b>espiral 12</b>	<b>1,914E-28</b>	<b>5,82E-15</b>	<b>3,55E-15</b>	<b>3,55E-16</b>	<b>0,00000</b>	<b>2,54806</b>
<b>espiral 13</b>	<b>4,707E-27</b>	<b>7,91E-14</b>	<b>4,43E-14</b>	<b>3,55E-16</b>	<b>0,00000</b>	<b>5,04368</b>
<b>espiral 14</b>	<b>1,223E-27</b>	<b>2,16E-14</b>	<b>2,51E-14</b>	<b>1,6E-15</b>	<b>0,00000</b>	<b>5,11387</b>
<b>espiral 15</b>	<b>2,147E-28</b>	<b>5,39E-15</b>	<b>3,55E-15</b>	<b>1,78E-16</b>	<b>0,00000</b>	<b>5,30130</b>
<b>espiral 16</b>	<b>3,416E-27</b>	<b>6,39E-14</b>	<b>3,68E-14</b>	<b>1,95E-15</b>	<b>0,00000</b>	<b>10,36423</b>
<b>espiral 17</b>	<b>1,453E-27</b>	<b>4,85E-14</b>	<b>2,53E-14</b>	<b>7,11E-16</b>	<b>0,00000</b>	<b>10,44280</b>
<b>espiral 18</b>	<b>1,520E-27</b>	<b>1,72E-14</b>	<b>3,55E-15</b>	<b>1,07E-15</b>	<b>0,00000</b>	<b>10,62199</b>

Como se puede observar en las Tablas 15 y 16, las espirales de prueba arrojan resultados confiables con respecto a la media, error y desviación estándar. Por consiguiente, se eligieron las espirales con un valor en el mínimo global (mínimo Obj) de orden menor a  $10^{-26}$ , el valor del porcentaje de error que sea de orden menor a  $10^{-13}$ . Las espirales que se encuentran resaltadas en las tablas mencionadas son las que cumplen con estos criterios a la vez. Estas espirales se encuentran consignadas en la Tabla 17 que se muestra a continuación, donde se realizó otra prueba, en la que se aumentó la cantidad de ejecuciones a 50, con la finalidad de obtener mejores resultados al momento de hacer la elección de estos parámetros.

Tabla 17. Características obtenidas de las espirales de prueba seleccionadas

Espiral	$R$	theta ( $\theta$ )	Mínimo Obj	$\lambda$	$Ao$	Iteración promedio
espiral 12	0,8	$\pi/2$	1,43E-27	10,000000	15,80000	142
espiral 13	0,9	$\pi/4$	2,19E-27	10,000000	15,80000	288
espiral 14	0,9	$\pi/3$	2,57E-28	10,000000	15,80000	294
espiral 15	0,9	$\pi/2$	3,24E-27	10,000000	15,80000	297
espiral 16	0,95	$\pi/4$	2,51E-28	10,000000	15,80000	593
espiral 17	0,95	$\pi/3$	1,32E-27	10,000000	15,80000	599
espiral 18	0,95	$\pi/2$	4,62E-28	10,000000	15,80000	606
Espiral	DES. EST. Mínimo Obj	DES. EST $\lambda$	DES. EST. $Ao$	%Error $\lambda$	% Error $Ao$	t prom.
espiral 12	1,612E-28	4,92E-14	3,55E-15	3,14E-16	0,00000	2,40612
espiral 13	3,218E-27	8,21E-14	4,59E-14	3,72E-16	0,00000	5,01213
espiral 14	1,121E-27	2,31E-14	2,21E-15	2,1E-16	0,00000	4,98215
espiral 15	2,316E-28	5,12E-15	2,43E-15	1,93E-16	0,00000	5,13230
espiral 16	2,156E-27	5,93E-14	3,68E-14	1,46E-15	0,00000	10,28215
espiral 17	1,315E-27	4,92E-14	2,13E-15	6,12E-16	0,00000	10,65370
espiral 18	3,411E-28	2,13E-14	3,31E-15	1,35E-15	0,00000	10,13520

Como se puede observar en la Tabla 17, los resultados obtenidos con las espirales seleccionadas son los esperados, corroborando los resultados de las Tablas 15 y 16, por lo tanto, el criterio de selección de la mejor espiral, pasa a ser el tiempo y el número de iteraciones, ya que todas cumplen con los criterios antes mencionados. De acuerdo a lo anterior, la espiral que más se adecúa a los criterios es la espiral 12, que presenta la menor cantidad de iteraciones (142) en un tiempo promedio de 2,4 segundos. De este punto en adelante, todos los cálculos que se realizan son utilizando la espiral anteriormente seleccionada.

## 5.2 ESTIMACIÓN DE LA GENERACIÓN INTERNA DE CALOR POR MEDIO DEL ALGORITMO DE LA ESPIRAL

5.2.1 *RESULTADOS OBTENIDOS*. Basado en los resultados de la Tabla 17, se utiliza la espiral 12, para resolver el problema inverso. En donde, para las estimaciones correspondientes, la temperatura del sensor se verá afectada por diferentes niveles de ruido blanco Gaussiano. Esto, para tener en cuenta que, al momento de solucionar el problema inverso, éste es extremadamente sensible a los errores en las mediciones, además que parte de los datos que se conocen del problema (medidas del sensor), son una serie de medidas experimentales que, por su naturaleza propia, no son exactas. Por tal razón es necesario evidenciar el comportamiento y la variación de los resultados que se obtienen. En la Tabla 18 se encuentran los resultados obtenidos de las estimaciones para niveles de ruido de 30 [dB], 40 [dB] y 50 [dB], donde se evidencia la influencia del ruido en cada una de las estimaciones. Esta prueba se realizó ejecutando el algoritmo 50 veces por cada nivel de ruido.

En la Figura 11 que se presenta a continuación, se puede apreciar la temperatura transitoria en el sensor utilizado sin presencia de ruido.

Figura 11. Variación de la temperatura a través del tiempo en el sensor ubicado en el radio de la esfera  $ru = 0.5$ .

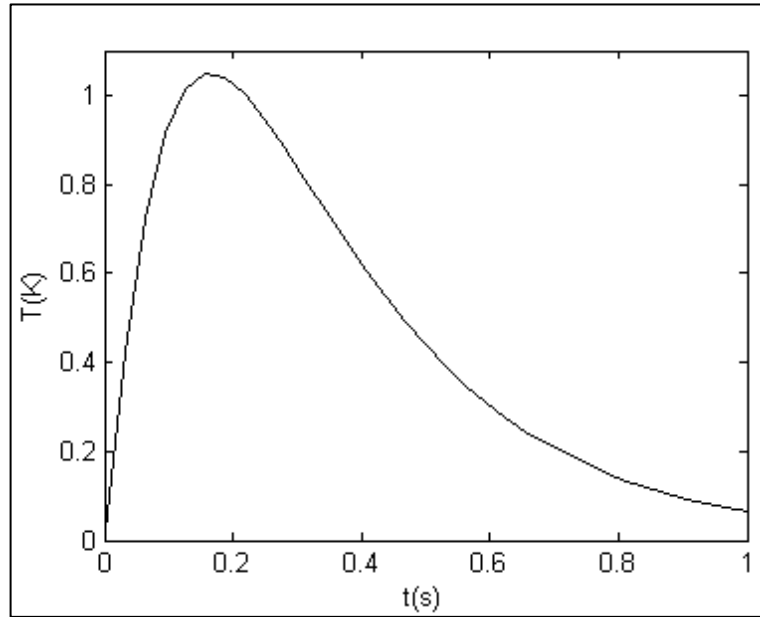
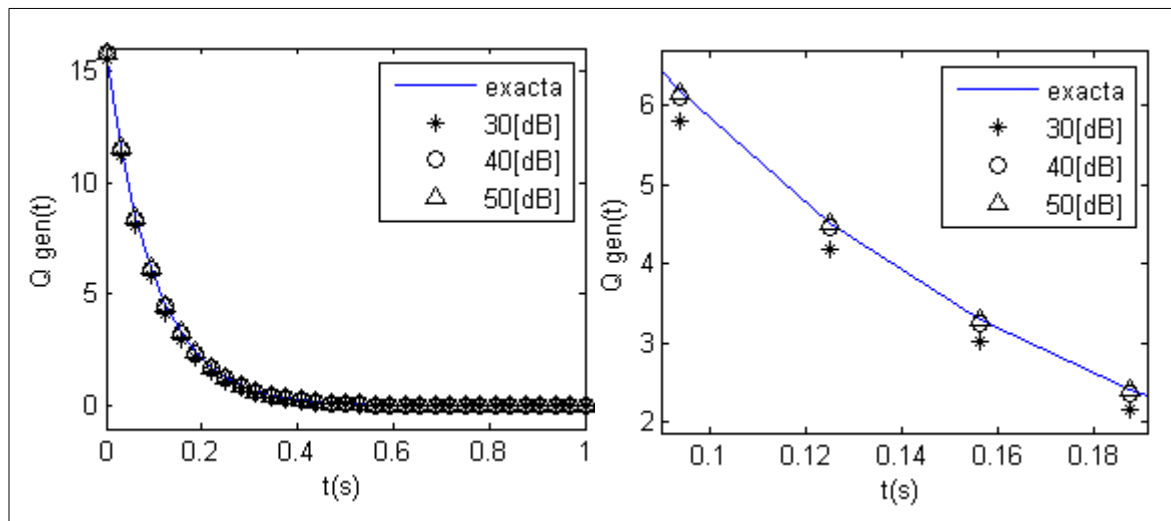


Tabla 18. Resultados del problema inverso para diferentes niveles de ruido.

awgn (dB)	R	theta ( $\theta$ )	Mínimo Obj	$\lambda$	$A_0$	Iteración promedio
-----	0,8	$\pi/2$	1,43E-27	10,000000	15,80000	142
30	0,8	$\pi/2$	2,24E-01	10,4944026	15,5254244	143
40	0,8	$\pi/2$	4,26E-02	10,0863581	15,7366866	143
50	0,8	$\pi/2$	4,81E-03	10,0223154	15,7893825	143
awgn (dB)	DES. EST. Mínimo Obj	DES. EST $\lambda$	DES. EST. $A_0$	%Error $\lambda$	% Error $A_0$	t prom.
-----	1,612E-28	4,92E-14	3,55E-15	3,14E-16	2,25E-16	2,40612
30	3,18E-15	9,11E-08	3,88E-08	4,94E-02	1,74E-02	2,52665
40	1,76E-15	4,12E-08	1,29E-08	8,64E-03	4,01E-03	2,59046
50	2,21E-16	6,35E-09	8,99E-09	7,23E-04	6,72E-04	2,49945

En la Figura 12 se muestra la estimación de la generación interna de calor en función del tiempo. Para la estimación se tomaron los diferentes valores de  $A_0$  y  $\lambda$  de la Tabla 18. Gracias a la elección óptima realizada con anterioridad de los parámetros  $R$  y  $\theta$  del algoritmo de la espiral, se presentan pequeñas desviaciones en la estimación y no se puede apreciar un cambio abrupto en el comportamiento de la función (grafica izquierda), al ampliar esta gráfica en un intervalo de tiempo pequeño, se puede observar la leve variación en los datos estimados para un ruido de 30 [dB] (grafica derecha).

Figura 12. Estimación de la generación interna de calor para diferentes niveles de ruido.



### 5.3 CONTRASTE DE RESULTADOS

En esta sección, se va a comparar los resultados obtenidos a través el método de la espiral, con el algoritmo de Levenberg Marquardt. Los criterios a tener en cuenta al momento de hacer la comparación van a ser: error y rango de búsqueda.

**5.3.1 CONTRASTE DEL METODO DE LA ESPIRAL CON LEVENBERG MARQUARDT.** Como se mencionó anteriormente, para contrastar los resultados obtenidos con el método de la espiral, se resolvió el problema inverso con el algoritmo de Levenberg Marquardt. En la Tabla 19, se encuentran los resultados al estimar las variables  $A_0$  y  $\lambda$ . En esta tabla se puede observar el tiempo y número de iteraciones, los límites superior e inferior en los que el método aún converge. Estas estimaciones se realizaron para diferentes niveles de ruido blanco de tipo Gaussiano; al igual que las realizadas con el algoritmo de la espiral. Cabe resaltar que para este algoritmo no es necesario hacer repeticiones para cada prueba ya que es determinístico, por consiguiente, cada vez que se ejecute se va a obtener un mismo resultado.

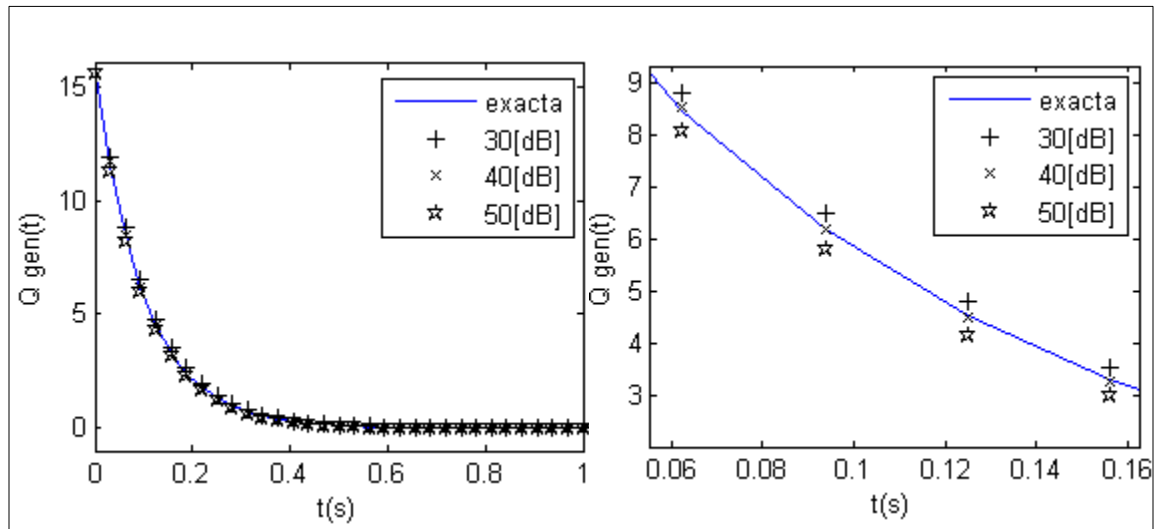
Tabla 19. Estimación de la variable  $\lambda$  y  $A_0$ .

awgn (dB)	Iteración	$\lambda$	Ao	Límite inferior	Límite superior
-----	113	10,1694	15,5965	0,1	55
30	112	9,7171	16,1569	0,1	54
40	113	10,2416	16,0986	0,1	55
50	113	10,1723	15,5708	0,1	55
awgn (dB)	%Error $\lambda$	Mínimo Obj		% Error Ao	Tiempo (s)
-----	1,69%	1,47E-02		1,28%	0,5992
30	2,83%	4,82E-01		2,30%	0,7223
40	2,41%	5,26E-02		1,89%	0,7039
50	1,72%	1,75E-02		1,45%	0.5956

En la Figura 13 se muestra la estimación de la generación interna de calor en función del tiempo. Para la estimación, de la Tabla 19 se tomaron los diferentes valores de  $\lambda$  y  $A_0$  para el nivel de ruido correspondiente. En este método a

diferencia del anterior, se presenta mayor dispersión de los datos en la estimación en donde a simple vista no se observan cambios abruptos (gráfica izquierda), sin embargo, al ampliar esta gráfica en un intervalo de tiempo pequeño, se puede observar la variación en los datos estimados para un ruido de 30 [dB] y 40 [dB] (gráfica derecha).

Figura 13. Generación interna de Calor para diferentes niveles de ruido.



Comparando los resultados obtenidos del algoritmo de la Espiral con los resultados obtenidos con el algoritmo de Levenberg-Marquardt, se puede apreciar que el método de la Espiral, arrojó estimaciones más precisas en comparación con los resultados obtenidos por el método de Marquardt; esto se puede evidenciar claramente, revisando los porcentajes de error obtenidos para cada una de las pruebas en la Tabla 20. Además, al comparar el número de iteraciones y el tiempo de ejecución se puede apreciar una diferencia entre los dos métodos, en donde Levenberg-Marquardt converge más rápido que la espiral, y esto se ve reflejado en el número de iteraciones. Sin embargo, teniendo en cuenta el criterio de selección mencionado al inicio de la sección, el método de la espiral presenta un porcentaje de error menor en los datos, comparado con el porcentaje de error obtenido por Levenberg-Marquardt.

El espacio de búsqueda de Levenberg-Marquardt, se encuentra entre los límites inferior y superior presentados en la Tabla 20 para asegurar la convergencia del método y la exactitud en la estimación; sin embargo, esto hace que el método falle para valores que se encuentren por fuera de estos límites. Por otro parte, el método de la Espiral, para el que se realizó una nueva prueba para observar su funcionalidad para un límite superior al de Marquardt, demostrando que su espacio de búsqueda es mayor, sin embargo, no se realizó ninguna prueba para determinar el límite superior máximo para el que el método aun converge.

Tabla 20. Contraste de Resultados del método Levenberg Marquardt con el algoritmo de la Espiral.

Método	awgn (dB)	Iteración	Mínimo Obj	Tiempo (s)	Límite inferior	Límite superior
Levenberg Marquardt	-----	113	1,47E-02	0,5992	0,1	55
	30	112	4,82E-01	0,7223	0,1	54
	40	113	5,26E-02	0,7039	0,1	55
	50	113	1,75E-02	0.5956	0,1	55
Algoritmo de la Espiral	-----	142	1,43E-27	2,40612	0,1	100
	30	143	2,24E-01	2,52665	0,1	100
	40	143	4,26E-02	2,59046	0,1	100
	50	143	4,81E-03	2,49945	0,1	100
Método	$\lambda$	$A_0$	%Error $\lambda$	% Error $A_0$	Límite inferior	Límite superior
Levenberg Marquardt	10,1694	15,5965	1,69	1,28	0,1	55
	9,7171	16,1569	2,83	2,30	0,1	54
	10,2416	16,0986	2,41	1,89	0,1	55
	10,1723	15,5708	1,72	1,45	0,1	55
Algoritmo de la Espiral	10,0000	15,8000	3,14E-16	2,25E-16	0,1	100
	10,4944	15,5254	4,94E-02	1,74E-02	0,1	100
	10,0863	15,7366	8,64E-03	4,01E-03	0,1	100
	10,0223	15,7893	7,23E-04	6,72E-04	0,1	100

## 6 CONCLUSIONES

1. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el presente trabajo, se puede concluir lo siguiente:
  - 1.1. Se obtuvieron estimaciones precisas de la generación interna de calor, para una dependencia exponencial con el tiempo. Esto debido a las elecciones previas realizadas de  $R$  y theta ( $\theta$ ) en las zonas que el método de la espiral presenta diversificación e intensificación.
  - 1.2. Los parámetros de las espirales de prueba, fueron óptimos después de haber pasado por dos etapas de selección, y se determinó que la espiral 12 con  $R = 0,8$  y theta ( $\theta$ ) =  $\pi/2$  era la mejor espiral para resolver el problema inverso, encontrando un óptimo global de orden  $10^{-28}$  en las estimaciones realizadas, demostrando la importancia que las espirales cumplan con las especificaciones de la diversificación en la fase inicial de búsqueda y de la intensificación de la fase final de búsqueda.
  - 1.3. La comparación de resultados realizada entre el algoritmo de la Espiral y el método de Levenberg-Marquardt, permitió corroborar la eficiencia del método metaheurístico utilizado para la estimación de la generación interna de calor variable en el tiempo, con porcentaje de errores por debajo del 1%. Teniendo en cuenta que el método de Levenberg-Marquardt se encontró limitado a un rango de búsqueda entre valores de 0,1 y 55, en donde, por fuera de estos valores, el método no converge en el valor deseado, a diferencia del método de

la Espiral que no presentó ninguna dificultad para converger en un rango de búsqueda alejado del espacio solución.

## **7 RECOMENDACIONES**

Se recomienda la ampliación de este proyecto hacia sólidos de diferentes formas geométricas cuyo material sea expuesto a la energía de microondas, para evaluar el comportamiento de la generación interna de calor o de otras propiedades térmicas cuya estimación por medio de los sensores de medida existentes, es de alta dificultad.

## CITAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. Zueco, “Solución de problemas inversos en conducción de calor mediante el metodo de simulación por redes,” Universidad Politécnica de Cartagena, 2003.
- [2] P. Plaza, “Control de la temperatura en sistemas de calentamiento por microondas,” Universidad Politecnica de Valencia, 2015.
- [3] M. Ozisik and H. Orlande, *Inverse heat transfer*. Taylor and Francis, 2000.
- [4] G. John, “Modelado y simulación del claentamiento de bloques cerámicos en una guía de onda,” Universidad Industrial de Santander, 2005.
- [5] S. Fabián, “Diseño y simulación de guías de onda para el calentamiento de materiales con microondas,” Universidad Industrial de Santander, 2008.
- [6] D. Aradilla, R. Oliver, and F. Estrany, “La química de la radiación de microondas,” *Univ. Politécnica Cataluña*, p. 6, 2009.
- [7] K. T. Amura and K. Y. Asuda, “Spiral Optimization Algorithm Using Periodic Descent Directions,” vol. 9, no. 3, pp. 134–143, 2016.
- [8] H. Hosack and N. Marler, “Microwave Mischief and Madness,” vol. 40, no. May, pp. 14–16, 2002.
- [9] R. Tempo, J. Rujano, and C. Monzón, “The one-dimensional diffusion problem as an application of the Duhamel ’ s theorem,” vol. 31, no. 1, pp. 61–64, 2010.

## BIBLIOGRAFÍA

- G. John, "Modelado y simulación del calentamiento de bloques cerámicos en una guía de onda," Universidad Industrial de Santander, 2005.
- J. Pérez, "Contribución a los métodos de optimización basados en procesos naturales y su aplicación a la medida de antenas en campo proximo," Universidad de Cantabria, 2005.
- K F. P. Incropera and D. P. DeWitt, *Fundamentos de transferencia de calor*. 1999.
- M. Ozisik and H. Orlande, *Inverse heat transfer*. Taylor and Francis, 2000.
- O. Cortés, R. Rojas, and R. Marín, "Aplicación de la optimización por enjambre de partículas a un problema inverso de conducción de calor," *Univ. Politécnica Puebla*, p. 10, 2010.
- P. Plaza, "Control de la temperatura en sistemas de calentamiento por microondas," Universidad Politecnica de Valencia, 2015.
- R. Correa and O. Gualdrón, "Las microondas en la industria," *Energía y Comput.*, vol. 8, p. 8, 1999.
- S. Fabián, "Diseño y simulación de guías de onda para el calentamiento de materiales con microondas," Universidad Industrial de Santander, 2008.

## ANEXOS

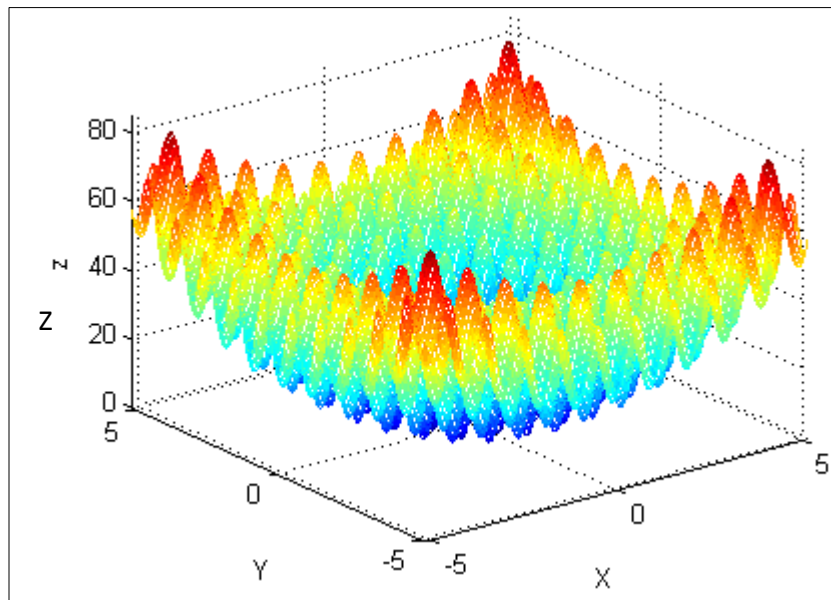
### *Anexo A : Funciones de prueba para el algoritmo de la espiral*

Como se mencionó en el capítulo cuatro, se utilizaron funciones unimodales y multimodales para verificar el correcto funcionamiento del método de la espiral, el cual fue implementado en el programa Matlab.

### FUNCIÓN RASTRIGIN

La gráfica de esta función para dos dimensiones, se muestra a continuación en la Figura 14, con  $z = f(x, y)$ , en donde se pueden evidenciar un único mínimo global ubicado en la coordenada (0,0) donde este es igual a cero, y varios mínimos locales.

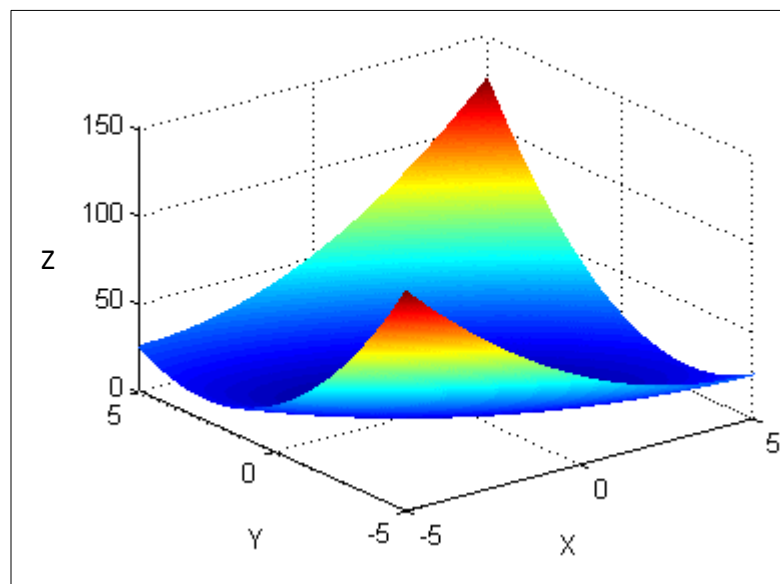
Figura 14. Función Rastrigin para dos dimensiones.



## FUNCIÓN DE SCHWEFEL'S

En la Figura 15, se observa la gráfica de esta función, donde  $z = f(x, y)$ . El mínimo de la función se encuentra en la posición  $(0, 0, \dots, 0)$  y el espacio solución, en un rango entre  $-5 \leq x_i \leq 5$ .

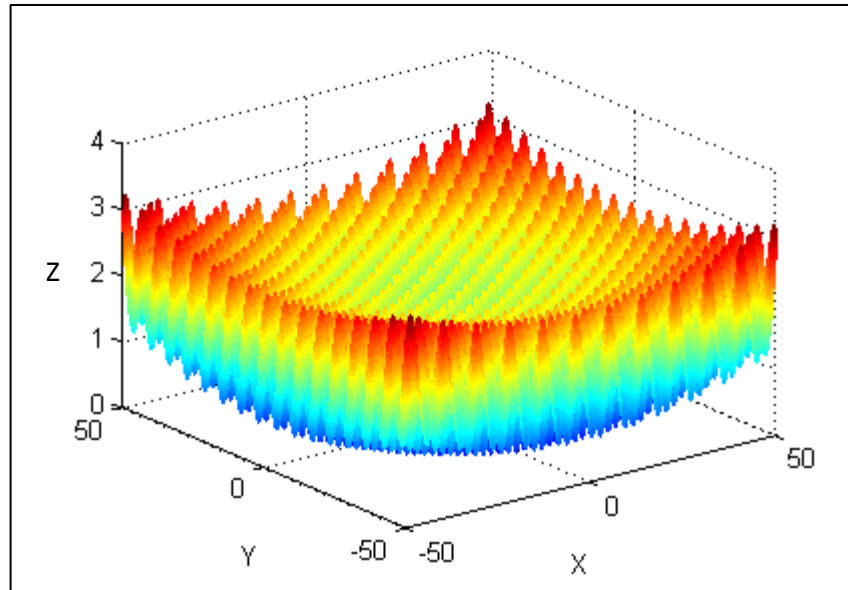
*Figura 15. Grafica de la función Schwefel's, para dos dimensiones.*



## FUNCIÓN DE GRIEWANK.

En la figura 16, se observa la gráfica de esta función, donde  $z = f(x, y)$ . Se representan en ella la variedad de mínimos locales y el mínimo global de la función cuyo valor aproximado es de cero (0) y su coordenada es  $(0, 0, \dots, 0)$ .

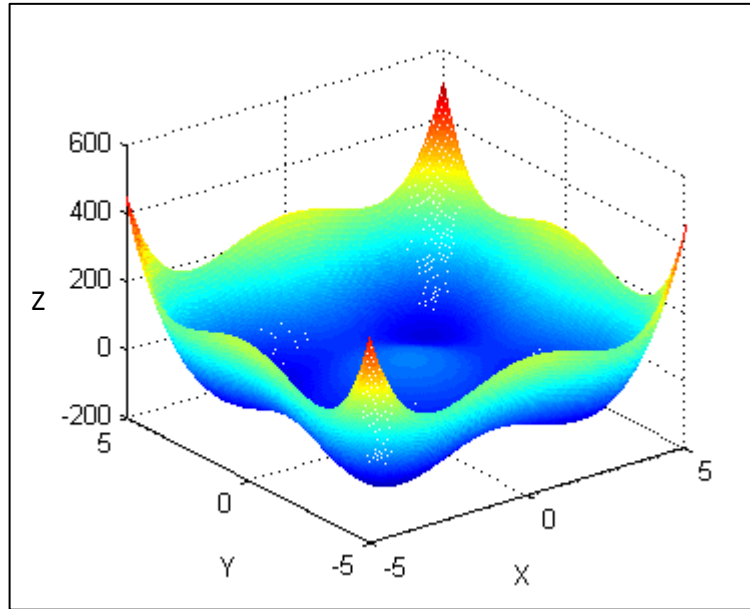
Figura 16. Función Griewank, en dos dimensiones.



### FUNCIÓN 2N MÍNIMA

En la Figura 17, se observa la gráfica de esta función, donde Z es función de X y Y. También se puede apreciar que el mínimo de esta función, se encuentra en la coordenada  $(2.9, 2.9, \dots, 2.9)$  con un valor que se aproxima a  $-78n$ .

Figura 17. Función 2N Mínima, en dos dimensiones.

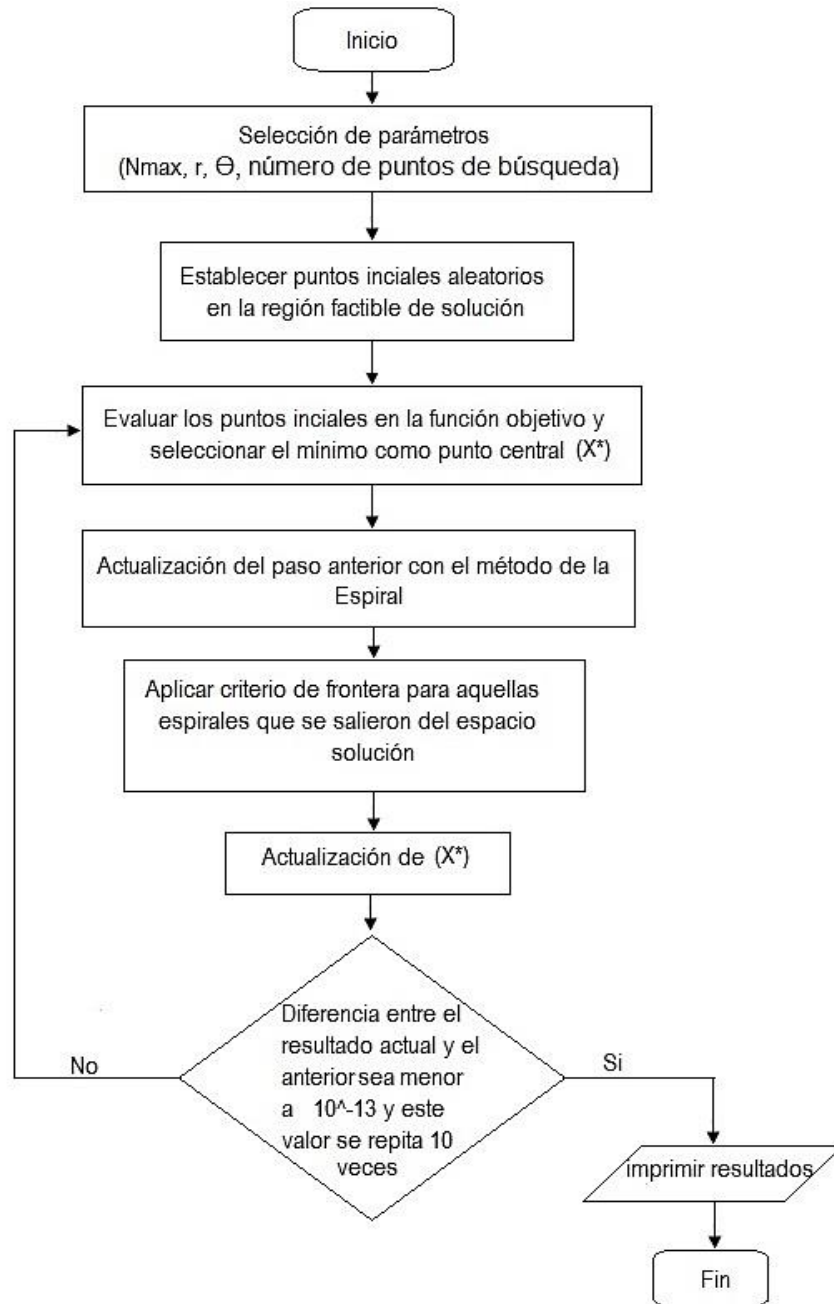


*Anexo B: Diagrama de flujo método de la espiral modificado.*

En la Figura 18 se encuentra el diagrama de bloques del algoritmo que se implementó para resolver el problema inverso. El cual está conformado por 8 bloques, entre los que se destacan la elección de puntos iniciales aleatorios dentro del espacio solución, seguidamente la evaluación de estos puntos iniciales en la función objetivo para establecer el mínimo, aplicación de las condiciones de frontera y por último el criterio de parada. Para entrar en más detalle de esta última, se establecieron 2 condiciones que deben cumplirse al tiempo para detener el algoritmo, la primera consiste en que la estimación actual con la anterior tenga una diferencia de  $10^{-13}$  y la segunda que esta tendencia se repita 10 veces. En

caso que el algoritmo no converja hay un límite en la cantidad de iteraciones de 2000.

Figura 18. Diagrama de bloques del método de la espiral.



Anexo C. Pruebas realizadas variando  $r$  y  $\theta$

En este anexo se encuentran las diferentes pruebas realizadas para la selección de los parámetros  $R$  y  $\theta$  que cumplan con los criterios de diversificación e intensificación, los cuales son característicos de los métodos heurísticos.

Figura 19. Espirales para  $R = 0,1$  y  $\theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2$

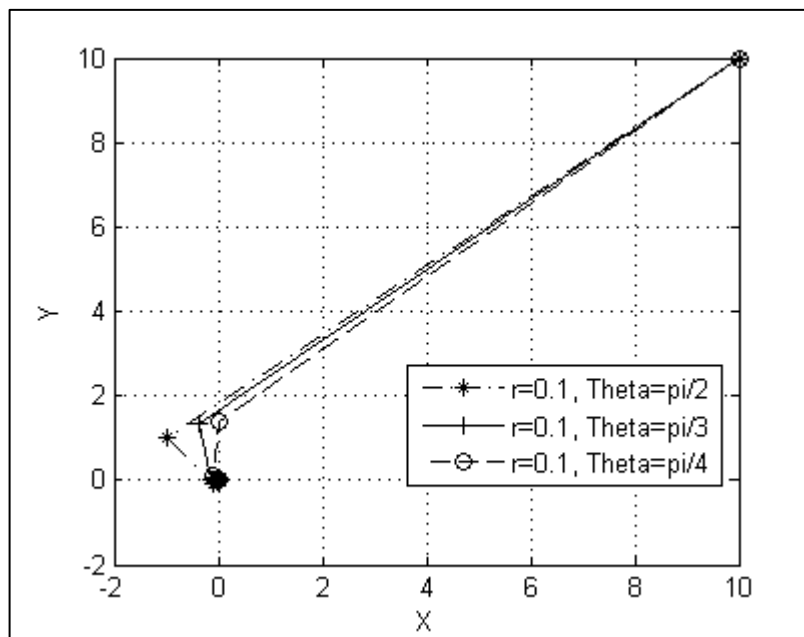


Figura 20. Espirales para  $R = 0,2$  y  $\theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2$

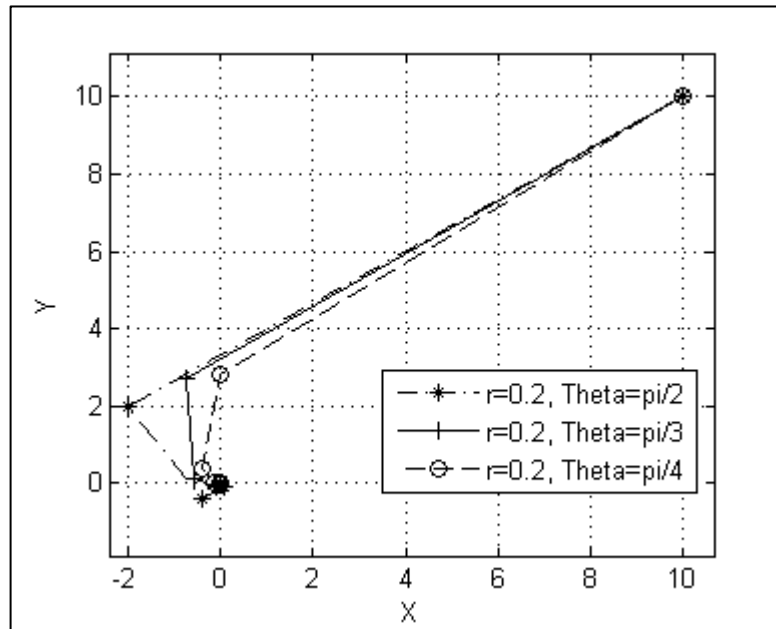


Figura 21. Espirales para  $R = 0,3$  y  $\theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2$

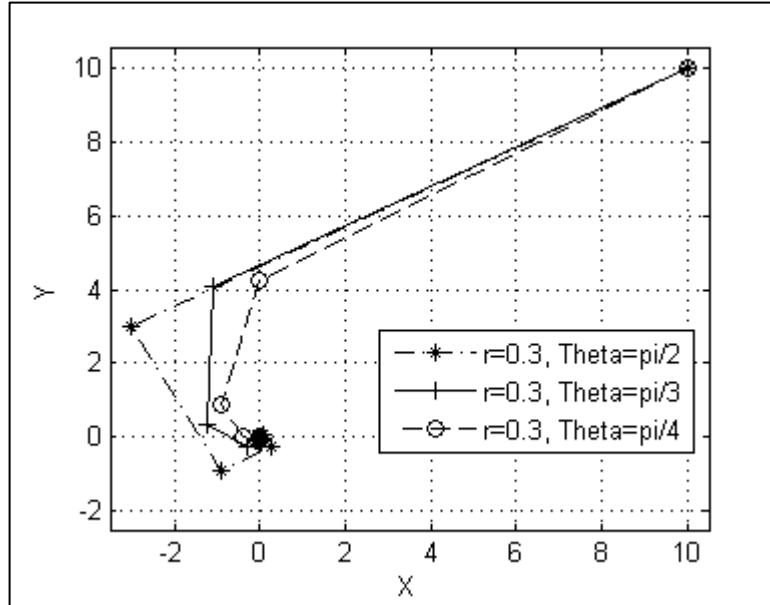


Figura 22. Espirales para  $R = 0,4$  y theta ( $\theta$ ) =  $\pi/4, \pi/3, \pi/2$

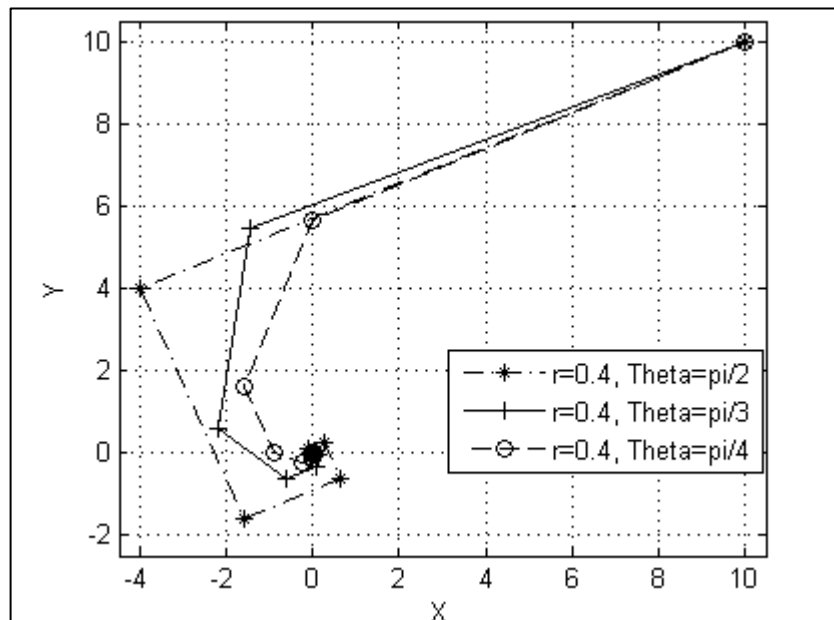


Figura 23. Espirales para  $R = 0,5$  y theta ( $\theta$ ) =  $\pi/4, \pi/3, \pi/2$

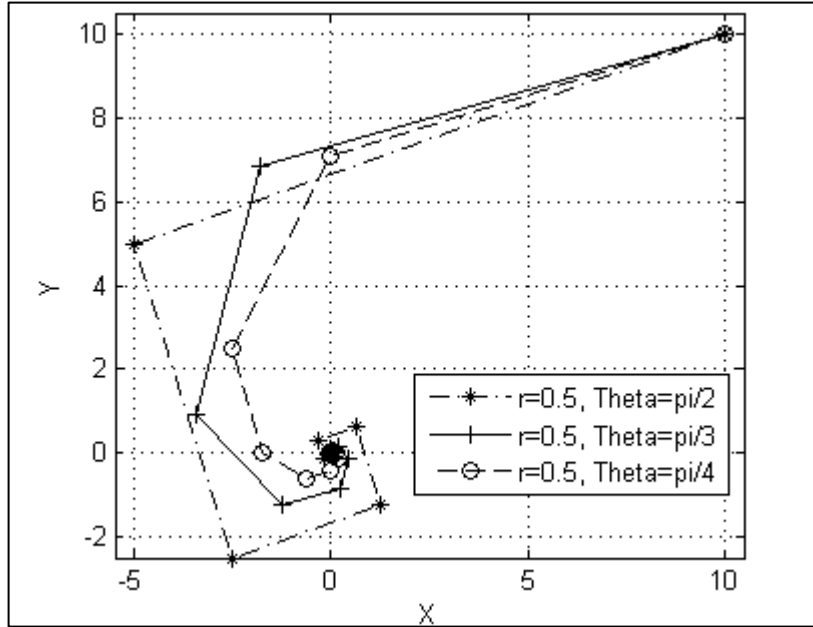


Figura 24. Espirales para  $R = 0,6$  y theta ( $\theta$ ) =  $\pi/4, \pi/3, \pi/2$

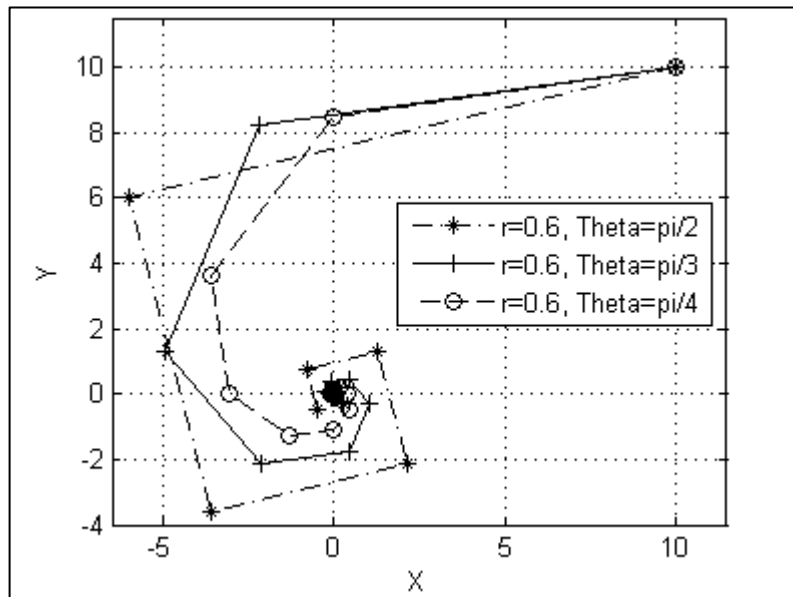


Figura 25. Espirales para  $R = 0,7$  y theta ( $\theta$ ) =  $\pi/4, \pi/3, \pi/2$

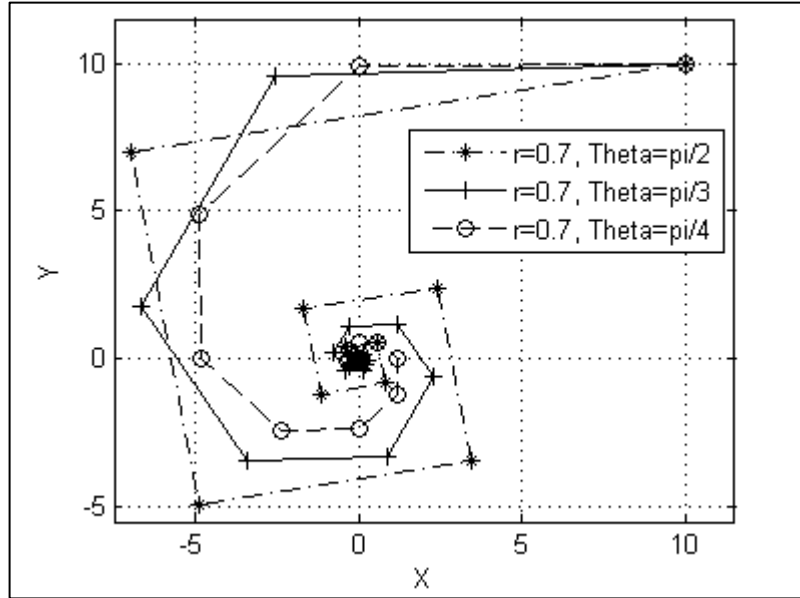


Figura 26. Espirales para  $R = 0,8$  y theta ( $\theta$ ) =  $\pi/4, \pi/3, \pi/2$

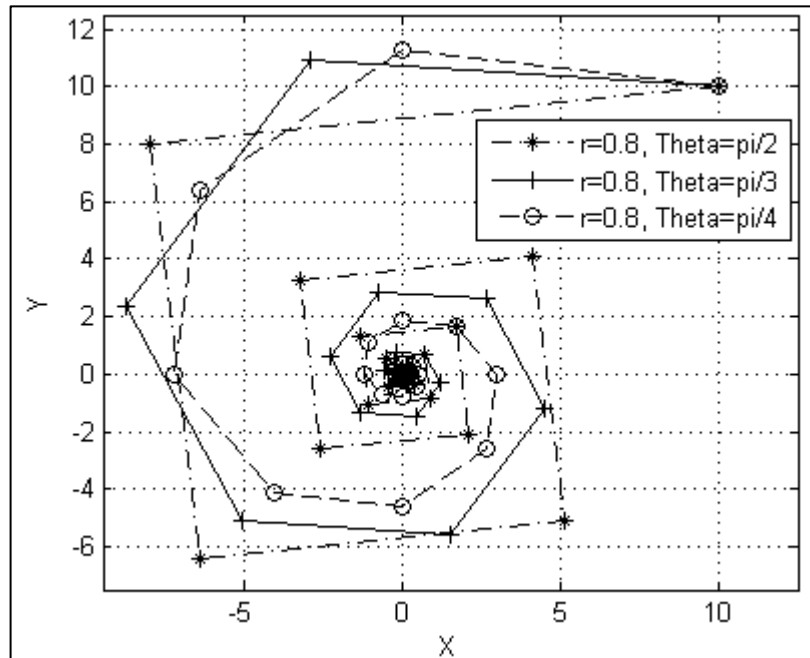


Figura 27. Espirales para ( $\theta$ ) =  $0,9$  y theta ( $\theta$ ) =  $\pi/4, \pi/3, \pi/2$

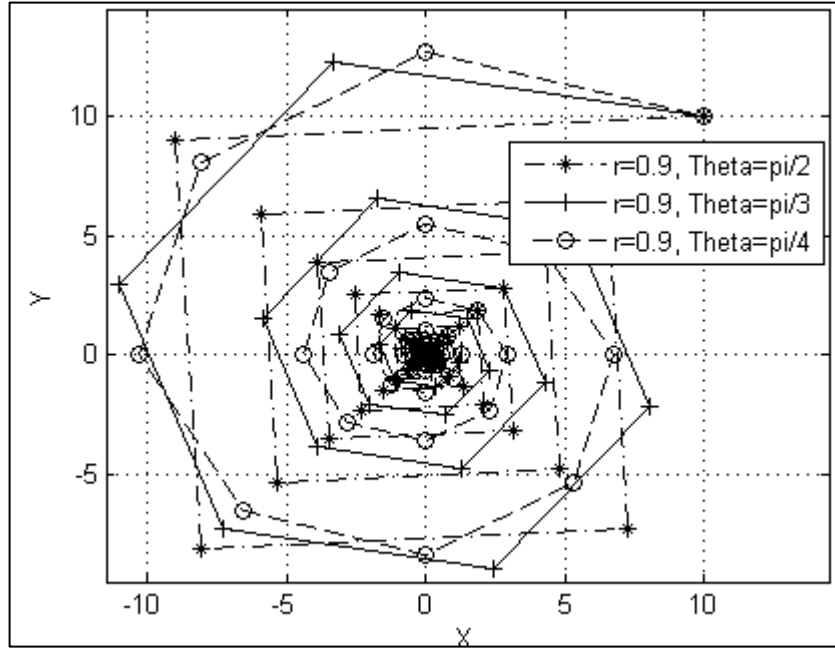
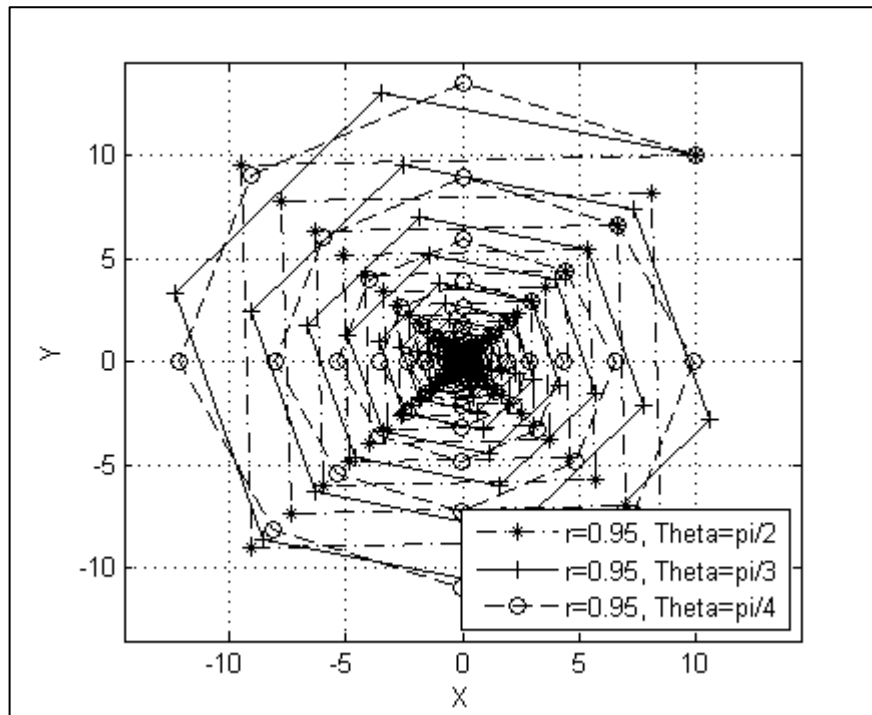


Figura 28. Espirales para  $R = 0,95$  y  $\theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2$



Anexo D. Resultados de funciones de prueba

FUNCIÓN DE 2N MÍNIMA						FUNCIÓN DE GRIEWANK					
n	Cálculos	Espiral 1	Espiral 2	Espiral 3	Espiral 4	N	Cálculos	Espiral 1	Espiral 2	Espiral 3	Espiral 4
2	Más alto	-156,66	-156,66	-156,66	-156,66	2	Más alto	0,03	0,03	0,01	0,01
	Más bajo	-156,66	-156,66	-156,66	-156,66		Más bajo	0	0	0	0
	Media	-156,66	-156,66	-156,66	-156,66		Media	0,0186	0,0187	0,00298	0,003564
	Desv. Est.	2,85E-14	2,84E-14	2,84E-14	2,84E-14		Desv. Est.	0,008	0,0065	0,004534	0,004789
	Iteración	496	580	2362	2387		Iteración	550	587	2344	2431
	t promedio	0,27	0,289	2,30	2,487		t promedio	0,3564	0,3988	2,776	3,0254
	Más alto	-236	-235	-234,9	-235		3	Más alto	0,11	0,17	0,06
Más bajo	-206,72	-206,72	-235	-178,45	Más bajo	0		0,01	0	0,01	
Media	-233,134	-220,832	-233,996	217,3621	Media	0,0265		0,06221	0,0198	0,0784	
Desv. Est.	7,0653	10,1126	0,0026	15,8478	Desv. Est.	0,02597		0,04045	0,0142	0,03576	
Iteración	512	507	2387	2432	Iteración	557		596	2468	2489	
t promedio	0,298727	0,303244	3,302971	3,358514	t promedio	0,4122		0,4533	3,887	4,0144	

