

Construcción de un código MHD con dos fluidos para el  
estudio de la dinámica del plasma en la atmósfera solar

Paula Camila Wandurraga Sanabria

Trabajo de Investigación para optar al título de Magíster en Matemática Aplicada

Director

Fabio Duvan Lora Clavijo

Doctorado en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Maestría en Matemática Aplicada

Bucaramanga

2021

## Tabla de Contenido

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>13</b>
<b>1. ECUACIONES DE LA MAGNETOHIDRODINÁMICA PARA DOS FLUIDOS</b>	<b>18</b>
1.1. Formulación conservativa	25
1.2. Estructura característica	28
<b>2. MÉTODOS NUMÉRICOS</b>	<b>30</b>
2.1. Método de líneas	30
2.2. Discretización: Volúmenes finitos	31
2.3. Método de alta resolución para la captura de choques	31
2.3.1. Esquema HLL	31
2.3.2. Método limitador lineal de pendiente	32
2.3.2.1. MinMod	33
2.3.2.2. MC	34
2.3.2.3. SuperBee	35
2.4. Paso de tiempo adaptativo: Condición de Courant-Friedrichs-Lewy	35
2.5. Adimensionalización	36
<b>3. PRUEBAS NUMÉRICAS</b>	<b>38</b>

Construcción de un código MHD con dos fluidos	3
3.1. Ondas Acústicas en un Medio Uniforme	39
3.1.1. Solución Analítica	39
3.1.2. Solución numérica	44
3.2. Tubo de choque de Brio-Wu y de Sod para un fluido parcialmente ionizado	49
3.3. Vórtice de Orszag-Tang	57
<b>4. INESTABILIDAD DE KELVIN-HELMHOLTZ EN PROMINENCIAS SOLARES</b>	<b>66</b>
<b>5. CONCLUSIONES</b>	<b>81</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>86</b>
<b>APÉNDICES</b>	<b>97</b>

### Lista de Figuras

- Figura 1. Solución de la perturbación de la velocidad para la especie neutral y la especie cargada, junto con la diferencia entre la solución analítica y numérica para 3 resoluciones diferentes. 46
- Figura 2. Solución numérica de la perturbación de la velocidad para las especies neutral y cargada para  $t/t_A = 0.0$ ,  $t/t_A = 0.2$  y  $t/t_A = 0.4$ , en función de la distancia en la dirección  $z$  adimensional, donde  $L_z = 16.7755$  m. 48
- Figura 3. Solución del tubo de choque de Brio-Wu en  $t = 0.1$  para un plasma desacoplado ( $\xi_a = 0$ ), comparada con su solución exacta. 51
- Figura 4. Variables de estado para el tubo de choque de Brio-Wu en  $t = 0.1$ , para diferentes valores del parámetro de interacción  $\xi_a$ . 53
- Figura 5. Diferencia de densidades y presiones para las especies cargada y neutral, para el tubo de choque de Brio-Wu en  $t = 0.1$ , para diferentes valores del parámetro de interacción  $\xi_a$ . 55
- Figura 6. Norma  $L_1$  del error aplicada al tubo de choque de Brio-Wu en  $t = 0.1$ , para diferentes valores del parámetro de interacción  $\xi_a$ . 57
- Figura 7. Densidad del vórtice de Orszag-Tang en  $t = 0.30$ ,  $t = 0.48$  y  $t = 0.74$ , para un plasma desacoplado ( $\xi_a = 0$ ). 59

- Figura 8. Densidad del vórtice de Orszag-Tang en  $t = 0.48$  con diferentes parámetros de colisiones:  $\xi_a = 10$ ,  $\xi_a = 100$  y  $\xi_a = 500$ . 61
- Figura 9. Presión de las especies cargada y neutral a lo largo del eje  $x$  para un vórtice de Orszag-Tang en  $t = 0.48$ , con  $\xi_a = 0$ ,  $\xi_a = 10$ ,  $\xi_a = 100$  y  $\xi_a = 500$ . 62
- Figura 10. Presión de las especies cargada y neutral a lo largo del eje  $x$  en un vórtice de Orszag-Tang para  $t = 0.48$  con  $\xi_a = 0$ ,  $\xi_a = 10$ ,  $\xi_a = 100$  y  $\xi_a = 500$ . 63
- Figura 11. Divergencia del campo magnético para el vórtice de Orszag-Tang en  $t = 0.48$  con diferentes parámetros de colisiones:  $\xi_a = 10$ ,  $\xi_a = 100$  y  $\xi_a = 500$ . 65
- Figura 12. Observación de ondas de Kelvin-Helmholtz durante una eyección de masa coronal. 67
- Figura 13. Observación de ondulaciones relacionadas con una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en una prominencia solar. 68
- Figura 14. Etapas de formación de un vórtice en una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. 69
- Figura 15. Densidad de la especie cargada y neutral para una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, con  $\xi_a = 0$  y  $\xi_a = 100$ , en  $t \approx 2.42$  s. 71
- Figura 16. Promedio de la energía magnética de la especie ionizada de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz para  $\xi_a = 0$  y  $\xi_a = 100$ , durante una IKH. 73
- Figura 17. Densidad de la especie cargada y neutral, para una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz para  $\xi_a = 0$  y  $\xi_a = 100$ . 74

- Figura 18. Velocidad relativa entre la especie cargada y neutral, para una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz para  $\xi_a = 0$  y  $\xi_a = 100$ . 76
- Figura 19. Promedio volumétrico normalizado de las energías interna, cinética y magnética para las dos especies en cada tiempo, para la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. 78
- Figura 20. Divergencia del campo magnético para una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz para  $\xi_a = 0$  y  $\xi_a = 100$ , con diferentes velocidades longitudinales. 80
- Figura 21. Elemento de volumen de la intercelda 103
- Figura 22. Cara lateral derecha del elemento de volumen 104
- Figura 23. Flujos en las caras de los cubos de las interceldas 106

### Lista de Tablas

Tabla 1.	Valores de la sección transversal de colisiones para diferentes modelos y los trabajos en los que se han usado.	24
Tabla 2.	Parámetros de las variables en el estado de equilibrio para la prueba de propagación de ondas acústicas.	43
Tabla 3.	Errores absolutos y porcentuales respecto a la solución analítica, para la velocidad de propagación de la onda acústica.	47
Tabla 4.	Valores máximos de la velocidad relativa entre las especies para diferentes valores del parámetro de colisiones	75
Tabla 5.	Amplificación del campo magnético en función del parámetro de colisiones.	79

**Lista de Apéndices**

	<b>pág.</b>
Apéndice A. Ecuación de Estado de un Gas Ideal	97
Apéndice B. Transporte de Flujo Restringido	102

## Resumen

**Título:** Construcción de un código MHD con dos fluidos para el estudio de la dinámica del plasma en la atmósfera solar \*

**Autor:** Paula Camila Wandurraga Sanabria \*\*

**Palabras Clave:** Magnetohidrodinámica, Física Solar, Métodos Numéricos, Modelado Numérico.

**Descripción:** Los fluidos parcialmente ionizados abundan en el universo en estructuras como las nubes moleculares, ionósferas planetarias y discos protoplanetarios, además de algunas capas terrestres como la ionósfera y la termósfera, y particularmente en el caso de la atmósfera solar, en la región de la cromósfera. En esta zona del Sol, ocurren diferentes fenómenos como las espículas, las oscilaciones periódicas de 3 minutos, los *loops* fríos, las prominencias, entre otros, haciendo que su estudio sea de gran interés. En este trabajo de investigación, se construye un código que resuelve las ecuaciones de la Hidrodinámica y de la Magnetohidrodinámica, con el fin de modelar un plasma parcialmente ionizado, constituido por una especie neutral y una especie cargada (iones + electrones), que se acoplan por medio de colisiones y generan calor debido a su interacción. Para garantizar la correcta implementación de las ecuaciones y de los métodos numéricos, se realizan diferentes pruebas numéricas: la primera se lleva a cabo en el régimen lineal y consiste en la propagación de ondas acústicas en un medio uniforme, para la cual existe una solución exacta bajo determinadas condiciones. El resultado numérico obtenido con el código, reproduce de manera exacta y precisa la solución analítica, para un valor dado del parámetro de colisiones. Posteriormente se realiza una prueba no lineal unidimensional, el tubo de choque, cuya solución exacta es conocida tanto para un fluido Hidrodinámico (tubo de Sod), como para uno

---

\* Trabajo de Investigación de Maestría en Matemática Aplicada.

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Doctorado en Física.

Magnetohidrodinámico (tubo de Brio-Wu), es decir, para un plasma parcialmente ionizado desacoplado. La solución arrojada por el código para un plasma desacoplado, es consistente con la analítica, y para el caso de un plasma acoplado, se observa que las colisiones modifican la estructura de cada fluido, para que converja a una misma solución. Por otra parte, la última prueba no lineal se desarrolla en dos dimensiones, el vórtice de Orszag-Tang, cuyos resultados para el plasma desacoplado, simulan favorablemente la morfología típica de la prueba. El caso acoplado demuestra la influencia indirecta del campo magnético sobre las partículas neutrales, y de estas últimas sobre la dinámica del fluido ionizado. Adicionalmente, como aplicación del código en física solar, se realiza un modelo de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en la interfaz entre la corona solar y una prominencia, cuyo material está parcialmente ionizado. Los resultados muestran que un acople más fuerte entre los fluidos, conlleva a una mayor amplificación de los campos magnéticos, siendo ésta una de las posibles causas del calentamiento coronal y de la aceleración de las partículas del viento solar. Se concluye que, tanto en las pruebas numéricas, como en la aplicación física, las colisiones entre las partículas cargadas y las neutrales, acoplan el sistema, de tal manera que su evolución converge hacia una solución tipo atractora, donde ambas especies tienden a un mismo comportamiento. Esto se presenta debido a que los campos magnéticos actúan indirectamente sobre las partículas neutrales mediante las colisiones, y estas transfieren parte de su energía cinética al fluido cargado, disminuyendo el efecto tipo tensión superficial que presenta el campo magnético, lo que implica que la especie neutral suavice su morfología y que la especie cargada se inestabilice.

### Abstract

**Title:** Construction of an MHD code with two fluids for the study of plasma dynamics in the solar atmosphere \*

**Author:** Paula Camila Wandurraga Sanabria \*\*

**Keywords:** Magnetohydrodynamics, Solar Physics, Numerical Methods, Mathematical Modeling.

**Description:** Partially ionized fluids are abundant in the universe, in structures such as molecular clouds, planetary ionospheres and protoplanetary disks, some terrestrial layers such as the ionosphere and thermosphere, and particularly in the chromosphere of the solar atmosphere. In this region of the Sun, there are different phenomena such as spicules, periodic 3-minute oscillations, cold loops, prominences, among others, making the behavior of the partially ionized plasma an interesting topic to study. In this research, we built a code that solves the Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic equations to model a partially ionized plasma, constituted by a neutral specie and a charged specie (ions + electrons), which are coupled through collisions and generate heat due to their interaction. To guarantee the correct implementation of the equations and numerical methods, we carried out different numerical tests: the first one in the lineal regime and consists of the propagation of acoustic waves in a uniform plasma, which exact solution is known under certain conditions. The numerical results obtained with the code precisely reproduce the analytical solution for a determined value of the collisions parameter. Subsequently, we perform a 1D nonlinear test, the shock tube, which exact solution is known both for the Hydrodynamic fluid (Sod tube) and the Magnetohydrodynamic fluid (Brio-Wu tube), *i. e.*, for a partially ionized plasma without any interaction. The solution provided by the code for the uncoupled plasma is consistent with the analytical solution, and for the coupled plasma, we observed that the collisions modify

---

\* Research Work in Applied Mathematics.

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Doctorado en Física.

the structure of both species, converging to the same solution. On the other hand, the last nonlinear test was the 2D Orszag-Tang vortex, which results for the uncoupled plasma simulated the typical morphology of the test. The results for the coupled plasma demonstrated the indirect influence of the magnetic field on neutral particles and the influence of the latter on the dynamics of the ionized fluid. Furthermore, we made an application of the code in Solar Physics through the model of the Kelvin-Helmholtz instability in the interface between the solar corona and a prominence, whose plasma is partially ionized. The results showed that strong coupling between the fluids leads to a greater amplification of the magnetic fields, which is one of the possible causes of the coronal heating and the acceleration of the solar wind particles. We concluded that, both in the numerical tests and in the physical application, the collisions between the charged and neutral particles coupled the system, leading its evolution towards an attractor-type solution, where both species behave similarly. This occurs because the magnetic fields act indirectly on the neutral particles through collisions, and these transfer some of their kinetic energy to the charged fluid, which reduces the surface tension effect of the magnetic field and therefore, softens the morphology of the neutral specie while the charged fluid become unstable.

## INTRODUCCIÓN

El plasma parcialmente ionizado es muy común en el universo, está presente en las nubes moleculares (Mouschovias et al., 2011), las ionósferas planetarias (Ballester et al., 2018), los discos protoplanetarios (Kataoka and Sato, 2017), entre otros. Particularmente, en la atmósfera terrestre se encuentra en la ionósfera y termósfera, y en la atmósfera solar, en la capa de la cromósfera (Leake et al., 2014). En esta región, el plasma se puede modelar como un fluido parcialmente ionizado que está compuesto por una especie neutral y una especie cargada (iones+electrones) (Judge, 2006).

La presencia de fluidos parcialmente ionizados en las diferentes estructuras galácticas y regiones de estrellas y planetas, hace que el estudio de su dinámica sea de gran interés y por esto, múltiples fenómenos se modelan siguiendo la composición de un plasma constituido por una especie cargada y una especie neutral. En modelos cromosféricos, es crucial tener en cuenta la especie neutral y su interacción con los iones, ya que la producción de calor debido a estas interacciones, domina sobre efectos como la reconexión magnética y el calentamiento óhmico, y es tan fuerte que puede generar fenómenos como los jets cromosféricos (Al Shidi et al., 2019). Por otra parte, un modelo numérico 3D del fenómeno de granulación en la cromósfera, realizado con el código JOANNA, permitió demostrar que el calentamiento coronal, que inicia desde la cromósfera, se presenta debido a la liberación de calor, producto de las colisiones entre la especie cargada y la neutral (Murawski et al., 2020). A su vez, en la propagación de ondas, la energía debido a los cho-

ques entre las especies, equilibra las pérdidas de energía radiativa y térmica en la atmósfera solar (Wójcik et al., 2020), manteniendo un perfil de temperatura que concuerda con las observaciones en las que se basa el modelo semiempírico de Avrett and Loeser (2008), el cual incluye el calentamiento coronal.

En particular, existen fenómenos cuyo material es plasma parcialmente ionizado, como las espículas y las prominencias solares. Estas últimas están hechas de material cromosférico denso y frío, inmerso en la corona solar (Parenti, 2014), lo cual resulta en un plasma de dos especies que genera fenómenos no lineales (van Tend, 1980; Melis et al., 2021) como lo son las inestabilidades (Wiehr et al., 2019). La presencia de una prominencia implica la existencia de campos magnéticos que proveen un soporte contra la gravedad (López Ariste et al., 2006; Paletou, 2008) y aislamiento térmico respecto a su entorno (Gibson, 2018). Aunque se han reconocido, estudiado y caracterizado gran cantidad de prominencias, aún no se conoce dicho fenómeno en su totalidad. Una de las preguntas abiertas acerca de estas, es su capacidad de extenderse verticalmente a lo largo de diferentes escalas gravitacionales sin colapsar (Zirker and Engvold, 2017).

Múltiples observaciones han evidenciado la presencia de inestabilidades de Kelvin-Helmholtz (IKH) en prominencias solares. En particular el *Solar Optical Telescope* a bordo de la sonda *Hi-node* registró la presencia de una inestabilidad acoplada de Kelvin-Helmholtz y Rayleigh-Taylor en la frontera de la prominencia (Berger et al., 2017). Además, a partir de los datos tomados por el espectrógrafo IRIS, se observó la formación de IKH en prominencias (Hillier and Polito, 2018)

y con el telescopio NVST se detectó una IKH en un modo *kink* de este mismo fenómeno (Yang et al., 2018). Cabe mencionar que esta inestabilidad no se presenta únicamente en las prominencias solares, también se genera en otras regiones o fenómenos solares activos como las eyecciones de masa coronal (Ofman and Thompson, 2011; Zhelyazkov, 2015), las fulguraciones (Yuan et al., 2019), los jets cromosféricos (Kuridze et al., 2016; Li et al., 2018), el viento solar (Kieokaew et al., 2021), entre otros.

Las simulaciones de IKH que se llevan a cabo siguiendo el modelo de plasma parcialmente ionizado, concluyen que los campos magnéticos ejercen fuerzas de manera indirecta sobre la especie neutral y esta última cede energía cinética a la especie cargada, debido al acople de las especies por medio de las colisiones (Martínez-Sykora et al., 2015). Esto implica una suavización de los vórtices de la IKH para el fluido neutral, a diferencia del caso totalmente desacoplado, donde dichos vórtices son muy definidos y pronunciados (Hillier, 2019). Adicionalmente, la velocidad mínima necesaria para que se genere una IKH en un fluido totalmente ionizado, está relacionada con la velocidad de Alfvén, pero para el modelo de plasma parcialmente ionizado con colisiones, dicho mínimo toma valores más bajos (Martínez-Gómez et al., 2015).

Diferentes simulaciones de inestabilidades de Rayleigh-Taylor en prominencias solares han demostrado que el acople entre las partículas cargadas y las neutrales, mediante el impacto de la fuerza magnética sobre la especie neutral. Además de la relación entre la intensidad del campo magnético paralelo a la discontinuidad y su capacidad para reprimir la generación y crecimiento

de la inestabilidad (Popescu Braileanu et al., 2021).

Con la anterior motivación, en este trabajo se construye un código numérico que modela un fluido parcialmente ionizado constituido por dos especies: una neutral y una ionizada, las cuales están acopladas mediante colisiones. Para esto, se parte del código MAGNUS (Navarro et al., 2017), sobre el que se implementa un módulo numérico que calcula el acople del plasma mediante los términos de colisiones entre las partículas neutras y las ionizadas. Para lograr esto, es necesario modificar tanto las variables conservativas, los flujos numéricos y las fuentes, como también los métodos numéricos. Se verifica la implementación de las ecuaciones y de los métodos numéricos mediante pruebas numéricas, tanto en el régimen lineal como en el régimen no lineal, para un plasma parcialmente ionizado desacoplado y acoplado. Finalmente, como una aplicación en física solar, se resuelve el problema de la formación y evolución de una IKH en la interfaz entre una prominencia y la corona solar, para el modelo de fluido totalmente ionizado y parcialmente ionizado.

El trabajo de investigación está organizado de la siguiente manera: En la Sección 1 se presentan los fundamentos de la Magnetohidrodinámica (MHD) para un modelo de plasma parcialmente ionizado constituido por una especie neutral y una especie cargada. Este sistema de ecuaciones se incluye en el código MAGNUS a través de un módulo numérico, donde se incorpora la interacción entre las especies debido a las colisiones. Posteriormente, en la sección 2 se describen los métodos numéricos que se implementaron para lograr resolver las ecuaciones en el régimen no lineal, además de un modelo de programación en paralelo para optimizar el tiempo de cómputo.

Con el objetivo de verificar la correcta implementación de las ecuaciones y de los métodos numéricos, se realizaron 3 pruebas: Primero se resuelve el problema de propagación de ondas acústicas en un medio uniforme en el régimen lineal, tanto analítica como numéricamente. Luego se realizan dos pruebas en el régimen no lineal: Los tubos de choque de Brio-Wu y Sod, en los que se comprueba la capacidad del código de manejar diferentes choques, y el vórtice de Orszag-Tang, el cual genera vórtices y turbulencia MHD. En la Sección 4 se propone una IKH como aplicación del código, para lo que se impone inicialmente una interfaz que separa una prominencia de la corona solar, y se perturba transversalmente dicha interfaz para generar la inestabilidad. Por último, en la sección 5 se muestra la discusión y las conclusiones de este trabajo de investigación.

## 1. ECUACIONES DE LA MAGNETOHIDRODINÁMICA PARA DOS FLUIDOS

Los fluidos parcialmente ionizados se componen de una especie neutral y otra cargada, la cual contiene iones y electrones (Oliver et al., 2016). El sistema de ecuaciones que modela este tipo de plasma se puede obtener a partir de la ecuación de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f - \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = 0, \quad (1)$$

donde  $f$  es la función de densidad de probabilidad,  $\mathbf{v}$  es el campo de velocidades en el espacio de fase,  $\nabla_{\mathbf{r}}$  el vector gradiente,  $\mathbf{F}$  el campo de fuerzas externas que actúan sobre el fluido,  $m$  la masa de las partículas,  $\nabla_{\mathbf{v}}$  el vector del operador derivada respecto al campo de velocidades  $\mathbf{v}$ , y  $(\partial f / \partial t)_{coll}$  el término de colisiones entre las partículas del sistema. La ecuación de Boltzmann (1) se multiplica por la función arbitraria  $\omega = \omega(\mathbf{v})$  y se integra respecto al espacio de momentos para encontrar la ecuación general de transporte de Boltzmann (Bittencourt, 2004)

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_{\varepsilon} \langle \omega \rangle_{\varepsilon}) + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (n_{\varepsilon} \langle \omega \mathbf{v} \rangle_{\varepsilon}) - \frac{n_{\varepsilon}}{m_{\varepsilon}} \langle \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \omega \rangle_{\varepsilon} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} (n_{\varepsilon} \langle \omega \rangle_{\varepsilon}) \right]_{coll}, \quad (2)$$

donde el subíndice  $\varepsilon$  indica la especie de partícula,  $n$  es la densidad de número de la partícula y los paréntesis angulares denotan el valor medio de la cantidad acotada. En la atmósfera solar se encuentran partículas neutrales, iones y electrones, pero la aproximación a un plasma parcialmente ionizado, reduce el sistema a una especie neutral y una cargada. Según la teoría de la MHD para un

solo fluido, dicha especie cargada representa a los iones y electrones, aproximándolos a una sola especie constituida por protones, ya que la masa del protón es mucho mayor que la masa del electrón.

Las ecuaciones de conservación de la masa para un elemento de fluido, se encuentran cuando la función de peso  $\omega = m_\varepsilon$  es la masa de las partículas  $\varepsilon$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n \mathbf{V}_n) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}_i) = 0, \quad (4)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $\mathbf{V}$  el campo de velocidades y los subíndices  $n, i$  denotan las variables relacionadas con la especie neutral y la especie cargada compuesta por iones+electrones, respectivamente. Cabe resaltar que procesos como los de recombinación y de ionización, no se consideran en este trabajo, por lo que no se presentan términos de fuentes en las ecuaciones (3,4).

Las ecuaciones de movimiento o segunda ley de Newton se deducen cuando la función de peso  $\omega = m_\varepsilon \mathbf{v}$  es la cantidad de movimiento en el espacio de fase, se desprecian efectos como la viscosidad, la resistividad, el flujo de calor, entre otros, y únicamente se tienen en cuenta las colisiones entre las especies

$$\frac{\partial (\rho_n \mathbf{V}_n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n \mathbf{V}_n \otimes \mathbf{V}_n + P_n \mathbf{I}) = \alpha_c (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_n) + \rho_n \mathbf{g}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial (\rho_i \mathbf{V}_i)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \rho_i \mathbf{V}_i \otimes \mathbf{V}_i - \frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}{\mu} + \left( P_i + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu} \right) \mathbf{I} \right] = \alpha_c (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_i) + \rho_i \mathbf{g}, \quad (6)$$

donde  $P$  es la presión cinética del gas,  $\mathbf{g}$  la aceleración de la gravedad, cuyo valor aproximado para la atmósfera solar es  $|g| = 274 \text{ ms}^{-2}$ ,  $\mathbf{B}$  el campo magnético de la especie ionizada y  $\alpha_c$  el coeficiente de colisiones entre las partículas neutras y los iones+electrones (Draine, 1986). En las ecuaciones (5,6) se observan las fuerzas que actúan sobre el elemento de fluido, como lo son la fuerza de contacto entre los elementos de fluido mediante el gradiente de presión, la fuerza gravitacional y la fuerza magnética para el caso de la especie cargada. Adicionalmente, el término  $\alpha_c (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_n)$  está relacionado con las colisiones entre las especies, el cual se interpreta como una fuerza de interacción que modifica la dinámica de las partículas en el plasma. Cabe recalcar que el fluido cargado está bajo la aproximación de la MHD no relativista, por lo que el tiempo característico es mucho más grande que el tiempo que tarda la luz en viajar una determinada distancia, haciendo que esta teoría esté en el régimen de bajas frecuencias y largas longitudes de onda. Como consecuencia, no existen corrientes de desplazamiento, las acumulaciones locales de carga en el tiempo son despreciables y las corrientes eléctricas fluyen en circuitos cerrados, lo que implica que la densidad de fuerza eléctrica sea mucho menor que la densidad de fuerza magnética y por tanto, se pueda despreciar (Priest, 2014).

Las ecuaciones de conservación de la energía para ambas especies se hallan cuando la función de peso  $\omega = \frac{1}{2} m_\epsilon \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  es la energía cinética de las partículas  $\epsilon$ . Los procesos de pérdida o transferencia de energía que se tienen en cuenta son las colisiones entre las especies, la producción de calor relacionada con las colisiones y la energía perdida debido al trabajo realizado por la

gravedad. Estas ecuaciones quedan escritas como

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} + \nabla \cdot [(E_n + P_n) \mathbf{V}_n] = \alpha_c \mathbf{V}_n \cdot (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_n) + Q_n^{in} + \rho_n \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}_n, \quad (7)$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} + \nabla \cdot [(E_i + P_i) \mathbf{V}_i - \mathbf{B}(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{B})] = \alpha_c \mathbf{V}_i \cdot (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_i) + Q_i^{in} + \rho_i \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}_i, \quad (8)$$

donde  $Q^{in}$  es la producción de calor debido a la interacción entre las especies y  $E$  la densidad de energía total, dada por

$$E_n = \frac{\rho_n \mathbf{V}_n \cdot \mathbf{V}_n}{2} + \rho_n e_n, \quad E_i = \frac{\rho_i \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_i}{2} + \rho_i e_i + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu}, \quad (9)$$

siendo  $e$  la energía interna específica. Al igual que en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, la aproximación de la MHD para bajas velocidades y bajas frecuencias hace que la densidad de energía eléctrica sea mucho menor que la densidad de energía magnética, por lo que es posible despreciar la energía eléctrica en la ecuación de conservación de la energía para la especie ionizada.

Por último, la ley de Maxwell-Faraday y la condición solenoidal para el campo magnético están dadas por las siguientes expresiones

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}_i \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{V}_i) = 0, \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (11)$$

siendo la ecuación (10) un acople con la ley de Ohm cuando se desprecia el calentamiento óhmico y se aproxima bajo la teoría de la MHD no relativista.

El término de producción de calor debido a la interacción entre las especies se compone de dos partes: En la primera se tiene en cuenta la cantidad de colisiones que se presentan entre las especies mediante la rapidez relativa entre ellas y en la segunda se expresa la transferencia de calor entre las especies por medio de la temperatura relativa (Leake et al., 2014). Este término se escribe como

$$Q_n^{in} = \alpha_c \left[ \frac{1}{2} |\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_n|^2 + \frac{3}{2} \frac{k_B}{m_i} (T_i - T_n) \right], \quad (12)$$

$$Q_i^{in} = \alpha_c \left[ \frac{1}{2} |\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_n|^2 + \frac{3}{2} \frac{k_B}{m_i} (T_n - T_i) \right], \quad (13)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura y  $m_i$  la masa de la especie ionizada, que se aproxima a la masa del protón, ya que ésta es mucho mayor que la masa del electrón. El coeficiente de colisiones entre las partículas neutras y los iones+electrones, denotado por  $\alpha_c$ , es fundamental en este trabajo de investigación, ya que es el parámetro que cuantifica la interacción que hay entre las especies (Braginskii, 1965; Ballester et al., 2018). En caso de que este término sea nulo, se tiene un plasma con dos fluidos desacoplados que se comportan de manera independiente, pero a medida que su valor va aumentando, se evidencia el impacto de las colisiones y la generación de

calor debido a estas (Draine, 1986). El coeficiente de colisiones sigue la forma

$$\alpha_c = \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{9\pi s^2}{64} \right)^{1/2} \xi_c \sqrt{\frac{8k_B}{\pi} \left( \frac{T_i}{m_i} + \frac{T_n}{m_n} \right)} \rho_i \rho_n, \quad (14)$$

donde  $m_n$  es la masa del neutrón, y los parámetros  $s$  y  $\xi_c$  se expresan como

$$s = \frac{|\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_n|}{c_r}, \quad c_r = \left[ 2k_B \left( \frac{T_i}{m_i} + \frac{T_n}{m_n} \right) \right]^{1/2}, \quad \xi_c = \frac{\sigma_{in}}{m_i + m_n}, \quad (15)$$

siendo  $\sigma_{in}$  la sección transversal de colisiones entre las especies, cuyo valor depende del modelo utilizado. Particularmente, existe el modelo clásico de las *hard spheres* (van Beijeren and Ernst, 1979) y el modelo VK (Vranjes and Krstic, 2013), que tiene en cuenta fenómenos cuánticos como variaciones debido a la temperatura, correcciones de indistinguibilidad cuántica, entre otros. Ya que el código se diseñó para llevar a cabo simulaciones en física solar, más específicamente en la atmósfera solar, el término  $c_r$  toma valores mucho mayores que la velocidad relativa entre las especies (Oliver et al., 2016) y por lo tanto, es válido aproximar  $s \rightarrow 0$ , lo cual implica que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{9\pi s^2}{64} \right)^{1/2} = \frac{4}{3}, \quad (16)$$

y por consiguiente, la expresión para el coeficiente de colisiones para la atmósfera solar es

$$\alpha_c = \frac{4}{3} \xi_c \sqrt{\frac{8k_B}{\pi} \left( \frac{T_i}{m_i} + \frac{T_n}{m_n} \right)} \rho_i \rho_n. \quad (17)$$

Se observa que los valores de temperaturas y densidades están relacionados con la región a modelar y el parámetro  $\xi_c$  se relaciona con la intensidad de la interacción a analizar, ya que es directamente proporcional a la sección transversal de colisiones  $\sigma_{in}$ . Entre los diferentes modelos numéricos, en los que el plasma se compone de dos especies, se encuentra una amplia gama de valores para la sección transversal de colisiones, estos valores se recopilaran en la tabla 1, junto con los trabajos en física solar en los que se han usado.

Modelo	$\sigma_{in}$ [m <sup>2</sup> ]	Simulaciones
<i>Hard Spheres</i>	$4.7 \times 10^{-20}$	Braginskii (1965)
		Zaqarashvili et al. (2011)
	$1.41 \times 10^{-19}$	Leake et al. (2012)
	$7.5 \times 10^{-19}$	Oliver et al. (2016)
	$1.16 \times 10^{-18}$	Leake et al. (2013)
VK	$1.6 \times 10^{-18}$	-

Tabla 1

Valores de la sección transversal de colisiones para el modelo de las *hard spheres* y VK, junto con los trabajos en los que han sido usados dichos valores.

Finalmente, para cerrar el sistema de ecuaciones (3-11), se asume una ecuación de estado para un plasma en equilibrio

$$P_n = (\gamma - 1)\rho_n e_n = \frac{k_B}{m_n}\rho_n T_n, \quad P_i = (\gamma - 1)\rho_i e_i = \frac{k_B}{m_i}\rho_i T_i, \quad (18)$$

donde  $\gamma$  es el coeficiente adiabático, que corresponde a un valor de  $\gamma = 5/3$  para un gas monoatómico no relativista. Es importante resaltar que, aunque la ecuación de estado corresponde a la

de un gas ideal, esta se obtiene a partir de la teoría de Debye-Hückel y del teorema del virial (ver apéndice 1). Aun así, ya que el fluido es colisional y genera calor debido a las colisiones, no se interpreta físicamente como un gas ideal.

### 1.1. Formulación conservativa

Con el fin de resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, dado por (3-11), mediante métodos numéricos como los volúmenes finitos acoplados a métodos de alta resolución para la captura de choques, es necesario escribir el conjunto de ecuaciones en su forma conservativa. En consecuencia, se obtiene un sistema de ecuaciones no lineal hiperbólico de primer orden (Toro, 1997), el cual se expresado como

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = \mathbf{S}, \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (20)$$

donde  $\mathbf{Q}$  es el vector de cantidades conservativas,  $\mathbf{F}_x$ ,  $\mathbf{F}_y$ ,  $\mathbf{F}_z$  son los vectores de los flujos a lo largo de cada dirección espacial y  $\mathbf{S}$  el vector de fuentes. El vector  $\mathbf{Q}$  viene dado por

$$\mathbf{Q} = (\rho_n, \rho_i, M_{n_x}, M_{n_y}, M_{n_z}, M_{i_x}, M_{i_y}, M_{i_z}, E_n, E_i, B_x, B_y, B_z)^T, \quad (21)$$

siendo  $M_{n_p} = m_n V_{n_p}$  y  $M_{i_p} = m_i V_{i_p}$  las  $p$ -ésimas componentes del vector cantidad de movimiento para la especie neutral y para la especie cargada, respectivamente. La  $p$ -ésima componente del

vector de flujo se calcula de la siguiente manera

$$\mathbf{F}_p = \begin{bmatrix}
 M_{np} \\
 M_{ip} \\
 \frac{M_{nx}M_{np}}{\rho_n} + \left[ (\gamma-1) \left( E_n - \frac{M_n^2}{2\rho_n} \right) \right] \delta_{xp} \\
 \frac{M_{ny}M_{np}}{\rho_n} + \left[ (\gamma-1) \left( E_n - \frac{M_n^2}{2\rho_n} \right) \right] \delta_{yp} \\
 \frac{M_{nz}M_{np}}{\rho_n} + \left[ (\gamma-1) \left( E_n - \frac{M_n^2}{2\rho_n} \right) \right] \delta_{zp} \\
 \frac{M_{ix}M_{ip}}{\rho_i} - B_x B_p + \left[ (\gamma-1) \left( E_i - \frac{M_i^2}{2\rho_i} \right) - (\gamma-2) \frac{B^2}{2} \right] \delta_{xp} \\
 \frac{M_{iy}M_{ip}}{\rho_i} - B_y B_p + \left[ (\gamma-1) \left( E_i - \frac{M_i^2}{2\rho_i} \right) - (\gamma-2) \frac{B^2}{2} \right] \delta_{yp} \\
 \frac{M_{iz}M_{ip}}{\rho_i} - B_z B_p + \left[ (\gamma-1) \left( E_i - \frac{M_i^2}{2\rho_i} \right) - (\gamma-2) \frac{B^2}{2} \right] \delta_{zp} \\
 \frac{M_{np}}{\rho_n} \left[ \gamma E_n - (\gamma-1) \frac{M_n^2}{2\rho_n} \right] \\
 \frac{M_{ip}}{\rho_i} \left[ \gamma E_i - (\gamma-1) \frac{M_i^2}{2\rho_i} - (\gamma-2) \frac{B^2}{2} \right] - \frac{B_p}{\rho_i} (M_{ix} B_x + M_{iy} B_y + M_{iz} B_z) \\
 \frac{1}{\rho_i} (M_{ip} B_x - M_{ix} B_p) \\
 \frac{1}{\rho_i} (M_{ip} B_y - M_{iy} B_p) \\
 \frac{1}{\rho_i} (M_{ip} B_z - M_{iz} B_p)
 \end{bmatrix}$$

Por último, se elige un sistema de referencia tal que la gravedad actúe a lo largo de la dirección negativa de  $z$ , es decir,  $\vec{g} = -|g_z|\hat{k}$ , con lo que el vector de fuentes se escribe como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_c \left( \frac{M_{i_x}}{\rho_i} - \frac{M_{n_x}}{\rho_n} \right) \\ \alpha_c \left( \frac{M_{i_y}}{\rho_i} - \frac{M_{n_y}}{\rho_n} \right) \\ \alpha_c \left( \frac{M_{i_z}}{\rho_i} - \frac{M_{n_z}}{\rho_n} \right) - \rho_n g_z \\ \alpha_c \left( \frac{M_{n_x}}{\rho_n} - \frac{M_{i_x}}{\rho_i} \right) \\ \alpha_c \left( \frac{M_{n_y}}{\rho_n} - \frac{M_{i_y}}{\rho_i} \right) \\ \alpha_c \left( \frac{M_{n_z}}{\rho_n} - \frac{M_{i_z}}{\rho_i} \right) - \rho_i g_z \\ \frac{\alpha_c}{\rho_n} \left[ M_{n_x} \left( \frac{M_{i_x}}{\rho_i} - \frac{M_{n_x}}{\rho_n} \right) + M_{n_y} \left( \frac{M_{i_y}}{\rho_i} - \frac{M_{n_y}}{\rho_n} \right) + M_{n_z} \left( \frac{M_{i_z}}{\rho_i} - \frac{M_{n_z}}{\rho_n} \right) \right] + Q_n^{in} - g_z M_{n_z} \\ \frac{\alpha_c}{\rho_i} \left[ M_{i_x} \left( \frac{M_{n_x}}{\rho_n} - \frac{M_{i_x}}{\rho_i} \right) + M_{i_y} \left( \frac{M_{n_y}}{\rho_n} - \frac{M_{i_y}}{\rho_i} \right) + M_{i_z} \left( \frac{M_{n_z}}{\rho_n} - \frac{M_{i_z}}{\rho_i} \right) \right] + Q_i^{in} - g_z M_{i_z} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde se observa que las colisiones implican transferencia de momento lineal y energía cinética entre las especies, además de la producción de calor debido a esta interacción.

## 1.2. Estructura característica

La implementación de un sistema de ecuaciones conservativo, bajo los esquemas numéricos anteriormente mencionados, requiere conocer la estructura característica de dichas ecuaciones. Esta se calcula mediante la matriz Jacobiana de los flujos respecto a las variables conservativas

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{F}_p(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}}, \quad (22)$$

cuyos valores propios representan las velocidades características del sistema a lo largo de la dirección  $p$ . Para el sistema dado por las ecuaciones (19,20), los valores propios son

$$\lambda_{1,2} = V_{ip}, \quad \lambda_{3,4} = V_{ip} \pm v_{Ap}, \quad \lambda_{5,6} = V_{ip} \pm v_{rp}, \quad \lambda_{7,8} = V_{ip} \pm v_{lp}, \quad (23)$$

$$\lambda_{9,10,11} = V_{np}, \quad \lambda_{12,13} = V_{np} \pm v_{sn}, \quad (24)$$

donde  $v_{Ap}$  es la velocidad de Alfvén a lo largo de la dirección  $p$  (Alfvén, 1943), que se interpreta como una oscilación transversal incompresible, que se propaga a lo largo de las líneas de campo magnético, utilizando la tensión magnética como la fuerza restauradora (Tomczyk et al., 2007). La velocidad del sonido para la especie neutral  $v_{sn}$  y para la especie ionizada  $v_{si}$ , vienen dadas por las siguientes expresiones

$$v_{Ap} = \frac{B_p}{\sqrt{\mu \rho_i}}, \quad v_{sn} = \sqrt{\frac{\gamma P_n}{\rho_n}}, \quad v_{si} = \sqrt{\frac{\gamma P_i}{\rho_i}}, \quad (25)$$

y la rapidez de las ondas magnetoacústicas rápida y lenta, relacionadas con el campo magnético a lo largo de la dirección  $p$ , se denotan como  $v_{r_p}$ ,  $v_{l_p}$  respectivamente, y se calculan como

$$v_{r_p} = \left[ \frac{v_{si}^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu\rho_i} + \frac{1}{2} \sqrt{\left( v_{si}^2 + \frac{B^2}{\mu\rho_i} \right)^2 - 4v_{si}^2 v_{A_p}^2} \right]^{1/2}, \quad (26)$$

$$v_{l_p} = \left[ \frac{v_{si}^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu\rho_i} - \frac{1}{2} \sqrt{\left( v_{si}^2 + \frac{B^2}{\mu\rho_i} \right)^2 - 4v_{si}^2 v_{A_p}^2} \right]^{1/2}, \quad (27)$$

siendo  $B$  es la magnitud del campo magnético, dado por  $B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$ .

Por otra parte, los vectores propios del sistema de ecuaciones representan los diferentes modos de oscilación de las ondas y se usan en algunos métodos numéricos como el resolvidor de Riemann aproximado de Roe (Roe, 1981). Sin embargo, métodos basados en la discretización con volúmenes finitos acoplada al método HLL no requiere los vectores propios, sino únicamente la estructura de valores propios del sistema (Harten et al., 1983).

## 2. MÉTODOS NUMÉRICOS

Para construir el código, se parte de MAGNUS (Navarro et al., 2017): Un código MHD para física solar, que modela un plasma totalmente ionizado incluyendo los efectos de la resistividad óhmica y el flujo de calor. Cabe mencionar que este código es la derivación Newtoniana del código relativista CAFÉ (Lora-Clavijo et al., 2015). A MAGNUS se le añadieron módulos donde se implementaron las ecuaciones que describen la dinámica de un plasma parcialmente ionizado constituido por una especie cargada (iones + electrones) y una especie neutral, y se modificaron los métodos numéricos requeridos para solucionar este sistema de ecuaciones. Adicionalmente, se implementó la herramienta de programación en paralelo, OpenMP (Chandra et al., 2001), que disminuyó y optimizó la carga computacional mediante el uso de los diferentes procesadores, núcleos e hilos del equipo de cómputo, aumentando la velocidad de ejecución de determinadas tareas. A continuación se presentan los métodos numéricos utilizados para la construcción del código.

### 2.1. Método de líneas

Para la resolución de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas dependientes del tiempo con condiciones de frontera, se implementó el método de líneas (Schiesser, 2012), el cual consiste en la discretización de la parte espacial del sistema de ecuaciones diferenciales parciales (19,20), para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en cada punto de la malla numérica, que se evoluciona con un integrador temporal como un Runge-Kutta. Por otra parte, la ecuación de ligadura del campo magnético se resolvió mediante el método de transporte de flujo

restringido, el cual integra la ley de Faraday en cada elemento de volumen (ver apéndice 2).

## 2.2. Discretización: Volúmenes finitos

Para el proceso de discretización de la parte espacial de las ecuaciones se implementó el método de volúmenes finitos, ya que, debido a la presencia de discontinuidades y choques en las variables de estado del sistema, no es posible utilizar un método de discretización como las diferencias finitas. La discretización de las derivadas ordinarias bajo la aproximación de volúmenes finitos acoplado al método de líneas, se expresa como

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}_{(i,j,k)}}{dt} = & -\frac{\mathbf{F}_{x(i+1/2,j,k)} - \mathbf{F}_{x(i-1/2,j,k)}}{\Delta x} - \frac{\mathbf{F}_{y(i,j+1/2,k)} - \mathbf{F}_{y(i,j-1/2,k)}}{\Delta y} \\ & - \frac{\mathbf{F}_{z(i,j,k+1/2)} - \mathbf{F}_{z(i,j,k-1/2)}}{\Delta z} + \mathbf{S}_{(i,j,k)}, \end{aligned} \quad (28)$$

donde  $\mathbf{F}_{x(i\pm 1/2,j,k)}$ ,  $\mathbf{F}_{y(i,j\pm 1/2,k)}$ ,  $\mathbf{F}_{z(i,j,k\pm 1/2)}$  son los promedios espacio-temporales de los flujos en las interfaces de las celdas y  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  son las resoluciones espaciales en cada una de las dimensiones del dominio.

## 2.3. Método de alta resolución para la captura de choques

**2.3.1. Esquema HLL.** Para calcular los flujos numéricos en las interfaces, se utiliza el esquema HLL propuesto por Harten, Lax y van Leer (Harten et al., 1983). Este método permite calcular los flujos promediados con los valores propios de la estructura característica previamente

encontrada, de la siguiente manera

$$\mathbf{F}_{p(i+1/2,j,k)} = \frac{\lambda_p^M \mathbf{F}_{p(i+1/2,j,k)}^L - \lambda_p^m \mathbf{F}_{p(i+1/2,j,k)}^R + \lambda_p^m \lambda_p^M \left( \mathbf{Q}_{(i+1/2,j,k)}^R - \mathbf{Q}_{(i+1/2,j,k)}^L \right)}{\lambda_p^M - \lambda_p^m}, \quad (29)$$

donde  $\mathbf{Q}_{(i+1/2,j,k)}^R$ ,  $\mathbf{Q}_{(i+1/2,j,k)}^L$  son las variables conservativas reconstruidas a derecha e izquierda de la intercelda, respectivamente,  $\mathbf{F}_{p(i+1/2,j,k)}^R = \mathbf{F} \left( \mathbf{Q}_{(i+1/2,j,k)}^R \right)$ ,  $\mathbf{F}_{p(i+1/2,j,k)}^L = \mathbf{F} \left( \mathbf{Q}_{(i+1/2,j,k)}^L \right)$  son los flujos en la dirección  $p$ , evaluados en dichas variables. Los valores  $\lambda_p^M$ ,  $\lambda_p^m$  son los valores propios máximo y mínimo en la dirección  $p$ , respectivamente, y se calculan como

$$\lambda_p^M = \max(0, \lambda_{p_j}^R, \lambda_{p_j}^L), \quad \lambda_p^m = \min(0, \lambda_{p_j}^R, \lambda_{p_j}^L), \quad (30)$$

siendo  $\lambda_{p_j}^R$  y  $\lambda_{p_j}^L$  los  $j$ -ésimos valores propios de la matriz Jacobiana (23). Estos autovalores máximo y mínimo representan las ondas que se desplazan más rápidamente a derecha e izquierda del dominio en la dirección  $p$ . Para calcular los flujos correspondientes a las variables conservativas a izquierda y derecha de la intercelda, se requiere un limitador lineal de pendiente.

**2.3.2. Método limitador lineal de pendiente.** En este código se utilizan métodos lineales que permiten reconstruir las variables conservativas a derecha e izquierda de la intercelda,

mediante aproximaciones por rectas dadas de la siguiente manera

$$\mathbf{Q}_{(i+1/2,j,k)}^R = \mathbf{Q}_{(i+1,j,k)} - \frac{\Delta p}{2} \kappa_p(i+1,j,k), \quad (31)$$

$$\mathbf{Q}_{(i+1/2,j,k)}^L = \mathbf{Q}_{(i,j,k)} + \frac{\Delta p}{2} \kappa_p(i,j,k), \quad (32)$$

donde  $\mathbf{Q}_{(i,j,k)}$  es la variable conservativa evaluada en el punto  $(i, j, k)$  del dominio numérico,  $\Delta p$  es la resolución del dominio numérico en la dirección  $p$ , la cual se calcula como  $\Delta p = p_{(i+1,j,k)} - p_{(i,j,k)}$  y  $\kappa_p(i,j,k)$  es la pendiente de la variable conservativa a lo largo de la dirección  $p$ , en el punto  $(i, j, k)$ , que se puede calcular con métodos como el MinMod, MC, SuperBee, entre otros.

**2.3.2.1. MinMod.** El MinMod es un limitador lineal clásico y simétrico de segundo orden y es uno de los métodos más difusivos (LeVeque et al., 2002). Su objetivo es eliminar las oscilaciones numéricas que se generan debido a los choques y discontinuidades en las variables conservativas del modelo. Para esto, se aproxima la pendiente de la variable utilizando sus valores en los puntos contiguos, como se expresa a continuación

$$\kappa_x(i,j,k) = \text{minmod} \left( \frac{\mathbf{Q}_{(i,j,k)} - \mathbf{Q}_{(i-1,j,k)}}{\Delta x}, \frac{\mathbf{Q}_{(i+1,j,k)} - \mathbf{Q}_{(i,j,k)}}{\Delta x} \right), \quad (33)$$

siendo la función minmod

$$\text{minmod}(a,b) = \begin{cases} a, & \text{si } |a| < |b| \wedge ab > 0, \\ b, & \text{si } |a| > |b| \wedge ab > 0, \\ 0, & \text{si } ab \leq 0, \end{cases}$$

la cual retorna la pendiente con menor magnitud y en caso de que los signos de las pendientes sean diferentes, se interpreta como un mínimo o máximo local y por lo tanto, arroja el valor de 0 para la pendiente.

**2.3.2.2. MC.** El limitador de diferencia central monotonzado (MC, por sus siglas en inglés) propuesto por van Leer (1977), calcula la pendiente como

$$\kappa_{x(i,j,k)} = \text{minmod} \left( \frac{\mathbf{Q}_{(i+1,j,k)} - \mathbf{Q}_{(i-1,j,k)}}{2\Delta x}, 2 \frac{\mathbf{Q}_{(i,j,k)} - \mathbf{Q}_{(i-1,j,k)}}{\Delta x}, 2 \frac{\mathbf{Q}_{(i+1,j,k)} - \mathbf{Q}_{(i,j,k)}}{\Delta x} \right), \quad (34)$$

donde compara la pendiente centrada con dos veces la pendiente de cada lado, permitiendo capturar mejor los choques o discontinuidades, a diferencia del MinMod, que los suaviza. De igual forma, la precisión que tiene este método y la poca disipación que incluye, genera oscilaciones numéricas en los choques.

**2.3.2.3. SuperBee.** El SuperBee es un limitador con precisión de segundo orden introducido por Roe (1985), cuya pendiente es

$$\kappa_{x(i,j,k)} = \max\text{mod} \left( \kappa_{x(i,j,k)}^{(1)}, \kappa_{x(i,j,k)}^{(2)} \right), \quad (35)$$

siendo  $\max\text{mod}$  una función que retorna el argumento con el módulo más grande. Las pendientes  $\kappa_{x(i,j,k)}^{(1)}$  y  $\kappa_{x(i,j,k)}^{(2)}$  se calculan como

$$\kappa_{x(i,j,k)}^{(1)} = \min\text{mod} \left( 2 \frac{\mathbf{Q}_{(i,j,k)} - \mathbf{Q}_{(i-1,j,k)}}{\Delta x}, \frac{\mathbf{Q}_{(i+1,j,k)} - \mathbf{Q}_{(i,j,k)}}{\Delta x} \right), \quad (36)$$

$$\kappa_{x(i,j,k)}^{(2)} = \min\text{mod} \left( \frac{\mathbf{Q}_{(i,j,k)} - \mathbf{Q}_{(i-1,j,k)}}{\Delta x}, 2 \frac{\mathbf{Q}_{(i+1,j,k)} - \mathbf{Q}_{(i,j,k)}}{\Delta x} \right), \quad (37)$$

donde se compara la pendiente de un lado con dos veces la pendiente del otro lado mediante la función  $\min\text{mod}$  y finalmente arroja la pendiente más grande en módulo. Este método aproxima las discontinuidades con suficiente precisión, aunque tiende a retornar valores de pendiente más grande que los reales.

## 2.4. Paso de tiempo adaptativo: Condición de Courant-Friedrichs-Lewy

Con el fin de garantizar la convergencia de la solución numérica, se utiliza el criterio de estabilidad de von Neumann, que consiste en descomponer la solución del sistema de ecuaciones (19,20) en series de Fourier (Thomas, 1998). Este criterio reduce a que el parámetro de Courant-

Friedrichs-Lewy,  $C_{cfl}$ , debe ser menor o igual a 1, es decir

$$|\lambda_p^n| \frac{\Delta t^n}{\Delta p} \leq 1, \quad (38)$$

siendo  $\Delta t^n$  la resolución temporal para un nivel de tiempo  $n$  y  $|\lambda_p^n|$  la rapidez de la onda más rápida en el nivel de tiempo  $n$ , que viaja en la dirección  $p$ . Debido a esto, el paso de tiempo se eligió siguiendo la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (Courant et al., 1928), la cual se escribe como

$$\Delta t^n = C_{cfl} \times \min \left( \frac{\Delta x}{|\lambda_x^n|}, \frac{\Delta y}{|\lambda_y^n|}, \frac{\Delta z}{|\lambda_z^n|} \right), \quad (39)$$

cuyo objetivo es evitar que la onda más rápida del sistema avance más de un paso espacial durante un paso temporal. Además de esto, es importante tener en cuenta que esta condición depende de la dimensión espacial de la simulación (Titarev and Toro, 2005): Para sistemas 2D,  $0 < C_{cfl} \leq 1/2$  y para un sistemas 3D,  $0 < C_{cfl} \leq 1/3$ .

## 2.5. Adimensionalización

Para evitar errores numéricos como la pérdida de cifras significativas o una gran acumulación de errores de redondeo (Muller et al., 2010), se lleva a cabo un proceso de adimensionalización de los datos iniciales de las variables conservativas, de tal manera que los cálculos numéricos se realicen con estos valores ya adimensionalizados. Este proceso relaciona las variables físicas con las variables adimensionalizadas mediante valores típicos de densidad, rapidez y longitud del

problema a simular, como se muestra a continuación

$$\rho_a = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad V_a = \frac{V}{V_0}, \quad l_a = \frac{l}{l_0}, \quad (40)$$

donde el subíndice  $a$  denota la variable adimensionalizada, el subíndice 0 representa el valor típico con el que se va a adimensionalizar y  $l$  es longitud. Las demás variables se adimensionalizan como

$$P_a = \frac{P}{\rho_0 V_0^2}, \quad B_a = \frac{B}{V_0 \sqrt{\mu \rho_0}}, \quad E_a = \frac{E}{\rho_0 V_0^2}, \quad g_a = \frac{g}{V_0^2 l_0}, \quad (41)$$

$$t_a = \frac{t}{l_0/V_0}, \quad \xi_a = \frac{\xi_c}{\rho_0 l_0}, \quad \alpha_a = \frac{\alpha_c}{\rho_0^3 l_0}, \quad Q_a^{in} = \frac{Q^{in}}{\rho_0 V_0^3 / l_0}, \quad (42)$$

siendo  $t$  el tiempo. Para los problemas de física solar en el caso específico de una prominencia, los valores de adimensionalización son  $\rho_0 = 10^{-11}$  kg/m<sup>3</sup>,  $V_0 = 10^6$  m/s y  $l_0 = 10^6$  m.

Una vez implementados los métodos numéricos mostrados, junto con el sistema de ecuaciones conservativas y la paralelización con OpenMP, es necesario verificar el correcto funcionamiento del código mediante pruebas que validen las capacidades del código para resolver choques y manejar discontinuidades, turbulencia MHD, y en general, problemas de física solar en el régimen no lineal.

### 3. PRUEBAS NUMÉRICAS

Para probar la capacidad del código de simular la propagación de ondas, se hace una prueba lineal, la cual consiste en perturbar un medio uniforme en estado de equilibrio, para generar la propagación de ondas acústicas. Con el objetivo de encontrar su solución analítica, se asume que los efectos gravitacionales y la producción de calor debido a las colisiones son despreciables, y que no hay presencia de campo magnético (Popescu Braileanu et al., 2019). Este problema se resuelve con diferentes resoluciones numéricas y se compara con su solución analítica, lo que permite demostrar la convergencia del código.

Por otra parte, se llevan a cabo las pruebas del tubo de choque de Brio-Wu y de Sod en el régimen no lineal, en las que se impone inicialmente una discontinuidad en las variables de estado y se permite que el sistema evolucione, originando ondas de rarefacción, de contacto, MHD, entre otras (Brio and Wu, 1988). Esta simulación se realiza para diferentes valores del parámetro de colisiones, demostrando que cuando éste es mayor, la dinámica de la especie neutral afecta a la especie cargada y a su vez los campos magnéticos tienen una incidencia indirecta en la especie neutral, por medio de las colisiones. El caso particular en el que no hay ningún tipo de interacción entre las dos especies que componen el fluido, se genera un sistema de ecuaciones que tiene solución exacta (Lora-Clavijo et al., 2013; Takahashi et al., 2013), cuya comparación con la solución numérica garantiza la precisión del código y valida los métodos numéricos implementados en el código.

Finalmente, para verificar que el código maneja correctamente la dinámica de las turbulencias MHD, los vórtices y los choques, se aplica una prueba 2D en el régimen no lineal, en la que el fluido está rotando a tiempo inicial y evoluciona hasta que se desarrolla un vórtice en el centro del dominio, seguido de una fase turbulenta (Orszag and Tang, 1979). Se comprueba que el coeficiente de colisiones acopla las especies, por lo que los resultados tanto de la especie ionizada como de la especie neutral, convergen a una misma solución atractora, lo que indica que los campos magnéticos modifican indirectamente el comportamiento de la especie neutral y parte de la energía cinética de las partículas neutras se transfiere a la especie ionizada. Adicionalmente, se calcula la divergencia del campo magnético para todas las simulaciones, obteniendo valores menores a  $2 \times 10^{-11}$ .

### 3.1. Ondas Acústicas en un Medio Uniforme

La propagación de ondas acústicas en el régimen lineal se modela partiendo de un medio uniforme, sin presencia de campo magnético, que se perturba y genera dichas ondas. Para llevar a cabo esta prueba, se sigue el desarrollo analítico del artículo de Popescu Braileanu et al. (2019), lo cual permite obtener una solución exacta del problema y los parámetros necesarios para implementar el problema numérico en el código, con el objetivo de comparar ambos resultados.

**3.1.1. Solución Analítica.** Para obtener la solución exacta del problema en el régimen lineal, se desprecian los efectos de la gravedad,  $g = 0$ , y la generación de calor debido a las colisiones,  $Q^{in} = 0$ . También se elige la dirección de propagación de las ondas acústicas a lo

largo del eje  $z$ , se considera un medio uniforme, es decir, un medio en el que las variables de estado toman valores constantes a lo largo de todo el dominio, y se omite la presencia de campos magnéticos  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ . Aplicando estas suposiciones, el sistema de ecuaciones (3-8) reduce a

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_n V_{n_z})}{\partial z} = 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_i V_{i_z})}{\partial z} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial (\rho_n V_{n_z})}{\partial t} + \rho_n V_{n_z} \frac{\partial V_{n_z}}{\partial z} + \frac{\partial P_n}{\partial z} = \alpha_c (V_{i_z} - V_{n_z}), \quad (45)$$

$$\frac{\partial (\rho_i V_{i_z})}{\partial t} + \rho_i V_{i_z} \frac{\partial V_{i_z}}{\partial z} + \frac{\partial P_i}{\partial z} = \alpha_c (V_{n_z} - V_{i_z}), \quad (46)$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} [(E_n + P_n) V_{n_z}] = \alpha_c V_{n_z} (V_{i_z} - V_{n_z}), \quad (47)$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} [(E_i + P_i) V_{i_z}] = \alpha_c V_{i_z} (V_{n_z} - V_{i_z}), \quad (48)$$

donde los subíndices  $n, i$  denotan las especies neutral y cargada, respectivamente. Para poder estudiar la propagación de dichas ondas, el estado de equilibrio se perturba de tal manera que las variables de estado perturbadas se escriben como

$$\rho_{n,i} = \rho_{n,i_0} + \rho_{n,i_1}, \quad P_{n,i} = P_{n,i_0} + P_{n,i_1}, \quad V_{n,i_z} = V_{n,i_1}, \quad (49)$$

donde el subíndice 0 representa el estado base y el subíndice 1 representa la perturbación. Introduciendo estas expresiones en las ecuaciones (43-48) y linealizándolas, se obtiene el siguiente

sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \rho_{n_1}}{\partial t} + \rho_{n_0} \frac{\partial V_{n_1}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \rho_{i_1}}{\partial t} + \rho_{i_0} \frac{\partial V_{i_1}}{\partial z} = 0, \quad (50)$$

$$\rho_{n_0} \frac{\partial V_{n_1}}{\partial t} + \frac{\partial P_{n_1}}{\partial z} = \alpha_{c_0} (V_{i_1} - V_{n_1}), \quad \rho_{i_0} \frac{\partial V_{i_1}}{\partial t} + \frac{\partial P_{i_1}}{\partial z} = \alpha_{c_0} (V_{n_1} - V_{i_1}), \quad (51)$$

$$\frac{\partial P_{n_1}}{\partial t} - u_{sn_0}^2 \frac{\partial \rho_{n_1}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial P_{i_1}}{\partial t} - u_{si_0}^2 \frac{\partial \rho_{i_1}}{\partial t} = 0, \quad (52)$$

siendo  $\alpha_{c_0}$  es el coeficiente de colisiones entre partículas cargadas y neutras evaluado en el estado de equilibrio, y

$$u_{sn_0} = \sqrt{\frac{\gamma P_{n_0}}{\rho_{n_0}}}, \quad u_{si_0} = \sqrt{\frac{\gamma P_{i_0}}{\rho_{i_0}}}, \quad (53)$$

son la velocidad del sonido de la especie neutral y cargada, respectivamente, en el medio uniforme.

El sistema de ecuaciones (50-52), se puede resolver de manera analítica asumiendo que la solución es una onda plana de la forma

$$\{V_{n_1}, V_{i_1}, \rho_{n_1}, \rho_{i_1}, P_{n_1}, P_{i_1}\} = \{U_n, U_i, R_n, R_i, P_n, P_i\} e^{i(\omega t - kz)}, \quad (54)$$

donde  $\{U_n, U_i, R_n, R_i, P_n, P_i\}$  son las amplitudes de las variables perturbadas,  $\omega$  es la frecuencia de oscilación y  $k$  el número de onda. Es importante resaltar que tanto las amplitudes de las variables como la frecuencia de oscilación corresponden a números complejos. Al reemplazar la solución (54) en el sistema (50-52) se obtienen unas relaciones de recurrencia llamadas relaciones de polarización (Popescu Braileanu et al., 2019), las cuales permiten expresar las amplitudes de las velocidades y las presiones en términos de las amplitudes de las densidades perturbadas y en el

estado de equilibrio

$$\begin{aligned}
 U_n &= \frac{\omega R_n}{k\rho_{n_0}}, & U_i &= \frac{\omega R_i}{k\rho_{i_0}}, & P_n &= u_{sn_0}^2 R_n, & P_i &= u_{si_0}^2 R_i, \\
 \frac{R_i}{R_n} &= \frac{i\omega^2 - ik^2 u_{sn_0}^2 + \alpha\rho_{i_0}\omega}{\alpha c_0 \rho_{n_0} \omega},
 \end{aligned} \tag{55}$$

$$i\omega^4 + \alpha\omega^3(\rho_{i_0} + \rho_{n_0}) - i\omega^2 k^2 (u_{sn_0}^2 + u_{si_0}^2) - \omega k^2 \alpha (\rho_{i_0} u_{si_0}^2 + \rho_{n_0} u_{sn_0}^2) + ik^4 u_{sn_0}^2 u_{si_0}^2 = 0,$$

siendo esta última la relación de dispersión, cuyas soluciones son

$$\omega_{1,2} = \frac{ku_{sT}}{4} \left[ i \frac{\alpha\rho_T}{ku_{sT}} - \sqrt{2 - \left( \frac{\alpha\rho_T}{ku_{sT}} \right)^2} \pm \sqrt{18 - 2 \left( \frac{\alpha\rho_T}{ku_{sT}} \right)^2 - 2i \frac{\alpha\rho_T}{ku_{sT}} \sqrt{2 - \left( \frac{\alpha\rho_T}{ku_{sT}} \right)^2}} \right], \tag{56}$$

$$\omega_{3,4} = \frac{ku_{sT}}{4} \left[ i \frac{\alpha\rho_T}{ku_{sT}} + \sqrt{2 - \left( \frac{\alpha\rho_T}{ku_{sT}} \right)^2} \pm \sqrt{18 - 2 \left( \frac{\alpha\rho_T}{ku_{sT}} \right)^2 + 2i \frac{\alpha\rho_T}{ku_{sT}} \sqrt{2 - \left( \frac{\alpha\rho_T}{ku_{sT}} \right)^2}} \right], \tag{57}$$

donde  $\rho_T = \rho_{n_0} + \rho_{i_0}$  es la densidad total,  $P_T = P_{n_0} + P_{i_0}$  la presión total y  $u_{sT} = \sqrt{\gamma P_T / \rho_T}$  la velocidad del sonido calculada con la densidad total y la presión total.

Adicionalmente, como la solución tipo onda plana expresada en (54), se construye a partir de amplitudes y frecuencias que pueden ser complejas, es decir que pueden ser escritas como  $z = re^{i\theta}$ , dicha solución toma la forma

$$A_1 = \sqrt{A_{Re}^2 + A_{Im}^2} e^{-\omega_{Im} t} \sin(\omega_{Re} t - kz + \theta), \tag{58}$$

siendo  $A_{Re}$  y  $A_{Im}$  las partes real e imaginaria de la amplitud de una variable perturbada  $A_1$  arbitraria,  $\omega_{Re}$  y  $\omega_{Im}$  las partes real e imaginaria de la frecuencia, respectivamente, y  $\tan \theta = A_{Im}/A_{Re}$ . Se observa que este resultado contiene un término de amortiguamiento dado por la parte imaginaria de la frecuencia: Cuando este valor es positivo, la solución contiene una envolvente negativa que termina por disipar la onda, en cambio, si dicho valor es negativo, la envolvente es positiva y por tanto la amplitud de la perturbación crece.

Los parámetros que se utilizaron para encontrar la solución se tomaron del artículo de Popescu Braileanu et al. (2019), para poder comparar el resultado del código con la solución exacta y también con la solución numérica del artículo, dichos parámetros están registrados en la tabla 2. Las velocidades del sonido de ambas especies se calcularon a partir de las expresiones dadas por (53) y las temperaturas mediante las ecuaciones de estado para cada fluido (18), asumiendo que  $m_i = m_n = 1.66 \times 10^{-27}$  kg.

Especie Neutral	Especie ionizada
$\rho_{n_0} = 9.96 \times 10^{-9}$ kg/m <sup>3</sup>	$\rho_{i_0} = 0.5\rho_n$
$P_{n_0} = 0.35$ Pa	$P_{i_0} = 2P_{n_0}$
$u_{sn_0} = 7.652 \times 10^3$ m/s	$u_{si_0} = 2u_{sn_0}$
$T_{n_0} = 4227$ K	$T_{i_0} = 4T_{n_0}$

Tabla 2

*Parámetros para la especie neutral y cargada en el estado de equilibrio, para la prueba de propagación de ondas acústicas. Valores tomados de Popescu Braileanu et al. (2019).*

Además de esto, el coeficiente de colisiones se calcula a través la expresión (17) con las variables evaluadas en el estado de equilibrio, cuyo valor es  $\alpha_{c_0} = 3.633 \times 10^{-4}$  kg/m<sup>3</sup>s, el cual

corresponde a una sección transversal de colisiones de  $\sigma_{in} = 8.623 \times 10^{-19} \text{ m}^2$ . También se toma el valor de la amplitud de la densidad de la especie cargada como  $R_i = 10^{-3} \rho_{i_0}$  y con las relaciones de polarización (55), se obtienen las amplitudes de las demás variables. Por último, para completar la caracterización del problema, se escribe el número de onda como  $k = 2\pi n/L_z = 2.06 \text{ m}^{-1}$ , siendo  $n$  un número entero arbitrario, que se asume como  $n = 11$  para este caso, dando como resultado que la longitud del dominio a lo largo del eje  $z$  es  $L_z = 33.551 \text{ m}$ .

**3.1.2. Solución numérica.** Para la implementación numérica de la solución, el dato inicial corresponde a la solución analítica evaluada en  $t = 0$ . El tiempo final de la simulación se calcula utilizando un valor característico para la velocidad, que en este caso es la velocidad del sonido, de manera que  $u_{sn_0} = L_z/t_f = 7652.95 \text{ m/s}$ . El dominio de la simulación es 1.5D, debido a que la prueba es 1D pero se lleva a cabo en un código 3D, por lo que el dominio numérico utilizado es  $(-0.033551 \leq x \leq 0.033551) \text{ m} \times (-0.033551 \leq y \leq 0.033551) \text{ m} \times (0.0 \leq z \leq 33.551) \text{ m}$ , cuya malla numérica es uniforme y está conformada por  $(N_x \times N_y \times N_z) = (4 \times 4 \times 4000)$  puntos, siendo la ventana temporal de simulación  $t \in [0, 4.384 \times 10^{-3}] \text{ s}$ . El factor de Courant es  $C_{cfl} = 0.1$  y se eligen condiciones de frontera periódicas en la dirección  $z$  y salientes para las demás caras de la caja.

Con el fin de comprobar que la solución numérica tiende a la solución analítica, es necesario realizar una prueba de convergencia, la cual verifica la estabilidad y la consistencia de los métodos numéricos implementados en el código. Una solución numérica es convergente en un tiempo  $t$ , si

$|\mathbf{c}^{n+1} - \mathbf{C}^{n+1}| \rightarrow 0$  cuando  $\Delta p \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ , siendo  $\mathbf{c}$  el vector solución exacta de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales y  $\mathbf{C}$  el vector solución numérica correspondiente (Landinez et al., 2021). La convergencia relaciona la disminución del error en términos de la precisión de la discretización.

La solución para la velocidad se presenta en la figura 1, donde se observa el fenómeno de amortiguamiento de la onda acústica respecto al tiempo adimensionalizado ( $t_A = t_f$ ), para las especies neutral y cargada. Se realiza una comparación cualitativa entre la soluciones analítica y numérica de la perturbación de la velocidad para las especies neutral y cargada (filas 1 y 3 de la figura 1, respectivamente), donde se evidencia que la solución numérica reproduce correctamente la solución analítica. Además, para completar la prueba de convergencia, se calcula de manera cuantitativa la diferencia entre la solución analítica y la numérica mediante la cantidad

$$\Delta_{n,i} = V_{n,i}^{\text{Analítica}} - V_{n,i}^{\text{Numérica}} \quad (59)$$

cuyos valores son menores del 2% respecto a la solución analítica, en todos los casos (filas 2 y 4 de la figura 1). Este cálculo se realiza para tres resoluciones espaciales, con diferente cantidad de puntos a lo largo del eje  $z$ , siendo  $N_{z1} = 1000$  puntos,  $N_{z2} = 2000$  puntos y  $N_{z3} = 4000$  puntos, y sus resultados están consignados en la tabla 3. Es notorio que al aumentar el refinamiento de la malla numérica, se disminuye el error porcentual de la velocidad de propagación de la onda acústica para cada una de las especies, lo que permite concluir que el código es convergente con un factor de convergencia de aproximadamente 1.5.

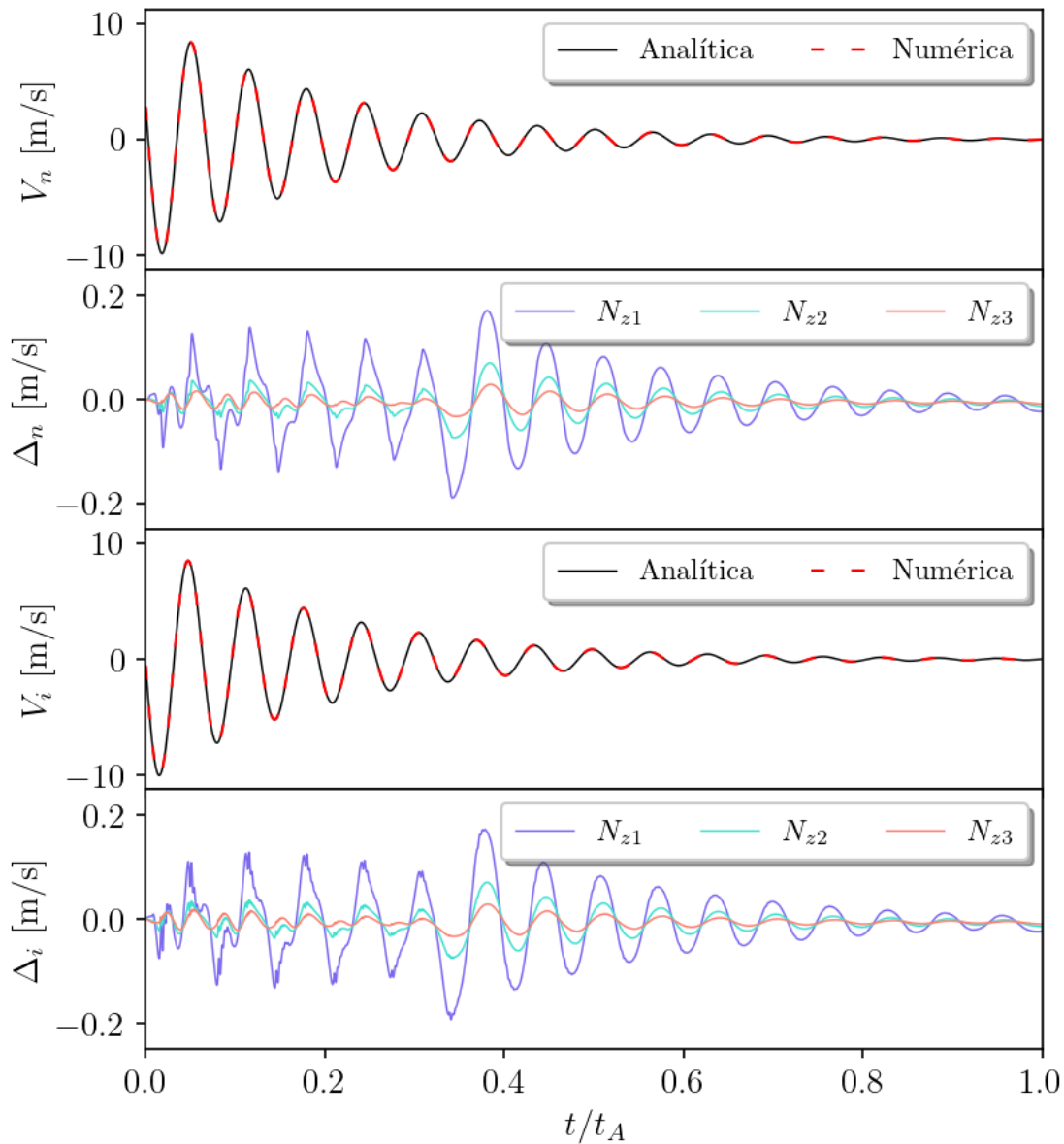


Figura 1. Solución numérica de la perturbación de la velocidad para las especies neutral y cargada, y su comparación con la solución analítica en función del tiempo adimensional ( $t_A = 4.3841 \times 10^{-3}$  s). De la fila superior a inferior: Comparación entre las soluciones analítica y numérica para la velocidad de la especie neutral, diferencia entre la solución analítica de velocidad de la especie neutral y su solución numérica para 3 resoluciones diferentes:  $N_{z1} = 1000$  puntos,  $N_{z2} = 2000$  puntos y  $N_{z3} = 4000$  puntos a lo largo de  $z$ , comparación entre las soluciones analítica y numérica para la velocidad de la especie cargada y diferencia entre la solución analítica de velocidad de la especie cargada y su solución numérica para 3 resoluciones diferentes.

$(N_x \times N_y \times N_z)$	$\max(\Delta_n)$ [m/s]	$\max(\Delta_i)$ [m/s]	$\max(\text{Error } \% V_{n,i})$
$(4 \times 4 \times 1000)$	0.170	0.173	1.93 %
$(4 \times 4 \times 2000)$	0.070	0.071	0.75 %
$(4 \times 4 \times 4000)$	0.028	0.029	0.33 %

Tabla 3

*Valores máximos para el error absoluto de la velocidad de propagación de la onda acústica ( $\Delta_{n,i}$ ), tanto para la especie neutral, como para la especie cargada, y su correspondiente error porcentual con respecto a su solución analítica, para 3 resoluciones espaciales. Se observa la autoconvergencia del código, debido a que al aumentar la resolución, disminuye el error porcentual de la solución numérica respecto a la exacta.*

La propagación de la onda acústica se evidencia en la figura 2, en la que se grafica la velocidad de las especies neutral y cargada (filas superior e inferior, respectivamente), respecto a  $z/L_z$ , para tres valores de tiempo. A tiempo inicial  $t/t_A = 0.0$ , se observa que la solución para la perturbación de la velocidad es una oscilación con una determinada amplitud. En un tiempo posterior  $t/t_A = 0.2$  la amplitud de la onda ha disminuido y ésta se ha desplazado en el espacio. Para el último tiempo de la figura  $t/t_A = 0.4$ , la oscilación es aún más pequeña en amplitud y sigue viajando hacia la derecha. Esto es consistente con la forma de la solución analítica (58), según la cual la onda se propaga en el espacio mientras su amplitud disminuye, ya que la envolvente está en función del tiempo.

Por otra parte, comparando con los resultados obtenidos por Popescu Braileanu et al. (2019), se observa que las soluciones presentadas en la figura 1 son similares a las obtenidas en la figura 3(c) del artículo. Cabe resaltar que el código discretiza las ecuaciones diferenciales con volúmenes finitos, mientras que en el artículo de Popescu Braileanu et al. (2019) se realiza con diferencias

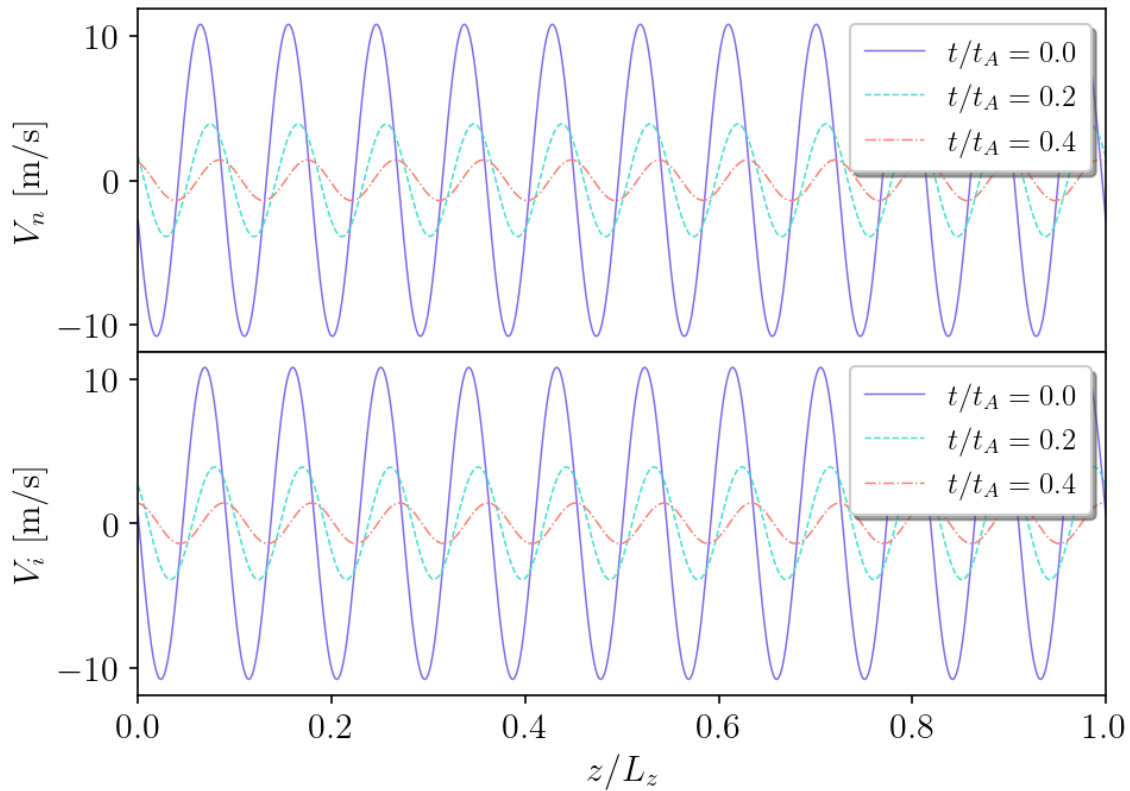


Figura 2. Solución numérica de la perturbación de la velocidad para las especies neutral y cargada (superior e inferior, respectivamente) en 3 instantes ( $t/t_A = 0.0$ ,  $t/t_A = 0.2$  y  $t/t_A = 0.4$ ), en función de la distancia adimensional en la dirección  $z$ .

finitas. Esto presenta una ventaja, ya que permite resolver problemas en el régimen lineal de manera correcta como la propagación de las ondas acústicas, donde la solución numérica resultante es consistente con la analítica. Adicionalmente, el código tiene la capacidad de resolver problemas en el régimen no lineal, donde las variables de estado pueden presentar discontinuidades, como en los tubos de choque.

### 3.2. Tubo de choque de Brio-Wu y de Sod para un fluido parcialmente ionizado

La prueba del tubo de choque es un problema de Riemann, el cual consiste en un fluido que está dividido por una membrana removible y cuyos valores iniciales de las variables de estado, son constantes pero diferentes a la derecha e izquierda de la membrana. Cuando la membrana es removida, el fluido empieza a moverse y a generar ondas y choques debido a la discontinuidad inicial en sus variables y a la no linealidad del sistema de ecuaciones. El tubo de choque hace parte del régimen no lineal y su finalidad es verificar la capacidad del código de manejar correctamente los choques y la propagación de diferentes tipos de ondas, como la de rarefacción, las de contacto, las MHD, entre otras (Sod, 1978; Brio and Wu, 1988).

Esta prueba hace una extensión del tubo de choque de Sod para un fluido Hidrodinámico (HD) y del tubo de choque de Brio-Wu para un fluido MHD, a un tubo de choque para fluidos parcialmente ionizados. De modo que el estado inicial está dado por las condiciones iniciales del tubo de choque de Brio-Wu para la especie cargada y las del tubo de choque de Sod para la especie neutral, las cuales se escriben como

$$(\rho, V_x, V_y, V_z, P, B_x, B_y, B_z) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.75, 1.0, 0.0), & \text{para } x < 0, \\ (0.125, 0.0, 0.0, 0.0, 0.1, 0.75, -1.0, 0.0), & \text{para } x > 0, \end{cases}$$

para ambas especies. El dominio numérico de las simulaciones es 1.5D y corresponde a  $(-0.5 \leq x \leq 0.5) \times (-0.0025 \leq y \leq 0.0025) \times (-0.0025 \leq z \leq 0.0025)$ , cuya malla numérica es unifor-

me y está conformada por  $(N_x \times N_y \times N_z) = (1600 \times 4 \times 4)$  puntos, siendo la ventana temporal de simulación  $t \in [0, 0.1]$ . El factor de Courant es  $C_{cfl} = 0.2$ , se desprecia la gravedad y se eligen condiciones de frontera salientes para todas las caras de la caja.

La primera simulación de esta prueba corresponde al modelo de dos fluidos desacoplados, es decir, sin el coeficiente de colisiones, ni el término de producción de calor, lo que corresponde a  $\xi_a = 0$ . En la figura 3 se observa que para el caso del fluido HD aparecen 3 tipos de ondas: *a)* Onda de rarefacción, la cual se evidencia en la disminución de la densidad y la presión. *b)* Onda de contacto, que se define como una superficie que separa zonas con diferentes densidades y temperaturas, pero está en equilibrio respecto a la presión, por lo que no aparece en la estructura de dicha variable. *c)* Onda de choque que corresponde a la discontinuidad inicial y se presenta cuando dos líneas características convergen. Por otra parte, en el caso del fluido MHD, aparece una onda de rarefacción, seguida de una onda compuesta que contiene un choque que se propaga hacia la izquierda unida a una onda de rarefacción, una discontinuidad de contacto que únicamente es visible en la densidad, un choque que se propaga hacia la derecha y finalmente una onda de rarefacción (Jiang and Wu, 1999).

Este caso particular tiene solución exacta conocida, lo que permite comparar y verificar que la solución numérica sea correcta. Para esto, se utilizó la solución analítica del tubo de choque de Sod presentada por Lora-Clavijo et al. (2013) para el fluido neutral y la solución exacta no regular calculada por Takahashi et al. (2013) para el fluido cargado. En la figura 3 se compararon ambas

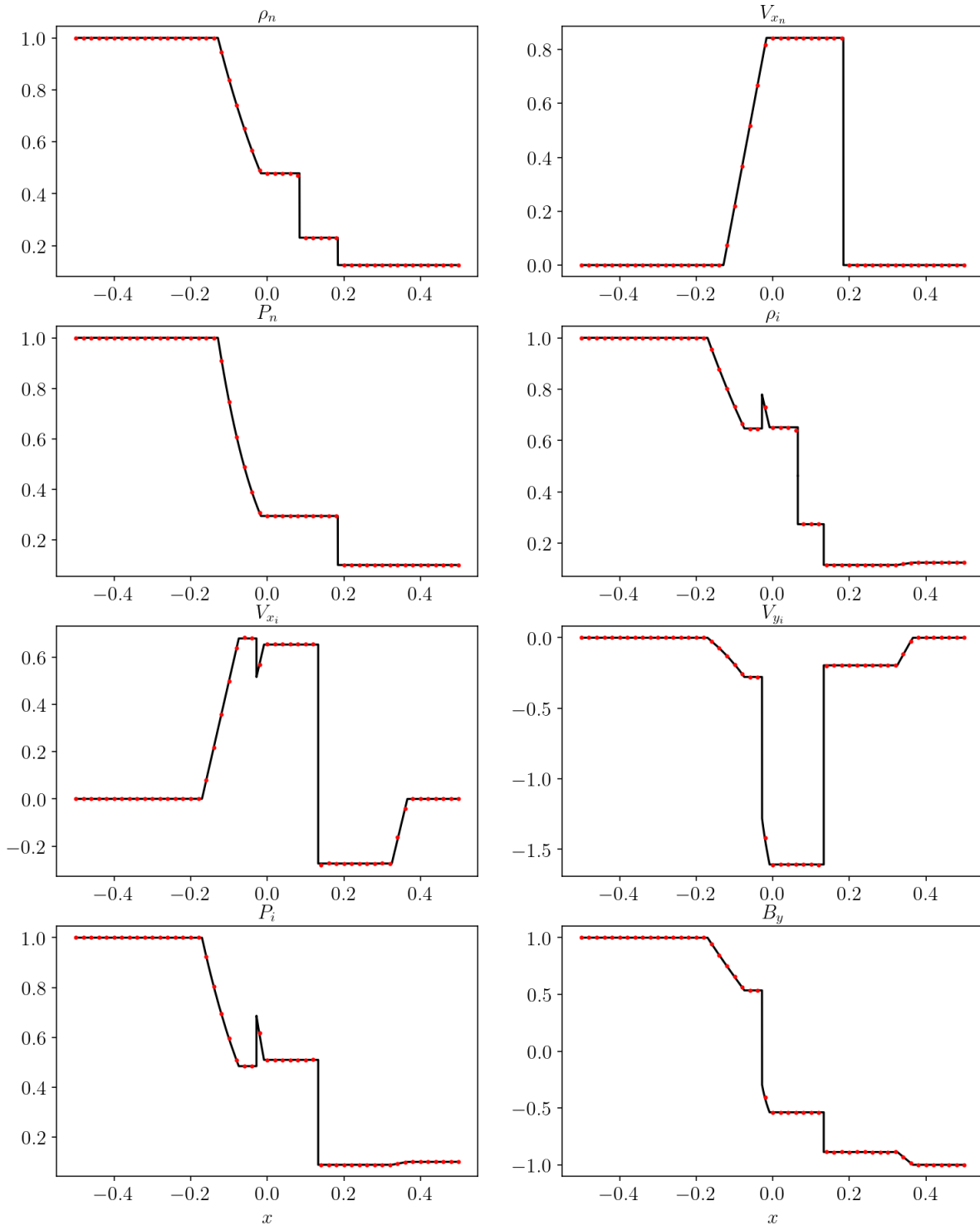


Figura 3. Comparación entre la solución exacta (línea negra continua) y los resultados del código (puntos rojos) en  $t = 0.1$  para un plasma parcialmente ionizado y desacoplado. Se observa que la solución numérica del problema se aproxima en gran medida a la exacta. De izquierda a derecha y de arriba a abajo, las variables son: Densidad de la especie neutral, componente  $x$  de la velocidad de la especie neutral, presión de la especie neutral, densidad de la especie ionizada, componente  $x$  de la velocidad de la especie ionizada, componente  $y$  de la velocidad de la especie ionizada, presión de la especie ionizada y campo magnético a lo largo del eje  $y$  de la especie ionizada.

soluciones en  $t = 0.1$ , donde se observa que la solución numérica, que está dada por los puntos rojos, reproduce la solución analítica, representada por la línea continua, ya que genera cada uno de los choques y ondas que se propagan en este problema específico. El código MAGNUS reprodujo la solución analítica del tubo de choque de Brio-Wu con gran veracidad, para el caso en que  $\xi_a = 0$ . En la tabla 2 del artículo del código Navarro et al. (2017) están consignados los resultados del análisis de convergencia.

Posteriormente, para analizar el efecto de las colisiones en la estructura de las ondas generadas por el tubo de choque, se realizaron tres simulaciones con diferentes valores del parámetro de interacción entre las especies. Los valores se eligieron motivados en la tabla 1, siendo estos *a)*  $\xi_a = 10$ , cuya sección eficaz de colisiones equivale a  $\sigma_{in} = 3.33 \times 10^{-20} \text{ m}^2$  y tiene el mismo orden de magnitud que el modelo de *hard spheres*. *b)*  $\xi_a = 100$ , cuya sección eficaz de colisiones equivale a  $\sigma_{in} = 3.33 \times 10^{-19} \text{ m}^2$  y representa un modelo intermedio entre el clásico de *hard spheres* y el cuántico de VK. *c)*  $\xi_a = 1000$ , cuya sección eficaz de colisiones equivale a  $\sigma_{in} = 3.33 \times 10^{-18} \text{ m}^2$  y tiene el mismo orden de magnitud que el modelo VK. Este último valor, aunque es el doble del valor teórico para el modelo VK y no representa ninguno de los modelos teóricos estudiados, se tiene en cuenta con el objetivo de analizar el comportamiento del plasma parcialmente ionizado, con acoples de tal magnitud.

Los resultados de estas pruebas, junto con el caso desacoplado, se recopilan en la figura 4, en la que se muestra la evolución de las variables de estado del tubo de choque en  $t = 0.1$ . Se

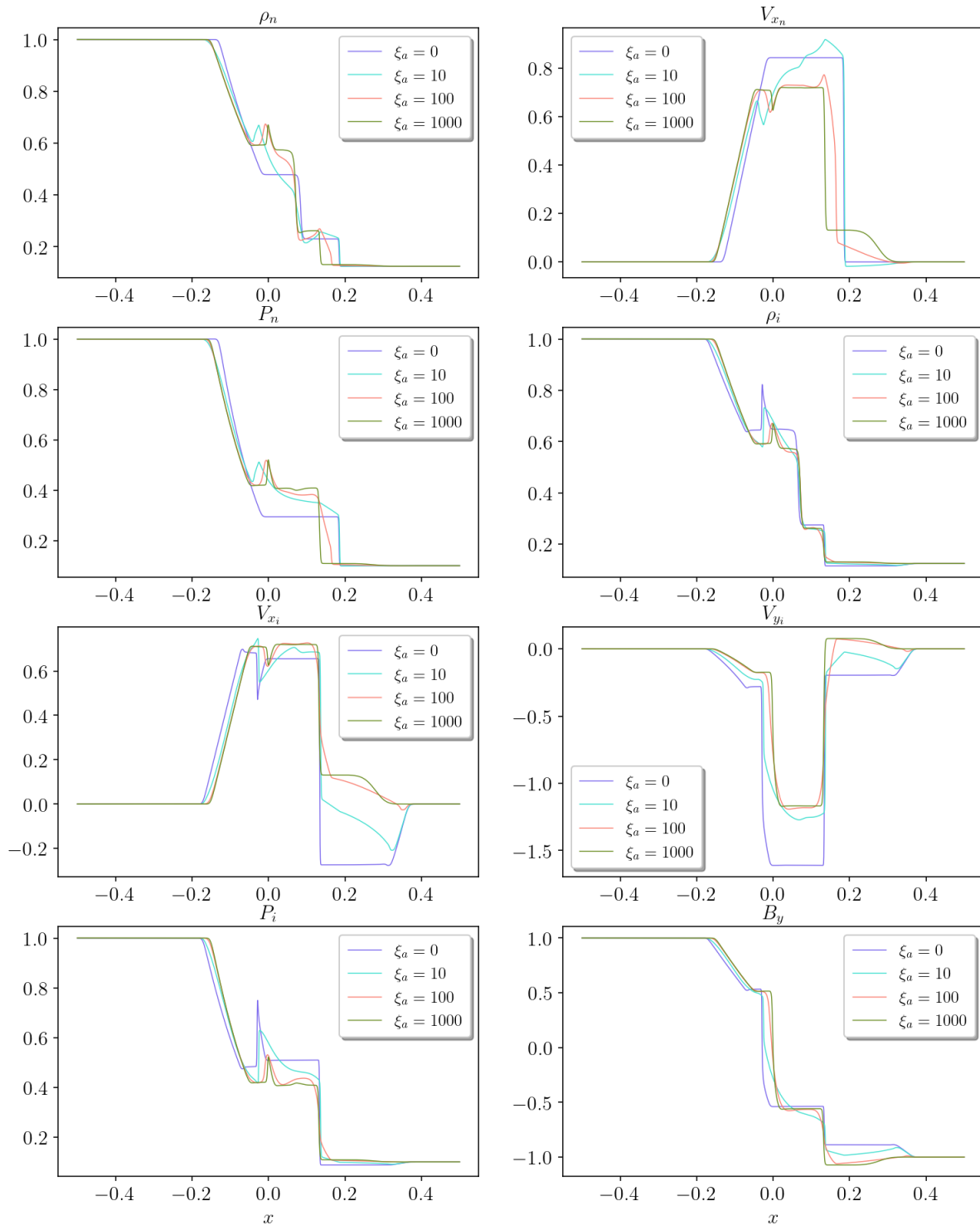
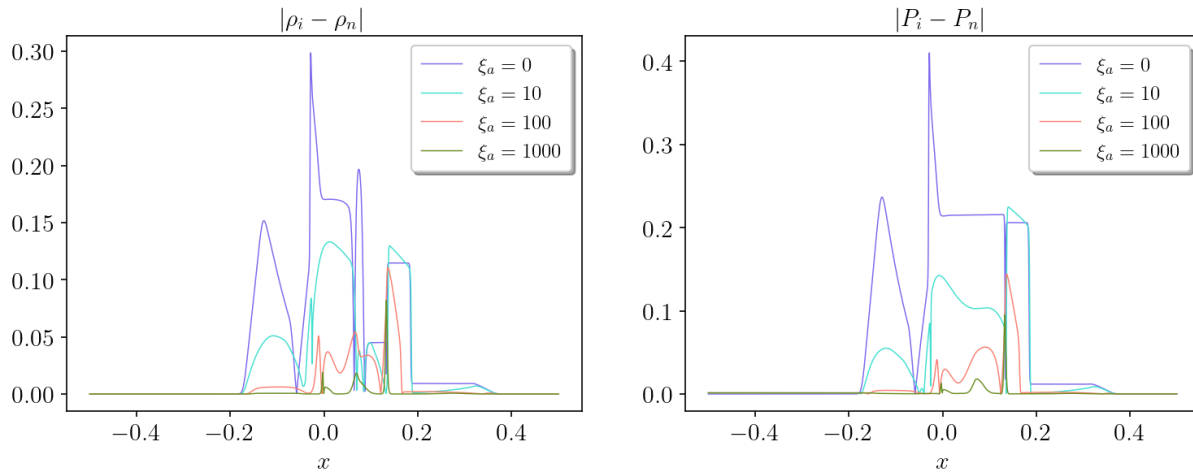


Figura 4. Solución del tubo de choque de Brio-Wu en  $t = 0.1$ , para 4 valores del parámetro de interacción entre las especies. De izquierda a derecha y de arriba a abajo, las variables son: Densidad de la especie neutral, componente  $x$  de la velocidad de la especie neutral, presión de la especie neutral, densidad de la especie ionizada, componente  $x$  de la velocidad de la especie ionizada, componente  $y$  de la velocidad de la especie ionizada, presión de la especie ionizada y campo magnético a lo largo del eje  $x$  de la especie ionizada.

observa que para un plasma parcialmente ionizado desacoplado (línea púrpura), existen estados constantes a derecha e izquierda que separan las ondas de rarefacción, de contacto y los choques. En ese caso, el plasma se comporta como un fluido MHD y uno HD entre los que no existe ningún tipo de interacción. Por otra parte, cuando el acople toma los valores de  $\xi_a = 10$  (línea turquesa) y  $\xi_a = 100$  (línea salmón), se observa que estos estados dejan de ser constantes. Por el contrario, para el caso de  $\xi_a = 1000$  (línea oliva), las colisiones entre las especies hacen que el sistema se relaje, que estos estados vuelvan a ser constantes y que las soluciones de la especie neutral y de la especie cargada, tiendan a una misma solución. El acople hace que el campo magnético modifique la dinámica de las partículas neutras mientras que estas le entregan energía cinética a las cargadas. A medida que se presentan más interacciones entre las especies, es decir, que el valor de  $\xi_a$  aumenta, mayor cantidad de energía cinética se transfiere de la especie neutral a la cargada, hasta lograr romper el efecto tipo tensión superficial que ejerce el campo magnético sobre la especie ionizada (Chandrasekhar, 1981).

Con el fin de visualizar la tendencia de las soluciones de ambas especies a una misma, en función del parámetro de colisiones, en la figura 5 se grafica la densidad y presión relativas entre las especies neutral y cargada, para los cuatro valores de  $\xi_a$ . En el caso desacoplado, ya que no existe interacción entre las especies, cada una evoluciona de manera independiente, presentando grandes diferencias en el comportamiento de las variables de estado. Por el contrario, cuando  $\xi_a = 10$ , la especie neutral y cargada colisionan, cambiando la dinámica de ambas especies, las variables de estado de la especie neutral tienden a la morfología de la especie cargada y viceversa. Este efecto

se acentúa para la simulación con  $\xi_a = 100$  y es aún más visible en el caso de  $\xi_a = 1000$ , ya que, como el acople es mayor, la influencia de una especie sobre la otra es más fuerte. Dicho fenómeno se evidencia en la disminución de las densidades y presiones relativas entre las especies, cuando el parámetro de colisiones aumenta, haciendo que el sistema converja a un mismo estado.



*Figura 5.* Solución del tubo de choque de Brio-Wu en  $t = 0.1$ . A la izquierda se muestra la diferencia entre la densidad de masa de la especie cargada y de la especie neutral y a la derecha la diferencia entre la presión de la especie cargada y de la especie neutral, para 4 valores del parámetro de interacción. Se observa que a medida que el parámetro de colisiones  $\xi_a$  aumenta, la diferencia entre las soluciones para la especie cargada y la neutral disminuye, tendiendo a una solución tipo atractora.

Para comprobar la consistencia de los métodos numéricos del código construido, se realiza una prueba de autoconvergencia, para lo que se calcula la norma  $L_1$  del error, que sigue la expresión

$$L_1(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N |\rho_{ik_{2N}} - \rho_{ik_N}|, \quad (60)$$

donde  $N$  es el número de puntos en la malla numérica y  $\rho_{ik_N}$  es la densidad la especie cargada,

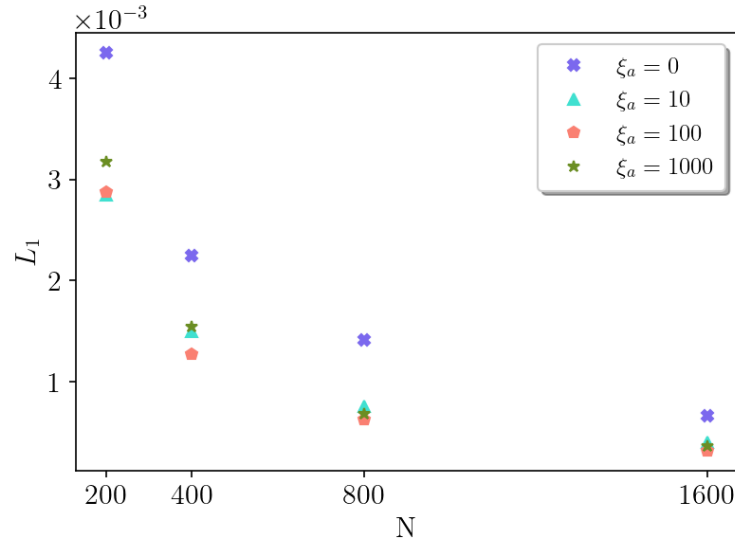
cuyos valores fueron arrojados por un simulación con un dominio numérico que contiene  $N_x = N$  puntos. La cantidad de puntos  $N$  se eligió como

$$N_{\eta+1} = 2N_{\eta}, \quad \eta \in [1, 3], \quad (61)$$

siendo  $N_1 = 200$  puntos. Adicionalmente, el cálculo de la norma  $L_1$  del error se llevó a cabo para cuatro valores del parámetro de colisiones.

En la figura 6 se presentan los resultados del cálculo de la norma  $L_1$  del error, donde se observa que la norma del error disminuye cuando el refinamiento de la malla numérica aumenta. Además de esto, el análisis para los diferentes parámetros de colisiones muestra que a medida que aumenta el valor de  $\xi_a$ , el término de fuentes suaviza la dinámica del plasma mediante el acople y por tanto, la norma  $L_1$  disminuye. Pero, cuando este parámetro es muy grande, las fuentes de las ecuaciones empiezan a convertirse en términos rígidos, y los métodos numéricos se vuelven inestables al momento de resolver estas ecuaciones. Una solución para este problema es imponer una mayor resolución numérica del dominio (Burden et al., 2015), lo que implica aumentar el tiempo de ejecución de la simulación. Esta alternativa se aprecia en la figura 6, ya que para un mismo parámetro de colisiones  $\xi_a$ , la norma del error decrece cuando la cantidad de puntos del dominio es mayor. Otra de las soluciones es implementar un integrador que logre manejar los términos rígidos (Dahlquist, 1963), como el esquema de integración implícito-explicito (IMEX) (Pareschi and Russo, 2005), lo cual no se realizó debido a que los mayores valores de  $\xi_a$  utilizados

en física solar, corresponden al modelo VK, cuyo parámetro de colisiones es  $\xi_a \approx 480$  (ver tabla 1).



*Figura 6.* Norma  $L_1$  del error para la densidad de masa de la especie cargada, para el tubo de choque de Brio-Wu en un tiempo  $t = 0.1$ . El cálculo se realizó para cinco resoluciones numéricas diferentes y con cuatro valores del parámetro  $\xi_a$  de colisiones.

### 3.3. Vórtice de Orszag-Tang

El vórtice de Orszag-Tang es un problema 2D que comprueba la capacidad del código para manejar los choques y turbulencias MHD (Orszag and Tang, 1979). Inicialmente se propone un sistema en el que, tanto el fluido, como su campo magnético, están rotando y evoluciona hasta producir un vórtice en el centro del dominio, dicho estado inicial es

$$(\rho, V_x, V_y, V_z, P, B_x, B_y, B_z) = \left[ 1.0, -\sin(2\pi y), \sin(2\pi x), 0.0, \frac{1.0}{\gamma}, \frac{-\sin(2\pi y)}{\gamma}, \frac{\sin(4\pi x)}{\gamma}, 0.0 \right],$$

para ambas especies. El dominio numérico es 2.5D y corresponde a  $(0.0 \leq x \leq 1.0) \times (0.0 \leq y \leq 1.0) \times (0.0 \leq z \leq 0.008)$ , cuya malla numérica es uniforme y está conformada por  $(N_x \times N_y \times N_z) = (500 \times 500 \times 4)$  puntos, siendo la ventana temporal de simulación  $t \in [0, 0.8]$ . El factor de Courant es  $C_{cfl} = 0.2$ , se desprecia la gravedad y se eligen condiciones de frontera periódicas para todas las caras de la caja.

La evolución del vórtice de Orszag-Tang para un plasma desacoplado se muestra en la figura 7, mediante la densidad de las especies neutral y cargada (columnas izquierda y derecha, respectivamente) sin tener en cuenta interacciones entre las especies. La fila superior corresponde a  $t = 0.30$ , donde se observa que en el sistema rotante, la especie cargada es más dinámica que la especie neutral debido a las ondas de Alfvén y magnetoacústicas que se generan por la presencia del campo magnético. La fila central corresponde a  $t = 0.48$ , donde ya se formó el vórtice en ambos casos, pero la especie cargada presenta más morfología por los efectos del campo magnético. La fila inferior muestra la evolución del sistema en  $t = 0.74$ , luego de que se disipó el vórtice: La especie neutral contiene ondas propagándose, mientras la especie cargada constituye un fluido turbulento. La estructura característica, resultado de esta prueba (ver figura 7), se compara con la obtenida por diferentes códigos en dos y tres dimensiones (Rosswog and Price, 2007; Stone et al., 2008; Benítez-Llambay and Masset, 2016; Burns et al., 2020), que resuelven las ecuaciones de la MHD para un fluido con distintos métodos numéricos, algunos de ellos espectrales, y cuyos resultados permiten verificar la consistencia y el correcto funcionamiento e implementación de las ecuaciones y los métodos numéricos del código construido.

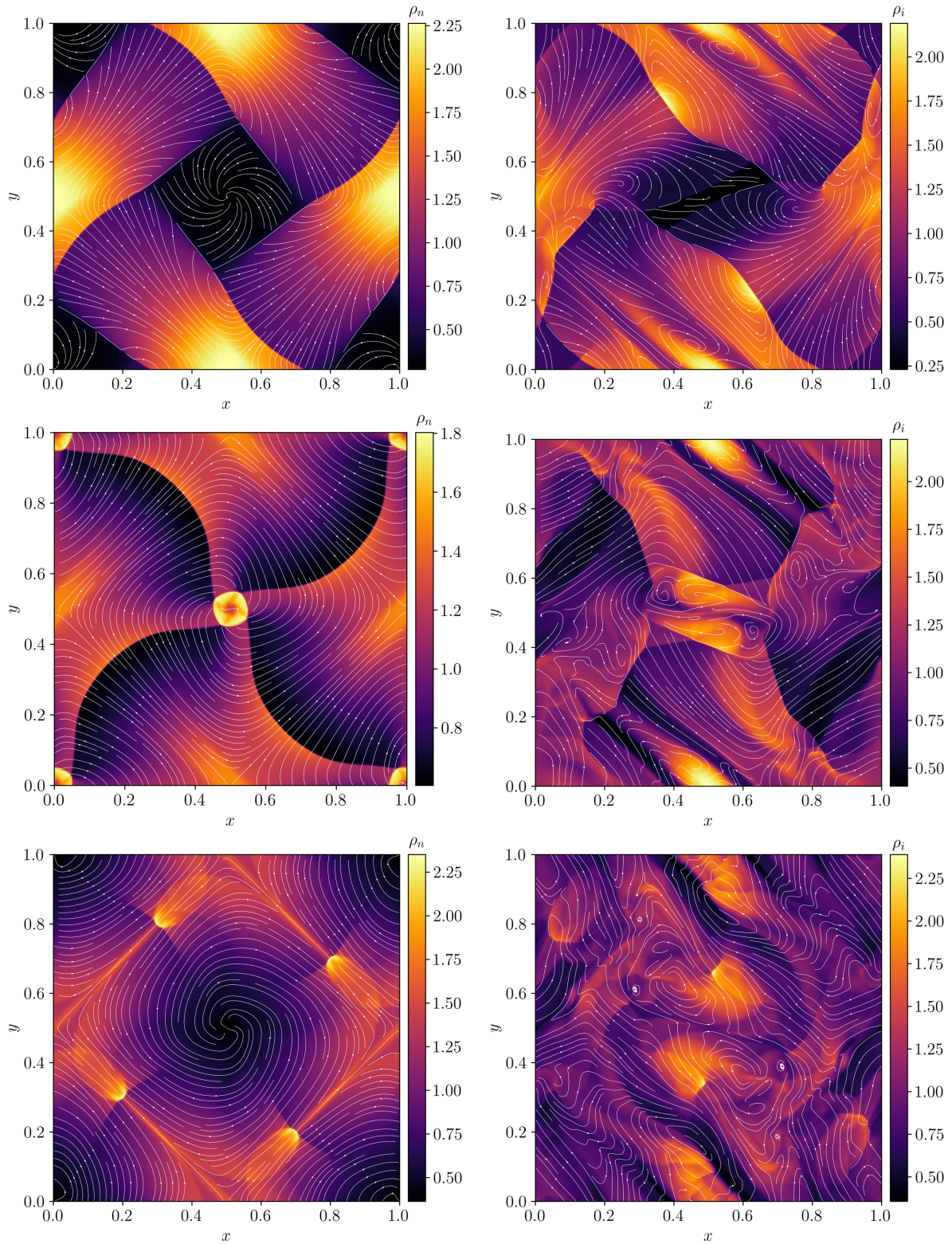
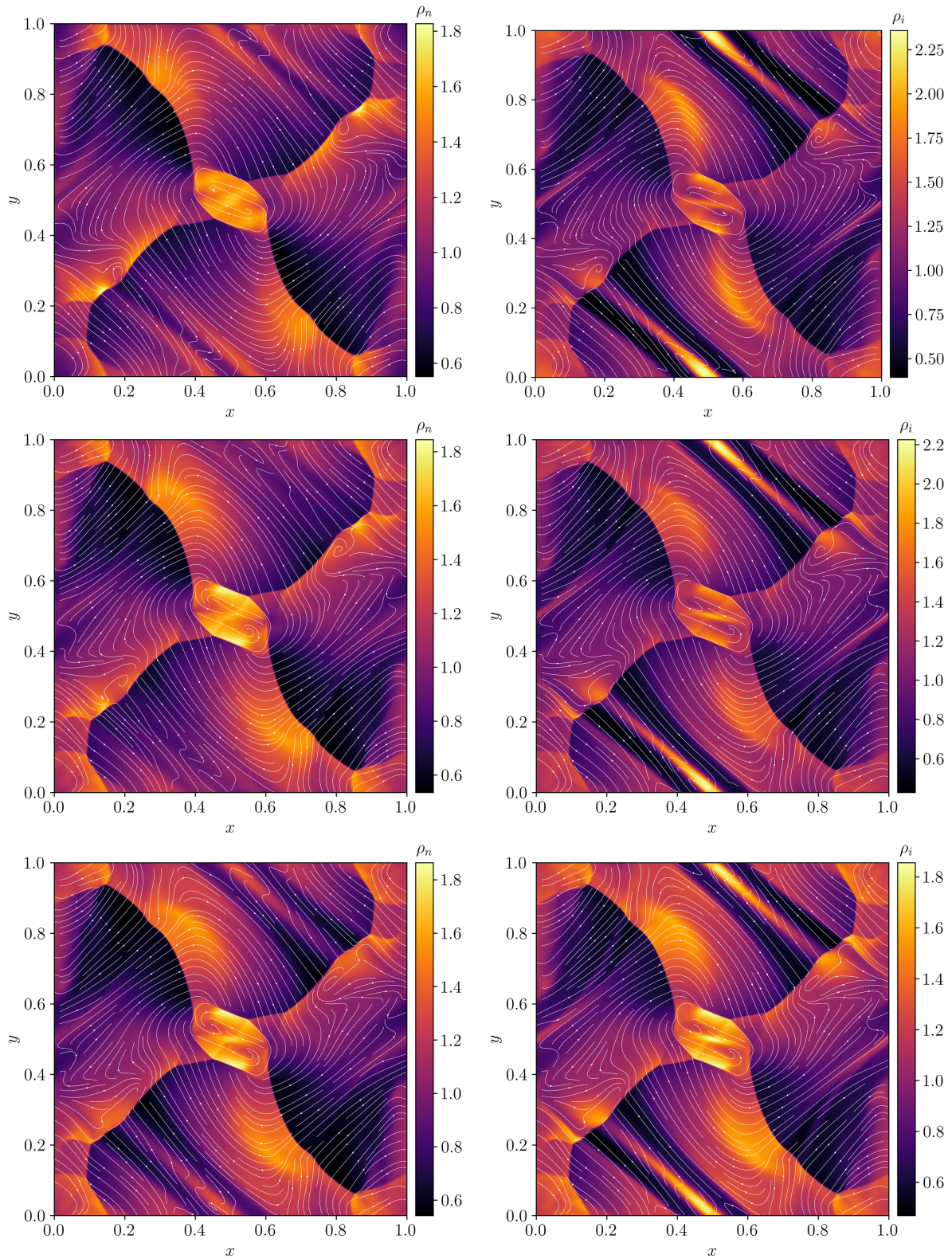


Figura 7. Solución del vórtice de Orszag-Tang con  $\xi_a = 0$ . Se muestra la densidad de la especie neutral y cargada (columna izquierda y derecha, respectivamente) a través del mapa de colores, con sus respectivas líneas de campo de velocidades. La fila superior corresponde a  $t = 0.30$ , la central a  $t = 0.48$  y la inferior a  $t = 0.74$ .

Por otra parte, se llevan a cabo simulaciones con diferentes valores del parámetros de colisiones entre las especies, donde nuevamente se observa que la solución de ambas especies converge a una única solución, cuando  $\xi_a$  aumenta. En la figura 8 se muestran las densidades de las especies neutral y cargada (columnas izquierda y derecha, respectivamente) luego de  $t = 0.48$ , para los valores de  $\xi_a = 10$  (fila superior) correspondiente a  $\sigma_{in} = 3.33 \times 10^{-20} \text{ m}^2$ ,  $\xi_a = 100$  (fila central) correspondiente a  $\sigma_{in} = 3.33 \times 10^{-19} \text{ m}^2$  y  $\xi_a = 500$  (fila inferior) correspondiente a  $\sigma_{in} = 1.66 \times 10^{-18} \text{ m}^2$ . Para el caso con menor acople ( $\xi_a = 10$ ), es posible reconocer la semejanza de la morfología entre ambas especies, donde se nota que la estructura es diferente al caso desacoplado. Esto indica que, así como la especie neutral se afecta por la influencia indirecta del campo magnético, también la especie cargada se modifica debido a que las partículas neutrales le transfieren energía cinética. Para el siguiente valor del parámetro de colisiones  $\xi_a = 100$ , se logra observar que el vórtice de la especie neutral tiene una estructura más definida y similar al de la especie ionizada. Y para el acople  $\xi_a = 500$ , la morfología de ambas especies es muy similar, alcanzando una solución tipo atractor. Cabe resaltar que las escalas de la densidad de masa y las líneas de campo de velocidades de ambas especies, también convergen a una misma solución cuando el parámetro de colisiones aumenta.

Adicionalmente, se calcula la presión de ambas especies para el modelo de plasma desacoplado, a lo largo del eje  $x$  en el tiempo  $t = 0.48$ . En la figura 9 se observa el perfil de presión en  $y = 0.312$  para la especie ionizada (línea púrpura del panel superior), el cual reproduce la morfología esperada según el trabajo realizado por Londrillo and Del Zanna (2000). Asimismo, se realiza



**Figura 8.** Densidad de las especies neutral y cargada (columna izquierda y derecha, respectivamente), para el vórtice de Orszag-Tang, con sus respectivas líneas de campo de velocidades en un tiempo de  $t = 0.48$ , donde la magnitud de la densidad está dada a través del mapa de colores. La fila superior corresponde a un parámetro de colisiones  $\xi_a = 10$  ( $\sigma_{in} = 3.33 \times 10^{-20} \text{ m}^2$ ), la central a  $\xi_a = 100$  ( $\sigma_{in} = 3.33 \times 10^{-19} \text{ m}^2$ ) y la inferior a  $\xi_a = 500$  ( $\sigma_{in} = 1.66 \times 10^{-18} \text{ m}^2$ ).

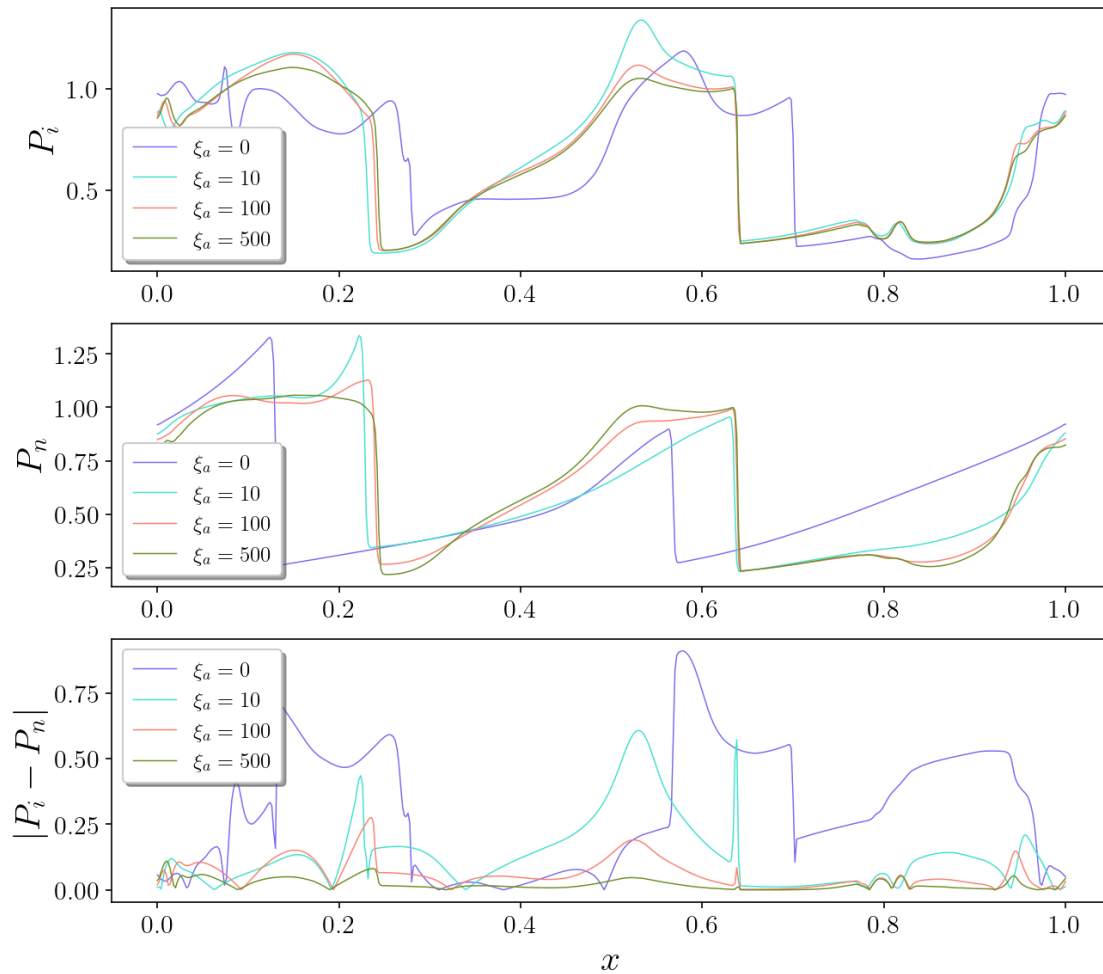


Figura 9. Distribución de la presión de la especie cargada y neutral (fila superior y central respectivamente) para el vórtice de Orszag-Tang, a lo largo del eje  $x$  para  $y = 0.312$ , en un tiempo  $t = 0.48$ , tomando cuatro parámetros de colisiones ( $\xi_a = 0$ ,  $\xi_a = 10$ ,  $\xi_a = 100$  y  $\xi_a = 500$ ). La fila inferior muestra la diferencia entre las presiones de ambas especies, donde se observa la naturaleza atractiva de la solución cuando el acople entre las especies es mayor.

el mismo procedimiento para la estructura de la presión en  $y = 0.428$  para las partículas cargadas, presentada en la figura 10 (línea púrpura del panel superior), y se compara cualitativamente con los resultados obtenidos por Ryu et al. (1998), mostrando que el código construido es consistente con otros códigos numéricos MHD. Seguidamente, para medir cuantitativamente la tendencia del

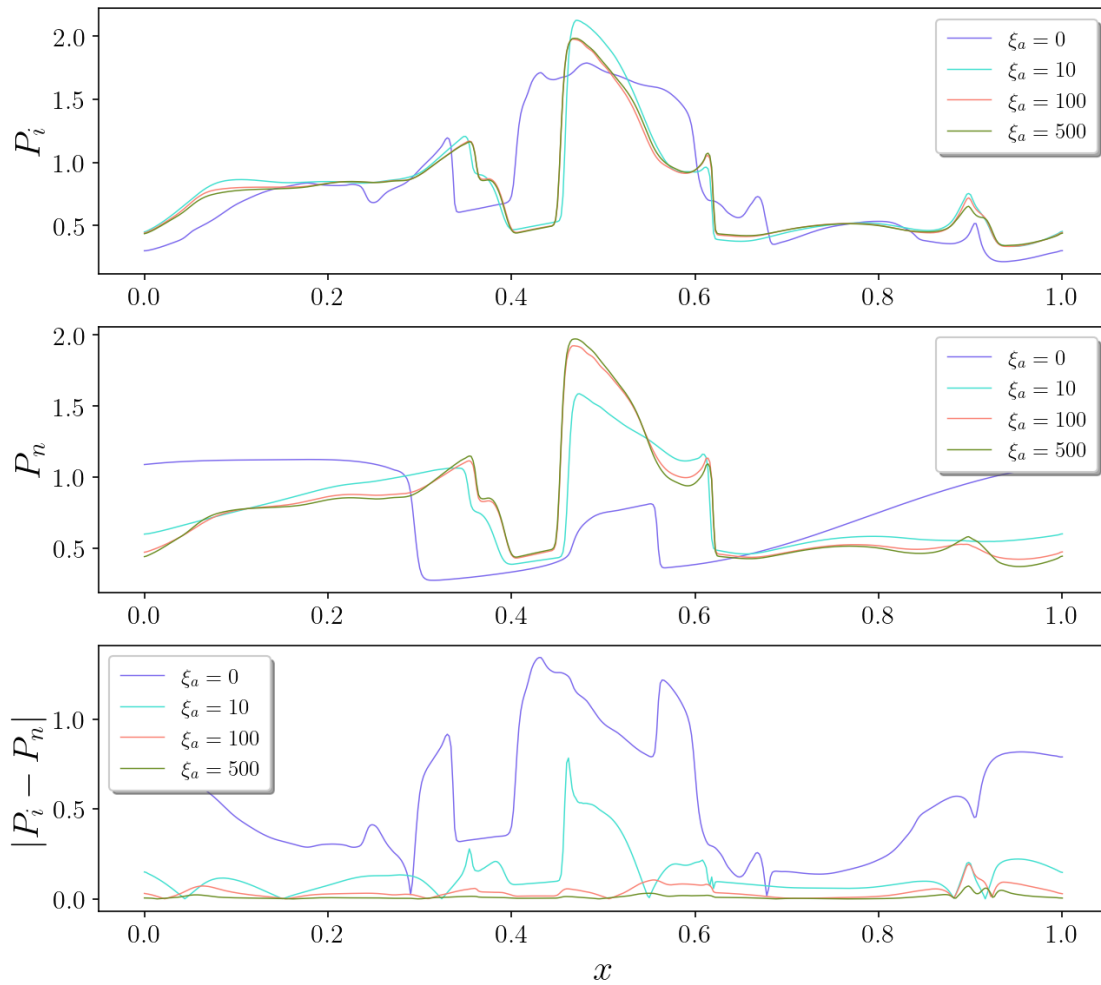
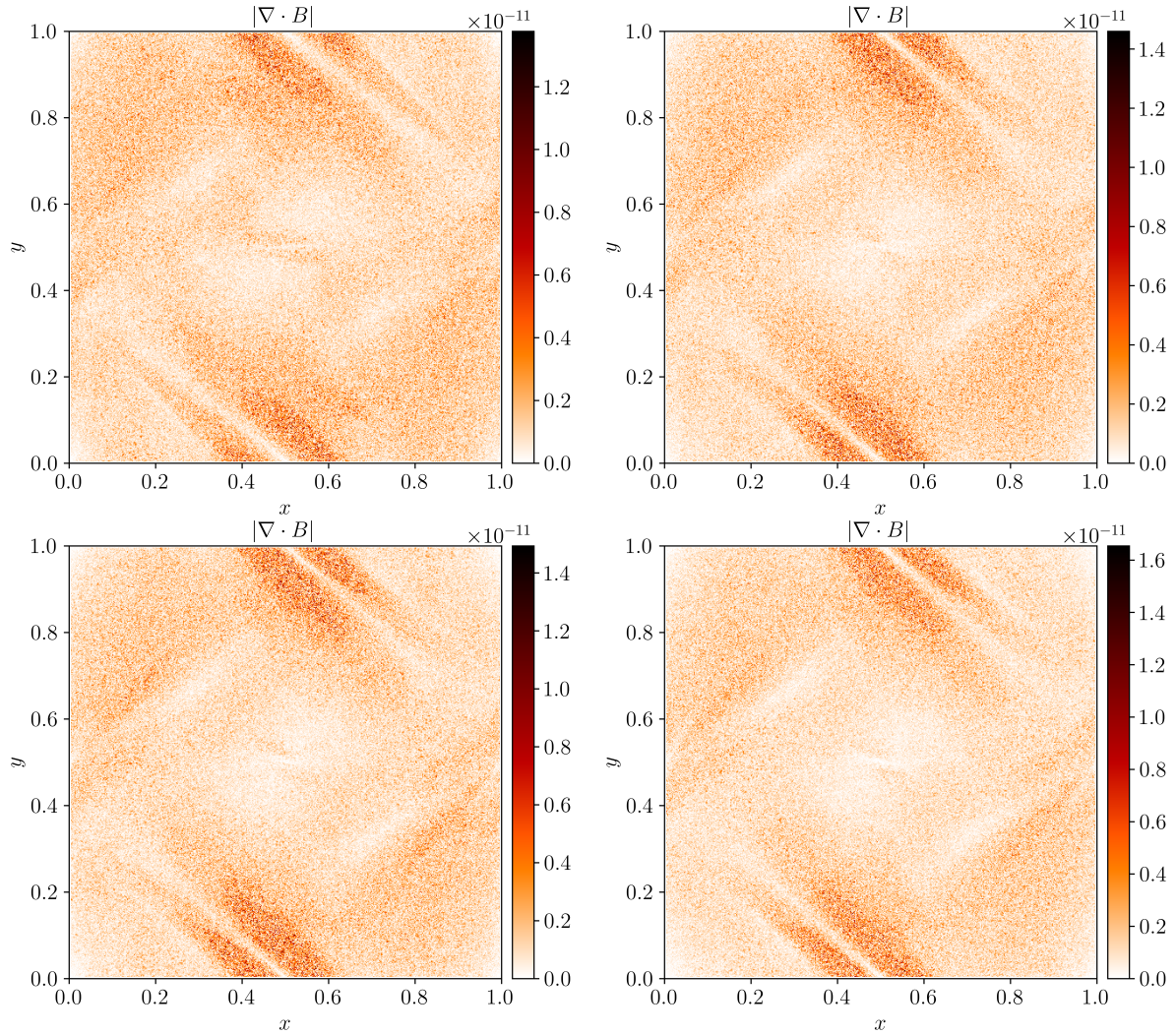


Figura 10. Distribución de la presión de la especie cargada y neutral (fila superior y central respectivamente) para el vórtice de Orszag-Tang, a lo largo del eje  $x$  para  $y = 0.428$ , en un tiempo  $t = 0.48$ , tomando cuatro parámetros de colisiones ( $\xi_a = 0$ ,  $\xi_a = 10$ ,  $\xi_a = 100$  y  $\xi_a = 500$ ). La fila inferior muestra la diferencia entre las presiones de ambas especies, donde se observa la naturaleza atractiva de la solución cuando el acople entre las especies es mayor.

plasma parcialmente ionizado hacia una solución tipo atractor, se calcula la diferencia entre la presión de la especie neutral y cargada, para 4 valores de  $\xi_a$ . En los paneles inferiores de las figuras 9 y 10 se presentan los resultados, en  $y = 0.312$  y en  $y = 0.428$ , respectivamente. Se observa que cuando el fluido está desacoplado (línea púrpura), la presión de ambas especies es totalmente

diferente, pero a medida que se aumenta el valor del parámetro de acople, la estructura de la presión de la especie neutral y de la especie cargada tienden a una misma solución y por lo tanto, su diferencia tiende a cero. Por último, con el fin de verificar la correcta implementación del método de transporte de flujo restringido, se calcula la magnitud de la divergencia del campo magnético en  $t = 0.48$ , para los cuatro valores del parámetro de colisiones. Estos resultados se presentan en la figura 11, donde se observa que su magnitud máxima, en todos los casos, no supera  $1.7 \times 10^{-11}$ .

Se logran completar satisfactoriamente las pruebas numéricas en el régimen lineal y no lineal, que verifican la consistencia de los métodos numéricos implementados en el código. Luego de esto, se procede a realizar una aplicación en física solar para simular un evento en específico en el que se presenta un fluido parcialmente ionizado. Particularmente, para este trabajo de investigación, se elige modelar la IKH que se presenta entre una prominencia y la corona solar.

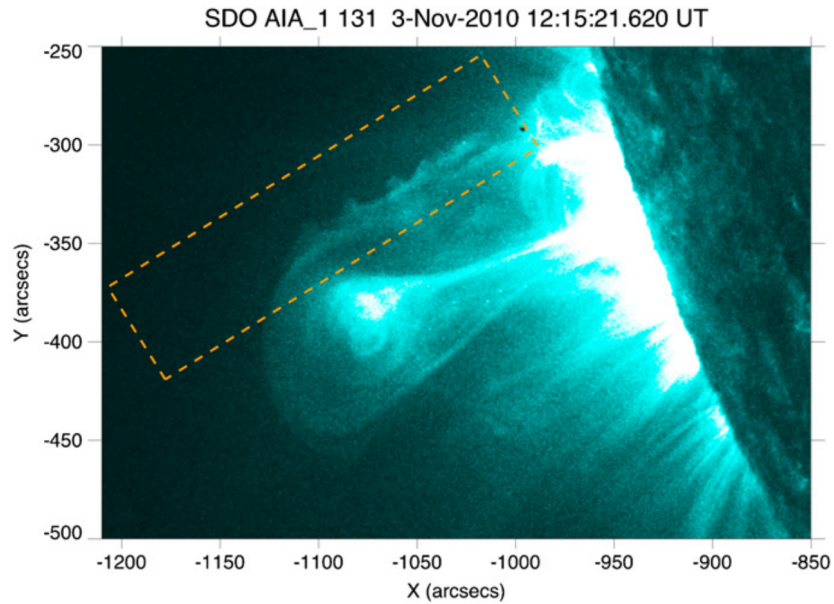


*Figura 11.* Divergencia del campo magnético en vórtice de Orszag-Tang, en un tiempo de  $t = 0.48$ . La magnitud de la divergencia del campo magnético está dada a través del mapa de colores, para los valores de  $\xi_a = 0$  (panel superior izquierdo),  $\xi_a = 10$  (panel superior derecho),  $\xi_a = 100$  (panel inferior izquierdo) y  $\xi_a = 500$  (panel inferior derecho).

#### 4. INESTABILIDAD DE KELVIN-HELMHOLTZ EN PROMINENCIAS SOLARES

La IKH se desarrolla entre dos fluidos en movimiento relativo, cuando se perturba transversalmente la interfaz que los separa (Chandrasekhar, 1981; Drazin and Reid, 1981; Pimentel and Lora-Clavijo, 2019). En la atmósfera solar se presentan las condiciones necesarias para que se forme dicha inestabilidad, ya que el Sol exhibe fenómenos eruptivos, en los que se crea una interfaz entre el fluido en movimiento y las capas exteriores de la atmósfera solar con las que interactúa, y debido a su naturaleza no lineal, constituyen un ambiente propicio para la generación de inestabilidades. Se ha verificado la existencia de la IKH en la atmósfera solar mediante imágenes de satélites en órbita y en tierra, los cuales permiten observar la estructura característica de dicha inestabilidad en la corona solar durante eyecciones de masa coronal (Foullon et al., 2011; Ofman and Thompson, 2011), fulguraciones (Yuan et al., 2019), prominencias (Xue et al., 2021) e incluso en el viento solar (Kieokaew et al., 2021). La figura 12 exhibe una eyección de masa coronal observada por el *SDO/AIA*, en particular por el telescopio en la longitud de onda de  $131\text{\AA}$ , el cual se enfoca en capturar material en fulguraciones. Y en el caso de las prominencias, en la figura 13 se presentan ondulaciones de una IKH en la interfaz entre una prominencia y la corona solar, observadas por el *IRIS/AIA* en la longitud de onda de  $171\text{\AA}$ .

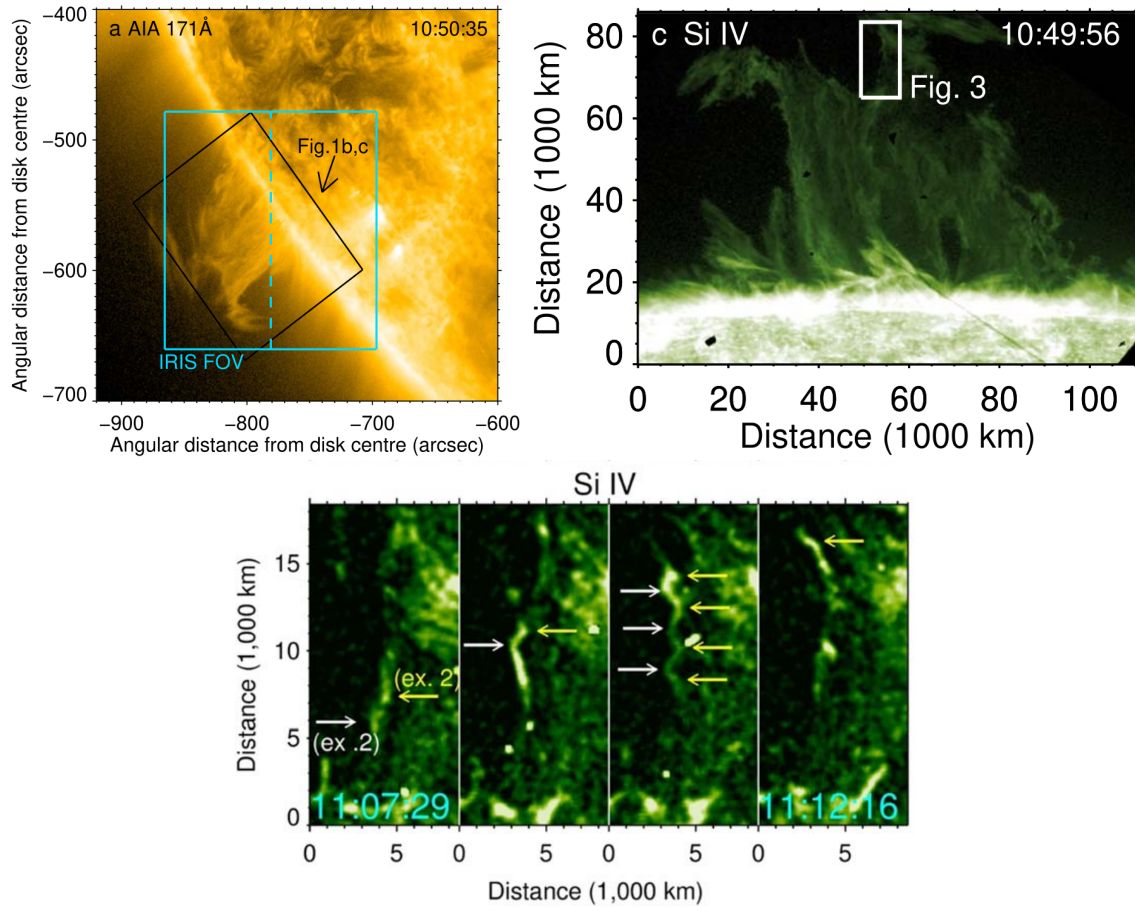
Esta inestabilidad, surge cuando dos capas de fluido, que están bajo la acción de campos magnéticos, se mueven paralelamente entre ellas, con diferentes velocidades, generando así una interfaz que las separa, la cual sufre una perturbación transversal. Posteriormente, la cresta de la



*Figura 12.* Eyección de masa coronal donde se observan ondas de Kelvin-Helmholtz en la región encerrada con la línea punteada. La imagen fue tomada por el *SDO/AIA* y sus coordenadas  $X, Y$  tienen su origen en el centro del Sol. Imagen recuperada de la investigación realizada por Foullon et al. (2011).

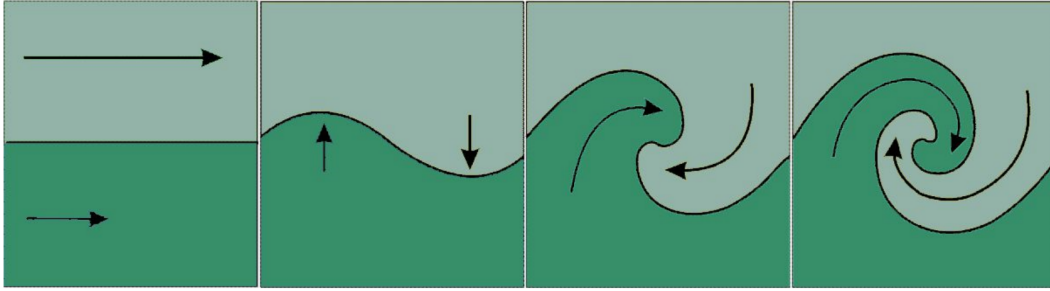
perturbación es deformada debido a la velocidad del fluido y se convierte en un vórtice. Por último, se disipa la inestabilidad y el fluido permanece en un régimen turbulento (Chandrasekhar, 1981). Estas etapas necesarias para la formación de un vórtice en una IKH están ilustradas en la figura 14, la cual fue recuperada de la investigación realizada por Philippi et al. (2015).

Desde el punto de vista energético, cuando los fluidos a ambos lados de la interfaz están bajo la acción de campos magnéticos, la IKH transforma energía cinética en energía magnética, amplifica la intensidad de los campos magnéticos (Nishikawa et al., 2014) y produce eventos de reconexión magnética (Lapenta and Knoll, 2003), donde se convierte la energía magnética en



*Figura 13.* Prominencia solar inactiva observada por el *IRIS/AIA* el 30 de Junio de 2015. Captura del Sol en la longitud de onda de 171Å (panel superior izquierdo), la caja negra encierra la prominencia solar. En la imagen de la prominencia en el canal Si IV (panel superior derecho), se encierra la zona donde se genera la IKH con una caja blanca. La imagen de la inestabilidad en la prominencia (panel inferior) muestra su evolución, donde la parte izquierda del dominio es la corona solar y la parte derecha es el material perteneciente a la prominencia, en el panel 3 ya existen ondulaciones típicas de esta inestabilidad, que pueden convertirse en vórtices. Imágenes recuperadas de la investigación realizada por Hillier and Polito (2018).

energía cinética y térmica (Takamoto, 2018). Estos efectos son relevantes en física solar ya que se relacionan de manera directa con algunas de sus preguntas abiertas como el calentamiento coronal (Zhelyazkov, 2015), la fuente de los intensos campos magnéticos presentes en la corona y la aceleración del viento solar.



*Figura 14.* Inicialmente, existe una interfaz que separa dos fluidos que se mueven con una velocidad relativa entre ellos, esta interfaz es perturbada transversalmente y debido a la velocidad de los fluidos, la cresta de la perturbación es desplazada hasta que forma un vórtice. Esta imagen fue recuperada de la investigación realizada por Philippi et al. (2015).

Para implementar dicho fenómeno de manera numérica, se considera un medio con presión constante  $P_{i,n} = P_0 = 6 \text{ Pa}$  y campo magnético uniforme en todo el dominio  $\vec{B} = B_z \hat{k}$ , donde  $B_z = 3.88 \text{ G}$  para prominencias inactivas, cuyos campos magnéticos oscilan entre  $3 \text{ G}$  y  $15 \text{ G}$  (Mackay et al., 2010). Luego se modela la frontera entre las dos zonas, correspondientes a la prominencia y a la corona solar, de la siguiente manera

$$\rho_{i,n} = \rho_p + \frac{(\rho_c - \rho_p)}{2} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{x}{w}\right) \right], \quad (62)$$

donde  $\rho_p = 10^{-11} \text{ kg/m}^3$  es la densidad de la prominencia (Parenti et al., 2012),  $\rho_c = 5 \times 10^{-12} \text{ kg/m}^3$  es la densidad de la corona solar y  $w = 0.1 \text{ km}$  es el ancho de la frontera entre los dos fluidos. Se impone la velocidad de los fluidos a ambos lados de la interfaz como

$$v_{z,i,n} = v_{z_p} \frac{(v_{z_c} - v_{z_p})}{2} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{x}{w}\right) \right], \quad (63)$$

siendo  $v_{z_p} = 70$  km/s la velocidad longitudinal de la prominencia (Mackay et al., 2010) y  $v_{z_c} = -500$  km/s la velocidad longitudinal de la corona solar. Posteriormente, para excitar la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, se perturba transversalmente la frontera

$$v_{x_{i,n}} = v_{x_0} \sin(4\pi z) e^{-(x/0.1)^2}, \quad (64)$$

donde  $v_{x_0} = 5$  km/s es la velocidad de la perturbación.

Esta configuración inicial se evoluciona durante una ventana temporal de  $t \in [0, 10]$  s, en un dominio numérico 3D de  $(-500 \leq x \leq 500) \times (-2.5 \leq y \leq 2.5) \times (0 \leq z \leq 1500)$  km, con una malla numérica uniforme de  $(N_x \times N_y \times N_z) = (800 \times 4 \times 1200)$  puntos. Como integrador se elige un Runge-Kutta de segundo orden, como método limitador de pendiente el MC, el factor de Courant  $C_{cfl} = 0.5$  y las condiciones de frontera se consideraron periódicas en  $z$ , pero salientes para las demás caras de la caja.

En la figura 15 se observa que cuando el fluido está desacoplado, es decir, con  $\xi_a = 0$  (fila superior), el fluido ionizado no se inestabiliza, ya que la energía de la perturbación aplicada no es suficiente para curvar las líneas de campo magnético, el cual tiene un comportamiento equivalente a una tensión superficial en la interfaz, disipando la perturbación aplicada (Chandrasekhar, 1981). Por otro lado, la especie neutral genera vórtices, como se puede apreciar en la líneas del campo de velocidades, y en la estructura tipo Kelvin-Helmholtz de la frontera que separa ambos fluidos. Se

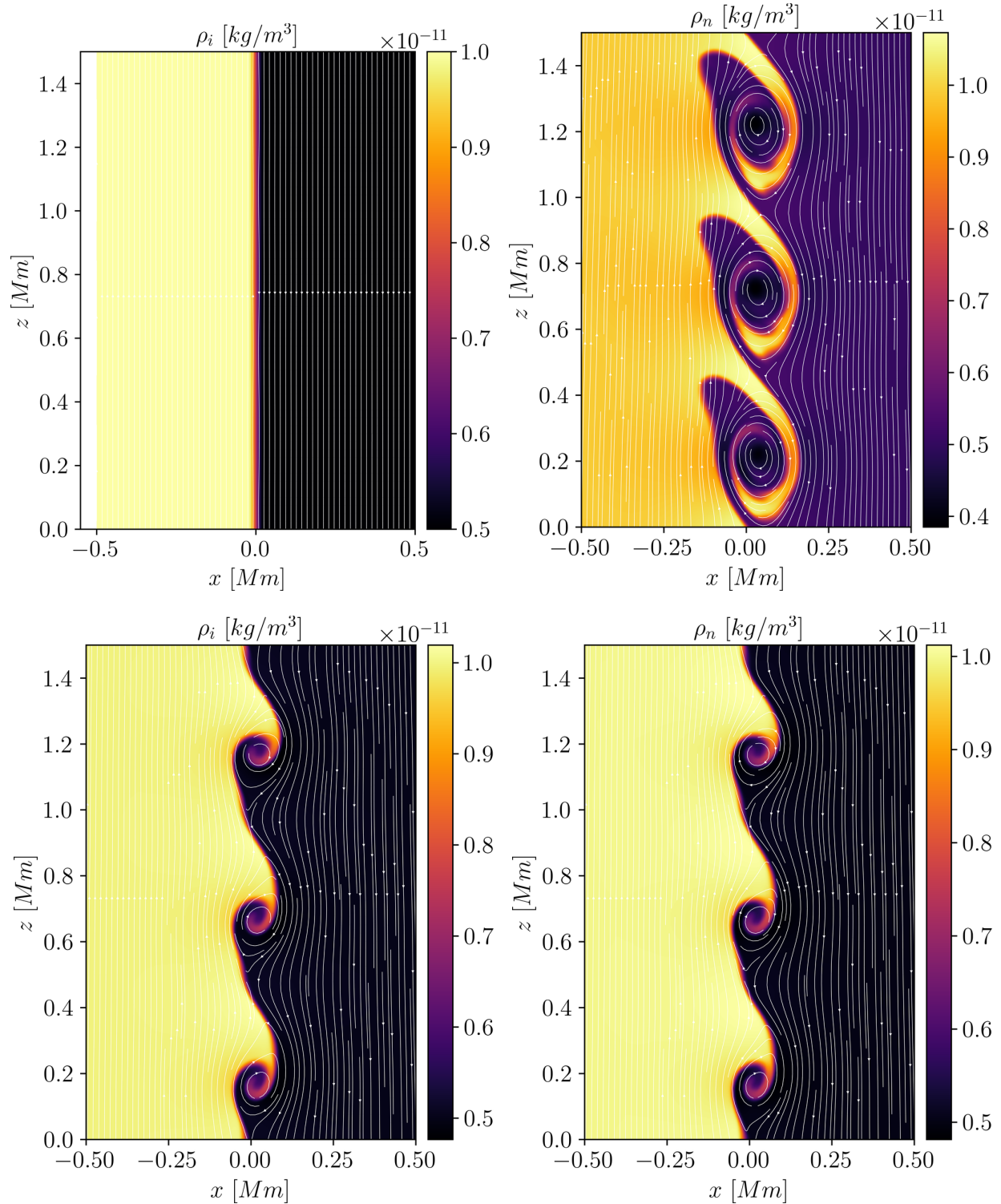


Figura 15. Densidad de la especie ionizada y la especie cargada (columnas izquierda y derecha, respectivamente) para el caso sin acople ( $\xi_a = 0$ ) y con un parámetro de acople de  $\xi_a = 100$  (filas superior e inferior, respectivamente), para una IKH en  $t \approx 2.37$  s. Se observa que cuando las especies están desacopladas, la inestabilidad no se desarrolla, pero los efectos de las colisiones en el caso del fluido acoplado, genera vórtices típicos de la morfología de una IKH.

realiza otra simulación con el mismo dato inicial, pero con un parámetro de colisiones  $\xi_a = 100$ , que corresponde a  $\sigma_{in} = 3.33 \times 10^{-19} \text{ m}^2$ , cuyos resultados se presentan en la figura 15 (fila inferior). Se observa que ambas especies desarrollan una IKH con vórtices menos definidos respecto al caso desacoplado. La especie neutral, al interactuar con las partículas cargadas, les entrega parte de su energía cinética, permitiendo que se curven las líneas campo magnético y que se formen vórtices, mientras que los campos magnéticos actúan de manera indirecta sobre las partículas neutrales, mediante las colisiones, modificando su estructura.

Adicionalmente, en la figura 16 se calcula el promedio de la energía magnética normalizada por su valor inicial, para ambos valores del parámetros de colisiones  $\xi_a$ . Se observa que para el caso desacoplado, donde no se forma la inestabilidad, la energía magnética permanece constante e igual al dato inicial. Pero cuando se modela el mismo sistema con colisiones y por consiguiente, se genera la IKH, los campos magnéticos se amplifican, haciendo que la energía magnética aumente más de un 228% de su valor inicial.

Para generar una IKH en un fluido MHD y amplificar los campos magnéticos, es necesario que la velocidad relativa entre los fluidos a ambos lados de la interfaz, supere un umbral dado por la velocidad de Alfvén. Por tal razón, en el caso de las especies desacopladas, no se forman vórtices, se disipa la perturbación aplicada y se reprime la inestabilidad, pero en el caso acoplado, los efectos de las colisiones propician la aparición de vórtices y la evolución de la IKH (Martínez-Gómez et al., 2015). Otra manera de inestabilizar la interfaz, manteniendo las especies desacopladas, es

aumentar la velocidad relativa entre las capas de fluido, por lo que se llevan a cabo otras simulaciones, donde el valor de la velocidad longitudinal del material que compone la prominencia es  $v_{z_p} = 500$  km/s (Rusin and Rybansky, 1982).

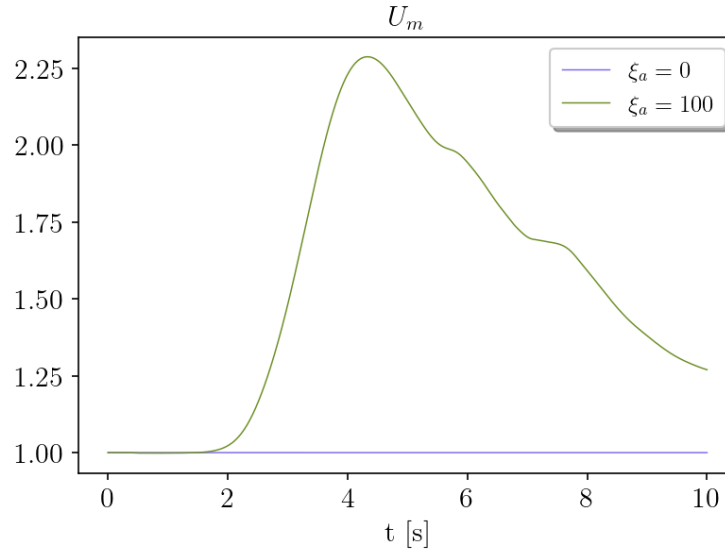


Figura 16. Promedio normalizado de la energía magnética de la especie ionizada para el caso sin acople  $\xi_a = 0$  y con un parámetro de acople de  $\xi_a = 100$ , durante la evolución de una IKH.

Con este nuevo dato inicial, se obtuvieron los resultados presentados en la figura 17, donde se muestra la morfología de la IKH para las dos especies, cuando el plasma está desacoplado (fila superior). Se observa que la especie neutral tiene una estructura más pronunciada y vórtices más definidos en comparación con la especie ionizada (Martínez-Gómez et al., 2015), cuyos vórtices están más suavizados, ya que no se inestabiliza con tanta facilidad debido al efecto tipo tensión superficial que ejerce el campo magnético (Chandrasekhar, 1981). Por otra parte, para un acople de  $\xi_a = 100$  (fila inferior), se observa que la morfología de la inestabilidad para ambas especies

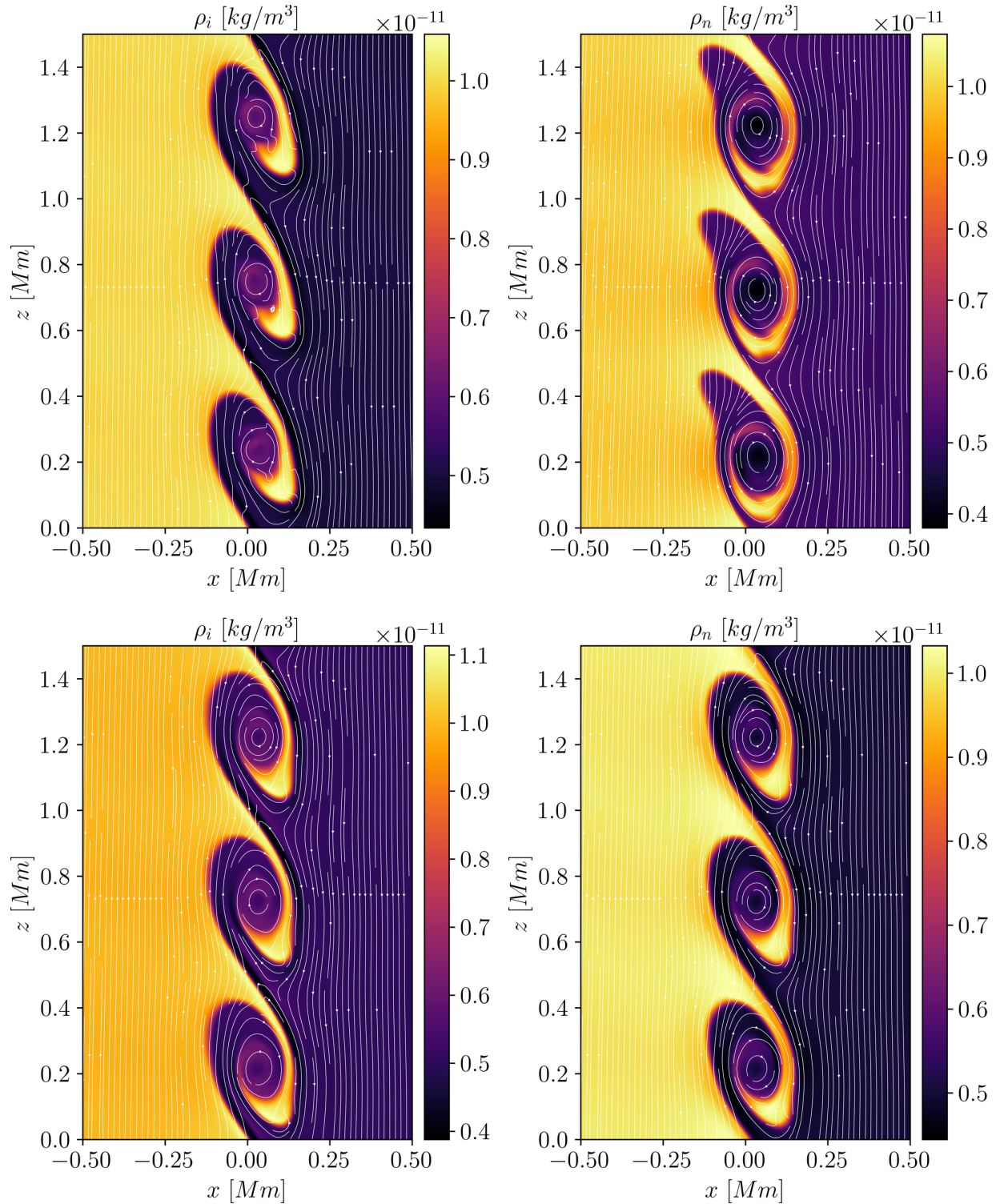


Figura 17. Densidad de la especie ionizada y la especie cargada (columnas izquierda y derecha, respectivamente) para los casos desacoplado  $\xi_a = 0$  y acoplado  $\xi_a = 100$  (filas superior e inferior, respectivamente), para una IKH en  $t \approx 2.42$  s, junto con las líneas del campo de velocidades.

es muy similar: La especie ionizada definió mejor la estructura de los vórtices (Hillier, 2019) y la especie neutral se suavizó, alcanzando una solución tipo atractora para ambas especies. Se demuestra que el campo magnético no permite la formación definida de las inestabilidades, pero el acople entre las especies hace que la energía cinética de las partículas neutras se transfiera a la especie cargada y propicie la generación de la IKH con estructuras más pronunciadas, convergiendo a una solución atractora para ambas especies.

Por otra parte, en la figura 18 se muestra la velocidad relativa entre la especie cargada y la especie neutral en cada punto del dominio numérico, para los casos de un fluido desacoplado y fluido con acoples de  $\xi_a = 10$ ,  $\xi_a = 50$  y  $\xi_a = 100$ . Se observa que a medida que se aumenta el valor del parámetro de colisiones, disminuye la diferencia entre el campo de velocidades neutral y cargado. En la tabla 4 se registraron los valores máximos de velocidad relativa con respecto a cada valor del parámetro de colisiones, donde se evidencia la naturaleza tipo atractora de la solución.

$\xi_a$	0	10	50	100
$\max( v_i - v_n )$ [km/s]	765.12	82.66	26.22	23.38

Tabla 4

*Valores máximos para la velocidad relativa entre la especie neutral y la especie cargada para diferentes valores del parámetro de colisiones.*

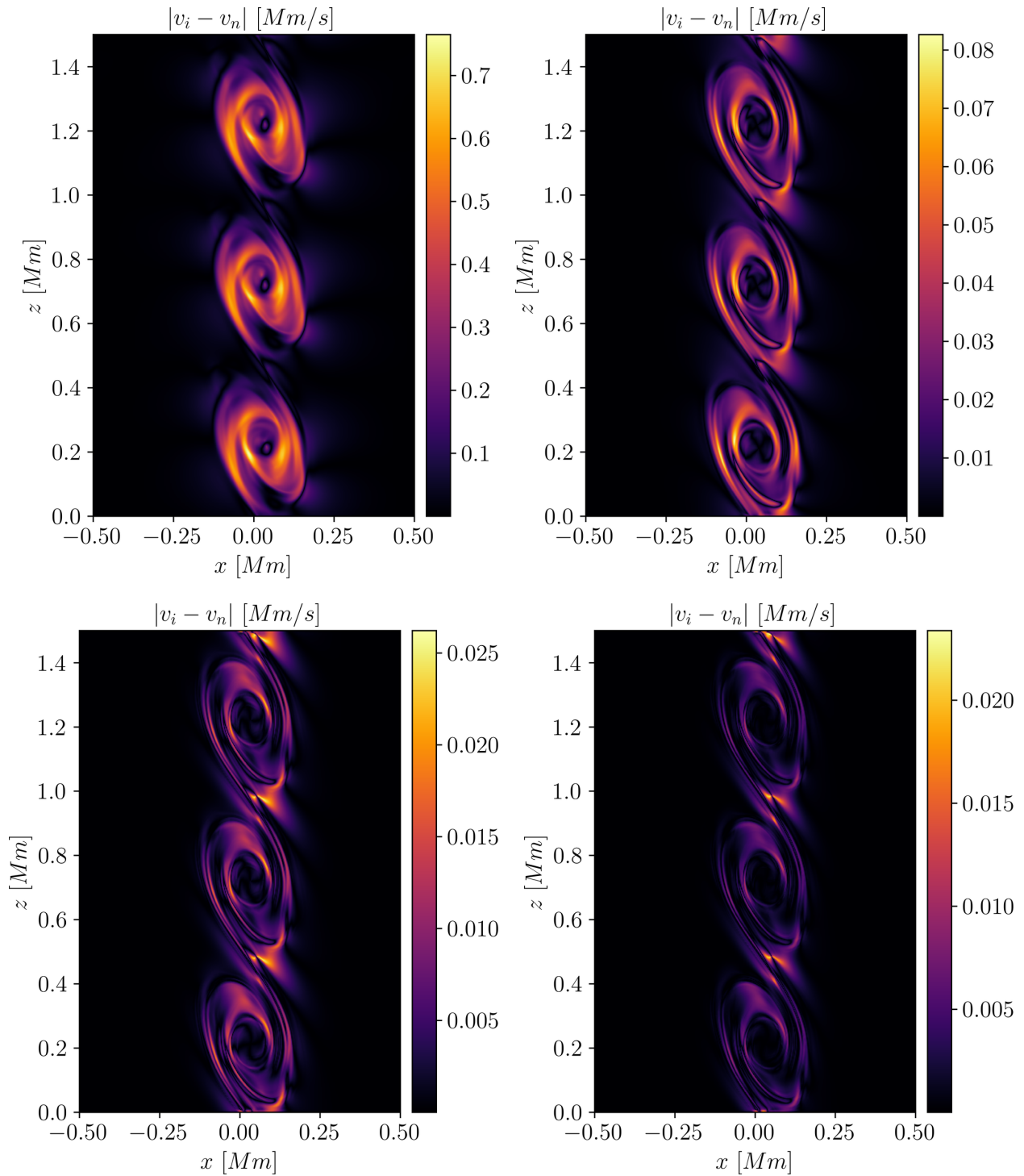


Figura 18. Velocidad relativa entre la especie ionizada y la neutral, para los casos de fluido desacoplado  $\xi_a = 0$  (panel superior izquierda) y acoplado con  $\xi_a = 10$  (panel superior derecha),  $\xi_a = 50$  (panel inferior izquierda) y  $\xi_a = 100$  (panel inferior derecha), para una IKH en  $t \approx 2.42$  s.

Además, en la figura 19 se graficó el promedio de las energías interna, cinética y magnética (filas superior, central e inferior, respectivamente), normalizadas respecto a su dato inicial, para el fluido ionizado y neutral (columnas izquierda y derecha), con diferentes valores del parámetro de colisiones  $\xi_a$ , a cada paso de tiempo. Se observa que la energía cinética y la energía interna se transforman en energía magnética durante la formación de la IKH, amplificando los campos magnéticos hasta un valor máximo (ver tabla 5). Posteriormente el sistema tiende a un estado de relajación mientras pasa de ser un fluido inestable a un fluido turbulento, lo cual excita nuevamente la IKH produciendo vórtices menos definidos y cada vez más espaciados temporalmente, que amplifican el campo magnético en menor proporción. Cabe resaltar que, como las condiciones de frontera en las direcciones  $x$ ,  $y$  son salientes, el plasma que abandona el dominio por estas fronteras, lleva consigo una determinada cantidad de energía cinética que no se tiene en cuenta en la figura.

Es importante notar que cuando se acopla el sistema, parte de la energía cinética del fluido neutral se transforma principalmente en energía magnética, aumentando la amplificación de los campos cuando el acople es mayor. Este fenómeno de amplificación está fuertemente relacionado con eventos como la reconexión magnética (Takamoto, 2018) o fenómenos como el calentamiento coronal y la aceleración de las partículas del viento solar (Zhelyazkov, 2015), y se calcula como

$$\mathcal{A} = \frac{\int B^2(t) dV}{\int B^2(0) dV}, \quad (65)$$

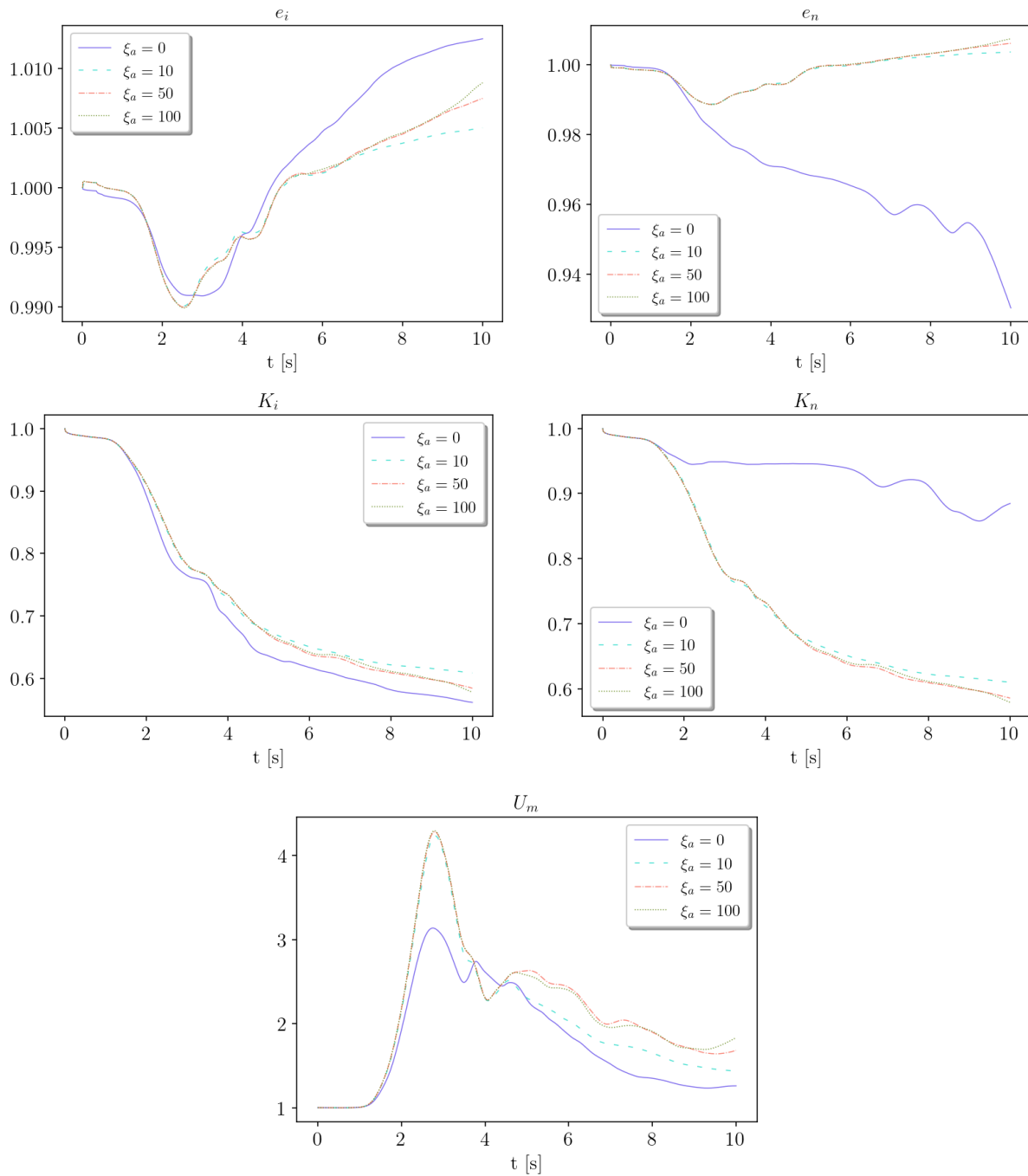


Figura 19. Promedio volumétrico normalizado de las energías interna de la especie cargada (panel superior izquierdo) y neutral (panel superior derecho), cinética de la especie cargada (panel central izquierdo) y neutral (panel central derecho) y magnética (panel inferior) en cada paso de tiempo, para 4 valores del parámetro de colisiones ( $\xi_a = 0$ ,  $\xi_a = 10$ ,  $\xi_a = 50$  y  $\xi_a = 100$ ).

donde se promedia el campo magnético en el volumen  $V$  de la simulación y posteriormente se normaliza respecto a su valor inicial. La amplificación del campo magnético en función del parámetro de colisiones está registrado en la tabla 5, donde se hace evidente el crecimiento del campo magnético cuando las especies cargada y neutral de un fluido están acopladas mediante colisiones.

$\xi_a$	0	10	50	100
$\max(\mathcal{A})$	3.136	4.234	4.282	4.295

Tabla 5

*Valor máximo de la amplificación del campo magnético debido al efecto del acople entre las especies mediante las colisiones, con respecto al parámetro de colisiones.*

Por último, en la figura 20 se calculó la divergencia del campo magnético con los parámetros  $\xi_a = 0$  y  $\xi_a = 100$  (columnas izquierda y derecha respectivamente). Este resultado se presenta tanto para el modelo inicial con velocidades típicas de las prominencias (fila superior), como para el modelo con velocidad longitudinal máxima para este fenómeno (fila inferior). Se muestra que los mayores valores que toma la magnitud de la divergencia del campo magnético, en todos los casos, es de  $2 \times 10^{-12}$  T/Mm, aproximadamente.

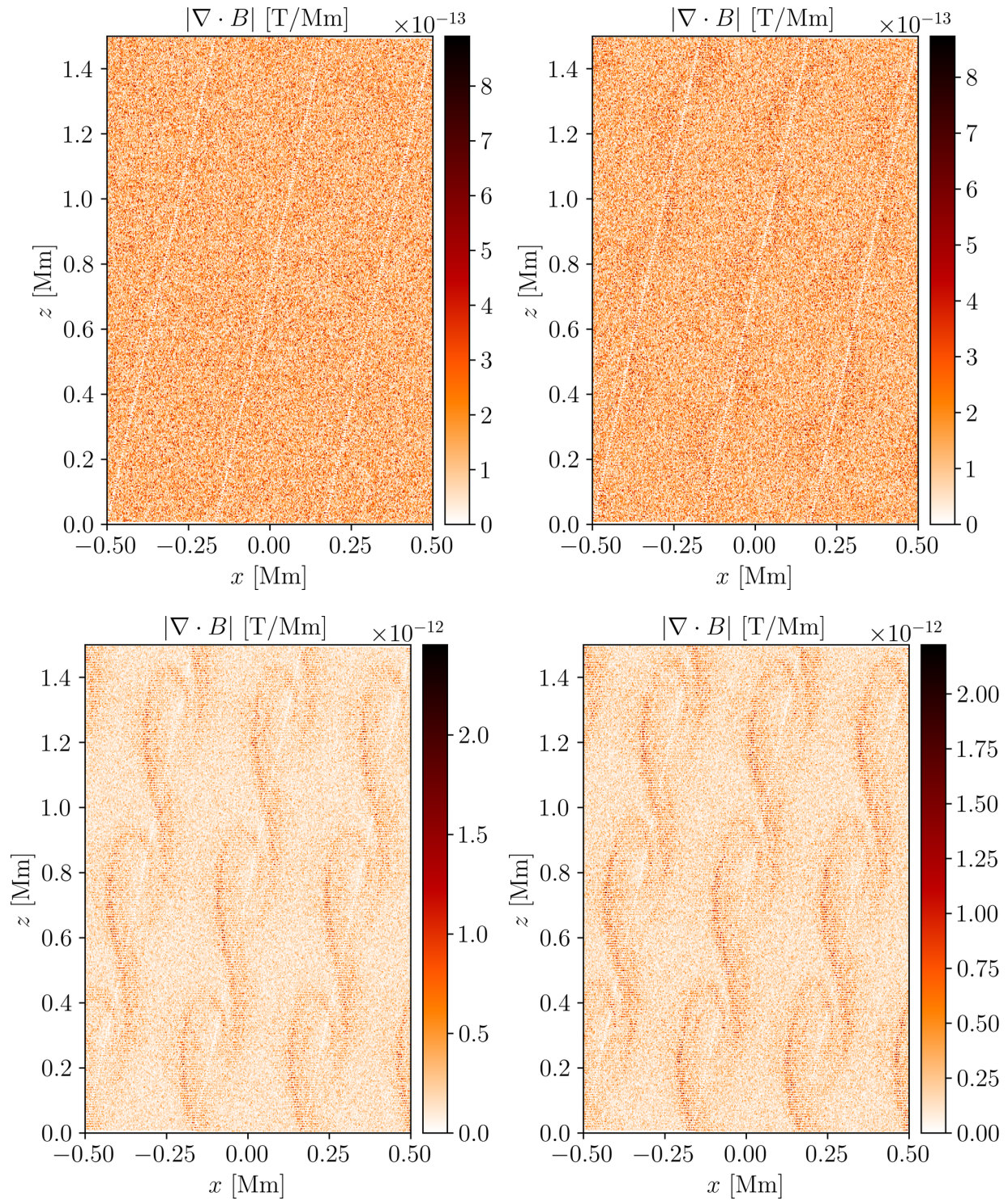


Figura 20. Divergencia del campo magnético para el modelo con velocidad longitudinal  $v_{z_p} = 70$  km/s para la prominencia (fila superior) y para el modelo con  $v_{z_p} = 70$  km/s (fila inferior), en los casos desacoplado  $\xi_a = 0$  y acoplado  $\xi_a = 100$  (columnas izquierda y derecha, respectivamente), para una IKH en  $t \approx 2.42$  s.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó la deducción de las ecuaciones de la MHD para el caso de un fluido parcialmente ionizado, compuesto por una especie neutral y una especie cargada (iones+electrones), teniendo en cuenta las colisiones entre especies y la producción de calor debido a estas. Este sistema de ecuaciones fue implementado en el código CAFÉ-MAGNUS, junto con los métodos numéricos necesarios para su funcionamiento. Se comprobó la consistencia de los métodos numéricos implementados mediante pruebas numéricas en una y dos dimensiones, las cuales se extendieron para fluidos parcialmente ionizados. Por último, se utilizó el código para modelar una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en la interfaz entre una prominencia y la corona solar, se analizó su morfología y los efectos de las colisiones entre las especies, las cuales permiten el desarrollo de la inestabilidad en la interfaz y aumentaban la amplificación de los campos magnéticos.

La primera prueba realizada fue la propagación de ondas acústicas en un medio uniforme, en el régimen lineal. Se obtuvo la solución analítica para un determinado valor del parámetro de colisiones, la cual sigue la forma de una onda con amplitud decreciente. Se implementó la prueba numérica y se resolvió con volúmenes finitos, obteniendo una oscilación que se desplaza mientras su amplitud disminuye, muy similar a la encontrada por Popescu Braileanu et al. (2019) con diferencias finitas. Dicha solución numérica se comparó con la analítica, obteniendo un error menor al 2% para una resolución espacial dada y un error menor al 0.33% para un dominio numérico cuatro veces más refinado, comprobando así la convergencia del código.

Posteriormente, se llevó a cabo la prueba numérica del tubo de choque de Brio-Wu y del tubo de choque de Sod, en el régimen no lineal, mediante los que se verificó el correcto manejo de los choques en las variables de estado. Primero se reprodujo la prueba para un fluido desacoplado, es decir, para un fluido MHD y uno HD, y se compararon los resultados con la solución analítica de los problemas, obteniendo que las soluciones numéricas reproducen las exactas (Lora-Clavijo et al., 2013; Takahashi et al., 2013). Cabe resaltar que el código MAGNUS ya se había sometido a la prueba del tubo de choque de Brio-Wu, para un fluido totalmente ionizado (Navarro et al., 2017). Se aplicaron las mismas pruebas para un plasma parcialmente ionizado, con diferentes valores del parámetro de colisiones. Se evidenció que a medida que aumenta este parámetro, los estados constantes entre las diferentes ondas que se propagan en el tubo, dejan de ser constantes, hasta que el acople es tal que relaja el sistema, los estados vuelven a ser constantes y las soluciones de las partículas cargadas y neutras tienden a una misma solución. Se calculó la presión relativa entre ambas especies y se confirmó la convergencia de las soluciones de ambas especies a una solución tipo atractor, cuando la cantidad de colisiones en el sistema aumenta. Además, se hizo la misma prueba del tubo de choque para cinco resoluciones espaciales diferentes y para cinco valores del parámetro de colisiones, encontrando que la norma  $L_1$  del error disminuye a medida que la resolución numérica aumenta.

Con el objetivo de comprobar la capacidad del código de evolucionar turbulencias MHD en el régimen no lineal, se aplicó la prueba 2D del vórtice de Orszag-Tang, la cual consiste en

un sistema inicialmente en rotación. A medida que evoluciona este sistema, se generan vórtices en el fluido, los cuales posteriormente se disipan debido a la turbulencia. Los resultados 2D de la evolución de la prueba, tienen la morfología esperada para la densidad de masa de un plasma totalmente ionizado (Rosswog and Price, 2007; Stone et al., 2008; Benítez-Llambay and Masset, 2016; Burns et al., 2020). Se calculó el perfil de presión para el fluido cargado desacoplado y se comparó cualitativamente con los resultados obtenidos por Ryu et al. (1998); Londrillo and Del Zanna (2000), comprobando la consistencia del código numérico con otros códigos MHD. También se estudió el comportamiento del fluido HD desacoplado, observando que su evolución es similar a la de la especie cargada, con la diferencia de que no presenta turbulencia. Por otra parte, se realizó la prueba para un fluido parcialmente ionizado, con diferentes valores del término de colisiones. Se encontró que la dinámica de ambas especies se modifica respecto al caso totalmente ionizado, ya que la especie neutral le transfiere energía cinética a las partículas cargadas, mientras que el campo magnético afecta indirectamente a las partículas neutras. Por último para esta prueba, se calculó la diferencia entre la presión para ambas especies, encontrando que para un plasma desacoplado, cada especie actúa de manera independiente, sin embargo, cuando hay colisiones entre ellas, se presenta un cambio en su estructura. Esta interacción, disminuye la diferencia entre las soluciones para las especies neutral y cargada, a medida que el parámetro de colisiones crece, convergiendo así a una solución tipo atractor.

Finalmente, luego de verificar la consistencia de los métodos numéricos, se modeló una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en la interfaz entre una prominencia y la corona solar, para di-

ferentes valores del parámetro de colisiones. Se partió de un modelo donde el valor de la velocidad se tomó del rango típico para las prominencias. Se observó que para el caso del fluido parcialmente ionizado desacoplado, la tensión magnética inhibe la formación de la inestabilidad en la especie cargada, aunque esta se desarrolla en la neutral, cuyos vórtices son muy pronunciados y definidos. En cambio, cuando los fluidos están acoplados, la dinámica de la especie neutral vence el efecto de tensión magnética de la especie cargada y se genera una inestabilidad en ambas especies, con vórtices menos definidos. Además de esto, se simuló la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, donde la velocidad de la prominencia se tomó mucho mayor al caso anterior, basada en valores existentes pero atípicos para este tipo de fenómeno. Así se garantizó la existencia de vórtices en ambas especies, sin necesidad de acoplar el plasma. Se observó que para el caso desacoplado, la especie neutral tiene vórtices más definidos que la especie ionizada. Pero al acoplar las especies, los vórtices de las partículas ionizadas definen su estructura y las soluciones para ambas especies convergen a una misma. El análisis energético de la evolución de la inestabilidad permitió relacionar la disminución de la energía cinética antes de la formación de la inestabilidad y el aumento de la energía magnética, estableciendo que la generación de la inestabilidad posibilita la amplificación de los campos magnéticos. Se calculó la velocidad relativa entre ambas especies, encontrando que para el caso de mayor acople, la diferencia de velocidades es del 2.86% con respecto al caso desacoplado, ya que el comportamiento de las especies tiende a una solución tipo atractor.

Adicionalmente, durante este trabajo de investigación, se publicó un artículo con el título “Propagación de Ondas de Alfvén Torsionales en una Atmósfera Solar Estratificada” en la Re-

vista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Además se presentó una charla titulada “*Magnetic field amplification due to twisted velocity field perturbation at the solar atmosphere*” en la XVI Reunión Latinoamericana de la Unión Astronómica Internacional (LARIM 2019). Actualmente se está escribiendo un artículo con los resultados de este trabajo de investigación junto con el director del presente trabajo PhD. Fabio Duvan Lora y un estudiante de maestría que está realizando su trabajo de investigación sobre la teoría de la radiación en la atmósfera solar utilizando la opacidad multigrupo, con el fin de estudiar los efectos de la radiación en la propagación de ondas MHD.

### Referencias Bibliográficas

- Al Shidi, Q., Cohen, O., Song, P., and Tu, J. (2019). Time-Dependent Two-Fluid Magnetohydrodynamic Model and Simulation of the Chromosphere. *Sol.Phys.*, 294(9):124.
- Alfvén, H. (1943). On the Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. *Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik*, 29B:1–7.
- Avrett, E. H. and Loeser, R. (2008). Models of the Solar Chromosphere and Transition Region from SUMER and HRTS Observations: Formation of the Extreme-Ultraviolet Spectrum of Hydrogen, Carbon, and Oxygen. *ApJS*, 175(1):229–276.
- Ballester, J. L., Alexeev, I., Collados, M., Downes, T., Pfaff, R. F., Gilbert, H., Khodachenko, M., Khomenko, E., Shaikhislamov, I. F., Soler, R., Vázquez-Semadeni, E., and Zaqarashvili, T. (2018). Partially Ionized Plasmas in Astrophysics. *Space Sci. Rev.*, 214(2):58.
- Benítez-Llambay, P. and Masset, F. S. (2016). FARGO3D: A New GPU-oriented MHD Code. *ApJS*, 223(1):11.
- Berger, T., Hillier, A., and Liu, W. (2017). Quiescent Prominence Dynamics Observed with the Hinode Solar Optical Telescope. II. Prominence Bubble Boundary Layer Characteristics and the Onset of a Coupled Kelvin-Helmholtz Rayleigh-Taylor Instability. *ApJ*, 850(1):60.
- Bittencourt, J. (2004). *Fundamentals of Plasma Physics*. Springer New York.
- Braginskii, S. I. (1965). Transport Processes in a Plasma. *Reviews of Plasma Physics*, 1:205.

- Brio, M. and Wu, C. C. (1988). An Upwind Differencing Scheme for the Equations of Ideal Magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 75(2):400–422.
- Burden, R., Faires, J., and Burden, A. (2015). *Numerical Analysis*. Cengage Learning.
- Burns, K. J., Vasil, G. M., Oishi, J. S., Lecoanet, D., and Brown, B. P. (2020). Dedalus: A flexible framework for numerical simulations with spectral methods. *Physical Review Research*, 2(2):023068.
- Chandra, R., Dagum, L., Kohr, D., Maydan, D., McDonald, J., and Menon, R. (2001). *Parallel Programming in OpenMP*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA.
- Chandrasekhar, S. (1981). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications.
- Courant, R., Friedrichs, K., and Lewy, H. (1928). Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74.
- Dahlquist, G. G. (1963). A special stability problem for linear multistep methods. *BIT Numerical Mathematics*, 3:27–43.
- Debye, P. and Hückel, E. (1923). De la theorie des electrolytes. i. abaissement du point de congelation et phenomenes associes. *Physikalische Zeitschrift*, 24(9):185–206.
- Draine, B. T. (1986). Multicomponent, reacting MHD flows. *MNRAS*, 220:133–148.

- Drazin, P. G. and Reid, W. H. (1981). Hydrodynamic stability. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 82:17950.
- Evans, C. R. and Hawley, J. F. (1988). Simulation of magnetohydrodynamic flows - A constrained transport method. *ApJ*, 332:659–677.
- Foullon, C., Verwichte, E., Nakariakov, V. M., Nykyri, K., and Farrugia, C. J. (2011). Magnetic Kelvin-Helmholtz Instability at the Sun. *ApJL*, 729(1):L8.
- Gibson, S. E. (2018). Solar prominences: theory and models. Fleshing out the magnetic skeleton. *Living Reviews in Solar Physics*, 15(1):7.
- Goldstein, H., Poole, C., Safko, J., and Addison, S. R. (2002). Classical Mechanics, 3rd ed. *American Journal of Physics*, 70(7):782–783.
- Harten, A., Lax, P. D., and Leer, B. V. (1983). On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1):35–61.
- Hillier, A. (2019). Ion-neutral decoupling in the nonlinear Kelvin-Helmholtz instability: Case of field-aligned flow. *Physics of Plasmas*, 26(8):082902.
- Hillier, A. and Polito, V. (2018). Observations of the Kelvin-Helmholtz Instability Driven by Dynamic Motions in a Solar Prominence. *ApJL*, 864(1):L10.
- Jiang, G.-S. and Wu, C.-c. (1999). A High-Order WENO Finite Difference Scheme for the Equations of Ideal Magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 150(2):561–594.

- Judge, P. (2006). Observations of the Solar Chromosphere. In Leibacher, J., Stein, R. F., and Uitenbroek, H., editors, *Solar MHD Theory and Observations: A High Spatial Resolution Perspective*, volume 354 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 259.
- Kataoka, R. and Sato, T. (2017). Ionization of protoplanetary disks by galactic cosmic rays, solar protons, and supernova remnants. *Geoscience Frontiers*, 8(2):247–252. *Frontiers in Early Earth History and Primordial Life- Part I*.
- Kelly, D. C. (1963). Plasma Equation of State. *American Journal of Physics*, 31(11):827–828.
- Kieokaew, R., Lavraud, B., Ruffolo, D., Matthaeus, W., Yang, Y., Stawarz, J., Aizawa, S., Louarn, P., Rouillard, A., Génot, V., Fedorov, A., Pinto, R., Foullon, C., Owen, C., and Horbury, T. (2021). Solar Orbiter observations of magnetic Kelvin-Helmholtz waves in the solar wind. In *EGU General Assembly Conference Abstracts*, EGU General Assembly Conference Abstracts, pages EGU21–5247.
- Kuridze, D., Zaqarashvili, T. V., Henriques, V., Mathioudakis, M., Keenan, F. P., and Hanslmeier, A. (2016). Kelvin-Helmholtz Instability in Solar Chromospheric Jets: Theory and Observation. *ApJ*, 830(2):133.
- Landinez, G., Rueda, S., and Lora-Clavijo, F. D. (2021). First steps on modelling wave propagation in isotropic-heterogeneous media: numerical simulation of p-sv waves. *European Journal of Physics*, 42(6):065001.

- Lapenta, G. and Knoll, D. A. (2003). Reconnection in the Solar Corona: Role of the Kelvin-Helmholtz Instability. *Sol.Phys.*, 214(1):107–129.
- Leake, J. E., DeVore, C. R., Thayer, J. P., Burns, A. G., Crowley, G., Gilbert, H. R., Huba, J. D., Krall, J., Linton, M. G., Lukin, V. S., and Wang, W. (2014). Ionized Plasma and Neutral Gas Coupling in the Sun’s Chromosphere and Earth’s Ionosphere/Thermosphere. *Space Sci. Rev.*, 184(1-4):107–172.
- Leake, J. E., Lukin, V. S., and Linton, M. G. (2013). Magnetic reconnection in a weakly ionized plasma. *Physics of Plasmas*, 20(6):061202.
- Leake, J. E., Lukin, V. S., Linton, M. G., and Meier, E. T. (2012). Multi-fluid Simulations of Chromospheric Magnetic Reconnection in a Weakly Ionized Reacting Plasma. *ApJ*, 760(2):109.
- LeVeque, R., J. L., and Crighton, D. (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press.
- Li, X., Zhang, J., Yang, S., Hou, Y., and Erdélyi, R. (2018). Observing Kelvin-Helmholtz instability in solar blowout jet. *Scientific Reports*, 8:8136.
- Londrillo, P. and Del Zanna, L. (2000). High-Order Upwind Schemes for Multidimensional Magnetohydrodynamics. *ApJ*, 530(1):508–524.
- López Ariste, A., Aulanier, G., Schmieder, B., and Sainz Dalda, A. (2006). First observation of bald patches in a filament channel and at a barb endpoint. *A&A*, 456(2):725–735.

- Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Osorio, A., and Guzmán, F. S. (2015). CAFE: A New Relativistic MHD Code. *ApJS*, 218:24.
- Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Pérez, J. P., Siddhartha Guzmán, F., and González, J. A. (2013). Exact solution of the 1D riemann problem in Newtonian and relativistic hydrodynamics. *Revista mexicana de física E*, 59:28 – 50.
- Mackay, D. H., Karpen, J. T., Ballester, J. L., Schmieder, B., and Aulanier, G. (2010). Physics of Solar Prominences: II—Magnetic Structure and Dynamics. *Space Sci. Rev*, 151(4):333–399.
- Martínez-Gómez, D., Soler, R., and Terradas, J. (2015). Onset of the Kelvin-Helmholtz instability in partially ionized magnetic flux tubes. *A&A*, 578:A104.
- Martínez-Sykora, J., De Pontieu, B., Hansteen, V., and Carlsson, M. (2015). The role of partial ionization effects in the chromosphere. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 373(2042):20140268–20140268.
- Melis, L., Soler, R., and Ballester, J. L. (2021). Alfvén wave heating in partially ionized thin threads of solar prominences. *arXiv e-prints*, page arXiv:2103.16599.
- Mouschovias, T. C., Ciolek, G. E., and Morton, S. A. (2011). Hydromagnetic waves in weakly-ionized media - I. Basic theory, and application to interstellar molecular clouds. *MNRAS*, 415(2):1751–1782.
- Muller, J.-M., Brisebarre, N., Dinechin, F., Jeannerod, C.-P., Lefèvre, V., Melquiond, G., Revol, N., Stehlé, D., and Torres, S. (2010). *Handbook of Floating-Point Arithmetic*. Springer.

- Murawski, K., Musielak, Z. E., and Wójcik, D. (2020). 3D Numerical Simulations of Solar Quiet Chromosphere Wave Heating. *ApJL*, 896(1):L1.
- Navarro, A., Lora-Clavijo, F. D., and González, G. A. (2017). Magnus: A new resistive MHD code with heat flow terms. *ApJ*, 844(1):57.
- Nishikawa, K. I., Hardee, P. E., Dutan, I., Niemiec, J., Medvedev, M., Mizuno, Y., Meli, A., Sol, H., Zhang, B., Pohl, M., and Hartmann, D. H. (2014). Magnetic Field Generation in Core-sheath Jets via the Kinetic Kelvin-Helmholtz Instability. *ApJ*, 793(1):60.
- Ofman, L. and Thompson, B. J. (2011). SDO/AIA Observation of Kelvin-Helmholtz Instability in the Solar Corona. *ApJL*, 734(1):L11.
- Oliver, R., Soler, R., Terradas, J., and Zaqarashvili, T. V. (2016). Dynamics of Coronal Rain and Descending Plasma Blobs in Solar Prominences. II. Partially Ionized Case. *ApJ*, 818(2):128.
- Orszag, S. A. and Tang, C. M. (1979). Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 90:129–143.
- Paletou, F. (2008). The magnetic field of solar prominences. In Charbonnel, C., Combes, F., and Samadi, R., editors, *SF2A-2008*, page 559.
- Parenti, S. (2014). Solar Prominences: Observations. *Living Reviews in Solar Physics*, 11(1):1.
- Parenti, S., Schmieder, B., Heinzl, P., and Golub, L. (2012). On the Nature of Prominence Emission Observed by SDO/AIA. *ApJ*, 754(1):66.

- Pareschi, L. and Russo, G. (2005). Implicit–explicit runge–kutta schemes and applications to hyperbolic systems with relaxation. *Journal of Scientific computing*, 25(1):129–155.
- Philippi, P., Mattila, K., Hegele Jr, L., and Siebert, D. (2015). Kinetic projection and stability in lattice-boltzmann schemes. In *XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*.
- Pimentel, O. M. and Lora-Clavijo, F. D. (2019). On the linear and non linear evolution of the Relativistic MHD Kelvin-Helmholtz instability in a magnetically polarized fluid. *MNRAS*, page 2435.
- Popescu Braileanu, B., Lukin, V. S., Khomenko, E., and de Vicente, Á. (2019). Two-fluid simulations of waves in the solar chromosphere. I. Numerical code verification. *A&A*, 627:A25.
- Popescu Braileanu, B., Lukin, V. S., Khomenko, E., and de Vicente, Á. (2021). Two-fluid simulations of Rayleigh-Taylor instability in a magnetized solar prominence thread. I. Effects of prominence magnetization and mass loading. *A&A*, 646:A93.
- Priest, E. (2014). *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press.
- Roe, P. L. (1981). Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. *Journal of Computational Physics*, 43(2):357–372.
- Roe, P. L. (1985). Some contributions to the modelling of discontinuous flows. In *Large-Scale Computations in Fluid Mechanics*, pages 163–193.

- Rosswog, S. and Price, D. (2007). MAGMA: a three-dimensional, Lagrangian magnetohydrodynamics code for merger applications. *MNRAS*, 379(3):915–931.
- Rusin, V. and Rybansky, M. (1982). Eruptive Prominence of August 18, 1980. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*, 33:219.
- Ryu, D., Miniati, F., Jones, T. W., and Frank, A. (1998). A Divergence-free Upwind Code for Multidimensional Magnetohydrodynamic Flows. *ApJ*, 509(1):244–255.
- Schiesser, W. (2012). *The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations*. Elsevier Science.
- Sod, G. A. (1978). Review. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 27(1):1–31.
- Stone, J. M., Gardiner, T. A., Teuben, P., Hawley, J. F., and Simon, J. B. (2008). Athena: A New Code for Astrophysical MHD. *ApJS*, 178(1):137–177.
- Takahashi, K., Yamada, S., and Yamada (2013). Regular and non-regular solutions of the Riemann problem in ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Plasma Physics*, 79(3):335–356.
- Takamoto, M. (2018). Evolution of three-dimensional relativistic current sheets and development of self-generated turbulence. *MNRAS*, 476(3):4263–4271.
- Thomas, J. (1998). *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York.

- Titarev, V. A. and Toro, E. F. (2005). ADER schemes for three-dimensional non-linear hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 204(2):715–736.
- Tomczyk, S., McIntosh, S. W., Keil, S. L., Judge, P. G., Schad, T., Seeley, D. H., and Edmondson, J. (2007). Alfvén Waves in the Solar Corona. *Science*, 317(5842):1192.
- Toro, E. (1997). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer.
- van Beijeren, H. and Ernst, M. H. (1979). Kinetic theory of hard spheres. *Journal of Statistical Physics*, 21(2):125–167.
- van Leer, B. (1977). Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection. *Journal of Computational Physics*, 23:276.
- van Tend, W. (1980). Coronal Heating by Prominence Turbulence. *Sol.Phys.*, 66(1):29–37.
- Vranjes, J. and Krstic, P. S. (2013). Collisions, magnetization, and transport coefficients in the lower solar atmosphere. *A&A*, 554:A22.
- Wiehr, E., Stellmacher, G., and Bianda, M. (2019). Evidence for the Two-fluid Scenario in Solar Prominences. *ApJ*, 873(2):125.
- Wójcik, D., Kuźma, B., Murawski, K., and Musielak, Z. E. (2020). Wave heating of the solar atmosphere without shocks. *A&A*, 635:A28.

- Xue, J., Vial, J.-C., Li, H., Xu, Z., Su, Y., and Su, Y. (2021). High-Resolution Observations of Prominence Plume Formation with the New Vacuum Solar Telescope. In *43rd COSPAR Scientific Assembly. Held 28 January - 4 February*, volume 43, page 972.
- Yang, H., Xu, Z., Lim, E.-K., Kim, S., Cho, K.-S., Kim, Y.-H., Chae, J., Cho, K., and Ji, K. (2018). Observation of the Kelvin-Helmholtz Instability in a Solar Prominence. *ApJ*, 857(2):115.
- Yuan, D., Shen, Y., Liu, Y., Feng, X., and Keppens, R. (2019). Multi-layered Kelvin-Helmholtz Instability in the Solar Corona. *arXiv e-prints*, page arXiv:1910.05710.
- Zaqarashvili, T. V., Khodachenko, M. L., and Rucker, H. O. (2011). Magnetohydrodynamic waves in solar partially ionized plasmas: two-fluid approach. *A&A*, 529:A82.
- Zhelyazkov, I. (2015). On Modeling the Kelvin-Helmholtz Instability in Solar Atmosphere. *J. Astrophys. Astron.*, 36(1):233–254.
- Zirker, J. B. and Engvold, O. (2017). Why is the Sun's corona so hot? Why are prominences so cool? *Physics Today*, 70(8):36–43.

## APÉNDICES

### Apéndice A. Ecuación de Estado de un Gas Ideal

La teoría de Debye-Hückel (Debye and Hückel, 1923) indica que la distribución del potencial electrostático promedio alrededor de una ion con carga  $Z_\alpha e$  es

$$\langle \Phi_\alpha(r) \rangle = \frac{Z_\alpha e}{r} e^{-r/\lambda_D}, \quad (66)$$

donde las cantidades entre los paréntesis angulares representan promedio temporal,  $r$  es la distancia a la que se mide el potencial, medido desde el ion y  $\lambda_D$  es la longitud de apantallamiento de Debye, la cual se calcula como

$$\lambda_D^2 = \frac{k_B T}{4\pi e^2} \sum_\alpha N_\alpha Z_\alpha^2, \quad (67)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $T$  es la temperatura y  $N_\alpha$  la concentración de iones con carga  $Z_\alpha e$ . Por otro lado, el teorema del virial (Goldstein et al., 2002) indica que la energía cinética total de un sistema de partículas estable, se puede calcular utilizando la energía potencial total del sistema

$$\left\langle \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle. \quad (68)$$

Teniendo en cuenta que para un gas a temperatura  $T$ , el teorema de equipartición de la teoría cinética indica que el promedio de energía cinética de cada átomo está dado por  $\frac{3}{2} k_B T$ , por lo que

la energía cinética promedio total del plasma es

$$\left\langle \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\rangle = \sum_\alpha N_\alpha V \frac{3}{2} k_B T, \quad (69)$$

siendo  $V$  es el volumen del plasma. La energía potencial del teorema del virial expresada en (68) se puede dividir en dos partes, separando la contribución debido a la presión y la parte debido a la interacción de Coulomb

$$-\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i^P \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i^C \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle, \quad (70)$$

donde  $\mathbf{F}_i^P$  es la fuerza que se ejerce sobre la  $i$ -ésima partícula (Bittencourt, 2004) debido a las colisiones con las paredes del contenedor, por lo que se escribe el diferencial de dicha fuerza como  $d\mathbf{F}_i^P = -P\mathbf{n}dA$ , donde el vector  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie de la pared del contenedor. Así, su contribución a la energía potencial total del sistema es

$$-\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i^P \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle = \frac{P}{2} \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dA = \frac{3}{2} PV, \quad (71)$$

y  $\mathbf{F}_i^C$  es la fuerza de Coulomb que ejercen todas las partículas del sistema sobre la  $i$ -ésima partícula.

Asumiendo un par de iones  $j, k$  con cargas  $Z_j e, Z_k e$  y ubicadas en posiciones  $\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k$  respec-

tivamente, la fuerza que ejerce  $k$  sobre  $j$  es

$$\mathbf{f}_{jk} = \frac{Z_j Z_k e^2}{r_{jk}^3} \mathbf{r}_{jk}, \quad (72)$$

donde  $\mathbf{r}_{jk} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ . Y la energía potencial de  $j$  debido a la presencia de  $k$  es

$$U_{jk} = \mathbf{f}_{jk} \cdot \mathbf{r}_{jk} = \frac{Z_j Z_k e^2}{r_{jk}}, \quad (73)$$

de esta manera, se deduce que la energía potencial de todo el sistema de partículas debido a las fuerzas de Coulomb es

$$\sum_i \mathbf{F}_i^C \cdot \mathbf{r}_i = \sum_{\text{todos los pares } j,k} U_{jk}. \quad (74)$$

Ya que la energía potencial de  $j$  debido a  $k$  es igual que la de  $k$  debido a  $j$ , entonces la energía potencial total del sistema se puede escribir como

$$\sum_{\text{todos los pares } j,k} U_{jk} = \frac{1}{2} \sum_i Z_i e \varphi'_i, \quad \varphi'_i = \sum_{j \neq i} \frac{Z_j e}{r_{ij}}, \quad (75)$$

donde  $\varphi'_i$  es el potencial experimentado por el  $i$ -ésimo ion debido a las fuerzas de Coulomb de los demás iones del plasma.

Reescribiendo (74) en términos de las especies de los iones y tomando su promedio tempo-

ral, se obtiene la siguiente expresión

$$\langle \sum_i \mathbf{F}_i^C \cdot \mathbf{r}_i \rangle = \frac{1}{2} \langle \sum_i Z_i e \varphi_i' \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} N_{\alpha} V Z_{\alpha} e \langle \varphi_{\alpha}' \rangle, \quad (76)$$

donde el promedio temporal del potencial electrostático es el potencial según la teoría de Debye-Hückel de la ecuación (66) menos el potencial del ion

$$\langle \varphi_{\alpha}' \rangle = \left[ \langle \varphi_{\alpha}(r) \rangle - \frac{Z_{\alpha} e}{r} \right] \Big|_{r=0} = \left[ \frac{Z_{\alpha} e}{r} e^{-r/\lambda_D} - \frac{Z_{\alpha} e}{r} \right] \Big|_{r=0} = \left[ \frac{Z_{\alpha} e}{r} (e^{-r/\lambda_D} - 1) \right] \Big|_{r=0}, \quad (77)$$

realizando la expansión en series de Taylor de la función  $f(r) = e^{-r/\lambda_D} - 1$ , alrededor de  $r = 0$ , se obtiene que

$$f(r) \simeq \left[ e^{-r/\lambda_D} - 1 \right] \Big|_{r=0} + \left[ -\frac{1}{\lambda_D} e^{-r/\lambda_D} \right] \Big|_{r=0} (r-0) + \mathcal{O}[r]^2 \approx -\frac{r}{\lambda_D}, \quad (78)$$

reemplazando este resultado en la ecuación (77), se encuentra el potencial promedio que actúa sobre un ion de carga  $Z_{\alpha} e$

$$\langle \varphi_{\alpha}' \rangle \simeq -\frac{Z_{\alpha} e}{\lambda_D}, \quad (79)$$

entonces la energía potencial debido a las fuerzas de Coulomb obtenida en (76) se puede reescribir como

$$\langle \sum_i \mathbf{F}_i^C \cdot \mathbf{r}_i \rangle = -\frac{e^2}{2} \sum_{\alpha} \frac{N_{\alpha} Z_{\alpha}^2 V}{\lambda_D}, \quad (80)$$

y de esta manera, se puede expresar la contribución de las fuerzas de Coulomb a la energía potencial

total del sistema como

$$-\frac{1}{2}\langle \sum_i \mathbf{F}_i^C \cdot \mathbf{r}_i \rangle = \frac{e^2}{4} \sum_{\alpha} \frac{N_{\alpha} Z_{\alpha}^2 V}{\lambda_D} = \frac{e^3}{2} \left( \frac{\pi}{k_B T} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} (N_{\alpha} Z_{\alpha}^2)^{3/2} V. \quad (81)$$

Utilizando las expresiones (69), (71), (81), se obtiene la ecuación de estado de un plasma parcialmente ionizado (Kelly, 1963)

$$P = \sum_{\alpha} N_{\alpha} k_B T \left( 1 - \frac{1}{18\mathbb{N}} \right), \quad (82)$$

donde  $\mathbb{N}$  representa el número de iones dentro de la esfera de Debye. Cuando  $\mathbb{N} \gg 1$  las partículas interactúan con otras partículas dentro de su esfera de Debye, pero no produce cambios abruptos en su movimiento e implica que el plasma se pueda modelar como un gas ideal.

## Apéndice B. Transporte de Flujo Restringido

El método de transporte de flujo restringido (FCT por sus siglas en inglés) se basa en la integración de la ley de Faraday en cada elemento de volumen, con la finalidad de discretizar los campos magnéticos para que al evolucionarlos se satisfaga con errores de precisión numérica la ausencia de monopolos magnéticos (Evans and Hawley, 1988), si en principio  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ .

Teniendo que en el marco de referencia del fluido, el campo eléctrico es despreciable  $\vec{E}' \sim 0$  y en el marco de referencia Euleriano  $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B} = 0$ , se obtiene una relación entre el campo eléctrico y magnético en el marco de referencia Euleriano  $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$ . Por otro lado, se define  $\vec{\Omega} = \vec{v}_i \times \vec{B}$  de tal manera que la ley de Faraday en términos de esta nueva variable se escribe como

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{\Omega}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (83)$$

donde la ligadura del campo magnético garantiza la ausencia de monopolos magnéticos y por tanto se debe cumplir para poder obtener resultados válidos físicamente. Partiendo de dicha ligadura (83) e integrándola en un volumen  $V$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A}_1 + \dots + \int_{A_6} \vec{B} \cdot d\vec{A}_6 = 0, \quad (84)$$

siendo cada  $dA_j$  el elemento de área de cada una de las caras del cubo infinitesimal  $dV$ , el cual se ilustra en la figura 21, se obtiene que la relación entre la ligadura y la ecuación (83) se expresa como

$$\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l}. \quad (85)$$

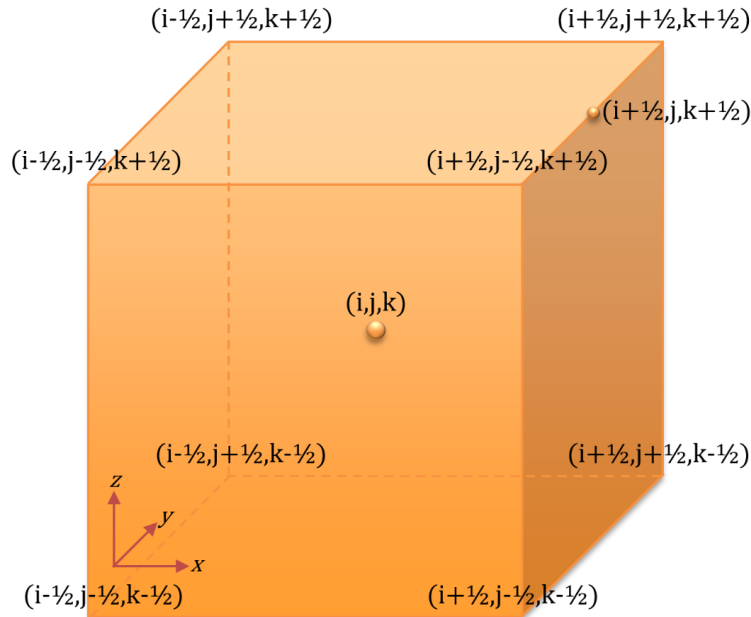


Figura 21. Elemento de volumen de la intercelda centrado en un punto arbitrario  $(i, j, k)$  perteneciente a la malla numérica.

A continuación se realiza un procedimiento con la finalidad de hallar la evolución temporal de cada componente del campo magnético empezando por la componente  $x$ , de tal manera que se utiliza la cara lateral derecha denotada como  $A_1$ , la cual se muestra en la figura 22. Se desarrolla la integral cerrada de (85) en dicha cara, de manera que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A}_1 &= \oint_{\partial A_1} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k-1/2}) \cdot \hat{y} dy + \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot \hat{z} dz \\ &\quad - \int_{j-1/2}^{j+1/2} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot \hat{y} dy - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j-1/2}, z) \cdot \hat{z} dz, \end{aligned} \quad (86)$$

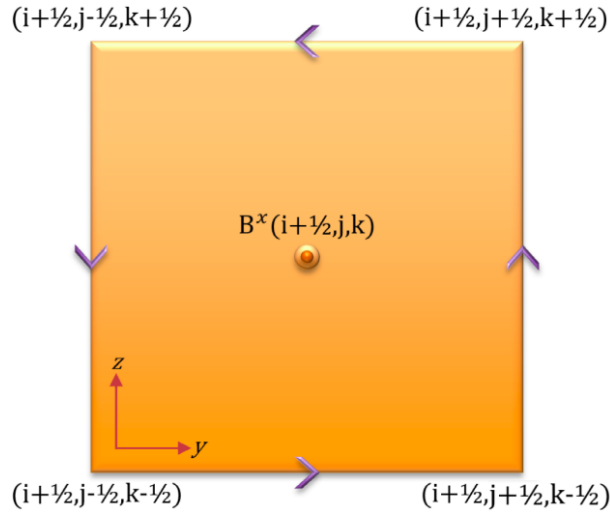


Figura 22. Cara lateral derecha del elemento de volumen de la figura 21.

donde los valores de las componentes de  $\vec{\Omega}$  en el centro de las aristas del cubo se calculan como los promedios de los valores  $\Omega^i$  a lo largo de cada arista y de igual manera se define el valor de la componente  $x$  del campo magnético ( $B^x$ ) en el centro del cubo como el promedio de dicha componente del campo en toda la cara  $A_1$ , es decir

$$\Omega^y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\Delta y} \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot \hat{y} dy,$$

$$\Omega^z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = \frac{1}{\Delta z} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot \hat{z} dz,$$

$$B^x(i + \frac{1}{2}, j, k) = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A}_1,$$

sustituyendo las definiciones anteriormente mencionadas en la ecuación (86) se obtiene la expresi-

sión

$$\begin{aligned} \frac{dB^x(i+\frac{1}{2},j,k)}{dt} = & \frac{1}{\Delta y} [\Omega^z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) - \Omega^z(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)] \\ & - \frac{1}{\Delta z} [\Omega^y(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - \Omega^y(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})], \end{aligned} \quad (87)$$

la cual representa la ecuación de evolución de la componente  $x$  del campo magnético en el centro de la cara  $A_1$ . Se lleva a cabo un desarrollo similar para las otras dos caras (posterior y superior) y se obtienen las ecuaciones de evolución para las componentes  $y, z$  del campo magnético en el centro de dichas caras.

Para el cálculo de los valores de las componentes de  $\vec{\Omega}$  en las aristas, es necesario acudir a los flujos adyacentes, representados en la figura 23, los cuales se definen como

$$F^{lm} \equiv v^l B^m - v^m B^l, \quad (88)$$

donde  $F^{lm}$  es el flujo que apunta en la dirección  $l$  para la componente  $m$  del campo magnético, de tal manera que se cumple lo siguiente

$$\Omega^x = -F^{zy} = F^{yz}, \quad \Omega^y = F^{zx} = -F^{xz}, \quad \Omega^z = -F^{yx} = F^{xy}, \quad (89)$$

por lo tanto, la  $n$ -ésima componente de  $\vec{\Omega}$  en la arista se calcula como el promedio de los valores

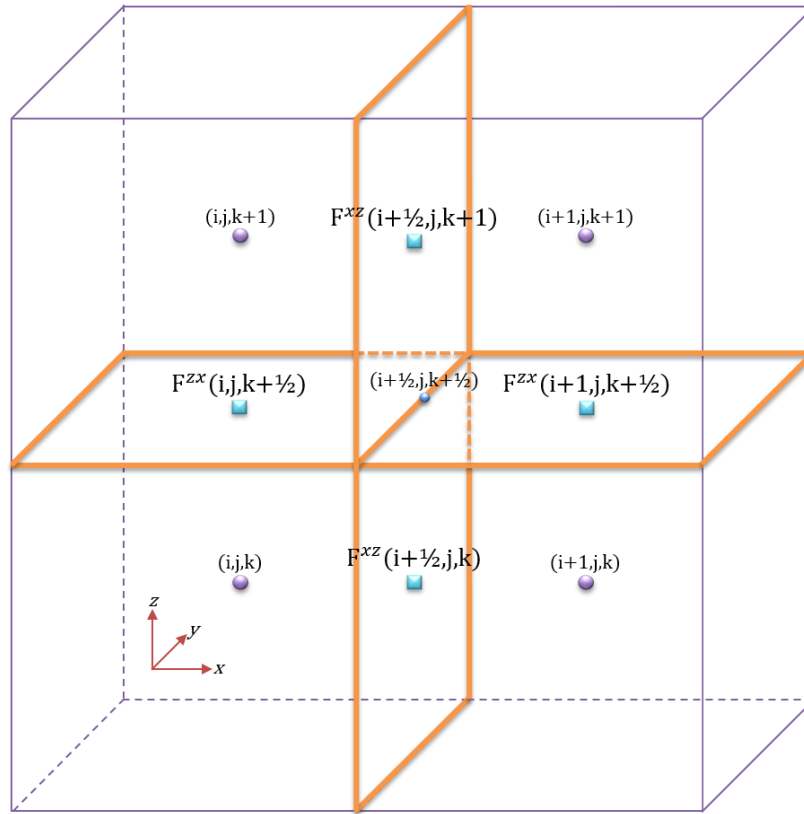


Figura 23. Flujos en las caras de los cubos de las interceldas, los que son necesarios para calcular  $\Omega^y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})$ .

dicha componente de  $\vec{\Omega}$  en las caras adyacentes, lo cual en término de los flujos es

$$\Omega^x(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} [F^{yz}(i, j + \frac{1}{2}, k) + F^{yz}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - F^{zy}(i, j, k + \frac{1}{2}) - F^{zy}(i, j + 1, k + \frac{1}{2})], \quad (90)$$

$$\Omega^y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} [F^{zx}(i, j, k + \frac{1}{2}) + F^{zx}(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - F^{xz}(i + \frac{1}{2}, j, k) - F^{xz}(i + \frac{1}{2}, j, k + 1)], \quad (91)$$

$$\Omega^z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = \frac{1}{4} [F^{xy}(i + \frac{1}{2}, j, k) + F^{xy}(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) - F^{yx}(i, j + \frac{1}{2}, k) - F^{yx}(i + 1, j + \frac{1}{2}, k)], \quad (92)$$

los cuales están evaluados en los centros de las caras y por tanto se calculan como el promedio de los puntos adyacentes que pertenecen a la malla

$$\begin{aligned} F^{xp}(i + \frac{1}{2}, j, k) &= \frac{1}{2} [F^{xp}(i, j, k) + F^{xp}(i + 1, j, k)], \\ F^{yp}(i, j + \frac{1}{2}, k) &= \frac{1}{2} [F^{yp}(i, j, k) + F^{yp}(i, j + 1, k)], \\ F^{zp}(i, j, k + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} [F^{zp}(i, j, k) + F^{zp}(i, j, k + 1)], \end{aligned} \quad (93)$$

donde los valores de la parte derecha de las ecuaciones (93) se encuentran siguiendo la definición de flujo mostrada en la ecuación (88) para cada punto de la malla. De esta manera se completa el método FCT ya que se conocen los flujos, los cuales permiten calcular la evolución de las componentes del campo magnético con las componentes de  $\vec{\Omega}$ , garantizando de esta manera que la condición de ausencia de monopolos magnéticos se cumpla numéricamente (Lora-Clavijo et al., 2015). La evolución de los campos magnéticos en las caras del cubo se promedian para obtener dicha evolución en los puntos de la malla y posteriormente mediante un integrador se calculan los campos magnéticos en la malla.