

*Soluciones exactas de las ecuaciones de  
Einstein para modelos cosmológicos anisótropos  
de Bianchi tipo I con parámetro de  
desaceleración constante*

JOHN HADDER SANDOVAL QUESADA



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2012

*Soluciones exactas de las ecuaciones de  
Einstein para modelos cosmológicos anisótropos  
de Bianchi tipo I con parámetro de  
desaceleración constante*

JOHN HADDER SANDOVAL QUESADA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
FÍSICO

DIRECTOR  
GUILLERMO ALFONSO GONZÁLEZ VILLEGAS, PH.D.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2012



*“Hay un momento en que todos los obstáculos se derrumban, todos los conflictos se apartan, y a uno se le ocurren cosas que no había soñado, y entonces no hay en la vida nada mejor que escribir”*

*Gabriel García Márquez*

---

---

## Dedicado a

---

---

*Mi familia:*

*A mi madre, quien alienta y alimenta mis sueños.*

*A mi padre, el hombre más incondicional que me enseñó la grandeza de la humildad, gestor de mi interés por la ciencia y apoyo incondicional en todos los aspectos de la vida.*

*A mis hermanas, protectoras de mi niñez y grandes maestras en la vida.*

*A mi abuela, que desde los cielos me cuida.*

---

---

## Agradecimientos

---

---

Un trabajo de grado no es un proyecto solitario que sólo le interesa al autor de éste, por el contrario es la suma muchas horas de esfuerzo de incontables personas luchando a su lado y apoyando a esta persona con el propósito que cada minuto gastado le haya contribuido en una perspectiva diferente para el propósito de éste. Y por eso sería un acto de vanidad no agradecer a todos y cada una de las personas que están y estarán presente en el corazón de este autor.

Con mucho cariño quiero agradecer a todos los miembros del grupo GIRG (Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación)

A mi director del proyecto Guillermo Alfonso González Villegas por el apoyo brindado en la creación de esta tesis, al profesor Yeinzon Rodríguez, al profesor Luis N., a mis compañeros y amigos Christian S., Liliana G., Diego B., Andrés N., Jerson R., Fernando Q., Óscar P., Carlos N., a mis compañeros de la carrera Diego A., Johana R., Laura Ch., Sara I. con quienes compartí momentos agradables, divertidos y emotivos, a mis tios Leonardo A., Alvaro A. y Marina M., y a Derly G. con quien compartí y aprendí gran parte en la estadía en esta universidad.

A mi cabo querido, que los considero mis hermanos, siempre orgullosos de los logros y metas cumplidas de nuestra gente, a Lissy B., Sergio G., Laura A., José S., Laura A., Yesid D., Laura C., Silvia F., Andrea G., a todos ellos gracias por estar siempre presentes.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>14</b>
<b>1. Modelo y ecuaciones de campo</b>	<b>17</b>
1.1. Modelo cosmológico estándar y modelo cosmológico de Bianchi tipo I	17
1.1.1. Modelo cosmológico estándar . . . . .	17
1.1.2. Modelo cosmológico de Bianchi tipo I . . . . .	18
1.1.2.1. Simetrías y vectores de Killing del modelo de Bianchi tipo I . . . . .	18
1.1.2.2. Variables cinemáticas del modelo Bianchi tipo I . . . . .	19
1.2. Cantidades fundamentales en cosmología . . . . .	21
1.2.1. Parámetro de Hubble . . . . .	21
1.2.2. Parametro de desaceleración . . . . .	24
1.3. Ecuaciones de campo de Einstein para un fondo anisótropo Bianchi tipo I . . . . .	24
1.4. Ley de variación del parámetro de Hubble . . . . .	27
<b>2. Variación del parámetro de Hubble y solución de las ecuaciones de campo</b>	<b>28</b>
2.1. Formulación de la variación del parámetro de Hubble . . . . .	28
2.2. Forma integral de los factores de escala . . . . .	30

---

2.3. Modelo cosmológico para $n \neq 0$ . . . . .	31
2.3.1. Factores de escala y componentes del tensor momentum-energía	31
2.3.2. Variables cinemáticas . . . . .	32
2.3.3. Comportamiento físico del modelo . . . . .	33
2.4. Modelo cosmológico para $n=0$ . . . . .	35
2.4.1. Factores de escala y componentes del tensor momentum-energía	35
2.4.2. Variables cinemáticas . . . . .	36
2.4.3. Comportamiento físico del modelo . . . . .	37
<b>Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>Trabajo futuro</b>	<b>40</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>41</b>
<b>A</b>	<b>43</b>
<b>B</b>	<b>46</b>

---

---

## Índice de tablas

---

---

- 2.1. Variables cosmológicas: Se muestra como evolucionan en el tiempo  
las variables cosmológicas, para el caso en que  $n \neq 0$  . . . . . 34
- 2.2. Variables cosmológicas: Se muestra como evolucionan en el tiempo  
las variables cosmológicas, para el caso en que  $n = 0$  . . . . . 38

## Índice de figuras

- 1.1. Relación de proporcionalidad de la velocidad de recesión de las galaxias: suponiendo que nuestra galaxia se encuentra ubicada en el punto 0 de la regla, y cuatro galaxias mas llamadas A, B, C, D se encuentran a 1 cm, 2 cm, 3 cm y 4 cm respectivamente mostrada en la imagen superior, inicialmente se encuentran en reposo, a una distancia fija, pero a medida que transcurre el tiempo, estas se empiezan a estirar hasta el punto donde la galaxia A alcance el doble de su distancia original, se puede ver en la imagen inferior de está figura, que las galaxias restantes B, C, D también alcanzan una distancia nueva, que es proporcional a la distancia original que tenían de el punto 0. . . . . 22
- 1.2. No hay un punto preferencial en el universo: Esta imagen nos muestra que no existe un punto preferencial en la expansión del universo, pues aquí tenemos dos imágenes superpuestas, una a escala del 100 % y otra ampliada a el 105 % la cual representa una expansión del universo, cuando se busca un punto en común en las dos imágenes, esta muestra como los demás puntos aparentemente se alejan del punto en común. 23

---

# Resumen

## **Título**

Soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein para modelos cosmológicos anisótropos de Bianchi tipo I con parámetro de desaceleración constante.<sup>1</sup>

**Autor:** Sandoval Quesada, John Hadder.<sup>2</sup>

**Palabras clave:** Parámetro de Hubble, Parámetro de desaceleración, Modelos cosmológicos, Espacio-tiempo de Bianchi.

**Resumen:** En el estudio de la cosmología moderna se ha empezado a trabajar en modificar el modelo estándar, para hacer de éste, un modelo con mayores adaptaciones a las observaciones recientes del universo, pues mapas de la radiación del fondo cósmico (**RFC**) tomados por el WMAP[1] muestran ciertas anomalías como, la baja potencia en los momentos cuadrupolares, [1][2][3] el alineamiento de los multipolos más bajos[4][5] y la ruptura de la invariancia rotacional,[6][7] parecen estar en conflicto con la imagen estándar de la cosmología moderna sugiriendo la idea de la existencia de una dirección preferencial en el universo. Estos estudios observacionales de la radiación del fondo cósmico y las especulaciones sobre la cantidad de helio formado en las etapas iniciales de la evolución del universo han estimulado el interés teórico en modelos cosmológicos anisótropos. En el presente trabajo de grado se presenta una variación especial para el parámetro de Hubble que esta relacionada con el valor medio del factor de escala en un espacio-tiempo homogéneo y anisótropo Bianchi Tipo I que conlleva a un valor constante del parámetro de desaceleración que permite describir las diferentes fases de evolución del universo, propuesta por los autores S. Kumar y C.P. Singh [8]. Usando la ley de variación del parámetro de Hubble, se obtienen soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein para una métrica de Bianchi Tipo I llena con un fluido perfecto, para dos casos diferentes, cuando el universo exhibe expansión en forma de ley de potencia y cuando es de forma exponencial. Se lleva a cabo un estudio de las variables cinemáticas de los modelos y algunas propiedades físicas de la materia como lo son la densidad de energía y la presión.

---

<sup>1</sup>Trabajo de Grado

<sup>2</sup>Facultad de Ciencia, Escuela de Física, Guillermo A. González (Director).

---

# Abstract

**Title**

Exact solutions for Einstein's field equations for anisotropic Bianchi Type-I models with a constant value for the deceleration parameter.<sup>3</sup>

**Author:** Sandoval Quesada, John Hadder..<sup>4</sup>

**Keywords:** Hubble's parameter, Deceleration parameter, Cosmological models, Bianchi space-time.

**Abstract:** In the study of modern cosmology has begun work on modifying the standard model of cosmology, to make this a model with higher adaptations to recent observations of the universe, because maps of the cosmic microwave background (**CMB**) taken by the WMAP[1] shown certain anomalies as, the low power quadrupole moments[1][2][3], the alignment of the lower multipole[4][5] and the breaking of rotational invariance[6][7], which seem to conflict with the standard picture of modern cosmology suggesting the idea of the existence a preferred direction in the universe. These observational studies of the cosmic microwave background and speculation about the amount of helium formed in the early stages of the universe's evolution have stimulated the theoretical interest in anisotropic cosmological models. In this degree work we present a special law of variation for Hubble's parameter in a spatially homogeneous and anisotropic Bianchi type I space-time that yields a constant value for the deceleration parameter proposed by Kumar and Singh [8]. Using the law of variation for Hubble's parameter, exact solutions of Einstein's field equations are obtained for Bianchi-I space-time filled with a perfect fluid for two different cases, in the first one, the universe exhibits a power-law expansion; in the second one the universe experiences an exponential expansion. Finally a detailed study of physical and kinematic variables of the models is carried out.

---

<sup>3</sup>Degree Work

<sup>4</sup>Facultad de Ciencia, Escuela de Física, Guillermo A. González (Advisor).

---

---

## Introducción

---

---

La piedra angular de la cosmología es la creencia que el lugar el cual nosotros ocupamos en el universo no es de ninguna manera especial. Esto es conocido como el **principio cosmológico** y es una idea sencilla y revolucionaria, pues por siglos en la historia de la humanidad siempre hemos creído ocupar un lugar especial y usualmente estamos en el centro de las cosas. El modelo del Big Bang está basado en el principio cosmológico y gracias al descubrimiento de Hubble en 1929 del corrimiento al rojo de la luz proveniente de las galaxias[9], nos sugiere un universo en expansión y en 1965 el descubrimiento de Penzias y Wilson de la radiación del fondo cósmico (**RFC**) [10] nos brindaron evidencias observacionales de que el universo inició como un estado denso y caliente; este modelo es una de las mejores descripciones que tenemos para nuestro universo.

Pero el principio cosmológico no es del todo exacto, un ejemplo es que nadie piensa que estar sentado en una biblioteca es exactamente lo mismo que estar sentado en un bar y el interior del sol es un ambiente totalmente diferente a las regiones del medio interestelar. De acuerdo con esto, el principio cosmológico es una aproximación que creemos se mantiene cada vez mejor, cuanto mayores sean las escalas de longitudes que nosotros consideramos. Incluso con la escalas de las galaxias, este principio no es muy bueno, pero una vez tomemos una región mucho más grande que puede contener millones de galaxias (aun una región que contenga millones de galaxia continúa siendo una región mucho más pequeña que el universo mismo) esperamos que este principio cosmológico se cumpla y que cada región se vea más o menos igual al resto de regiones tomadas.

En el estudio de la cosmología moderna se ha empezado a trabajar en modificar el modelo estándar de la cosmología para hacer de éste un modelo con mayores adaptaciones a las observaciones recientes del universo, pues mapas de la radiación

del fondo cósmico (**RFC**) tomados por el WMAP (por sus siglas en ingles Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)[1] muestran ciertas anomalías, como la baja potencia en los momentos cuadrupolares [1, 2, 3], el alineamiento de los multipolos más bajos[4, 5] y la ruptura de la invariancia rotacional [6, 7], que parecen estar en conflicto con la imagen estándar de la cosmología moderna. Estos estudios observacionales de la radiación del fondo cósmico y las especulaciones sobre la cantidad de helio formado en las etapas iniciales de la evolución del universo han estimulado el interés teórico en modelos cosmológicos anisótropos [11].

La anisotropía en la expansión cósmica, la cual se supone que es amortiguada en el curso de la evolución cósmica, es una cantidad importante, pues recientes datos observacionales como los de supernovas tipo I [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] y argumentos críticos, apoyan la existencia de una fase anisótropa de expansión que se aproxima a una isotropa. Esto es de suma importancia cuando se trabajan modelos anisótropos del universo, ya que se requiere que la anisotropía en la expansión decaiga rápidamente y evolucione hacia la isotropía. La introducción de una fase anisótropa de expansión en la evolución del universo no es una tarea sencilla y existen varios métodos usados para generar esta fase, uno de estos, es incluir campos vectoriales, los cuales gracias a su naturaleza de dirección preferencial generan en los modelos cosmológicos una dirección preferente de expansión, pero debido a esto, causan la pérdida de la suposición de isotropía[21] del universo. Otro método de generación de esta fase anisótropa de expansión es por medio de la consideración de modelos del universo con fondo anisótropo, un ejemplo de estos son la familia de modelos de Bianchi. De estos modelos, el mas simple es el Bianchi tipo I, el cual es homogéneo y cuya sección espacial es plana, pero la tasa de expansión o contracción es dependiente de la dirección [22].

En el presente trabajo, se estudiará un nuevo método para obtener soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein, en un modelo cosmológico anisótropo y homogéneo cuyo fondo es un espacio-tiempo de Bianchi tipo I en el marco de la gravedad de Einstein. El interés se centrará en mostrar que por medio de la variación del parámetro de Hubble [8] es posible obtener soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein y las soluciones obtenidas son físicamente viables cuando se estudian las variables cinemáticas y algunas cantidades cosmológicas fundamentales, además de esto, se logra producir una expansión anisótropa generando así una dirección preferencial en el universo.

Este trabajo de grado esta dividido en dos capítulos con el siguiente contenido: en el capítulo 1 se establecerán algunos conceptos básicos de la cosmología moderna, seguido de esto, se mostrará el modelo anisótropo y homogéneo de Bianchi tipo I con el fin de hallar las ecuaciones de campo de Einstein y por último se mencionaran dos

---

formas de solucionar el sistema de ecuaciones de campo de Einstein. En el capítulo 2 se dará a conocer la variación especial del parámetro de Hubble, que es el camino alternativo para dar soluciones exactas al sistema de ecuaciones que salen de la relatividad general, además de esto, las ecuaciones de campo de Einstein serán escritas de forma que éstas queden como funciones explícitas del factor de escala promedio para así, darle solución al sistema de ecuaciones con ayuda de la ley de variación del parámetro de Hubble. Las soluciones obtenidas resultaron en dos modelos cosmológicos los cuales son analizados con ayuda de las variables cinemáticas y algunas cantidades fundamentales cosmológicas. Finalmente se darán unas conclusiones.

# CAPÍTULO 1

---

---

## Modelo y ecuaciones de campo

---

---

En este capítulo enunciaremos el principio cosmológico y definiremos algunas cantidades fundamentales tales como el parámetro de Hubble y el parámetro de desaceleración. Además de esto, se hallarán las ecuaciones de Einstein para un modelo cosmológico de Bianchi tipo I, las cuales serán resueltas más adelante en este trabajo de grado.

### 1.1. Modelo cosmológico estándar y modelo cosmológico de Bianchi tipo I

#### 1.1.1. Modelo cosmológico estándar

El modelo cosmológico estándar está basado en el principio cosmológico, el cual asegura que el universo cuando se observa a escalas del orden de cientos de megaparsecs ( $\gtrsim 100$  Mpc), es isótropo y homogéneo. Este principio está establecido en las siguientes hipótesis:

- No hay un punto preferencial en el universo, las galaxias se distribuyen uniformemente en el espacio a gran escala. El universo es homogéneo
- No hay una dirección preferencial en el universo, las galaxias se distribuyen uniformemente en diferentes direcciones angulares a gran escala. El universo es isótropo.

Al entender isotropía y homogeneidad como invariancias bajo rotación y traslación respectivamente, estas implican que el espacio tiempo, tiene el mayor numero de vectores de Killing posible y por lo tanto es altamente simétrico. Es bien conocido que la métrica que cumple estos requerimientos es la de Friedmann-Robetson-Walker (**FRW**)[23, 24, 25, 26].<sup>1</sup>

### 1.1.2. Modelo cosmológico de Bianchi tipo I

Los modelos cosmológicos de Bianchi difieren un poco del modelo cosmológico estándar en que estos no asumen la hipótesis de isotropía del universo, pero sí la proposición de que el universo es homogéneo a gran escala. Por lo tanto es valido decir que los modelos cosmológicos de Bianchi describen muy bien los modelos cosmológicos homogéneos[22].

El modelo homogéneo de Bianchi tipo I cuya sección espacial es plana[11] pero la tasa de expansión o contracción es dependiente de la dirección, está descrito por el siguiente elemento de línea.

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(t)dx^2 + B^2(t)dy^2 + C^2(t)dz^2, \quad (1.1)$$

donde,  $A(t)$ ,  $B(t)$  y  $C(t)$  son los factores de escala dependientes del tiempo cósmico  $t$ . Y el factor de escala promedio para este modelo está dado por

$$a = (ABC)^{1/3}, \quad (1.2)$$

el cual caracteriza la expansión global del modelo.

#### 1.1.2.1. Simetrias y vectores de Killing del modelo de Bianchi tipo I

Como se ha mencionado en esta sección, el modelo cosmológico Bianchi tipo I puede describir un espacio tiempo homogéneo y esto es debido a la invariancia ante traslaciones que posee este modelo. Ahora, para encontrar las invariancias que posee el modelo se usaran los vectores de Killing, ya que son útiles cuando se piensa describir las propiedades de simetría del espacio.

Por inspección de la métrica, si ésta cumple que no es dependiente de cierta coordenada, se puede escribir que  $g_{\alpha\beta,\alpha} = 0$ , entonces, la derivada de Lie se escribe

<sup>1</sup>En el apéndice A se analiza más formalmente el modelo de FRW

como  $\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = 0$  y por lo tanto se le puede asociar un vector de Killing a dicha coordenada. Usando lo mencionado, esta métrica de Bianchi tipo I no depende de las coordenadas espaciales  $x, y, z$  y por lo tanto podríamos escribir lo siguiente [27]

$$\begin{array}{lll}
 \text{Derivadas} & \text{Vectores de Killing} & \text{Operadores diferenciales} \\
 g_{\alpha\beta,x} = 0 & \xi_{(x)}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x} = \delta_1^\alpha & L_{\xi_x} = \xi_{(x)}^\alpha \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x} = (\nabla)_x \sim \hat{P}_x \\
 g_{\alpha\beta,y} = 0 & \xi_{(y)}^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial y} = \delta_2^\alpha & L_{\xi_y} = \xi_{(y)}^\alpha \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial y} = (\nabla)_y \sim \hat{P}_y \\
 g_{\alpha\beta,z} = 0 & \xi_{(z)}^\alpha = \frac{\partial z^\alpha}{\partial z} = \delta_3^\alpha & L_{\xi_z} = \xi_{(z)}^\alpha \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial z} = (\nabla)_z \sim \hat{P}_z
 \end{array} \tag{1.3}$$

Las cantidades conservadas están altamente relacionadas y van en la misma dirección de los vectores de Killing, entonces, de las ecuaciones (1.3), vemos que el operador asociado a esos tres vectores de Killing es el momentum, y como se conoce muy bien, el operador momentum es el generador de las traslaciones espaciales, de lo cual, es posible afirmar que, el modelos es invariante ante traslaciones espaciales y ya que se entiende homogeneidad como una invariancia ante traslaciones podemos concluir que el modelo de Bianchi tipo I es un modelo homogéneo.

### 1.1.2.2. Variables cinemáticas del modelo Bianchi tipo I

Para hallar las variables cinemáticas del modelo Bianchi tipo I con una métrica descrita por la ecuación (1.1), se considerará un cuadvivector tipo tiempo, el cual puede ser asociado a la cuadvivelocity  $u_\alpha = (-1, 0, 0, 0)$  y del cual, con ayuda de la derivada covariante podremos definir cantidades como:

la aceleración definida como [27]

$$a_\alpha = \dot{u}_\alpha = u^\beta u_{\alpha;\beta}, \tag{1.4}$$

que para este modelo queda

$$a_\alpha = (0, 0, 0, 0), \tag{1.5}$$

la expansión se define como [27]

$$\Theta = u^\alpha_{;\alpha}, \tag{1.6}$$

y para este modelo se expresa como

$$\Theta = \frac{(\dot{A}\dot{B}\dot{C})}{ABC}, \quad (1.7)$$

ahora, la vorticidad se define como [27]

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha;\beta} - u_{\beta;\alpha}) + \frac{1}{2}(\dot{u}_{\alpha}u_{\beta} - \dot{u}_{\beta}u_{\alpha}) = 0, \quad (1.8)$$

quedando para el modelo

$$\omega_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.9)$$

y el shear se define como [27]

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}) + \frac{1}{2}(\dot{u}_{\alpha}u_{\beta} + \dot{u}_{\beta}u_{\alpha}) - \frac{\Theta}{3}h_{\alpha\beta},$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A^2(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\Theta}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2B^2(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\Theta}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C^2(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\Theta}{2}) \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

donde  $h_{\alpha\beta}$  es la métrica inducida y se define como

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_{\alpha}u_{\beta},$$

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^2 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

y por ultimo el shear escalar [27]

$$\sigma^2 = \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta},$$

$$\sigma^2 = 4 \left[ \left( \frac{\dot{A}}{A} \right)^2 + \left( \frac{\dot{B}}{B} \right)^2 + \left( \frac{\dot{C}}{C} \right)^2 \right] - \Theta^2. \quad (1.12)$$

Para entender mejor las implicaciones de las ecuaciones anteriores, tomaremos en consideración una esfera de fluido la cual se le irán aplicando las acciones de las variables cinemáticas como la expansión, el shear y la vorticidad y observaremos los cambios producidos a ésta esfera a medida que transcurra un pequeño intervalo de tiempo. Entonces, escogiendo el origen como el centro de la esfera y asumiendo que el cuadvivector  $u_\alpha$  está sobre la superficie de la esfera. La acción única de  $\Theta$  transforma el fluido esférico en una esfera similar de volumen diferente, pero con la misma orientación. La acción única de  $\sigma_{\alpha\beta}$  distorsiona la esfera, dejando su volumen constante y las direcciones de los ejes principales del shear sin cambios. Y finalmente, la acción única de  $\omega_{\alpha\beta}$  es dar una rotación rígida dejando una dirección (el eje de rotación) fijo[27, 28].

Estas variables cinemáticas nos ayudarán más adelante en el capítulo (2) para dar cuenta de las propiedades físicas que el modelo pueda presentar, dando un análisis detallado de la evolución del modelo, según estas variables.

## 1.2. Cantidades fundamentales en cosmología

### 1.2.1. Parámetro de Hubble

El parámetro de Hubble  $H_o$ , el cual nos habla de la tasa de expansión presente del universo, es en muchas formas una de las cantidades más importantes para la cosmología. Hubble en 1929 descubrió que entre más lejanas las galaxias de nosotros[9], éstas se alejan a mayor velocidad y propuso una relación lineal entre la velocidad de retroceso y la distancia,  $v = H_o r$ , pero es posible para este parámetro de proporcionalidad evolucionar en el tiempo, en otras palabras el parámetro de Hubble no es constante en el tiempo. En la figura 1.1 se muestra la relación lineal que propuso Hubble para la velocidad de recesión de las galaxias.

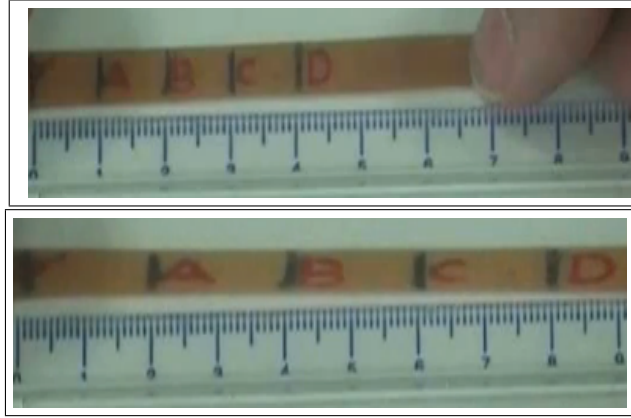


FIGURA 1.1. Relación de proporcionalidad de la velocidad de recesión de las galaxias: suponiendo que nuestra galaxia se encuentra ubicada en el punto 0 de la regla, y cuatro galaxias más llamadas A, B, C, D se encuentran a 1 cm, 2 cm, 3 cm y 4 cm respectivamente mostrada en la imagen superior, inicialmente se encuentran en reposo, a una distancia fija, pero a medida que transcurre el tiempo, estas se empiezan a estirar hasta el punto donde la galaxia A alcance el doble de su distancia original, se puede ver en la imagen inferior de esta figura, que las galaxias restantes B, C, D también alcanzan una distancia nueva, que es proporcional a la distancia original que tenían de el punto 0.

De acuerdo a lo anterior, es natural que surja una pregunta, ¿nuestra galaxia está situada en un lugar especial del universo o es el centro de éste y las otras galaxias se están alejando de nosotros?. Una reflexión demuestra que esta ley implica que el universo, está experimentando una expansión uniforme y una ley como la ley de Hubble parece ser cierta en cualquier punto en el universo[29]. La figura (1.2) es un ejemplo de la no existencia de un punto de preferencia de expansión.

De acuerdo a lo referido, la velocidad de recesión está dada por  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  y está en la misma dirección que  $\vec{r}$  para el cual usando  $\vec{r} = a\vec{x}$  y recordando que la posición en el sistema comóvil  $\vec{x}$  es constante por definición, podemos escribir la velocidad como

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}, \quad (1.13)$$

donde podemos identificar el parámetro de Hubble como una constante de proporcionalidad

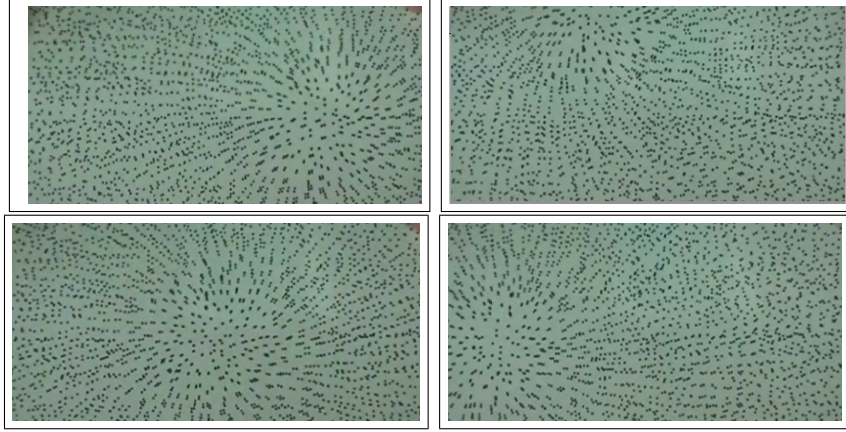


FIGURA 1.2. No hay un punto preferencial en el universo: Esta imagen nos muestra que no existe un punto preferencial en la expansión del universo, pues aquí tenemos dos imágenes superpuestas, una a escala del 100 % y otra ampliada a el 105 % la cual representa una expansión del universo, cuando se busca un punto en común en las dos imágenes, esta muestra como los demás puntos aparentemente se alejan del punto en común.

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.14)$$

y con ayuda de la ecuación (1.2) podemos hallar el parámetro de Hubble para cualquier época de la evolución del universo, en el modelo anisótropo Bianchi Tipo I está dado por

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right), \quad (1.15)$$

el cual se puede reescribir como

$$H = \frac{1}{3}(H_1 + H_2 + H_3), \quad (1.16)$$

donde  $H_1 = \frac{\dot{A}}{A}$ ,  $H_2 = \frac{\dot{B}}{B}$  y  $H_3 = \frac{\dot{C}}{C}$  son los factores direccionales de Hubble en las respectivas direcciones  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$ .

### 1.2.2. Parametro de desaceleración

Como se puede concluir de las observaciones de las supernovas tipo I [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] y de las observaciones realizadas por Hubble en 1929 [9], no solo el universo se está expandiendo, sino que también la velocidad a la que se expande (dada por el parámetro de Hubble) está cambiando con el tiempo.

Considerando una expansión de Taylor del factor de escala en el tiempo presente

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)[t - t_0]^2 + \dots, \quad (1.17)$$

dividiendo todo por  $a(t_0)$ , el coeficiente que acompaña al termino  $[t - t_0]$  será el parametro de Hubble presente, y se podrá reescribir la expansión como

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0[t - t_0] - \frac{q_0}{2}H_0^2[t - t_0]^2 + \dots, \quad (1.18)$$

el cual define el parámetro de desaceleración  $q_0$  como

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \frac{1}{H_0^2} = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}, \quad (1.19)$$

entre mas grande sea el valor de  $q_0$  mayor será la desaceleración que se presenta en el modelo. Si tenemos que  $q_0 > 0$  podemos decir que, el modelo representa un universo en desaceleración y si  $q_0 < 0$  este representa un modelo del universo acelerado.

## 1.3. Ecuaciones de campo de Einstein para un fondo anisótropo Bianchi tipo I

En relatividad general, se considera un espacio tiempo como un conjunto  $(M, g)$  donde  $M$  es una variedad real de cuatro dimensiones y  $g$  es una métrica Lorentziana sobre  $M$ , con signos  $(-, +, +, +)$ . El campo gravitacional es una medida de la curvatura del espacio tiempo y la curvatura es generada por la presencia de materia y energía. La materia, la energía y el esfuerzo al que es sometida la materia, están representadas por el tensor simétrico de momentum-energía  $\mathbf{T}$ . Todas las fuentes no gravitacionales de energía y momentum en el universo, contribuyen a  $\mathbf{T}$ , como partículas, fluidos, campos, etc. Las ecuaciones de campo de Einstein en relatividad

general relacionan la geometría del espacio tiempo con el contenido de materia local en el universo[29].

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (1.20)$$

donde el tensor de Ricci, el escalar de Ricci, el tensor de curvatura del Riemann, los símbolos de Christoffel están dados por

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta}, \\ R_{\alpha\nu\beta}^{\mu} &= \Gamma_{\alpha\beta,\nu}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\nu,\beta}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \Gamma_{\delta\nu}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\delta} \Gamma_{\delta\beta}^{\mu}, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Para una métrica de Bianchi tipo I dada por la ecuación (1.1), los símbolos de Christoffel no triviales son

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{A}}{A}, & \Gamma_{20}^2 &= \frac{\dot{B}}{B}, & \Gamma_{30}^3 &= \frac{\dot{C}}{C}, \\ \Gamma_{11}^0 &= \dot{A}A, & \Gamma_{22}^0 &= \dot{B}B, & \Gamma_{33}^0 &= \dot{C}C. \end{aligned} \quad (1.22)$$

de modo que las componentes no triviales del tensor de curvatura de Riemann en este caso son

$$\begin{aligned} R_{01}^{01} &= \frac{\ddot{A}}{A}, & R_{02}^{02} &= \frac{\ddot{B}}{B}, & R_{03}^{03} &= \frac{\ddot{C}}{C}, \\ R_{12}^{12} &= -\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}, & R_{23}^{23} &= -\frac{\dot{B}\dot{C}}{BC}, & R_{31}^{31} &= -\frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \end{aligned} \quad (1.23)$$

y las componentes no triviales del tensor de Ricci son

$$\begin{aligned}
R_0^0 &= - \left( \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} \right), \\
R_1^1 &= - \left[ \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}}{A} \left( \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \right], \\
R_2^2 &= - \left[ \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}}{B} \left( \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{A}}{A} \right) \right], \\
R_3^3 &= - \left[ \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{C}}{C} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Por ultimo, de las ecuaciones (1.24) se halla el escalar de Ricci

$$R = -2 \left( \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} \right). \tag{1.25}$$

Con las ecuaciones (1.24, 1.25) y junto con el tensor de momentum-energía de un fluido perfecto, como el contenido de materia del universo dado por

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta} \tag{1.26}$$

las ecuaciones de Einstein para este modelo son

$$\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} = -8\pi\rho, \tag{1.27a}$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} = -8\pi p, \tag{1.27b}$$

$$\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{C}\dot{A}}{CA} = -8\pi p, \tag{1.27c}$$

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} = -8\pi p. \tag{1.27d}$$

Las ecuaciones de campo (1.27) son cuatro ecuaciones que contienen cinco incógnitas, A, B, C, p,  $\rho$ . Para cerrar el sistema se necesita una relación de más,

la cual será obtenida en el capítulo 2 mediante una variación especial de la ley de Hubble [8].

## 1.4. Ley de variación del parámetro de Hubble

Las ecuaciones de campo de Einstein (1.27) correspondiente a un sistema acoplado de ecuaciones altamente no lineales. Kramer[30] ha señalado que la mayoría de los autores resuelve estas ecuaciones con un tensor de momentum-energía de un fluido perfecto y asumen una ecuación de estado que relaciona la presión y la densidad de energía, con el fin de construir una solución analítica. Entonces, de acuerdo a esto, el método común usado para dar un complemento a las ecuaciones de campo de Einstein un una función específica de  $p = p(\rho)$ .

Sin embargo, las soluciones también pueden ser obtenidas por la aplicación de la variación especial del parámetro de Hubble, la cual fue propuesta por primera vez por Berman [31] en modelos de Friedmann-Robertson-Walker (**FRW**) y que conlleva a un valor constante del parámetro de desaceleración (**PD**). En este trabajo de grado, usaremos un enfoque similar, pues supondremos una forma específica para el parámetro de Hubble como el complemento de las ecuaciones de campo de Einstein(1.27), así la ecuación que usaremos será funcional del tiempo  $H = H(t)$ .

## CAPÍTULO 2

---

---

### Variación del parámetro de Hubble y solución de las ecuaciones de campo

---

---

En este capítulo, formularemos la ley de variación del parámetro de Hubble como una función del tiempo cósmico. Además de esto, mostraremos la forma como se acoplan las ecuaciones de campo de Einstein con esta variación del parámetro de Hubble y se hallarán de forma analítica las soluciones para el modelo de fondo anisótropo de Bianchi tipo I. Daremos un análisis de estas soluciones obtenidas con ayuda de las variables cinemáticas.

#### 2.1. Formulación de la variación del parámetro de Hubble

Basados en la solución que plantea el modelo estándar de la cosmología, se puede llegar a encontrar la dependencia con el tiempo del factor de escala<sup>1</sup> y se muestra cómo este factor de escala adquiere dos formas específicas, una de ellas es una evolución en la ley de potencias y la otra es una evolución exponencial. Con esto en mente y con la ecuación (1.14) se propone una ley de variación del parámetro de Hubble que conlleve a un parámetro de desaceleración constante

---

<sup>1</sup>Esto se muestra en el Apéndice A

$$H = D(ABC)^{\frac{-n}{3}} = Da^{\frac{-n}{3}}, \quad (2.1)$$

donde  $D > 0$  y  $n \geq 0$  son constantes.

De las ecuaciones 1.15 y 2.1 se tiene

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = Da^{\frac{-n}{3}}, \quad (2.2)$$

de la cual integrando podemos obtener la forma del factor de escala para los casos en que  $n \neq 0$  y  $n = 0$

$$ABC = (nDt + C_1)^{\frac{3}{n}} \text{ para } n \neq 0, \quad (2.3)$$

y

$$ABC = C_2 e^{Dt} \text{ para } n = 0, \quad (2.4)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración, como vemos estos factores de escala tiene un comportamiento similar a los que tiene el modelo cosmológico estándar.<sup>2</sup>

Ahora si sustituimos la ecuación (2.3) en la ecuación (1.19) obtenemos la forma del parámetro de desaceleración

$$q = n - 1. \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) nos muestra que el **PD** es constante para este modelo. Un estudio previo para los posibles valores de  $n$  para los cuales el **PD** tenga sentido físico observacional, nos muestra que, para valores de  $n > 1$ ,  $q > 0$ , lo cual representaría un modelo del Universo el cual se está desacelerando. Para  $n \leq 1$ , tenemos que el **PD** está en un rango de  $-1 < q \leq 0$ , el cual representa un modelo del Universo acelerado. Cabe notar que observaciones recientes de las supernovas tipo I[13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] han revelado que en el tiempo presente el universo se esta acelerando y el valor del **PD** esta en un rango de  $-1 < q \leq 0$ .

<sup>2</sup>En el apéndice A encontramos la dependencia con el tiempo de el factor de escala

## 2.2. Forma integral de los factores de escala

De las ecuaciones de campo de Einstein (1.27) podremos obtener las siguientes relaciones.

substrayendo (1.17d) de (1.17c) e integrando, se obtiene

$$\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} = \frac{x_1}{ABC}, \quad (2.6)$$

donde  $x_1$  es una constante de integración.

Una vez más integrando la ecuación (2.6), obtenemos

$$\frac{A}{B} = d_1 \exp \left[ x_1 \int (ABC)^{-1} dt \right], \quad (2.7)$$

donde  $d_1$  es una constante de integración.

Se puede hacer un proceso similar, substrayendo e integrando las ecuaciones (1.17c) de (1.17b) y lo mismo para (1.17d) de (1.17b)

$$\frac{A}{C} = d_2 \exp \left[ x_2 \int (ABC)^{-1} dt \right], \quad (2.8)$$

$$\frac{B}{C} = d_3 \exp \left[ x_3 \int (ABC)^{-1} dt \right], \quad (2.9)$$

donde  $d_2$ ,  $x_2$ ,  $d_3$  y  $x_3$  son constantes de integración.

De las ecuaciones (2.7-2.9) se puede hallar de forma explícita las funciones métricas

$$A(t) = a_1 (ABC)^{1/3} \exp \left[ b_1 \int (ABC)^{-1} dt \right], \quad (2.10)$$

$$B(t) = a_2 (ABC)^{1/3} \exp \left[ b_2 \int (ABC)^{-1} dt \right], \quad (2.11)$$

$$C(t) = a_3 (ABC)^{1/3} \exp \left[ b_3 \int (ABC)^{-1} dt \right], \quad (2.12)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt[3]{d_1 d_2}, & a_2 &= \sqrt[3]{d_1^{-1} d_3}, & a_3 &= \sqrt[3]{(d_2 d_3)^{-1}}, \\ b_1 &= \frac{x_1 + x_2}{3}, & b_2 &= \frac{x_3 - x_1}{3}, & b_3 &= \frac{-(x_2 + x_3)}{3}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Merece ser mencionado, que estas constantes satisfacen las siguientes dos relaciones

$$a_1 a_2 a_3 = 1, \quad b_1 + b_2 + b_3 = 0. \quad (2.14)$$

Podemos observar de las ecuaciones (2.10) - (2.12), la relación clara que hay entre los factores de escala y el factor de escala promedio hallado con ayuda de la ley de variación del parámetro de Hubble, entonces podemos dar solución al sistema (2.10) - (2.12), de acuerdo a la ecuación que escojamos para el factor de escala promedio que puede ser la ecuación (2.3) o (2.4)

## 2.3. Modelo cosmológico para $n \neq 0$

### 2.3.1. Factores de escala y componentes del tensor momentum-energía

Usando la ecuación (2.3) y reemplazándola en las ecuaciones (2.10) - (2.12) obtenemos las siguientes expresiones para los factores de escala

$$A(t) = a_1 (nDt + C_1)^{\frac{1}{n}} \exp \left[ \frac{b_1}{D(n-3)} (nDt + C_1)^{\frac{n-3}{n}} \right], \quad (2.15)$$

$$B(t) = a_2 (nDt + C_1)^{\frac{1}{n}} \exp \left[ \frac{b_2}{D(n-3)} (nDt + C_1)^{\frac{n-3}{n}} \right], \quad (2.16)$$

$$C(t) = a_3 (nDt + C_1)^{\frac{1}{n}} \exp \left[ \frac{b_3}{D(n-3)} (nDt + C_1)^{\frac{n-3}{n}} \right], \quad (2.17)$$

con estas expresiones, fácilmente se puede sustituir en las ecuaciones (1.18a) y (1.18b) para hallar las componentes del tensor de momentum-energía

$$8\pi p = D^2(2n-3)(nDt + C_1)^{-2} - (b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2)(nDt + C_1)^{\frac{-6}{n}}, \quad (2.18)$$

$$8\pi\rho = 3D^2(nDt + C_1)^{-2} + (b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1)(nDt + C_1)^{\frac{-6}{n}}. \quad (2.19)$$

### 2.3.2. Variables cinemáticas

De acuerdo con las definiciones dadas anteriormente para las variables cinemáticas en el capítulo 1, hallaremos éstas para el modelo cosmológico en que  $n \neq 0$ .

Partiendo de la ecuación (1.7) que denota la expansión para el modelo, se puede hallar una expresión para esta en función del tiempo, usando la ecuación (1.2)

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{(A\dot{B}C)}{ABC} = \frac{(\dot{a}^3)}{a^3} = 3\frac{\dot{a}}{a}, \\ \Theta &= 3H, \end{aligned} \quad (2.20)$$

ahora, reemplazando la variación especial del parámetro de Hubble dada por la ecuación (2.1) y a su vez reemplazando la forma que toma el factor de escala para  $n \neq 0$  dada por la ecuación (2.3), la expansión toma la forma

$$\Theta = 3D(nDt + C_1)^{-1}, \quad (2.21)$$

el volumen para este modelo es representado como la multiplicación de los factores de escala

$$a^3 = A(t)B(t)C(t) = (nDt + C_1)^{\frac{3}{n}}, \quad (2.22)$$

y el shear escalar lo hallamos reemplazando la ecuación (2.21) y las funciones métricas dadas por las ecuaciones (2.15) - (2.17) en la ecuación (1.10), dando así

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}[(b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (b_3 - b_1)^2](nDt + C_1)^{\frac{-6}{n}}. \quad (2.23)$$

Es importante conocer el comportamiento anisótropo de este modelo, y para ellos se usó la definición de la anisotropía dada por

$$\bar{A} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{H_i - H}{H} \right). \quad (2.24)$$

Así, esta ecuación representa la desviación promedio de anisotropía que posee el modelo. Cabe notar que si los factores  $H_i$  fuesen iguales en las tres direcciones, entonces por la ecuación (1.16) deduciríamos que la anisotropía sería cero y se podría afirmar que el modelo es isótropo en todas las direcciones. De esta forma, para este modelo, el parámetro de anisotropía adquiere la siguiente forma

$$\bar{A} = \frac{1}{3D^2}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(nDt + C_1)^{\frac{2n-6}{n}}. \quad (2.25)$$

Es importante notar de la ecuación (2.25) que el estudio de la anisotropía está fuertemente ligado a las razones  $\frac{\sigma}{\Theta}$  y  $\frac{\rho}{\Theta^2}$  pues para este modelo, podemos reescribir la anisotropía como

$$\bar{A}(\sigma, \Theta) = 3 \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{(b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (b_3 - b_1)^2} \left( \frac{\sigma}{\Theta} \right)^2, \quad (2.26)$$

y a su vez

$$8\pi \frac{\rho}{\Theta^2} = \frac{1}{3} + \frac{3(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1)}{(b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (b_3 - b_1)^2} \left( \frac{\sigma}{\Theta} \right)^2, \quad (2.27)$$

entonces, es consistente usar estas razones, como un estudio de la anisotropía del modelo.

### 2.3.3. Comportamiento físico del modelo

Con las variables cinemáticas definidas en el capítulo 1 y resueltas en el capítulo 2 para un modelo cosmológico anisótropo de Bianchi tipo I con un contenido de materia del universo definido por el tensor de momento-energía de un fluido perfecto y una variación especial del parámetro de Hubble mostrada en el capítulo 2, podemos hacer un análisis de estas variables y con esto conseguir una idea del comportamiento físico del modelo.

De la ecuación (2.22) que representa el volumen espacial de este modelo, es observado que para un valor de  $t = t_0$  donde  $t_0 = -C_1/nD$ , el volumen es cero, y para este mismo valor de tiempo, reemplazado en la ecuación (2.21) que representa la expansión del modelo, ésta adquiere un valor infinito. Entonces, podemos suponer de estos resultados que tenemos un modelo del universo que está evolucionando en el tiempo e inició, en  $t = t_0$ , con un volumen infinitesimal y una tasa de expansión infinita. Los factores de escala dados por las ecuaciones (2.15) - (2.17), se anulan

cuando  $t = t_0$ , contrario a lo que le sucede a la presión, la densidad de energía, el shear escalar y la anisotropía, dados por las ecuaciones (2.18), (2.19), (2.21), (2.25) respectivamente, los cuales divergen en la época inicial adquiriendo un valor que tiende al infinito, siempre que  $n < 3$ , lo cual nos indica que el modelo tiene una singularidad en su época inicial. Ahora, en este modelo, el universo muestra una expansión regida por la ley de potencia, que justamente después del impulso dado por el big bang y a medida que transcurre el tiempo cósmico ( $t$ ), los factores de escala y el volumen espacial incrementan pero el escalar de expansión decrece, por lo tanto la tasa de expansión se frena a medida que aumenta el tiempo cósmico y lo mismo sucede con la densidad de energía, la presión, el shear escalar y la anisotropía. Para entender hacia donde este modelo del universo evoluciona, hay que evaluar cuando el tiempo tienda a infinito ( $t \rightarrow \infty$ ), entonces así, los factores de escala y el volumen se hacen infinitos, mientras que la presión, la densidad de energía, el escalar de expansión, el shear escalar y la anisotropía se vuelven cero. Esto nos quiere decir que el modelo, esencialmente va a evolucionar a un universo vacío para un tiempo  $t$  muy grande. En la tabla 2.1 se muestran las variables cinemáticas y las componentes del tensor de momentum-energía en los casos mencionados anteriormente para el tiempo.

Variable Cosmológica	Tiempo Cósmico		
	$t = t_0$	transcurso del t	$t \rightarrow \infty$
$\Theta$	$\infty$	Decrece	0
V	0	Crece	$\infty$
A	0	Crece	$\infty$
B	0	Crece	$\infty$
C	0	Crece	$\infty$
$\sigma^2$	$\infty$	Decrece	0
p	$\infty$	Decrece	0
$\rho$	$\infty$	Decrece	0
A	$\infty$	Decrece	0

TABLA 2.1. Variables cosmológicas: Se muestra como evolucionan en el tiempo las variables cosmológicas, para el caso en que  $n \neq 0$

La integral que representa el horizonte de partículas, está dada por la ecuación siguiente<sup>3</sup>

$$\int_{t_0}^t \frac{dt'}{V(t')} = \frac{1}{D(n-1)} (nDt' + C_1)^{\frac{n-1}{n}} \Big|_{t_0}^t \quad (2.28)$$

y es finita siempre que  $n \neq 1$  por consiguiente existe un horizonte en este modelo. Además de esto, para un valor de  $n \leq 1$  se tiene para el parámetro de desaceleración que  $-1 < q \leq 0$ , lo cual implica un modelo del universo acelerado, el cual está de acuerdo con las observaciones de las supernovas tipo I [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20], que revelan, que en el estado presente del universo este es acelerado y el valor del parámetro de desaceleración se encuentra en algún lugar del rango  $-1 < q \leq 0$ .

En resumen, este modelo representa un universo anisótropo en expansión, que no está rotando, con un inicio compatible con el “Big Bang” pues presenta una singularidad en la época inicial en el volumen y los factores de escala, además de esto, su tasa de expansión empieza a decaer y se hace cero cuando el tiempo ( $t \rightarrow \infty$ ), finalmente la presión y la densidad de energía se vuelven despreciables mientras que los factores de escala y el volumen espacial se vuelven infinitamente grandes, lo que nos daría un universo vacío.

## 2.4. Modelo cosmológico para $n=0$

### 2.4.1. Factores de escala y componentes del tensor momentum-energía

Usando la ecuación (2.4) y reemplazándola en las ecuaciones (2.10) - (2.12) obtenemos las siguientes expresiones para los factores de escala

$$A(t) = a_1 C_2^{\frac{1}{3}} \exp \left[ \frac{1}{3} Dt - \frac{b_1}{DC_2} e^{-Dt} \right], \quad (2.29)$$

$$B(t) = a_2 C_2^{\frac{1}{3}} \exp \left[ \frac{1}{3} Dt - \frac{b_2}{DC_2} e^{-Dt} \right], \quad (2.30)$$

$$C(t) = a_3 C_2^{\frac{1}{3}} \exp \left[ \frac{1}{3} Dt - \frac{b_3}{DC_2} e^{-Dt} \right], \quad (2.31)$$

---

<sup>3</sup>La definición de esta integral se muestra en el apéndice B

y con estas expresiones fácilmente se puede sustituir en las ecuaciones (1.18a) y (1.18b) para hallar las componentes del tensor de momentum-energía

$$8\pi p = \frac{-D^2}{3} - (b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2) C_2^{-2} e^{-2Dt}, \quad (2.32)$$

$$8\pi\rho = \frac{D^2}{3} + (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1) C_2^{-2} e^{-2Dt}. \quad (2.33)$$

### 2.4.2. Variables cinemáticas

Siguiendo un procedimiento similar para el calculo de las variables cinemáticas halladas en el modelo anterior, se encontrarán éstas para el caso en que  $n=0$ , donde el factor de escala toma la forma de la ecuación (2.4). Así la expansión se expresaría como

$$\Theta = D, \quad (2.34)$$

mientras que el volumen toma la forma

$$a^3 = C_2 e^{Dt}, \quad (2.35)$$

y, por ultimo, el shear escalar

$$\sigma^2 = C_2^{-2} [(b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (b_3 - b_1)^2] e^{-2Dt}. \quad (2.36)$$

Como ya se mencionó, es importante hallar la desviación total de la anisotropía en las direcciones espaciales del modelo, pues con ésta se tiene el comportamiento de la anisotropía en la evolución del universo. Entonces, para este modelo, la anisotropía adquiere la siguiente forma

$$\bar{A} = \frac{3}{D^2} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) C_2^{-2} e^{-2Dt}, \quad (2.37)$$

es de importancia notar que al hacer las razones entre  $\frac{\sigma}{\Theta}$  y  $\frac{\rho}{\Theta^2}$ , se obtienen expresiones similares a las del caso en que  $n \neq 0$

$$\bar{A}(\sigma, \Theta) = 3 \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{(b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (b_3 - b_1)^2} \left( \frac{\sigma}{\Theta} \right)^2, \quad (2.38)$$

$$8\pi \frac{\rho}{\Theta^2} = \frac{1}{3} + \frac{(b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1)}{(b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (b_3 - b_1)^2} \left( \frac{\sigma}{\Theta} \right)^2. \quad (2.39)$$

### 2.4.3. Comportamiento físico del modelo

Con ayuda de la ecuación (2.35) la cual representa el volumen espacial para este modelo, podemos deducir que no tenemos un punto de inicio singular, pues cuando  $t = 0$ , el volumen espacial, los factores de escala, la presión y la densidad de energía, dadas por las ecuaciones (2.35), (2.29), (2.30), (2.31), (2.32), (2.33) respectivamente, son constantes. Por lo tanto podemos inferir que el universo empezó a evolucionar con un volumen espacial constante y se expande con una tasa exponencial. A medida que el tiempo  $t$  se incrementa, el volumen espacial y los factores de escala crecen exponencialmente, mientras que la presión, la densidad de energía, el shear escalar y la anisotropía decrecen. Conforme el tiempo  $t \rightarrow \infty$ , los factores de escala y el volumen espacial del universo llegan a ser infinitos y al mismo tiempo, el shear escalar y la anisotropía tiende a cero. Además de esto, la presión y densidad de energía se vuelven constantes tomando cierta forma específica similar a una ecuación de estado, donde  $p = -\rho$ . Esto nos demuestra que para valores del tiempo muy grandes, el universo es dominado por la energía del vacío, que dirige la expansión del universo. El modelo se aproxima a ser isótropo para valores del tiempo muy grandes. En la tabla 2.2 se muestran las variables cinemáticas y las componentes del tensor de momentum-energía en los casos mencionados anteriormente para el tiempo.

Variable Cosmológica	Tiempo Cósmico		
	$t = 0$	transcurso del t	$t \rightarrow \infty$
$\Theta$	Cte	Cte	Cte
V	Cte	Crece	$\infty$
A	Cte	Crece	$\infty$
B	Cte	Crece	$\infty$
C	Cte	Crece	$\infty$
$\sigma^2$	Cte	Decrece	0
p	Cte	Decrece	Cte
$\rho$	Cte	Decrece	Cte
$A$	Cte	Decrece	0

TABLA 2.2. Variables cosmológicas: Se muestra como evolucionan en el tiempo las variables cosmológicas, para el caso en que  $n = 0$

En resumen, este modelo representa un universo anisótropo en expansión, que no está rotando, con un inicio finito que se aproxima a ser isótropo a medida que el tiempo tiende a infinito.

---

---

## Conclusiones

---

---

- Los principales resultados obtenidos en este trabajo de grado fueron presentadas en el Congreso Colombiano de Astronomía y Astrofísica 5 al 8 de octubre del 2012.
- En este trabajo de grado, se presento una forma alternativa y directa de obtener soluciones exactas a las ecuaciones diferenciales no lineales de campo de Einstein, por medio de una formulación especial del parámetro de Hubble, que permite determinar explícitamente los factores de escala, la presión, la densidad de energía y también algunos otros parámetros cosmológicos importantes para dos modelos del universo.
- Para el modelo en que  $n \neq 0$ , este tiene un punto singular en la época inicial del universo debido a que los factores de escala y el volumen se desvanecen en ese momento. Toda la materia y radiación, es concentrada en la época que ocurrió el “Big Bang” y la expansión es gobernada por el impulso dado por el “Big Bang” y esta exhibe una expansión en forma de ley de potencias después del “Big Bang”
- Para el modelo en que  $n = 0$ , éste no presenta un origen iniciado desde una singularidad, su densidad es finita en la época inicial, y la expansión es gobernada por la creación de partículas de materia. El universo muestra una expansión exponencial y se amplía uniformemente. En tiempos tardíos, el universo es dominado por la energía de vacío, la cual se supone responsable de la expansión cósmica, representando así un modelo del universo dominado por la constante cosmológica.

---

---

## Trabajo futuro

---

---

- Se pretende seguir esta línea de trabajo de modelos anisótropos del universo, en especial la familia de Bianchi tipo I, por la facilidad de describir propiedades homogéneas y anisótropas del universo.
- Se pretende dar solución al mismo sistema de ecuaciones de Einstein mostradas en este trabajo de grado, por el camino común, que es plantear una ecuación de estado de la forma  $p = \gamma\rho$  y con estas soluciones se podría ajustar el parámetro  $\gamma$  para las diferentes épocas del universo como lo son cuando es dominado por radiación, por materia y por constante cosmológica y así poder comparar las variables cinemáticas del modelo con las planteadas en la literatura del modelo cosmológico estándar.
- Para un posible trabajo futuro se pretende dar solución a las ecuaciones de campo de Einstein considerando una métrica de Bianchi tipo I con ciertas condiciones, las cuales son considerar dos factores de escala iguales y uno diferente de los otros dos, junto con un tensor de momentum-energía que no contenga flujo de energía, ni viscosidad, pero con presiones iguales en dos direcciones y diferente en la dirección sobrante. La motivación de considerar esta forma específica de métrica y de tensor de momentum-energía, son las observaciones y argumentos críticos respecto a una dirección preferente de expansión del universo.

---

---

## Bibliografía

---

---

- [1] N. Jarosik et. al, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **192**, 14 (2011).
- [2] D. N. Spergel et. al, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148**, 175 (2003).
- [3] C. Copi, D. Huterer, D. Schwarz and G. Starkman, *Phys. Rev. D* **75**, 023507 (2007).
- [4] K. Land and J. Magueijo, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 071301 (2005).
- [5] T. R. Jaffe et. al, *Astrophys. J.* **629**, L1 (2005).
- [6] N. E. Groeneboom, L. Ackerman, I. K. Wehus and H. K. Eriksen, *Astrophys. J.* **722**, 452 (2010).
- [7] N. E. Groeneboom and H. K. Eriksen, *Astrophys. J.* **690**, 1807 (2009).
- [8] Suresh Kumar, C.P. Singh. *Astrophys Space Sci* (2007) 312: **57–62**.
- [9] E. Hubble, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15**, 168 (1929)
- [10] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965).
- [11] S. Hervik, D. F. Mota, M. Thorsrud, *JHEP* **1111**(2011)146.
- [12] L. Campanelli, P. Cea, G.L. Fogli, A. Marrone, *Phys.Rev. D***83**, 103503 (2011).
- [13] S. Perlmutter, et al, *Astrophys. J.* **483**, 565 (1997).
- [14] S. Perlmutter, et al, *Nature* **391**, 51 (1998).
- [15] S. Perlmutter, et al, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).

- 
- [16] A. G. Reiss, et al, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [17] A.G. Reiss, et al, *Astron. J.* **607**, 665 (2004).
- [18] J. L. Tonry, et al, *Astrophys. J.* **594**, 1 (2003).
- [19] R.A. Knop, et al, *Astrophys. J.* **598**, 102 (2003).
- [20] J. Moncy, *Astrophys. J.* **614**, 1 (2004).
- [21] C. A. Valenzuela Toledo, Y. Rodriguez, J. P. Beltran Almeida, *JCAP***1110**, 020 (2011).
- [22] G. F. R. Ellis, *Gen. Relativ. Gravit.***38**(6) (2006).
- [23] A. Friedmann, *Z. Phys.* **10**, 377 (1922).
- [24] H. P. Robertson, *Astrophys. J.* **82**, 248 (1935).
- [25] A. G. Walker, *Proc. London Math. Soc.* **42**, 90 (1936).
- [26] S. Weinberg, : *Gravitation and Cosmology*. New York, Wiley (1972).
- [27] E. Poisson, : *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press (2004).
- [28] G.F.R. Ellis, : *Relativistic cosmology*. Proceedings of the international School of Physics Enrico Fermi, Course 47: General relativity and cosmology. Academic Press, New York and London, 104-182, (1971).
- [29] A. R. Choudhuri, : *Astrophysics for Physicists*. Cambridge University Press (2010).
- [30] D. Kramer, et al, : *Exact Solution of Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- [31] M. S. Berman, *Nuovo. Cim. B* **74**, 182 (1983).

# APÉNDICE

---

---

## A

---

---

### Dinámica del espacio-tiempo de FRW

La métrica que cumple los requerimientos de isotropía y homogeneidad, es la llamada métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y está definida por el elemento de línea

$$dS^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega \right] \quad (40)$$

donde, esta métrica está escrita en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , con  $d\Omega \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi$ ,  $a(t)$  representa el factor de escala,  $K$  es una constante que describe la curvatura el cual puede adquirir valores de  $(-1, 0, 1)$ , correspondiente a geometrías pseudo-esférica, euclidiana y esférica respectivamente.

Hay varios campos vectoriales y tensoriales, como el tensor de momentum-energía, cuyos valores medios deben satisfacer los requerimientos de isotropía y homogeneidad. Isotropía requiere que el valor medio de cualquier tri-vector  $v^i$  desaparezca, y homogeneidad requiere que el valor medio de cualquier escalar sea sólo función del tiempo. Igualmente, isotropía requiere que el valor medio de cualquier tri-tensor  $t^{ij}$  en  $\mathbf{x} = 0$  sea proporcional a  $\delta^{ij}$  y por lo tanto a  $g^{ij}$  en virtud del principio de equivalencia. En un sistema de referencia comóvil con el fluido como el de FRW, se puede escoger la quadri-velocidad tal que  $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ . Teniendo en

cuenta lo anterior y los requerimientos de isotropía y homogeneidad, las componentes del tensor de momentum-energía son

$$T^{00} = \rho(t), T^{0i} = 0, T^{ij} = g^{ij}(x)p(t), \quad (41)$$

en donde  $\rho(t)$  representa la densidad de energía y  $p(t)$  la presión para el fluido en un tiempo  $t$ .

Teniendo en cuenta las ecuaciones (40) y (41), las ecuaciones de campo de Einstein quedan expresadas como

$$-\frac{2K}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2M_p^2}(\rho - p), \quad (42)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_p^2}(\rho + 3p), \quad (43)$$

donde  $M_p^2$  es la masa reducida de Planck, definida como  $M_p = (8\pi G)^{-1/2}$ . Y reduciendo el sistema adicionando la ecuación (42) de la ecuación (43), encontrando así

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3M_p^2} - \frac{K}{a^2}, \quad (44)$$

esta ecuación es conocida como la ecuación de Friedmann, la cual nos permite estudiar la evolución del factor de escala en el tiempo. Ahora de las ecuaciones (43) y (44) se obtiene la ecuación de continuidad para la densidad de energía

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (45)$$

Ahora, usando una ecuación de estado del tipo  $p = p(\rho)$ , en la cual  $p = w\rho$ , con  $w$  como un parámetro de proporcionalidad y reemplazando e integrando en la ecuación (45) encontramos la densidad de energía como una función del factor de escala

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)}, \quad (46)$$

donde  $\rho_0$  y  $a_0$  representan la densidad y el factor de escala en el presente respectivamente. Ahora con las ecuaciones (46) y (44), podemos hallar el factor de escala como una función del tiempo cósmico y el parámetro  $w$

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3(1+w)} & \text{para } w \neq -1, \\ e^{Ht} & \text{para } w = -1, \end{cases} \quad (47)$$

es decir,  $a(t) \propto t^{2/3}$ ,  $a(t) \propto t^{1/2}$ ,  $a(t) \propto e^{Ht}$ , para el factor de escala de un universo plano ( $K = 0$ ), el cual se ajusta el parámetro  $w$  para diferentes épocas del universo donde, ( $w = 0$ ) dominado por materia, ( $w = \frac{1}{3}$ ) radiación y ( $w = -1$ ) por constante cosmológica.

# APÉNDICE

---

---

## B

---

---

### Horizonte de partículas

El horizonte de partículas representa el límite sobre las distancias a las cuales los eventos pasados pueden ser observados. Partiendo del elemento de línea de la métrica de FRW<sup>4</sup>, en donde para un fotón se tiene que  $dS^2 = 0$  y por tanto podemos escribir que

$$dt = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (48)$$

y para esta ecuación, puede ser integrada en el tiempo ( $t$ ) y de la coordenada radial ( $r_{max}$ ) que representaría el valor más grande de la coordenada radial, para el cual un observador en el tiempo  $t$  recibirá señales viajando a la velocidad de la luz desde  $t=0$ . Entonces usando que la definición de la distancia física en un tiempo  $t$ , que es una distancia desde el origen a un objeto comóvil ubicado en la coordenada radial

$$d(r, t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (49)$$

---

<sup>4</sup>Mostrada en el apéndice A en la ecuación (40)

podemos deducir de la ecuación (48) que la cantidad

$$S \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (50)$$

representa la distancia comóvil, la cual se define como el horizonte de partículas comóvil.