

**SIMULACIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO PRODUCIDO
POR HILOS CON CORRIENTES ESTACIONARIAS E
IMANES CON MAGNETIZACIÓN CONSTANTE
APLICADO A LAS TRAMPAS MAGNÉTICAS
TIPO ESPEJO, MÍNIMO -B, Y CERO -B**

OSWALDO OTERO OLARTE

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2014

**SIMULACIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO PRODUCIDO
POR HILOS CON CORRIENTES ESTACIONARIAS E
IMANES CON MAGNETIZACIÓN CONSTANTE
APLICADO A LAS TRAMPAS MAGNÉTICAS
TIPO ESPEJO, MÍNIMO -B, Y CERO -B**

TRABAJO DE GRADO
PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

OSWALDO OTERO OLARTE

DIRECTOR: MAO TSETUNG MURILLO, PH.D.(C)

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

2014

*A mis padres,
Martha Ines y Luis Emilio,
motores de mi vida.*

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por la vida y por todas las cosas maravillosas que en ella me han sucedido.

A mis padres, por sus valiosas enseñanzas, apoyo constante y amor incondicional.

A mis hermanos, por su apoyo y compañía durante toda mi vida.

A mi familia, por brindarme siempre su apoyo.

A el profesor Mao T. Murillo, por sus explicaciones vitales para la elaboración de este trabajo.

A todos los profesores de la Escuela de Física de la UIS, por sus valiosas enseñanzas.

A Edgar M. Torres, Martin Mojica, Fabian Gonzalez, Juan C. Jerez y Victor Pulido por su valiosa amistad.

A Alberto Silva y Juan C. Jerez, porque gracias a ellos conocí linux y por su ayuda en programación.

A Orlando Duarte, por su valiosa colaboración en la elaboración de algunas gráficas.

A mi Ss Henry Vargas y a mis compañeros de la Seleccin de Karate-Do UIS, por compartir dos años llenos de muchos retos y grandes triunfos.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	15
1. HILOS CON CORRIENTE ESTACIONARIA	16
1.1. CORRIENTES ESTACIONARIAS	16
1.2. LEY DE BIOT-SAVART	16
1.3. HILO FINITO EN LÍNEA RECTA	17
1.3.1. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS INTEGRALES	18
1.3.2. SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LAS INTEGRALES	18
1.3.3. EXPERIMENTO DE PRUEBA	19
1.3.4. VISUALIZACIÓN DEL CAMPO VECTORIAL	20
1.3.5. PRUEBA DE EXACTITUD DE LOS RESULTADOS	20
1.4. HILO CIRCULAR	22
1.5. HILO ELÍPTICO	24
1.6. BOBINA MAGNÉTICA	25
2. IMANES	27
2.1. IMÁN CON MAGNETIZACIÓN CONSTANTE	28

ÍNDICE GENERAL	4
2.2. CASO ESPECIAL	36
3. TRAMPA MAGNÉTICA TIPO ESPEJO	40
3.1. SISTEMA FÍSICO	40
3.2. VISUALIZACIÓN DEL CAMPO TIPO ESPEJO	41
3.3. SUPERFICIES MAGNÉTICAS	41
3.3.1. SUPERFICIE RCE	41
3.3.2. OTRAS SUPERFICIES	42
4. TRAMPA MAGNÉTICA MÍNIMO - B	46
4.1. SISTEMA FÍSICO	46
4.2. FORMACIÓN DEL CAMPO MÍNIMO - B	47
4.3. SUPERFICIES MAGNÉTICAS	50
4.3.1. SUPERFICIE RCE	50
4.3.2. OTRAS SUPERFICIES	51
5. TRAMPA MAGNETICA CERO - B	53
5.1. SISTEMA FÍSICO	53
5.2. CAMPO CERO - B	54
5.3. SUPERFICIE RCE	55
CONCLUSIONES	58
REFERENCIAS	59

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Hilo Finito en Línea Recta con Corriente Estacionaria.	17
1.2. Orientación del Sistema de Referencia Espacial (Hilo Recto Finito). . .	19
1.3. Vista XY del Campo Magnético generado por un Hilo Recto en el PCT.	20
1.4. Líneas del Campo producido por un Hilo Recto.	20
1.5. Hilo Circular con Corriente Estacionaria.	22
1.6. Orientación del Sistema de Referencia Espacial (Hilo Circular).	23
1.7. Vista YZ del Campo Magnético generado por un Hilo Circular en el PCL.	23
1.8. Líneas de Campo producido por un Hilo Circular.	23
1.9. Hilo Elíptico con Corriente Estacionaria.	24
1.10. Vista YZ del Campo Magnético generado por un Hilo Elíptico en el PCL.	25
1.11. Bobina Magnética alimentada con Corriente Estacionaria.	25
1.12. Vista YZ del Campo Magnético generado por una Bobina en el PCL. .	26
2.1. Sistema de Referencias Cuerpo Magnetizado.	28
2.2. Cuerpo con Magnetización Constante.	29
2.3. Orientación del Sistema de Referencia Espacial (Imán).	35

2.4. Vista YZ del Campo Magnético generado por un Imán en el PCL.	35
2.5. Vista XY del Campo Magnético generado por un Imán en el PCT.	35
2.6. Sistema de Referencias Cuerpo Magnetizado (Caso Especial).	36
2.7. Vista XY del Campo Magnético generado por un Imán en el PCT.	39
3.1. Sistema Magnético Tipo Espejo.	40
3.2. Vista YZ del Campo Magnético de la Trampa Tipo Espejo.	42
3.3. Superficies de igual Intensidad Magnética.	42
3.4. Vistas XYZ de la Zona RCE (Trampa Tipo Espejo).	43
3.5. Vistas XY y YZ del Corte Central Longitudinal y Transversal (Zona RCE).	44
3.6. Vista XYZ de la Superficie Magnética.	44
3.7. Vista YZ del Corte Central Longitudinal de la Superficie Magnética.	45
4.1. Sistema Magnético Mínimo-B.	46
4.2. Vista YZ del Campo generado por las Bobinas en el PCL.	48
4.3. Vista XY del Campo generado por el Sextupolo Magnético en el PCT.	48
4.4. Vista YZ del Campo generado por el Sextupolo Magnético en el PCL.	48
4.5. Vista YZ de la Trampa Magnética Mínimo-B en el PCL.	49
4.6. Vista XY de la Trampa Magnética Mínimo-B en el plano ($z = -12,0$ cm).	49
4.7. Vista XY de la Trampa Magnética Mínimo-B en el plano ($z = 12,0$ cm).	50
4.8. Vista XYZ de la Zona RCE (Trampa Mínimo-B).	50
4.9. Vista XY del Corte Central Transversal de la Zona RCE.	51

4.10. Vista YZ del Corte Central Longitudinal de la Zona RCE.	51
4.11. Vista XYZ de la Superficie Magnética.	51
4.12. Vista XY del Corte Central Transversal de la Superficie Magnética. . .	52
4.13. Vista YZ del Corte Central Longitudinal de la Superficie Magnética. . .	52
5.1. Sistema Magnético Cero-B.	53
5.2. Vista YZ del Campo Bobinar en el PCL.	54
5.3. Vista XY del a Trampa Cero-B en el PCT.	54
5.4. Vista YZ de la Trampa Cero-B en el PCL.	55
5.5. Vista XYZ de la Superficie RCE (Trampa Cero-B).	56
5.6. Vista XY del Corte Central Transversal de la Zona RCE.	56
5.7. Vista XY del Corte Central Longitudinal de la Zona RCE.	56
5.8. Vista XY de la Trampa Cero-B en el Plano situado en ($z = -7,55$ cm). .	57
5.9. Vista XY de la Trampa Cero-B en el Plano situado en ($z = 7,55$ cm). .	57

ÍNDICE DE TABLAS

1.1. Puntos del Espacio seleccionados para el Test de Exactitud.	21
1.2. Resultados obtenidos usando la solución numérica y analítica.	21
3.1. Datos de Entrada para la Cavidad y Frecuencia de Microondas.	41
3.2. Datos de Entrada para las Bobinas Magnéticas.	41
4.1. Datos de Entrada para la Cavidad y Frecuencia de Microondas.	47
4.2. Datos de Entrada para las Bobinas Magnéticas.	47
4.3. Datos de Entrada para el Sextupolo Magnético.	47
5.1. Datos de la Superficie RCE.	55

RESUMEN

TÍTULO: SIMULACIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO PRODUCIDO POR HILOS CON CORRIENTES ESTACIONARIAS E IMANES CON MAGNETIZACIÓN CONSTANTE APLICADO A LAS TRAMPAS MAGNÉTICAS TIPO ESPEJO, MÍNIMO-B, Y CERO-B.*

AUTOR: OTERO OLARTE, Oswaldo.†

PALABRAS CLAVES: Trampa magnética, Simulación de campos magnéticos, Plasma, Resonancia Ciclotrónica Electrónica, Bobina, Imán permanente.

DESCRIPCIÓN: Como un aporte a la simulación computacional del confinamiento magnético y calentamiento de plasmas de Resonancia Ciclotrónica Electrónica (RCE), este trabajo está dedicado al cálculo y posterior análisis de los campos magnéticos generados por bobinas e imanes permanentes requeridos en trampas magnéticas, entre las cuales podemos mencionar la tipo espejo, mínimo-B y cero-B. Para ello se resuelve numéricamente la ecuación de Biot-Savart en el caso de las bobinas con corriente estacionaria y la ley de Ampere para el caso de los imanes permanentes. El estudio incluye la caracterización de las zonas RCE así como la visualización del campo vectorial en las trampas magnéticas previamente mencionadas. Adicionalmente, en el caso de las trampas tipo espejo y mínimo-B, se determina la razón de espejo, dada la importancia de esta cantidad en la descripción del confinamiento.

* Trabajo de Grado.

† Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Mao Tsetung Murillo Acevedo., Ph.D (C).

ABSTRACT

TITLE: SIMULATION OF THE MAGNETIC FIELD PRODUCED BY WIRES WITH STATIONARY CURRENT AND MAGNETS WITH CONSTANT MAGNETIZACION APPLIED TO THE MAGNETIC MIRROR TRAPS, MINIMUM-B, AND ZERO-B.*

AUTHOR: OTERO OLARTE, Oswaldo .[†]

KEYWORDS: Magnetic trap, simulation of magnetic fields, plasma, Electron Cyclotron Resonance, coil, permanent magnet.

DESCRIPTION: As a contribution to the computational simulation of magnetic confinement and heating of plasmas ECR (Electron Cyclotron Resonance), this work is dedicated to the calculation and subsequent analysis of the magnetic fields generated by permanent magnets and coils required in magnetic traps between which we can mention the mirror trap, minimum-B and zero-B. To do this, we solved numerically the Biot-Savart law in the case of the coils with stationary current and the Ampere law in the case of the permanent magnets. The study includes the characterization of the ECR areas as well as the display of the vector field all of this applied to the magnetic traps mentioned above. Additionally, in the case of the mirror type trap and minimum-B trap, it is determined the ratio of the mirror, because it is important in the description of confinement.

* Bachelor thesis.

[†] Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Mao Tsetung Murillo Acevedo., Ph.D. (C).

INTRODUCCIÓN

El confinamiento magnético busca atrapar y retener partículas cargadas aprovechando principalmente dos propiedades del campo magnético. La Primera es que toda partícula tiende a moverse en forma de espiral a lo largo de las líneas de campo, de tal manera que no se afecta su desplazamiento en dirección paralela al mismo. La segunda es que de acuerdo con la magnitud del campo, la partícula es expulsada o reflejada a las zonas donde el campo es débil, lo que es conocido como fenómeno de espejo magnético [Greyner 1998]. Atendiendo la relevancia de estas premisas, se han propuesto y construido diversos dispositivos tratando de encontrar una configuración apropiada de la geometría y magnitud del campo, y así prolongar el tiempo de vida de las partículas al interior de la trampa. Dicha tarea ha sido el objeto de estudio en numerosos trabajos a partir de la mitad del siglo pasado [Geller 1996].

Actualmente en el Grupo de Investigación de Física y Tecnología del Plasma y Corrosión (FITEK), adscrito a la Escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander, bajo la dirección del Ph.D. Valeriy D. Dugar-Zhabon, se está realizando un estudio teórico de plasmas RCE (Resonancia Ciclotrónica Electrónica) confinados en trampas magnéticas tipo espejo, mínimo-B y cero-B [Dugar-Jabon 2002]. Para la generación de estos campos de confinamiento, suelen ser utilizados elementos tales como bobinas e imanes permanentes [Geller 1996], [Baiborodov 1963], [Dugar-Jabon 2000]. Razón por la cual es necesario elaborar una herramienta que permita reproducir los campos producidos por dichos elementos.

En este trabajo se determina el campo magnético producido por hilos en línea recta, circulares y elípticos por los cuales fluyen corrientes estacionarias. Generamos un campo bobinar a partir de la superposición de las contribuciones producidas por espiras circulares con corriente. También calculamos el campo de un imán en forma de paralelepípedo con sección transversal rectangular y magnetización constante. La obtención de estos campos se reduce a la solución de múltiples integrales, ante la imposibilidad de encontrar soluciones analíticas para todas las expresiones, es necesario utilizar métodos numéricos.

Con ayuda de estos resultados y los esquemas físicos presentados en [Geller 1996], [Baiborodov 1963] y [Dugar-Jabon 2000], se determinan los campos de confinamiento para cada una de las trampas, las zonas RCE y la razón de espejo para las trampas tipo espejo y mínimo-B [Geller 1996], dada la importancia de estas cantidades en la descripción del confinamiento del plasma.

CAPÍTULO 1

HILOS CON CORRIENTE ESTACIONARIA

1.1 CORRIENTES ESTACIONARIAS

Por corrientes estacionarias entendemos un flujo continuo que no produce variación de la nulidad de carga en ningún lugar del conductor [Griffiths 1999]. Cuando una corriente fluye su magnitud es I , la cual debe ser igual en todos los puntos del conductor para cualquier instante, en caso contrario tendríamos acumulaciones de carga lo que impediría mantener el carácter de corriente estacionaria. Esta propiedad es usada principalmente en magnetostática y se puede representar matemáticamente haciendo nula la derivada parcial de la densidad de carga respecto a la variable temporal:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

Las corrientes estacionarias al igual que las cargas puntuales no son reales, estas hacen parte de un modelo que pretende explicar algunos fenómenos de naturaleza magnética, la gran mayoría presentes únicamente en los libros de texto; sin embargo pueden ser tomadas como aproximaciones bastante aceptables para fines prácticos.

1.2 LEY DE BIOT-SAVART

En 1819 el físico y químico danés Hans Christian Oerstedt observó que los hilos con corriente estacionaria generan campos magnéticos, sus estudios permitieron concluir que las corrientes son fuentes de campo magnético. Entre los años 1820 – 1825, los físicos franceses Jean Baptiste Biot, Felix Savart, Andre Marie Ampere entre otros, plantearon y llevaron a cabo muchos experimentos, los cuales permitieron establecer una ley que cuantifica la relación entre la corriente y el campo magnético [Greiner 1998]. Esta relación es conocida como la ley de Biot-Savart, la cual es presentada a continuación:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{I d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (1.2)$$

donde $d\mathbf{r}'$ - elemento de longitud vectorial a lo largo del hilo o conductor, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ - vector que va desde la posición del diferencial de camino hasta el punto de observación y c - velocidad de la luz en el vacío. Cabe señalar que la integración se realiza a lo largo del camino por el cual circula la corriente.

Finalmente contamos con una expresión que cuantifica la relación entre la corriente y el campo. La cual, no solo depende de la magnitud de la corriente que circula por el hilo y del punto en el que se desee calcular el campo magnético, sino que además incluye la geometría del conductor. Con ayuda de esta ley, se determina el campo producido por conductores con diferentes formas.

1.3 HILO FINITO EN LÍNEA RECTA

Empezamos tomando un hilo finito en línea recta, esta elección se debe a que tal caso posee una solución analítica, la cual nos permitirá corroborar la exactitud de nuestros cálculos. Posteriormente modelaremos hilos circulares y elípticos (espiras), con el objetivo de recrear el campo generado por una bobina a partir de la superposición de las contribuciones producidas por espiras circulares. Consideramos un hilo recto finito ubicado en el espacio, por el cual circula una corriente estacionaria tal y como se muestra a continuación:

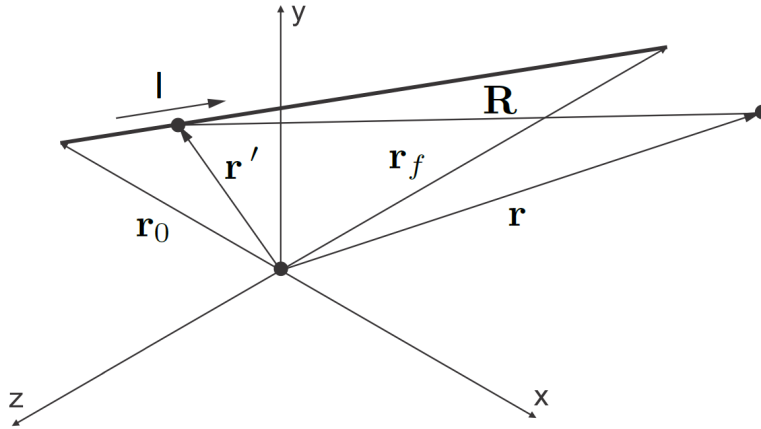


Figura 1.1: Hilo Finito en Línea Recta con Corriente Estacionaria.

De acuerdo con (1.2) es necesario describir la geometría del conductor, es decir, establecer el camino por el cual circula la corriente. Para ello tomamos la siguiente expresión $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_0)\tau + \mathbf{r}_0$, donde $0 \leq \tau \leq 1$, en la cual se relaciona la forma recta del conductor a través de un parámetro τ . A partir de \mathbf{r}' podemos obtener la correspondiente expresión para un elemento infinitesimal de camino:

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{s} d\tau \quad \text{donde} \quad \mathbf{s} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_0 \quad (1.3)$$

Ahora, necesitamos una expresión para \mathbf{R} de acuerdo a lo establecido por (1.2). Para facilitar la notación hemos tomado $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \chi \hat{\mathbf{i}} + \gamma \hat{\mathbf{j}} + \zeta \hat{\mathbf{k}}$.

$$\mathbf{R} = (\chi - s_x\tau) \hat{\mathbf{i}} + (\gamma - s_y\tau) \hat{\mathbf{j}} + (\zeta - s_z\tau) \hat{\mathbf{k}} \quad (1.4)$$

A partir de (1.4) podemos determinar una expresión para el módulo de \mathbf{R} con la siguiente estructura $R = \sqrt{a - 2b\tau + g\tau^2}$ donde $a = \chi^2 + \gamma^2 + \zeta^2$, $b = \chi s_x + \gamma s_y + \zeta s_z$ y $g = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$.

Al introducir estos resultados en la ley de Biot-Savart descrita en (1.4), obtenemos la expresión que vamos a utilizar para calcular el valor del campo magnético producido por un hilo en las condiciones de interés:

$$\mathbf{B} = \frac{I}{c} \mathbf{s} \times \mathbf{D} \quad (1.5)$$

$$\text{Donde: } \mathbf{D} = \int_0^1 \frac{(\chi - s_x \tau) d\tau}{[a - 2b\tau + g\tau^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{i}} + \int_0^1 \frac{(\gamma - s_y \tau) d\tau}{[a - 2b\tau + g\tau^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{j}} + \int_0^1 \frac{(\zeta - s_z \tau) d\tau}{[a - 2b\tau + g\tau^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{k}}$$

La expresión (1.5) requiere la previa solución del conjunto de integrales presentado anteriormente. Dicho sistema será resuelto de dos formas; Primero plantearemos el método numérico, en virtud del cual determinaremos el valor de las integrales y luego presentaremos la solución analítica obtenida.

1.3.1. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS INTEGRALES

A continuación, presentamos la aproximación que utilizaremos para el cálculo de integrales en aquellos casos en los cuales no sea posible establecer una solución analítica:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{24} \sum_{i=0}^{n-1} \left[24 f(\bar{x}_i) + f''(\bar{x}_i) (\Delta x)^2 \right] \quad (1.6)$$

Donde: $f(x)$ - función a integrar, a y b - límites de la integral, Δx - paso, n - número de segmentos en los que se divide el intervalo a integración, $\bar{x}_i = x_i + \Delta x/2$ con $i = 0, 1, 2, \dots$ donde $x_0 = a$ - variable a integrar para la función aproximada.

1.3.2. SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LAS INTEGRALES

Como podemos notar, las tres integrales poseen idéntica estructura, por lo tanto basta resolver una de ellas para obtener la solución completa al sistema. Inicialmente, tomamos el primer término y trabajamos en el denominador del integrando, tenemos $a - 2b\tau + g\tau^2$ y lo reescribimos como $g[(\tau - b/g)^2 + q^2]$, donde $q^2 = a/g - (b/g)^2$ para reducir y facilitar la notación. Gracias a esto, podemos hacer el siguiente cambio de variable, sea $u = \tau - b/g$, al derivarla obtenemos $du = d\tau$. Luego de introducir estos resultados en el primer término de \mathbf{D} definido en (1.5), este toma la siguiente forma:

$$D_x = g^{-\frac{3}{2}} \left(\chi - \frac{s_x b}{g} \right) I_1 - s_x g^{-\frac{3}{2}} I_2 \quad (1.7)$$

Donde: I_1 e I_2 - Integrales por resolver. Para determinar la solución analítica a la primera integral, utilizamos una sustitución trigonométrica, sea $u = q \tan \theta$, al derivar obtenemos $du = q \sec^2 \theta d\theta$. Al introducir estos valores en I_1 , podemos obtener su solución mediante integración directa. A continuación presentamos la expresión obtenida para esta integral:

$$I_1 = \int \frac{du}{[u^2 + q^2]^{\frac{3}{2}}} = q^{-2} \int \cos \theta d\theta = q^{-2} [\sin \theta] = q^{-2} g^{-1} \left[\frac{g\tau - b}{\sqrt{\left(\tau - \frac{b}{g}\right)^2 + q^2}} \right]_0^1 \quad (1.8)$$

Ahora, tomamos I_2 y aplicamos la misma sustitución trigonométrica. Al igual que I_1 , ésta toma la forma de una integral cuya solución podemos determinar en forma directa. Observemos:

$$I_2 = \int \frac{u du}{[u^2 + q^2]^{\frac{3}{2}}} = q^{-1} \int \sin \theta d\theta = q^{-1} [-\cos \theta] = - \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\tau - \frac{b}{g}\right)^2 + q^2}} \right]_0^1 \quad (1.9)$$

Finalmente, introducimos los resultados obtenidos en (1.8) y (1.9) en la expresión (1.7). Luego de aplicar los correspondientes límites de integración, obtenemos la solución para el primer termino.

$$D_x = \left(\chi - \frac{s_x b}{g} \right) \left(\frac{1}{ga - b^2} \right) \left[\frac{g - b}{\sqrt{a - 2b + g}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \right] + \frac{s_x}{g} \left[\frac{1}{\sqrt{a - 2b + g}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right] \quad (1.10)$$

Los otros terminos presentes en \mathbf{D} , se determinan mediante un proceso análogo al desarrollado para calcular D_x . A continuación presentamos las expresiones para D_y y D_z :

$$\begin{aligned} D_y &= \left(\gamma - \frac{s_y b}{g} \right) \left(\frac{1}{ga - b^2} \right) \left[\frac{g - b}{\sqrt{a - 2b + g}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \right] + \frac{s_y}{g} \left[\frac{1}{\sqrt{a - 2b + g}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right] \\ D_z &= \left(\zeta - \frac{s_z b}{g} \right) \left(\frac{1}{ga - b^2} \right) \left[\frac{g - b}{\sqrt{a - 2b + g}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \right] + \frac{s_z}{g} \left[\frac{1}{\sqrt{a - 2b + g}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.3.3. EXPERIMENTO DE PRUEBA

Estudiaremos un caso particular correspondiente a un hilo finito en línea recta, cuya longitud es 200[cm] y por el cual circula una corriente estacionaria igual a $5,0 \times 10^{13}$ [Statamperio] (1 [Statamperio] $\cong 3,3356 \times 10^{-10}$ [A]), el cual esta situado a lo largo del eje Z de coordenadas, tal y como es representado en el siguiente esquema:

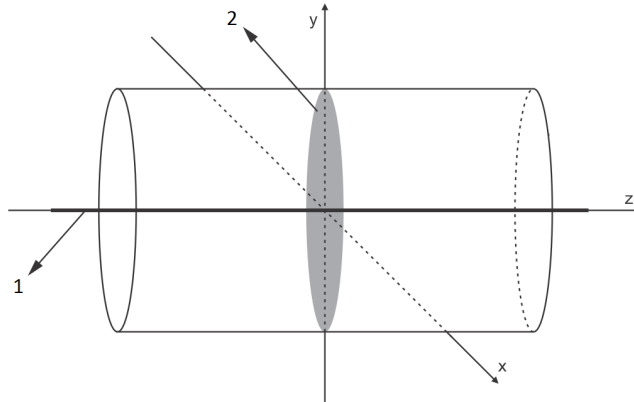


Figura 1.2: Orientación del Sistema de Referencia Espacial: 1-Hilo Recto Finito y 2-Plano Central Transversal (PCT).

1.3.4. VISUALIZACIÓN DEL CAMPO VECTORIAL

A continuación, presentamos el campo vectorial obtenido mediante la aplicación del método numérico para la solución de las integrales (1.5), correspondiente al hilo recto finito descrito anteriormente:

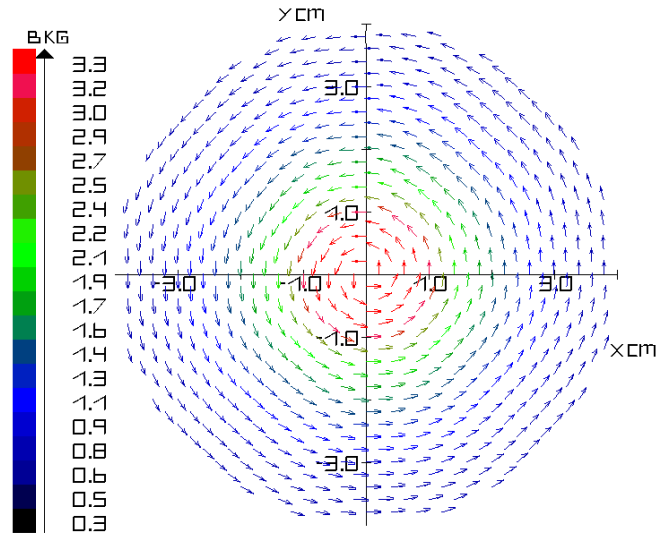


Figura 1.3: Vista XY del Campo Magnético generado por un Hilo Recto en el PCT.

En la figura 1.3 podemos observar el carácter circular del campo alrededor del hilo (Vease Figura 1.4) y como la magnitud disminuye conforme nos alejamos de él en dirección radial, tal y como es esperado.

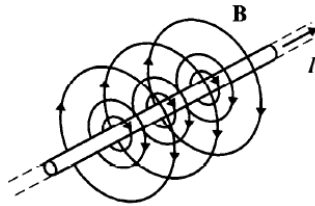


Figura 1.4: Líneas del Campo producido por un Hilo Recto. Fuente [Greyner 1998].

1.3.5. PRUEBA DE EXACTITUD DE LOS RESULTADOS

Tomamos al azar 15 puntos del espacio, teniendo en cuenta que estos no deben coincidir con el hilo conductor, los cuales han sido denominados experimentos 1-15 y expuestos en la Tabla 1.1. Luego, determinamos las componentes del campo magnético en cada uno de esos puntos, utilizando la solución analítica de las integrales obtenida en la sección (1.3.2) y el método aproximado expuesto en (1.3.1). Esos resultados son presentados en la Tabla 1.2, con excepción de la tercera componente, ya que en este sistema dicha componente es nula. Gracias a lo anterior, se logra verificar la exactitud de los valores obtenidos mediante el cálculo numérico de integrales, ya que al comparar estos resultados con los conseguidos analíticamente, no se presentan errores superiores al 0,001 %. Es importante resaltar

que este test de exactitud, nos brinda confiabilidad en los resultados, lo cual nos permite continuar implementando dicha aproximación numérica en futuras simulaciones.

Experimento	Punto de Interes		
#	x [cm]	y [cm]	z [cm]
1	-0,5	-0,5	-12,5
2	-1,5	1,0	-10,5
3	-2,5	-2,0	8,5
4	-3,5	3,0	4,5
5	0,5	-0,5	-12,5
6	1,5	2,0	-9,5
7	2,5	-2,0	6,5
8	3,5	3,0	2,5
9	1,0	0,0	0,0
10	-1,0	0,0	0,0
11	0,0	1,0	0,0
12	0,0	-1,0	0,0
13	3,5	3,0	-8,5
14	-1,5	3,0	7,5
15	3,5	-2,0	-0,5

Tabla 1.1: Puntos del Espacio seleccionados para el Test de Exactitud.

Exp.	Solución Analítica		Solución Numérica	
	B_x [G]	B_y [G]	B_x [G]	B_y [G]
1	3333,245993	-3333,245993	3333,246044	-3333,246044
2	-1025,468789	-1538,203183	-1025,468789	-1538,203183
3	650,066133	-812,582666	650,066133	-812,582666
4	-470,085999	-548,433666	-470,085999	-548,433666
5	3333,245993	3333,245993	3333,246044	3333,246044
6	-1066,324342	799,743256	-1066,324342	799,743256
7	650,069183	812,586479	650,069183	812,586479
8	-470,088097	548,436113	-470,088097	548,436113
9	-0,000000	3333,166679	0,000000	3333,169973
10	-0,000000	-3333,166679	0,000000	-3333,169973
11	-3333,166679	0,000000	-3333,169973	0,000000
12	3333,166679	0,000000	3333,169973	0,000000
13	-470,078120	548,424474	-470,078120	548,424474
14	-888,380817	-444,190409	-888,380817	-444,190409
15	409,923458	717,366051	409,923458	717,366051

Tabla 1.2: Resultados obtenidos usando la solución numérica y analítica.

1.4 HILO CIRCULAR

Consideramos un hilo circular de radio r , ubicado sobre el plano XY cuyo centro geométrico esta situado en $(0, 0, z_s)$ y por el cual circula una corriente estacionaria. Vamos a trazar el camino por el que circula la corriente, para este caso contamos con la ecuación de una circunferencia en coordenadas cartesianas. Usando trigonometría logramos determinar una expresión para cada coordenada x y y , las cuales describen el camino circular a través de un parámetro φ , el cual permite establecer los límites y la variable de integración, con lo cual obtenemos $\mathbf{r}' = r \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + r \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} + z_s \hat{\mathbf{k}}$.

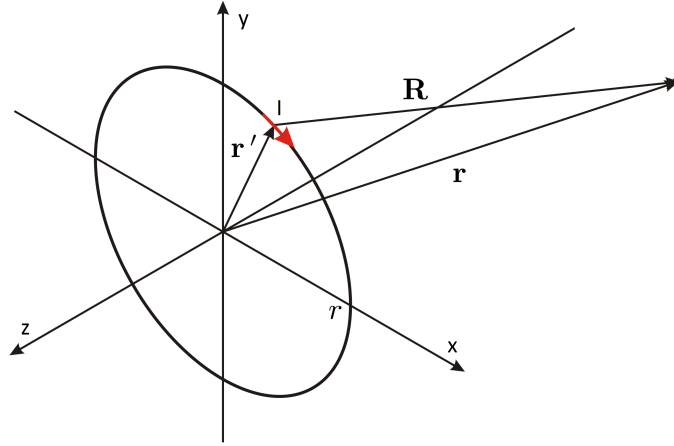


Figura 1.5: Hilo Circular con Corriente Estacionaria.

A partir de \mathbf{r}' determinamos una expresión para el elemento infinitesimal de camino:

$$d\mathbf{r}' = r [-\sin \varphi \hat{\mathbf{i}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{j}}] d\varphi \quad (1.12)$$

Con estos resultados y de acuerdo con (1.4), encontramos una expresión para \mathbf{R} , observemos:

$$\mathbf{R} = (x - r \cos \varphi) \hat{\mathbf{i}} + (y - r \sin \varphi) \hat{\mathbf{j}} + (z - z_s) \hat{\mathbf{k}} \quad (1.13)$$

Al introducir estos resultados en la ley de Biot-Savart, obtenemos una ecuación que nos permite calcular el campo magnético generado por un hilo circular en cualquier punto del espacio.

$$\mathbf{B} = \frac{I r}{c} \int_0^{2\pi} \frac{[(z - z_s) \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + (z - z_s) \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} + (r - y \sin \varphi - x \cos \varphi) \hat{\mathbf{k}}] d\varphi}{[(x - r \cos \varphi)^2 + (y - r \sin \varphi)^2 + (z - z_s)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.14)$$

A continuación, estudiaremos el caso correspondiente a un hilo circular de radio $r = 4,5[\text{cm}]$, por el cual circula una corriente $I = 2,7 \times 10^{12}[\text{statamperes}]$ y con $z_s = 0,0[\text{cm}]$ (Vease Figura 1.6). El campo vectorial obtenido para este caso, es presentado en la Figura 1.7, en la cual podemos apreciar que la magnitud del campo es mayor en la región proxima al hilo, y disminuye conforme nos alejamos de el, a lo largo del eje de la espira, el cual coincide con el eje Z de coordenadas. Adicionalmente, podemos observar la curvatura que poseen las líneas de campo en la región cercana al conductor. Debido a que la espira posee un radio mayor al radio de visualización del campo, tales las líneas no alcanzan a cerrarse (Vease Figura 1.8). Para el caso de la espira circular, no contamos con una solución analítica general que nos permita determinar el valor exacto de cada una de las integrales que definen las componentes del campo, sin embargo, contamos con una solución que nos permite conocer el valor del campo en puntos ubicados sobre el eje de la espira [Griffiths 1999]. Dicha solución, es utilizada como valor exacto y punto de comparación para cotejar los datos obtenidos mediante la implementación

del método numérico. Para efectuar el test que ratifica la exactitud de los resultados, hemos tomado algunos puntos sobre el eje de la espira y determinado el valor del campo utilizando ambos métodos, los porcentajes de error obtenidos no superan el 0,001 %.

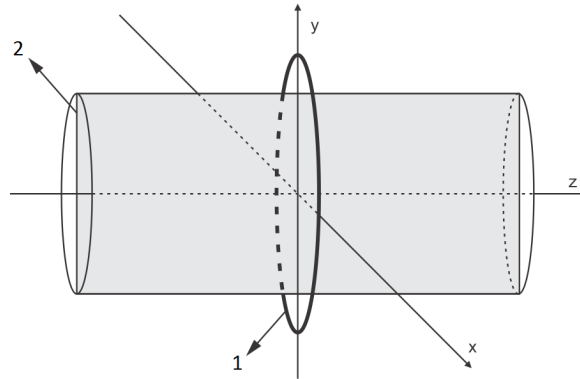


Figura 1.6: Orientación del Sistema de Referencia Espacial: 1-Espira Circular y 2-Plano Central Longitudinal (PCL).

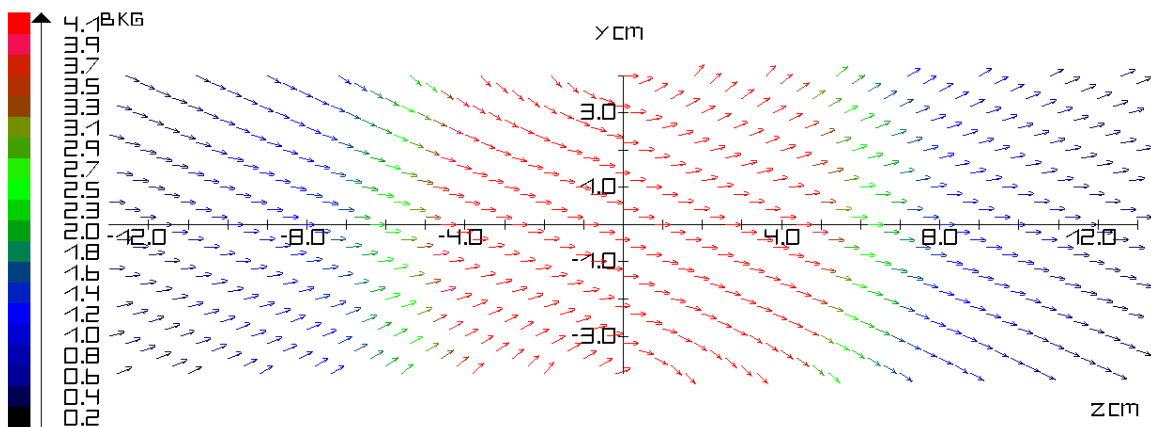


Figura 1.7: Vista YZ del Campo Magnético generado por un Hilo Circular en el PCL.

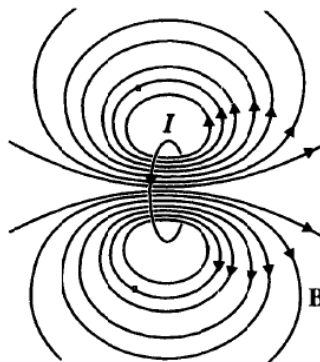


Figura 1.8: Líneas de Campo producido por un Hilo Circular. Fuente [Greyner 1998]

1.5 HILO ELÍPTICO

Consideramos una espira elíptica con semiejes a y b , ubicada sobre el plano XY cuyo centro geométrico esta situado en $(0, 0, z_s)$ y por el cual circula una corriente estacionaria (Vease figura 1.9). Ahora, vamos a describir la forma del conductor, para ello contamos con la ecuación de una elipse en coordenadas cartesianas, gracias a la trigonometría logramos determinar una expresión para cada coordenada x y y , quienes describen el camino elíptico a través de un parámetro φ , el cual, establece los límites y la variable de integración, con lo cual obtenemos $\mathbf{r}' = a \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + b \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} + z_s \hat{\mathbf{k}}$. A partir de \mathbf{r}' , obtenemos la expresión para el elemento infinitesimal de camino:

$$d\mathbf{r}' = [-a \sin \varphi \hat{\mathbf{i}} + b \cos \varphi \hat{\mathbf{j}}] d\varphi \quad (1.15)$$

La expresión obtenida para \mathbf{R} es presentada a continuación:

$$\mathbf{R} = (x - a \cos \varphi) \hat{\mathbf{i}} + (y - b \sin \varphi) \hat{\mathbf{j}} + (z - z_s) \hat{\mathbf{k}} \quad (1.16)$$

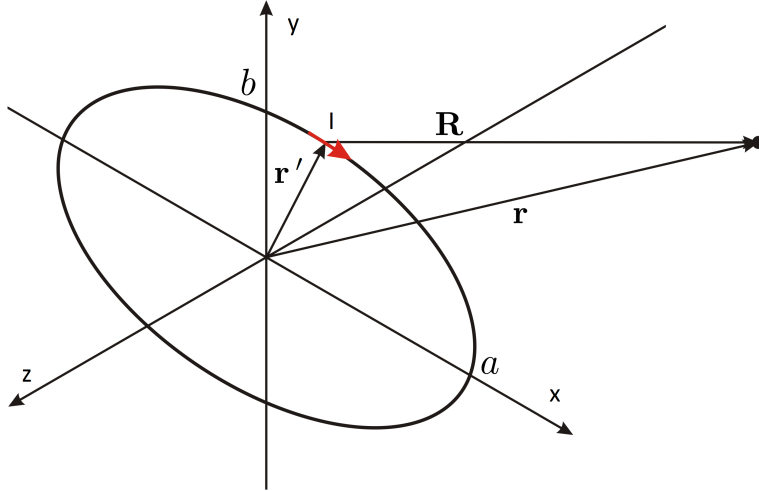


Figura 1.9: Hilo Elíptico con Corriente Estacionaria.

Ahora, al introducir estos resultados en la ley de Biot-Savart, obtenemos una ecuación que nos permite calcular el campo magnético generado por un hilo elíptico en cualquier lugar del espacio:

$$\mathbf{B} = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{[b(z - z_s) \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + a(z - z_s) \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} + (ab - ay \sin \varphi - bx \cos \varphi) \hat{\mathbf{k}}] d\varphi}{[(x - a \cos \varphi)^2 + (y - b \sin \varphi)^2 + (z - z_s)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.17)$$

Para esta geometría, hemos estudiado dos casos: El primero, consiste en tomar los semiejes iguales ($a = b = 4,5[\text{cm}]$), con lo cual, este hilo pasa a convertirse en una espira circular. El valor de la corriente que circula por el hilo es el mismo utilizado para el caso del hilo circular. El campo vectorial obtenido para el primer caso, es idéntico al presentado en la Figura 1.7, tal y como era esperado. En el segundo caso, se tomaron los valores correspondientes a los semiejes, de tal forma que un semieje corresponde al doble del otro ($2a = b = 9,0[\text{cm}]$). El campo vectorial obtenido para este caso es presentado en la Figura 1.10. En el cual, podemos observar como las líneas de campo en la región cercana al conductor, no alcanzan a cambiar su dirección de la misma forma que en el caso de la geometría circular, debido a que el semieje sobre el eje Y, es el doble del radio de la espira circular.

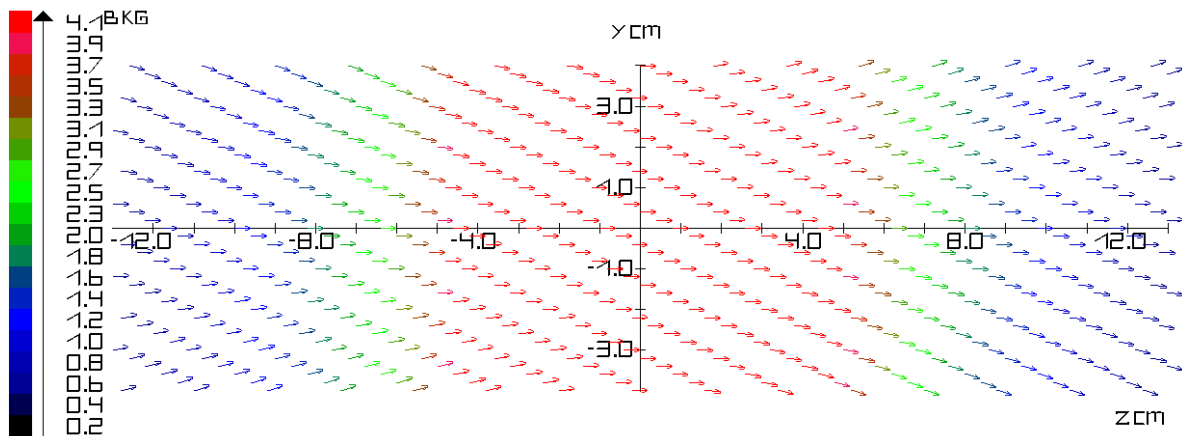


Figura 1.10: Vista YZ del Campo Magnético generado por un Hilo Elíptico en el PCL.

Adicionalmente, la magnitud del campo en el origen del sistema de coordenadas para el caso de la espira circular es 125,6637[G], mientras que para el hilo elíptico 96,884482[G].

1.6 BOBINA MAGNÉTICA

Vamos a obtener el campo magnético generado por una bobina, a partir de la superposición de las contribuciones producidas por espiras circulares por las cuales circula una corriente estacionaria.

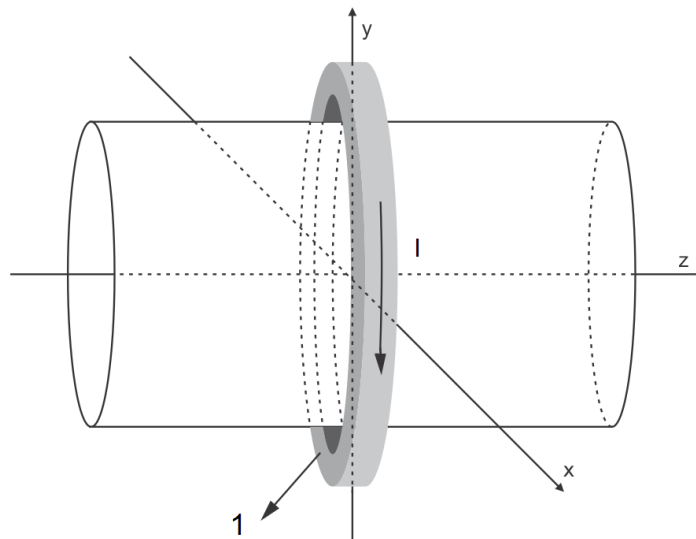


Figura 1.11: Bobina Magnética alimentada con Corriente Estacionaria.

Para este caso, hemos determinado el campo producido por una bobina en las siguientes condiciones: la corriente que circula por las espiras es $I = 9,6 \times 10^{12}$ [statamperes], posee 8 espiras longitudinales y 5 espiras transversales, el radio de la primera espira es 5,0[cm] y el diámetro del alambre es de 0,5[cm].

En la Figura 1.12 presentamos el campo obtenido, el cual es más intenso en la región central debido a su cercanía a las espiras que constituyen la bobina, observemos:

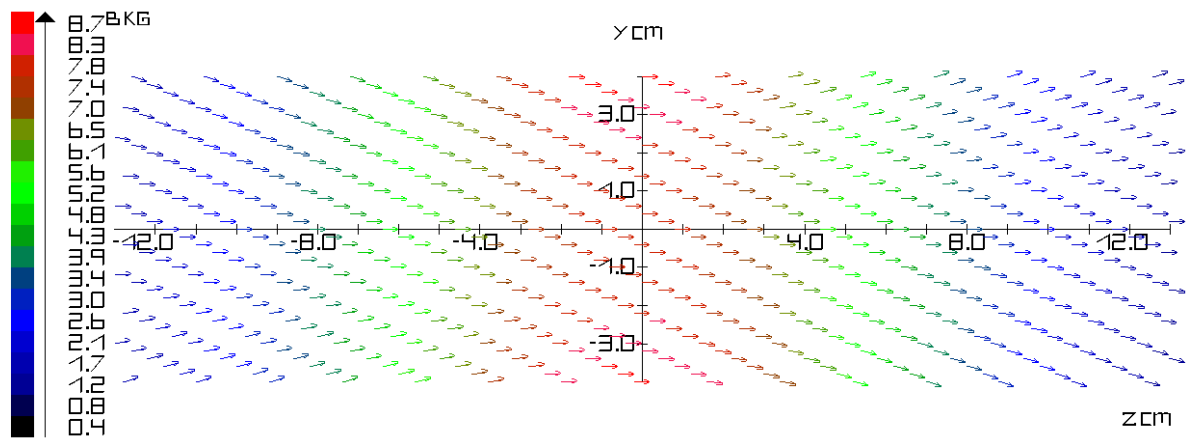


Figura 1.12: Vista YZ del Campo Magnético generado por una Bobina en el PCL.

CAPÍTULO 2

IMANES

Las expresiones que rigen la magnetostática están consignadas en dos leyes fundamentales, la primera de ellas es la ley de Gauss para el campo magnético y la segunda es la ley de Ampere, dichas leyes representan el punto de partida que permite determinar el campo producido por un material magnetizado. Para deducir una expresión que permita obtener el campo magnético producido por un imán es necesario tomar en cuenta algunas propiedades matemáticas, como primera medida en las regiones donde la densidad de corriente es nula, la expresión para la ley de Ampere se reduce a $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, este hecho nos permite introducir un potencial escalar magnético ϕ_m , gracias al cual es posible escribir a \mathbf{H} de la siguiente manera:

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m \quad (2.1)$$

Esta expresión es válida solo en las regiones en las que tomamos $\mathbf{J} = 0$, es decir la región que no es imán, la cual es de interés para nosotros, ya que esta es la zona en la que deseamos conocer el valor del campo. En nuestro estudio no estamos interesados en obtener el campo al interior del material, no obstante es pertinente mencionar la forma de hallar éste. Para ello se cuenta con la expresión (2.2), que permite analizar lo que ocurre con el campo al interior del material (sin corrientes de conducción), introduciendo en las ecuaciones al vector de magnetización.

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} \quad (2.2)$$

Vamos a considerar un cuerpo que posee una magnetización bien definida $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, tal descripción concuerda con la estructura que presentan los materiales ferromagnéticos, en los cuales la magnetización prácticamente no está ligada a los campos externos para intensidades de campo moderadas [Jackson 1998]. Si aplicamos la divergencia a la expresión (2.2), considerando la ley de Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, y el resultado obtenido en (2.1); aparece una expresión equivalente a la ecuación de Poisson en electrostática útil en magnetostática $\nabla^2 \phi_m = -4\pi \rho_m$ donde $\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ - densidad efectiva de carga magnética, la cual representa las fuentes que producen el campo magnético.

La solución expuesta en [Jackson 1998] para ϕ_m es la siguiente:

$$\phi_m = \int_V \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{M} dV \quad (2.3)$$

donde \mathbf{M} - vector de magnetización local, por lo tanto ϕ_m representa el potencial escalar para una distribución dipolar, con lo cual es posible afirmar que una configuración de forma arbitraria con

una magnetización bien definida produce un campo dipolar orientado por el momento magnético total de la distribución. Ahora es posible llevar la expresión (2.3) a una forma mas general [Jackson 1998]:

$$\phi_m = \int_{s(V)} \frac{\mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}}{R} - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{R} dV \quad (2.4)$$

donde $s(V)$ - superficie que envuelve al volumen correspondiente al material. Esta expresión nos permite modelar imanes teniendo en cuenta algunas propiedades del material, basta con definir \mathbf{M} y luego asignar la geometría del objeto.

2.1 IMÁN CON MAGNETIZACIÓN CONSTANTE

Una aplicación importante resulta cuando se considera una magnetización uniforme, ya que el segundo termino a la derecha de (2.4) se anula, y solo las contribuciones producidas por las integrales sobre las superficies son las responsables de la generación del campo. En nuestro trabajo vamos a simular el campo producido por un material con magnetización constante, en forma de paralelepípedo y sección transversal rectangular, de acuerdo al esquema presentado en la figura 2.1.

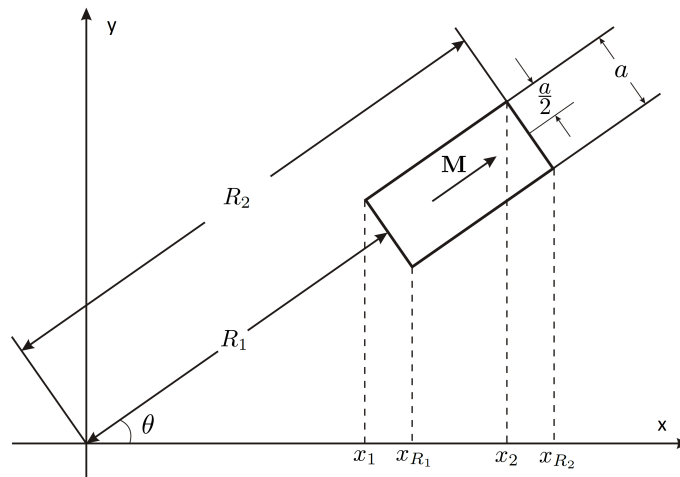


Figura 2.1: Sistema de Referencias Cuerpo Magnetizado.

A partir de la figura 2.1 describimos la magnetización presente en la barra:

$$\mathbf{M} = \begin{cases} M_0 [\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}] & \text{En la barra} \\ 0 & \text{Afuera de la barra} \end{cases} \quad (2.5)$$

Para determinar el campo magnético producido por un material en las condiciones ya mencionadas, contamos las expresiones (2.1) y (2.4). Al analizar la barra magnetizada, notamos que solo contribuyen dos superficies en la formación del campo, aquellas en las cuales el vector de magnetización y el diferencial de superficie son paralelos o antiparalelos, las cuales hemos denotado como Π_1 y Π_2 . Para el resto, el producto punto entre estas dos cantidades se hace nulo, ya que en esos caso, tales vectores resultan perpendiculares entre sí.

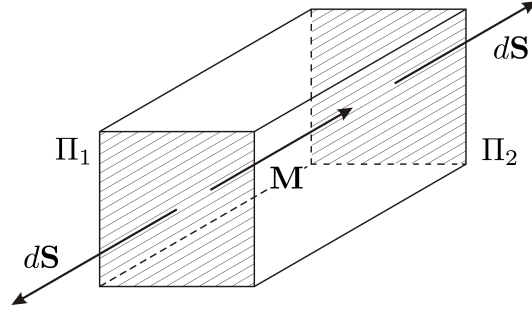


Figura 2.2: Cuerpo con Magnetización Constante.

A continuación presentamos la expresión que caracteriza a las fuentes del campo magnético:

$$x' \cos \theta + y' \sin \theta = R_i \quad (2.6)$$

El subíndice que acompaña a R puede tomar dos posibles valores, $i = 1$ o $i = 2$ dependiendo del plano.

Ahora, definimos el diferencial de superficie de la siguiente forma:

$$d\mathbf{S} = \begin{cases} dz' \sqrt{(dx')^2 + (dy')^2} [\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}] & \text{Tapa superior de la barra} \\ -dz' \sqrt{(dx')^2 + (dy')^2} [\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}] & \text{Tapa inferior de la barra} \end{cases} \quad (2.7)$$

Podemos transformar esta expresión, en una cuya estructura sea más cómoda para trabajar, para lograrlo primero extraemos del radical el diferencial dx' , luego tomamos la expresión (2.6), al derivarla obtenemos $dy'/dx' = -\cot \theta$. Al introducir este resultado en (2.7) y utilizando trigonometría, el diferencial de superficie toma la siguiente estructura:

$$d\mathbf{S} = \frac{dz' dx'}{|\sin \theta|} [\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}] \quad (2.8)$$

A continuación, se establecen los límites de integración para la coordenada x' :

$$\Pi_1 = \begin{cases} x_1 = R_1 \cos \theta - \frac{a}{2} \sin \theta \\ x_{R_1} = R_1 \cos \theta + \frac{a}{2} \sin \theta \end{cases} \quad \text{y} \quad \Pi_2 = \begin{cases} x_2 = R_2 \cos \theta - \frac{a}{2} \sin \theta \\ x_{R_2} = R_2 \cos \theta + \frac{a}{2} \sin \theta \end{cases} \quad (2.9)$$

Igualmente, presentamos los límites para la coordenada z' :

$$z_1 = -\frac{b}{2} \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{b}{2} \quad (2.10)$$

Tomamos los resultados obtenidos en (2.5), (2.6), (2.8), (2.9) y (2.10), al introducirlos en (2.4), alcanzamos la siguiente expresión para el potencial escalar magnético:

$$\phi_m = \phi_2 - \phi_1 \quad (2.11)$$

Donde ϕ_1 corresponde al potencial generado por la tapa inferior del paralelepípedo y ϕ_2 al producido por la tapa superior.

A continuación presentamos sus correspondientes expresiones:

$$\phi_1 = \frac{M_0}{|\sin \theta|} \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_{R_1}} \frac{dz' dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + \left(y - \frac{R_1}{\sin \theta} + x' \cot \theta\right)^2 + (z-z')^2}}$$

$$\phi_2 = \frac{M_0}{|\sin \theta|} \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_2}^{x_{R_2}} \frac{dz' dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + \left(y - \frac{R_2}{\sin \theta} + x' \cot \theta\right)^2 + (z-z')^2}}$$
(2.12)

Si bien estas expresiones poseen una solución analítica [Ravaud 2009], en nuestro trabajo las resolvemos de la siguiente manera: Las expresiones para ϕ_1 y ϕ_2 poseen una estructura idéntica, por lo tanto basta con resolver una de ellas para obtener la solución completa del potencial escalar magnético. Vamos a trabajar sobre ϕ_1 , lo primero que haremos será determinar la solución analítica para la integral en z' , denotada como T_1 . Tal solución, se obtiene en dos etapas, en la primera realizamos el siguiente cambio de variable, sea $v = z - z'$, al derivarla obtenemos $dz' = -dv$. Con lo cual, la integral obtiene la estructura:

$$T_1 = - \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + r^2}} \quad \text{Donde} \quad r^2 = (x-x')^2 + \left(y - \frac{R_1}{\sin \theta} + x' \cot \theta\right)^2$$
(2.13)

En la segunda etapa efectuamos una sustitución trigonométrica, sea $v = r \tan t$, al derivarla obtenemos $dv = r \sec^2 t dt$. Gracias a esto, T_1 toma la forma de una integral cuya solución aparece en tablas:

$$T_1 = - \int \sec t dt = - \ln |\sec t + \tan t|$$
(2.14)

Luego de regresar a la variable inicial y aplicar los límites de integración, tal integral toma la forma $T_1 = T_{1+} - T_{1-}$. En virtud de la solución obtenida para T_1 , podemos reescribir el potencial generado por la tapa inferior como $\phi_1 = \phi_{1+} - \phi_{1-}$. En forma análoga, obtenemos la solución para el término que complementa el potencial escalar magnético. Finalmente, la expresión (2.11) toma la forma:

$$\phi_m = \phi_{2+} - \phi_{2-} - \phi_{1+} + \phi_{1-}$$
(2.15)

Cuyos términos son descritos a continuación:

$$\phi_{1+} = \frac{M_0}{|\sin \theta|} \int_{x_1}^{x_{R_1}} dx' \ln \left(z - z_1 + \sqrt{(x-x')^2 + \left(y - \frac{R_1}{\sin \theta} + x' \cot \theta\right)^2 + (z-z_1)^2} \right)$$

$$\phi_{1-} = \frac{M_0}{|\sin \theta|} \int_{x_1}^{x_{R_1}} dx' \ln \left(z - z_2 + \sqrt{(x-x')^2 + \left(y - \frac{R_1}{\sin \theta} + x' \cot \theta\right)^2 + (z-z_2)^2} \right)$$

$$\phi_{2+} = \frac{M_0}{|\sin \theta|} \int_{x_2}^{x_{R_2}} dx' \ln \left(z - z_1 + \sqrt{(x-x')^2 + \left(y - \frac{R_2}{\sin \theta} + x' \cot \theta\right)^2 + (z-z_1)^2} \right)$$

$$\phi_{2-} = \frac{M_0}{|\sin \theta|} \int_{x_2}^{x_{R_2}} dx' \ln \left(z - z_2 + \sqrt{(x-x')^2 + \left(y - \frac{R_2}{\sin \theta} + x' \cot \theta\right)^2 + (z-z_2)^2} \right)$$
(2.16)

Aprovechando la estructura obtenida para el potencial escalar, podemos determinar una solución analítica para todas las componentes del campo magnético. Vamos a trabajar con la primera componente: acorde con la expresión 2.1, debemos aplicar la derivada parcial respecto a la variable espacial x sobre el potencial. Gracias a esto, obtenemos una expresión para esta componente con la siguiente

estructura $B_x = B_{x_{2+}} - B_{x_{2-}} - B_{x_{1+}} + B_{x_{1-}}$. Todos los terminos que conforman la primera componente, poseen la misma estructura, razón por la cual, basta con determinar la solución para uno de ellos, y de esta forma podemos alcanzar la solución completa de B_x . Trabajamos en el primer termino:

$$B_{x_{2+}} = -\frac{M_0}{|\sin \theta|} \int_{x_2}^{x_{R_2}} \frac{(x - x') dx'}{\sqrt{r^2 + (z - z_1)^2} \left(z - z_1 + \sqrt{r^2 + (z - z_1)^2} \right)} \quad (2.17)$$

A partir de la expresión (2.13) podemos elaborar el siguiente cambio de variable:

$$r^2 = \frac{u^2}{\sin^2 \theta} + h^2 \quad \text{donde} \quad \begin{cases} u = x' + \cos \theta (y \sin \theta - R_2) - x \sin^2 \theta \\ h^2 = x^2 + \left(y - \frac{R_2}{\sin \theta} \right)^2 - \left[\left(y - \frac{R_2}{\sin \theta} \right) \cos \theta - x \sin \theta \right]^2 \end{cases} \quad (2.18)$$

Con ayuda de la expresión (2.18) reescribimos $B_{x_{2+}}$ de la siguiente manera:

$$B_{x_{2+}} = M_0 |\sin \theta| I_1 - M_0 |\sin \theta| p_x I_2 \quad (2.19)$$

Donde I_1 e I_2 son integrales a resolver y $p_x = x + \cos \theta (y \sin \theta - R_2) - x \sin^2 \theta$.

La solución a la primera integral se obtiene por integración directa:

$$I_1 = \int \frac{u du}{\sqrt{u^2 + q^2} \left[(z - z_1) |\sin \theta| + \sqrt{u^2 + q^2} \right]} = \left[\ln \left(|\sin \theta| (z - z_1) + \sqrt{u^2 + q^2} \right) \right]_{x_2}^{x_{R_2}} \quad (2.20)$$

Donde $q^2 = \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_1)^2]$.

La segunda, es una integral de tabla, para aplicar tal solución es necesario llevar la integral a una forma apropiada. Para ello, hacemos la siguiente sustitución trigonométrica, sea $q \tan t = u$, al derivar obtenemos $q \sec^2 t dt = du$, luego de introducir estos resultados, obtenemos:

$$I_2 = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + q^2} \left[(z - z_1) |\sin \theta| + \sqrt{u^2 + q^2} \right]} = \int \frac{dt}{q + |\sin \theta| (z - z_1) \cos t} \quad (2.21)$$

Al aplicar la solución expuesta en [Hedrick 1957], la segunda integral adquiere la siguiente forma:

$$I_2 = \frac{2}{h |\sin \theta|} \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q + u + \sqrt{u^2 + q^2}}{q - u + \sqrt{u^2 + q^2}} \right) + (z - z_1) |\sin \theta|}{h |\sin \theta|} \right) \right]_{x_2}^{x_{R_2}} \quad (2.22)$$

Al introducir los resultados obtenidos en (2.20) y (2.22) en (2.19), obtenemos:

$$B_{x_{2+}} = M_0 |\sin \theta| \left[\ln \left(|\sin \theta| (z - z_1) + \sqrt{u^2 + q^2} \right) \right]_{x_2}^{x_{R_2}} - \frac{2 M_0 p_x}{h} \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q + u + \sqrt{u^2 + q^2}}{q - u + \sqrt{u^2 + q^2}} \right) + (z - z_1) |\sin \theta|}{h |\sin \theta|} \right) \right]_{x_2}^{x_{R_2}} \quad (2.23)$$

Para llegar a la expresión final para $B_{x_{2+}}$ debemos regresar a la variable original y aplicar los límites de integración, lo cual es posible gracias a (2.18).

A continuación presentamos las expresiones finales para $B_{x_{2-}}$, $B_{x_{1+}}$ y $B_{x_{1-}}$ que se obtienen mediante un proceso análogo al utilizado para determinar $B_{x_{2+}}$:

$$\begin{aligned}
 B_{x_{2-}} &= M_0 |\sin \theta| \left[\ln \left(|\sin \theta| (z - z_2) + \sqrt{u^2 + q^2} \right) \right]_{x_2}^{x_{R_2}} \\
 &\quad - \frac{2 M_0 p_x}{h} \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q + u + \sqrt{u^2 + q^2}}{q - u + \sqrt{u^2 + q^2}} \right) + (z - z_2) |\sin \theta|}{h |\sin \theta|} \right) \right]_{x_2}^{x_{R_2}}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Para el caso de $B_{x_{2-}}$, las expresiones para u , h^2 y p_x son las mismas definidas para $B_{x_{2+}}$, en este termino $q^2 = \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_2)^2]$.

$$\begin{aligned}
 B_{x_{1+}} &= M_0 |\sin \theta| \left[\ln \left(|\sin \theta| (z - z_1) + \sqrt{u^2 + q^2} \right) \right]_{x_1}^{x_{R_1}} \\
 &\quad - \frac{2 M_0 p_x}{h} \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q + u + \sqrt{u^2 + q^2}}{q - u + \sqrt{u^2 + q^2}} \right) + (z - z_1) |\sin \theta|}{h |\sin \theta|} \right) \right]_{x_1}^{x_{R_1}}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Para $B_{x_{1-}}$ tenemos: $u = x' + \cos \theta (y \sin \theta - R_1) - x \sin^2 \theta$, $h^2 = x^2 + (y - R_1 / \sin \theta)^2 - [(y - R_1 / \sin \theta) \cos \theta - x \sin \theta]^2$, $p_x = x + \cos \theta (y \sin \theta - R_1) - x \sin^2 \theta$ y $q^2 = \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_1)^2]$.

$$\begin{aligned}
 B_{x_{1-}} &= M_0 |\sin \theta| \left[\ln \left(|\sin \theta| (z - z_2) + \sqrt{u^2 + q^2} \right) \right]_{x_1}^{x_{R_1}} \\
 &\quad - \frac{2 M_0 p_x}{h} \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q + u + \sqrt{u^2 + q^2}}{q - u + \sqrt{u^2 + q^2}} \right) + (z - z_2) |\sin \theta|}{h |\sin \theta|} \right) \right]_{x_1}^{x_{R_1}}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Las expresiones que definen u , h^2 y p_x son las mismas definidas para el termino anterior, por otra parte $q^2 = \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_2)^2]$.

Ahora, trabajamos con la segunda componente del campo, al igual que lo hicimos con la componente anterior, podemos reescribirla como $B_y = B_{y_{2+}} - B_{y_{2-}} - B_{y_{1+}} + B_{y_{1-}}$. Tomamos el primer termino y resolvemos la integral de la siguiente manera:

$$B_{y_{2+}} = - \frac{M_0}{|\sin \theta|} \int_{x_2}^{x_{R_2}} \frac{\left(y - \frac{R_2}{\sin \theta} + x' \cot \theta \right) dx'}{\sqrt{r^2 + (z - z_1)^2} \left(z - z_1 + \sqrt{r^2 + (z - z_1)^2} \right)} \tag{2.27}$$

Utilizamos el cambio de variable definido en la expresion (2.18), en virtud del cual, logramos reescribir $B_{y_{2+}}$ de la siguiente forma:

$$B_{y_{2+}} = -M_0 |\sin \theta| \cot \theta I_1 - M_0 |\sin \theta| p_y I_2 \tag{2.28}$$

Donde $p_y = y - R_2 / \sin \theta + [x^2 \sin \theta - \cos \theta (y \sin \theta - R_2)] \cot \theta$. Las integrales I_1 y I_2 son idénticas a las obtenidas en la componente anterior, presentadas en las expresiones (2.20) y (2.21) respectivamente.

Gracias a esto, podemos determinar la solución analítica para $B_{y_{2+}}$ de la siguiente manera:

$$B_{y_{2+}} = -M_0 |\sin \theta| \cot \theta \left[\ln \left(|\sin \theta| (z - z_1) + \sqrt{u^2 + q^2} \right) \right]_{x_2}^{x_{R_2}} - \frac{2 M_0 p_y}{h} \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q + u + \sqrt{u^2 + q^2}}{q - u + \sqrt{u^2 + q^2}} \right) + (z - z_1) |\sin \theta|}{h |\sin \theta|} \right) \right]_{x_2}^{x_{R_2}} \quad (2.29)$$

Para llegar a la expresión final para $B_{y_{2+}}$ debemos regresar a la variable original y aplicar los limites de integración. Los otros terminos que dan forma a esta componente se obtienen en forma análoga.

$$B_{y_{2-}} = -M_0 |\sin \theta| \cot \theta \left[\ln \left(|\sin \theta| (z - z_2) + \sqrt{u^2 + q^2} \right) \right]_{x_2}^{x_{R_2}} - \frac{2 M_0 p_y}{h} \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q + u + \sqrt{u^2 + q^2}}{q - u + \sqrt{u^2 + q^2}} \right) + (z - z_2) |\sin \theta|}{h |\sin \theta|} \right) \right]_{x_2}^{x_{R_2}} \quad (2.30)$$

Para $B_{y_{2-}}$, u , h^2 y p_y son los mismos definidas para $B_{y_{2+}}$ y $q^2 = \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_2)^2]$.

$$B_{y_{1+}} = -M_0 |\sin \theta| \cot \theta \left[\ln \left(|\sin \theta| (z - z_1) + \sqrt{u^2 + q^2} \right) \right]_{x_1}^{x_{R_1}} - \frac{2 M_0 p_y}{h} \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q + u + \sqrt{u^2 + q^2}}{q - u + \sqrt{u^2 + q^2}} \right) + (z - z_1) |\sin \theta|}{h |\sin \theta|} \right) \right]_{x_1}^{x_{R_1}} \quad (2.31)$$

Donde u , h^2 , p_x y q^2 se modifican respecto a las definidas anteriormente. En esta caso, tomamos $u = x' + \cos \theta (y \sin \theta - R_1) - x \sin^2 \theta$, $h^2 = x^2 + (y - R_1 / \sin \theta)^2 - [(y - R_1 / \sin \theta) \cos \theta - x \sin \theta]^2$, $p_y = y - R_1 / \sin \theta + [x^2 \sin \theta - \cos \theta (y \sin \theta - R_1)] \cot \theta$ y $q^2 = \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_1)^2]$.

$$B_{y_{1-}} = -M_0 |\sin \theta| \cot \theta \left[\ln \left(|\sin \theta| (z - z_2) + \sqrt{u^2 + q^2} \right) \right]_{x_1}^{x_{R_1}} - \frac{2 M_0 p_y}{h} \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q + u + \sqrt{u^2 + q^2}}{q - u + \sqrt{u^2 + q^2}} \right) + (z - z_2) |\sin \theta|}{h |\sin \theta|} \right) \right]_{x_1}^{x_{R_1}} \quad (2.32)$$

Donde u , h^2 y p_y son las mismas definidas para el termino anterior y $q^2 = \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_2)^2]$.

Finalmente, buscamos la solución para la tercera componente del campo magnético. Para determinar B_z es conveniente replantear la obtenida a partir del potencial escalar cuyos terminos son presentados en (2.16), ya que a partir de este conjunto de expresiones, no es posible encontrar una solución completa de forma analítica y necesitaríamos métodos numéricos para efectuar los cálculos, situación que podemos evitar. Para ello, tomamos los terminos que describen el potencial escalar expuestos en (2.12) y hacemos el cambio de variable planteado en la expresión (2.18), con lo cual cambiamos la integral en x' por una en la variable u . Esta integral posee una disposición análoga a la presentada en (2.13) y

cuya solución fue expuesta en (2.14). Gracias a lo anterior, obtenemos una expresión para el potencial escalar magnético, conservando la misma estructura presentada en (2.11) con los siguientes terminos:

$$\phi_1 = M_0 \int_{z_1}^{z_2} dz' \ln \left(\frac{x_{R_1} + k_1 + \sqrt{(x_{R_1} + k_1)^2 + \sin^2 \theta [h^2 + (z - z')^2]}}{x_1 + k_1 + \sqrt{(x_1 + k_1)^2 + \sin^2 \theta [h^2 + (z - z')^2]}} \right) \quad (2.33)$$

$$\phi_2 = M_0 \int_{z_1}^{z_2} dz' \ln \left(\frac{x_{R_2} + k_2 + \sqrt{(x_{R_2} + k_2)^2 + \sin^2 \theta [h^2 + (z - z')^2]}}{x_2 + k_2 + \sqrt{(x_2 + k_2)^2 + \sin^2 \theta [h^2 + (z - z')^2]}} \right)$$

Donde $k_1 = \cos \theta (y \sin \theta - R_1) - x \sin^2 \theta$ y $k_2 = \cos \theta (y \sin \theta - R_2) - x \sin^2 \theta$.

En virtud del potencial descrito en (2.33) y de la expresión (2.1), podemos presentar esta componente como $B_z = B_{z_2} - B_{z_1}$. Solo falta determinar la integral en z' , para ello vamos a aprovechar que la única diferencia al derivar respecto a z o z' , es la aparición de un signo negativo. A continuación, presentamos la solución analítica obtenida para los terminos que dan forma a esta componente del campo:

$$B_{z_2} = M_0 \left[\ln \left(\frac{x_{R_2} + k_2 + \sqrt{(x_{R_2} + k_2)^2 + \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_2)^2]}}{x_2 + k_2 + \sqrt{(x_2 + k_2)^2 + \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_2)^2]}} \right) - \ln \left(\frac{x_{R_2} + k_2 + \sqrt{(x_{R_2} + k_2)^2 + \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_1)^2]}}{x_2 + k_2 + \sqrt{(x_2 + k_2)^2 + \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_1)^2]}} \right) \right] \quad (2.34)$$

$$B_{z_1} = M_0 \left[\ln \left(\frac{x_{R_1} + k_1 + \sqrt{(x_{R_1} + k_1)^2 + \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_2)^2]}}{x_1 + k_1 + \sqrt{(x_1 + k_1)^2 + \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_2)^2]}} \right) - \ln \left(\frac{x_{R_1} + k_1 + \sqrt{(x_{R_1} + k_1)^2 + \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_1)^2]}}{x_1 + k_1 + \sqrt{(x_1 + k_1)^2 + \sin^2 \theta [h^2 + (z - z_1)^2]}} \right) \right] \quad (2.35)$$

Estudiamos un caso particular: Acorde con la Figura 2.1, definimos $R_1 = 4,7[\text{cm}]$, $R_2 = 7,1[\text{cm}]$, $\theta = 90^\circ$, $a = 2,5[\text{cm}]$, $b = 21,0[\text{cm}]$ y $M_0 = 2,21[\text{KG}]$. El imán aquí descrito, se encuentra por fuera de la zona de simulación (Vease Figura 2.3), para la visualizar de una mejor forma el campo vectorial obtenido, presentamos dos vistas del mismo. En la Figura 2.4, podemos apreciar que en la región cercana al polo norte del iman el campo es intenso, pero a medida que nos alejamos la magnitud disminuye. Igualmente podemos ver que en $z = 10,0[\text{cm}]$ las líneas de campo se curvan buscando el polo sur. Tal descripción corresponde con lo expuesto en [Greyner 1998]. En la Figura 2.5, tambien podemos apreciar este comportamiento, en virtud de las dimensiones que se han utilizado, ocurre a partir de $x = 1,5[\text{cm}]$.

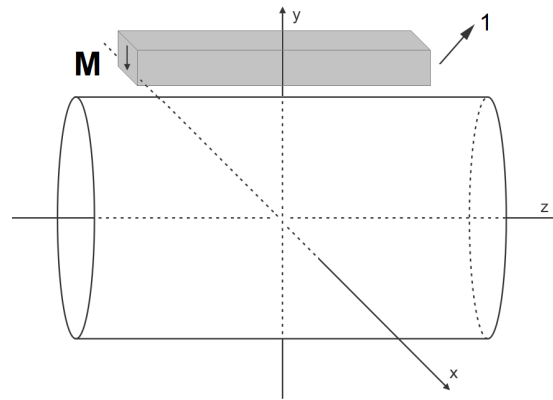


Figura 2.3: Orientación del Sistema de Referencia Espacial: 1-Imán.

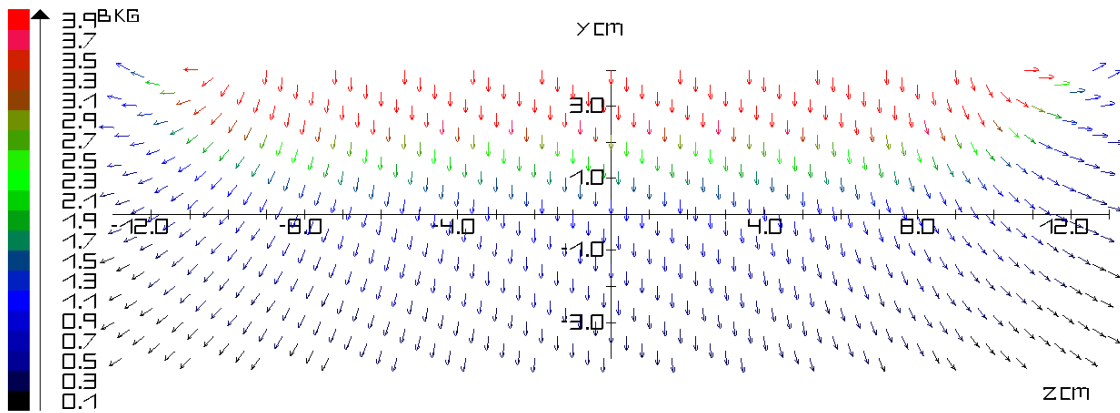


Figura 2.4: Vista YZ del Campo Magnético generado por un Imán en el PCL.

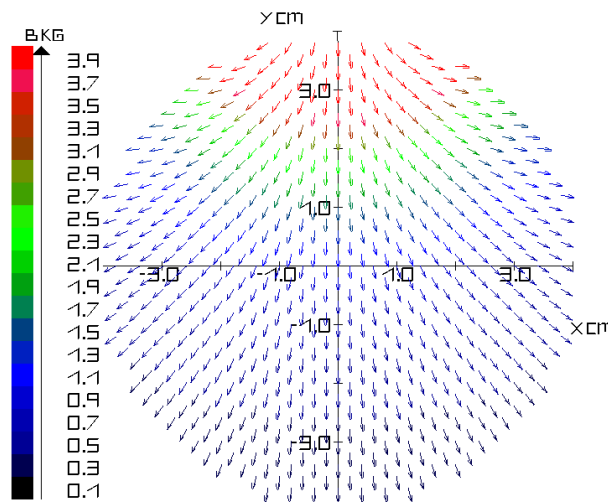


Figura 2.5: Vista XY del Campo Magnético generado por un Imán en el PCT

2.2 CASO ESPECIAL

Las expresiones obtenidas en la sección 2.1 no permiten reproducir el campo magnético generado por un imán situado en $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, es decir paralelo al eje X , ya que estas se indeterminan. Este caso especial y lo estudiaremos a continuación, de tal manera que su solución complemente la obtenida en la sección anterior y así podamos resolver el problema de forma general.

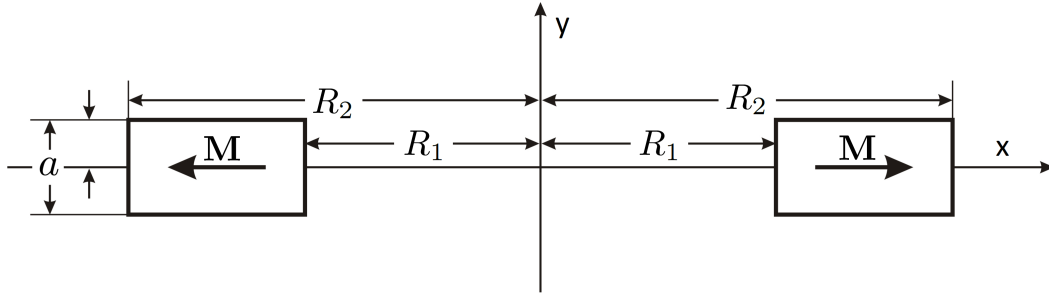


Figura 2.6: Sistema de Referencias Cuerpo Magnetizado (Caso Especial).

A partir de la figura 2.3, definimos el vector de magnetización presente en la barra, para $\theta = 0$ tenemos:

$$\mathbf{M} = \begin{cases} M_0 \hat{\mathbf{i}} & \text{En la barra} \\ 0 & \text{Afuera de la barra} \end{cases} \quad (2.36)$$

Ahora, definimos el diferencial de superficie de la siguiente manera:

$$ds = \begin{cases} dz' dy' \hat{\mathbf{i}} & \text{Tapa superior de la barra} \\ -dz' dy' \hat{\mathbf{i}} & \text{Tapa inferior de la barra} \end{cases} \quad (2.37)$$

Los límites de integración se definen de la siguiente manera, para la integral en z' utilizamos los mismos expuestos en (2.10) y para y' tenemos:

$$y_1 = -\frac{a}{2} \quad y \quad y_2 = \frac{a}{2} \quad (2.38)$$

Al introducir estos resultados en (2.4), obtenemos una expresión para ϕ_m con una estructura idéntica a la presentada en (2.11) pero los siguientes terminos:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= M_0 \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dz' dy'}{\sqrt{(x - R_1)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \\ \phi_2 &= M_0 \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dz' dy'}{\sqrt{(x - R_2)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Tomamos ϕ_1 , primero vamos a determinar la solución a la integral en z' , para ello, hacemos un cambio de variable, sea $v = z - z'$, al derivarla obtenemos $dv = -dz'$. Gracias a esto, la integral adquiere una estructura idéntica a la presentada en (2.13) y cuya solución fue expuesta en (2.14), en esta ocasión

tomamos $r^2 = (x - R_1)^2 + (y - y')^2$. Ahora, podemos reescribir el primer termino del potencial como $\phi_1 = \phi_{1+} - \phi_{1-}$, al igual que lo hicimos en la sección anterior. De la misma forma se trabaja con ϕ_2 , con lo cual, el potencial escalar toma la forma $\phi_m = \phi_{2+} - \phi_{2-} - \phi_{1+} + \phi_{1-}$:

$$\begin{aligned}\phi_{1+} &= M_0 \int_{y_1}^{y_2} dy' \ln \left(z - z_1 + \sqrt{(x - R_1)^2 + (y - y')^2 + (z - z_1)^2} \right) \\ \phi_{1-} &= M_0 \int_{y_1}^{y_2} dy' \ln \left(z - z_2 + \sqrt{(x - R_1)^2 + (y - y')^2 + (z - z_2)^2} \right) \\ \phi_{2+} &= M_0 \int_{y_1}^{y_2} dy' \ln \left(z - z_1 + \sqrt{(x - R_2)^2 + (y - y')^2 + (z - z_1)^2} \right) \\ \phi_{2-} &= M_0 \int_{y_1}^{y_2} dy' \ln \left(z - z_2 + \sqrt{(x - R_2)^2 + (y - y')^2 + (z - z_2)^2} \right)\end{aligned}\tag{2.40}$$

Ahora, procedemos a determinar las componentes del campo magnético. Vamos a trabajar en la solución de la primera componente, en virtud de la estructura obtenida para el potencial, ésta toma la forma $B_x = B_{x_{2+}} - B_{x_{2-}} - B_{x_{1+}} + B_{x_{1-}}$. Tomamos el primer termino:

$$B_{x_{2+}} = -M_0 \int_{y_1}^{y_2} \frac{(x - R_2) dy'}{\sqrt{q^2 + (y - y')^2} \left(z - z_1 + \sqrt{q^2 + (y - y')^2} \right)}\tag{2.41}$$

Donde $q^2 = (x - R_2)^2 + (z - z_1)^2$. Para hallar la solución analítica a la integral presente en (2.41), hacemos el siguiente cambio de variable, sea $u = y - y'$, derivando obtenemos $dy' = -du$. Al introducir estos resultados, notamos que ésta posee la misma estructura expuesta en (2.21) y cuya solución fue presentada en esa misma expresión. Por lo tanto podemos encontrar la solución de la siguiente manera:

$$B_{x_{2+}} = 2 M_0 \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q + u + \sqrt{u^2 + q^2}}{q - u + \sqrt{u^2 + q^2}} \right) + (z - z_1)}{x - R_2} \right) \right]_{y_1}^{y_2}\tag{2.42}$$

La expresión final para este termino, aparece luego de regresar a la variable y' y aplicar los limites de integración. El procedimiento desarrollado para obtener $B_{x_{2+}}$, es utilizado en forma análoga para encontrar la solución a los otros terminos que completan esta componente. Observemos:

$$B_{x_{2-}} = 2 M_0 \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q + u + \sqrt{u^2 + q^2}}{q - u + \sqrt{u^2 + q^2}} \right) + (z - z_2)}{x - R_2} \right) \right]_{y_1}^{y_2}\tag{2.43}$$

En este caso tenemos $q^2 = (x - R_2)^2 + (z - z_2)^2$.

$$B_{x_{1+}} = 2 M_0 \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q + u + \sqrt{u^2 + q^2}}{q - u + \sqrt{u^2 + q^2}} \right) + (z - z_1)}{x - R_1} \right) \right]_{y_1}^{y_2}\tag{2.44}$$

Para este termino $q^2 = (x - R_1)^2 + (z - z_1)^2$.

$$B_{x_{1-}} = 2 M_0 \left[\arctan \left(\frac{q \left(\frac{q+u+\sqrt{u^2+q^2}}{q-u+\sqrt{u^2+q^2}} \right) + (z-z_2)}{x-R_1} \right) \right]_{y_1}^{y_2} \quad (2.45)$$

Tomamos $q^2 = (x-R_1)^2 + (z-z_2)^2$.

La segunda componente del campo magnético se obtiene de la misma forma en que trabajamos con la anterior. Primero, tomamos $B_{y_{2+}}$:

$$B_{y_{2+}} = -M_0 \int_{y_1}^{y_2} \frac{(y-y') dy'}{\sqrt{q^2 + (y-y')^2} \left(z-z_1 + \sqrt{q^2 + (y-y')^2} \right)^2} \quad (2.46)$$

La solución a la integral presente en (2.46), se obtiene de la siguiente manera: primero, hacemos el siguiente cambio de variable, sea $u = y - y'$, al derivar obtenemos $dy' = -du$. Luego de introducir estos resultados, notamos que ésta posee la misma estructura que la integral expuesta en (2.20). A continuación presentamos la expresión final para este término:

$$B_{y_{2+}} = M_0 \ln \left(\frac{z-z_1 + \sqrt{(x-R_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_1)^2}}{z-z_1 + \sqrt{(x-R_2)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} \right) \quad (2.47)$$

El procedimiento seguido para obtener $B_{y_{2+}}$, es utilizado de forma análoga para resolver los otros términos que completan esta componente.

$$B_{y_{2-}} = M_0 \ln \left(\frac{z-z_2 + \sqrt{(x-R_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}}{z-z_2 + \sqrt{(x-R_2)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_2)^2}} \right) \quad (2.48)$$

$$B_{y_{1+}} = M_0 \ln \left(\frac{z-z_1 + \sqrt{(x-R_1)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_1)^2}}{z-z_1 + \sqrt{(x-R_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} \right) \quad (2.49)$$

$$B_{y_{1-}} = M_0 \ln \left(\frac{z-z_2 + \sqrt{(x-R_1)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}}{z-z_2 + \sqrt{(x-R_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_2)^2}} \right) \quad (2.50)$$

Para encontrar la última componente del campo, es conveniente partir desde la expresión (2.39), en la cual se presentan los términos que dan la forma inicial al potencial escalar magnético para el caso especial. Trabajamos en la solución del primer término: Tomamos $q^2 = (x-R_1)^2 + (z-z')^2$ y luego hacemos el siguiente cambio de variable, sea $u = y - y'$, derivando obtenemos $-du = dy'$. Al introducir estos resultados en ϕ_1 , cambiamos la integral en y' por una en u . Esta posee una estructura idéntica a la presentada en (2.13), cuya solución fue expuesta en (2.14). De la misma forma trabajamos en la solución de ϕ_2 , obteniendo los siguientes resultados:

$$\phi_1 = M_0 \int_{z_1}^{z_2} dz' \ln \left(\frac{y-y_1 + \sqrt{(x-R_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z')^2}}{y-y_2 + \sqrt{(x-R_1)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z')^2}} \right) \quad (2.51)$$

$$\phi_2 = M_0 \int_{z_1}^{z_2} dz' \ln \left(\frac{y-y_1 + \sqrt{(x-R_2)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z')^2}}{y-y_2 + \sqrt{(x-R_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z')^2}} \right)$$

Aprovechando la estructura obtenida para el potencial escalar y en virtud de la expresion (2.1), podemos presentar la solución para esta componente del como $B_z = B_{z_2} - B_{z_1}$, con los siguientes terminos:

$$B_{z_2} = M_0 \left[\ln \left(\frac{y - y_1 + \sqrt{(x - R_2)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_2)^2}}{y - y_2 + \sqrt{(x - R_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}} \right) - \ln \left(\frac{y - y_1 + \sqrt{(x - R_2)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}{y - y_2 + \sqrt{(x - R_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_1)^2}} \right) \right] \quad (2.52)$$

$$B_{z_1} = M_0 \left[\ln \left(\frac{y - y_1 + \sqrt{(x - R_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_2)^2}}{y - y_2 + \sqrt{(x - R_1)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}} \right) - \ln \left(\frac{y - y_1 + \sqrt{(x - R_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}{y - y_2 + \sqrt{(x - R_1)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_1)^2}} \right) \right] \quad (2.53)$$

A continuación, presentamos los resultados obtenidos para un caso particula: El imán esta situado en $\theta = 0$, posee las mismas dimensiones y magnetización descritas en la sección anterior. Observemos:

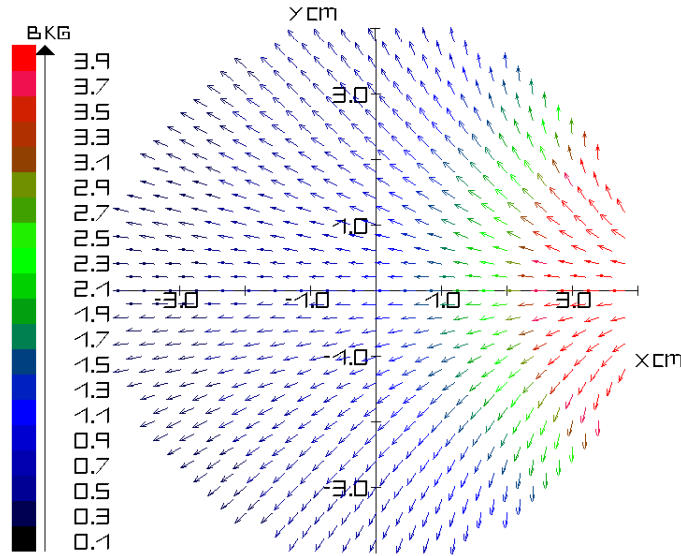


Figura 2.7: Vista XY del Campo Magnético generado por un Imán en el PCT.

Para el caso $\theta = \pi$, los únicos cambios que se producen en las ecuaciones, son los signos de las siguientes cantidades R_1 , R_2 y M_0 , estos pasan de ser positivos a ser negativos.

CAPÍTULO 3

TRAMPA MAGNÉTICA TIPO ESPEJO

La trampa tipo espejo puede ser obtenida mediante la superposición del campo producido por dos bobinas [Murillo, Guerrero 2008] y [Dugar-Zhabon 2010]. Tales elementos magnéticos son situados en los extremos de una cavidad con la que comparten el mismo eje de simetría; además estas son alimentadas con corrientes estacionarias de igual magnitud y dirección. Consecuentemente el campo presenta máxima intensidad en la región próxima a las bobinas, y conforme se acerca al centro de la trampa va reduciéndose hasta hacerse mínimo. Este dispositivo fue considerado por muchos como la solución al problema del confinamiento del plasma, teniendo como ventaja adicional su fácil construcción y puesta en funcionamiento, pero en corto tiempo fueron descubiertos algunos problemas originados por la forma convexa de la curvatura del campo, la cual produce una inestabilidad magnetohidrodinámica [Dugar-Jabon 2000]. Sin embargo, esta configuración magnética ha contribuido con el desarrollo de diversos dispositivos tecnológicos, cuyas aplicaciones principalmente son la creación de fuentes de rayos X intensos [Dugar-Zhabon 2004], la generación de iones negativos [Dugar-Jabon 2001], entre otros.

3.1 SISTEMA FÍSICO

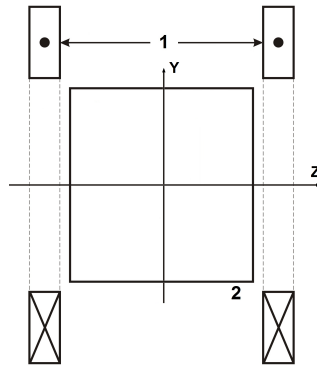


Figura 3.1: Sistema Magnético Tipo Espejo: 1-Bobinas y 2-Cámara Cilíndrica.

El sistema físico es bastante sencillo, consta de una cámara de descarga en forma cilíndrica y un par de bobinas, el cual es representado en la figura 3.1. Los datos de entrada para la cavidad, la frecuencia de microondas y las bobinas utilizados en el generación del campo tipo espejo, son presentados en dos tablas de la siguiente manera:

R [cm]	L [cm]	f [GHz]
6,4	16,1	2,45

Tabla 3.1: Datos de Entrada para la Cámara Cilíndrica y Frecuencia de Microondas.

Donde R - Radio y L - Longitud de cavidad cilíndrica y f - Frecuencia de Microondas.

I [Statamperes]	N_l	N_T	r_i	Sep
$3,3 \times 10^{12}$	10	3	8,436330	1,0

Tabla 3.2: Datos de Entrada para las Bobinas Magnéticas.

Donde I - Corriente que circula por las espiras, N_l - Número de espiras longitudinales, N_T - Número de espiras transversales, r_i - Radio de la primera espira y Sep - Distancia entre espiras.

3.2 VISUALIZACIÓN DEL CAMPO ESPEJO

El campo magnético de la trampa tipo espejo, posee una simetría axial, razón por la cual, solo presentaremos una vista de él, en el plano YZ (Vease Figura 3.2). En la cual, podemos apreciar que la magnitud del campo decrece conforme desplazamos sobre el eje Z, acercándonos al plano central transversal de la cavidad, ubicado en $z = 0$ [cm]. Adicionalmente, en esta región el campo disminuye a medida que nos alejamos del eje de la cavidad, es decir, a medida que nos acercamos a las paredes. El campo magnético cerca a las bobinas alcanza los 1584,3[G], mientras que en el centro de la cavidad es 906,63[G], con una razón de espejo igual a 1,75.

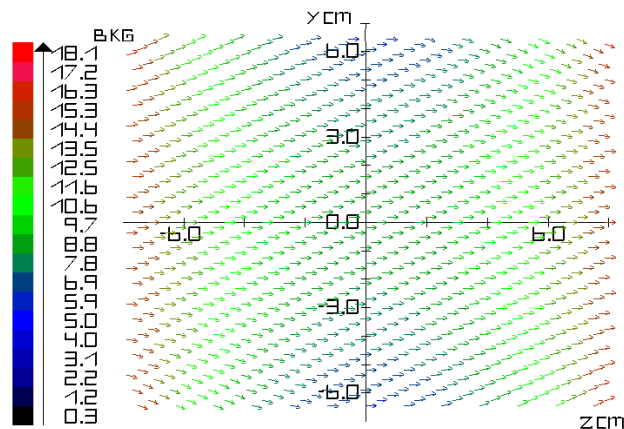


Figura 3.2: Vista YZ del Campo Magnético de la Trampa Tipo Espejo.

3.3 SUPERFICIES MAGNÉTICAS

3.3.1. SUPERFICIE RCE

La geometría de las líneas del campo magnético de confinamiento, juegan un papel muy importante ya que junto con la ubicación y forma de la zona de Resonancia Ciclotrónica Electrónica (RCE), determinan en gran proporción la distribución del plasma al interior de la cavidad. La superficie RCE correspondiente al campo tipo espejo, se obtiene cuando $B = mc\omega/e$, donde m y e es la masa y carga del electrón, c es la velocidad de la luz y ω es la frecuencia de microondas con la que se calienta el plasma [Dugar-Zhabon 2010] y [Murillo, Guerrero 2008]. En la Figura 3.3 se representan las superficies de igual intensidad magnética para un campo tipo espejo, en la cual podemos observar que el campo de mayor magnitud forma un hiperboloide de dos hojas, mientras que el de menor intensidad produce una configuración de hiperboloide de una hoja [Murillo 2008].

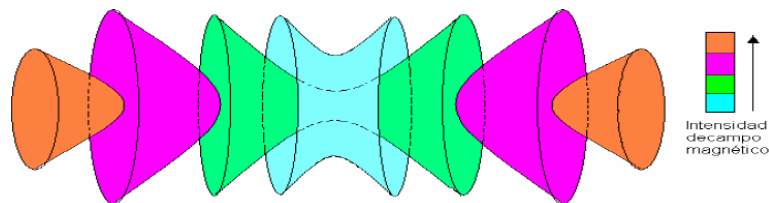
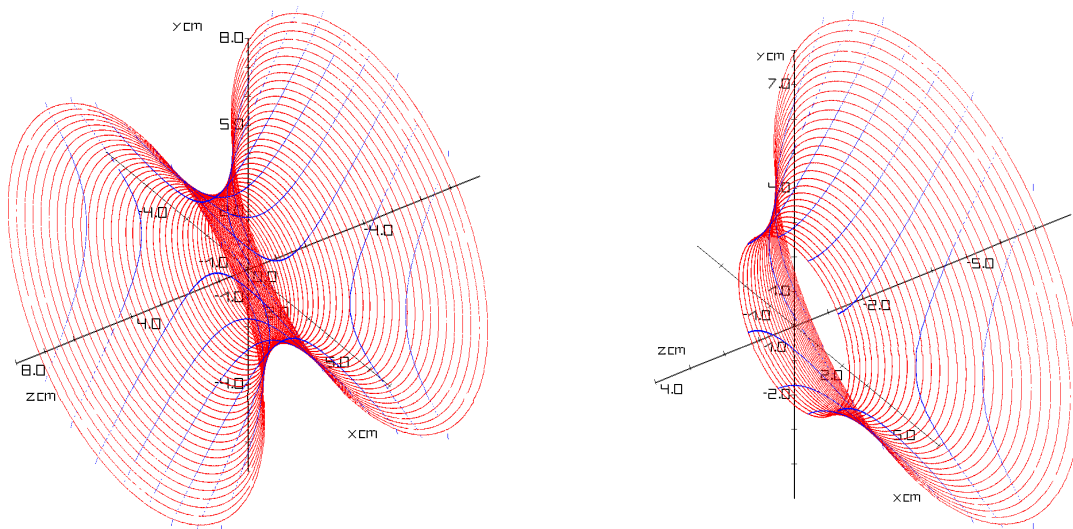


Figura 3.3: Superficies de igual Intensidad Magnética.

Para el caso de una frecuencia de 2,45[GHz], el campo resonante es 875,89[G], vamos a estudiar el caso particular cuando la superficie RCE toma la forma de un hiperboloide de una hoja. Con el objetivo de tener mayor claridad sobre la zona RCE, presentamos dos vistas en 3D, las líneas rojas corresponden a curvas planas paralelas al plano XY, mientras que las azules son paralelas al plano YZ:

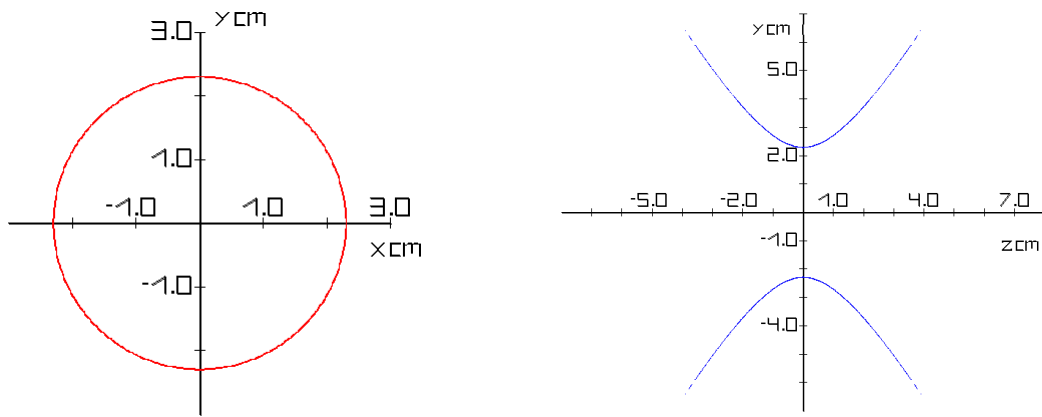


a. Hiperboloide de una hoja.

b. Corte en el PCT.

Figura 3.4: Vistas XYZ de la Zona RCE (Trampa Tipo Espejo).

La sección transversal del hiperboloide en el plano central es una circunferencia de radio 2,3[cm], dicho corte puede ser observado con mayor detalle en la Figura 3.5(a). La superficie RCE es cerrada y no forma un hiperboloide de una hoja regular, el cual tiende a infinito, lo cual podemos apreciar en la Figura 3.5(b).



a. Corte Central Transversal.

b. Corte Central Longitudinal.

Figura 3.5: Vistas XY y YZ del Corte Central Longitudinal y Transversal (Zona RCE).

3.3.2. OTRAS SUPERFICIES

Adicionalmente, presentamos la superficie magnética que se obtiene cuando $B = 976,44[\text{G}]$, la cual ratifica que a medida que el campo es más intenso, la superficie se desplaza longitudinalmente hacia las bobinas (Vease Figura 3.3).

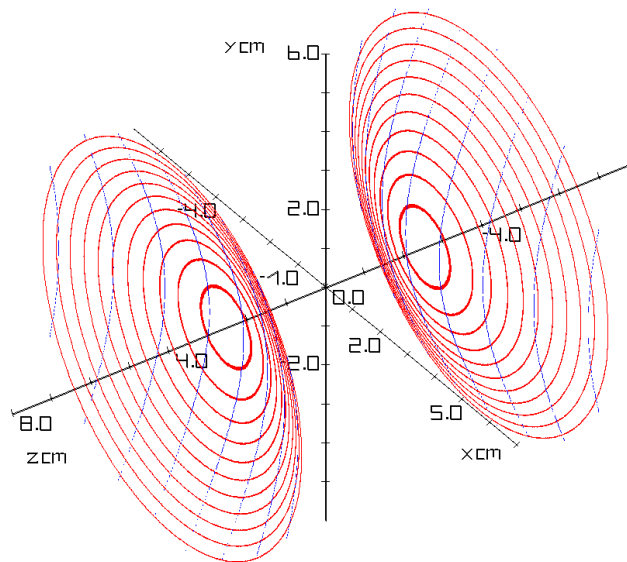


Figura 3.6: Vista XYZ de la Superficie Magnética.

Al comparar su vista del corte central longitudinal (Figura 3.7) con la obtenida para la zona RCE, Figura 3.5(b), podemos ver que la nueva superficie magnética se forma a partir de $z = \pm 2,4[\text{cm}]$, es decir, se ubica detras de la zona de RCE. En la Figura 3.6, podemos observar que para esta intensidad de campo magnético, la superficie posee forma de hiperboloide de dos hojas.

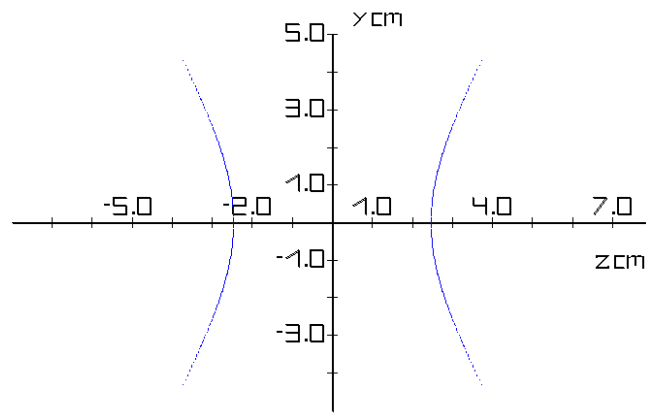


Figura 3.7: Vista YZ del Corte Central Longitudinal de la Superficie Magnética.

CAPÍTULO 4

TRAMPA MAGNÉTICA MÍNIMO - B

Tratando de encontrar una posible solución al problema originado por la curvatura del campo tipo espejo, M. Ioffe y sus colaboradores proponen una nueva configuración llamada mínimo-B. Tal sistema se obtiene al agregar un campo magnético transversal que aumenta en dirección radial a la trampa tipo espejo, el cual es situado a lo largo de toda la cavidad [Baiborodov 1963]. Tal campo puede ser generado mediante diversos mecanismos, inicialmente se planteo el uso de un sistema formado por conductores lineales, localizados de forma paralela al eje de la cavidad y distribuidos simétricamente en acimut cerca a las paredes de la misma, las corrientes circulan en direcciones opuestas para conductores contiguos [Baiborodov 1963]. Estructuras equivalentes son factibles mediante el uso de imanes permanentes [Geller 1996], las cuales implementaremos en este trabajo para la formación del campo complementario. En el centro de esta trampa el valor del campo se hace mínimo, motivo por el cual recibe el nombre de mínimo-B.

4.1 SISTEMA FÍSICO

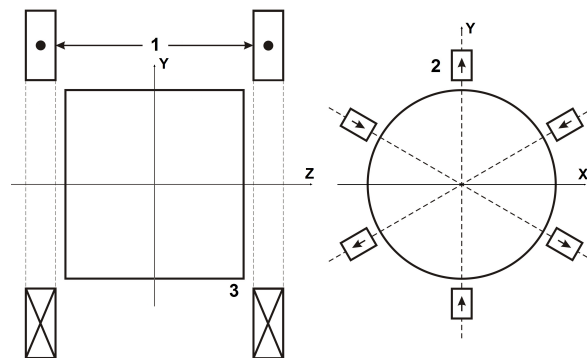


Figura 4.1: Sistema Magnético Mínimo-B: 1-Bobinas, 2-Sextupolo Magnético y 3-Cámara Cilíndrica.

El sistema físico es bastante sencillo, consta de una cámara de descarga (cavidad cilíndrica), un par de bobinas y el sextupolo, dicho sistema es representado en la figura 4.1. A continuación, presentamos los datos de entrada que describen la cámara de descarga, la frecuencia de microondas, las bobinas y el sextupolo magnético, utilizados en la formación del campo mínimo - B:

$R[\text{cm}]$	$L[\text{cm}]$	$f[\text{GHz}]$
3,9956	25,9720	14

Tabla 4.1: Datos de Entrada para la Cavidad y Frecuencia de Microondas.

Donde R - Radio y L - Longitud de cavidad cilíndrica y f - Frecuencia de Microondas.

$I[\text{Statamperes}]$	N_l	N_T	r_i	Sep
$9,6 \times 10^{12}$	8	5	7,295960	1,0

Tabla 4.2: Datos de Entrada para las Bobinas Magnéticas.

Donde I - Corriente que circula por las espiras, N_l - Número de espiras longitudinales, N_T - Número de espiras transversales, r_i - Radio de la primera espira y Sep - Distancia entre espiras.

$R_1[\text{cm}]$	$R_2[\text{cm}]$	θ_0	$a[\text{cm}]$	$b[\text{cm}]$	$M_0[\text{KG}]$
4,7	7,1	30°	2,5	21,0	2,21

Tabla 4.3: Datos de Entrada para el Sextupolo Magnético.

Donde R_1 - Radio de la tapa interno, R_2 Radio de la tapa externa del imán, θ_0 - Ángulo para el primer imán, a y b - Dimensiones de la barra y M_0 - Magnetización de la barra.

4.2 FORMACIÓN DEL CAMPO MÍNIMO - B

El campo de la trampa Mínimo - B, se obtiene a partir de la superposición de un campo tipo espejo, producido por un par de bobinas, y un campo transversal multicusp, generado por un sistema de seis imanes, denominado sextupolo magnético. Para tener una mejor idea sobre el campo mínimo - B, se han construido varias figuras. En la Figura 4.2, se presenta el campo longitudinal tipo espejo, la magnitud del campo en la región cercana a las bobinas alcanza los 8247,707[G], mientras que en el centro de la cavidad es 4540,475[G], con una razón de espejo igual a 1,82. El campo transversal producido por el sextupolo magnético, corrige las inestabilidades magnetohidrodinámicas del plasma confinado, propias de la trampa tipo espejo, ya que refuerza la componente en dirección radial del campo en la región central de la cavidad (Vease Figura 4.3), dado que la contribución generada por las bobinas es nula, hecho que podemos apreciar en la Figura 4.2. En la Figura 4.4 presentamos la vista del campo magnético generado por el sextupolo en el plano central longitudinal ($x = 0,0[\text{cm}]$), en ella podemos conocer con más detalle, la región en la cual, el sistema de imanes fortalece la magnitud del campo cerca a las paredes de la cavidad. Tambien, observamos como las líneas de campo cambian de dirección y magnitud, en la zona próxima a los extremos de la cámara de descarga. Esto es debido a que los imanes se encuentran ubicados entre $z = \pm 10,5[\text{cm}]$, mientras que la cavidad llega hasta $\pm 13,0[\text{cm}]$.

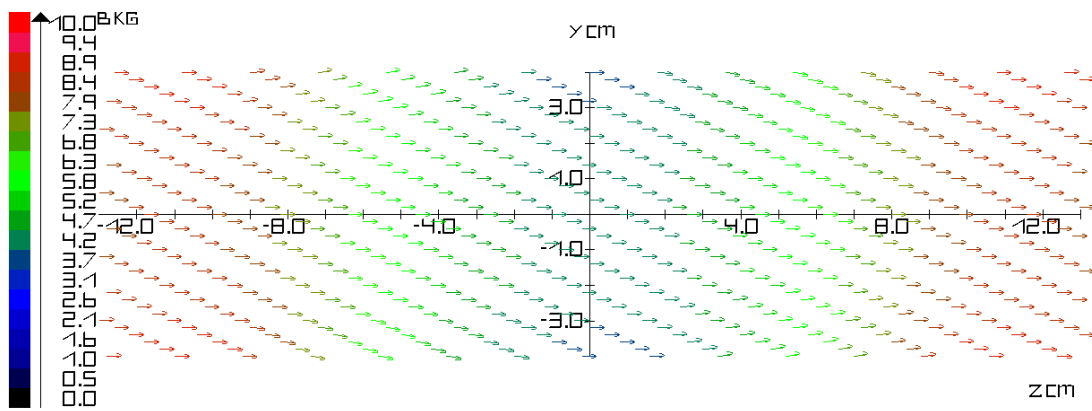


Figura 4.2: Vista YZ del Campo generado por las Bobinas en el PCL.

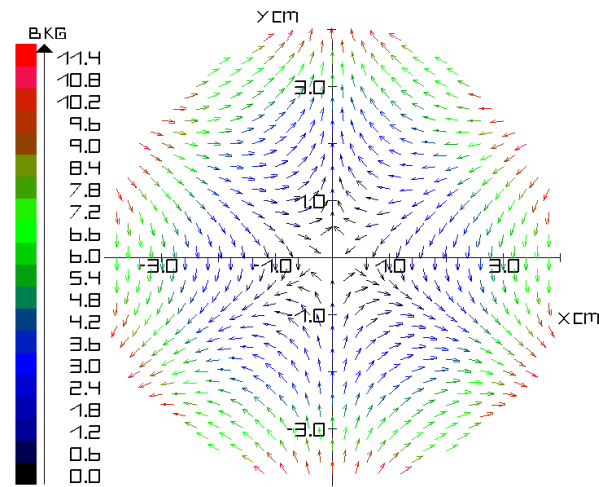


Figura 4.3: Vista XY del campo generado por el Sextupolo Magnético en el PCT.

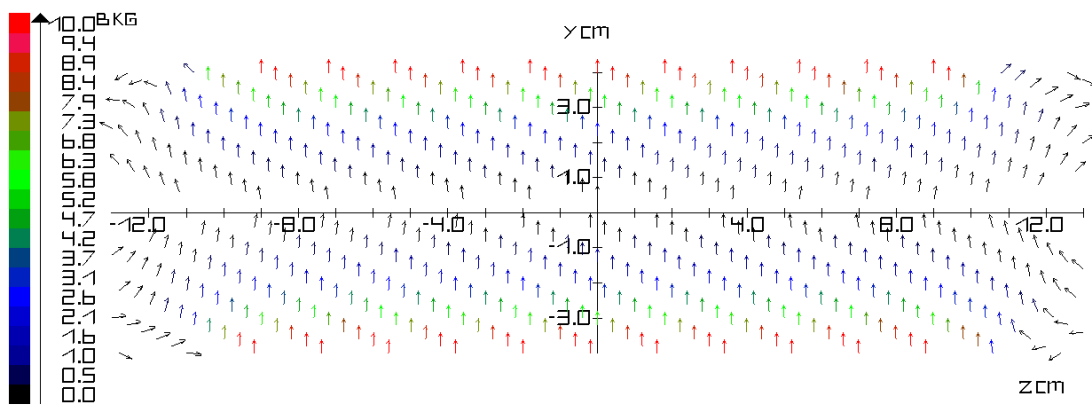


Figura 4.4: Vista YZ del Campo generado por el Sextupolo Magnético en el PCL.

La magnitud del campo producido por la configuración Mínimo - B aumenta en dirección longitudinal a medida que $|z|$ aumenta, lo cual podemos observar en la escala de colores que aparece en la Figura 4.5. Adicionalmente, podemos apreciar como el campo se hace mínimo en el centro de la cavidad.

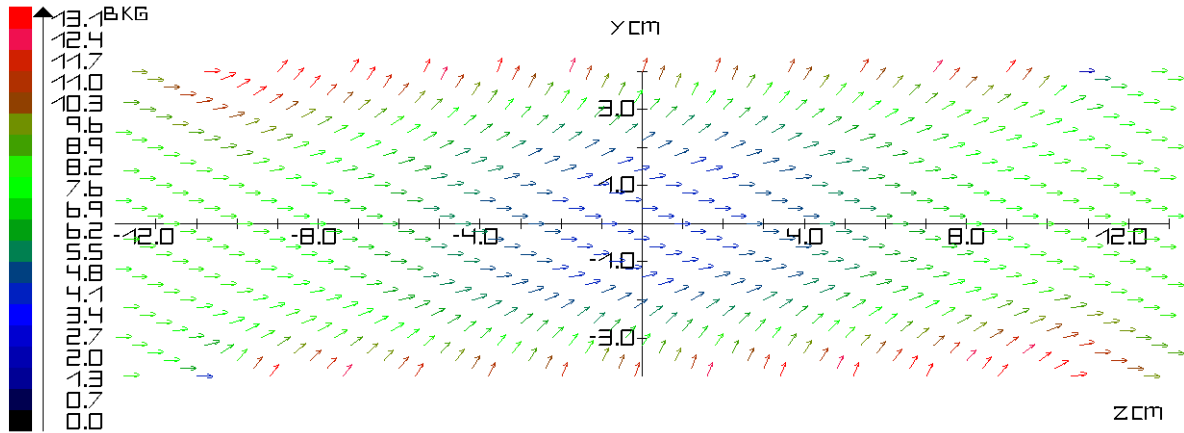


Figura 4.5: Vista YZ del Campo generado por la Trampa Mínimo - B en el PCL.

A continuación, presentamos dos vistas de la región aledaña a los extremos de la cavidad ($z = \pm 12,0$ cm), en las cuales se presenta una disposición para el campo más débil en forma de triángulo. Al observar las Figuras 4.6 y 4.7, notamos que tal simetría se presenta de maneras distintas en las dos tapas, esto se debe a la forma de la curvatura que presentan las líneas de campo producidas por las bobinas sumado al de los imanes que en cada tapa es diferente, mientras en la tapa izquierda ($z = -12,0$ cm) la componente radial del campo bobinar es positiva, en la tapa derecha ($z = 12,0$ cm) es negativa.

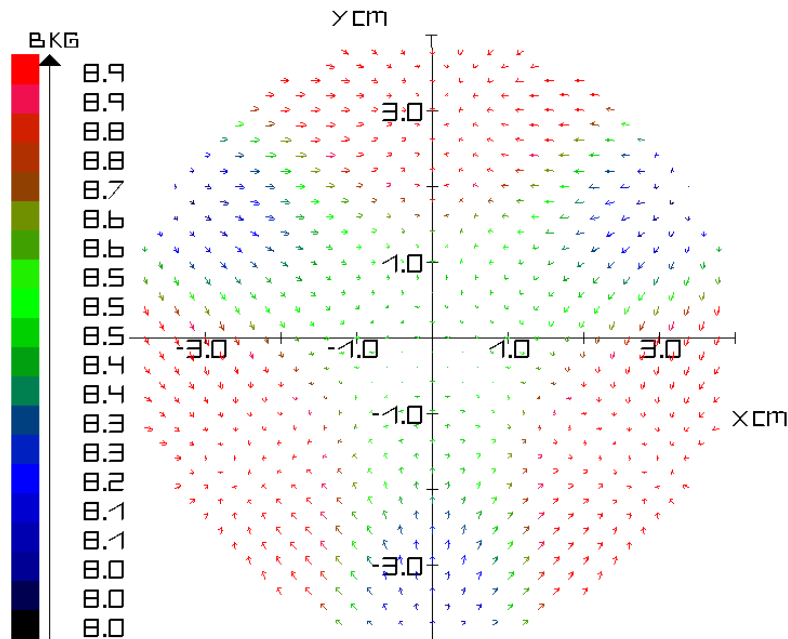


Figura 4.6: Vista XY de la Trampa Magnética Mínimo - B en el plano ($z = -12,0$ cm).

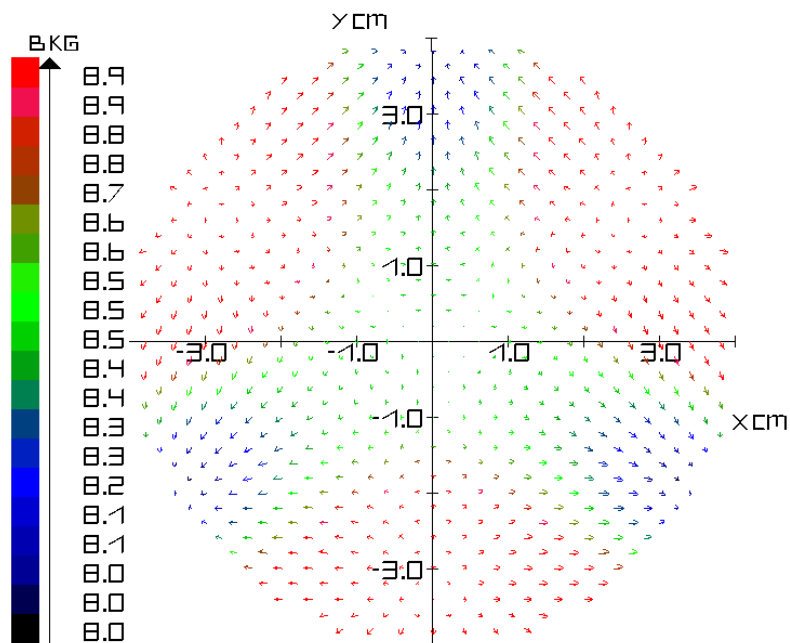


Figura 4.7: Vista XY de la Trampa Magnética Mínimo-B en el plano ($z = 12,0$ cm).

4.3 SUPERFICIES MAGNÉTICAS

4.3.1. SUPERFICIE RCE

El valor que toma el campo magnético RCE es $5005,102[\text{G}]$ y la forma de la superficie en el cual la magnitud del campo posee dicho valor se denomina superficie RCE, la cual en este caso particular toma la forma de un elipsoide achatado en los extremos, tal y como podemos apreciar en la Figura 4.8.

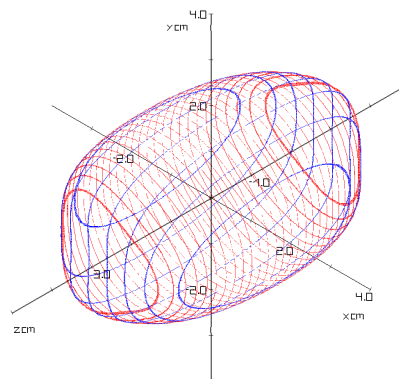


Figura 4.8: Vista XYZ de la Zona RCE (Trampa Mínimo-B).

Para determinar las dimensiones que caracterizan la superficie obtenida, presentamos dos gráficas que muestran los cortes en los planos transversales. Primero realizamos el corte central transversal ($z = 0,0[\text{cm}]$), el cual nos permite visualizar una figura muy similar a un círculo de radio $1,9[\text{cm}]$.

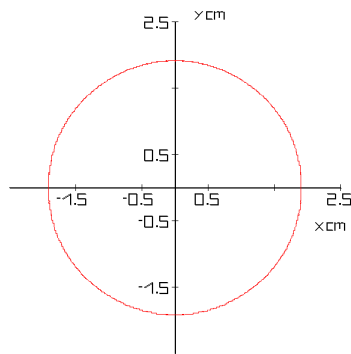


Figura 4.9: Vista XY del Corte Central Transversal de la Zona RCE.

Para encontrar el semieje Z , realizamos un corte en el plano central longitudinal en $(x = 0, 0[\text{cm}])$, el cual se ilustra en la Figura 4.11, obteniendo un valor de $2,85[\text{cm}]$.

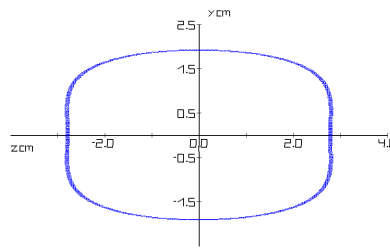


Figura 4.10: Vista YZ del Corte Central Longitudinal de la Zona RCE.

4.3.2. OTRAS SUPERFICIES

En la Figura 4.11 presentamos la superficie magnética que se obtiene cuando tomamos $B = 6201,6[\text{G}]$, en la cual observamos que la forma sigue siendo la misma, es un elipsoide.

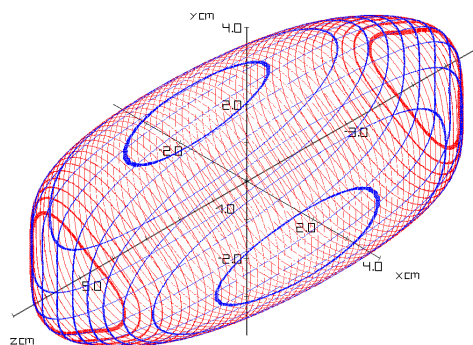


Figura 4.11: Vista XYZ de la Superficie Magnética.

De igual forma que en el caso de la superficie RCE presentamos los cortes en los planos central transversal y longitudinal, los cuales permiten caracterizar dicha superficie. En la Figura 4.12, podemos apreciar como la vista del corte en el plano central transversal de la superficie magnetica, no posee una simetría circular a diferencia del perfil obtenido para la zona RCE. Este comportamiento, se debe a la cercanía de algunos puntos de esta región al sistema de imanes. Por otro lado, la geometría obtenida para la vista del corte central longitudinal sobre plano YZ (Vease Figura 4.13) es idéntica a la obtenida para la zona RCE. Observemos:

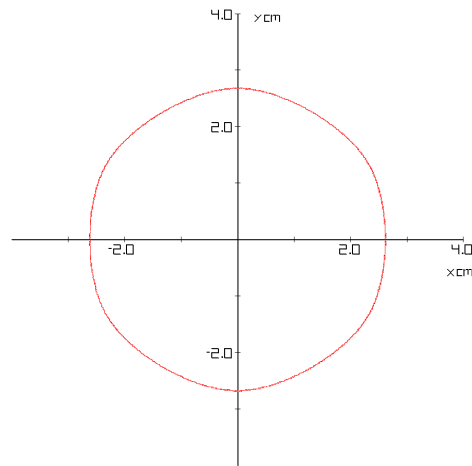


Figura 4.12: Vista XY del Corte Central Transversal de la Superficie Magnética.

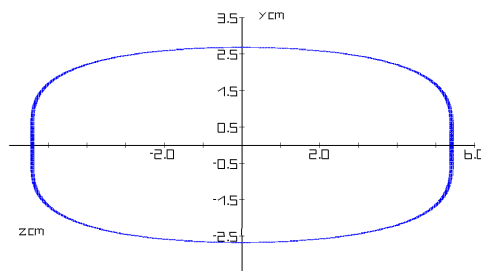


Figura 4.13: Vista YZ del Corte Central Longitudinal de la Superficie Magnética.

CAPÍTULO 5

TRAMPA MAGNETICA CERO - B

En el año 2000 el director del FITEK, propuso una nueva trampa para confinar plasmas llamada cero-B. La característica principal de este nuevo sistema es la ausencia de campo magnético en el punto central de la cavidad y el incremento en el valor del mismo en todas las direcciones del espacio [Dugar-Jabon 2000]. Las configuraciones mínimo-B y cero-B hacen uso de idénticos elementos magnéticos para la generación del campo. La diferencia entre dichas trampas radica en la naturaleza del campo longitudinal, mientras en mínimo-B tenemos un campo tipo espejo, en cero-B contamos con un campo cusp [Dugar-Jabon 2000]; tal campo puede ser obtenido si tomamos las corrientes iguales en magnitud pero opuestas en dirección.

5.1 SISTEMA FÍSICO

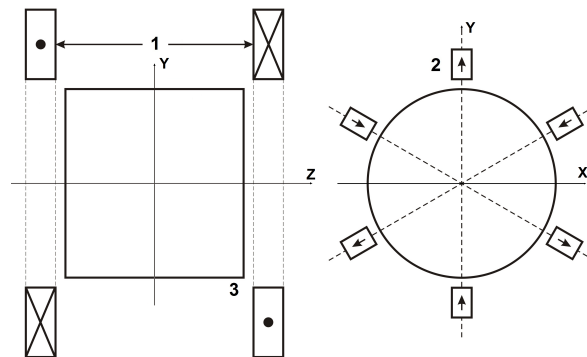


Figura 5.1: Sistema Magnético Cero - B: 1-Bobinas, 2-Sextupolo Magnético y 3-Cavidad Cilíndrica.

El sistema físico es bastante sencillo, consta de una cámara de descarga (cavidad cilíndrica), un par de bobinas y el sextupolo magnético, dicho sistema es representado en la Figura 5.1. Los datos de entrada son los mismos utilizados en el capítulo anterior y descritos en las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3.

5.2 CAMPO CERO - B

La trampa magnética Cero - B se obtiene al superponer un campo longitudinal cusp, con uno transversal multicusp, el primero es generado por un par de bobinas, mientras que el segundo es producido por un sextupolo magnético, idéntico al utilizado en la trampa mínimo - B. Para tener una mejor idea del campo cero - B, presentamos varias figuras. En la Figura 5.2, presentamos una vista del campo emitido por las bobinas en el plano central longitudinal ($x = 0,0$ [cm]), en el cual podemos apreciar que su componente radial es positiva y aumenta a medida que nos acercamos al plano central transversal de la cavidad.

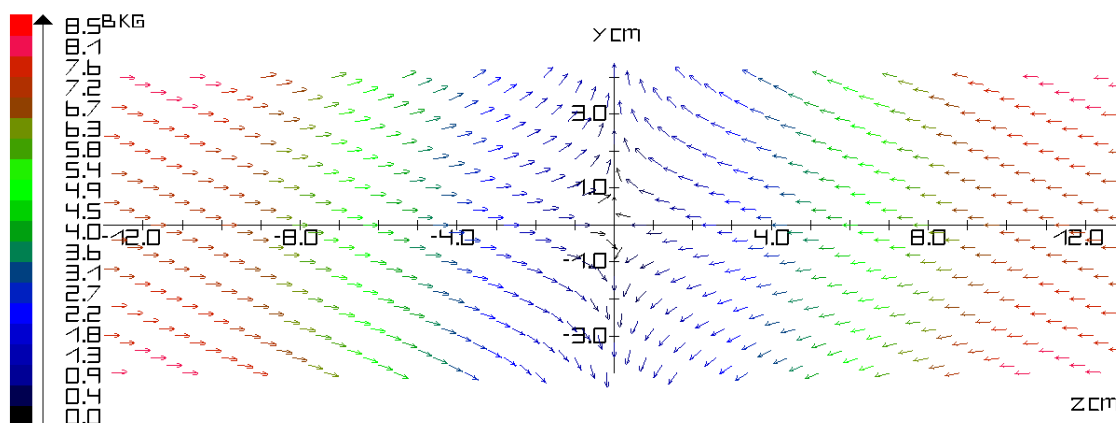


Figura 5.2: Vista YZ del Campo Bobinar en el PCL.

Por otro lado el campo transversal generado por los imanes, fortalece la magnitud del campo en la región contigua a las paredes de la cavidad. En la Figura 5.3, podemos apreciar con más detalle este comportamiento.

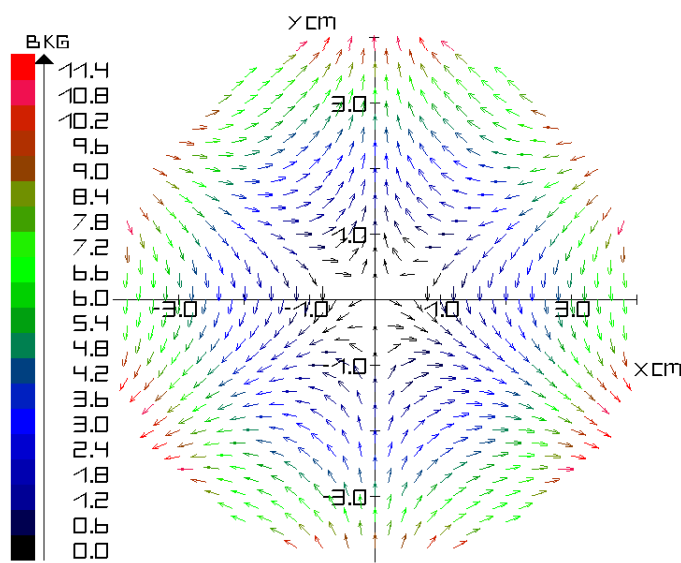


Figura 5.3: Vista XY de la Trampa Cero - B en el PCT.

Adicionalmente podemos afirmar que debido a la forma del campo bobinar (cusp), se fortalece la magnitud campo en la región cercana a los polos sur de los imanes, dado que poseen la misma dirección, mientras que las provenientes de los polos nortes se debilitan, ya que poseen sentidos contrarios (Ver Figura 5.3).

En la Figura 5.4, podemos ver como la magnitud del campo cero-B aumenta conforme $|z|$ crece. Esta vista tambien nos permite apreciar como el valor del campo se hace nulo en el centro de la cavidad.

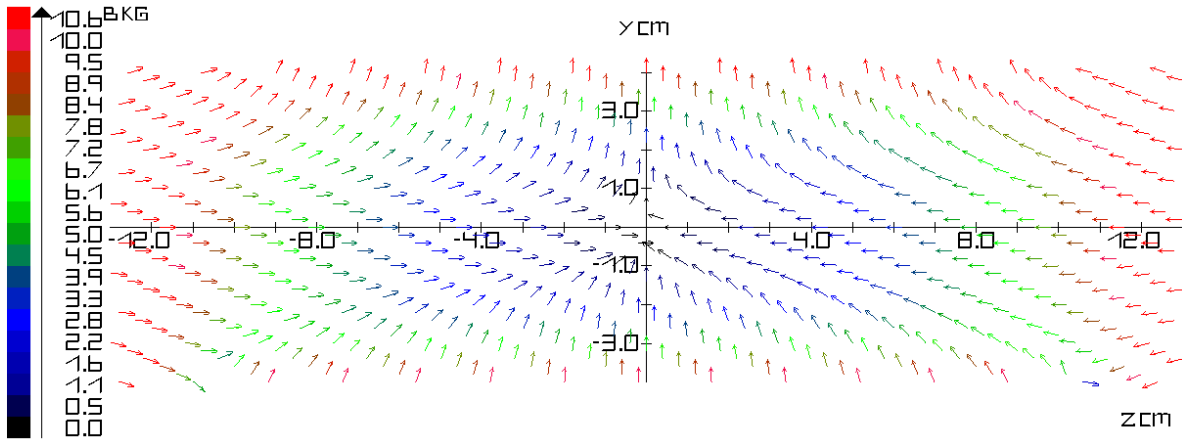


Figura 5.4: Vista YZ de la Trampa Cero-B en el PCL.

5.3 SUPERFICIE RCE

Ahora, determinamos la forma que posee la superficie RCE, la magnitud del campo magnético toma un valor de 5001,07[G]. La forma se asemeja a un elipsoide achatado en los extremos pero de sección transversal no circular a diferencia de la obtenida en la trampa mínimo-B. Para tener una mayor idea de la forma de la zona RCE, en la Figura 5.5 presentamos una vista en tres dimensiones.

Para medir los semiejes del elipsoide, utilizamos los cortes en los planos centrales, tal y como lo hicimos para la trampa mínimo-B, para ello, construimos las Figuras 5.6 y 5.7. A continuación, presentamos una tabla que resume las dimensiones del elipsoide:

Semieje X[cm]	Semieje Y[cm]	Semieje Z[cm]
2,58	2,95	7,55

Tabla 5.1: Datos de la Superficie RCE.

Adicionalmente, podemos observar los campos vectoriales correspondientes a los planos situados en los extremos de la zona de resonancia ciclotronica electronica. En las Figura 5.8 presentamos la vista XY del campo magnético en el plano situado en ($z = -7,55[\text{cm}]$), que corresponde al extremo izquierdo de la zona RCE, mientras que el derecho es expuesto en la Figura 5.9.

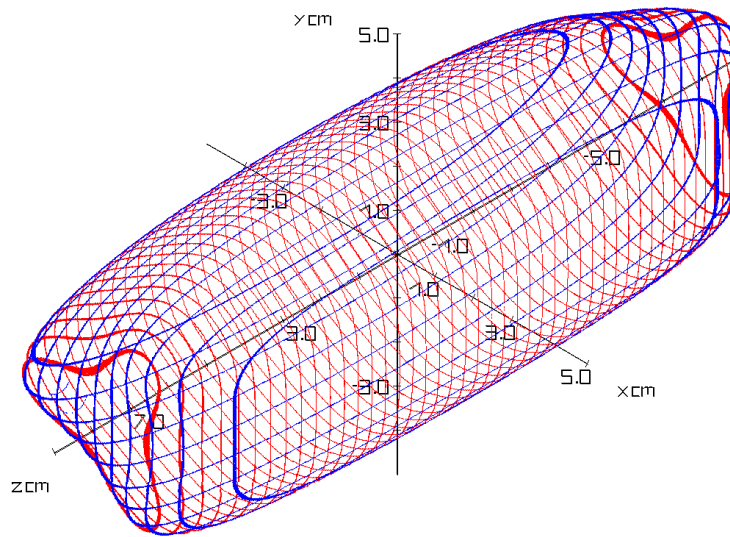


Figura 5.5: Vista XYZ de la Superficie RCE (Trampa Cero-B).

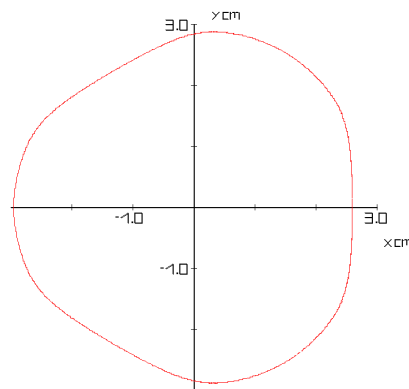


Figura 5.6: Vista XY del Corte Central Transversal de la Zona RCE.

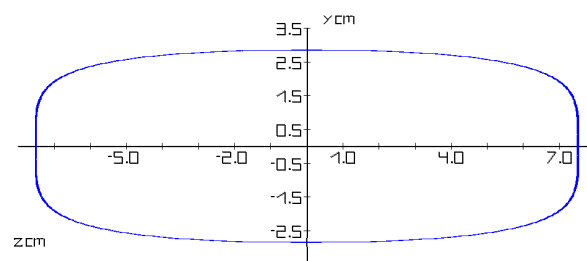


Figura 5.7: Vista XY del Corte Central Longitudinal de la Zona RCE.

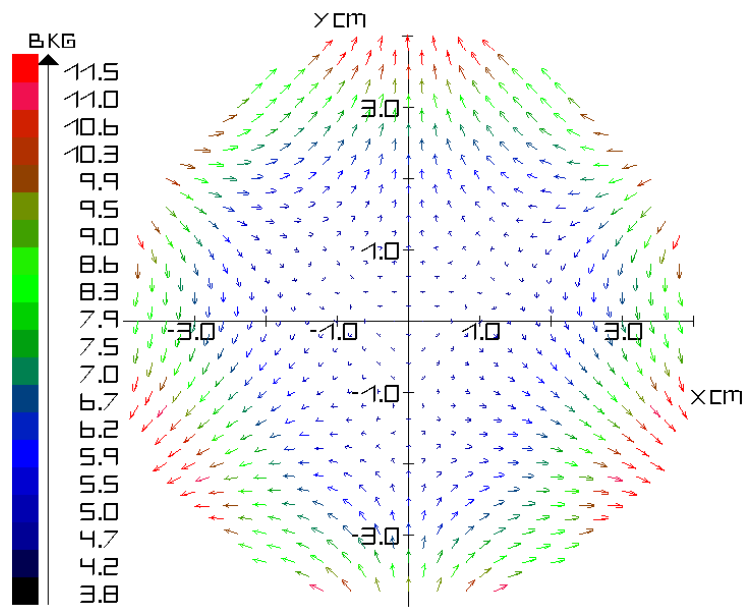


Figura 5.8: Vista XY de la Trampa Cero-B en el Plano situado en ($z = -7,55$ cm).

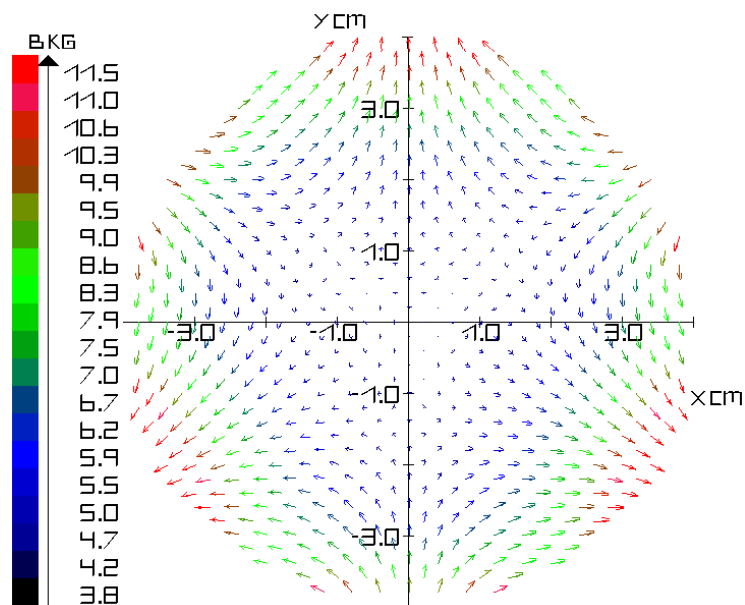


Figura 5.9: Vista XY de la Trampa Cero-B en el Plano situado en ($z = 7,55$ cm).

CONCLUSIONES

- A partir de la Ley de Biot - Savart y el principio de superposición, hemos logrado reproducir el campo generado por hilos conductores con diversas geometrías (Recta, Circular y Elíptica), lo cual nos ha permitido establecer el campo producido por un sistema de Bobinas, necesario para la obtención de la trampa tipo espejo, mínimo - B y cero - B.
- Desde el modelo físico propuesto en el presente trabajo, se han obtenido una serie de ecuaciones que permiten simular el campo magnético producido por un imán. Dichas expresiones representan un gran avance, ya que al obtener soluciones analíticas para todas las componentes del campo, ganamos exactitud en el cálculo del mismo.
- Las gráficas obtenidas para los campos correspondientes a las trampas magnéticas permiten al investigador conocer la dirección del campo y el gradiente de magnitud, lo cual es vital para determinar la dirección de la fuerza diamagnética, fundamental en el estudio del confinamiento magnético.
- El estudio de las zonas de resonancia ciclotrónica electrónica aportado en este trabajo, es fundamental para el calentamiento de plasmas por microondas, ya que permite comprender los campos involucrados en cada una de las trampas magnéticas vistas.

REFERENCIAS

- [Arfken 2005] G. B. Arfken and H. J. Weber, “Mathematical Methods for Physicists”, Sixth Edition, Elsevier Academic Press, (2005).
- [Baiborodov 1963] Yu. T. Baiborodov, M. S. Ioffe, V. M. Petrov and R. I. Sobolev, “An adiabatic trap with combined magnetic field”, *J. Nucl. Energy, Part C Plasma Phys*, **5**, 409-410 (1963).
- [Geller 1996] R. Geller, “Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and RCE Plasmas”, Institute of Physics Publishing Bristol Philadelphia, (1996).
- [Greyner 1998] W. Greyner, “Classical Electrodynamics”, Springer - Verlag, (1998).
- [Griffiths 1999] D. J. Griffiths, “Introduction to Electrodynamics”, Third Edition, (Prentice-Hall, 1999).
- [Dugar-Jabon 2000] V. D. Dugar-Jabon, F. A. Vivas Mejia and A. M. Umnov, “Plasma Confinement in a Electron Cyclotron Double Cusp Trap”, *Phys Scr*, **62**, 183-185 (2000).
- [Dugar-Jabon 2001] V. D. Dugar-Jabon, “Production of hydrogen and deuterium negative ions in an electron cyclotron resonance driven plasma”, *Phys. Scripta*, **63**, 322 (2001).
- [Dugar-Jabon 2002] V. D. Dugar-Jabon, A. M. Umnov, D. Suescun Diaz, “Three dimensional simulation of an ECR plasma in a minimum-B trap”, *Rev. Sci. Instrum.*, **73**, 629 (2002).
- [Dugar-Zhabon 2004] V. D. Dugar-Zhabon, “X-ray source based on electron cyclotron resonance discharge in a magnetic mirror trap”, *Phys. Scripta*, **69**, 313 (2004).
- [Dugar-Zhabon 2010] V. D. Dugar-Zhabon and M. T. Murillo Acevedo, “Formation of a hot electron ring in an ECR mirror trap through a particle-in-cell simulation study”, *IEEE Transaction on Plasma Science*, **38**, 3449-3454 (2010).
- [Hedrick 1957] E. R. Hedrick, “Tables of Integrals and other Mathematical Data”, Third Edition, THE MACMILLAN COMPANY, (1957).
- [Jackson 1998] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics”, (Jhon Wiley & Sons, 1998).
- [Miyamoto 2000] K. Miyamoto, “Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion”, National Institute for Fusion Science, Japan, (2000).
- [Murillo 2008] Mao T. Murillo and Valery Dugar, “Simulación de un Plasma RCE en una Trampa Tipo Espejo Mediante el Método Párticula en Celda”, *Tesis de Maestría*, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Escuela de Física. (2008).
- [Murillo, Guerrero 2008] M. T. Murillo Acevedo, J. E. Guerrero Araque and V. D. Dugar Jabon, “Modelamiento Numérico de Formación de un Anillo en Rotación en un Plasma de Resonancia Ciclotrónica Electrónica”, *Revista Colombiana de Física*, **40**, 180-182 (2008).
- [Ravaud 2009] R. Ravaud and G. Lemarquand, “MAGNETIC FIELD PRODUCED BY A PARALLELEPIPEDIC MAGNET OF VARIOUS AND UNIFORM POLARIZATION”, *Progress In Electromagnetics Research*, **98**, p. 207-219, (2009).