

*Anisotropía Estadística en Modelos Inflacionarios con
Múltiples Campos Vectoriales y/o Expansión Anisótropa
Prolongada*

LUIS GABRIEL GÓMEZ DÍAZ¹
FÍSICO



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2012

*Anisotropía Estadística en Modelos Inflacionarios con
Múltiples Campos Vectoriales y/o Expansión Anisótropa
Prolongada*

LUIS GABRIEL GÓMEZ DÍAZ¹
FÍSICO

TRABAJO DE TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN FÍSICA

DIRECTOR
YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA^{1,2} PH.D.

GRUPO DE INVESTIGACIÓN

¹GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN RELATIVIDAD Y GRAVITACIÓN - UIS,

²GRUPO DE FÍSICA - FENOMENOLOGÍA DE PARTÍCULAS ELEMENTALES Y
COSMOLOGÍA - UAN



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2012

Dedicado a

... Mis padres Elvia y Leopoldo; quienes son un orgullo y un ejemplo de vida. Mi admiración no cabe en lo profundo de mi ser.

...Mi querida Carito: En la nada virtual del Universo nuestros mundos de fuego, vacíos e inútiles, se cruzaron para ocupar lo que el destino algún día dispuso para nuestros corazones. Eres la luz de mi inspiración.

Agradecimientos

En especial a mi familia; quienes han sido un apoyo incondicional en el transcurso de mi vida. A mis amigos, y al profesor Yeinzon Rodríguez, quien con su valiosa dedicación ha contribuido en el desarrollo de mis conocimientos.

*El Universo es nadie es nada es todo
concebir su vacío parte el alma
el miedo ya no alcanza / es más bien asco
lo que inspira el abismo del big bang
si uno nace furtivo y miserable
en la orilla de un río de presagios
¿quién le importa en qué mares se vierten
en qué azar en qué palpito en qué ritos
el universo no cabe en un atlas
ni en arcaicos cuadernos de bitácoras
tampoco hay un brújula que guíe
porque el norte no es norte
es sólo ausencia.
Mario Benedetti*

Índice general

Índice general	7
Índice de figuras	9
Introducción	12
1. El Verdadero Principio Cosmológico	16
1.1. Descriptores Estadísticos en la Teoría de Perturbaciones	17
1.2. Homogeneidad Estadística	17
1.3. Isotropía Estadística	18
1.4. Gaussianidad	19
1.5. Fundamento Observacional	21
2. El Formalismo δN con Múltiples Campos Escalares y Vectoriales	22
2.1. La Perturbación en la Curvatura ζ	22
2.2. La Formula δN	23
2.3. Contribución de las Perturbaciones de los Campos y de la Expansión Anisótropa a la Generación de Anisotropía Estadística en la Perturbación Primordial en la Curvatura	26
2.3.1. Anisotropía Estadística con Expansión Isótropa	27
2.3.2. Anisotropía Estadística con Expansión Anisótropa	27
3. Anisotropía Estadística en Modelos con Múltiples Campos Vectoriales	29
3.1. Modelo <i>Gauge-flation</i>	29
3.1.1. Descripción del Modelo	29
3.1.2. Anisotropía Estadística	30
3.2. Modelo <i>Hairy-inflation</i> : Descripción del Modelo	31

3.3. Estudio General del Modelo Cuando se Considera Campos Vectoriales de Gauge Masivos	33
3.3.1. Ecuaciones de Campo y de Movimiento en el Espacio de Fase	35
3.4. Análisis de la Dinámica del Modelo a Través de Sistemas Dinámicos	37
3.4.1. Campo Vectorial sin Masa	37
3.4.2. Análisis de la Dependencia Temporal de los Parámetros del Modelo	44
3.5. Anisotropía Estadística en el Modelo de <i>Hairy inflation</i>	46
4. Posibilidades de Desarrollo Posterior a la Tesis	48
4.1. Modelo de <i>Gauge-flation</i>	48
4.2. Modelo de <i>Hairy-inflation</i>	49
A. El Teorema Ergódico	50
B. Producción de Partículas en un Fondo Isótropo	53
B.1. Producción de Partículas	55
B.1.1. Componente Trasversal de la Perturbación Vectorial	55
B.1.2. Componente Longitudinal de la Perturbación Vectorial	57
C. Ecuaciones de Campo y de Movimiento en el Modelo de <i>Hairy Inflation</i>	59
C.1. Ecuaciones de Campo	59
C.2. Ecuación de Movimiento para el Campo Escalar	60
C.3. Ecuación de Movimiento para el Campo Vectorial	61
D. Teoría de los Sistemas Dinámicos	62
Conclusiones	64
Bibliografía	66

Índice de figuras

3.1. Dependencia angular del nivel de anisotropía estadística para diferentes valores de la constante c . k es un modo asociado al espectro de perturbaciones y k_* denota la magnitud de un modo a la salida del horizonte al final de inflación. Esta figura fué tomada de la referencia [1].	33
3.2. Región del espacio de parámetros para la cual no se presenta variaciones significativas de los valores propios.	39
3.3. Valor propio $m_{1,2}$ en el espacio de parámetros.	40
3.4. Valor propio m_1 en el espacio de parámetros.	41
3.5. Valor propio m_2 en el espacio de parámetros.	42
3.6. Valor propio m_3 en el espacio de parámetros.	43

Título en español

Anisotropía Estadística en Modelos Inflacionarios con Múltiples Campos Vectoriales y/o Expansión Anisótropa Prolongada¹

Autor: Gómez Díaz, Luis Gabriel²

Palabras claves: Anisotropía estadística, Expansión anisótropa prolongada, Inflación con campos vectoriales y escalares.

Resumen: En este trabajo, se hace un estudio general de las contribuciones de las perturbaciones de múltiples campos escalares, múltiples campos vectoriales y de la expansión anisótropa a la generación de anisotropía estadística en la perturbación primordial en la curvatura ζ . Dicho estudio se realiza a través del formalismo δN . Allí, se consideran dos casos específicos que determinan la forma del espectro de la perturbación primordial en la curvatura $P_\zeta(\mathbf{k})$. El primero, surge cuando se considera la posibilidad de invarianza ante rotaciones espaciales de los correladores de n puntos (isotropía estadística), lo cual es equivalente a tener expansión isotropa. El segundo, se origina cuando se considera expansión anisótropa, lo que conlleva a obtener dos contribuciones adicionales con respecto al primer caso a la generación de anisotropía estadística de ζ . Los resultados obtenidos en este trabajo acerca de la anisotropía estadística se aplican a dos modelos inflacionarios vectoriales que han tenido una gran aceptación en la comunidad científica: el modelo de *Hairy-inflation*, en el que el campo escalar está acoplado al campo vectorial mediante la función cinética f y el modelo de *Gauge-flation* en el que se consideran tres campos vectoriales de gauge sin presencia de campos escalares. Como resultados de estos análisis, se excluye el modelo de *Gauge-flation* dado que para éste se obtiene un nivel de anisotropía estadística muy grande y, por ende, incoherente con las observaciones. Adicional a este resultado, se logra explicar de manera satisfactoria el origen del signo negativo del nivel de anisotropía estadística en el modelo de *Hairy-inflation*. Para éste último, se estudia la dinámica inflacionaria a través de la teoría de los sistemas dinámicos, de donde se obtienen los atractores y las condiciones respectivas sobre los parámetros del modelo que determinan la estabilidad del sistema.

¹Trabajo de investigación.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez (Director).

Title in English

Statistical Anisotropy in Inflationary Models With Many Vector fields and/or Prolonged Anisotropic Expansion³

Author: Gómez Díaz, Luis Gabriel⁴

Keywords: Statistical anisotropy, Prolonged anisotropic expansion, Inflation with vector and scalar fields.

Abstract: In this work, we study the most general contributions due to scalar field perturbations, vector field perturbations and anisotropic expansion to the generation of statistical anisotropy in the primordial curvature perturbation ζ . This study was done using the formalism δN . Here, we consider two specific cases that lead to determine the power spectrum of primordial curvature perturbation $P_\zeta(\vec{\mathbf{k}})$. In the first one, we consider the possibility that the n point correlators in real space are invariant under rotations in space (statistical isotropy), which it is equivalent to having isotropy expansion. The second possibility arises when we consider anisotropic expansion, what lead to obtain two additional contributions to the generation of statistical anisotropy of ζ compared with the first case. The results obtained in this work about statistical anisotropy are applied to two vector inflationary models that have been widely accepted in the scientific community: the *Hairy-inflation* model, in which the scalar field coupled to vector field through kinetic function f and the *Gauge-flation* model which considers three gauge vector fields without the presence of scalar fields. As a result of these analyzes, the model *Gauge-flation* is excluded because it generates a level of statistical anisotropy very large and therefore it is inconsistent with observations. In addition, we explain in a satisfactory way the origin of the negative sing of the level of statistical anisotropy for the model *Hairy-inflation*. For the latter, we study the dynamic inflationary through dynamical systems theory, where the attractors are obtained and the conditions to establish the stability of the system are specified.

³Research Project.

⁴Faculty of Science, School of Physics, Yeinzon Rodríguez (Advisor).

Introducción

Análisis en los datos de la radiación cósmica de fondo (RCF) proporcionados por los satélites COBE⁵, WMAP⁶ y próximamente PLANCK⁷, y observaciones sobre la distribución de galaxias⁸, establecen que nuestro Universo luce homogéneo e isótropo a grandes escalas. Esto implica que si dividimos el Universo en cubos de volumen de aproximadamente $10^6 Mpc^3$, éste luce en promedio homogéneo e isótropo con respecto a todos los cubos, es decir que la distribución de galaxias a dicha escala es homogénea. Estas características (a grosso modo) constituyen el principio cosmológico⁹, que a su vez, sienta las bases teóricas en la construcción del conocimiento en la cosmología moderna.

Uno de los principales propósitos de la cosmología es el estudio sobre el origen y formación de las estructuras a gran escala [2] (galaxias, clusters, superclusters) presentes en nuestro Universo observable. Bajo este objeto de estudio, se han planteado diferentes mecanismos en la generación de estas estructuras. No obstante, el mecanismo físico más aceptado es el propuesto por Alan Guth, en el que dichas estructuras se originan a partir de la evolución de la perturbación en la densidad de energía durante un período de expansión acelerada del Universo temprano denominado *inflación* [3].

La cantidad más importante de estudio en el Universo primitivo es la perturbación en la curvatura ζ , debido a que esta cantidad se conserva¹⁰ en escalas de superhorizonte [4], siempre y cuando la presión del fluido cósmico se pueda expresar como una función única de la densidad de energía. Además, la perturbación en la curvatura ζ determina la perturbación en la densidad de energía $\delta\rho$, definida sobre un *slicing* de curvatura espacial constante y se originan mediante fluctuaciones cuánticas de campos escalares durante el período inflacionario [2, 5]. Estas perturbaciones primordiales proporcionan unas condiciones iniciales para la evolución subsecuente del Universo perturbado [2]. De aquí que los modelos cosmológicos estén basados en el concepto de inflación, los cuales requieren generar un espectro de las perturbaciones invariante de escala con gran precisión.

De otra parte, estudios recientes señalan que existen varios indicadores significativos de anisotropía estadística impresa en la RCF [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Según análisis de

⁵<http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe>.

⁶<http://map.gsfc.nasa.gov>.

⁷www.rssd.esa.int/planck.

⁸<http://www.sdss.org>.

⁹Siendo más riguroso, las características de homogeneidad e isotropía estadística son las que realmente establecen este principio.

¹⁰Además ζ es una cantidad invariante de gauge: por tal razón puede ser comparada con la observación.

datos proporcionados en el séptimo año del WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [13] se encontró evidencias de estructuras cuadrupolares y dipolares en la distribución de potencias en la RCF a todas las escalas angulares [8, 12]. Allí, Se observa un alineamiento de los multipolos más bajos a grandes escalas en el espectro de potencias de la RCF, lo que conlleva a que exista una dirección preferencial en el Universo. Esta anomalía es cuantificada por el nivel de anisotropía estadística g_ζ , el cual actúa como discriminante entre los diferentes modelos inflacionarios propuestos para la formación de estructuras a gran escala. Sin entender completamente el significado estadístico de estas anomalías, dado que podrían haber sido originadas a partir de errores sistemáticos u otros efectos de contaminación [14], resulta atractivo estudiar modelos inflacionarios que rompan la invarianza rotacional y que generen por ende niveles de anisotropía estadística coherentes con la observación. Este es uno de los temas actuales de mayor interés en la cosmología inflacionaria.

Como motivación a los análisis observacionales, se han propuesto diferentes modelos inflacionarios que consideran distintos tipos de campos y configuraciones con el fin de generar anisotropía estadística. Algunos de estos modelos se basan en campos vectoriales [15], campos espinoriales [16], p-formas [17] y recientemente campos de gauge Abelianos que transforman bajo el grupo $U(1)$ [18] y campos de gauge no Abelianos que transforman bajo el grupo de simetría $SU(2)$ [19]. Cabe indicar que los modelos inflacionarios que involucran campos escalares no generan anisotropía estadística en coherencia con el teorema del no cabello cósmico¹¹ [21]. De otra parte, varios modelos inflacionarios anisotrópos han sido propuestos, presentando inestabilidades¹² [22, 23, 24] tales como campos fantasmas. No obstante, algunos modelos anisotrópos estables han sido encontrados por primera vez en la literatura [25, 26, 27], siendo uno de estos y tal vez el más relevante el propuesto por Watanabe, Kanno y Soda [25] denominado *Hairy inflation*, en donde el campo del inflatón es acoplado a un único campo vectorial a través de la función cinética f . El estudio de la naturaleza estadística de las fluctuaciones primordiales en este modelo se presentan en las referencias [28, 1, 29]. En dicho modelo, se obtiene un valor negativo del nivel de anisotropía estadística g_ζ vía teoría de perturbaciones cosmológica [30]. Esta manera de tratar las perturbaciones es demasiado larga y tediosa y oscurece el verdadero origen del g_ζ negativo allí obtenido. Este valor resulta incoherente con las observaciones actuales, cuyo valor positivo se encuentra en el rango $g_\zeta = 0.290 \pm 0.031$ [8] excluyendo el cero a más de 9σ . Hay que resaltar que los análisis de las observaciones no son absolutamente confiables, dado que la dirección preferencial de esta señal está sospechosamente alineada a lo largo del plano del sistema solar, lo cual podría indicar que este efecto es debido a errores sistemáticos.

Una metodología alternativa a la teoría de perturbaciones cosmológicas (TPC), la cual es válida sólo a escalas de subhorizonte pero a todos los ordenes en perturbaciones, es el formalismo δN . Esta poderosa herramienta se emplea para calcular y analizar las propiedades estadísticas de la perturbación de la curvatura de una manera mucho más fácil y clara comparada con la teoría de perturbaciones cosmológica. Este formalismo fue implementado por primera vez por Starobinsky a orden lineal [31], y por Sasaki y

¹¹Este teorema establece que si universos homogéneos pero anisotrópos son dominados por campos escalares o por la constante cosmológica, éstos rápidamente (de forma exponencial) alcanzarán el estado de isotropía [20].

¹²Esto se refiere a un comportamiento inadecuado de las perturbaciones, en donde las soluciones de las ecuaciones lineales para las perturbaciones divergen cuando cruzan el horizonte.

Stewart en [32], y extendido de forma no lineal para campos escalares en [4, 33] con el fin de estudiar efectos de no gaussianidad. Recientemente se ha obtenido una expresión para ζ considerando adicionalmente al campo del inflatón un campo vectorial [34]. En este mismo trabajo, este formalismo se ha aplicado a diferentes escenarios inflacionarios (curvatón vectorial [18, 35] e inflación vectorial [15]).

Antes de realizar un estudio de la TPC resulta de gran utilidad estudiar la dinámica inflacionaria¹³, ya que es necesario extraer información del fondo que será requerida para un estudio a ordenes mayores. Este análisis se hace con el fin de establecer las condiciones energéticas para las cuales se puede generar inflación y, por consiguiente, poder resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar. No obstante, el estudio dinámico del sistema de ecuaciones diferenciales acopladas no lineales que proporciona cada modelo inflacionario resulta difícil si no imposible de resolver cuando el sistema contiene un número grande de grados de libertad. Sin embargo, esta dificultad puede ser superada al usar técnicas sofisticadas como la teoría de los sistemas dinámicos la cual se ha implementado en el campo de la cosmología [36, 37]. El uso de esta técnica permite obtener información cualitativa sobre la evolución y el comportamiento asintótico de los modelos inflacionarios, tras obtener los puntos críticos del sistema, particularmente aquéllos que correspondan a atractores.

En el primer capítulo de esta tesis, se pretende proporcionar las herramientas necesarias para comprender el verdadero principio cosmológico y sentar las bases teóricas para el estudio de las propiedades estadísticas de la perturbación primordial en la curvatura. Los conceptos de homogeneidad estadística, isotropía estadística y gaussianidad estudiados allí, establecen los fundamentos en los que dicha formulación está basada. De igual manera, se construyen una serie de implicaciones que fueron desarrolladas a lo largo de este trabajo. Más específicamente se obtiene una equivalencia entre expansión anisótropa y no invarianza ante rotaciones espaciales de los correladores de n puntos para las perturbaciones de los campos. Así mismo, se encuentra una implicación bicondicional entre invarianza ante rotaciones espaciales de todos los correladores de n puntos de los campos involucrados y expansión isotropa, argumentando las condiciones bajo las cuales se satisface dicha implicación.

Posterior a este análisis, en el capítulo 2 se extiende el formalismo δN para múltiples campos escalares y múltiples campos vectoriales. Allí, se hace un estudio general de las contribuciones de las perturbaciones de los campos escalares y vectoriales, y de la expansión anisótropa a la generación de anisotropía estadística en la perturbación en la curvatura¹⁴. A partir de este estudio, se obtienen dos expresiones nunca antes encontradas en la literatura que determinan la forma del espectro de ζ : la primera, se consigue al asumir expansión isotropa, lo que conduce a obtener una única forma para el nivel de anisotropía; la segunda forma del espectro, se obtiene al asumir expansión anisótropa, lo que conlleva a que existan tres direcciones preferentes, caracterizadas cada una de éstas por un nivel de anisotropía estadística y relacionadas con la naturaleza de los campos.

En los capítulos 3 y 4 se aplican las expresiones obtenidas acerca de la anisotropía

¹³Este trabajo es comúnmente llamado orden cero en teoría de perturbaciones cosmológicas.

¹⁴En la referencia [34], sólo consideran las perturbaciones de los campos pero en un fondo isotropo (expansión isotropa). Contrario al caso presentado en este trabajo en donde se considera también expansión anisótropa.

estadística al modelo de *Gauge flation* [19] y al modelo de *Hairy inflation* [25], lo que permite obtener una explicación del signo negativo de g_ζ encontrado en este último modelo. Adicionalmente, al aplicar dichos resultados al modelo de *Gauge flation* en el que aseguran que la anisotropía es diluida durante inflación aun cuando hayan campos vectoriales de gauge, se obtiene en este trabajo un nivel de anisotropía que en todo sentido es incoherente con el valor observado, lo que conduce a que no sólo se descarte este modelo inflacionario sino que a partir de esta dificultad, se planteen diferentes alternativas que conduzcan a un g_ζ positivo y consistente con los análisis observacionales.

Finalmente, los resultados anteriores los cuales fueron obtenidos a partir del trabajo de investigación de esta tesis, se presentan en una serie de conclusiones. Adicionalmente, se muestran allí las posibilidades de investigación a futuro que surgieron a partir de esta tesis, así como los resultados del análisis del modelo de *Hairy inflation* a través de la teoría de los sistemas dinámicos.

CAPÍTULO 1

El Verdadero Principio Cosmológico

La característica más importante de nuestro Universo a gran escala, es la aproximada homogeneidad e isotropía que se presenta en la distribución de galaxias. Esta característica constituye el *Principio Cosmológico* [2, 5, 30, 38] el cual es válido para regiones observables del Universo mayores a 100 Mpc. Para regiones observables menores que dicha escala, el Universo presenta notables inhomogeneidades (galaxias, clusters, superclusters) es decir, que la distribución de densidad de energía a pequeñas escalas (menores que 100 Mpc) es inhomogénea. Dicho de otra forma, el Universo luce igual en todas las direcciones con respecto a cualquier región de volumen $10^6 Mpc^3$, y en consecuencia luce igual en cada una de estas regiones. Sin embargo, qué se puede entender exactamente como un Universo homogéneo e isótropo con respecto a todas las regiones a grandes escalas?

Como consecuencia de las observaciones, si se divide el Universo en cubos superiores a $10^6 Mpc^3$ se podrá observar que el Universo luce en promedio homogéneo e isótropo con respecto a todos los cubos. Bajo este principio, que surgió inicialmente a partir de una concepción filosófica y que posteriormente resultó siendo coherente con las observaciones modernas, se fundamenta el marco teórico actual de la cosmología¹. De aquí la gran relevancia del principio cosmológico y de las bases observacionales en las que se establece.

De otra parte, las estructuras a gran escala presentes en el Universo observable son el producto de la evolución de perturbaciones primordiales identificadas con la perturbación primordial de la energía, la cual se define en un fondo descrito por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.1)$$

en donde t es el tiempo cósmico, r , θ y ϕ , son las coordenadas espaciales comóviles, $a(t)$ es el factor de escala del Universo, y K es la constante de curvatura de una hipersuperficie tridimensional (3D). Esta métrica presenta simetría de invarianza ante rotaciones espaciales (isotropía) con respecto a todos los puntos y simetría de invarianza ante traslaciones espaciales (homogeneidad). El principio cosmológico no corresponde al

¹La ecuación de Friedman, la ecuación de continuidad, el proceso de nucleosíntesis, la evolución postinflacionaria, etc.

conjunto de simetrías descritas anteriormente para la métrica de FRW sino al mismo conjunto de simetrías asociadas a las estructuras a gran escala. Estrictamente, este conjunto de simetrías para las estructuras no se respeta, sin embargo, se puede hablar en promedios de homogeneidad e isotropía con respecto a todos los cubos.

Como resultado de la verdadera interpretación del principio cosmológico, es necesario formularlo de una manera mas profunda a través de las propiedades estadísticas de las perturbaciones cosmológicas, denominadas: homogeneidad estadística, isotropía estadística y gaussianidad.

1.1. Descriptores Estadísticos en la Teoría de Perturbaciones

El mecanismo físico encargado de generar la estructura a gran escala a través de las perturbaciones primordiales es de naturaleza cuántica. De aquí que sea de interés estudiar las propiedades estadísticas del mapa de perturbaciones por medio de los correladores de n puntos de las perturbaciones [39]. Se define la perturbación escalar $\beta(\mathbf{x})$ en el espacio real, la cual puede ser expresada en términos de los modos de Fourier $\beta(\mathbf{k})$ a través de la expansión

$$\beta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \beta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.2)$$

Los correladores de n puntos de la perturbación $\beta(\mathbf{x})$ se definen como promedios de productos $\beta(\mathbf{x}_1)\beta(\mathbf{x}_2)\dots\beta(\mathbf{x}_n)$ sobre el ensamble de universos [40], en donde x_1, x_2, \dots, x_n corresponden a diferentes puntos espaciales ²

$$\langle \beta(\mathbf{x}_1)\beta(\mathbf{x}_2)\dots\beta(\mathbf{x}_n) \rangle = \int \frac{d^3k_1 d^3k_2 \dots d^3k_n}{(2\pi)^3 (2\pi)^3 \dots (2\pi)^3} \langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_2)\dots\beta(\mathbf{k}_n) \rangle e^{i(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{k}_n\cdot\mathbf{x}_n)}. \quad (1.3)$$

De esta manera, las funciones de correlación en el espacio físico pueden ser estudiadas a través de las funciones de correlación en el espacio de momentum. Adicionalmente, es útil trabajar en el espacio de momentum porque los modos asociados con las fluctuaciones cuánticas del campo escalar durante inflación se convierten en fluctuaciones clásicas una vez salen del horizonte. Lo mismo aplica para la perturbación primordial en la curvatura ζ .

1.2. Homogeneidad Estadística

Se conoce de las observaciones que el mapa de perturbaciones no es homogéneo, sin embargo puede que la función de distribución de probabilidad de la perturbación $\beta(\mathbf{x})$ que origina dichas perturbaciones sí lo sea. Lo anterior, se puede cuantificar de la siguiente manera: si los correladores de n puntos son invariantes ante traslaciones espaciales, se dice que existe homogeneidad estadística [2, 30, 41], es decir

$$\langle \beta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{d})\beta(\mathbf{x}_2 + \mathbf{d})\dots\beta(\mathbf{x}_n + \mathbf{d}) \rangle = \langle \beta(\mathbf{x}_1)\beta(\mathbf{x}_2)\dots\beta(\mathbf{x}_n) \rangle, \quad (1.4)$$

²Este promedio de ensambles es, según la expresión (1.2), sobre los modos de Fourier ya que son las únicas variables estocásticas.

en donde \mathbf{d} es algún vector que establece el monto de traslación espacial. Para lograr esta propiedad, es necesario expresar el argumento de la función exponencial de la ecuación (1.3) como la suma de varios términos de la forma $f(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$, lo cual es posible si los correladores de n puntos en el espacio de momentum son proporcionales a la función Delta de Dirac³:

$$\langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_2)\dots\beta(\mathbf{k}_n) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n) M_\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n), \quad (1.5)$$

en donde $M_\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)$ se denomina el $(n - 1)$ espectro. La homogeneidad estadística es absolutamente necesaria como un hipótesis del teorema ergódico [20, 21] (para una explicación mas detallada véase el apéndice 1). De lo contrario, aun cuando haya un marco teórico bien elaborado en la cosmología y una serie de datos significativos proporcionados por las observaciones, no hubiese forma alguna de comparar la teoría con la observación. No obstante, mediciones de las anisotropías en la amplitud de las fluctuaciones de la RCF indican que existe una diferencia entre hemisferios opuestos [42, 43, 44], dicha anomalía se denomina asimetría hemisférica. Lo anterior implica que dentro de una región pequeña del cielo dependa de manera general sobre la dirección de la región señalando diferencias entre hemisferios diametralmente opuestos. Sin embargo, la asimetría hemisférica no se puede explicar como efecto de la anisotropía estadística en la perturbación en la curvatura debido a que la varianza de la temperatura es la misma en parches con direcciones opuestas del cielo en vista que el espectro es invariante bajo el cambio de $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$. Se concluye entonces que la asimetría hemisférica requiere inhomogeneidad estadística en la perturbación en la curvatura, por consiguiente el correlador (1.5) no puede ser proporcional a la cantidad $\delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n)$ (con un espectro dependiente de la posición) [45, 46] pero en regiones pequeñas del Universo observable es razonable asumir homogeneidad estadística.

1.3. Isotropía Estadística

Una vez se ha asumido homogeneidad estadística, se puede indagar sobre la invarianza ante rotaciones espaciales de los correladores de n puntos en el espacio físico, es decir, isotropía estadística [2, 30, 41]. De igual modo, se conoce que el mapa de perturbaciones no es isótropo; sin embargo, puede que la función de distribución de probabilidad de la perturbación de los campos $\beta(\mathbf{x})$ sí lo sean. Se define isotropía estadística, si los correladores de n puntos en el espacio real son invariantes ante rotaciones espaciales

$$\langle \beta(\tilde{\mathbf{x}}_1)\beta(\tilde{\mathbf{x}}_2)\dots\beta(\tilde{\mathbf{x}}_n) \rangle = \langle \beta(\mathbf{x}_1)\beta(\mathbf{x}_2)\dots\beta(\mathbf{x}_n) \rangle, \quad (1.6)$$

en donde $\tilde{\mathbf{x}}_i = R\mathbf{x}_i$, con R denotando un operador de rotación. Esta característica de los correladores de n puntos se consigue si el espectro $n - 1$ de las perturbaciones satisface

$$M_\beta(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{k}}_n) = M_\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n), \quad (1.7)$$

en donde la tilde representa el vector de onda que ha sido rotado en el espacio de momentum a través del operador R .

Si se asume que el correlador de dos puntos es invariante bajo traslaciones espaciales (homogeneidad estadística) considerando la posibilidad de invarianza ante rotaciones

³Ésta no es la única escogencia.

espaciales (isotropía estadística), se definen las funciones de correlación de dos, tres y cuatro puntos para los modos de $\beta_{\mathbf{k}}$ respectivamente como

$$\langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_2) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_\beta(k), \quad (1.8)$$

$$\langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_2)\beta(\mathbf{k}_3) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B_\beta(k_1, k_2, k_3), \quad (1.9)$$

$$\langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_2)\beta(\mathbf{k}_3)\beta(\mathbf{k}_4) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) T_\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4), \quad (1.10)$$

y así sucesivamente.

En las expresiones anteriores P_β , B_β y T_β se denominan el espectro, biespectro y triespectro respectivamente. En el argumento del espectro se ha considerado $k = |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$, y para el biespectro $k_i = |\mathbf{k}_i|$.

Se ha observado para los correladores de dos y tres puntos, que el espectro y el biespectro dependen de los números de onda y no de los vectores de onda cuando se considera isotropía estadística. Caso contrario ocurre con el triespectro, el cual siempre depende de todos los vectores de onda⁴.

Si la naturaleza de las perturbaciones es de carácter vectorial o tensorial, no hay manera alguna que los correladores de n puntos en el espacio real resulten invariantes ante rotaciones espaciales. No obstante, los espectros de la perturbaciones escalares que acompañan los respectivos vectores o tensores de polarización pueden satisfacer la condición de isotropía estadística (1.7).

Si se supone que durante la era inflacionaria se rompe la invarianza rotacional, debido a la presencia de un campo vectorial que apunta en la dirección preferencial del vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$, la forma del espectro de potencias se modifica según [47]

$$P_\zeta(\mathbf{k}) = P_\zeta^{iso}(k)[1 + g_\zeta(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2]. \quad (1.11)$$

En la expresión anterior $P_\zeta^{iso}(k)$ es el promedio sobre todas las direcciones, g_ζ es el nivel de anisotropía estadística y $\hat{\mathbf{k}}$ es el vector de onda unitario.

El espectro $P_\zeta^{iso}(k)$ isótropo es parametrizado en términos de una amplitud A_ζ y un índice espectral n_ζ el cual indica la desviación de la invarianza de escala del espectro

$$P_\zeta^{iso}(k) \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} A_\zeta \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_\zeta - 1}. \quad (1.12)$$

1.4. Gaussianidad

Un análisis de las perturbaciones $\beta(\mathbf{k})$ en el espacio de momentum, conduce a determinar si la función de distribución que gobierna a $\beta(\mathbf{x})$ en el espacio real es gaussiana. Esta característica se determina si no hay correlación entre las perturbaciones para diferentes

⁴Esto ocurre de manera general para los correladores con $n \geq 4$, dado que no se puede conseguir una parametrización similar como la que se muestra en las ecuaciones (1.8) y (1.9), cuya dependencia se pueda expresar sólo en términos de los números de onda.

vectores de onda

$$\langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_\beta(k). \quad (1.13)$$

Adicionalmente, si los correladores impares con $n \geq 3$ son cero, se puede afirmar que la función de distribución de probabilidad para la perturbación $\beta(\mathbf{k})$ es simétrica alrededor del valor medio. Igualmente, si todos los correladores pares con $n \geq 4$ se pueden expresar como una suma sobre todas las posibles formas de apareamiento de $\beta(\mathbf{k})$ s de productos de correladores de dos puntos, es decir

$$\begin{aligned} \langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_2)\beta(\mathbf{k}_3) \rangle &= 0, & (1.14) \\ \langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_2)\beta(\mathbf{k}_3)\beta(\mathbf{k}_4) \rangle &= \langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_2) \rangle \langle \beta(\mathbf{k}_3)\beta(\mathbf{k}_4) \rangle + \langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_3) \rangle \langle \beta(\mathbf{k}_2)\beta(\mathbf{k}_4) \rangle + \\ &\quad \langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_4) \rangle \langle \beta(\mathbf{k}_2)\beta(\mathbf{k}_3) \rangle \\ &= (2\pi)^6 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) P_\beta(\mathbf{k}_1) P_\beta(\mathbf{k}_3) + 2 \text{ perm.}, & (1.15) \end{aligned}$$

se dice entonces que la función de distribución que gobierna a la perturbación $\beta(\mathbf{k})$ es Gaussiana. En las expresiones (1.13) y (1.15) se muestra que es necesario asumir homogeneidad estadística como una condición necesaria pero no suficiente para garantizar gaussianidad. Siendo así, se puede concluir que una perturbación gaussiana es estadísticamente homogénea aun cuando ésta no sea estadísticamente isotropa.

Por consiguiente, la condición de gaussianidad enunciada anteriormente, implica que la función de distribución de probabilidad para $\beta(\mathbf{x})$ en el espacio real, pueda ser expresada como [40]

$$P(\beta(\mathbf{x})) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \beta(\mathbf{x}) \rangle^2}} e^{-\beta^2(\mathbf{x})/2 \langle \beta(\mathbf{x}) \rangle^2}. \quad (1.16)$$

Es necesario indicar que la gaussianidad de $\beta(\mathbf{k})$ no es una condición suficiente para garantizar la gaussianidad sobre $\beta(\mathbf{x})$. De hecho, esta última perturbación puede ser expresada como una suma de cantidades no correlacionadas de $\beta(\mathbf{k})$, incluso cuando éstas no sean gaussianas. Este hecho se conoce como el teorema el límite central [48].

Cuando las perturbaciones $\beta(\mathbf{k})$ no son gaussianas (considerando aún homogeneidad estadística en los correladores de n puntos, en vista del teorema ergódico), los correladores con $n \geq 3$ se expresan a través de correladores de n puntos conectados, los cuales establecen una desviación de la gaussianidad. Lo anterior conduce a que los correladores de tres y cuatro puntos sean escritos respectivamente como

$$\langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_2)\beta(\mathbf{k}_3) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B_\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \langle \beta(\mathbf{k}_1)\beta(\mathbf{k}_2)\beta(\mathbf{k}_3)\beta(\mathbf{k}_4) \rangle &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) T_\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) + \\ &\quad (2\pi)^6 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) P_\beta(\mathbf{k}_1) P_\beta(\mathbf{k}_3) + 2 \text{ perm.} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Para el caso de la función de distribución asociada a la perturbación en la curvatura ζ , el bispectro y el trispectro son parametrizados en términos de productos del espectro P_ζ

y las cantidades adimensionales f_{NL} y τ_{NL} respectivamente

$$\begin{aligned}
 B_{\zeta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &\equiv \frac{6}{5} f_{NL} [P_{\zeta}(\mathbf{k}_1) P_{\zeta}(\mathbf{k}_2) + \text{Perm.}], \\
 T_{\zeta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &\equiv \frac{1}{2} \tau_{NL} [P_{\zeta}(\mathbf{k}_1) P_{\zeta}(\mathbf{k}_2) P_{\zeta}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4) + \text{Perm.}] + \\
 &\quad \frac{54}{25} g_{NL}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) + [P_{\zeta}(\mathbf{k}_1) P_{\zeta}(\mathbf{k}_2) P_{\zeta}(\mathbf{k}_3) + \text{Perm.}]
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\tag{1.20}$$

De las expresiones anteriores, se observa que todos los correladores son definidos una vez el espectro se ha especificado. De otra parte, las cantidades f_{NL} , τ_{NL} y g_{NL} corresponden a los niveles de no-gaussianidad. Del estatus observacional actual estas cantidades son los descriptores estadísticos⁵, una vez la amplitud del espectro A_{ζ} ha sido fijado al valor observado. Dichos descriptores cumplen la función de discriminar entre los distintos modelos sobre el origen de las estructuras a gran escala.

1.5. Fundamento Observacional

El valor proporcionado por COBE para la amplitud espectral es $A_{\zeta}^{1/2} = (4.957 \pm 0.094) \times 10^{-5}$ [49]. La información mas reciente suministrada por el satélite WMAP para el índice espectral muestra que $n_{\zeta} = 0.968 \pm 0.012$ [13]. El nivel de no gaussianidad f_{NL} en el bispectro B_{ζ} , después de 7 años de resultados del satélite WMAP, está en el rango de $-10 < f_{NL} < 74$ a 2σ [13]. Según el quinto año de resultados del WMAP, se encontró que el valor para el nivel de no gaussianidad τ_{NL} en el trispectro está en el rango de $-0,6 < \tau_{NL}/10^4 < 3,3$, mientras que para g_{NL} se encontró que $-7.4 \times 10^5 < g_{NL} < 8.2 \times 10^5$ [50]. Se espera que en un futuro WMAP reduzca el límite de no gaussianidad sobre f_{NL} y τ_{NL} a 2σ de tal manera que $|\Delta f_{NL}| \leq 40$ [51] y $|\Delta \tau_{NL}| \leq 2 \times 10^4$ [52] respectivamente. El satélite PLANCK promete reducir el límite a $|\Delta f_{NL}| \leq 10$ [51] y a $|\Delta \tau_{NL}| \leq 560$ [52] a 2σ . Además, estudios de la línea espectral de 21 cm de emisión para el hidrógeno previo a la era de reionización, proporcionarán conocimiento sobre los niveles de no gaussianidad con una incertidumbre de $|\Delta f_{NL}| \leq 0.2$ [53, 54] y $|\Delta \tau_{NL}| \leq 20$ [54] a 2σ de confianza. Análisis en la RCF han proporcionado un valor para el nivel de anisotropía estadística, en el rango de $g_{\zeta} \simeq 0.290 \pm 0.031$ [8] excluyendo el cero a más de 9σ . La incertidumbre asociada a esta cantidad según la referencia [55] es $|\Delta g_{*}| < 0,3$. Se espera que en un futuro WMAP y PLANCK reduzcan el límite del nivel de anisotropía estadística a 2σ de tal manera que $|\Delta g_{\zeta}| < 0,1$ y $|\Delta g_{\zeta}| < 0,02$ respectivamente [55].

⁵Junto con el nivel de anisotropía estadística g_{ζ} estudiado en la sección 2.3.

El Formalismo δN con Múltiples Campos Escalares y Vectoriales

2.1. La Perturbación en la Curvatura ζ

En virtud de la suposición de universos separados [2], se considera un *gauge* en el que los *threads* sean comóviles y ortogonales a los *slices* de tiempo constante¹. Por consiguiente, la perturbación en la curvatura ζ se define sobre un *slicing* de densidad uniforme a través de la métrica espacial²

$$g_{ij} = a^2(\mathbf{x}, t)\gamma_{ij}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

en donde el término $a(\mathbf{x}, t) \equiv a(t)e^{\zeta(\mathbf{x}, t)}$ representa el factor de escala local y en donde el determinante de $\gamma_{ij}(\mathbf{x}) \equiv (Ie^h)_{ij}$ es igual a uno³. De aquí que h tenga traza nula $h^i_i = 0$ ⁴. La dependencia netamente espacial de γ_{ij} se debe al hecho de que, bajo la suposición de universos separados, una vez se ha suavizado la perturbación en la densidad de energía y la métrica espacial a escalas fuera del horizonte, ésta debe coincidir con la métrica espacial δ_{ij} del correspondiente universo no perturbado. A partir de la definición del factor de escala local se encuentra que

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \delta(\ln a(\mathbf{x}, t)). \quad (2.2)$$

Iniciando en un tiempo t_{in} correspondiente a un *slicing* plano, es decir con curvatura espacial constante y terminando en un *slicing* de densidad de energía uniforme referente a un tiempo t , se define la cantidad de expansión cuantificada en *e-folds*

$$N(\mathbf{x}, t) = \ln \left[\frac{a(\mathbf{x}, t)}{a(t_{in})} \right]. \quad (2.3)$$

¹Este tiempo coordenado es definido para cada *slice* y en general no representa el tiempo cósmico de un universo no perturbado.

²De manera análoga se define la perturbación en la curvatura ψ sobre un *slicing* genérico.

³Esta condición se impone debido a que el elemento de volumen debe ser una cantidad invariante $d^4V = \sqrt{-g}d^4x$, siendo g el determinante de $g_{\mu\nu}$.

⁴Esta cantidad debe dar cuenta de las perturbaciones primordiales tensoriales.

A partir de esta expresión y de la ecuación (2.2) se obtiene una forma de cuantificar la perturbación en la curvatura ζ en el Universo temprano mediante la formula δN [33]

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = N(\mathbf{x}, t) - N_0(t) = \delta N(\mathbf{x}, t), \quad (2.4)$$

en donde $N_0 = \ln \left[\frac{a(t)}{a(t_{in})} \right]$ es la cantidad de expansión no perturbada. Cabe resaltar que la escogencia de una época inicial no tiene ningún efecto sobre δN debido a que la expansión cuando se va de un *slicing* plano a uno cualquiera es uniforme. Se elige como época inicial un tiempo de Hubble después de que la escala del suavizado deja el horizonte durante inflación.

Bajo la suposición de universos separados, el cambio en la energía dentro de un volumen comóvil es dado por $-PdV$ compatible con el hecho que el flujo de partículas dentro o fuera de dicha región es despreciable antes de la entrada del horizonte. Adicionalmente, si la presión P es función única de la densidad de energía ρ , es decir si la presión es adiabática

$$P = P(\rho), \quad (2.5)$$

se obtiene a través de la ecuación de continuidad que $\dot{\zeta}$ es independiente de la posición [2]. Sin invocar alguna teoría de la gravedad⁵ se encuentra que ζ se conserva en escalas fuera del horizonte [4] si se cumple la condición (2.5).

Como un ejemplo se considera la época de nucleosíntesis $T \sim 1MeV$, cuando la escala más pequeña relevante se aproxima a la entrada del horizonte, el fluido cósmico es dominado completamente por radiación $P = \rho/3$, implicando un valor constante de $\zeta(\mathbf{x})$.

2.2. La Formula δN

El formalismo δN ⁶ es una técnica que se usa para calcular la perturbación primordial en la curvatura en términos de las perturbaciones de los campos a la salida del horizonte t_* y de las derivadas del número de *e-folds* no perturbado. Para este trabajo, se considera el caso mas general en el que la dinámica inflacionaria es conducida por n campos escalares y m campos vectoriales. Así, la perturbación en los campos puede escribirse de manera compacta por medio de la definición

$$\delta\Phi_A \equiv \{\delta\phi_I, \delta A_i^a\}, \quad (2.6)$$

en donde I (señalando campos escalares) corre de 1 a n , mientras que a (señalando campos vectoriales) corre de 1 a m . El índice i denota las componentes espaciales de cualquier campo vectorial. Se define las derivadas de N con respecto a los campos escalares y vectoriales de manera separada introduciendo la notación [39]

$$N_A = \{N_I, N_j^a\}, \quad (2.7)$$

$$N_{AB} = \{N_{IJ}, N_{Ij}^b, N_{ij}^{ab}\}, \quad (2.8)$$

⁵Esto se debe a que la ecuación de continuidad se obtiene de forma alternativa mediante argumentos termodinámicos [2].

⁶Válido a todas las escalas pero no a todos los ordenes en teoría de perturbaciones.

en donde se ha considerado las derivadas mixtas de segundo orden de los campos ϕ_I y A_j^b definidas como $N_{Ij}^b = \partial N / \partial \phi_I A_j^b$. Por consiguiente, la perturbación en la curvatura puede ser escrita a través de los múltiples campos escalares y vectoriales como una expansión en serie de Taylor de la forma

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \delta N(\delta \Phi_A(\mathbf{x}), t) = N_A \delta \Phi_A + \frac{1}{2} N_{AB} \delta \Phi_A \delta \Phi_B + \dots, \quad (2.9)$$

en donde se ha considerado únicamente términos hasta segundo orden en la expansión. Sin embargo, en este estudio, se considerará términos lineales ya que sólo se desea estudiar el espectro de las perturbaciones y no otras funciones espectrales que surgen al considerar ordenes mayores en las perturbaciones, como el biespectro y el triespectro. De esta expresión se observa claramente que las funciones de correlación para la perturbación ζ se pueden expresar como una serie perturbativa a través de las funciones de correlaciones de las perturbaciones de los campos. Por esta razón, se expresa una vez más, la perturbación ζ en términos de los modos de Fourier, lo cual conlleva a escribir la expresión (2.9) como

$$\zeta(\mathbf{k}, t) = N_A \delta \Phi(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{2} N_{AB} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \delta \Phi_A(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \delta \Phi_B(\mathbf{k}_1). \quad (2.10)$$

Con el fin de encontrar el correlador de dos puntos y por ende la forma del espectro, se realiza un promedio sobre el ensamble de universos de productos de la perturbación $\zeta(\mathbf{k})$ con sus respectivos vectores de onda

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \rangle = N_A N_B \langle \delta \Phi_A(\mathbf{k}_1) \delta \Phi_B(\mathbf{k}_2) \rangle \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} &= N_\phi^2 \langle \delta \phi(\mathbf{k}_1) \delta \phi(\mathbf{k}_2) \rangle + N_i N_j \langle \delta A_i(\mathbf{k}_1) \delta A_j(\mathbf{k}_2) \rangle \\ &+ N_\phi N_j \langle \delta \phi(\mathbf{k}_1) \delta A_j(\mathbf{k}_2) \rangle + N_i N_\phi \langle \delta A_i(\mathbf{k}_1) \delta \phi(\mathbf{k}_2) \rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En vista de la dependencia del correlador de dos puntos (o de manera general de n puntos) para la perturbación ζ con respecto a los correladores de los campos involucrados, se tienen las siguientes implicaciones que fueron construidas a lo largo de este trabajo y postuladas de manera general:

- Como una conjetura, se tiene que⁷: si la expansión es anisótropa (con las perturbaciones de los campos viviendo en un fondo anisótropo) entonces existe un correlador de las perturbaciones de los campos⁸ (expresión (2.12)) tal que no es invariante ante rotaciones espaciales.
- Ahora, en la dirección contraria negando la proposición: si todos los correladores de los campos son invariantes ante rotaciones espaciales entonces la expansión es isotropa.
- Finalmente, si la expansión es isotropa (por ejemplo si el fondo es de FRW), entonces todos los correladores son invariantes ante rotaciones espaciales, dado que para las perturbaciones escalares no hay dependencia explícita del vector de onda en las

⁷Si bien, en este trabajo no se presenta una demostración formal de esta afirmación, resulta incoherente pensar que no se cumpla, debido a que no existe una simetría en el fondo métrico y por ende en los correladores de n puntos, los cuales son construidos a partir del fondo.

⁸Ya sea el del campo escalar o vectorial, dado que el correlador mixto de las perturbaciones siempre se hace cero, así el fondo sea anisótropo. Esto se debe a que no hay correlación entre campos de diferente naturaleza.

ecuaciones de movimiento y, por ende en la solución misma [30]. Para las perturbaciones vectoriales la condición se puede relajar, de tal manera que los correladores que sean invariantes ante rotaciones espaciales sean aquéllos que son construidos a partir de las cantidades escalares que acompañan los respectivos vectores y tensores de polarización.

Lo anterior se puede expresar de manera simbólica como: sea p la expansión anisótropa y q la no invarianza ante rotaciones espaciales de los correladores, entonces: ($p \Rightarrow q$) $\Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$.

En el siguiente estudio, se permitirá la posibilidad que los correladores de dos puntos de los campos presentes no sean invariantes ante rotaciones espaciales debido a que la expansión es anisótropa. No obstante, es necesario asumir homogeneidad estadística⁹ en los correladores asociados a los campos con el fin de obtener el espectro de las perturbaciones. Esta característica se expresa a través de la función delta de Dirac en la ecuación (1.8), la cual permite escribir los correladores de los campos presentes como

$$\langle \delta\Phi_A(\mathbf{k}_1)\delta\Phi_B(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\Pi_{AB}(\mathbf{k}_1), \quad (2.13)$$

en donde $\Pi_{AB} = \{\Pi_{IJ}(\mathbf{k}), \Pi_{Ij}^b(\mathbf{k}), \Pi_{iJ}^a(\mathbf{k}), \Pi_{ij}^{ab}(\mathbf{k})\}$ corresponde al espectro de las perturbaciones de los campos escalares y vectoriales. Así, el espectro de ζ se relaciona con los espectros Π_{AB} por medio de la expresión

$$(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)P_\zeta(\mathbf{k}_1) = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)[N_A N_B \Pi_{AB}(\mathbf{k}_1)]. \quad (2.14)$$

De esta expresión claramente se obtiene el espectro de ζ a primer orden o a nivel árbol¹⁰

$$P_\zeta(\mathbf{k}_1) = N_A N_B \Pi_{AB}(\mathbf{k}_1). \quad (2.15)$$

La expresión anterior exige determinar los espectros $\Pi_{AB}(\mathbf{k})$ de los campos para calcular el espectro asociado a ζ . En el caso más general, es posible que el espectro Π_{AB} de cada campo, sea distinto, ya que estos espectros muestran una dependencia con el vector de onda, debido a que la expansión es anisótropa. En esta situación, el espectro de ζ resultaría estadísticamente anisótropo. Se define el correlador de dos puntos para las perturbaciones escalar-escalar como

$$\langle \delta\phi_I(\mathbf{k}_1)\delta\phi_J(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\Pi_{IJ}(\mathbf{k}_1). \quad (2.16)$$

Los espectros de las perturbaciones vectorial-vectorial se definen como

$$\langle \delta A_i^a(\mathbf{k}_1)\delta A_j^b(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\Pi_{ij}^{ab}(\mathbf{k}_1), \quad (2.17)$$

en donde el espectro Π_{ij}^{ab} se define según la referencia [34] como

$$\Pi_{ij}^{ab}(\mathbf{k}) = \Pi_{ij}^{Par}(\mathbf{k})P_+^{ab}(\mathbf{k}) + i\Pi_{ij}^{Impar}(\mathbf{k})P_-^{ab}(\mathbf{k}) + \Pi_{ij}^{long}(\mathbf{k})P_{long}^{ab}(\mathbf{k}), \quad (2.18)$$

⁹Como se ha expuesto en el capítulo 1.

¹⁰Cuando se consideran contribuciones de orden mayor de los correladores de las perturbaciones de los campos, el cálculo del espectro de ζ no es tan claro a diferencia del caso presentado. En la referencia [56], se introdujo una aproximación diagramática denominada *reglas de Feymann*, para calcular el espectro a ordenes mayores cuando se consideran campos escalares. Esta aproximación sigue el mismo espíritu que los diagramas de Feymann de la teoría cuántica de campos. En la referencia [39] se consideró además, la posibilidad de incluir perturbaciones de campos vectoriales.

que a su vez ha sido escrito en términos del espectro asociado a la componente longitudinal P_{Long}^{ab} y los espectros que conservan y violan paridad P_+^{ab} y P_-^{ab} respectivamente. Estos espectros están definidos como

$$P_{\pm}^{ab} \equiv \frac{1}{2}(P_R^{ab} + P_L^{ab}), \quad (2.19)$$

siendo P_R^{ab} y P_L^{ab} los espectros asociados a la componente transversal del campo vectorial con polarización circular derecha (R) e izquierda (L) respectivamente¹¹. Estos espectros están definidos mediante los correladores

$$\langle \delta A_{\lambda}^a(\mathbf{k}_1) \delta A_{\lambda}^{b*}(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) P_{\lambda}^{ab}(\mathbf{k}_1), \quad (2.20)$$

en donde se ha hecho uso de la condición de realidad $\beta(-\mathbf{k}) = \beta^*(\mathbf{k})$, con λ denotando las distintas polarizaciones.

Adicionalmente, se definen los espectros

$$\Pi_{ij}^{Par}(\mathbf{k}) \equiv \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j, \quad \Pi_{ij}^{Impar}(\mathbf{k}) \equiv \epsilon_{ijk} \hat{k}_k, \quad \Pi_{ij}^{Long}(\mathbf{k}) \equiv \hat{k}_i \hat{k}_j. \quad (2.21)$$

Ahora, es posible determinar el espectro de ζ en términos de las componentes de los espectros asociados a los campos escalares y en términos de los espectros vectoriales definidos anteriormente. Haciendo uso de la expresión (2.18) y de las definiciones de los espectros (2.21), el espectro de ζ (2.15) queda determinado según la expresión

$$P_{\zeta}(\mathbf{k}_1) = (N_{\phi}^I)^2 P_{\delta\phi}^I(\mathbf{k}_1) + N_i^a N_j^b [(\delta_{ij} - \hat{k}_{1i} \hat{k}_{1j}) P_+^{ab}(\mathbf{k}_1) \delta_{ab} + i \epsilon_{ijk} \hat{k}_{1k} P_-^{ab}(\mathbf{k}_1) \delta_{ab} + \hat{k}_{1i} \hat{k}_{1j} P_{long}^{ab}(\mathbf{k}_1) \delta_{ab}], \quad (2.22)$$

en donde ϵ_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico. En la expresión para el espectro de ζ , no se ha considerado correlación entre diferentes perturbaciones escalares y diferentes perturbaciones vectoriales y se ha permitido considerar violaciones en la paridad en el lagrangiano. Sin embargo, debido a argumentos de simetría, el término en el que está presente $P_-^{ab}(\mathbf{k}_1)$ se anula. Por consiguiente, se obtiene de manera general (cuando se considera expansión anisótropa), el espectro de la perturbación en la curvatura ζ cuando están presentes múltiples campos escalares y múltiples campos vectoriales

$$P_{\zeta}(\mathbf{k}_1) = (N_{\phi}^I)^2 P_{\delta\phi}^I(\mathbf{k}_1) + N_i^a N_j^a (\delta_{ij} - \hat{k}_{1i} \hat{k}_{1j}) P_+^a(\mathbf{k}_1) + N_i^a N_j^a \hat{k}_{1i} \hat{k}_{1j} P_{long}^a(\mathbf{k}_1). \quad (2.23)$$

2.3. Contribución de las Perturbaciones de los Campos y de la Expansión Anisótropa a la Generación de Anisotropía Estadística en la Perturbación Primordial en la Curvatura

En esta sección se considera la posibilidad que haya violaciones de la isotropía estadística en los correladores de n puntos, lo cual implica modificaciones en los descriptores estadísticos de la perturbación primordial en la curvatura ζ . Como una posibilidad, para

¹¹Nuevamente estos espectros pueden depender del vector de onda, cuando se considera expansión anisótropa.

parametrizar la anisotropía estadística (asumiendo homogeneidad estadística) el espectro se modifica de tal manera que adquiere una dependencia explícita con el vector de onda. En esta forma, el espectro se parametriza según la referencia [47] como

$$P_{\zeta}(\mathbf{k}) = P_{\zeta}^{iso}(k)[1 + g_{\zeta}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2]. \quad (2.24)$$

En las siguientes secciones se calculará el nivel de anisotropía estadística debido a las contribuciones de la perturbaciones de los campos y a la misma expansión anisótropa.

2.3.1. Anisotropía Estadística con Expansión Isótropa

Como primer caso, se considera que la expansión es isótropa, de modo que los correladores de los campos sean invariantes ante rotaciones espaciales. En vista de lo anterior, la ecuación (2.23) se expresa ahora como

$$P_{\zeta}(\mathbf{k}_1) = [(N_{\phi}^I)^2 P_{\delta\phi}^I(k_1) + N_i^{a2} P_+^a(k_1)] + (\hat{N}^a \cdot \hat{k}_1)^2 [P_{long}^a(k_1) - P_+^a(k_1)]. \quad (2.25)$$

En vista de la parametrización del espectro anisótropo (ecuación (1.11)) y de la expresión (2.25) para el espectro de ζ , se obtiene tantos niveles de anisotropía estadística como número de campos vectoriales presentes

$$g_N^a = \frac{(r_{long}^a - 1)(N_i^a)^2 P_+^a(k_1)}{(N_{\phi}^I)^2 P_{\delta\phi}^I(k_1) + (N_i^a)^2 P_+^a(k_1)}, \quad (2.26)$$

en donde se ha hecho uso de la definición de la cantidad $r_{long} = P_{long}/P_+$ y se ha identificado el espectro isótropo como

$$P_{\zeta}^{iso} = (N_{\phi}^I)^2 P_{\delta\phi}^I(k_1) + (N_i^a)^2 P_+^a(k_1). \quad (2.27)$$

Cabe indicar que aun cuando se haya considerado la parametrización (1.11), la cual sólo considera una única dirección preferente, el resultado final muestra que existe a direcciones preferenciales debido a los múltiples campos vectoriales.

2.3.2. Anisotropía Estadística con Expansión Anisótropa

A diferencia del caso anterior, se considera que la expansión sea anisótropa, lo que conlleva según las implicaciones obtenidas en este trabajo, que los correladores determinados por los espectros de las perturbaciones de los campos $P_{\delta\phi}, P_+, P_-, P_{long}$ no sean invariantes ante rotaciones espaciales, lo cual es equivalente a que estos espectros sean dependientes del vector de onda, generando por ende un espectro para ζ de la forma

$$P_{\zeta}(\mathbf{k}_1) = (N_{\phi}^I)^2 P_{\delta\phi}^{I iso}(k_1)[1 + g_{\delta\phi}^I(\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_{\delta\phi}^I)^2] + N_i^a N_j^a (\delta_{ij} - \hat{k}_{1i} \hat{k}_{1j}) P_+^{a iso}(k_1)[1 + g_+^a(\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_+^a)^2] + N_i^a N_j^a \hat{k}_{1i} \hat{k}_{1j} P_{long}^{a iso}(k_1)[1 + g_{long}^a(\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_{long}^a)^2]. \quad (2.28)$$

Como se observa en esta expresión, los espectros $P_{\delta\phi}, P_+, P_-, P_{long}$ se han parametrizado al igual que la expresión (1.11). Considerando sólo perturbaciones lineales, el espectro

anisótropo toma la siguiente forma

$$P_\zeta(\mathbf{k}_1) = [(N_\phi^I)^2 P_{\delta\phi}^{I iso}(k_1) + N_i^{a2} P_+^{a iso}(k_1)] + g_{\delta\phi}^I (N_\phi^I)^2 P_{\delta\phi}^{I iso}(k_1) (\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_{\delta\phi}^I)^2 + g_+^a (N_i^a)^2 P_+^{a iso}(k_1) (\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_+^a)^2 + P_+^{a iso}(k_1) (\mathbf{N}^a \cdot \hat{\mathbf{k}}_1)^2 + P_{long}^a(k_1) (\mathbf{N}^a \cdot \hat{\mathbf{k}}_1)^2,$$

el cual puede ser reescrito como

$$P_\zeta(\mathbf{k}_1) = P_\zeta^{iso}(k_1) [1 + \tilde{g}_{\delta\phi}^I (\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_{\delta\phi}^I)^2 + \tilde{g}_+^a (\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_+^a)^2 + \tilde{g}_N^a (N_i^a)^2 (\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1^a)^2], \quad (2.29)$$

con un espectro isótropo dado por la expresión (2.27). En la expresión anterior se ha considerado la definición $\mathbf{N}^a \equiv N_i^a \hat{\mathbf{N}}^i$

Del espectro (2.29) se identifica ahora tres niveles de anisotropía estadística, o lo que es equivalente tres direcciones preferenciales, dos de los cuales son adicionales con respecto al encontrado en el caso de expansión isótropa¹². Cada uno de estos dos nuevos niveles de anisotropía están asociados a la naturaleza de los campos presentes¹³

$$\tilde{g}_{\delta\phi}^I = \frac{g_{\delta\phi}^I (N_\phi^I)^2 P_{\delta\phi}^{I iso}(k_1)}{(N_\phi^I)^2 P_{\delta\phi}(k_1) + (N_i^a)^2 P_+^a(k_1)}, \quad (2.30)$$

$$\tilde{g}_+^a = \frac{g_+^a (N_i^a)^2 P_+^{a iso}(k_1)}{(N_\phi^I)^2 P_{\delta\phi}(k_1) + (N_i^a)^2 P_+^a(k_1)}, \quad (2.31)$$

$$\tilde{g}_N^a = \frac{(r_{long}^a - 1) (N_i^a)^2 P_+^{a iso}(k_1)}{(N_\phi^I)^2 P_{\delta\phi}(k_1) + (N_i^a)^2 P_+^a(k_1)}. \quad (2.32)$$

Este resultado nunca antes encontrado en la literatura, expone las contribuciones de las perturbaciones de los campos y de la expansión anisótropa a la generación de anisotropía estadística en la perturbación en la curvatura ζ . Con el fin de obtener los valores de los niveles de anisotropía proporcionados en las ecuaciones (2.30)-(2.32) y por ende poder comparar con la observación, es necesario realizar un estudio de la producción anisótropa¹⁴ de partículas y hacer el cálculo de las derivadas de N en un fondo anisótropo. Como se observa, los espectros involucrados de manera explícita en los niveles de anisotropía son isótropos, los cuales han sido calculados en la referencia¹⁵ [27] para las perturbaciones vectoriales cuando éstas viven en un fondo homogéneo e isótropo de FRW. De otra parte, en este trabajo a diferencia del realizado en [34], se consideró la posibilidad de una expansión anisótropa asociada a un fondo anisótropo pero homogéneo (por ejemplo, si el fondo es de Bianchi tipo I [57]). De esta manera se obtuvo el espectro de la perturbación ζ en donde se observa de manera explícita la dependencia de los vectores de onda de las perturbaciones.

¹²Este nivel de anisotropía está dado por la ecuación (2.26), cuya forma funcional es similar a la expresión (2.32) pero difieren en la cantidad N , la cual depende del fondo métrico.

¹³Siendo mas exacto, en principio se tienen I y a niveles de anisotropía denotados como $\tilde{g}_{\delta\phi}^I$ y \tilde{g}_+^a , debido a los múltiples campos escalares y vectoriales respectivamente.

¹⁴Este es un tema de estudio actual que se originó a partir del proceso de investigación de la tesis.

¹⁵Ver además el apéndice A.

Anisotropía Estadística en Modelos con Múltiples Campos Vectoriales

3.1. Modelo *Gauge-flation*

Se han propuestos diversos escenarios inflacionarios, los cuales involucran diferentes tipos o configuraciones de campos: campos vectoriales (con tres campos mutuamente ortogonales o un número grande de campos orientados aleatoriamente en el espacio) [15], campos de gauge Abelianos $U(1)$ [25, 27], y recientemente campos de gauge no Abelianos [19, 58], cuya triada mencionada en el modelo de inflación vectorial [15], surge de manera natural (en el espacio real), dentro de la simetría de gauge no Abeliana del grupo $SU(2)$ ¹. El modelo basado en estos tipos de campos preserva la invarianza rotacional; esto quiere decir que si se hace una rotación en el espacio abstracto (espacio de isospin) y las propiedades del sistema no cambian (por ejemplo si la expansión sigue siendo isótropa), en el espacio físico (real) se tendrá igualmente invarianza rotacional, en donde la orientación relativa entre los campos no cambia al igual que sus magnitudes. Estas características de los campos proporcionan igualmente una expansión isótropa en el espacio real. Como conclusión, se preservan las propiedades topológicas de estos dos espacios dado que existe un homomorfismo entre $O(3)$ y $SU(2)$ [60].

Lo atractivo de esta teoría de campos de gauge no Abelianos, se debe a que es ampliamente aceptada como un marco de trabajo en la construcción de modelos de física de partículas, cuya configuración como se ha mencionado, surge de manera natural, contrario al caso de los campos vectoriales en el que no es usual encontrar este tipo de configuración.

3.1.1. Descripción del Modelo

En este modelo se consideran campos de gauge no Abelianos que transforman bajo el grupo de simetría $SU(2)$, con A_μ^a representando los campos vectoriales; en donde a son los índices del algebra de gauge internos y μ representa las componentes espacio-temporales.

¹Esta configuración de los campos es una solución a las ecuaciones de campo y de movimiento, además, corresponde a un atractor del sistema [59].

Para este modelo, se fija un gauge temporal, como primera condición para los campos: $A_0^a = 0$ y se permite así mismo la siguiente configuración²

$$A_i^a = \phi(t)\delta_i^a, \quad (3.1)$$

de donde se observa que cada uno de los vectores de gauge se ubican en las tres direcciones del espacio en coordenadas cartesianas, resultando en una configuración de tres vectores mutuamente ortogonales, los cuales coinciden con las componentes del vector A_i^a en un espacio interno. De otra parte, el escalar que transforma bajo transformaciones de coordenadas es definido como

$$\psi = \frac{\phi(t)}{a(t)}. \quad (3.2)$$

En cuanto al fondo métrico, se considera un fondo homogéneo e isótropo de FRW escrito en coordenadas cartesianas como³

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (3.3)$$

El lagrangiano escogido debe ser invariante de gauge, el cual es construido a partir de la métrica $g^{\mu\nu}$ y el tensor de esfuerzos $F_{\mu\nu}$. De aquí que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{384}(\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\lambda\sigma}^a)^2, \quad (3.4)$$

en donde $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ es el tensor totalmente antisimétrico, κ es una constante y se ha definido el tensor de esfuerzos para una teoría de gauge como

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g\epsilon_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (3.5)$$

cuya componentes equivalen a

$$F_{0i}^a = \dot{\phi}\delta_i^a, \quad F_{ij}^a = -g\phi^2\epsilon_{ij}^a, \quad (3.6)$$

con g siendo la constante de acoplamiento entre la materia y los campos de gauge y el punto denotando la derivada con respecto al tiempo cósmico. Nótese que el término F^4 en el lagrangiano que describe este modelo es el que permite obtener la condición energética $\rho + 3P < 0$ y por consiguiente generar un período inflacionario lo suficientemente largo para solucionar los problemas clásicos de la cosmología estándar [61].

3.1.2. Anisotropía Estadística

En la referencia [59], se consideró inicialmente para este modelo un fondo métrico anisótropo de Bianchi tipo I; sin embargo, a través del estudio de sistemas dinámicos, se obtuvo que el atractor para este modelo es el descrito por la métrica de FRW, generando después de unos pocos *e-folds* de inflación una expansión isótropa en acuerdo con el teorema del no cabello cósmico [20, 21]. Este resultado se determinó a partir de un parámetro que caracteriza la expansión anisótropa λ , cuyo comportamiento asintótico durante inflación su es tal que toma el valor de 1 al final de este período, correspondiendo

²Considerar el pie de página 1.

³Este modelo también se estudia en un fondo homogéneo pero anisótropo de Bianchi tipo I [59], en donde se encuentra que después de unos pocos *e-folds*, el estado del universo al final de inflación se isotropiza, en coherencia con el teorema del no cabello cósmico [20, 21].

al caso de un universo de FRW como se indicó anteriormente.

Los autores de este modelo señalan que como efecto de la configuración de tres campos mutuamente perpendiculares y que el atractor sea el descrito por la métrica de FRW, las anisotropías son diluidas durante inflación aun cuando se inicie con un fondo métrico anisótropo. Esta afirmación es bastante fuerte dado que la anisotropía estadística no sólo se origina como efecto de la expansión anisótropa. Se conoce que por lo menos existen dos fuentes que generan anisotropía estadística en la perturbación primordial en la curvatura ζ como lo indican los resultados obtenidos en la sección 2.3 de este trabajo. Se ha identificado que una de estas fuentes se debe a la naturaleza misma de las perturbaciones de los campos y, la restante, a la expansión anisótropa. De aquí, que se esté interesado en conocer la contribución de las perturbaciones vectoriales cuando se tiene una expansión isótropa.

En primer lugar, es necesario indicar que las expresiones obtenidas en este trabajo para calcular el nivel de anisotropía estadística obtenidas a partir del formalismo δN siguen siendo válidas cuando se consideran campos de gauge no Abelianos [62].

De otra parte, como resultado de que no estén presentes campos escalares y que los campos de gauge no Abelianos no tengan masa ($r_{long} = 0$) para este modelo, la expresión (2.26) obtenida en este trabajo, proporciona un valor para $g_\zeta = -1$, resultando inconsistente su valor absoluto⁴ con el obtenido en la referencia [8] $g_\zeta = 0.290 \pm 0.031$ y en consecuencia, excluyendo este modelo como generador de las estructuras a gran escala. Cabe resaltar que este es uno de los resultados más importantes de este trabajo de investigación junto con las expresiones para el nivel de anisotropía presentadas en la sección 2.3, las cuales permitieron proporcionar un valor de g_ζ para este modelo.

En el capítulo 5, se expone un escenario alternativo con el fin de que el modelo de *Gauge-flation* sea nuevamente incluido dentro de los modelos inflacionarios que son consistentes con los parámetros observacionales, lo cual implica a priori incluir campos de gauge no Abelianos masivos tal que $r_{long} \neq 0$.

3.2. Modelo *Hairy-inflation*: Descripción del Modelo

En este modelo [25], se plantea una forma alternativa de generar inflación mediante el acoplamiento entre un campo vectorial sin masa A_μ y el campo del inflatón ϕ . Este hecho se ve reflejado en la acción mediante la función de acople $f(\phi)$ en el término cinético del campo vectorial

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} m_p^2 R + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) - \frac{1}{4} f(\phi)^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]. \quad (3.7)$$

En esta expresión R es el escalar de Ricci, $V(\phi)$ es el potencial del inflatón, m_p es la masa reducida de Planck y $F_{\mu\nu}$ es el tensor definido como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ correspondiente

⁴Si bien, el signo negativo también podría generar alguna inconsistencia, es posible asimismo que el valor reportado pueda contener errores, resultando sensible el cambio de signo ante tales errores. Sin embargo, en este caso es el valor absoluto que presenta mayor dificultad debido a que dicho valor está muy distante del ancho de incertidumbre reportado.

a un término cinético tipo Maxwell.

Con el fin de generar expansión anisótropa prolongada, se considera la métrica anisótropa de Bianchi tipo I⁵, en donde la dirección del campo vectorial se orienta a lo largo del eje z . De aquí que exista una simetría en el plano xy , de modo que la métrica pueda ser expresada como⁶

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\alpha(t)}[e^{2\sigma(t)}(dx^2 + dy^2) + e^{-4\sigma(t)}dz^2], \quad (3.8)$$

y parametrizada a través del factor de escala global isótropo $a = e^\alpha$ y el shear espacial σ , que caracteriza la expansión local. El parámetro de *Hubble* H global se ha definido como un promedio de los parámetros de Hubble locales⁷ $H = \frac{1}{3}(H_x + H_y + H_z) = \dot{\alpha}$. Dicha parametrización en la métrica, es consistente con el hecho que $a = \sqrt{-g}$, siendo g el determinante de la métrica.

De otra parte, La razón entre el shear $\Sigma = \dot{a}_z/a_z = \dot{\sigma}(t)$ y el parámetro de *Hubble* H : $\frac{\Sigma}{H}$, caracteriza el monto de expansión anisótropa presente durante la fase inflacionaria, y es por consiguiente, una de las cantidades más relevantes a estudiar cuando se considera expansión anisótropa.

Se ha encontrado recientemente que este modelo inflacionario anisótropo [25], es el primero de su especie en ser estable. Sin embargo, se ha obtenido para este modelo un valor negativo del nivel de anisotropía estadística (vía teoría de perturbaciones cosmológicas) cuya naturaleza es difícil de entender [28, 1, 63]. Esta dificultad se debe a la complejidad en la solución de las ecuaciones de evolución cuando se consideran perturbaciones. Cabe notar que un signo negativo de g_ζ es inconsistente con el valor reportado $g_\zeta = 0.290 \pm 0.031$ [8]; sin embargo, aun cuando esta inconsistencia no sea tan robusta debido a los posibles errores en los análisis de los datos que podría resultar en un g_ζ negativo, es de importancia estudiar el origen del signo negativo de g_ζ proporcionado para este modelo.

En la referencia [1] se estudia la realización más simple de este modelo, en la que se considera únicamente un campo vectorial y un potencial cuadrático asociado al campo escalar. Allí obtienen a partir de cálculos numéricos y de trabajos analíticos una gráfica de g_ζ para diferentes valores de la constante numérica c , la cual indica el grado de anisotropía. En la figura 4.1 obtenida en ese trabajo, se muestra la dependencia de la escala de g_ζ para el espectro de potencias asociado a los modos escalar-escalar⁸ y se observa que para cualquier valor de c se obtiene un g_ζ negativo, el cual, como se ha indicado es inconsistente con el valor reportado. El origen de este signo es difícil de seguir mediante la teoría de perturbaciones cosmológicas. Por esta razón, en este trabajo, se estudia la naturaleza del signo negativo del nivel de anisotropía estadística g_ζ a través de las expresiones encontradas en la sección 2.3, las cuales fueron obtenidas a partir del formalismo δN . Al final de este capítulo, se dará una posible explicación sobre la

⁵Esta métrica tiene curvatura $K = 0$, cuyo valor no está excluido por las observaciones.

⁶En este trabajo se ha considerado la signatura $(+,-,-,-)$.

⁷Se ha considerado que $H_i = \frac{\dot{a}_i}{a_i}$.

⁸Esta dependencia conduce al rompimiento de la invarianza rotacional observada en los datos que proporciona el WMAP.

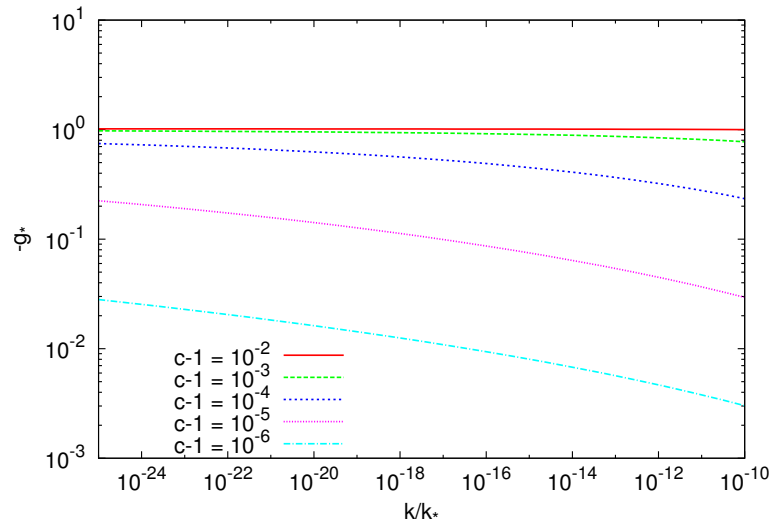


FIGURA 3.1. Dependencia angular del nivel de anisotropía estadística para diferentes valores de la constante c . k es un modo asociado al espectro de perturbaciones y k_* denota la magnitud de un modo a la salida del horizonte al final de inflación. Esta figura fué tomada de la referencia [1].

naturaleza de los campos que conduce a obtener un signo negativo para el nivel de anisotropía estadística.

3.3. Estudio General del Modelo Cuando se Considera Campos Vectoriales de Gauge Masivos

En esta sección, se hace un estudio de la dinámica inflacionaria descrita por la acción (3.7) (modelo *Hairy-inflation*) de una manera más general, en el que se considera un campo vectorial abeliano A_μ , el cual es invariante bajo un grupo de simetría $U(1)$, acoplado no sólo con el campo del inflatón a través de la función cinética f sino que se considera también la posibilidad de un nuevo acople debido a la presencia de masa del campo vectorial. Este modelo es estudiado en la referencia [64], y es uno de las tres posibles configuraciones que evita introducir inestabilidades en el sistema, tales como campos fantasmas [22, 23, 24]. El estudio de la dinámica inflacionaria para dicho modelo, se hará mediante la teoría de los sistemas dinámicos [36, 37] debido al gran número de grados de libertad presentes en el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. Así, estudiar el modelo de *Hairy-inflation* es equivalente a estudiar el modelo descrito en [64], en el caso específico que el campo vectorial no tenga masa. Este hecho se verá reflejado en una de las tres posibles soluciones del sistema, en el que uno de los atractores corresponde al caso del modelo *Hairy-inflation*.

En vista de lo anterior, se considera un lagrangiano para un campo vectorial masivo, acoplado con el campo del inflatón a través de la función cinética f y la función masa m , en el marco de la gravedad de Einstein

$$\mathcal{L} = -\frac{m_p^2}{2}R + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}f(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m(\phi)^2 A_\mu A^\mu. \quad (3.9)$$

El paso subsecuente es encontrar las ecuaciones de campo: $G_{\mu\nu} = \frac{1}{m_p^2} T_{\mu\nu}$ (con $8\pi G = m_p^{-2}$) a partir de la métrica (3.8) y el lagrangiano (general) (3.9), el cual incluye un término de masa para el campo vectorial⁹:

$$\dot{\alpha}^2 - \dot{\sigma}^2 = \frac{1}{3m_p^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) - \frac{1}{2} g^{zz} f \dot{A}_z^2 - \frac{1}{2} g^{zz} m^2 A_z^2 \right], \quad (3.10)$$

$$\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{3m_p^2} \left[3V(\phi) - \frac{1}{2} g^{zz} f \dot{A}_z^2 - g^{zz} m^2 A_z^2 \right], \quad (3.11)$$

$$\ddot{\sigma} + 3\dot{\alpha}\dot{\sigma} = \frac{1}{3m_p^2} \left[-g^{zz} f \dot{A}_z^2 + g^{zz} m^2 A_z^2 \right], \quad (3.12)$$

en donde se observa de la métrica (3.8) que $g^{zz} = -e^{-2\alpha+4\sigma}$.

A partir del lagrangiano para el campo escalar y para el campo vectorial se puede calcular el tensor de momentum-energía para cada campo respectivamente

$$T_{\mu\nu}^{(\phi,A)} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}(\phi,A) - 2 \frac{\partial \mathcal{L}(\phi,A)}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (3.13)$$

Una vez obtenido el tensor momentum-energía de los campos involucrados y considerando la ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0, \quad (3.14)$$

se calcula las ecuaciones de movimiento para el campo escalar y para el campo vectorial respectivamente:

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}\dot{\phi} + V'(\phi) + B_A = 0, \quad (3.15)$$

$$\ddot{A}_z + \left(\dot{\alpha} + 4\dot{\sigma} - \frac{\dot{f}}{f} \right) \dot{A}_z + \frac{m^2}{f} A_z = 0. \quad (3.16)$$

En la expresión (3.15) se ha considerado la definición $B_A \equiv B_{A-f} + B_{A-m}$, en donde

$$B_{A-f} \equiv \frac{1}{2} g^{zz} f' \dot{A}_z^2, \quad (3.17)$$

corresponde al *backreaction*¹⁰ debida a la existencia de la función cinética f , mientras que

$$B_{A-m} \equiv -g^{zz} m m' A_z^2, \quad (3.18)$$

es el *backreaction* que origina la existencia de un término de masa en el lagrangiano, correspondiente al campo vectorial. La prima en estas ecuaciones indica la derivada con respecto al campo del inflatón. Así mismo, la ecuación de movimiento para el campo escalar (3.15), se reduce a la ecuación usual de *Klein-gordon* para un espacio-tiempo curvo cuando no están presentes las funciones de acople entre los campos escalar y vectorial

⁹Para un estudio mas detallado de la obtención de las ecuaciones de campo y de movimiento véase el apéndice B.

¹⁰Este efecto se debe a la relación que existe entre el contenido energético y la geometría del espacio-tiempo. Así, perturbaciones en los campos generan perturbaciones en el fondo métrico $\delta A_\mu \rightarrow \delta g_{\mu\nu}$. Este hecho se ve reflejado en las ecuaciones de movimiento en donde se observan términos asociados a tal efecto.

($f' = m' = 0$).

De otra parte, la primera ecuación de movimiento (3.10) corresponde a la ecuación de Friedmann, cuando se considera un fondo métrico de FRW ($\sigma = 0$) y cuando no está presente el campo vectorial, lo que implica que sólo se tiene el término cinético y el potencial del campo escalar. El análisis anterior conlleva a pensar que el tercer término de dicha ecuación corresponda a la densidad de energía cinética y el último corresponda al potencial del campo vectorial, lo que conduce a las siguientes definiciones

$$\rho_{Kin} \equiv -\frac{1}{2}g^{zz}f\dot{A}_z, \quad (3.19)$$

$$V_A \equiv -\frac{1}{2}g^{zz}m^2A_z^2. \quad (3.20)$$

Con el fin de generar un período inflacionario es necesario determinar algún tipo de condición energética entre los campos presentes. Para ello, se analiza la ecuación que determina la expansión acelerada:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 > 0, \quad (3.21)$$

la cual se obtiene justamente de las ecuaciones (3.10) y (3.11) en la forma:

$$\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 = -2\dot{\sigma}^2 + \frac{1}{3m_p^2} \left[-\dot{\phi}^2 + V(\phi) - \rho_{kin} \right]. \quad (3.22)$$

La ausencia del potencial del campo vectorial en esta ecuación, conlleva a concluir que esta cantidad no juega ningún rol en la dinámica inflacionaria; además, de dicha ecuación, se determina que el potencial escalar debe dominar sobre la energía cinética del campo escalar y vectorial y sobre la cantidad σ para conseguir la existencia de una época de expansión acelerada.

De gran utilidad resultará la razón entre la densidad de energía de los campos vectorial y escalar, y la razón entre el *backreaction* y la pendiente del campo escalar

$$R = \frac{\rho_A}{\rho_\phi}, \quad (3.23)$$

$$R_B = \frac{B_A}{V'(\phi)}. \quad (3.24)$$

3.3.1. Ecuaciones de Campo y de Movimiento en el Espacio de Fase

El conjunto de ecuaciones diferenciales (3.10)-(3.12), junto con las ecuaciones de movimiento de los campos escalar y vectorial (3.15)-(3.16) conforman un conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales no lineales, cuya solución analítica resulta altamente complicada. En esta sección y en la siguiente, se estudiará el comportamiento de las soluciones de dicho sistema en el espacio de fase mediante el estudio de la teoría de los sistemas dinámicos [64]. Como primer paso, se desea expresar la primer ecuación de campo o la ecuación de Friedmann en cantidades dinámicas que sean adimensionales, resultando en la restricción

$$\Sigma^2 + x^2 + y^2 + z^2 + s^2 = 1, \quad (3.25)$$

en donde se ha definido las nuevas variables dinámicas normalizadas¹¹

$$\Sigma \equiv \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\alpha}}, \quad (3.26)$$

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}m_p\dot{\alpha}}, \quad (3.27)$$

$$y \equiv \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3}m_p\dot{\alpha}}, \quad (3.28)$$

$$z \equiv \frac{\sqrt{\rho_{kin}}}{\sqrt{3}m_p\dot{\alpha}}, \quad (3.29)$$

$$s \equiv \frac{\sqrt{V_A}}{\sqrt{3}m_p\dot{\alpha}}, \quad (3.30)$$

$$\mu \equiv \frac{m}{\dot{\alpha}\sqrt{f}}. \quad (3.31)$$

Estas definiciones permiten reescribir el sistema de ecuaciones acopladas de segundo orden en un sistema autónomo de primer orden¹²

$$\frac{d\Sigma}{d\alpha} = -3\Sigma + 2z^2 - 2s^2 + \Sigma(3\Sigma^2 + 3x^2 + 2z^2 + s^2), \quad (3.32)$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = -3x - \lambda y^2 + \Gamma z^2 - \Xi s^2 + x(3\Sigma^2 + 3x^2 + 2z^2 + s^2), \quad (3.33)$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \lambda xy + y(3\Sigma^2 + 3x^2 + 2z^2 + s^2), \quad (3.34)$$

$$\frac{dz}{d\alpha} = -2z - 2z\Sigma - \Gamma zx - \mu x + z(3\Sigma^2 + 3x^2 + 2z^2 + s^2), \quad (3.35)$$

$$\frac{ds}{d\alpha} = -s + 2s\Sigma + \Xi sx + \mu z + s(3\Sigma^2 + 3x^2 + 2z^2 + s^2), \quad (3.36)$$

$$\frac{d\mu}{d\alpha} = [(\Xi - \Gamma)x + (3\Sigma^2 + 3x^2 + 2z^2 + s^2)]\mu, \quad (3.37)$$

en donde se ha definido las cantidades adimensionales que dependen únicamente de los parámetros del modelo

$$\lambda(\alpha) \equiv \sqrt{\frac{3}{2}}m_p \left(\frac{V'}{V} \right), \quad (3.38)$$

$$\Gamma(\alpha) \equiv \sqrt{\frac{3}{2}}m_p \left(\frac{f'}{f} \right), \quad (3.39)$$

$$\Xi(\alpha) \equiv \sqrt{6}m_p \left(\frac{m'}{m} \right). \quad (3.40)$$

¹¹Los puntos críticos del sistema se expresarán justamente a través estas cantidades, las cuales tienen un sentido físico bien definido.

¹²Nótese que las dos últimas ecuaciones de este sistema resultan de reducir el orden y están directamente relacionadas con la masa y con el potencial del campo vectorial. Vale la pena recordar que este último no contribuye en la dinámica inflacionaria.

Es conveniente definir los parámetros de *slow roll*¹³ en términos de los parámetros del modelo [65]

$$\epsilon \equiv \frac{m_p^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = \frac{1}{3} \lambda^2, \quad (3.41)$$

$$\eta \equiv m_p^2 \left(\frac{V''}{V} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} m_p \lambda' + 2\epsilon. \quad (3.42)$$

De igual manera se usa la formulación de Hamilton-Jacobi, en donde se involucra la cantidad $H(\phi)$ en lugar de $V(\phi)$ en las ecuaciones dinámicas. Por consiguiente, en esta formulación, inflación se describe de una manera más natural. Los parámetros de *slow roll* en esta versión se definen como¹⁴

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 3\Sigma^2 + 3x^2 + 2z^2 + s^2, \quad (3.43)$$

$$\eta_H = \epsilon_H - \frac{1}{2} \frac{\dot{\epsilon}_H}{\epsilon_H}. \quad (3.44)$$

Como se ha mencionado, la obtención de las soluciones analíticas al sistema de ecuaciones (3.32)-(3.37) resulta altamente complicada debido al gran número de grados de libertad. Sin embargo, se puede estudiar el comportamiento de las soluciones a partir de la estabilidad de los puntos críticos. En la siguiente sección se presentará un estudio general sobre la teoría de los sistemas dinámicos, que permita analizar de una manera mucho más fácil la evolución de las soluciones que determinan la estabilidad y por ende la viabilidad del modelo.

3.4. Análisis de la Dinámica del Modelo a Través de Sistemas Dinámicos

A continuación se presenta un análisis de la estabilidad de los puntos críticos y por consiguiente del sistema a partir de la teoría de sistemas dinámicos. En el apéndice D. se presentan los elementos teóricos más relevantes para su comprensión. La metodología en la que se hace dicho estudio inicia con la obtención de los puntos críticos del sistema no lineal. Posteriormente, se construye la matriz M que conduce a encontrar los valores propios y por último, se analiza y se obtiene las condiciones (en términos de los parámetros del modelo λ, Γ, Ξ) bajo las cuales el sistema dinámico presenta estabilidad.

Se presentará en este estudio el caso en que la masa del campo vectorial se hace nula. Dicha consideración permitirá comparar la dinámica inflacionaria del modelo de *Hairy inflation* con el análisis vía teoría de sistemas dinámicos.

3.4.1. Campo Vectorial sin Masa

Para este caso específico se considera un campo vectorial sin masa, tal que $S = \mu = \Xi = 0$, lo cual conlleva a que el sistema dinámico descrito por las ecuaciones [(3.32)-(3.37)]

¹³Esta condición de *slow roll* o condición de planitud recae sobre el potencial del inflatón y es una condición suficiente para generar una expansión casi exponencial o de cuasi de Sitter.

¹⁴En el límite de *slow roll* $\epsilon_H \rightarrow \epsilon$ y $\eta_H \rightarrow \eta - \epsilon$.

se reduzca a

$$\frac{d\Sigma}{d\alpha} = -3\Sigma + 2 - 2\Sigma^2 - 2x^2 - 2y^2 + \Sigma(\Sigma^2 + x^2 + 2 - 2y^2), \quad (3.45)$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = -3x - \lambda y^2 + \Gamma(1 - \Sigma^2 - x^2 - y^2) + x(\Sigma^2 + x^2 + 2 - 2y^2), \quad (3.46)$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \lambda x + \Sigma^2 + x^2 + 2 - 2y^2, \quad (3.47)$$

$$\Sigma^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \quad (3.48)$$

Para este sistema se encuentran tres posibles soluciones de los puntos críticos x_c, y_c, z_c, Σ_c , en donde dos de éstas soluciones presentan interés cosmológico. La primera solución, corresponde al caso de inflación tipo *Slow roll* estándar. La segunda solución no representa un Universo inflacionario dado que la densidad de energía es dominada por el término cinético asociado al campo del inflatón y parametrizado en términos de la cantidad x_c ; además, para esta solución no es posible establecer la estabilidad del sistema. La última solución, la cual resulta de mayor interés, da lugar a una solución en donde está presente el término cinético del campo vectorial a través del punto crítico s_c y adicionalmente se produce una generación de Σ , debido a la expansión anisótropa.

Introduciendo las perturbaciones descritas en (D.2) en el sistema de ecuaciones [(3.45)-(3.47)], se llega a la forma de la ecuación (D.3). De aquí, se construye la matriz M del sistema lineal

$$M = \begin{bmatrix} 1 - 2\Gamma x + 3x^2 + \Sigma^2 - 2y^2 & -2\lambda y - 2\Gamma y - 4yx & -2\Gamma\Sigma + 2\Sigma x \\ \lambda y + 2xy & \lambda x + \Sigma^2 + 2 + x^2 - 6y^2 & 2y\Sigma \\ -4x + 2x\Sigma & -4y - 4y\Sigma & -1 - 4\Sigma + 3\Sigma^2 + x^2 - 2y^2 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Una vez obtenidos los valores de los puntos críticos del sistema no lineal, se reemplazan en la matriz M , y se determinan los correspondientes valores propios para cada conjunto de puntos críticos. Cada uno de estos conjuntos, da lugar a estados dinámicos del universo que serán estudiados de manera independiente.

Caso I. *Solución tipo Slow roll estándar (SSE)*

Para este caso, se encuentra los puntos críticos en términos de los parámetros del modelo

$$(x_c, y_c, z_c, \Sigma_c) = \left(-\frac{\lambda}{3}, \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3}\right)^2}, 0, 0 \right), \quad (3.50)$$

los cuales determinan los valores propios de la matriz M de la solución al sistema de ecuaciones lineales

$$m_1 = \frac{2}{3}\lambda(\Gamma + \lambda) - 4, \quad m_{2,3} = -3 + \frac{1}{3}\lambda^2. \quad (3.51)$$

Con el fin de determinar la estabilidad de los puntos críticos es necesario establecer las condiciones $\lambda < 3$ y $\lambda(\Gamma + \lambda) < 6$, resultando en $m_1, m_{2,3} < 0$, es decir, en puntos críticos estables. La existencia de los valores de estos puntos críticos y de la estabilidad del sistema, conduce a la generación de una fase de expansión acelerada en donde únicamente está presente el campo escalar ($\Sigma_c = z_c = 0$) a través del término cinético y del potencial

en la dinámica inflacionaria.

Para garantizar la estabilidad del sistema se requiere que los parámetros del modelo sean constantes (lo cual corresponde a la solución trivial) o no varíen significativamente comparados con la escala de Hubble H . Esto respalda que la dinámica local de los puntos críticos no dependa de los parámetros del modelo. En caso de que se presente una dependencia fuerte sobre dichos parámetros, se debe exigir unas condiciones más rigurosas.

Un conjunto de condiciones más rigurosas, suficientes pero no necesarias, están determinadas por $\lambda \ll 3$ y $\lambda(\Gamma + \lambda) \ll 6$, las cuales garantizan la estabilidad de los puntos críticos a partir de los valores propios obtenidos numéricamente y representados en las figuras (4.1) y (4.2). Dichas condiciones conducen a que $y_c \simeq 1$ consistente con la solución estándar de inflación tipo *Slow Roll* $\dot{\phi} \ll V(\phi)$, ya que $H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3m_p^2}$, en donde el inflatón rueda cuesta abajo a través de su potencial y domina la densidad de energía del universo.

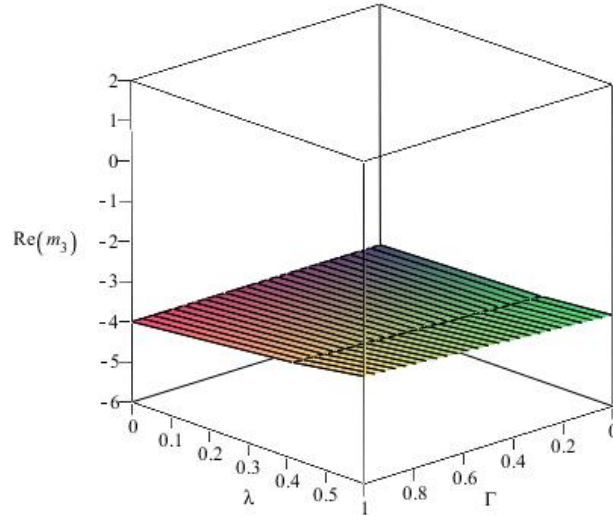


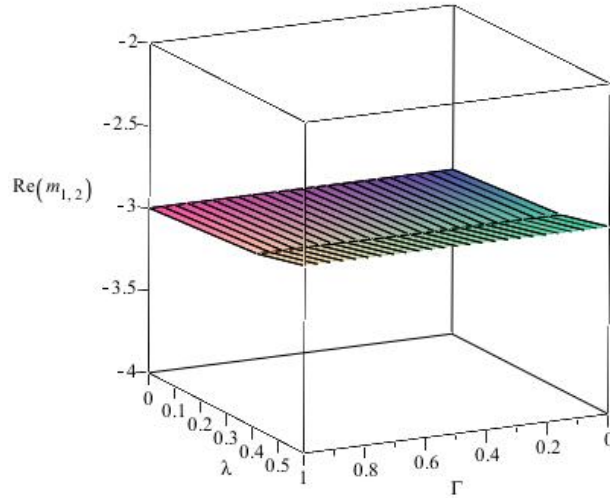
FIGURA 3.2. Región del espacio de parámetros para la cual no se presenta variaciones significativas de los valores propios.

De otra parte, los parámetros de *Slow Roll* en la formulación de Hamilton-Jacobi definidos en (3.43) y (3.44) respectivamente toman los valores particulares

$$\epsilon_H = 3x_c^2 = \frac{\lambda^2}{3}, \quad \eta_H = \frac{\lambda^2}{3} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}. \quad (3.52)$$

Las condiciones $\lambda \ll 3$ y $\lambda(\Gamma + \lambda) \ll 6$ conducen no sólo a establecer la estabilidad del sistema sino que conducen a un período inflacionario de tipo *slow roll*. En las figuras 4.1 y 4.2, se muestran las respectivas soluciones numéricas de la parte real de los valores propios de la matriz M en el espacio de fase, en donde se observa los valores de los parámetros del modelo para los cuales los valores propios son aproximadamente uniformes¹⁵.

¹⁵Ésto se evidencia en las regiones donde se presenta mayor planitud.


 FIGURA 3.3. Valor propio $m_{1,2}$ en el espacio de parámetros.

Caso II. *Solución Cinética Anisótropa*

La segunda solución para los puntos críticos está dada por el conjunto

$$(x_c, y_c, z_c, \Sigma_c) = \left(-\frac{3}{\lambda}, 0, 0, \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\lambda}\right)^2} \right). \quad (3.53)$$

En esta solución no está presente el potencial del inflatón $y_c = 0$ ni el término cinético asociado al campo vectorial. Como consecuencia de lo anterior, no se produce una expansión inflacionaria; además, la energía del universo es dominada por el término cinético asociado al campo escalar $x_c = 1$, lo cual garantiza poca anisotropía en la expansión.

Caso III. *Solución Vectorial Escalada (SVE)*

En esta solución el término cinético ρ_{kin} (representado a través de la variable dinámica z) del campo vectorial está presente en la densidad de energía, contribuyendo de manera significativa a la generación de anisotropía estadística a través de la expansión anisótropa, lo cual es contrario a los casos previos en el que el campo vectorial no estaba presente. Los puntos críticos para este caso corresponden a

$$(x_c, y_c, z_c, \Sigma_c) = \left(-6\Delta_1(\lambda + \Gamma), \Delta_1\Delta_2\sqrt{\Gamma^2 + \lambda\Gamma + 6}, \Delta_1\Delta_2\sqrt{\lambda^2 + \lambda\Gamma - 6}, 2\Delta_1(\lambda^2 + \lambda\Gamma - 6) \right). \quad (3.54)$$

Con el fin de abreviar la notación, en la expresión anterior se ha hecho uso de las definiciones: $\Delta_1 \equiv (3\Gamma^2 + 4\Gamma\lambda + \lambda^2 + 12)^{-1}$ y $\Delta_2 \equiv \sqrt{3(3\Gamma^2 + 2\Gamma\lambda - \lambda^2 + 12)}$.

Considerando estos puntos críticos, los valores propios que se obtienen a partir de la Matriz M (3.49), tienen una forma funcional con respecto a los parámetros del modelo mucho más compleja. Esto conduce a que no se pueda analizar y establecer la estabilidad

del sistema de una manera más clara. Bajo esta dificultad, se grafica la parte real de los valores propios con el fin de establecer las condiciones bajo las cuales dichos valores propios no varían significativamente comparados con la escala de *Hubble* y por ende no dependan de los parámetros del modelo, de modo que se pueda establecer la estabilidad de los puntos críticos. A partir de las condiciones encontradas en las figuras 4.3-4.5: $\Gamma \gg \lambda$ y $\Gamma \gg 1$ se reduce la forma funcional de los puntos críticos permitiendo analizar la dinámica inflacionaria de una forma mucho más simple

$$(x_c, y_c, z_c, \Sigma_c) = \left(-\frac{2}{\Gamma}, 1, \frac{\sqrt{\lambda\Gamma - 6}}{\Gamma}, \frac{2(\lambda\Gamma - 6)}{3\Gamma^2} \right). \quad (3.55)$$

Así, las partes reales de los valores propios pueden ser aproximadas a los valores

$$Re(m_1) \simeq -3, \quad Re(m_{2,3}) \simeq -\frac{3}{2}, \quad (3.56)$$

que es lo que justamente se muestra en las figuras 4.3-4.5.

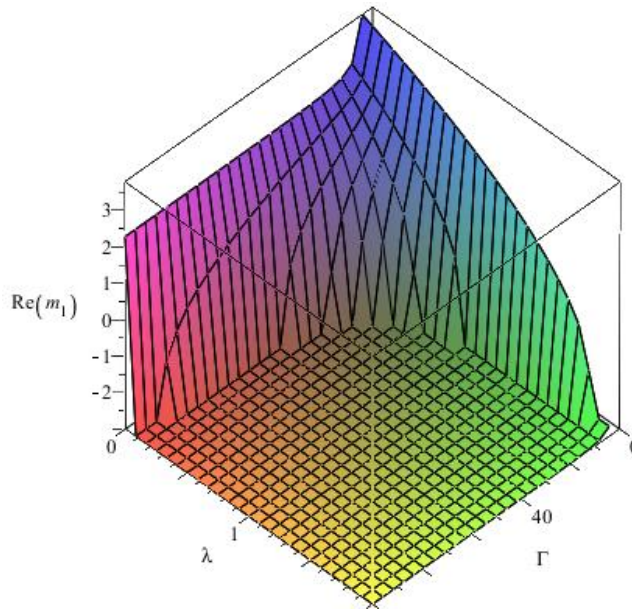


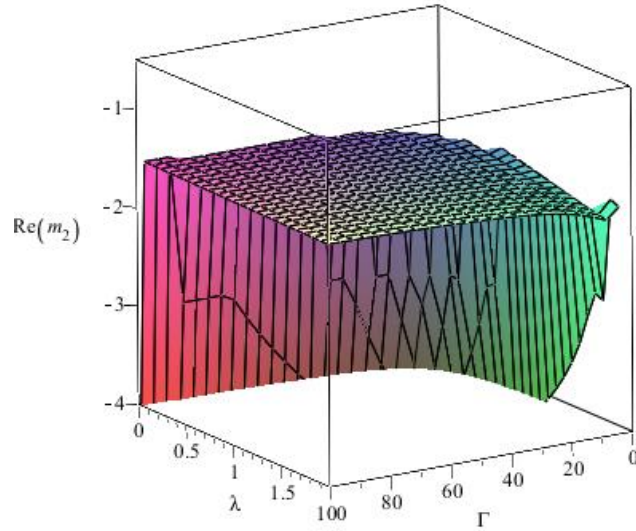
FIGURA 3.4. Valor propio m_1 en el espacio de parámetros.

Bajo las condiciones de estabilidad $\Gamma \gg \lambda$ y $\Gamma \gg 1$, se obtiene la densidad de energía a partir de la restricción de Friedmann (3.25): $y_c \simeq 1$, lo que indica que se tiene el campo del inflatón en el régimen de *slow roll*, y es quien conduce la expansión inflacionaria a través de su potencial. Para este caso tiene sentido determinar la razón de densidad energía

$$R = \frac{\rho_{kin}}{\rho_\phi} = \frac{z^2}{x^2 + y^2}, \quad (3.57)$$

la que evaluada en los puntos críticos y considerando que $\Gamma \gg 1$ da como resultado

$$R \simeq \frac{\lambda\Gamma - 6}{\Gamma^2} \ll 1, \quad (3.58)$$


 FIGURA 3.5. Valor propio m_2 en el espacio de parámetros.

lo que implica que la densidad de energía del campo vectorial es subdominante sobre el contenido energético del universo tal que su efecto en la dinámica inflacionaria resulta despreciable. De igual manera, se desea analizar el efecto que produce la razón del *back-reactions* (determinada por la presencia del campo vectorial, ecuación (3.24)) sobre la pendiente efectiva del potencial:

$$R_B = -\frac{\rho_{kin}\Gamma f}{\lambda V} = -\frac{\Gamma}{\lambda} \left(\frac{z}{y}\right)^2, \quad (3.59)$$

en donde se ha considerado las definiciones (3.38) y (3.39) de los parámetros del modelo. Considerando nuevamente los puntos críticos del sistema y las condiciones para establecer la estabilidad del modelo, se obtiene

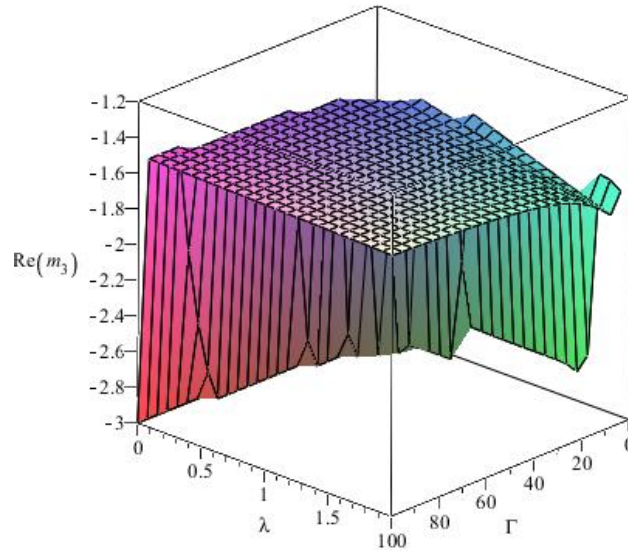
$$R_B = -\frac{\Gamma}{\lambda} \left(\frac{z^2}{y}\right) \simeq \frac{6 - \lambda\Gamma}{\lambda\Gamma}. \quad (3.60)$$

Por consiguiente, la pendiente del potencial efectivo del campo escalar toma la forma

$$V'_{efe} = \frac{6}{\lambda\Gamma} V'. \quad (3.61)$$

Como efecto de la condición establecida para obtener la estabilidad de los puntos críticos $\lambda\Gamma > 6$, se reduce la pendiente del potencial del campo escalar originada por la presencia del campo vectorial. Dicho de otra forma, el potencial resulta mucho más plano en donde el campo rueda cuesta abajo a lo largo de su potencial.

Los parámetros de *Slow-roll* se determinan a partir de la condición de estabilidad


 FIGURA 3.6. Valor propio m_3 en el espacio de parámetros.

requerida para este modelo, entonces

$$\epsilon_H \simeq \frac{2\lambda}{\Gamma}, \quad \eta_H = \frac{2\lambda}{\Gamma} + \frac{\sqrt{6}m_p}{\Gamma} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\Gamma'}{\Gamma} \right), \quad (3.62)$$

en donde se observa que $\epsilon_H \ll 1$ de acuerdo con las condiciones de estabilidad. Comparando los respectivos parámetros de *Slow-roll* de ambos casos, se encuentra que $\epsilon_H(SVE) = \frac{6}{\Gamma\lambda}\epsilon_H(SSE)$, en donde se produce el mismo efecto que en el caso de la pendiente del potencial efectivo ecuación (3.61), resultando ϵ_H reducido para esta solución como efecto de la condición de estabilidad.

Con el fin de cuantificar la anisotropía en la expansión y por ende poder comparar con el valor estimado en la referencia [25] se tiene que

$$\Sigma_c = \frac{2}{3}z_c^2 = \frac{2}{3}R \ll 1, \quad (3.63)$$

lo que muestra que la anisotropía en la expansión evoluciona de la misma manera que la razón de densidad de energía¹⁶, lo que implica según el resultado (3.58) que la expansión anisótropa es pequeña pero prolongada en coherencia con las observaciones más recientes $|\frac{\Sigma}{H}| < 0.012$ [66].

De otra parte, de las definiciones de los parámetros del modelo se obtienen la siguientes relaciones

$$\frac{1}{f} \frac{df}{d\alpha} = 2x\Gamma \quad y \quad \frac{1}{m} \frac{dm}{d\alpha} = x\Xi. \quad (3.64)$$

¹⁶Este valor es una generalización del resultado obtenido en la referencia [25], dado que no se ha establecido la forma funcional de $V(\phi)$.

Se conoce de antemano según la referencia [27] que $f \propto a^{-4}$ y $m \propto a$, esto con el fin de generar un espectro de las perturbaciones asociada a la parte longitudinal y transversal que sean invariantes de escala. Considerando estas condiciones en el sistema (3.64), se obtiene las siguientes relaciones

$$-4 = 2x\Gamma \quad y \quad 1 = x\Xi, \quad (3.65)$$

las cuales se satisfacen siempre y cuando la variable dinámica tome los valores

$$x = -\frac{2}{\Gamma} \quad y \quad x = \frac{1}{\Xi}. \quad (3.66)$$

Nótese que el primer valor corresponde justamente al punto crítico encontrado cuando el campo vectorial no tiene masa, resultando consistente con la solución atractora para la función cinética $f \propto e^{-4\alpha}$. Esto muestra que este punto crítico es un atractor del modelo¹⁷.

De manera general, los valores propios para cada solución obtenida (caso I y caso III) dependen de los parámetros del modelo y estos a su vez podrían evolucionar en el tiempo afectando la estabilidad de los puntos críticos y la del sistema mismo. Por esta razón es necesario analizar la dependencia temporal de los parámetros del modelo con el fin de establecer la estabilidad del sistema.

3.4.2. Análisis de la Dependencia Temporal de los Parámetros del Modelo

En esta sección se busca determinar la evolución de los puntos críticos con respecto a los parámetros del modelo, los cuales dependen del parámetro temporal α . Para este propósito, es necesario considerar perturbaciones alrededor de los puntos críticos en una vecindad local y analizar si la variación de dichas perturbaciones con respecto a α no sea significativa comparado con la solución, tal que esta última pueda alcanzar el punto crítico y por ende ser un atractor del sistema. Dicho análisis se hace con el fin de establecer si, en realidad, los puntos críticos corresponden a atractores del sistema. Un análisis más detallado sugiere lo siguiente: si las soluciones se mueven mucho más rápido que la evolución de los puntos críticos, la solución alcanzará dicho punto obteniendo una solución atractora; de lo contrario, la solución no corresponderá a un atractor del sistema. Esto implica que la dependencia de los puntos críticos con respecto al tiempo debe ser menor comparada con la magnitud más pequeña de los valores propios. Esta condición se cuantifica a través de la solución de la perturbación (D.4), de donde se consigue la razón fraccional

$$\frac{1}{u} \frac{du}{d\alpha} = m_1, \quad (3.67)$$

en donde se encuentra que la velocidad de la solución de la perturbación corresponde a la magnitud del valor propio. De aquí que se pueda establecer la condición

$$\left| \frac{1}{F_c} \frac{dF_c}{d\alpha} \right| = \left| \sqrt{6} m_p x_c \frac{F'_c}{F_c} \right| = \sqrt{6} m_p \left| x_c \frac{F'_c}{F_c} \right|, \quad (3.68)$$

en donde la prima denota la derivada con respecto al campo del inflatón y $F_c = (x_c, y_c, z_c, s_c, \Sigma_c)$. De lo obtenido anteriormente, ahora la condición de estabilidad requiere

¹⁷El otro valor del punto crítico corresponde al caso cuando se considera un campo vectorial masivo.

rida se expresa como

$$\left| \frac{1}{F_c} \frac{dF_c}{d\alpha} \right| = \sqrt{6} m_p \left| x_c \frac{F'_c}{F_c} \right| < |m_{1,2,3}|. \quad (3.69)$$

Para que se cumpla esta condición de manera general para cada conjunto de soluciones, es suficiente con comparar la variable F_c que presenta mayor dependencia con respecto al tiempo con la magnitud más pequeña de los valores propios encontrados.

Caso I

Se consideran los puntos críticos (3.55) que conducen a

$$\left| \frac{1}{x_c} \frac{dx_c}{d\alpha} \right| = \sqrt{6} m_p \frac{|\lambda'|}{3}, \quad (3.70)$$

$$\left| \frac{1}{x_c} \frac{dy_c}{d\alpha} \right| = \sqrt{6} m_p \left| \frac{\frac{\lambda^2}{9} \frac{\lambda'}{3}}{(1 - (\frac{\lambda}{3})^2)} \right|, \quad (3.71)$$

que a su vez es equivalente a

$$\left| \frac{1}{x_c} \frac{dy_c}{d\alpha} \right| \simeq \sqrt{6} m_p \left| \left(\frac{\lambda^2}{3} \right)^2 \frac{\lambda'}{3} \right|, \quad (3.72)$$

en donde se ha considerado la condición de estabilidad $\lambda < 3$. Comparando la dependencia temporal de ambas variables se encuentra que

$$\left| \frac{1}{x_c} \frac{dy_c}{d\alpha} \right| = \left(\frac{\lambda}{3} \right)^2 \left| \frac{1}{x_c} \frac{dx_c}{d\alpha} \right|. \quad (3.73)$$

De esta relación, se determina que la variable x_c es la que presenta mayor dependencia temporal. En cuanto a la magnitud más pequeña de los valores propios, se tiene que en el régimen de *slow roll* $\epsilon \ll 1$ y como primer caso $\Gamma \ll \lambda$ (condición de estabilidad) que

$$|m_{1,2}| < |m_3|, \quad (3.74)$$

lo cual puede ser constatado a partir de las soluciones numéricas presentadas en las figuras 4.1 y 4.2 y de la expresión (3.51). En el otro régimen ($\Gamma \gg \lambda$) se encuentra a partir de (3.51) que $m_3 \simeq -4 + \frac{2}{3}\lambda\Gamma$ con la nueva condición de estabilidad $\lambda\Gamma < 6$. De esta última condición, se tienen dos posibilidades: la primera, manifiesta que si $\frac{3}{2} < \lambda\Gamma < 6$, entonces $|m_{1,2}| > |m_3|$. Ahora si: $\lambda\Gamma < \frac{3}{2}$, se consigue que $|m_{1,2}| < |m_3|$. Siguiendo en el régimen de *slow roll*, y considerando que la ecuación (3.70) puede ser escrita como $|2\epsilon - \eta|$ se llega a las condiciones:

$$\left| \frac{1}{x_c} \frac{dx_c}{d\alpha} \right| = |2\epsilon - \eta| < \begin{cases} |m_{1,2}| = |-3 + \epsilon|, \\ |m_3| = |-4 + 2\epsilon + \frac{2}{3}\lambda\Gamma|. \end{cases}$$

Considerando las condiciones de *slow roll* $\epsilon \ll 1$ y $|\eta| \ll 1$, se garantiza la primera desigualdad. La segunda desigualdad se garantiza si se considera adicionalmente $|-4 + \frac{2}{3}\lambda\Gamma| > O(\eta)$, lo cual se consigue si no se está cerca al punto de bifurcación¹⁸ $\lambda\Gamma \ll 6$. De otra parte, si $|-4 + \frac{2}{3}\lambda\Gamma| \geq O(1)$, ambas desigualdades se pueden conseguir si $|\eta| \sim 1$,

¹⁸Este punto marca la frontera en donde la solución deja de existir.

es decir considerando también inflación de *fast roll* [2]. Si los parámetros del modelo varían rápidamente, la estabilidad de los puntos críticos se puede conseguir imponiendo las condiciones más rigurosas $\lambda \ll 3$ y $\lambda\Gamma \ll 6$. De esta manera se asegura la viabilidad del modelo, cuya magnitud más pequeña del valor propio sería para esta situación $|m_{1,2}| \simeq 3$.

Caso II

Para esta solución existen cuatro valores de los puntos críticos, denotados por $F_c = (x_c, y_c, z_c, \Sigma)$. Con el fin de obtener expresiones que puedan ser comparadas de una manera mucho más fácil para las cantidades requeridas en la condición (3.69) se consideran las condiciones $\Gamma \gg \lambda$ y $\Gamma \gg 1$, lo que conduce a obtener los siguientes valores

$$\left| \frac{1}{x_c} \frac{dx_c}{d\alpha} \right| \simeq 2\sqrt{6}m_p \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma^2} + \frac{1}{3} \frac{\lambda'}{\Gamma^2} \right|, \quad (3.75)$$

$$\left| \frac{1}{y_c} \frac{dy_c}{d\alpha} \right| \simeq \sqrt{6}m_p \left| \frac{\lambda'}{\Gamma^2} \right|, \quad (3.76)$$

$$\left| \frac{1}{z_c} \frac{dz_c}{d\alpha} \right| \simeq 2\sqrt{6}m_p \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma^2} + \frac{\lambda'}{\Gamma^2} - \frac{\lambda\Gamma + \lambda\Gamma'}{\Gamma(\lambda\Gamma - 6)} \right|, \quad (3.77)$$

$$\left| \frac{1}{\Sigma_c} \frac{d\Sigma_c}{d\alpha} \right| \simeq 2\sqrt{6}m_p \left| -\frac{2}{3} \frac{\lambda'}{\Gamma^2} + \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma^2} \right) \left(\frac{2}{3} \frac{\lambda}{\Gamma} - \frac{8}{\Gamma^2} \right) \right|. \quad (3.78)$$

Para esta solución la magnitud más pequeña de los valores propios es $m_{2,3} \simeq \frac{3}{2}$, lo que implica que $\left| \frac{1}{F_c} \frac{dF_c}{d\alpha} \right| < O(1)$. Una condición más fuerte sobre la anterior desigualdad garantizaría que el atractor sea alcanzado. Analizando la expresión (3.76), se observa que $\sqrt{6}m_p \frac{\lambda'}{\Gamma^2} \simeq |\eta - 2\epsilon| \leq O(1)$, dado que se está considerando el régimen de *slow roll* y la condición $\Gamma \gg 1$. De manera evidente se consigue que $\sqrt{6}m_p \frac{\lambda'}{\Gamma^2} \ll 1$, la cual está presente en las expresiones (3.75-3.78). La expresión (3.77) sugiere introducir una nueva condición: $\lambda\Gamma \neq 6$ o ya sea $\lambda\Gamma \simeq -\lambda\Gamma'$, lo que conlleva a que todas las expresiones puedan expresarse a través de un única condición más fuerte dado que existe un término en común entre estas: $m_p \frac{\lambda'}{\Gamma^2}$, y una relación entre Γ y la función cinética f (ecuación 3.39). Por consiguiente

$$m_p \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma^2} \right| \approx \left| \frac{\left(\frac{f''}{f} - \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \right)}{\left(\frac{f'}{f} \right)^2} \right| = \left| \left(\frac{f''}{f'^2} - 1 \right) \right| \ll 1. \quad (3.79)$$

Si la función cinética es de la forma $f \propto e^{c\phi/m_p}$, en donde c es una constante, la expresión (3.79) es justamente cero. Como conclusión, si la función cinética es exponencial los parámetros del modelo adimensionales serán constantes. De otra parte, se requiere que $\Gamma \propto 1/\lambda$ para garantizar la condición $\lambda\Gamma \simeq -\lambda\Gamma'$. Dicho requerimiento es coherente con la forma de la función cinética que se considera en la referencia [25]: $f \propto e^{\int \frac{V}{\sqrt{V}} d\phi}$, lo cual es un caso particular de la función f .

3.5. Anisotropía Estadística en el Modelo de *Hairy inflation*

A partir del estudio de sistemas dinámicos, se analizó la solución inflacionaria cuando el campo vectorial no tiene masa, y se obtuvo en dicha solución una contribución de la

cantidad Σ , la cual indica un efecto de expansión anisótropa en la dinámica inflacionaria proporcional a la densidad de energía R^{19} , señalando una contribución pequeña pero significativa a la expansión.

De otra parte, las expresiones (2.30-2.32) obtenidas en este trabajo, surgen a partir de no asumir invarianza ante rotaciones espaciales (como resultado de considerar expansión anisótropa) cuando están presentes múltiples campos vectoriales y escalares. Estas expresiones pueden ser aplicadas al modelo de *Hairy-inflation*, en cuyo caso, se reduce de $2a + I$ expresiones a sólo tres²⁰.

Posiblemente la expresión (2.32) es la que proporcione una explicación del origen de un g_ζ negativo²¹ encontrado en este modelo y verificada numéricamente en las referencias [1, 29, 63] la cual se muestra en la figura 4.1. Esta afirmación se basa en el hecho de que el campo vectorial no tiene masa, lo que conduce a tener $r_{long} = 0$, es decir, que no exista componente del espectro asociado a la polarización longitudinal. Como consecuencia de lo anterior, se tiene $\tilde{g}_N < 0$ dado que los espectros indicados en esa expresión son definidos positivamente²² y las derivadas del número de e-folds presentes allí están elevadas al cuadrado. Apoyados en nuestros resultados, es posible que en el cálculo de g_ζ hayan considerado sólo el efecto de \tilde{g}_N ignorando el efecto de los otros niveles de anisotropía.

Sin embargo, no se ha dicho nada concreto con respecto a la contribución de las expresiones (2.30) y (2.31) a la generación de anisotropía estadística en la perturbación de la curvatura, que podrían eventualmente contribuir de manera negativa, siempre y cuando las cantidades $g_{\delta\phi}$ y \tilde{g}_+ que deben ser calculadas a partir del proceso de producción anisótropa de partículas²³ sean negativas. Aun cuando no se ha efectuado este cálculo, se puede afirmar que en vista del valor positivo $g_\zeta = 0.290 \pm 0.031$ [8], se requiere que dichos niveles de anisotropía contribuyan de manera positiva, o si es el caso en que tales cantidades resulten negativas, se requiere que la suma de los valores absolutos sea mayor que la cantidad \tilde{g}_N , tal que la suma neta sobre las tres direcciones preferenciales en el espectro de la perturbación en la curvatura (2.29) conlleve a un $g_\zeta > 0$.

El anterior análisis proporciona una explicación nunca antes presentada sobre el origen del signo negativo del nivel de anisotropía estadística para el modelo de *Hairy inflation* a partir de las expresiones encontradas en este trabajo, las cuales se obtuvieron vía el formalismo δN . Aun cuando dicho análisis carece de algunos resultados o cálculos concluyentes, proporciona una explicación satisfactoria sobre el origen del signo negativo de g_ζ y, conduce igualmente, a un análisis más robusto para tal explicación.

¹⁹Recordando que en esta solución sólo está presente la contribución del término cinético del campo vectorial a la densidad energía del universo.

²⁰En donde a es el número de campos vectoriales e I el número de campos escalares.

²¹Más específicamente, en este caso, la incoherencia sí es debida al signo.

²²Para un análisis más detallado de estas cantidades, véase el apéndice B.

²³Este es un tema de estudio actual, motivado a partir de la elaboración de esta tesis.

Posibilidades de Desarrollo Posterior a la Tesis

4.1. Modelo de *Gauge-flation*

A partir de los análisis realizados para cada modelo inflacionario acerca del nivel de anisotropía estadística y del mismo estudio dinámico del sistema, surgen diferentes posibilidades de desarrollo que podrían generar niveles de anisotropía para estos modelos, consistentes con los valores observados.

Una posibilidad de desarrollo es considerar campos vectoriales masivos en el modelo de *Gauge-flation*. Este hecho se ve reflejado en el término de masa en el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{384}(\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}^a F_a^{\lambda\sigma})^2 + \frac{1}{2}m(t)A_\mu^a A_a^\mu, \quad (4.1)$$

en donde se ha considerado el caso general de que la masa puede ser una función del tiempo o un término de interacción entre los campos.

Si el lagrangiano ya ha sido definido, es necesario estudiar si dicha configuración, la cual debe estar dentro de las posibles, no introduce inestabilidades en el sistema como campos fantasmas [22, 23, 24]. Una vez se haya asegurado la estabilidad del modelo, se pretende estudiar la dinámica inflacionaria mediante la teoría de los sistemas dinámicos para determinar si el atractor métrico corresponde a un fondo de FRW o de Bianchi tipo I, considerando o no la posibilidad de expansión isótropa según sea el caso. Dado que el número de grados de libertad del sistema aumenta en comparación con el modelo original de *Gauge-flation*, estudiar los puntos críticos del sistema mediante la teoría de los sistemas dinámicos hace que el problema se reduzca de manera significativa.

La razón fundamental de incluir masa en este modelo se debe a la presencia de la componente longitudinal del espectro, lo que conduce a que $r_{long} \neq 0$. Según la expresión (2.26), el signo del nivel de anisotropía estadística cuando se considera isotropía estadística es proporcional al término $(r_{long} - 1)$. Para este nuevo caso, su valor dependerá de la razón P_{long}/P_+ , en donde se debe garantizar que $P_{long} > P_+$. De esta manera, este modelo que dentro del contexto de física de partículas es muy atractivo, puede ser considerado nuevamente como posible generador de las estructuras a gran escala de nuestro Universo

observable.

4.2. Modelo de *Hairy-inflation*

Este modelo puede ser estudiado de una manera más general. En las referencias [27, 64] se estudió este modelo cuando el campo vectorial es masivo con un fondo métrico homogéneo e isótropo de (FRW). Por consiguiente, se estudió para este modelo el proceso de producción isótropa de partículas, obteniendo niveles de anisotropía estadística lo suficientemente pequeños en el espectro consistentes con las cotas observacionales. Lo anterior se consigue siempre y cuando las componentes de los espectros sean comparables $P_{long} \simeq P_+$. Una posibilidad, es estudiar el proceso de producción anisótropa de partículas para este modelo, es decir con un fondo homogéneo pero anisótropo de Bianchi tipo I. De esta manera, se considerarán dos efectos que ya han sido estudiados en este trabajo en la generación de anisotropía estadística: las perturbaciones de los campos y la expansión anisótropa (ecuaciones (2.30-2.32)). Igualmente, será necesario calcular las derivadas del número de *e-folds* en un fondo anisótropo para poder calcular de forma completa los niveles de anisotropía y por ende poder compararlos con las observaciones.

Debido a la correlación que existe entre el biespectro y el espectro de las perturbaciones cosmológicas, así como de otras funciones espectrales de orden mayor, la anisotropía estadística en el espectro da origen a efectos de anisotropía en el biespectro y esto a su vez afecta los niveles de no-gaussianidad. Vale la pena recordar que, éstos últimos actúan como discriminantes fuertes entre los diferentes modelos inflacionarios. De esta manera, se pueden sentar algunas bases teórica, a partir de estos estudios, para calcular niveles de no-gaussianidad para modelos inflacionarios vectoriales con expansión anisótropa prolongada.

El Teorema Ergódico

El mecanismo cuántico encargado de la generación de las perturbaciones cosmológicas en la teoría inflacionaria sólo permite predecir la probabilidad del valor de la temperatura en un punto espacial del mapa de perturbaciones para un conjunto de universos. No obstante, sólo tenemos acceso a un único elemento del ensamble, por lo tanto no podemos realizar la respectiva comparación entre la teoría y la observación. Esta dificultad puede ser superada usando el teorema ergódico, el cual establece que el promedio sobre el ensamble de sistemas es equivalente al promedio espacial sobre una única realización del ensamble, nuestro Universo observable.

A continuación, se presenta la construcción matemática del teorema ergódico y las hipótesis físicas en las que se establece. Se define la variable estocástica real $\varphi(x)$ que depende de la coordenada euclidiana D -dimensional¹. Como primera hipótesis, se asume invarianza traslacional de los correladores de n puntos (homogeneidad estadística)

$$\langle \varphi(x_1 + z)\varphi(x_2 + z)\dots\varphi(x_n + z) \rangle = \langle (\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)) \rangle, \quad (\text{A.1})$$

en donde z es una cantidad que denota el monto de la traslación espacial. Como segunda hipótesis, se asume que los φ 's con argumentos muy distantes no están correlacionados. Formalmente, esta condición se expresa como

$$|u \rightarrow \infty| :$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x_1 + u)\varphi(x_2 + u)\dots\varphi(y_1 - u)\varphi(y_2 - u) \rangle &\longrightarrow \langle (\varphi(x_1 + u)\varphi(\mathbf{x}_2 + u)\dots) \rangle \langle \varphi(y_1 - u)\varphi(y_2 - u)\dots \rangle, \\ &= \langle (\varphi(x_1)\varphi(\mathbf{x}_2)\dots) \rangle \langle \varphi(y_1)\varphi(y_2)\dots \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

en donde se ha hecho uso en la última línea de la primera hipótesis y se ha determinado únicamente correlación entre dos conjuntos: el de las x 's y el de las y 's. Por consiguiente, el teorema ergódico se puede enunciar de la siguiente manera: Si el límite de la expresión (A.2) se decae lo suficientemente rápido con respecto a la separación espacial, la diferencia de la raíz cuadrática media entre cualquier producto de las variables $\varphi(x_1 + z)\varphi(x_2 + z)$ promediados en un rango R de valores de z alrededor de un punto arbitrario z_0 y el

¹En donde se ha fijado la coordenada temporal.

promedio de ensambles con productos iguales desaparecen como $R^{-D/2}$ para R grande. Ésto se define como

$$\Delta_R^2(x_1, x_2, \dots) \equiv \left\langle \left(\int d^D z N_R(z) [\varphi(x_1 + z)\varphi(x_2 + z)\dots - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots \rangle] \right)^2 \right\rangle, \quad (\text{A.3})$$

en donde se ha definido la función gaussiana²

$$N_R(z) = \frac{1}{(\sqrt{\pi R})^D} e^{-(z-z_0)^2/R^2}, \quad (\text{A.4})$$

cuya normalización se expresa como

$$\int d^D z N_R(z) = 1. \quad (\text{A.5})$$

Conforme $R \rightarrow \infty$ la raíz cuadrática media $\Delta_R \rightarrow O(R^{-D/2})$. Reemplazando la condición de normalización en la expresión (A.3), y considerando que

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots \rangle = \int d^D z N_R(z) \varphi(x_1)\varphi(x_2), \quad (\text{A.6})$$

entonces

$$\Delta_R^2(x_1, x_2, \dots) \equiv \left\langle \int d^D z N_R(z) \int d^D w N_R(w) [\varphi(x_1 + z)\varphi(x_2 + z)\dots - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots \rangle] [\varphi(x_1 + w)\varphi(x_2 + w)\dots - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots \rangle] \right\rangle. \quad (\text{A.7})$$

Considerando la hipótesis 2, se consigue que

$$\Delta_R^2(x_1, x_2, \dots) \equiv \left\langle \int d^D z N_R(z) \int d^D w N_R(w) [\langle \varphi(x_1 + z)\varphi(x_2 + z)\dots \varphi(x_1 + w)\varphi(x_2 + w)\dots \rangle - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots \rangle^2] \right\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Se considera los cambios de variable $z = v + u$ y $w = v - u$, tal que: $dz^D dw^D = 2^D d^D v d^D u$. De lo anterior, la expresión (A.8) se reduce a

$$\Delta_R^2(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{2}{\pi R^2} \right)^{D/2} \int d^u e^{-2u^2/R^2} [\langle \varphi(x_1 + u)\varphi(x_2 + u)\dots \varphi(x_1 - u)\varphi(x_2 - u)\dots \rangle - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots \rangle^2]. \quad (\text{A.9})$$

En el límite cuando $R \rightarrow \infty$, la expresión anterior

$$\Delta_R^2(x_1, x_2, \dots) \rightarrow 0. \quad (\text{A.10})$$

Finalmente, se consigue

$$\int d^D z N_R(z) \varphi(x_1 + z)\varphi(x_2 + z)\dots = \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots \rangle. \quad (\text{A.11})$$

En esta expresión, se considera el promedio sobre un único elemento del ensamble, considerando todas las posibles traslaciones, es decir, que el promedio sobre el ensamble de

²Este tipo de función es un requerimiento para establecer el teorema ergódico.

universos es equivalente al promedio espacial sobre una única realización del ensamble la cual sí se tiene acceso.

APÉNDICE B

Producción de Partículas en un Fondo Isótropo

Como se observa en las expresiones (2.26,2.30-2.32) se debe calcular la parte isótropa del espectro asociada al campo vectorial. El lagrangiano para un campo vectorial masivo $U(1)$ se expresa como

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}f(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2(\phi)A_\mu A^\mu. \quad (\text{B.1})$$

A partir del principio variacional se obtiene la ecuación de movimiento para el campo vectorial

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_A)}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_A)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Se considera que la contribución de energía del campo vectorial a la densidad de energía del universo es despreciable, de modo que la expansión se puede asumir como isótropa. A partir de lo anterior, se considera la métrica de FRW, en donde la expansión se puede asumir como cuasi de Sitter ($H \approx cte$) durante este período. La ecuación (B.2) se puede escribir según el lagrangiano para el campo vectorial como

$$m_p^2 A^\mu - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} f(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)] = 0, \quad (\text{B.3})$$

o lo que es equivalente

$$[\partial_\mu + \partial_\mu \ln(\sqrt{-g})] f(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) + m^2 a^\nu = 0. \quad (\text{B.4})$$

Haciendo $\nu = 0$ y $\nu = i$, se obtienen las ecuaciones para la componente temporal y espacial respectivamente

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} - \nabla^2 A_t + \frac{(ma)^2}{f} A_t = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$\ddot{\mathbf{A}} + \left(H + \frac{\dot{f}}{f} \right) \dot{\mathbf{A}} + \frac{m^2}{f} \mathbf{A} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Como inflación homogeneiza los campos $\partial_i A_\mu = 0$, esta condición junto con la ecuación (B.5) conlleva a una condición adicional $A_0 = 0$. De aquí que la expresión (B.6) luzca de esa manera.

Se analizan las perturbaciones en los campos vectoriales con el fin de generar un espectro de las perturbaciones en escalas de superhorizonte

$$A_\mu(t, \mathbf{x}) = A_\mu(t) + \delta A_\mu(t, \mathbf{x}). \quad (\text{B.7})$$

Esta perturbación permite que las ecuaciones para las componentes de los campos ahora se expresen como

$$\nabla \cdot \delta \dot{\mathbf{A}} - \nabla^2 \delta A_t + \frac{(ma)^2}{f} \delta A_t = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\delta \ddot{\mathbf{A}} + \left(H + \frac{\dot{f}}{f} \right) \delta \dot{\mathbf{A}} + \frac{m^2}{f} \delta \mathbf{A} - a^{-2} \nabla^2 \delta A = \left(\frac{\dot{f}}{f} - 2\frac{\dot{m}}{m} - 2H \right) \nabla \delta A_t. \quad (\text{B.9})$$

Ahora, escribiendo las perturbaciones en términos de la expansión Fourier

$$\delta A_\mu(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta A_\mu(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{B.10})$$

la expresión (B.8) proporciona la relación

$$\delta A_t = -\frac{i\partial_t(\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{A})}{k^2 + (am)^2/f}, \quad (\text{B.11})$$

que al ser considerada en la expresión (B.9) resulta en

$$\delta \ddot{\mathbf{A}}_k + \left(H + \frac{\dot{f}}{f} \right) \delta \dot{\mathbf{A}}_k + \frac{m^2}{f} \delta \mathbf{A}_k + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \delta \mathbf{A}_k + \left(2H + 2\frac{\dot{m}}{m} - \frac{\dot{f}}{f} \right) \frac{\mathbf{k} \partial_t(\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{A}_k)}{k^2 + (am)^2/f} = 0. \quad (\text{B.12})$$

Así mismo, estas expresiones pueden ser escritas en términos de las componentes trasversal y longitudinal mediante las definiciones

$$\delta A^\parallel \equiv \frac{(\delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{k})}{k}, \quad (\text{B.13})$$

$$\Rightarrow \delta \mathbf{A}^\parallel = \delta A^\parallel \hat{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{k}(\delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{k})}{k^2}, \quad (\text{B.14})$$

$$\delta \mathbf{A}^\perp \equiv \delta \mathbf{A} - \delta \mathbf{A}^\parallel. \quad (\text{B.15})$$

De aquí que

$$\left[\partial_t^2 + \left(H + \frac{\dot{f}}{f} \right) \partial_t + \frac{m^2}{f} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \right] \delta \mathbf{A}^\perp = 0, \quad (\text{B.16})$$

$$\left[\partial_t^2 + \left\{ \left(H + \frac{\dot{f}}{f} \right) + \frac{(2H + \frac{\dot{m}}{m} - \frac{\dot{f}}{f})k^2}{k^2 + (am)^2/f} \right\} \partial_t + \frac{m^2}{f} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \right] \delta \mathbf{A}^\parallel. \quad (\text{B.17})$$

Se define el campo físico $\mathbf{W} = \frac{\mathbf{B}}{a}$ y el campo canónicamente normalizado $\mathbf{B} = \sqrt{f}\mathbf{A}$, de modo que las expresiones (B.16) y (B.17) se puedan reescribir como

$$\left\{ \partial_t^2 + 3H\partial_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 - \frac{\ddot{f}}{f} - \frac{\dot{f}}{f} H + 4H^2 \right\} + \frac{m^2}{f} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \delta \mathbf{W}^\perp, \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\partial_t^2 + \left[3H + \left(2H + 2\frac{\dot{m}}{m} - \frac{\dot{f}}{f} \right) \frac{(k/a)^2}{(k/a)^2 + m^2/f} \right] \partial_t + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 - \frac{\ddot{f}}{f} - \frac{\dot{f}}{f} H + 4H^2 \right] + \right. \\
 & \left. \left(H - \frac{\dot{f}}{2f} \right) \left(2H + 2\frac{\dot{m}}{m} - \frac{\dot{f}}{f} \right) \frac{(k/a)^2}{(k/a)^2 + m^2/f} + \frac{m^2}{f} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \right) \delta \mathbf{W}^{\parallel} = 0, \quad (\text{B.19})
 \end{aligned}$$

B.1. Producción de Partículas

Este proceso permite generar un espectro de las perturbaciones invariante de escala, y por consiguiente determinar la forma funcional de las cantidades f y m . Como primer paso, es necesario elevar a estatus de operador los campos involucrados, lo cual se hace expandiendo en términos de los operadores de creación y destrucción de la perturbación¹

$$\delta \hat{W} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum [e_{\lambda}^*(\mathbf{k}) \hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k}) w_{\lambda}(t, k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + e_{\lambda}^*(\mathbf{k}) \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) w_{\lambda}^*(t, k) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (\text{B.20})$$

en donde $\lambda = L, R, \parallel$, con L y R denotando las componentes transversales con polarizaciones izquierda y derecha respectivamente y \parallel representa la polarización paralela o longitudinal. A partir de la configuración del campo vectorial $A_{\mu} = (0, 0, 0, A_z(t))$ en donde se asume que el vector \mathbf{k} está orientado en la dirección z , los vectores de polarización unitarios se definen como

$$e_L \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0), \quad e_R \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0), \quad e_{\parallel} \equiv (0, 0, 1), \quad (\text{B.21})$$

y las relaciones de conmutación se expresan según

$$[\hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k}), \hat{a}_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (\text{B.22})$$

B.1.1. Componente Transversal de la Perturbación Vectorial

Se asume la forma $f \propto a^{\alpha}$, con α siendo una cantidad real. La ecuación (B.18) puede escribirse según la expresión (B.20) como

$$\ddot{w}_{L,R} + 3H\dot{w}_{L,R} + \left[-\frac{1}{4}(\alpha + 4)(\alpha - 2)H^2 + M^2 + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \right] w_{L,R} = 0, \quad (\text{B.23})$$

en donde se ha definido la masa efectiva $M = \frac{m}{\sqrt{f}}$. Además, esta expresión se puede reescribir a través del tiempo conformal $\tau = -\frac{1}{aH}$ como

$$w_k'' + \left[k^2 + \left(\frac{M^2}{H^2} - \frac{1}{4}(\alpha^2 + 2\alpha)\tau^{-2} \right) \right] w_k = 0. \quad (\text{B.24})$$

Esta ecuación se identifica como la ecuación de Hankel cuya forma es

$$w'' + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{z^2} \right) w = 0. \quad (\text{B.25})$$

¹Esta forma de escribir las perturbaciones es consistente con la condición de realidad $\delta \hat{W}^*(k) = \delta \hat{W}(-k)$.

Dado que $M_* \ll H$,² se identifica que el orden de la función de Hankel es

$$\nu^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + 2\alpha) - \frac{M^2}{H^2} + \frac{1}{4}, \quad (\text{B.26})$$

$$\nu = \pm \frac{1}{2}|\alpha + 1|. \quad (\text{B.27})$$

Se define la cantidad $r \equiv \frac{aM}{k}$, cuyo valor según la condición de campo ligero es $r \ll 1$. La solución general de esta ecuación se expresa mediante la combinación lineal

$$w_{L,R} = \sqrt{-\tau}[c_1(k)H_\nu^{(1)}(-k\tau) + c_2(k)H_\nu^{(2)}(-k\tau)]. \quad (\text{B.28})$$

Usando la condición para el vacío de Bunch-Davis³ [67]

$$\lim_{(k/aH) \rightarrow +\infty} w_{L,R} = \frac{a^{-1}}{\sqrt{2k}} e^{ik/aH}, \quad (\text{B.29})$$

válida para escalas de subhorizonte $k \gg aH$, en donde se puede usar teoría cuántica de campos para un espacio tiempo plano. Comparando esta solución con la proporcionada a través de la condición de Bunch-Davis y considerando que en este límite $H_\nu^{(1)}(k/aH) \rightarrow \sqrt{\frac{2aH}{\pi k}} e^{i(k/aH)} e^{-i(\pi/2)[\nu+1/2]}$ se encuentra que⁴

$$w_{L,R} = \sqrt{-\tau} \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{i\pi/2(\nu+1/2)} H_\nu^{(1)}(k/aH), \quad (\text{B.30})$$

en donde se ha encontrado que $c_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{i\pi/2(\nu+1/2)}$. La solución de la ecuación de Hankel (B.24) en términos del parámetro de Hubble y del factor de escala a es entonces

$$w_{L,R} = \frac{a^{-3/2}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{K}} e^{i\pi/2[\nu+1/2]} H_\nu^{(1)}(k/aH). \quad (\text{B.31})$$

En el otro régimen $k \ll aH$, se tiene que la solución (B.31) puede ser aproximada como

$$\lim_{(k/aH) \rightarrow 0+} w_{L,R} = -\frac{ia^{-3/2}}{2\Gamma(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{H}} e^{i(\pi/2)[\nu+1/2]} \left(\frac{k}{2aH}\right)^{-\nu}, \quad (\text{B.32})$$

en donde se ha considerado que en este límite $H_\nu^{(1)}(k/2aH) \rightarrow -\frac{i\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{k}{2aH}\right)^{-\nu}$ y $\Gamma(\nu) = \frac{\pi}{\Gamma(1-\nu)}$. Finalmente, el espectro de las perturbaciones determinado a partir de la amplitud de las perturbaciones es

$$P_{L,R} = \frac{k}{2\pi^2} \left| \lim_{(k/aH) \rightarrow 0+} w_{L,R} \right|^2 = \frac{4\pi}{[\Gamma(1-\nu)]^2} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{2aH}\right)^{3-2\nu}. \quad (\text{B.33})$$

Se observa según esta ecuación, que para obtener un espectro invariante de escala se requiere que $\nu = 3/2$ y a su vez que $\alpha = -1 \pm 3$ según la ecuación (B.27). Estas condiciones

²El asterisco denota el tiempo a la salida del horizonte. Esta condición se impone para que el espectro no se vea suprimido.

³Con el fin de generar un espectro en escalas de superhorizonte, se va al límite de escalas de subhorizonte (en donde el espacio tiempo es plano) cuya solución se conoce. De aquí se extrae información sobre los valores de las constantes que determinan las condiciones iniciales.

⁴También se ha hecho uso de la relación $H_\nu^{(2)}(k/aH) = H_\nu^{(1)*}(k/aH)$.

proporcionan un espectro invariante de escala para la componente trasversal del campo:

$$P_{L,R} = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (\text{B.34})$$

La función cinética ahora se puede escribir de la forma $f \propto a^2$ o $f \propto a^{-4}$, en donde esta última forma corresponde a un atractor, como se ha indicado en el capítulo 4.

B.1.2. Componente Longitudinal de la Perturbación Vectorial

En este caso se asume $m \propto a^\beta$, en donde β es una constante real. La ecuación (B.19) se puede escribir en términos de las cantidades α y β según las relaciones $f \propto a^\alpha$ y $m \propto a^\beta$ como

$$\ddot{w}_\parallel + \left(3 + \frac{2 - \alpha + 2\beta}{1 + r^2} \right) H \dot{w}_\parallel + \left[-\frac{1}{2}(\alpha - 2) \left(\alpha + 4 + \frac{2 - \alpha + 2\beta}{1 + r^2} \right) H^2 + \left(\frac{k}{a} \right)^2 (1 + r^2) \right] w_\parallel = 0. \quad (\text{B.35})$$

Resulta de utilidad la condición sobre α ; $\alpha = -1 \pm 3$ y la condición de campo ligero parametrizada como $r \ll 1$, para reescribir la expresión indicada arriba como

$$\ddot{w}_\parallel (5 - \alpha + 2\beta) H \dot{w}_\parallel + \left[-\frac{1}{2}(\alpha - 2)(2 - \alpha + 2\beta) H^2 + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \right] w_\parallel = 0. \quad (\text{B.36})$$

Similar al caso trasversal, la condición de Bunch-Davis es

$$\lim_{(k/aH) \rightarrow +\infty} w_\parallel = \gamma \frac{a^{-1}}{\sqrt{2k}} e^{ik/aH}, \quad (\text{B.37})$$

en donde se ha multiplicado por el boost de Lorentz donde se toma un marco de referencia en el que $k = 0$, dado que no hay distinción entre las componentes longitudinales y trasversales, en un marco de referencia en el que $k \neq 0$ [30]. El boost de Lorentz en términos de las variables r es

$$\gamma = \frac{\sqrt{\left(\frac{k}{a} \right)^2 + M^2}}{M} = \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}. \quad (\text{B.38})$$

Considerando $r \ll 1$ dentro del horizonte, el boost de Lorentz se aproxima a $\gamma \simeq 1/r$. Considerando el valor $\alpha = 2$ en la ecuación (B.36) se tiene que

$$\ddot{w}_\parallel + (3 + 2\beta) H \dot{w}_\parallel + \left(\frac{k}{a} \right)^2 w_\parallel = 0. \quad (\text{B.39})$$

Considerando el cambio de variable $w_\parallel = a^{-(3+2\beta)/2} \tilde{w}$, se llega a la ecuación de Bessel

$$\ddot{\tilde{w}} - \frac{(3 + 2\beta)^2}{4} H^2 \tilde{w} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \tilde{w} = 0. \quad (\text{B.40})$$

Definiendo las cantidades $\bar{\nu} = \pm \frac{3+2\beta}{2}$ y $\tilde{t} = Ht$ y considerando expansión de Sitter $a = a_0 e^{H(t-t_0)}$, la ecuación (B.40) ahora se expresa como

$$W'' + \left[\frac{k^2 e^{-2\tilde{t}}}{a^2 H^2} - \bar{\nu}^2 \right] W = 0, \quad (\text{B.41})$$

la cual se identifica con la ecuación de Bessel cuya forma es

$$W'' + (\lambda^2 e^{2z} - \nu^2) W = 0, \quad (\text{B.42})$$

en donde la prima indica la derivada con respecto al tiempo \tilde{t} , cuya solución general se expresa como

$$W = C_1 J_\nu(\lambda) + C_2 J_{-\nu}(\lambda). \quad (\text{B.43})$$

Ahora, expresando la solución en términos de la variable w , se tiene la solución

$$w_{\parallel} = a^{(-3+2\beta)/2} [C_1 J_\nu(k/aH) + C_2 J_{-\nu}(k/aH)]. \quad (\text{B.44})$$

Haciendo el límite cuando $k/H \rightarrow \infty$ en esta solución, con el fin de compararla con la condición de vacío (B.37), y considerando la aproximación

$$\lim_{(k/aH) \rightarrow +\infty} J_\nu(k/aH) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos[x - \pi/2(\bar{\nu} + 1/2)], \quad (\text{B.45})$$

se consigue la solución general

$$w_{\parallel} = a^{-3/2}/r \sqrt{\frac{\pi}{4H}} \frac{e^{i\pi/2(3/2-\bar{\nu})}}{\text{sen}(\pi\bar{\nu})} [J_{\bar{\nu}}(k/aH) - e^{i\pi\bar{\nu}} J_{-\bar{\nu}}(k/aH)], \quad (\text{B.46})$$

en donde $\bar{\nu} = 1/2\sqrt{9 + (2 - \alpha + 2\beta)^2}$. En escalas de superhorizonte $k/H \rightarrow 0$ dicha solución se reduce a

$$\lim_{(k/aH) \rightarrow 0+} w_{\parallel} = -\frac{a^{-3/2}}{\Gamma(1-\bar{\nu})} \left(\frac{H}{M}\right) \sqrt{\frac{\pi}{H}} \frac{e^{i(\pi/2)[\bar{\nu}+3/2]}}{\text{sen}(\pi\bar{\nu})} \left(\frac{k}{2aH}\right)^{1-\bar{\nu}}. \quad (\text{B.47})$$

Entonces, el espectro para esta componente es

$$P_{\parallel} = \frac{16\pi}{\text{sen}^2(\pi\bar{\nu})[\Gamma(1-\bar{\nu})]^2} \left(\frac{H}{M}\right) \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{2aH}\right)^{5-2\bar{\nu}}. \quad (\text{B.48})$$

Para obtener un espectro invariante de escala se requiere que $\bar{\nu} = 5/2$, entonces

$$P_{\parallel} = \left(\frac{H}{M}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2, \quad (\text{B.49})$$

en donde se ha considerado el valor $\Gamma(3/2) = 4\sqrt{\pi}/3$. El valor de $\bar{\nu} = 5/2$ requiere que $\beta = -1/2(3 \pm 5)$ cuyo valor $\beta = -4$ es inaceptable (dado que r decae muy rápido) a diferencia del valor $\beta = 1$ el cual produce un espectro invariante de escala con $m \propto a$.

Ecuaciones de Campo y de Movimiento en el Modelo de *Hairy Inflation*

C.1. Ecuaciones de Campo

El lagrangiano de materia considerado es

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}(\partial_\alpha\phi)(\partial^\alpha\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}f(\phi)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m(\phi)^2 A_\alpha A^\alpha. \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(\partial_\alpha\phi)(\partial_\rho\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}f(\phi)g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) + \frac{1}{2}m(\phi)^2 g^{\rho\alpha} A_\alpha A_\rho. \quad (\text{C.2})$$

Dado que

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M, \quad (\text{C.3})$$

$$\Rightarrow T_{\mu\nu} = (\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - \frac{1}{2}f(\phi)g^{\sigma\beta}F_{\mu\sigma}F_{\nu\beta} + m^2(\phi)A_\mu A_\nu - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(\partial_\alpha\phi)(\partial_\rho\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}f(\phi)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2(\phi)A_\alpha A^\alpha\right), \quad (\text{C.4})$$

cuyas componentes son

$$T_{tt} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - \frac{1}{2}f(\phi)g^{zz}\dot{A}_z^2 - \frac{1}{2}m^2(\phi)g^{zz}A_z^2, \quad (\text{C.5})$$

$$T_{xx} = e^{2\alpha+2\sigma}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) - \frac{1}{2}f(\phi)g^{zz}\dot{A}_z^2 + \frac{1}{2}m^2(\phi)g^{zz}A_z^2\right], \quad (\text{C.6})$$

$$T_{zz} = \frac{1}{2}m^2(\phi)A_z^2 - e^{2\alpha-4\sigma}V(\phi) - \frac{1}{2}f(\phi)\dot{A}_z^2 + \frac{1}{2}e^{2\alpha-4\sigma}\dot{\phi}^2, \quad (\text{C.7})$$

De otra parte, considerando la métrica de Bianchi tipo I (expresión ()) las componentes del tensor de Einstein son

$$G_{tt} = 3\dot{\alpha}^2 - 3\dot{\sigma}^2, \quad (\text{C.8})$$

$$G_{xx} = [-3\dot{\alpha}^2 + 3\dot{\alpha}\dot{\sigma} - 2\ddot{\alpha} + \ddot{\sigma} - 3\dot{\sigma}^2]e^{2\alpha+2\sigma}, \quad (\text{C.9})$$

$$G_{zz} = [-3\dot{\alpha}^2 - 6\dot{\alpha}\dot{\sigma} - 2\ddot{\alpha} - 2\ddot{\sigma} - 3\dot{\sigma}^2]e^{2\alpha-4\sigma}. \quad (\text{C.10})$$

De aquí que las ecuaciones de campo $G_{\mu\mu} = \frac{T_{\mu\nu}}{m_p^2}$, correspondan a

$$\dot{\alpha}^2 - \dot{\sigma}^2 = \frac{1}{3m_p^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - \frac{1}{2}g^{zz}f\dot{A}_z^2 - \frac{1}{2}g^{zz}m^2A_z^2 \right], \quad (\text{C.11})$$

$$\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{3m_p^2} \left[3V(\phi) - \frac{1}{2}g^{zz}f\dot{A}_z^2 - g^{zz}m^2A_z^2 \right], \quad (\text{C.12})$$

$$\ddot{\sigma} + 3\dot{\alpha}\dot{\sigma} = \frac{1}{3m_p^2} \left[-g^{zz}f\dot{A}_z^2 + g^{zz}m^2A_z^2 \right]. \quad (\text{C.13})$$

C.2. Ecuación de Movimiento para el Campo Escalar

Se tiene la ecuación de Euler Lagrange

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0, \quad (\text{C.14})$$

en donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial\phi} &= \sqrt{-g}[-V(\phi) - \frac{1}{4}f'(\phi)g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma} + m(\phi)m'(\phi)A_\alpha A^\alpha], \\ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= \sqrt{-g}g^{\rho\mu}\partial_\rho\phi. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo y reemplazando las cantidades respectivas en la ecuación de Euler Lagrange, se obtiene

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}\dot{\phi} + V'(\phi) + \frac{1}{2}f'(\phi)g^{zz}\dot{A}_z^2 - mm'(\phi)g^{zz}A_z^2. \quad (\text{C.16})$$

Considerando las definiciones del backreaction

$$B_{A-f} \equiv \frac{1}{2}g^{zz}f'\dot{A}_z^2, \quad (\text{C.17})$$

$$B_{A-m} \equiv -g^{zz}mm'A_z^2, \quad (\text{C.18})$$

con $B_A \equiv B_{A-f} + B_{A-m}$, se consigue la ecuación de movimiento para el campo escalar

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}\dot{\phi} + V'(\phi) + B_A. \quad (\text{C.19})$$

C.3. Ecuación de Movimiento para el Campo Vectorial

Se considera la ecuación

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0, \quad (\text{C.20})$$

en donde

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial A_\nu} = -\sqrt{-g}f(\phi)g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}F_{\rho\sigma}, \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \sqrt{-g}m^2(\phi)g^{\rho\nu}A_\rho. \quad (\text{C.22})$$

Realizando la derivada respectiva y reemplazando las cantidades encontradas en la ecuación de Euler Lagrange, se obtiene

$$m^2(\phi)A_z + 3\dot{\alpha}f(\phi)\dot{A}_z + f'(\phi)\dot{A}_z + (-2\dot{\alpha} + 4\dot{\sigma})f(\phi)\dot{A}_z + f(\phi)\ddot{A}_z. \quad (\text{C.23})$$

Finalmente, la ecuación de movimiento para el campo vectorial está dada por

$$\ddot{A}_z + \left(\dot{\alpha} + 4\dot{\sigma} - \frac{\dot{f}}{f} \right) \dot{A}_z + \frac{m^2}{f} A_z. \quad (\text{C.24})$$

Teoría de los Sistemas Dinámicos

Definición 1: Un punto singular de un sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{D.1}$$

es un punto $\bar{x} \in R^n$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

Definición 2: Sea \bar{x} un punto singular del sistema autónomo (D.1). Se dice que dicho punto es un punto hiperbólico singular si $Re(\lambda_i) \neq 0$ para todos los valores propios λ_i del Jacobiano del campo vector $f(\bar{x})$. De lo contrario, el punto es llamado no-hiperbólico¹. El análisis cualitativo del sistema dinámico inicia con estudiar el comportamiento de las soluciones cerca a los puntos críticos o en una vecindad. El proceso de determinar dicho comportamiento se basa en estudiar el sistema de ecuaciones linealizado en los puntos singulares [36, 37]. Se considera las perturbaciones alrededor de los puntos críticos para determinar la estabilidad de las soluciones

$$x = x_c + u, \quad y = y_c + v, \quad \Sigma = \Sigma_c + w, \quad z = z_c + a, \quad s = s_c + b. \tag{D.2}$$

Introduciendo dichas soluciones y considerando únicamente perturbaciones lineales se llega al sistema de ecuaciones linealizado

$$\frac{d}{d\alpha} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ a \\ b \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ a \\ b \end{pmatrix}, \tag{D.3}$$

¹En este trabajo se considera sólo puntos de tipo hiperbólico.

en donde M es la matriz con coeficientes constantes² que se construye a partir de los puntos críticos, y, cuya solución está dada por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} e^{m_1\alpha} + \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{m_2\alpha} + \dots, \quad (\text{D.4})$$

en donde u_i, v_i, w_i, a_i, b_i son las constantes de integración del sistema y el índice i denota la dimensión del subsistema en consideración. Si los valores propios de la matriz son todos positivos, todas las posibles soluciones en la vecindad $\bar{x} = 0$ divergen de este punto. De lo contrario, si todos los valores propios tienen parte real negativa, entonces todas las soluciones convergen en el punto singular. De aquí se establece la siguiente equivalencia topológica en la vecindad del punto singular entre el sistema de ecuaciones no lineales y el sistema linealizado: si todos los valores propios del Jacobiano del campo vector para un sistema de ecuaciones no lineales tienen parte real positiva, éste se clasifica como un punto fuente y si todos los valores propios tienen parte real negativa el punto se clasifica como un punto de sumidero.

En la mayoría de los casos los valores propios del sistema linealizado tendrán una mezcla de parte real positiva, negativa o cero. Por consiguiente, el espacio de fase R^n está generado por los valores propios de M el cual se divide en tres subespacios distintos: subespacio estable $E^e = \text{gen}(e_1, e_2, \dots, e_n)$, subespacio inestable: $E^i = \text{gen}(i_1, i_2, \dots, i_n)$ y subespacio central $E^c = \text{gen}(c_1, c_2, \dots, c_n)$, en donde e_i son los vectores propios cuya valores propios tienen parte real negativa, i_i son aquellos vectores propios con valores propios positivos y c_i son los vectores con valores propios igual a cero. Las trayectorias en el subespacio estable tienden asintóticamente al punto singular en el futuro y aquellas orbitas en el subespacio inestable tienden asintóticamente al punto singular en el pasado. Para el caso no lineal la equivalencia topológica sólo se aplica para valores propios diferentes de cero³. Aquí, el espacio de fase se divide de nuevo en subespacios estables e inestables con direcciones tangentes a los subespacios del sistema linealizado E^e y E^i respectivamente.

²Para el modelo en consideración, éste no es necesariamente el caso. Se verá que puede existir una dependencia temporal de los puntos críticos.

³El comportamiento de este subespacio y por ende del sistema no lineal puede ser determinado por técnicas más sofisticadas como el teorema de la variedad central o la teoría de formas centrales [68].

Conclusiones

1. En este trabajo se consideró a modo de conjetura, la equivalencia entre expansión anisótropa y no invarianza ante rotaciones espaciales de los correladores de n puntos de las perturbaciones de los campos, lo que implica que si todos los correladores son invariantes ante rotaciones espaciales la expansión es isotropa. Igualmente, se obtuvo la equivalencia entre expansión isotropa e invarianza ante rotaciones espaciales de los correladores de n puntos de las perturbaciones de los campos, en donde los correladores asociados a las perturbaciones vectoriales son construidos a partir de las cantidades escalares que acompañan los respectivos vectores de polarización.
2. A través del formalismo δN en donde se consideró el item 1, se hizo un estudio general de las contribuciones de las perturbaciones de múltiples campos escalares y vectoriales y de la expansión anisótropa a la generación de anisotropía estadística en ζ . Como primer caso, se asumió que los correladores de dos puntos de las perturbaciones de los campos eran invariantes ante rotaciones espaciales (isotropía estadística). De esta consideración, se obtuvo una expresión para el nivel de anisotropía estadística denotado por g_ζ^a (ecuación (2.26)) la cual determina la forma del espectro de la perturbación en la curvatura ζ de acuerdo con la parametrización (1.11). Esta expresión funcionalmente es similar a la encontrada en la referencia [34]; sin embargo, en nuestro caso se obtuvo tantos niveles de anisotropía como campos vectoriales involucrados (dado que a actúa como un contador). De otra parte, al considerar que los correladores de los campos no son invariantes ante rotaciones espaciales, dado que en este caso la expansión es anisótropa, se obtuvo una nueva forma para el espectro de ζ (ecuación (2.29)) y a partir de ésta, se observan tres expresiones para el nivel de anisotropía estadística las cuales están asociadas con tres direcciones preferenciales, ecuaciones (2.30-2.32). Las dos primeras expresiones están determinadas por la naturaleza de los campos presentes (escalar y vectorial) y la restante es similar a la encontrada en el primer caso (cuando se tiene isotropía estadística) expresión (2.26). Sin embargo, es necesario aclarar que para este caso, las derivadas de N dependen de un fondo anisótropo (métrica de Bianchi tipo I) y no de la métrica de FRW. Las expresiones encontradas en esta tesis nunca antes habían sido encontradas en la literatura y sientan unas bases teóricas para el estudio de la no gaussianidad y de la anisotropía estadística cuando se consideran primer y segundo orden en la teoría de perturbaciones cosmológicas.
3. Al aplicar los resultados mostrados en el item 2. al modelo inflacionario de *Gauge-flation* se encontró que dicho modelo genera un nivel de anisotropía $g_\zeta = -1$, resultando en todo sentido inconsistente con el valor observado $g_\zeta = 0.290 \pm 0.031$

reportado en la referencia [8]. Por consiguiente, este modelo es descartado como generador de las estructuras a gran escala.

4. A partir de los resultados obtenidos en esta tesis (expresión (2.32)), se concluye que el origen del signo negativo del nivel de anisotropía generado por el modelo de *Hairy inflation* se debe a que el campo vectorial en este modelo es sin masa $r_{long} = 0$. Esta afirmación la respalda el hecho que las derivadas de N están elevadas al cuadrado y que los espectros sean siempre definidos positivamente.
5. Estos últimos resultados, también dan lugar a nuevas propuestas que derivan en estudiar estos modelos cuando los campos vectoriales son masivos. Esta consideración es una condición necesaria como lo indican nuestros resultados, para obtener niveles de anisotropía coherentes con la observación.
6. Los espectros (2.25) y (2.29) indican que existen múltiples direcciones preferentes determinadas por el número de campos vectoriales y escalares presentes, además de la dirección determinada por \hat{N}^a . Este hecho, es inconsistente con la parametrización (1.11) en la que sólo consideran un campo vectorial y por ende una única dirección preferente, lo cual no debe ser necesariamente así. Lo anterior, es un llamado que la teoría hace a la observación, sobre la parametrización a partir de un único campo vectorial, la cual, como se ha mostrado no es la única posibilidad.
7. Por último, se estudió la dinámica inflacionaria del modelo *Hairy inflation* a través de la teoría de los sistemas dinámicos. Allí se encontró que el atractor del sistema, mas específicamente $x_c = -\frac{2}{1}$ (caso III), es coherente con las condiciones necesarias para obtener un espectro casi invariante de escala de las perturbaciones vectoriales $f \propto a^{-4}$, cuando el estudio de la producción de partículas es isótropo [27]. Además, se encontró al igual que en la referencia [25] que la cantidad de expansión anisótropa Σ es del orden del parámetro de densidad de energía $R \ll 1$, mostrando que este modelo genera un período inflacionario con expansión anisótropa prolongada y coherente con las cotas observacionales $|\frac{\Sigma}{H}| < 0.012$ [66].

Bibliografía

- [1] A. E. Gumrukcuoglu, B. Himmetoglu, and M. Peloso. Scalar-Scalar, Scalar-Tensor, and Tensor-Tensor Correlators from Anisotropic Inflation. *Phys.Rev.*, D81:063528, 2010.
- [2] D. H. Lyth and A. R. Liddle. *The Primordial Density Perturbation. Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [3] A. H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356, 1981.
- [4] D. H. Lyth, K. A. Malik, and M. Sasaki. A General proof of the conservation of the curvature perturbation. *JCAP*, 0505:004, 2005.
- [5] V. F. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [6] J. Hoftuft, H. K. Eriksen, A. J. Banday, K. M. Gorski, F. K. Hansen, et al. Increasing evidence for hemispherical power asymmetry in the five-year WMAP data. *Astrophys.J.*, 699:985–989, 2009.
- [7] P. K. Samal, R. Saha, P. Jain, and J. P. Ralston. Signals of Statistical Anisotropy in WMAP Foreground-Cleaned Maps. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 396:511, 2009.
- [8] N. E. Groeneboom, L. Ackerman, I. K. Wehus, and H. K. Eriksen. Bayesian analysis of an anisotropic universe model: systematics and polarization. *Astrophys.J.*, 722:452–459, 2010.
- [9] C. Armendariz-Picon and L. Pekowsky. Bayesian Limits on Primordial Isotropy Breaking. *Phys.Rev.Lett.*, 102:031301, 2009.
- [10] D. Hanson and A. Lewis. Estimators for CMB Statistical Anisotropy. *Phys.Rev.*, D80:063004, 2009.
- [11] F. K. Hansen, A. J. Banday, K. M. Gorski, H. K. Eriksen, and P. B. Lilje. Power Asymmetry in Cosmic Microwave Background Fluctuations from Full Sky to Sub-degree Scales: Is the Universe Isotropic? *Astrophys.J.*, 704:1448–1458, 2009.
- [12] N. Groeneboom and H. K. Eriksen. Bayesian analysis of sparse anisotropic universe models and application to the 5-yr WMAP data. *Astrophys.J.*, 690:1807–1819, 2009.

-
- [13] E. Komatsu et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys.J.Suppl. Ser.*, 192:18, 2011.
- [14] D. Hanson, A. Lewis, and A. Challinor. Asymmetric Beams and CMB Statistical Anisotropy. *Phys.Rev.*, D81:103003, 2010.
- [15] A. Golovnev, V. Mukhanov, and V. Vanchurin. Vector Inflation. *JCAP*, 0806:009, 2008.
- [16] C. G. Boehmer and D. F. Mota. CMB Anisotropies and Inflation from Non-Standard Spinors. *Phys.Lett.*, B663:168–171, 2008.
- [17] C. Germani and A. Kehagias. P-nflation: Generating Cosmic Inflation with p-forms. *JCAP*, 0903:028, 2009.
- [18] K. Dimopoulos. Can a vector field be responsible for the curvature perturbation in the Universe? *Phys.Rev.*, D74:083502, 2006.
- [19] A. Maleknejad and M. M. Sheikh-Jabbari. Gauge-flation: Inflation From Non-Abelian Gauge Fields. arXiv:1102.1513 [astro-ph].
- [20] A. A. Starobinskii. Isotropization of arbitrary cosmological expansion given an effective cosmological constant. *JETP Letters*, 37:66–69, 1983.
- [21] R. M. Wald. Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant. *Phys.Rev.*, D28:2118–2120, 1983.
- [22] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso. Instability of anisotropic cosmological solutions supported by vector fields. *Phys.Rev.Lett.*, 102:111301, 2009.
- [23] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso. Instability of the ACW model, and problems with massive vectors during inflation. *Phys.Rev.*, D79:063517, 2009.
- [24] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso. Ghost instabilities of cosmological models with vector fields nonminimally coupled to the curvature. *Phys.Rev.*, D80:123530, 2009.
- [25] M. Watanabe, S. Kanno, and Jiro Soda. Inflationary Universe with Anisotropic Hair. *Phys.Rev.Lett.*, 102:191302, 2009.
- [26] K. Dimopoulos, M. Karčiauskas, and J. M. Wagstaff. Vector Curvaton without Instabilities. *Phys.Lett.*, B683:298–301, 2010.
- [27] K. Dimopoulos, M. Karčiauskas, and J. M. Wagstaff. Vector Curvaton with varying Kinetic Function. *Phys.Rev.*, D81:023522, 2010.
- [28] M. Watanabe, S. Kanno, and Jiro Soda. The Nature of Primordial Fluctuations from Anisotropic Inflation. *Prog.Theor.Phys.*, 123:1041–1068, 2010.
- [29] C. Armendariz-Picon, N. F. Sierra, and Jaume Garriga. Primordial Perturbations in Einstein-Aether and BPSH Theories. *JCAP*, 1007:010, 2010.
- [30] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [31] A. A. Starobinskii. Multicomponent de Sitter (inflationary) stages and the generation of perturbations. *JETP Letters*, 42:152, August 1985.

-
- [32] M. Sasaki and E. D. Stewart. A General analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation. *Prog.Theor.Phys.*, 95:71–78, 1996.
- [33] D. H. Lyth and Y. Rodriguez. The Inflationary prediction for primordial non-Gaussianity. *Phys.Rev.Lett.*, 95:121302, 2005.
- [34] K. Dimopoulos, M. Karciauskas, D. H. Lyth, and Y. Rodriguez. Statistical anisotropy of the curvature perturbation from vector field perturbations. *JCAP*, 0905:013, 2009.
- [35] K. Dimopoulos and M. Karciauskas. Non-minimally coupled vector curvaton. *JHEP*, 0807:119, 2008.
- [36] J. Wainwright and G. F. R. Ellis. *Dynamical Systems in Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [37] A. A. Coley. *Dynamical Systems in Cosmology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2010.
- [38] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, California, 2003.
- [39] C. A. Valenzuela-Toledo, Y. Rodriguez, and J. P. Beltran Almeida. Feynman-like Rules for Calculating n-Point Correlators of the Primordial Curvature Perturbation. *JCAP*, 1110:020, 2011.
- [40] Heiner R.S. Cogollo, Y. Rodriguez, and Cesar A. Valenzuela-Toledo. On the Issue of the zeta Series Convergence and Loop Corrections in the Generation of Observable Primordial Non-Gaussianity in Slow-Roll Inflation. Part I: The Bispectrum. *JCAP*, 0808:029, 2008.
- [41] L. R. Abramo and T. S. Pereira. Testing gaussianity, homogeneity and isotropy with the cosmic microwave background. *Adv.Astron.*, 2010:378203, 2010.
- [42] H. K. Eriksen, A. J. Banday, K. M. Gorski, F. K. Hansen, and P. B. Lilje. Hemispherical power asymmetry in the three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe sky maps. *Astrophys.J.*, 660:L81–L84, 2007.
- [43] H. K. Eriksen, F. K. Hansen, A. J. Banday, K. M. Gorski, and P. B. Lilje. Asymmetries in the Cosmic Microwave Background anisotropy field. *Astrophys.J.*, 605:14–20, 2004.
- [44] F. K. Hansen, A. J. Banday, and K. M. Gorski. Testing the cosmological principle of isotropy: Local power spectrum estimates of the WMAP data. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 354:641–665, 2004.
- [45] C. Gordon. Broken Isotropy from a Linear Modulation of the Primordial Perturbations. *Astrophys.J.*, 656:636–640, 2007.
- [46] A. L. Erickcek, M. Kamionkowski, and S. M. Carroll. A Hemispherical Power Asymmetry from Inflation. *Phys.Rev.*, D78:123520, 2008.
- [47] L. Ackerman, S. M. Carroll, and M. B. Wise. Imprints of a Primordial Preferred Direction on the Microwave Background. *Phys.Rev.*, D75:083502, 2007.
- [48] S. Karlin and H. M. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, 1975.

-
- [49] E. F. Bunn and M. J. White. The Four year COBE normalization and large scale structure. *Astrophys.J.*, 480:6–21, 1997.
- [50] J. Smidt, A. Amblard, A. Cooray, A. Heavens, D. Munshi, and P. Sierra. A Measurement of Cubic-Order Primordial Non-Gaussianity (g_{NL} and τ_{NL}) With WMAP 5-Year Data. arXiv:1001.5026 [astro-ph].
- [51] E. Komatsu and D. N. Spergel. Acoustic signatures in the primary microwave background bispectrum. *Phys.Rev.*, D63:063002, 2001.
- [52] N. Kogo and E. Komatsu. Angular trispectrum of cmb temperature anisotropy from primordial non-gaussianity with the full radiation transfer function. *Phys.Rev.*, D73:083007, 2006.
- [53] A. Cooray. 21-cm Background Anisotropies Can Discern Primordial Non-Gaussianity. *Phys.Rev.Lett.*, 97:261301, 2006.
- [54] A. Cooray, C. Li, and A. Melchiorri. The trispectrum of 21-cm background anisotropies as a probe of primordial non-Gaussianity. *Phys.Rev.*, D77:103506, 2008.
- [55] A. R. Pullen and M. Kamionkowski. Cosmic Microwave Background Statistics for a Direction-Dependent Primordial Power Spectrum. *Phys.Rev.*, D76:103529, 2007.
- [56] C. T. Byrnes, K. Koyama, M. Sasaki, and D. Wands. Diagrammatic approach to non-Gaussianity from inflation. *JCAP*, 0711:027, 2007.
- [57] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, Inc., 1972.
- [58] A. Maleknejad and M.M. Sheikh-Jabbari. Non-Abelian Gauge Field Inflation. *Phys.Rev.*, D84:043515, 2011.
- [59] A. Maleknejad, M. M. Sheikh-Jabbari, and Jiro Soda. Gauge-flation and Cosmic No-Hair Conjecture. *JCAP*, 1201:016, 2012.
- [60] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [61] C. Nieto. Inflación Vectorial a Partir de Campos de Gauge no Abelianos. *Trabajo de grado, Universidad Industrial de Santander*, 2012.
- [62] M. Karčiauskas. The Primordial Curvature Perturbation from Vector Fields of General non-Abelian Groups. *JCAP*, 1201:014, 2012.
- [63] T. R. Dulaney and M. I. Gresham. Primordial Power Spectra from Anisotropic Inflation. *Phys.Rev.*, D81:103532, 2010.
- [64] J. M. Wagstaff and K. Dimopoulos. Particle Production of Vector Fields: Scale Invariance is Attractive. *Phys.Rev.*, D83:023523, 2011.
- [65] Andrew R. Liddle and David H. Lyth. The Cold dark matter density perturbation. *Phys.Rept.*, 231:1–105, 1993.
- [66] L. Campanelli, P. Cea, G.L. Fogli, and A. Marrone. Testing the Isotropy of the Universe with Type Ia Supernovae. *Phys.Rev.*, D83:103503, 2011.

-
- [67] T. S. Bunch and P. C. W. Davies. Quantum Field Theory in the Sitter Space: Renormalization By Point-Splitting. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 360:117, 1978.
- [68] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, New York, 1990.
- [69] K. A. Malik and D. Wands. Cosmological perturbations. *Phys.Rept.*, 475:1–51, 2009.