
MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN ESPACIO TIEMPOS ESTÁTICOS Y ESTACIONARIOS DE ELECTROVACÍO

CÉSAR ALONSO VALENZUELA TOLEDO



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
GIRG

MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN ESPACIO TIEMPOS ESTÁTICOS Y ESTACIONARIOS DE ELECTROVACÍO

CÉSAR ALONSO VALENZUELA TOLEDO

Director
Dr. JOSÉ DAVID SANABRIA GÓMEZ



Trabajo de grado sometido a la Escuela de Física de la
Universidad Industrial de Santander para optar al título de
Magister en Física

Abril 2008

*A la memoria de mi abuelo,
Juan Evangelista.*

*A mis padres,
Hilda y Juan Manuel.*

A mi tesorito, Juan Camilo.

César Alonso Valenzuela Toledo.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

A mi familia.

Al Dr. José David Sanabria Gómez, director del trabajo.

A los Doctores: Carlos Arturo Ramírez, Yeinzon Rodriguez y Guillermo Alfonso González.

A todos los integrantes del GIRG.

TÍTULO : MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN ESPACIO TIEMPOS ESTÁTICOS Y ESTACIONARIOS DE ELECTROVACÍO *.

AUTOR : VALENZUELA TOLEDO, César Alonso **.

PALABRAS CLAVES : Órbitas de partículas, Soluciones exactas, Estrellas de neutrones, Campos eléctricos y magnéticos, Relatividad y gravitación.

DESCRIPCIÓN : Se estudia el movimiento de partículas cargadas en presencia de una combinación de campos gravitacionales y electromagnéticos, en el marco de la relatividad general. Para el trabajo se utilizan dos soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell: La solución conocida como el dipolo magnético masivo de Bonnor [24], que representa una fuente estática con campo magnético y la solución de Manko et al [25], que ha sido presentada como el campo exterior de estrellas de neutrones rotantes.

En cada caso se analiza la estructura del potencial efectivo para el movimiento radial de las partículas en el plano ecuatorial, que permite estudiar la naturaleza de las órbitas y su estabilidad. También se realiza la integración numérica de las ecuaciones de movimiento, con el fin de determinar la forma exacta de las trayectorias de las partículas en el plano ecuatorial de la fuente central. Además se investiga la influencia de cada uno de los parámetros de la solución, tanto en el potencial efectivo como en la trayectoria de las partículas.

Se encuentra que la presencia del campo magnético incrementa el rango de órbitas estables, permite encontrar órbitas de este tipo en regiones donde antes no existían y regulariza el potencial efectivo. Las trayectorias de las partículas también se ven modificadas, resultando en la mayoría de los casos movimiento de Larmor.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, José David Sanabria Gómez (Director).

TITLE : MOTION OF CHARGED PARTICLES IN STATIONARY AND STATIC ELECTROVACUUM SPACETIMES *.

AUTHOR : VALENZUELA TOLEDO, César Alonso **.

KEY WORDS : Particles orbits, Exact solutions, Neutron stars, Electric and magnetic fields, Relativity and gravitation.

DESCRIPTION : Motion of charged particles in presence of gravitational and electromagnetic field is studied, by using two exact solutions of the Einstein-Maxwell equations. These solutions are: the Bonnor's solution [24] that represent a massive magnetic dipole and the Manko's et al solution [25], it is able to describe the exterior field of a slowly or rapidly rotating neutron star with a poloidal magnetic field. These solutions have some characteristics that make them suitable to describe some physical objects such as neutron stars.

For each case, an effective potential is studied in order to analyze the nature of the orbits and its stability. The numerical integration of the equations of motion is performed for determining the exact shape form of trajectories of particles in the equatorial plane of the central source. In addition the influence of each one of the parameters of the solution is studied, such as in the effective potential as in the trajectory of particles.

It is found that the presence of the magnetic field increases the range of stable orbits, it stabilizes orbits originally unstable and the potential is regularized. The trajectories of charged particles are modified resulting in most of the cases Larmor motion.

*Work of Degree.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, José David Sanabria Gómez (Director).

TABLA DE CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	1
INTRODUCCIÓN	1
1. MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN RELATIVIDAD GENERAL	4
1.1. ECUACIONES DE EINSTEIN-MAXWELL	4
1.2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO	6
2. MOVIMIENTO EN LA SOLUCIÓN DE BONNOR	8
2.1. DIPOLO MAGNÉTICO MASIVO DE BONNOR	8
2.2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO	9
2.2.1. Influencia del parámetro μ	10
2.2.2. Influencia de la masa m de la fuente	13
2.3. ÓRBITAS CIRCULARES	13
2.4. INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES	14
3. MOVIMIENTO EN LA SOLUCIÓN DE MANKO	20
3.1. SOLUCIÓN DE MANKO	20
3.2. ÓRBITAS EN EL PLANO ECUATORIAL	22

3.3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES	25
4. CONCLUSIONES	32
REFERENCIAS	34

LISTA DE FIGURAS

2.1. Potencial efectivo (2.15) para una partícula de carga $e = \pm 15,259$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [24]. Los parámetros físicos son $m = 2,215$, $\mu = 4,476$, $l = 3$. La línea inferior muestra el potencial efectivo para $\mu = 0$	11
2.2. V_{eff} contra x para los mismos valores de m , μ y l de la figura 2.1. En este caso se tiene $e = \pm 2,045$	11
2.3. Nuevamente V_{eff} contra x , en este caso se ha tomado $e = \pm 45,776$	11
2.4. V_{eff} para una carga $e = 45,776$. Se tomaron los parámetros físicos $m = 2,215$, $l = 15$, $e = 45,78$. Cada curva se construye con un valor diferente del parámetro μ	12
2.5. V_{eff} para una carga $e = 24,41$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [24]. Los parámetros físicos son $\mu = 5,49$, $l = 12,5$. La masa esta dada en masas solares.	13
2.6. Gráfica del potencial efectivo (2.15) como función de x . Los parámetros físicos son $m = 2,215$, $e = 15,256$, $\mu = 4,476$, $l = 11,764$	17
2.7. Vista de las órbitas de una partícula cargada positivamente moviéndose en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [24]. Se ha tomado $m = 2,215$, $e = 15,256$, $\mu = 4,476$, $l = 11,764$, $E = 0,710$, $x_0 = 2,714$, $\dot{x}_0 = 0$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,022$	17
2.8. Similar a la figura 2.7, pero con $E = 0,740$, $x_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,067$ y $\dot{\varphi}_0 = 0$	17
2.9. Similar a la figura 2.7, pero con $E = 0,838$, $x_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$, y $\dot{x}_0 = 0,182$ y $\dot{\varphi}_0 = 0$	17

-
- 2.10. Similar a la figura 2.7 pero con $E = 0,925$, $x_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,248$ y $\dot{\varphi}_0 = 0$ 17
- 2.11. Gráfica del potencial (2.15) efectivo con parámetros físicos $m = 2,215$, $e = 45,776$, $\mu = 0,559$, $l = 5$ 18
- 2.12. Similar a la figura 2.13, pero con $E = 1,356$ y condiciones iniciales $x_0 = 1,13$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 2,878$ y $\dot{\varphi}_0 = -2,132$ 18
- 2.13. Similar a la figura 2.10, pero con parámetros físicos $m = 2,215$, $e = 45,776$, $\mu = 0,559$, $l = 5$, $E = 0,675$ y condiciones iniciales $x_0 = 4$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,202$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,047$ 18
- 2.14. Potencial efectivo (2.15) correspondiente a los parámetros $m = 2,215$, $e = \pm 15,256$, $\mu = \pm 17,293$, $l = 9,96$ y $e = \pm 15,256$, $\mu = \mp 17,293$, $l = -9,96$ 19
- 2.15. Vista de las órbitas de una partícula cargada. Los parámetros físicos son $m = 2,215$, $e = \pm 15,256$, $\mu = \pm 17,293$, $l = 9,96$, $E = 0,946$ y las condiciones iniciales $x_0 = 3,5$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,025$ y $\dot{\varphi}_0 = 0$ 19
- 2.16. Similar a la figura 2.15. Los parámetros que cambian son $e = \pm 15,256$, $\mu = \mp 17,293$ y $l = -9,96$ 19
- 3.1. Potencial efectivo (3.6) en función de x , para una partícula con carga $e = \pm 15,26$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [25]. Los valores numéricos son: $m = 2,215$, $a = 1,5$, $b = 0$, $\mu = 0$, $l = 5$ 24
- 3.2. Potencial efectivo para los mismos valores de m , a , e , b y l de la figura 3.1. En este caso se ha tomado $\mu = 65,10$ 24
- 3.3. Potencial efectivo (3.6) en función de x , para una partícula con carga $e = \pm 24,414$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [25]. Los valores numéricos son: $m = 2,215$, $a = 1,2$, $b = 0,5$, $\mu = 9,356$, $l = 5$ 24
- 3.4. V_{eff} para una carga $e = 15,259$ y momento angular $l = 5$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [25]. Los parámetros físicos son $\mu = 6,51$, $b = 1$, $m = 2,126$ 25
- 3.5. V_{eff} para una carga $e = 15,259$ y momento angular $l = 12,5$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [25]. Los parámetros físicos son $\mu = 6,510$, $m = 2,215$, $a = 1,1$ 25
- 3.6. Gráfica del potencial efectivo (3.6) como función de x . Los parámetros físicos son $m = 2,215$, $e = 15,259$, $\mu = 6,510$, $l = 10$, $a = 2$, $b = 0$ 27

-
- 3.7. Órbita circular de una partícula cargada positivamente. Se ha tomado $m = 2,215$, $e = 15,259$, $\mu = 6,510$, $l = 10$, $a = 2$, $b = 0$, $E = 0,0,88$, $x_0 = 1,486$, $\dot{x}_0 = 0$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,004$ 27
- 3.8. Órbita acotada en sentido de las manecillas del reloj aunque la partícula gira en sentido contrario. Se han fijado los valores numéricos: $E = 0,90$, $x_0 = 1,4$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,0,017$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,004$ 27
- 3.9. Órbita acotada que corresponde a los valores numéricos: $E = 0,92$, $x_0 = 2,1$, $\varphi_0 = 0$, y $\dot{x}_0 = 0,016$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,165$ 27
- 3.10. Nuevamente una órbita acotada. Se ha tomado $E = 0,94$, $x_0 = 2$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,031$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,017$. EL sentido de giro de la partícula en su órbita es el mismo de las figuras 3.8 y 3.9. 27
- 3.11. Potencial efectivo (3.6) como función de x . Los parámetros físicos son $e = 45,776$, $l = 17$, $\mu = 6,510$, $m = 2,067$, $a = 1,5$, $b = 3$ 28
- 3.12. Órbita circular. Se ha tomado $e = 45,776$, $l = 17$, $\mu = 6,510$, $m = 2,067$, $a = 1,5$, $b = 3$, $E = 0,832$, $x_0 = 9,45$, $\dot{x}_0 = 0$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,014$ 28
- 3.13. Órbita acotada con valores numéricos: $E = 0,880$, $x_0 = 12$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,101$ y $\dot{\varphi}_0 = 002$ 28
- 3.14. Órbita acotada que corresponde a los valores numéricos: $E = 0,940$, $x_0 = 14$, $\varphi_0 = 0$, y $\dot{x}_0 = 0,178$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,006$ 28
- 3.15. Órbita acotada. Se ha tomado $E = 0,980$, $x_0 = 11,45$, $\dot{x}_0 = 0,311$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,0002$. 28
- 3.16. Gráfica del potencial efectivo (3.6) como función de x . Los parámetros físicos son $e = -45,778$, $l = 3$, $m = 2,067$, $\mu = 16,683$, $a = -1,2$, $b = -1,7$ 29
- 3.17. Órbita acotada que se desvía ligeramente de una órbita circular. Se ha tomado $e = -45,778$, $l = 3$, $m = 2,067$, $\mu = 16,683$, $a = -1,2$, $b = -1,7$, $E = 0,0,985$, $x_0 = 11$, $\dot{x}_0 = 0,004$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,0014$ 29
- 3.18. Órbita acotada. Los valores numéricos son: $E = 0,990$, $x_0 = 12$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,012$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,0011$ 29
- 3.19. Nuevamente una órbita acotada, en esta ocasión con $E = 0,995$, $x_0 = 11$, $\varphi_0 = 0$, y $\dot{x}_0 = 0,017$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,0014$. Obsérvese de que a pesar de considerarse una partícula cargada en un campo magnético, el movimiento resultante no es de Larmor, como en las figuras 3.8 - 3.10 y 3.13 - 3.15] 29

-
- 3.20. Potencial efectivo (3.6) como función de x . Se ha tomado $e = 45,776$, $l = 10$, $m = 2,067$, $\mu = 6,510$, $a = 1,5$, $b = 0$ 30
- 3.21. Órbita acotada. Los valores numéricos son $e = 45,776$, $l = 10$, $m = 2,067$, $\mu = 6,510$, $a = 1,5$, $b = 0$, $E = 0,937$, $x_0 = 5,3$, $\dot{x}_0 = 0,008$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,003$. . . 30
- 3.22. Nuevamente una órbita acotada, se ha tomado $E = 0,96$, $x_0 = 5$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,044$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,048$. Obsérvese que se presenta un movimiento de larmor, que esta ausente en la figura 3.21, aunque las dos son órbitas acotadas. 30
- 3.23. Órbita acotada, nuevamente con movimiento de larmor y que corresponde a los valores numéricos: $E = 0,98$, $x_0 = 6$, $\varphi_0 = 0$, y $\dot{x}_0 = 0,0602$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,0008$. 30
- 3.24. Potencial efectivo (2.15) para una partícula de carga 30,517 que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [24]. Se ha tomado $l = 10$, $m = 2,215$, $\mu = 5,086$ 31
- 3.25. Órbita acotada. Vista de las órbitas de una partícula cargada positivamente moviéndose en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [24]. Se ha tomado $m = 2,215$, $e = 30,517$, $\mu = 5,086$, $l = 10$, $E = 0,92$, $x_0 = 6$, $\dot{x}_0 = 0,122$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,003$ 31
- 3.26. Potencial efectivo (3.6) en función de x , para una partícula con carga $e = 30,517$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [25]. Los valores numéricos son: $m = 2,215$, $a = 2$, $b = 0$, $\mu = 5,086$, $l = 10$ 31
- 3.27. Órbita acotada. Vista de las órbitas de una partícula cargada moviéndose en la vecindad de una fuente masiva magnetizada rotante [25]. Los valores numéricos son: $m = 2,215$, $a = 2$, $b = 0$, $\mu = 5,086$, $l = 10$, $E = 0,92$, $x_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,029$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,002$ 31

INTRODUCCIÓN

La estrella de neutrones es un sistema astrofísico realmente interesante desde el punto de vista de la relatividad general. Hay múltiples razones, entre ellas que los pulsares son estrellas de neutrones y en consecuencia se dispone de una cantidad considerable de datos observacionales, y que las estrellas de neutrones se constituyen en laboratorios naturales para la física nuclear, debido a su gran densidad y amplia gama de posibilidades de materia interactuante que las constituyen. Además, la comparación de modelos teóricos de estrellas de neutrones, con la observación directa de su radiación, podría ayudar a revelar las condiciones físicas en el interior de estos objetos [1, 2]. De otro lado, en los últimos años se ha descubierto un gran número de estrellas de este tipo [3, 4], con una característica en común: tienen cerca de la superficie campos magnéticos del orden de $10^{14} - 10^{15}$ Gauss. Esto hace que su estudio tenga un gran interés tanto observacional como teórico.

Las estrellas de neutrones fueron descritas teóricamente en la década de 1930, a partir de las teorías del joven astrofísico Subrahmanyan Chandrasekhar [7], quien predijo que las estrellas como el Sol, una vez que agotan su combustible nuclear y la fuente de energía interna es incapaz de resistir el empuje de la gravedad hacia el núcleo estelar, se contraen precipitándose hacia su interior en segundos y generando presiones muy altas. En este proceso los electrones son empujados hacia el interior de los núcleos atómicos y obligados a combinarse con los protones formando neutrones. El resultado de este proceso es una estrella de neutrones [8, 9], un objeto tan denso que tiene la masa del Sol en una esfera con un radio cercano a 15 km. En 1967 Joselyn Bell-Burnell y Anthony Hewish, mientras trabajaban en la identificación de cuásares con un radiotelescopio de la Universidad de Cambridge, Inglaterra, descubrieron señales de radio emitidas en forma de pulsaciones periódicas de aproximadamente un segundo de frecuencia provenientes de una posición en el cielo; poco después, se localizaron, en distintas partes del espacio, un total de cuatro fuentes. Era evidente que se había descubierto un nuevo tipo de objetos. Dado que en algunos casos se observaban más de diez, y hasta treinta pulsaciones por segundo, la única interpretación plausible a ello era (y sigue siendo) que se trata de estrellas de neutrones, girando rápidamente y creando fuertes campos gravitacionales y magnéticos a su alrededor, campos millones de veces más fuertes que los del Sol.

Existen cinco clases de configuraciones estelares en las cuales se reconocen efectos relativistas significantes: enanas blancas, estrellas de neutrones, agujeros negros, estrellas superma-

sivas y clusters de estrellas relativistas. Esta clasificación se realiza teniendo en cuenta el tamaño, la masa, la densidad, su formación, etc [10]. La teoría más utilizada por su validez experimental, y que describe satisfactoriamente las propiedades físicas de estos objetos, fue formulada por Einstein en 1915. La teoría de la relatividad general o simplemente teoría de gravitación de Einstein es considerada como la teoría mas viable para la descripción de objetos y fenómenos astrofísicos que involucran fuertes campos gravitacionales. Esta brinda un tratamiento detallado de la gravitación y el electromagnetismo en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, no lineales y acoplado de segundo orden, conocido normalmente como sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell. Resolver este sistema de ecuaciones representa una gran dificultad; sin embargo, hoy se encuentran en la literatura algunas soluciones [11], no todas de interés astrofísico y las que si lo tienen, permiten describir apropiadamente objetos como estrellas de neutrones, enanas blancas, agujeros negros, etc.

Es bien conocido que la mejor manera de entender la estructura de algún campo es estudiar la dinámica de partículas de prueba [12]. En relatividad general, donde la gravitación es representada por la curvatura del espacio tiempo de una variedad cuatridimensional, la estructura del campo puede ser completamente estudiada a través de las geodésicas de la variedad las cuales representan las trayectorias de partículas de prueba en la ausencia de alguna fuerza externa. Junto con el campo gravitacional pueden haber otros campos presentes tales como campos de Coulomb o campos de spin; en este caso, las trayectorias de las partículas pueden ser geodésicas solamente si el campo gravitacional no interactúa con estos campos externos [17, 18]. De otro lado, si la partícula es cargada o tiene spin, entonces su movimiento se desvía de la geodésica y su estudio podría revelar información acerca de la interacción mutua de estos campos sobre la geometría y viceversa. El movimiento de partículas sin carga alrededor de fuentes gravitacionales ha sido muy bien estudiado y existen muchos trabajos al respecto; por lo tanto, este trabajo se dedica solamente al caso del movimiento de partículas cargadas en una combinación de campos gravitacionales y electromagnéticos.

El movimiento de partículas cargadas en campos gravitacionales y electromagnéticos en relatividad general ha llamado la atención de muchos autores (ver [19, 20] y referencias internas), debido a que permite conocer parámetros físicos importantes de los sistemas; por ejemplo, la energía de enlace de la órbita marginalmente estable de las partículas “tes” determina en buena parte la eficiencia de emisión de energía por discos de acreción. Típicamente para realizar estos estudios se utilizan soluciones sencillas, entre ellas las más utilizadas son la de Schwarzschild o Kerr, superpuestas sobre un fondo de campo magnético. Prasanna y Varma [21] estudiaron el movimiento en un campo dipolar magnético sobre el espacio tiempo de Schwarzschild, en este caso el vector potencial se obtiene suponiendo que el momento magnético μ es originado por un dipolo puntual situado en la fuente que genera el campo gravitacional. Prasanna y Vishveshwara [20] lo hicieron para el caso de un campo electromagnético superpuesto sobre la métrica de Kerr. Para su estudio consideran el campo electromagnético de dos tipos: el primero un campo dipolar magnético con un campo cuadripolar eléctrico asociado debido a la rotación de la fuente y el segundo, un campo magnético uniforme que rodea la fuente central y es constante en el infinito. Aliev y

Özdemir [19] estudiaron las órbitas marginalmente estables para el caso de geometrías de Kerr y Schwarzschild sobre campos magnéticos externos y uniformes en el infinito. Mirza [22] estudió el movimiento de partículas cargadas en el campo de una estrella compacta lentamente rotante. Para modelar la estrella utilizó el espacio tiempo de Kerr y supuso que el campo magnético (axialmente simétrico) es producido por un plasma axialmente simétrico en la atmósfera de la supuesta estrella. Por último se encuentra el trabajo de Preti [23], el realiza su estudio utilizando el espacio tiempo de Schwarzschild y considerando un campo dipolar magnético producido por un “lazo” de corriente alrededor del agujero negro.

Los trabajos mencionados anteriormente tienen una característica en común: consideran que el campo electromagnético es débil comparado con el campo gravitacional y por lo tanto éste no afecta la geometría [18], es decir que el campo electromagnético no afecta la curvatura del espacio tiempo pero la curvatura si podría afectar el campo electromagnético. Lo novedoso del presente estudio es que se utiliza una solución exacta de la ecuaciones de Einstein-Maxwell en la cual se considera el efecto de los campos electromagnéticos sobre la curvatura y viceversa.

El trabajo se ha organizado de la siguiente forma: En el capítulo 1 se presenta una breve descripción del movimiento de partículas cargadas alrededor de una fuente masiva, rotante y con campo electromagnético en el marco de la relatividad general. Además se obtienen las ecuaciones de movimiento considerando campos estacionarios y axialmente simétricos. En el capítulo 2 se estudia el movimiento en el caso estático, para ello se utiliza la solución exacta de Bonnor [24], que representa una fuente masiva magnetizada. Para esta solución se estudia en detalle el potencial efectivo y se integran las ecuaciones de movimiento para observar las trayectorias de las partículas en el plano ecuatorial de la fuente central. El capítulo 3 está dedicado a estudiar el movimiento de partículas cargadas alrededor de una fuente estacionaria con campo magnético. Este estudio se realiza con la solución de Manko et al [25] y nuevamente se analiza el potencial efectivo para el movimiento de las partículas en el plano ecuatorial y se realiza la integración numérica de las ecuaciones de movimiento. Por ultimo, en el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos y se concluye.

CAPITULO 1

MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN RELATIVIDAD GENERAL

La existencia de campos magnéticos alrededor de algunos objetos compactos ocasiona que la dinámica de partículas cargadas se vea alterada considerablemente, ya que esta interacción adicional puede modificar la estructura de sus órbitas [18], particularmente aparecen órbitas que no son posibles cuando el campo magnético está ausente. Las ecuaciones de movimiento permiten realizar un estudio completo de la trayectoria de partículas cargadas en un espacio-tiempo característico, por esta razón este capítulo está dedicado a la obtención de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de partículas cargadas alrededor de una fuente masiva, rotante y con campo electromagnético, en el marco de la relatividad general.

SECCIÓN 1.1

ECUACIONES DE EINSTEIN-MAXWELL

Las trayectorias de una partícula con carga e y masa en reposo m_0 , en un campo electromagnético en relatividad general, están dadas por las ecuaciones covariantes de Lorentz

$$u^\alpha_{;\beta} u^\beta = \frac{e}{m_0} F^\alpha_\beta u^\beta, \quad (1.1)$$

donde $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ es el vector cuadrivelocidad de la partícula y F^α_β es el tensor electromagnético. El punto y coma denota derivada covariante, tomada con respecto al espacio-

tiempo asociado, cuya geometría está dada por el elemento de línea

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (1.2)$$

En general, las componentes del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ pueden ser obtenidas como soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, que en su notación usual se escriben

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^2}T_{\alpha\beta}, \quad (1.3)$$

donde el tensor energía momentum $T_{\alpha\beta}$, se escribe como

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\alpha\mu} F_{\beta}^{\mu} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (1.4)$$

con el tensor electromagnético $F_{\alpha\beta}$ satisfaciendo las ecuaciones covariantes de Maxwell

$$F_{;\beta}^{\alpha\beta} = J^{\alpha}, \quad F_{\alpha\beta,\mu} + F_{\mu\beta,\alpha} + F_{\alpha\mu,\beta} = 0, \quad (1.5)$$

siendo J^{α} el vector corriente.

Para obtener las trayectorias de partículas cargadas en una variedad con espacio-tiempo curvado por campos electromagnéticos, dados por $F_{\alpha\beta}$ satisfaciendo (1.5) se puede resolver (1.3) para $g_{\alpha\beta}$, usando este $F_{\alpha\beta}$ y entonces integrar las ecuaciones de órbita (1.1), usando el $g_{\alpha\beta}$ así obtenido. El problema inicial es entonces, resolver completamente este sistema de ecuaciones para un campo electromagnético arbitrario, lo cual representa una gran dificultad. Sin embargo, hoy se encuentran en la literatura soluciones [11], con algunas características particulares que consideran campos con algunas simetrías que facilitan la solución del sistema de ecuaciones (1.3). Estas soluciones permiten describir apropiadamente objetos astrofísicos, tales como estrellas de neutrones, enanas blancas, agujeros negros, estrellas supermasivas, etc.

Un caso particular de soluciones son aquellas que representan campos estacionarios (o estáticos) y axialmente simétricos (o esféricamente simétricos), en la literatura hay soluciones de este tipo, pero no todas son astrofísicamente interesantes. Por lo tanto en el estudio sólo se consideran soluciones de interés astrofísico [24], [25].

SECCIÓN 1.2

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

El elemento de línea de Lewis-Papapetrou [26, 27] describe los espacio tiempos estacionarios axialmente simétricos y escrito en coordenadas esferoidales toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{xx} dx^2 + g_{yy} dy^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 + 2g_{t\varphi} dt d\varphi - g_{tt} dt^2, \\ g_{xx} &= \frac{e^{2\gamma} k^2 (x^2 - y^2)}{f(x^2 - 1)}, \quad g_{yy} = \frac{e^{2\gamma} k^2 (x^2 - y^2)}{f(1 - y^2)}, \\ g_{\varphi\varphi} &= f^{-1} k^2 (x^2 - 1)(1 - y^2) - f\omega, \\ g_{t\varphi} &= 2f\omega, \quad g_{tt} = f, \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde $g_{\alpha\beta}$ son las componentes del tensor métrico y las funciones f , γ y ω sólo dependen de las coordenadas x y y , que se relacionan con las coordenadas Weyl (ρ, z) a través de las fórmulas

$$x = (r_+ + r_-)/(2k), \quad y = (r_+ - r_-)/(2k), \quad r_{\pm} := \sqrt{\rho^2 + (z \mp k)^2}.$$

Si se considera una partícula de masa m_0 y carga e moviéndose en presencia de una combinación de campos gravitacionales y electromagnéticos descritos por las funciones $g_{\alpha\beta}$ y por el cuadvectores potencial electromagnético A_α , el lagrangiano del sistema está dado por [18]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + e A_\alpha \dot{x}^\alpha, \quad (1.7)$$

donde el punto denota la derivada con respecto al tiempo propio τ y $x^\alpha(\tau)$ es el cuadvectores de posición de la partícula. Si los campos son estacionarios y axialmente simétricos, el lagrangiano es independiente de la coordenada temporal t y la coordenada azimutal φ , por lo tanto hay dos constantes de movimiento

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -E, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = l, \quad (1.9)$$

donde E y l representan la energía de la partícula y el momento angular canónico, respectivamente.

De (1.7), (1.8) y (1.9) se puede obtener

$$g_{t\varphi} \dot{\varphi} - g_{tt} \dot{t} = -(E - e A_t), \quad (1.10)$$

$$g_{\varphi t} \dot{t} + g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} = l - e A_\varphi, \quad (1.11)$$

y de estas dos expresiones se obtiene \dot{t} y $\dot{\varphi}$, dadas por:

$$\dot{t} = \frac{g_{\varphi\varphi}(E - eA_t) + g_{t\varphi}(l - eA_\varphi)}{g_{\varphi\varphi}g_{tt} + g_{t\varphi}^2}, \quad (1.12)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{g_{tt}(l - eA_\varphi) - g_{t\varphi}(E - eA_t)}{g_{\varphi\varphi}g_{tt} + g_{t\varphi}^2}. \quad (1.13)$$

Las ecuaciones de movimiento (1.1), pueden escribirse en forma extendida como:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\varphi}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = e F_\delta^\alpha \frac{dx^\delta}{ds}, \quad (1.14)$$

con

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}, \quad (1.15)$$

y $\Gamma_{\beta\varphi}^\alpha$ son los símbolos de Christoffel. Así, las ecuaciones correspondientes a las coordenadas x y y están dadas por

$$\ddot{x} = \frac{1}{2g_{xx}} \left[\frac{\partial g_{yy}}{\partial x} \dot{y}^2 - \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} \dot{x}^2 + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial x} \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial g_{tt}}{\partial x} \dot{t}^2 + 2\dot{\varphi} \left(\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial x} \dot{t} + e \frac{\partial A_\varphi}{\partial x} \right) - 2e \frac{\partial A_t}{\partial x} \dot{t} - 2 \frac{\partial g_{xx}}{\partial y} \dot{x} \dot{y} \right], \quad (1.16)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{2g_{yy}} \left[\frac{\partial g_{xx}}{\partial y} \dot{x}^2 - \frac{\partial g_{yy}}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial y} \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial g_{tt}}{\partial y} \dot{t}^2 + 2\dot{\varphi} \left(\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial y} \dot{t} + e \frac{\partial A_\varphi}{\partial y} \right) - 2e \frac{\partial A_t}{\partial y} \dot{t} - 2 \frac{\partial g_{yy}}{\partial x} \dot{x} \dot{y} \right], \quad (1.17)$$

en las cuales se puede reemplazar \dot{t} y $\dot{\varphi}$ para obtener así un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas para las variables $x(\tau)$ y $y(\tau)$.

En el presente trabajo se estudia el movimiento de partículas masivas, por lo tanto el vector cuadrivelocidad u^α será tipo tiempo, lo que se expresa como

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1, \quad (1.18)$$

lo cual permite obtener la siguiente ecuación

$$\dot{x}^2 = -\frac{1}{g_{xx}} \left(1 + g_{yy} \dot{y}^2 + g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2 + 2g_{t\varphi} \dot{t} \dot{\varphi} - g_{tt} \dot{t}^2 \right), \quad (1.19)$$

útil cuando el estudio se reduce al movimiento en el plano ecuatorial.

CAPITULO 2

MOVIMIENTO EN LA SOLUCIÓN DE BONNOR

En el presente capítulo se estudian las trayectorias del movimiento de partículas cargadas alrededor de una fuente estática y axialmente simétrica con campo magnético. Para tal efecto se utiliza una solución exacta de las ecuaciones de Einstein-Maxwell que se conoce en la literatura como dipolo magnético masivo de Bonnor [24]. Se analiza en detalle el potencial efectivo para el movimiento de las partículas en el plano ecuatorial, lo cual permite estudiar la estabilidad de las órbitas. Adicionalmente se realiza la integración numérica de las ecuaciones de movimiento para determinar las trayectorias. El caso estático se estudia por su sencillez y porque puede revelar algunas características generales del movimiento, que podrían ser comunes con un caso estacionario. Por lo tanto, es interesante observar qué similitudes y diferencias existen entre el caso estático y el caso estacionario, cuando se considera el movimiento de partículas cargadas alrededor de estas fuentes.

SECCIÓN 2.1

DIPOLO MAGNÉTICO MASIVO DE BONNOR

La solución de Bonnor [24] es un espacio tiempo particular con la característica de ser estático y axialmente simétrico y que físicamente representa una fuente masiva magnetizada. El elemento de línea característico de estos espacio tiempos puede ser obtenido de (1.6) haciendo $\omega = 0$. En coordenadas esferoidales, las funciones métricas f y γ para esta solución,

pueden ser escritas de la siguiente manera [25]

$$f = \frac{((x^2 - 1)k^2 + (1 - y^2)\delta)^4}{(-d^2 + (k^2x^2 - y^2\delta)^2 + kmx((x^2 - 1)k^2 + (1 - y^2)\delta))^2} \quad (2.1)$$

$$e^{2\gamma} = \frac{((x^2 - 1)k^2 + (1 - y^2)\delta)^4}{k^8(x^2 - y^2)^4} \quad (2.2)$$

donde $\delta = \mu^2/m^2$, $d = m^2/4$, $k = \sqrt{d + \delta}$, m representa la masa de la fuente central y μ el dipolo magnético.

El campo electromagnético está descrito por las componentes del cuadvivector potencial A_α , que para esta solución en particular se escribe

$$A_\alpha = (0, 0, A_\phi, 0) \quad (2.3)$$

donde

$$A_\phi = \frac{(y^2 - 1)(2x(x^2 - 1)k^3 + 3m(x^2 - 1)k^2 + 2x(m^2 - y^2\delta + \delta)k + m(m^2 - (y^2 - 3)\delta))\mu}{2(-k^4x^4 + 2k^2y^2\delta x^2 - k^3m(x^2 - 1)x + km(y^2 - 1)\delta x + d^2 - y^4\delta^2)}. \quad (2.4)$$

De las ecuaciones (1.7), (2.1), (2.2) y (2.4), se puede observar que el parámetro μ , sólo aparece de dos formas: al cuadrado, a través de δ , y como factor en el potencial A_ϕ . Debido a que cuando el parámetro aparece como factor de algunas expresiones siempre aparece multiplicado por la carga e , el potencial efectivo y las ecuaciones de movimiento, serán invariantes bajo transformaciones de (e, μ) por $(-e, -\mu)$.

SECCIÓN 2.2

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones de movimiento correspondientes a las coordenadas x y y se obtienen de (1.16) y (1.17), haciendo $g_{t\varphi} = 0$ (ya que $\omega = 0$) y $A_t = 0$ según (2.3), por lo tanto

$$\ddot{x} = \frac{1}{2g_{xx}} \left(\frac{\partial g_{yy}}{\partial x} \dot{y}^2 + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial x} \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial g_{tt}}{\partial x} \dot{t}^2 - \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} \dot{x}^2 - 2 \frac{\partial g_{xx}}{\partial y} \dot{x}\dot{y} + 2e \frac{\partial A_\varphi}{\partial x} \dot{\varphi} \right) \quad (2.5)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{2g_{yy}} \left(\frac{\partial g_{xx}}{\partial y} \dot{x}^2 + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial y} \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial g_{tt}}{\partial y} \dot{t}^2 - \frac{\partial g_{yy}}{\partial y} \dot{y}^2 - 2 \frac{\partial g_{yy}}{\partial x} \dot{x}\dot{y} + 2e \frac{\partial A_\varphi}{\partial y} \dot{\varphi} \right) \quad (2.6)$$

De igual forma de (1.12), (1.13) y (1.19) se obtienen las ecuaciones para \dot{t} , $\dot{\varphi}$ y \dot{x}

$$\dot{t} = \frac{E}{g_{tt}} \quad (2.7)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} (\ell - eA_\varphi). \quad (2.8)$$

$$\dot{x}^2 = -\frac{1}{g_{xx}} (1 + g_{yy}\dot{y}^2 + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 - g_{tt}\dot{t}^2) \quad (2.9)$$

Centrando el estudio al caso particular de trayectorias en el plano ecuatorial de la fuente dado por $y = 0$, las ecuaciones (2.5), (2.8) y (2.9) toman la siguiente forma

$$\ddot{x} = \frac{1}{2g_{xx}} \left[\frac{dg_{\varphi\varphi}}{dx} \dot{\varphi}^2 + 2e \frac{dA_\varphi}{dx} \dot{\varphi} - \frac{dg_{xx}}{dx} \dot{x}^2 - \frac{dg_{tt}}{dx} \left(\frac{E}{g_{tt}} \right)^2 \right], \quad (2.10)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} (\ell - eA_\varphi), \quad (2.11)$$

$$\dot{x}^2 = -\frac{1}{g_{xx}} \left[1 + g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2 - \frac{E^2}{g_{tt}} \right], \quad (2.12)$$

aquí t se ha reemplazado de (2.7).

Sustituyendo la ecuación (2.11) en (2.12) se obtiene

$$E^2 = g_{xx}g_{tt}\dot{x}^2 + \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}(\ell - eA_\varphi)^2 + g_{tt}. \quad (2.13)$$

Esta última ecuación, donde el término del momento angular $d\varphi/d\tau$ ha sido eliminado para introducir el momento angular canónico, ℓ expresa la conservación de la energía efectiva en la dirección x y puede ser escrita como

$$E^2 = g_{xx}g_{tt}\dot{x}^2 + V_{eff}, \quad (2.14)$$

con

$$V_{eff} = \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}(\ell - eA_\varphi)^2 + g_{tt}. \quad (2.15)$$

V_{eff} representa el potencial efectivo para el movimiento de las partículas en el plano ecuatorial. Estudiando la estructura de V_{eff} , para diferentes valores de las constantes ℓ y e , se puede analizar la naturaleza de las órbitas y su estabilidad.

A continuación se presentan algunas gráficas del potencial efectivo V_{eff} , las cuales permiten dar una descripción de las órbitas de las partículas. En las figuras 2.2, 2.1 y 2.3 se puede observar que la presencia del parámetro de dipolo magnético μ altera considerablemente la estructura del potencial efectivo. En estas figuras las líneas inferiores (superiores) representan el potencial en ausencia (presencia) de campo magnético. Se observa cómo, al introducir el parámetro μ aparecen órbitas estables dadas por los puntos donde el potencial efectivo es mínimo. Además, se muestra que el radio de la órbita depende del signo de la carga de la partícula de prueba, siendo mayor en el caso de partículas cargadas negativamente.

2.2.1 Influencia del parámetro μ

El parámetro μ representa el momento dipolar magnético y es el parámetro encargado de controlar la intensidad del campo magnético \mathbf{B} de la fuente. Para el caso particular de

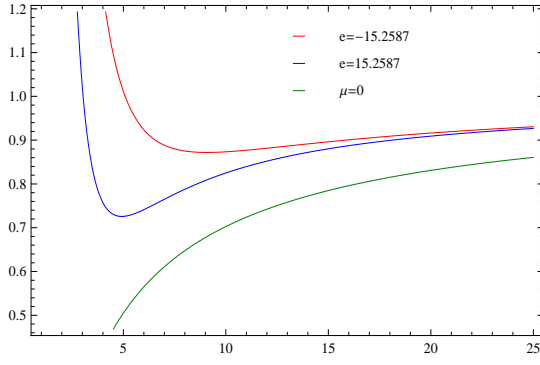


Figura 2.1: Potencial efectivo (2.15) para una partícula de carga $e = \pm 15,259$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [24]. Los parámetros físicos son $m = 2,215$, $\mu = 4,476$, $l = 3$. La línea inferior muestra el potencial efectivo para $\mu = 0$.

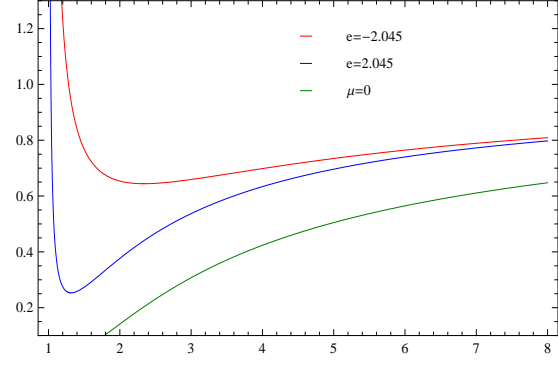


Figura 2.2: V_{eff} contra x para los mismos valores de m , μ y l de la figura 2.1. En este caso se tiene $e = \pm 2,045$.

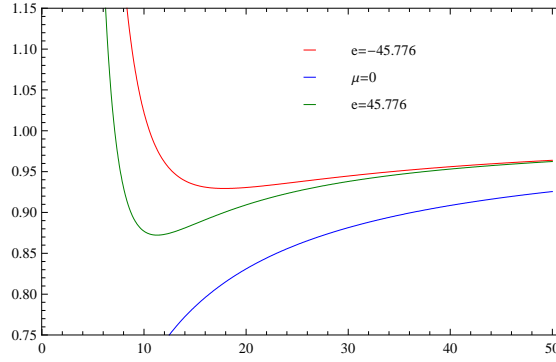


Figura 2.3: Nuevamente V_{eff} contra x , en este caso se ha tomado $e = \pm 45,776$.

estrellas de neutrones el campo magnético es del orden de $10^{14} - 10^{15} \text{ Gauss}$, es decir, un valor del orden de $10^{30} - 10^{32} [Am^2]$ para μ . Para los cálculos se han empleado unidades naturales, por lo tanto se debe realizar la conversión adecuada de unidades, para garantizar que se utilizan valores físicamente aceptables de los diferentes parámetros. A continuación se presenta la conversión de unidades para el momento dipolar magnético y para la carga:

$$\mu_{Nat} = \sqrt{\frac{\mu_0 G}{c^4}} \mu * 10^{-6}, \quad q_{Nat} = \sqrt{\frac{\mu_0 G}{c^2}} q * 10^{-3},$$

donde μ_{Nat} y q_{Nat} representan los valores del momento dipolar magnético y la carga en unidades naturales, respectivamente, μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, G es la constante de gravitación universal, μ y q los valores del momento dipolar magnético y la carga en unidades de Sistema Internacional (SI), respectivamente.

Con la anterior conversión se tiene que una carga $q = 15,2587$ en unidades naturales corresponde a una carga $q = 5 \times 10^{20} [C]$. Para el momento dipolar magnético μ , se tiene que para $\mu = 18 \times 10^{31} [Am^2]$, corresponde a un valor $\mu = 18,3104$ en unidades naturales. De lo anterior se puede observar que los valores utilizados para los parámetros, pueden corresponder a valores para estrellas de neutrones reales.

En las figuras 2.4 se presenta el potencial efectivo (2.15) para diferentes valores del parámetro μ . Inicialmente se observa que cuando este parámetro es diferente de cero aparecen órbitas estables (ver figuras 2.2-2.1). La variación del parámetro μ , permite observar que introduciendo valores pequeños ($\mu = 0,814$, gráfica 2.4a) aparecen tres tipos de órbitas: una órbita interna estable, que corresponde al primer mínimo del potencial efectivo, una intermedia inestable correspondiente a un máximo de V_{eff} y una externa, nuevamente estable, que está— relacionada con un segundo máximo en el potencial. En las gráficas 2.4b y 2.4c se ha aumentado el valor numérico del parámetro μ , se muestra que el radio de la órbita externa estable aumenta, mientras que la órbita interna desaparece. De otro lado, el aumento del momento dipolar magnético μ , no siempre ocasiona que el radio de la órbita externa estable aumente indiscriminadamente, ya que existe un valor de μ para el cual el radio de la órbita es máximo, de tal manera que si μ sigue creciendo el radio de la órbita estable empieza a disminuir. Si el parámetro μ es negativo como en la figura 2.4c, se observa el mismo comportamiento que en el caso positivo.

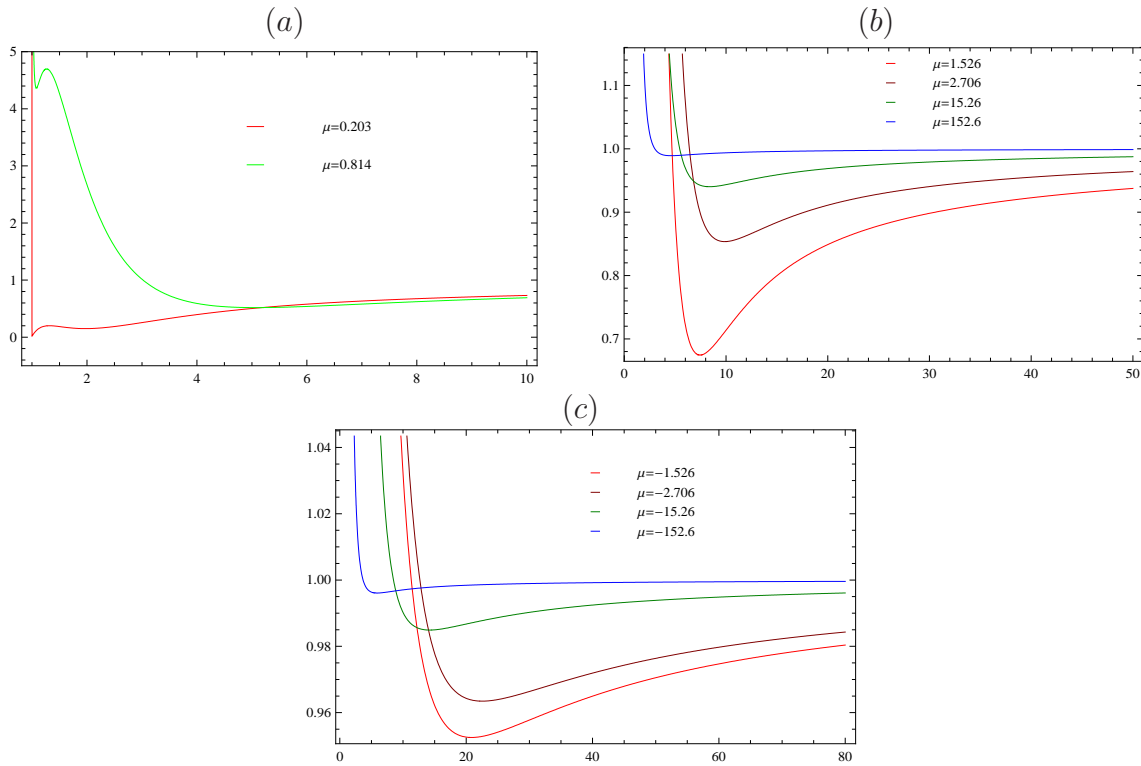


Figura 2.4: V_{eff} para una carga $e = 45,776$. Se tomaron los parámetros físicos $m = 2,215, l = 15, e = 45,78$. Cada curva se construye con un valor diferente del parámetro μ .

2.2.2 Influencia de la masa m de la fuente

Las observaciones han permitido efectuar mediciones bastante confiables sobre masas de varias estrellas de neutrones, en especial de aquellas que son componentes de un sistema binario. En las que se han estudiado, se ha logrado estimar el valor de su masa, que en general, llega a valores cercanos de $1,44M_{\odot}$ (masas solares) [28, 29] y en algunos casos podría acercarse a las $2M_{\odot}$. Teóricamente existen varios trabajos que estiman que la masa de una estrella de este tipo no superaría las tres masas solares [30, 31, 32, 33]. En esta sección se realiza un análisis del potencial efectivo cuando se consideran diferentes valores de la masa de la fuente. Los resultados se presentan en la figura 2.5. Se puede observar que para todos los valores que se consideran siempre existe una órbita estable, dada por los puntos donde el potencial tiene un mínimo; cuando se aumenta la masa de la fuente, el radio de dicha órbita también aumenta. Este comportamiento se observa para diferentes valores de μ , que pueden ser positivos y negativos.

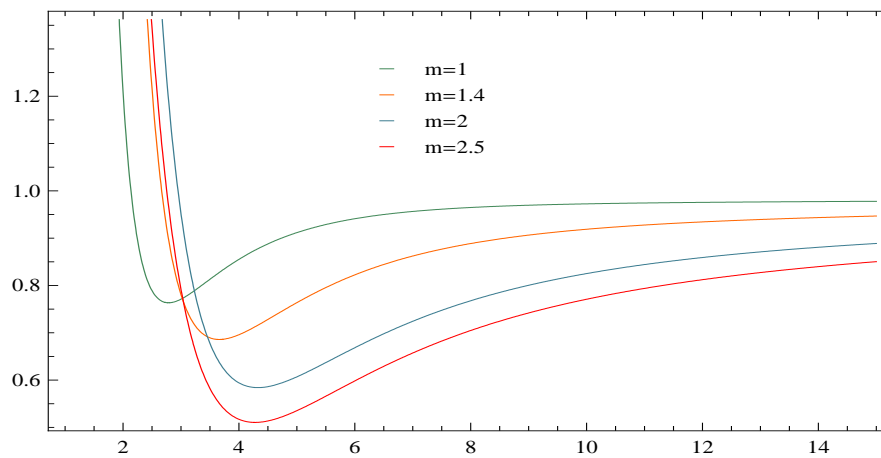


Figura 2.5: V_{eff} para una carga $e = 24,41$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [24]. Los parámetros físicos son $\mu = 5,49$, $l = 12,5$. La masa esta dada en masas solares.

SECCIÓN 2.3

ÓRBITAS CIRCULARES

Considerando órbitas circulares se tiene $x = x_c = cte$ y por lo tanto $\dot{x} = \ddot{x} = 0$, donde x_c es el radio de la órbita. En este caso la energía de la partícula en su órbita circular, calculada

de (2.14) es

$$E(x = x_c) = \sqrt{V_{eff}} = \left[\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}} (\ell - eA_\varphi)^2 + g_{tt} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.16)$$

Se toma la expresión (2.15) para calcular los puntos críticos del potencial efectivo:

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial x} = 0. \quad (2.17)$$

Resolviendo esta ecuación para l , se obtiene el valor del momento angular de la partícula en su órbita circular:

$$l_{\pm}(x = x_c) = \left[g_{tt} \frac{dg_{\varphi\varphi}}{dx} - g_{\varphi\varphi} \frac{dg_{tt}}{dx} \right]^{-1} \left\{ e \left[A_\varphi g_{tt} \frac{dg_{\varphi\varphi}}{dx} - A_\varphi g_{\varphi\varphi} \frac{dg_{tt}}{dx} - g_{tt} g_{\varphi\varphi} \frac{dA_\varphi}{dx} \right] \right. \quad (2.18)$$

$$\left. \pm g_{\varphi\varphi} \left[e^2 g_{tt}^2 \left(\frac{dA_\varphi}{dx} \right)^2 + g_{tt} \frac{dg_{\varphi\varphi}}{dx} \frac{dg_{tt}}{dx} - g_{tt} \left(\frac{dg_{\varphi\varphi}}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (2.19)$$

El signo \pm indica la dirección del movimiento.

SECCIÓN 2.4

INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

Las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12) permiten realizar un estudio completo de la trayectoria de partículas cargadas en un espacio tiempo dado. La solución analítica de estas ecuaciones no fue abordada debido a su complejidad, por lo tanto se recurre a la integración numérica para obtener un imagen cualitativa de la naturaleza de las órbitas para diferentes valores de los parámetros físicos que aparecen en la ecuaciones. Para la integración se recurre a la ecuación para $\ddot{\varphi}$, la cual tiene la siguiente forma:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{g_{\varphi\varphi}} \left[\frac{dg_{\varphi\varphi}}{dx} \dot{\varphi} \dot{x} - e \frac{dA_t}{dx} \dot{x} \right] \quad (2.20)$$

Las ecuaciones a integrar son (2.10), (2.11) y (2.12). Para este fin inicialmente se necesita, además de los parámetros μ , m y e , las velocidades iniciales $\dot{\varphi}_0$, \dot{x}_0 y la posición inicial x_0 y ϕ_0 . Para el caso de órbitas acotadas, del hecho que las partículas efectúan movimiento de Larmor, se puede considerar $\dot{\varphi} = 0$ en algún $x = x_0$. Así se elige $\dot{\varphi}_0 = 0$ en $x = x_0$, aplicando esta condición a la ecuación (2.11) se obtiene

$$l = eA_\varphi, \quad (2.21)$$

y de (2.12)

$$\dot{x}_0 = \dot{x}|_{x=x_0}. \quad (2.22)$$

Especificando μ , m y e , x_0 , φ_0 y E se tienen todos los valores iniciales necesarios para realizar la integración, cabe anotar que el parámetro de momento angular l queda determinado por las condiciones iniciales, además por comodidad siempre se considera $\phi_0 = 0$. Una segunda posibilidad para realizar la integración es elegir cualquier valor para l y calcular por medio de la ecuación (2.11), el valor inicial de la velocidad en la coordenada φ

$$\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}|_{x=x_0}. \quad (2.23)$$

A continuación se presentan algunos resultados de la integración de las ecuaciones (2.10), (2.11), (2.12) y (2.4), se muestran las trayectorias de partículas cargadas en el plano ecuatorial de una fuente masiva con campo magnético [24], en el marco de la relatividad general, además, con el fin de clarificar el análisis, se presenta la gráfica del potencial efectivo correspondiente a los parámetros utilizados.

El conjunto de gráficas, compuesto por las figuras 2.7, 2.8, 2.9 y 2.10, corresponden al potencial efectivo mostrado en 2.6. Estas gráficas son el resultado de la integración numérica de las ecuaciones de movimiento (2.10), (2.11), (2.12) y (2.4), la diferencia entre cada figura es el valor asignado a la energía. La figura 2.7 corresponde a una órbita circular estable con radio $x_0 = 2,714$ y cuya energía es 0,710. A medida que la energía aumenta se puede observar la variación de las trayectorias que ahora están acotadas entre dos radios y por lo tanto, se puede decir que las partículas realizan un movimiento de Larmor. Para una mayor claridad en la figura 2.6 se han dibujado los niveles de energía correspondientes a cada trayectoria, con el fin de corroborar que efectivamente la partícula se mueve entre dos radios, que están dados por cortes de la línea que representa cada nivel de energía con la curva del potencial.

En las figuras 2.11, 2.12 y 2.13 se puede observar que el potencial tiene dos regiones de estabilidad bien definidas. De 2.11 se puede concluir que existe una órbita estable muy cercana a la fuente dada por el primer mínimo, con un radio $x_0 = 1,03$ y una energía de $E = 1,18$, luego se observa una órbita inestable (máximo del potencial) con $x_0 = 1,33$ y $E = 1,97$, por último se tiene nuevamente una órbita circular estable (segundo mínimo) con $x_0 = 3,92$ y $E = 0,41$. La figura 2.12 representa la trayectoria de una partícula con energía $E = 1,356$ (línea roja) y que se encuentra en la primera región de estabilidad del potencial. La figura 2.13 corresponde a una partícula con energía $E = 0,675$ (línea azul) y que se encuentra en la segunda región de estabilidad del potencial. Se puede observar que a diferencia de las trayectorias mostradas en las figuras (2.9), (2.8) y (2.10), las partículas en este caso no describen movimiento de Larmor. Este comportamiento se debe a que sobre la partícula no solamente actúan fuerzas de Coulomb, sino también fuerzas gravitacionales y centrífugas y, por lo tanto, el tipo de movimiento y la forma de la trayectoria dependen exclusivamente de como sea el balance de estas fuerzas.

Finalmente se compara la diferencia entre las trayectorias de dos partículas con cargas opuestas. La figura 2.12 corresponde a la trayectoria para una partícula cuya carga tiene el mismo signo del parámetro μ , con esta restricción el momento angular l de la partícula, obtenido de la ecuación (2.21), siempre es positivo y la dirección del movimiento es en el sentido de las manecillas del reloj. En la figura 2.13, se ha presentado la situación en la cual

los signos de e y μ son opuestos; en este caso, el momento angular l siempre es negativo y la partícula se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj.

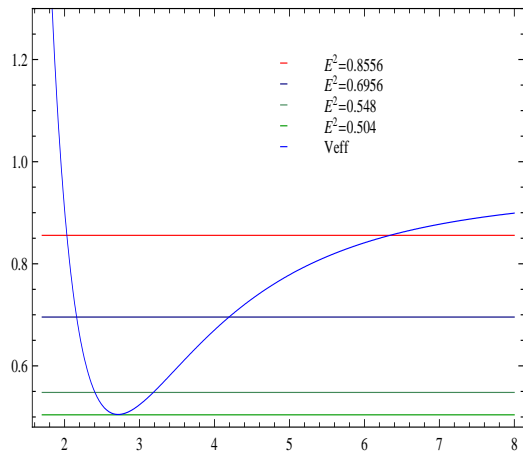


Figura 2.6: Gráfica del potencial efectivo (2.15) como función de x . Los parámetros físicos son $m = 2,215$, $e = 15,256$, $\mu = 4,476$, $l = 11,764$.

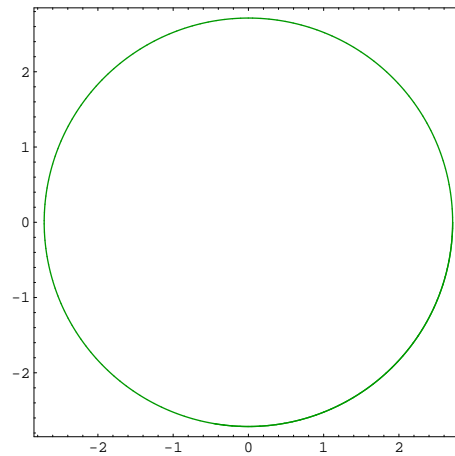


Figura 2.7: Vista de las órbitas de una partícula cargada positivamente moviéndose en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [24]. Se ha tomado $m = 2,215$, $e = 15,256$, $\mu = 4,476$, $l = 11,764$, $E = 0,710$, $x_0 = 2,714$, $\dot{x}_0 = 0$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,022$.

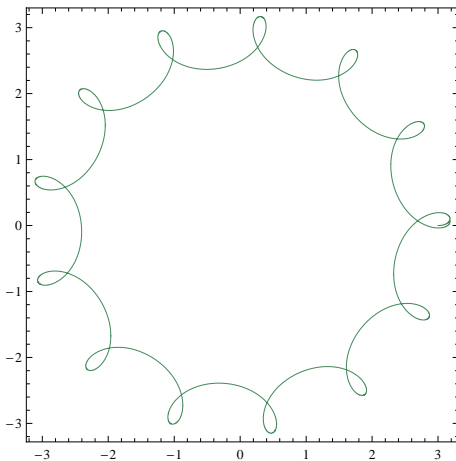


Figura 2.8: Similar a la figura 2.7, pero con $E = 0,740$, $x_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,067$ y $\dot{\varphi}_0 = 0$.

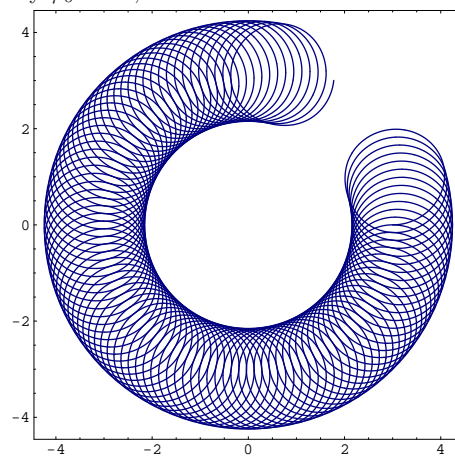


Figura 2.9: Similar a la figura 2.7, pero con $E = 0,838$, $x_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$, y $\dot{x}_0 = 0,182$ y $\dot{\varphi}_0 = 0$.

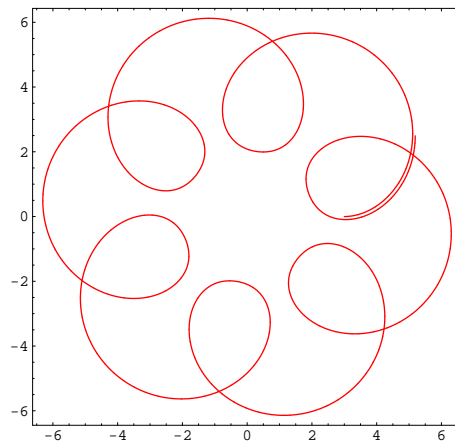


Figura 2.10: Similar a la figura 2.7 pero con $E = 0,925$, $x_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,248$ y $\dot{\varphi}_0 = 0$.

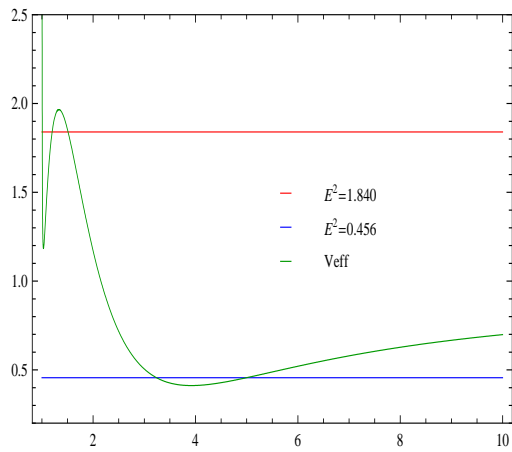


Figura 2.11: Gráfica del potencial (2.15) efectivo con parámetros físicos $m = 2,215$, $e = 45,776$, $\mu = 0,559$, $l = 5$.

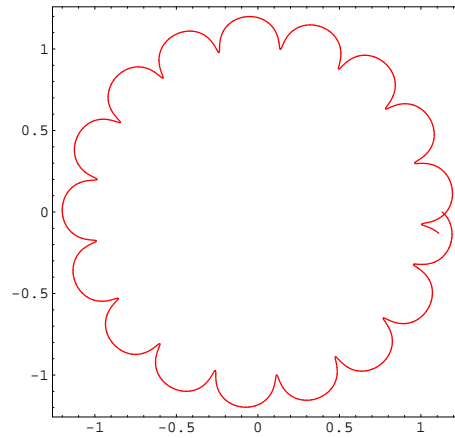


Figura 2.12: Similar a la figura 2.13, pero con $E = 1,356$ y condiciones iniciales $x_0 = 1,13$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 2,878$ y $\dot{\varphi}_0 = -2,132$.

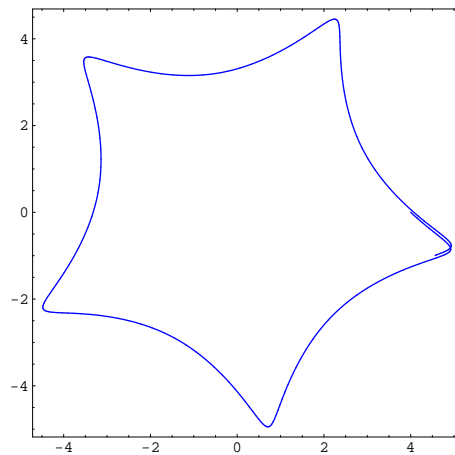


Figura 2.13: Similar a la figura 2.10, pero con parámetros físicos $m = 2,215$, $e = 45,776$, $\mu = 0,559$, $l = 5$, $E = 0,675$ y condiciones iniciales $x_0 = 4$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,202$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,047$.

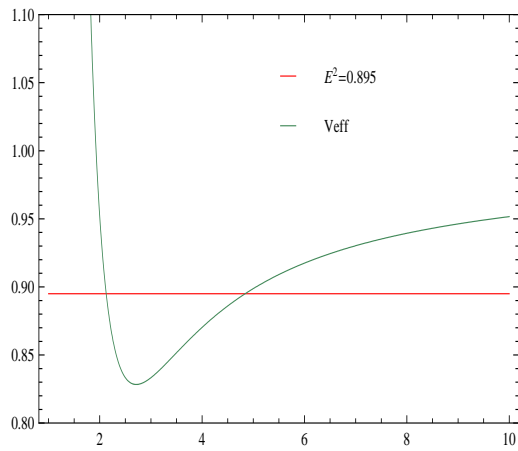


Figura 2.14: Potencial efectivo (2.15) correspondiente a los parámetros $m = 2,215$, $e = \pm 15,256$, $\mu = \pm 17,293$, $l = 9,96$ y $e = \pm 15,256$, $\mu = \mp 17,293$, $l = -9,96$.

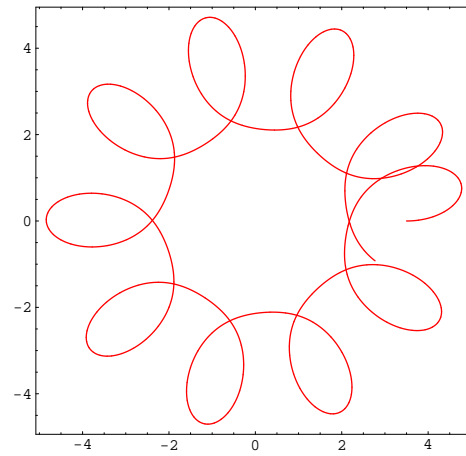


Figura 2.15: Vista de las órbitas de una partícula cargada. Los parámetros físicos son $m = 2,215$, $e = \pm 15,256$, $\mu = \pm 17,293$, $l = 9,96$, $E = 0,946$ y las condiciones iniciales $x_0 = 3,5$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,025$ y $\dot{\varphi}_0 = 0$.

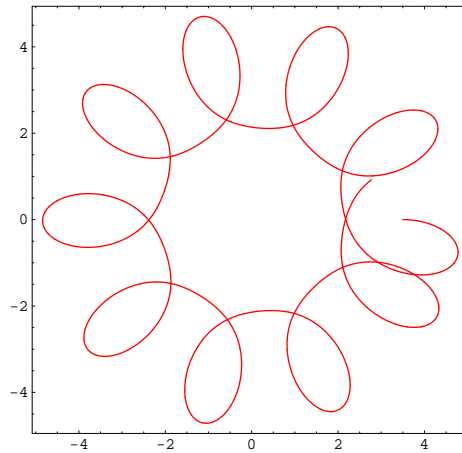


Figura 2.16: Similar a la figura 2.15. Los parámetros que cambian son $e = \pm 15,256$, $\mu = \mp 17,293$ y $l = -9,96$.

CAPITULO 3

MOVIMIENTO EN LA SOLUCIÓN DE MANKO

Una característica de las estrellas de neutrones es la emisión de radiación por el movimiento de partículas cargadas relativistas en su campo magnético [13, 14, 16] (estas partículas pueden hacer parte de un disco de acreción). Esto motiva el estudio de la dinámica de partículas cargadas en la vecindad de estas fuentes, ya que revela información acerca de la naturaleza de los objetos que producen los campos y la influencia sobre los procesos físicos que se llevan a cabo a su alrededor. Por tal razón, en el presente capítulo se estudia el movimiento de partículas cargadas en el campo gravitacional y electromagnético, producido por una fuente rotante.

SECCIÓN 3.1

SOLUCIÓN DE MANKO

Esta solución particular de las ecuaciones de Einstein-Maxwell es de interés en astrofísica, por que puede ser interpretada como el campo exterior generado por una estrella de neutrones rotante y magnetizada; además, depende de cuatro parámetros físicos reales que son la masa m , el momento angular total por unidad de masa $a := J/m$, el momento dipolar magnético μ y el momento cuadripolar de masa

$$Q = -\frac{m}{4[m^2 - (a - b)^2]}[m^4 + 2m^2(a^2 + b^2) - (3a + b)(a - b)^3 - 4\mu^3]$$

de la fuente, este último es arbitrario vía el parámetro b , que se puede interpretar como un parámetro de deformación arbitraria de la fuente. Las anteriores características permiten realizar un estudio de la influencia que tienen los diferentes parámetros en el movimiento de partículas cargadas alrededor de fuentes de este tipo. Es importante mencionar que esta solución ha sido utilizada para investigar caos en órbitas geodésicas cuando no hay campo magnético [36, 37]. Berti y Stergioulas [34] investigaron algunas propiedades de esta solución construyendo modelos interiores de estrellas de neutrones e igualándolos con la solución antes mencionada, imponiendo la condición de que el momento cuadrupolar de la solución numérica y la solución analítica son iguales.

La correspondiente métrica de esta solución está dada por el elemento de línea axialmente simétrico (1.6) y se puede escribir como [25]

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\varphi)^2 + k^2 f^{-1} \left[e^{2\gamma} (x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + (x^2 - 1)(1 - y^2) d\varphi^2 \right], \quad (3.1)$$

en el cual los coeficientes métricos f , γ y ω son las siguientes funciones racionales de las coordenadas x y y

$$\begin{aligned} f &= E/D, \quad e^{2\gamma} = E/16k^8(x^2 - y^2)^4, \quad \omega = (y^2 - 1)L/E, \\ E &= \{4[k^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)]^2 + (a - b)[(a - b)(d - \delta) - M^2b](1 - y^2)^2\}^2 \\ &\quad - 16k^2(x^2 - 1)(1 - y^2)\{ (a - b)[k^2(x^2 - y^2) + 2\delta y^2] + M^2by^2 \}^2, \\ D &= \{4(k^2x^2 - \delta y^2)^2 + 2kMx[2k^2(x^2 - 1) + (2\delta + ab - b^2)(1 - y^2)] + (a - b)[(a - b) \\ &\quad \times (d - \delta) - M^2b](y^4 - 1) - 4d^2\}^2 + 4y^2\{2k^2(x^2 - 1)[kx(a - b) - Mb] \\ &\quad - 2Mb\delta(1 - y^2) + [(a - b)(k^2 - 2\delta) - M^2b](2kx + M)(1 - y^2)\}^2, \\ L &= 8k^2(x^2 - 1)\{ (a - b)[k^2(x^2 - y^2) + 2\delta y^2] + M^2by^2 \} \\ &\quad \times \{ kMx[(2kx + M)^2 - a^2 + b^2 - 2y^2(2\delta + ab - b^2)] - 2y^2(4\delta d - M^2b^2) \} \\ &\quad - \{4[k^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)]^2 + (a - b)[(a - b)(d - \delta) - M^2b](1 - y^2)^2\} \\ &\quad \times \left((1 - y^2)\{2M(2kx + M)[(a - b)(d - \delta) - b(M^2 + 2\delta)] - 4M^2b\delta \right. \\ &\quad \left. + (a - b)(4\delta d - M^2b^2)\} - 8k^2Mb(kx + M)(x^2 - 1) \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde

$$\delta := \frac{\mu^2 - m^2b^2}{m^2 - (a - b)^2}, \quad d := \frac{1}{4}[m^2 - (a - b)^2] \quad y \quad k := \sqrt{d + \delta}.$$

El campo electromagnético de esta solución está descrito por las componentes eléctrica A_t y magnética A_φ del cuadripotencial electromagnético $A_\alpha = (0, 0, A_\varphi, -A_t)$. Estas dos cantidades están dadas por la parte real de los siguientes potenciales complejos

$$\Phi_1 = \frac{2i\mu C}{A + 2MB}, \quad (3.3)$$

$$\Phi_2 = \frac{K}{A + 2MB}, \quad (3.4)$$

donde

$$\begin{aligned}
 A &= 4[(k^2x^2 - \delta y^2)^2 - d^2 - ik^3xy(a-b)(x^2-1)] \\
 &\quad - (1-y^2)[(a-b)(d-\delta) - M^2b][(a-b)(y^2+1) + 4ikxy], \\
 B &= kx\{2k^2(x^2-1) + [b(a-b) + 2\delta](1-y^2)\} \\
 &\quad + iy\{2k^2b(x^2-1) - [k^2(a-b) - M^2b - 2a\delta](1-y^2)\}, \\
 C &= 2k^2y(x^2-1) + [2\delta y - ikx(a-b)](1-y^2), \\
 K &= (1-y^2)\left(2k^2(x^2-1)[3m + 2kx + iy(a-b)]\right. \\
 &\quad \left.+ m\{4\delta + (b-a)[(y^2-1)b + 2a]\} + (m + 2kx)[m^2 + \delta(1-y^2)]\right. \\
 &\quad \left.- 2iy[(m^2 + 2kxm + 2\delta)b - 2a\delta]\right)\mu,
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 A_t &= \mathbf{Re}[\Phi_1], \\
 A_\varphi &= \mathbf{Re}[\Phi_2].
 \end{aligned}$$

SECCIÓN 3.2

ÓRBITAS EN EL PLANO ECUATORIAL

Como caso particular se consideran las trayectorias de las partículas en el plano ecuatorial de la fuente central, dado por $y = 0$ con lo cual $\dot{y} = 0$ y $\ddot{y} = 0$. Con esta restricción se puede decir que las ecuaciones (1.12), (1.13) y (1.19) dan toda la información acerca de la naturaleza de las órbitas. En este caso \dot{x} , la otra primera integral, puede ser obtenida directamente usando \dot{t} y $\dot{\varphi}$ de (1.12) y (1.13) en (1.19), con lo cual se obtiene

$$\dot{x}^2 = -\frac{1}{g_{xx}D} [D + g_{tt}(l - eA_\varphi)^2 - g_{\varphi\varphi}(E - eA_t)^2 - 2g_{t\varphi}(E - eA_t)(l - eA_\varphi)], \quad (3.5)$$

con $D = g_{\varphi\varphi}g_{tt} + g_{t\varphi}^2$. Ahora, \dot{x} es la velocidad propia de la partícula en la dirección radial, si se considera la ecuación $\dot{x} = 0$, se obtienen los puntos de retorno para la partícula en su órbita. En los puntos $\dot{x} = 0$ la partícula está en equilibrio bajo la interacción gravitacional, electromagnética y de fuerzas centrífugas. Así, la energía de la partícula E_{min} , calculada en $\dot{x} = 0$, da la “energía potencial efectiva” que tiene la partícula cuando esta sujeta a este balance de fuerzas. Entonces, resolviendo la ecuación $\dot{x} = 0$ para E , se obtiene el “potencial efectivo” denotado por V_{eff} , para la partícula en su movimiento radial [18]. Estudiando la estructura de V_{eff} , para diferentes valores de las constantes l y e , se puede analizar la naturaleza de las órbitas y su estabilidad.

De la ecuación (3.5), tomando $\dot{x} = 0$, se obtiene la expresión para el potencial efectivo, dada por

$$V_{eff} \equiv E_{\pm} = e A_t - \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} (l - e A_{\varphi}) \pm \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} \{D [g_{\varphi\varphi} + (l - e A_{\varphi})^2]\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.6)$$

el signo \pm indica los estados de energía positivos y negativos para la partícula.

En las figuras 3.1 - 3.5 se ha muestra la gráfica potencial efectivo (3.6) contra x , para diferentes valores de los parámetros físicos de la solución, con el fin de determinar la influencia de cada uno de ellos sobre el potencial. Las figura 3.1 es la gráfica del potencial efectivo en el caso estacionario de vacío, es decir en ausencia de campo magnético o $\mu = 0$, en este caso se puede observar que el potencial es un función creciente y que no presenta máximos (órbitas circulares inestables) ni mínimos (órbitas circulares estables). Las gráficas 3.3a y 3.3b (estas dos figuras corresponden a los mismos parámetros, sólo que se muestran en intervalos diferentes) también representan un caso estacionario de vacío, pero para un conjunto de valores numéricos diferentes de los de la figura 3.1. En este caso el potencial tiene una estructura diferente ya que posee máximos y mínimos (ver figura 3.3a), sin embargo se ha mostrado en la figura 3.3b que el potencial no es regular cerca a la fuente (este comportamiento también está presente en la figura 3.1). Un resultado importante se muestra en las figuras 3.2 y 3.3c, donde se ha dibujado el potencial efectivo, pero esta vez incluyendo un valor diferente de cero para μ . Se puede observar que la presencia del parámetro de dipolo magnético μ altera considerablemente la estructura del potencial efectivo, se nota que al introducir el parámetro μ aparecen órbitas estables dadas por los puntos donde el potencial es mínimo. Además, estas órbitas aparecen en una zona donde el potencial no era regular, por lo tanto, podemos decir que la presencia del campo magnético, además, de aumentar la posibilidad de encontrar órbitas estables también regulariza el potencial.

En las figuras 3.4 y 3.5, se muestra como varía el potencial efectivo cuando se cambian los valores de los parámetros a y b . Se puede observar que para todos los valores utilizados, siempre existe un mínimo en el potencial, que está relacionado con la existencia de una órbita circular estable, cuyo radio depende de los valores numéricos utilizados para los diferentes parámetros de la solución. Los valores utilizados se toman de acuerdo a las referencias: [34], donde se presentan soluciones numéricas interiores, que se obtienen utilizando diferentes ecuaciones de estado y resolviendo numéricamente las ecuaciones de Einstein y que representan estrellas de neutrones rápidamente rotantes, y la referencia [35] donde se presentan las primeras soluciones numéricas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell que describen estrellas de neutrones rápidamente rotantes rodeadas por un campo magnético.

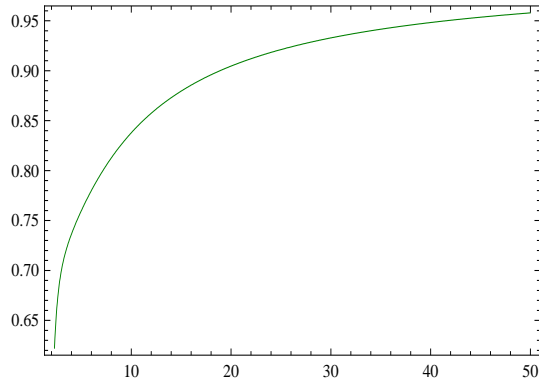


Figura 3.1: Potencial efectivo (3.6) en función de x , para una partícula con carga $e = \pm 15,26$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [25]. Los valores numéricos son: $m = 2,215$, $a = 1,5$, $b = 0$ $\mu = 0$, $l = 5$.

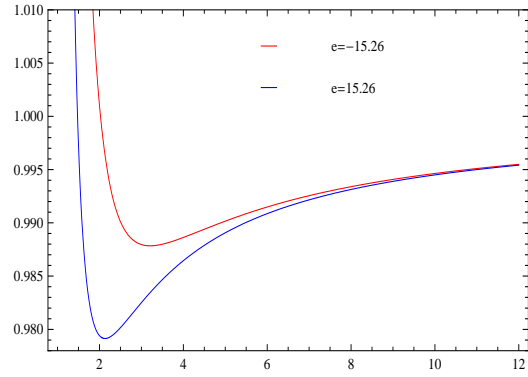


Figura 3.2: Potencial efectivo para los mismos valores de m , a , e , b y l de la figura 3.1. En este caso se ha tomado $\mu = 65,10$.

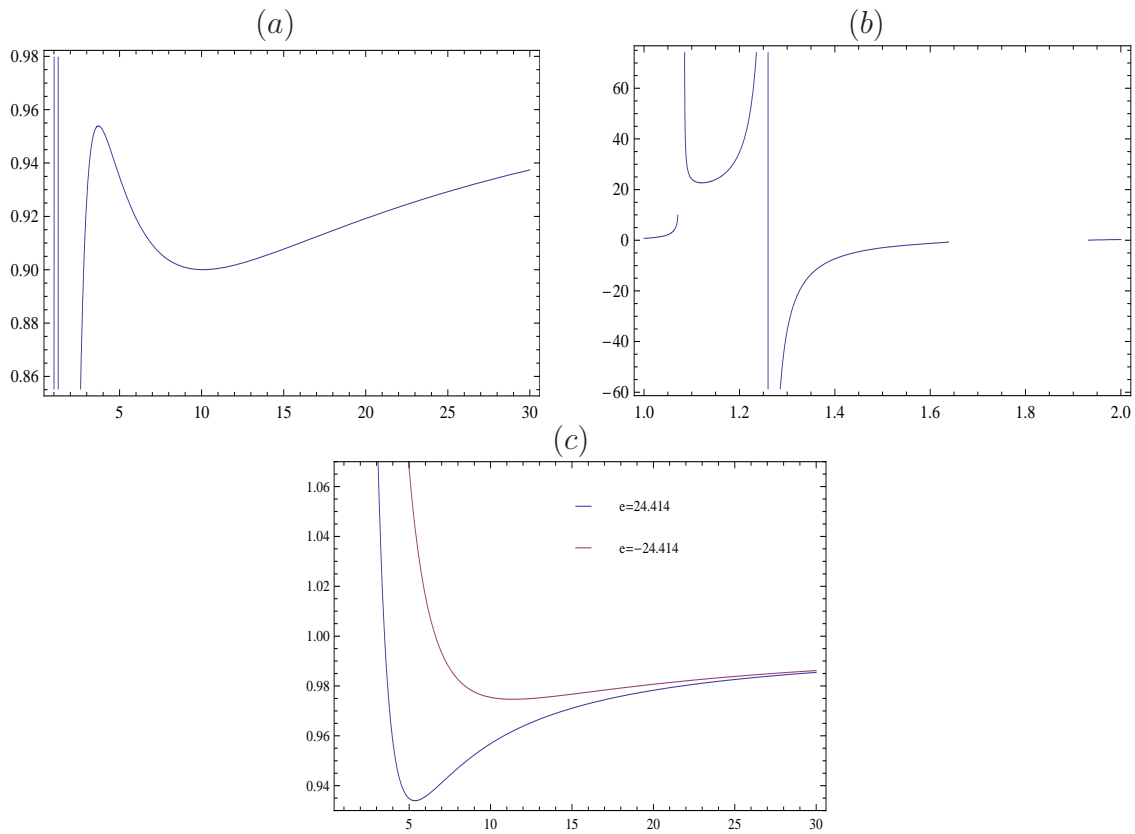


Figura 3.3: Potencial efectivo (3.6) en función de x , para una partícula con carga $e = \pm 24,414$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [25]. Los valores numéricos son: $m = 2,215$, $a = 1,2$, $b = 0,5$ $\mu = 9,356$, $l = 5$.

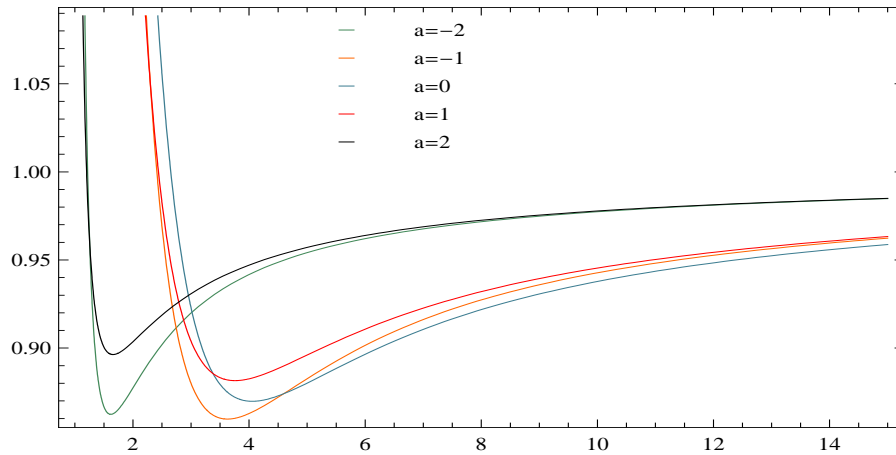


Figura 3.4: V_{eff} para una carga $e = 15,259$ y momento angular $l = 5$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [25]. Los parámetros físicos son $\mu = 6,51$, $b = 1$, $m = 2,126$.

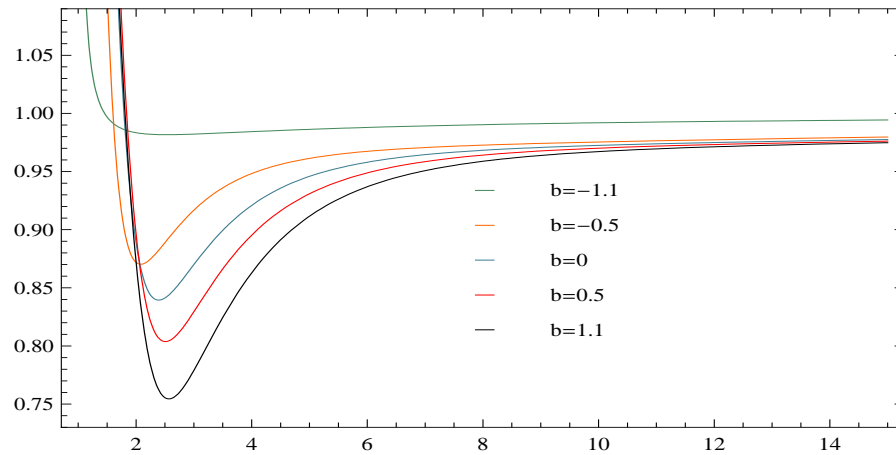


Figura 3.5: V_{eff} para una carga $e = 15,259$ y momento angular $l = 12,5$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [25]. Los parámetros físicos son $\mu = 6,510$, $m = 2,215$, $a = 1,1$.

SECCIÓN 3.3

INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

En esta sección se presentan los resultados de la integración numérica de las ecuaciones de movimiento, para partículas cargadas en el plano ecuatorial de una fuente rotante con campo magnético, descrita por la solución de Manko et al y cuyo potencial efectivo fue estudiado en la sección anterior. Las ecuaciones de movimiento en el plano ecuatorial de la fuente central son obtenidas directamente de la ecuaciones (1.12), (1.13), (1.16) y (1.19),

haciendo $y = 0$, con lo cual se obtiene:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2g_{xx}} \left[\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial x} \dot{\varphi}^2 - 2e \frac{\partial A_t}{\partial x} \dot{t} - \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} \dot{x}^2 - \frac{\partial g_{tt}}{\partial x} \dot{t}^2 + 2\dot{\varphi} \left(\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial x} \dot{t} + e \frac{\partial A_\varphi}{\partial x} \right) \right], \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = & -\frac{1}{D} \left[\left(g_{tt} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial x} - g_{t\varphi} \frac{\partial g_{tt}}{\partial x} \right) \dot{x} \dot{t} + \left(g_{t\varphi} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial x} - g_{tt} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial x} \right) \dot{x} \dot{\varphi} \right. \\ & \left. + \left(-g_{t\varphi} \frac{\partial A_t}{\partial x} + g_{tt} \frac{\partial A_\varphi}{\partial x} \right) e \dot{x} \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\dot{x}^2 = -\frac{1}{g_{xx} D} [D + g_{tt} (l - e A_\varphi)^2 - g_{\varphi\varphi} (E - e A_t)^2 - 2 g_{t\varphi} (E - e A_t)(l - e A_\varphi)], \quad (3.9)$$

$$\dot{t} = \frac{-[g_{\varphi\varphi} (E - e A_t) + g_{t\varphi} (l - e A_\varphi)]}{g_{\varphi\varphi} g_{tt} + g_{t\varphi}^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{g_{t\varphi} (E - e A_t) + g_{tt} (l - e A_\varphi)}{g_{\varphi\varphi} g_{tt} + g_{t\varphi}^2}, \quad (3.10)$$

con $D = g_{\varphi\varphi} g_{tt} + g_{t\varphi}^2$. El sistema de ecuaciones (3.7)-(3.10) permite realizar el estudio completo de la trayectoria de partículas cargadas en el espacio tiempo dado, a través de su integración numérica utilizando el método de Runge-Kutta-Fehlberg. Este procedimiento se realiza fijando valores numéricos a los parámetros de la solución: la masa m , el dipolo magnético μ , el momento angular total por unidad de masa a y el parámetro de deformación arbitraria b de la fuente, junto con la carga de la partícula de prueba e y las condiciones iniciales del sistema $(\dot{x}_0, \dot{\varphi}_0, x_0, \varphi_0, l$ y $E)$.

En figuras 3.6-3.23, se presentan las trayectorias de partículas cargadas en el plano ecuatorial de una fuente masiva rotante con campo magnético. Estas figuras son el resultado de integrar el sistema de ecuaciones (3.7)-(3.10), en cada grupo de figuras se presenta la gráfica del potencial efectivo correspondiente a los parámetros utilizados. El resultado más importante es que estas órbitas no existen en el caso puramente gravitacional y que su aparición se debe al campo magnético de la fuente. De igual manera se puede observar que, aunque se tiene el movimiento de una partícula cargada en un campo electromagnético, su movimiento no siempre es del tipo de Larmor.

En las figuras 3.24-3.27 se puede observar cómo se modifica el potencial efectivo y la trayectoria de las partículas, cuando se introduce el parámetro de rotación a . En este caso se tiene que si $a = 0$, la solución es la de Bonnor (caso estático) y si es diferente de cero es la solución de Manko et al. (caso estacionario) con el parámetro $b = 0$. Los valores numéricos para los parámetros m , μ , e , E y l son los mismos en los dos casos. De esta "comparación" se puede decir lo siguiente: las curvas del potencial en el caso estático (3.24) y en el caso estacionario (3.26) son del mismo tipo; respecto al radio de la órbita estable, se puede concluir que es mayor en el caso estático; es decir, que la órbita se acercó a la fuente cuando se introdujo el parámetro de rotación; la energía de la órbita es mayor en el caso estacionario y por último se observa que la forma de las trayectorias de las partículas en el caso estático (3.25) y en el caso estacionario (3.27) son muy similares, siendo en los dos casos movimiento de Larmor. De lo anterior, se puede decir que para algunos casos muy particulares, las características generales del movimiento (p: la forma del potencial, la forma de las trayectorias, el tipo de movimiento, etc.), no dependen de la fuente.

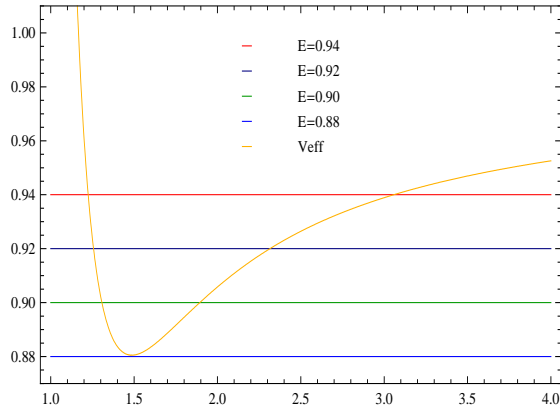


Figura 3.6: Gráfica del potencial efectivo (3.6) como función de x . Los parámetros físicos son $m = 2,215$, $e = 15,259$, $\mu = 6,510$, $l = 10$, $a = 2$, $b = 0$.

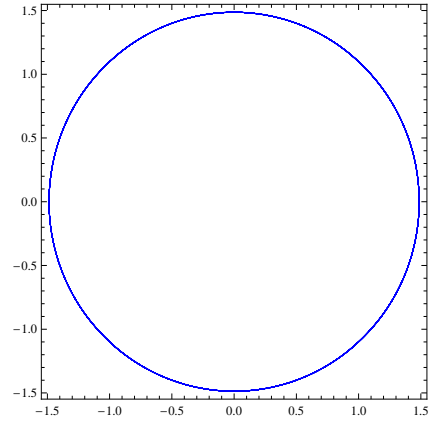


Figura 3.7: Órbita circular de una partícula cargada positivamente. Se ha tomado $m = 2,215$, $e = 15,259$, $\mu = 6,510$, $l = 10$, $a = 2$, $b = 0$, $E = 0,088$, $x_0 = 1,486$, $\dot{x}_0 = 0$ y $\varphi_0 = 0,004$.

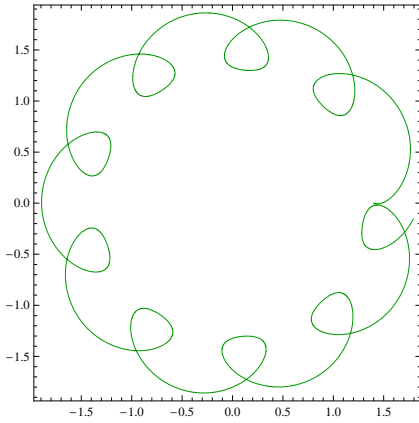


Figura 3.8: Órbita acotada en sentido de las manecillas del reloj aunque la partícula gira en sentido contrario. Se han fijado los valores numéricos: $E = 0,90$, $x_0 = 1,4$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,0017$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,004$.

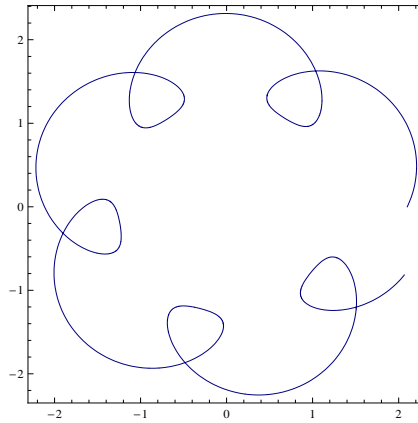


Figura 3.9: Órbita acotada que corresponde a los valores numéricos: $E = 0,92$, $x_0 = 2,1$, $\varphi_0 = 0$, y $\dot{x}_0 = 0,016$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,165$.

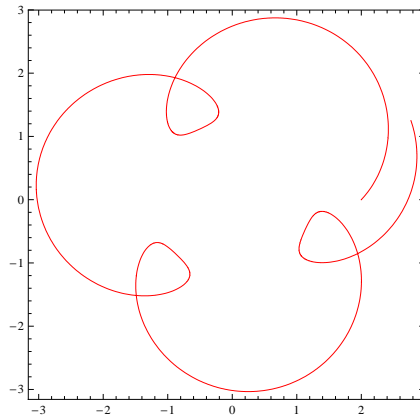


Figura 3.10: Nuevamente una órbita acotada. Se ha tomado $E = 0,94$, $x_0 = 2$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,031$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,017$. EL sentido de giro de la partícula en su órbita es el mismo de las figuras 3.8 y 3.9.

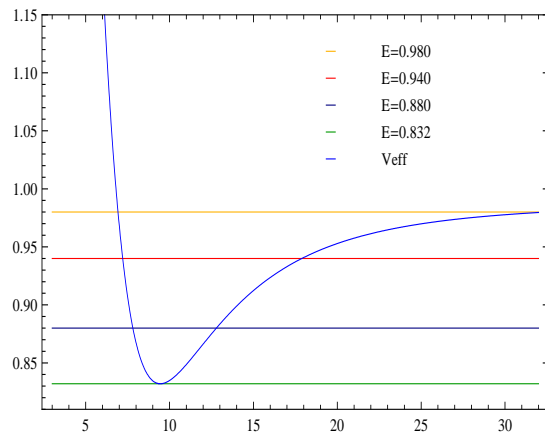


Figura 3.11: Potencial efectivo (3.6) como función de x . Los parámetros físicos son $e = 45,776$, $l = 17$, $\mu = 6,510$, $m = 2,067$, $a = 1,5$, $b = 3$.

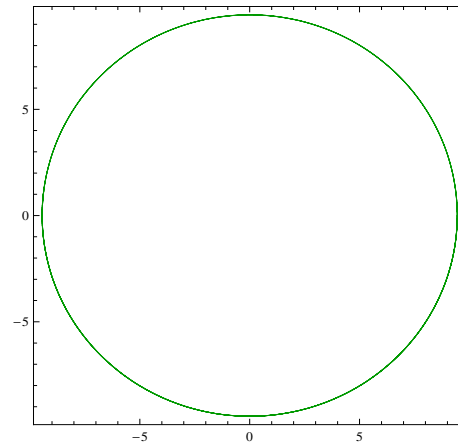


Figura 3.12: Órbita circular. Se ha tomado $e = 45,776$, $l = 17$, $\mu = 6,510$, $m = 2,067$, $a = 1,5$, $b = 3$, $E = 0,832$, $x_0 = 9,45$, $\dot{x}_0 = 0$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,014$.

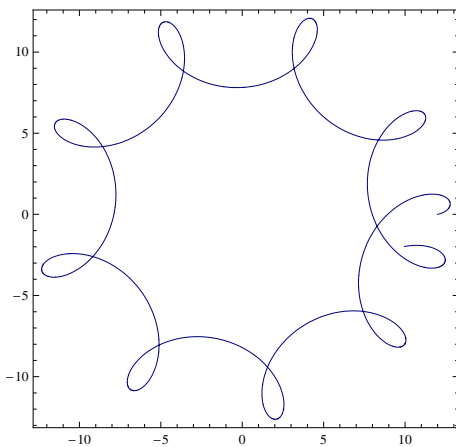


Figura 3.13: Órbita acotada con valores numéricos: $E = 0,880$, $x_0 = 12$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,101$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,002$.

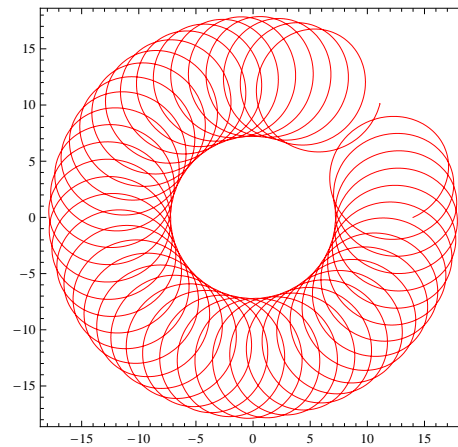


Figura 3.14: Órbita acotada que corresponde a los valores numéricos: $E = 0,940$, $x_0 = 14$, $\varphi_0 = 0$, y $\dot{x}_0 = 0,178$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,006$.

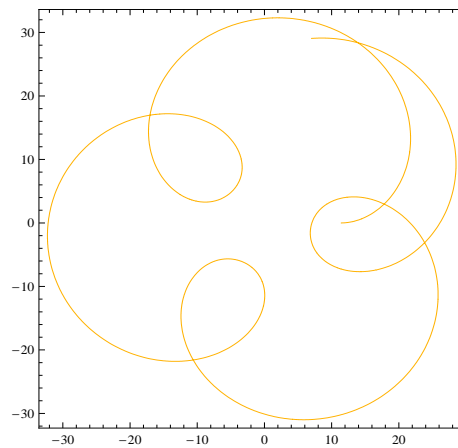


Figura 3.15: Órbita acotada. Se ha tomado $E = 0,980$, $x_0 = 11,45$, $\dot{x}_0 = 0,311$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,0002$.

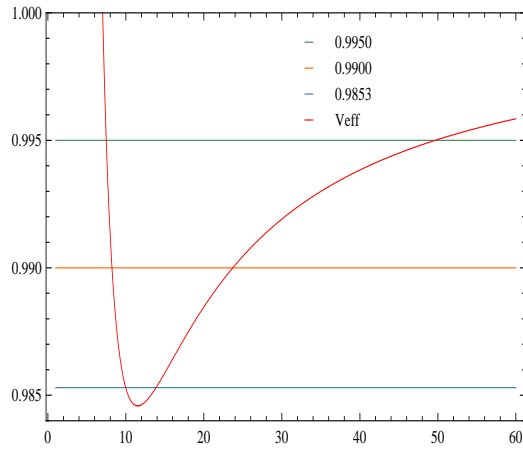


Figura 3.16: Gráfica del potencial efectivo (3.6) como función de x . Los parámetros físicos son $e = -45,778$, $l = 3$, $m = 2,067$, $\mu = 16,683$, $a = -1,2$, $b = -1,7$.

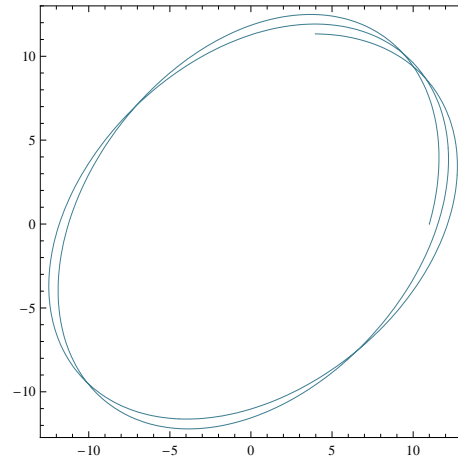


Figura 3.17: Órbita acotada que se desvía ligeramente de una órbita circular. Se ha tomado $e = -45,778$, $l = 3$, $m = 2,067$, $\mu = 16,683$, $a = -1,2$, $b = -1,7$, $E = 0,0,985$, $x_0 = 11$, $\dot{x}_0 = 0,004$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,0014$.

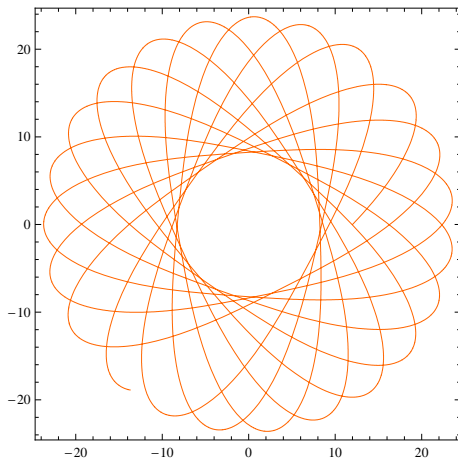


Figura 3.18: Órbita acotada. Los valores numéricos son: $E = 0,990$, $x_0 = 12$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,012$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,0011$.

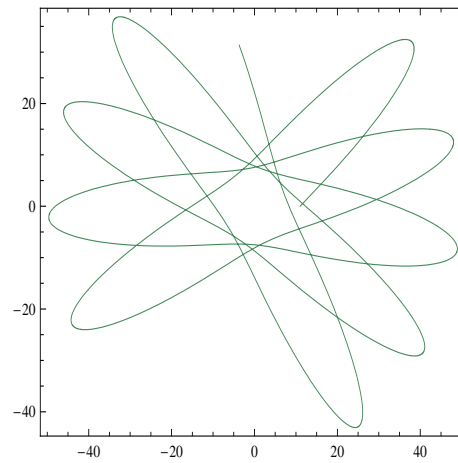


Figura 3.19: Nuevamente una órbita acotada, en esta ocasión con $E = 0,995$, $x_0 = 11$, $\varphi_0 = 0$, y $\dot{x}_0 = 0,017$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,0014$. Obsérvese de que a pesar de considerarse una partícula cargada en un campo magnético, el movimiento resultante no es de Larmor, como en las figuras 3.8 - 3.10 y 3.13 - 3.15]

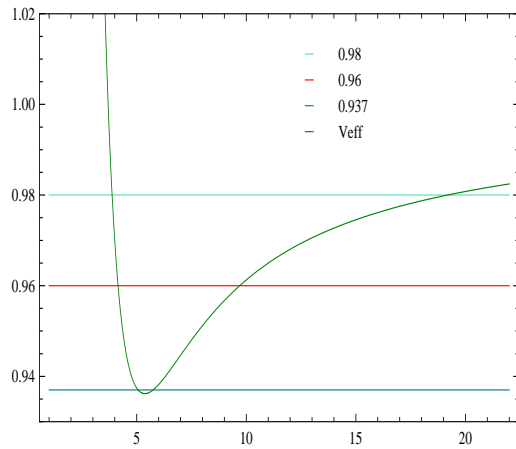


Figura 3.20: Potencial efectivo (3.6) como función de x . Se ha tomado $e = 45,776$, $l = 10$, $m = 2,067$, $\mu = 6,510$, $a = 1,5$, $b = 0$.

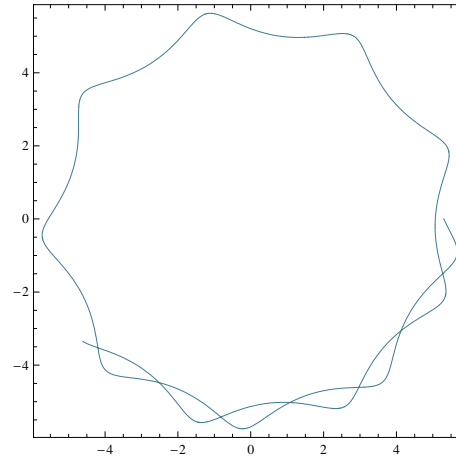


Figura 3.21: Órbita acotada. Los valores numéricos son $e = 45,776$, $l = 10$, $m = 2,067$, $\mu = 6,510$, $a = 1,5$, $b = 0$, $E = 0,937$, $x_0 = 5,3$, $\dot{x}_0 = 0,008$ y $\varphi_0 = -0,003$.

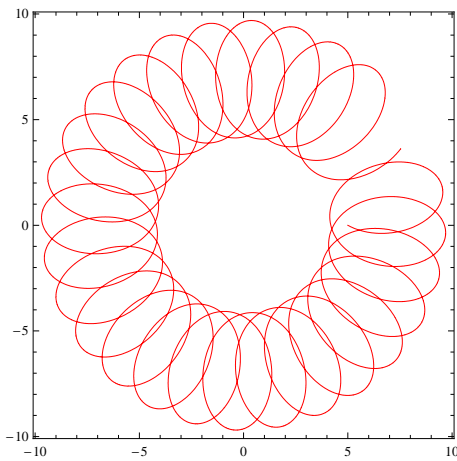


Figura 3.22: Nuevamente una órbita acotada, se ha tomado $E = 0,96$, $x_0 = 5$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,044$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,048$. Obsérvese que se presenta un movimiento de larmor, que esta ausente en la figura 3.21, aunque las dos son órbitas acotadas.

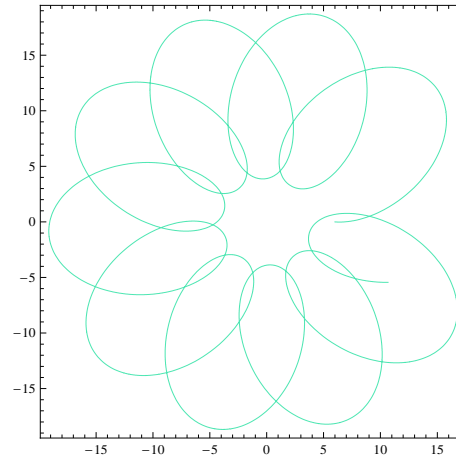


Figura 3.23: Órbita acotada, nuevamente con movimiento de larmor y que corresponde a los valores numéricos: $E = 0,98$, $x_0 = 6$, $\varphi_0 = 0$, y $\dot{x}_0 = 0,0602$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,0008$.

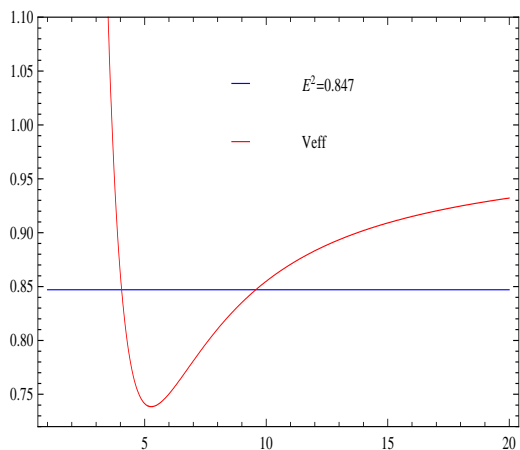


Figura 3.24: Potencial efectivo (2.15) para una partícula de carga 30,517 que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [24]. Se ha tomado $l = 10$, $m = 2,215$, $\mu = 5,086$.

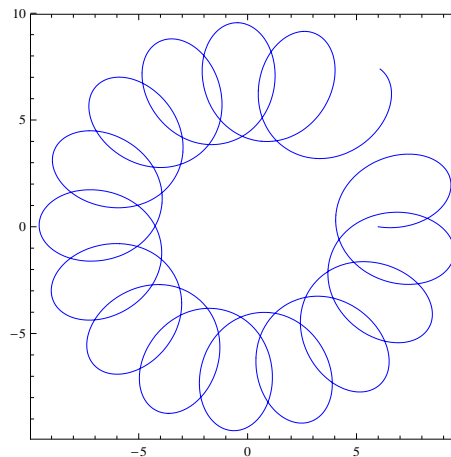


Figura 3.25: Órbita acotada. Vista de las órbitas de una partícula cargada positivamente moviéndose en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [24]. Se ha tomado $m = 2,215$, $e = 30,517$, $\mu = 5,086$, $l = 10$, $E = 0,92$, $x_0 = 6$, $\dot{x}_0 = 0,122$ y $\dot{\varphi}_0 = -0,003$.

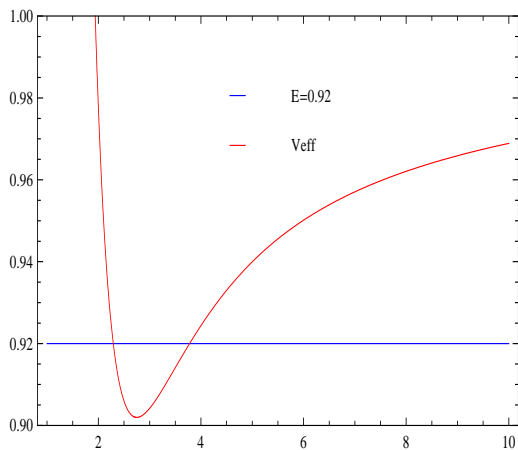


Figura 3.26: Potencial efectivo (3.6) en función de x , para una partícula con carga $e = 30,517$ que se mueve en la vecindad de una fuente masiva magnetizada [25]. Los valores numéricos son: $m = 2,215$, $a = 2$, $b = 0$, $\mu = 5,086$, $l = 10$.

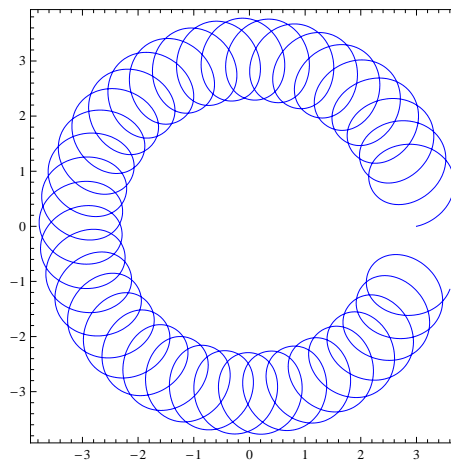


Figura 3.27: Órbita acotada. Vista de las órbitas de una partícula cargada moviéndose en la vecindad de una fuente masiva magnetizada rotante [25]. Los valores numéricos son: $m = 2,215$, $a = 2$, $b = 0$, $\mu = 5,086$, $l = 10$, $E = 0,92$, $x_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,029$ y $\dot{\varphi}_0 = 0,002$.

CAPITULO 4

CONCLUSIONES

Se estudió el movimiento de partículas cargadas en la vecindad de fuentes magnetizadas estáticas y estacionarias. Para el estudio se utilizaron dos soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell: la solución de Bonnor [24], que representa una fuente masiva estática magnetizada, y la solución de Manko et al. [25], que fue presentada como el campo exterior de estrellas de neutrones rotantes. Estas soluciones dependen de diferentes parámetros, cada uno con una interpretación física diferente. Como se mencionó en las secciones 2.2 y 3.2. el trabajo se centra en analizar dos aspectos: el primero de ellos, el potencial efectivo de la partícula en su movimiento radial y el segundo integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento, todo esto en el plano ecuatorial de la fuente central.

Para el caso del potencial efectivo, se encuentra que la presencia del campo magnético modifica considerablemente la estructura del potencial, incrementa el rango de órbitas estables, estabiliza órbitas originalmente inestables y en algunos casos lo regulariza. Esto se puede observar en las figuras 2.1-2.3 para el caso estático y en las figuras 3.1-3.3 para el caso estacionario. Dado que se consideran partículas cargadas, se encuentra que el radio de las órbitas dependen del signo de la carga siendo mayor en el caso de partículas cargadas negativamente.

Respecto a las trayectorias de las partículas, en el caso de órbitas acotadas, se encontraron órbitas de dos tipos: las primeras corresponden a trayectorias de partículas que efectúan movimiento de Larmor, que se deben a la interacción de la carga eléctrica de las partículas de prueba con el campo magnético de la fuente. Las segundas corresponden a órbitas acotadas que no son de tipo Larmor. Esto ocurre por que sobre la partícula no solamente actúan fuerzas de Coulomb sino también fuerzas gravitacionales y centrífugas, y el tipo de movimiento depende exclusivamente de como sea el balance de estas fuerzas, que está de-

terminado por la elección del valor numérico particular de los parámetros.

Se encontró que el análisis del potencial efectivo no es suficiente para caracterizar completamente el movimiento de las partículas, ya que se siempre hay una fuerte dependencia de los parámetros y cualquier variación en éstos puede cambiar por completo la naturaleza del movimiento, mucho más en soluciones tan complicadas como las que se estudiaron en el presente trabajo y para las cuales los estudios analíticos son inalcanzables. Lo anterior es una buena motivación para el estudio mediante análisis numérico, ya que éste puede dar cuenta de efectos más finos, por ejemplo, si el movimiento es del tipo Larmor o no; el cambio en la dirección de rotación de las partículas, aún cuando se mantienen constantes los parámetros de la fuente, la carga de la partícula y el momento angular de la misma; este cambio en la dirección de rotación sería natural si se invierte el signo de la carga o del momento angular. El efecto mencionado anteriormente se puede observar en las figuras 2.8-2.9, en el caso estático y en las figuras 3.14-3.15 y 3.22-3.23, para el caso estacionario; cabe notar que lo anterior no se puede observar si se estudia únicamente el potencial.

REFERENCIAS

- [1] D. PAGE, J. M. LATTIMER, M. PRAKASH and A. W. STEINER, *Minimal cooling of neutron stars: A New paradigm*, *Astrophys. J.* **155**, 623 (2004).
- [2] D. G. YAKOVLEV and C. J. PETHICK, *Neutron star cooling*. *Ann. Rev. Astron. Astrophys* **42**, 169 (2004).
- [3] W. VOGES et al. *The ROSAT all - sky survey bright source catalogue*. *Astron. Astrophys.* **349**, 389 (1999).
- [4] M. C. WEISSKOPF, M. KAROVSKA, G. G. PAVLOV, V. E. ZAVLIN and T. CLARKE, *Chandra observations of neutron stars: an overview*. *Astrophys. Space Sci.* **308**, 151 (2007).
- [5] M. H. VAN KERKWIJK and D. L. KAPLAN, *Isolated neutron stars: Magnetic fields, distances, and spectra*. *Astrophys. Space Sci.* **308**, 191 (2007).
- [6] S. B. POPOV and V. M. LIPUNOV, *Neutron stars in x-ray pulsars and their magnetic fields*. *Grav. Cosmol. Suppl.* **6**, 229 (2000).
- [7] S. CHANDRASEKHAR, *The Density of White Dwarf Stars*. *Phil. Mag.* **11**, 592 (1931).
- [8] W. BAADE and F. ZWICK, *Remarks on Super-Novae and cosmic rays*. *Phys. Rev.* **45**, 76 (1934).
- [9] L. D. LANDAU, *On the theory of stars*. *Phys. Z. Sowjet.* **1**, 285 (1932).
- [10] C. W. MISNER, K. S. THORNE and J. A. WEELER, *Gravitation*. *W H Freeman and Company* (1973).
- [11] H. STEPHANI, D. KRAMER, M. MACCALLUM, C. HOENSELAERS and E. HERLT, *Exact solution of Einstein's field equations second edition*. *Cambridge University Press* (2003).
- [12] J. M. BARDEEN, *Les houches lectures black holes*, eds. Dewitt and Dewitt, **p. 219**
- [13] A. C. FABIAN and M. J. REES, *The Accretion luminosity of a massive black hole in an elliptical galaxy*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **277**, L55 (1995).

-
- [14] R. NARAYAN and I. YI, *Advection dominated accretion: Selfsimilarity and bipolar outflows. Astrophys. J.* **277**, L55 (1995).
- [15] A. K. HARDING, *Physics of strongly magnetized neutron stars. Rept. Prog. Phys.* **69**, 2631 (2006).
- [16] S. MIGLIARI, J. A. TOMSICK, T. J. MACCARONE, E. GALLO, R. P. FENDER, G. NELEMANS and D. M. RUSSELL, *Spitzer reveals infrared optically-thin synchrotron emission from the compact jet of the Neutron Star X-Ray binary 4U 0614+091.. Astrophys. J.* **643**, L41 (2006).
- [17] E. POISSON, *Charged particle trajectories in a magnetic field on a curved space-time. Living Reviews in Relativity* **7**, 6 (2004).
- [18] A. R. PRASANNA, *General-Relativistic analysis of charged-particle motion in electromagnetic fields surrounding black holes. Riv. Nuovo Cimento* **3** 11 (1980).
- [19] A. N. ALIEV and N. ÓZDEMİR, *Motion of charged particles around a rotating black hole in a magnetic field. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **336**, 241 (2002).
- [20] A. R. PRASANNA and C. V. VISHVESHWARA, *Charged particle motion in an electromagnetic field on Kerr backgroun geometry. Pramana* **11**, 259 (1978).
- [21] A. R. PRASANNA and R. K. VARMA, *Charged particle trajectories in a magnetic field on a curved space-time. Living Reviews in Relativity* **8**, 229 (1977).
- [22] B. MIRZA, *Charged particle dynamics in the field of a slowly rotating compact star. Int. J. Mod. Phys. D* **14**, 609 (2005).
- [23] G. PRETI, *On charged particle orbits in dipole magnetic fields around Schwarzschild black holes. Class. Quantum Grav.* **21**, 3433 (2004).
- [24] W. B. BONNOR, *An exact solution of the Einstein-Maxwell equations referring to a magnetic dipole. Z. Phys.* **190**, 444 (1966).
- [25] V. S. MANKO, E. W. MIELKE and J. D. SANABRIA-GÓMEZ, *Exact solution for the exterior field of a rotating neutron star. Phys. Rev. D* **61**, 081501 (2000).
- [26] T. LEWIS, *Some special solutions of the equations of axially symmetric gravitational fields. Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 136**, 176 (1932).
- [27] A. PAPAPETROU, *Champs gravitationnels stationnaires à symétrie axiale. Ann. Inst. H. Poincaré* **A 4**, 83 (1966).
- [28] S. E. THORSET and D. CHAKRABARTY, *Neutron star mass measurements. I. Radio pulsars. Astrophys. J.* **512**, 288 (1999).
- [29] C. M. ZHANG et al. *Measuring neutron star mass and radius with three mass-radius relations. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **336**, 241 (2002).

-
- [30] J. R. OPPENHEINER and G. M. VOLKOFF, *On Massive Neutron Cores*. *Phys. Rev.* **55**, 374 (1939).
- [31] V. R. PANDHARIPANDE, D. PINES and R. A. SMITH, *Neutron star structure: theory, observation and speculation*. *Astrophys. J.* **208**, 550 (1976).
- [32] G. B. COOK, S. T. SHAPIRO and S. A. TEUKOLSKY, *Rapidly Rotating neutron stars in general relativity: realist equations of state*. *Astrophys. J.* **424**, 823 (1994).
- [33] A. AKMAL, V. R. PANDHARIPANDE and D. G. RANVENHALL, *Equation of state of nucleon matter and neutron star structure*. *Phys. Rev. C* **58**, 1804 (1998).
- [34] E. BERTI and N. STERGIIOULAS, *Approximate matching of analytic and numerical solutions for rapidly rotating neutron stars*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **350**, 1416 (2004).
- [35] M. BOCQUET, S. BONAZZOLA, E. GOURGOULHOM and J. NOVAK, *Rotating neutron stars models with a magnetic field*. *Astron. Astrophys.* **301**, 757 (1995).
- [36] F.L. DUBEIBE and JOSE D. SANABRIA-GOMEZ, *Dinámica de geodésicas alrededor de objetos compactos*. *Universidad Industrial de Santander* (2006).
- [37] F.L. DUBEIBE, LEONARDO A. PACHON and JOSE D. SANABRIA-GOMEZ, *Chaotic dynamics around astrophysical objects with nonisotropic stresses*. *Phys. Rev. D* **75**, 023008 (2007).