

Razonamiento inferencial en el proceso de generalización de patrones

Saúl Fernando Blanco García

Trabajo de Grado para Optar el título de Magíster en Educación Matemática

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría En Educación Matemática

Bucaramanga

2019

Dedicatoria

A mis padres, por su apoyo incondicional, a mi esposa e hijo por su amor y comprensión.

Agradecimientos

A Dios, por todo lo bueno que da por nosotros.

A mi familia por su ayuda constante y su paciencia.

A mi esposa, por su constante insistencia y confianza.

A los profesores de la maestría por sus enseñanzas y colaboración.

A la profesora Solange, por sus enseñanzas y orientaciones con la ejecución de este proyecto.

A los estudiantes del Instituto Técnico Laguna de Ortices, por su participación y colaboración en el desarrollo de las actividades.

A mis compañeros de maestría, por los momentos compartidos.

Contenido

	Pág.
Introducción	15
1. Antecedentes	17
1.1. Una mirada desde los documentos curriculares.....	18
1.2 El proceso de Generalización.....	24
1.3 Razonamiento inferencial	29
2. Marco Referencial.....	32
2.1 Formas de Razonamiento Inferencial	33
2.1.1. Abducción.	34
2.1.2 Inducción.....	37
2.1.3. Abducción e Inducción juntas.....	40
2.1.4 Deducción.	43
2.2. Características de la generalización de patrones.....	45
2.2.1. Generalización Próxima y Lejana.	45
2.2.2. Diversas características de la generalización.	46
3. Problema de Investigación y Objetivos	52
3.1. Planteamiento del problema.....	53
3.2. Objetivo general.....	53
3.2.1. Objetivos del trabajo de aplicación.....	53

4. Método	54
4.1. Contexto de la Investigación y Población Participante.....	54
4.2. Proceso Metodológico	55
4.2.1. Diseño de Tareas para el aula de clase.....	56
4.2.2. Implementación de las tareas en el aula de clase.	59
4.2.3. Recolección y selección de datos.....	60
4.2.4 Análisis de datos.	62
4.3 Técnicas e Instrumentos de Investigación	63
4.4 Análisis A priori de las tareas.	64
4.5 Análisis A posteriori de las tareas.....	89
5. Conclusiones	157
Referencias Bibliográficas	163

Lista de Figuras

	Pág.
<i>Figura 1.</i> Emparejando números naturales con un patrón por repetición de objetos.	21
<i>Figura 2.</i> Representación de "cuadrados crecientes" con expresiones matemáticas	22
<i>Figura 3.</i> Costos de dos compañías telefónicas.....	23
<i>Figura 4.</i> Situación que puede modelarse mediante funciones de distintas clases.....	24
<i>Figura 5.</i> Adaptación del marco organizativo planteado por Rivera (2013, p. 59).....	32
<i>Figura 6.</i> Ejemplos de trabajos de segundo grado sobre la paridad par de números de dos dígitos.....	35
<i>Figura 7.</i> Trabajo de Nikki en la paridad par del número entero 22.	36
<i>Figura 8.</i> Secuencia figural de números triangulares	38
<i>Figura 9.</i> Construcción de los términos 4 y 5.....	39
<i>Figura 10.</i> Generalizaciones incipientes,.....	39
<i>Figura 11.</i> Secuencia figural de patrones en cruz.....	41
<i>Figura 12.</i> Ejemplo de una secuencia en un contexto erróneo	43
<i>Figura 13.</i> Una justificación empírica de $-a \times -b = -(a \times -b)$	44
<i>Figura 14.</i> Diseño Metodológico.....	56
<i>Figura 15.</i> Actividad diagnóstica. Tarea 1	66
<i>Figura 16.</i> Actividad diagnóstica. Tarea 2 Vergel, 2014	69
<i>Figura 17.</i> Secuencia figural apoyada en representación tabular	71

<i>Figura 18.</i> Secuencia numérica apoyada en representación tabular	73
<i>Figura 19.</i> Secuencia figural apoyada en representación tabular	76
<i>Figura 20.</i> Secuencia numérica apoyada en representación tabular	78
<i>Figura 21.</i> Tarea 7: Secuencia figural apoyada en representación tabular	80
<i>Figura 22.</i> Tarea 8: Secuencia numérica apoyada en representación tabular.....	82
<i>Figura 23.</i> Tarea 9: Secuencia figural apoyada en representación tabular	85
<i>Figura 24.</i> Tarea 10: Secuencia numérica sin representación tabular.	87
<i>Figura 25.</i> Actividad Diagnóstica Tarea 1 y 2 Secuencias Figurales.....	91
<i>Figura 26.</i> Producción Lisbeth, ítem c, tarea 1.....	99
<i>Figura 27.</i> Producción Karen, ítem c, tarea 1	99
<i>Figura 28.</i> Producción Óscar, ítem c, tarea 1	100
<i>Figura 29.</i> Secuencia figural Tarea 3 y secuencia numérica Tarea 4.	111
<i>Figura 30.</i> Producción de Saira, ítem d, Tarea 3	117
<i>Figura 31.</i> Producción de Saira, ítem e, Tarea 3	118
<i>Figura 32.</i> Producción de Yineth, ítem e, Tarea 4.....	124
<i>Figura 33.</i> Secuencia figural Tarea 5 y secuencia numérica Tarea 6.	125
<i>Figura 34.</i> Respuesta ítem b, tarea 5, estudiante Karen.	126
<i>Figura 35.</i> Respuesta ítem c, tarea 5, estudiante Charith.	126
<i>Figura 36.</i> Respuesta ítem e, tarea 5, estudiante Lisbeth.	131
<i>Figura 37:</i> Secuencia figural Tarea 7 y secuencia numérica Tarea 8.....	137
<i>Figura 38:</i> Respuesta al ítem d, grupo G _C	140
<i>Figura 39.</i> Respuesta al ítem b y c, estudiante Luis Alberto	141
<i>Figura 40.</i> Respuesta al ítem d estudiante Yineth.	144

<i>Figura 41.</i> Secuencia figural Tarea 9 y secuencia numérica sin ayuda tabular Tarea 10.....	145
<i>Figura 42.</i> Tarea 9. Respuestas ítem a y b Yineth y Davin.	146
<i>Figura 43.</i> Tarea 9. Respuestas ítem d, estudiante Yineth.	149
<i>Figura 44.</i> Tarea 10. Respuestas ítem e, estudiante Davin.....	154

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1. <i>Investigaciones sobre los procesos de generalización.</i>	25
Tabla 2. <i>Características de las formas de razonamiento inferencial</i>	33
Tabla 3. <i>Diseño de las tareas.</i>	57
Tabla 4. <i>Transcripción 1: Actividad Diagnóstica; Respuestas al ítem a, tarea 1, estudiantes Lisbeth, Davin y Alder.</i>	92
Tabla 5. <i>Transcripción 2: Actividad Diagnóstica; Respuestas al ítem b, tarea 1, estudiantes Lisbeth, Davin y Óscar.</i>	95
Tabla 6. <i>Transcripción 3: Actividad Diagnóstica; Respuestas al ítem d, tarea 1, estudiantes Lisbeth, Valentina y Karen.</i>	101
Tabla 7. <i>Transcripción 4: Actividad Diagnóstica; Respuestas al ítem a, tarea 2, estudiantes Saira y Lisbeth.</i>	104
Tabla 8. <i>Transcripción 5: Actividad Diagnóstica; Respuestas al ítem b, tarea 2, estudiantes Saira, Lisbeth y Luis Alberto.</i>	106
Tabla 9. <i>Transcripción 6: Actividad Diagnóstica; Respuestas al ítem d, tarea 1, estudiantes Lisbeth, y</i>	109
Tabla 10. <i>Transcripción 7: Tarea 3; Grupo G_A.</i>	112
Tabla 11. <i>Transcripción 8: Tarea 3; Grupo G_B.</i>	115
Tabla 12. <i>Transcripción 9: Tarea 4; Grupo G_B.</i>	119

Tabla 13. <i>Transcripción 10: Tarea 4; Grupo G_C</i>	122
Tabla 14. <i>Transcripción 11: Tarea 5 ítem c, estudiante Neyder.</i>	127
Tabla 15. <i>Transcripción 12: Tarea 5 ítem e, estudiante Lisbeth.</i>	129
Tabla 16. <i>Transcripción 13: Tarea 6; Grupo G_A</i>	132
Tabla 17. <i>Transcripción 14: Tarea 6; Grupo G_E</i>	134
Tabla 18. <i>Transcripción 15: Tarea 7; Grupo G_C</i>	138
Tabla 19. <i>Transcripción 16: Tarea 8; Grupo G_A</i>	142
Tabla 20. <i>Transcripción 17: Tarea 9; Estudiante Valentina</i>	147
Tabla 21. <i>Transcripción 18: Tarea 9; Grupo G_A</i>	150
Tabla 22. <i>Transcripción 19: Tarea 10; Grupo G_C</i>	153
Tabla 23. <i>Transcripción 20: Tarea 10; Grupo G_A</i>	155

Resumen

TÍTULO: RAZONAMIENTO INFERENCIAL EN EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES*

AUTOR: Saúl Fernando Blanco García**

PALABRAS CLAVE: *Razonamiento inferencial, Abducción, Inducción, Deducción, Generalización de Patrones.*

DESCRIPCIÓN

Esta investigación se centra en identificar, analizar y describir las formas de razonamiento abductivo, inductivo y deductivo que desarrollan estudiantes de los primeros grados de educación básica secundaria con edades entre 11 y 14 años en su actividad matemática, cuando enfrentan tareas que implican generalización de patrones figurales y numéricos.

Este trabajo en particular intenta aportar luces en relación con las características de cada forma de razonamiento, la manera como se expresan los estudiantes y algunas dificultades que evidencian. A su vez se busca con las tareas propuestas brindar elementos asociados con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar y generar reflexiones profundas en las formas alternativas de intervención en el aula.

La metodología adoptada se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, la cual permite realizar una descripción del fenómeno de estudio y profundizar en cómo se expresan las formas de razonamiento inferencial, que a su vez permite describir e interpretar los resultados expuestos por los estudiantes cuando desarrollan las tareas propuestas.

Los resultados de esta investigación evidencian que los estudiantes en la materialidad de la actividad logran expresar las formas de razonamiento inferencial, especialmente la abducción y la inducción, en cuanto a la deducción se evidencian aspectos interesantes en el desarrollo de ideas algebraicas.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias Exactas. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática Directora: Ph.D. Solange Roa Fuentes

Abstract

TITLE: INFERENTIAL REASONING IN THE PROCESS OF PATTERN GENERALIZATION*

AUTHOR: Saúl Fernando Blanco García**

KEY WORDS: Inferential reasoning, Abduction, Induction, Deduction, Generalization of Patterns.

DESCRIPTION

This research focuses on identifying, analyzing, and describing the forms of abductive, inductive, and deductive reasoning developed by students in the first grades of secondary basic education between the ages of 11 and 14 in their mathematical activity, when they face tasks that involve the generalization of figural and numerical patterns.

This particular work attempts to shed light on the characteristics of each form of reasoning, the way students express themselves, and some of the difficulties they encounter. At the same time, the proposed tasks seek to provide elements associated with the teaching and learning of school algebra and to generate profound reflections on alternative forms of intervention in the classroom.

The methodology adopted is developed under a qualitative approach, which allows for a description of the phenomenon of study and a deepening of how forms of inferential reasoning are expressed, which in turn allows for describing and interpreting the results presented by students when they develop the proposed tasks.

The results of this research show that students in the materiality of the activity are able to express the forms of inferential reasoning, especially abduction and induction, as far as deduction is concerned, interesting aspects are evident in the development of algebraic ideas.

* Graduation paper

** Faculty of Exact Sciences. School of Mathematics Master's in Mathematical Education Director: Ph.D. Solange Roa Fuentes

Introducción

Desarrollar el pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad es una idea que genera gran interés, lo cual se ha mostrado en propuestas curriculares y en reportes de investigación en Educación Matemática (MEN, 1998, 2006, Thales, 2003), donde se habla de su contribución en la posibilidad de estudio de conceptos más complejos del álgebra en niveles superiores, sin embargo se hace necesario profundizar sobre mejores maneras de potenciar el desarrollo de este tipo de pensamiento en edades tempranas.

La generalización de patrones es una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la educación básica (Radford, 2010b) la cual contribuye en generar situaciones de variación que se constituyen como importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico. Según Blanton y Kaput (2005, citados por Vergel, 2014) esto posibilita en el aula de clase:

La observación y la descripción de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, lo cual propicia un ambiente escolar en el que se valore que los estudiantes exploren, modelen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y desarrollen el pensamiento algebraico, como guía hacía una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas (pp. 13, 14).

En este sentido, Rivera (2013) en sus investigaciones muestra que centrales a la generalización de patrones se encuentra las formas de razonamiento inferencial: abducción, inducción y deducción; dada la importancia de reconocer los procesos de razonamiento. En este proceso se debe valorar que las diferentes interpretaciones e hipótesis por parte de los estudiantes, que incluyen importantes aspectos influenciados al conocimiento y la experiencia previa, inferencias

que apoyan de un modo razonable la regla o la ley que relaciona los casos conocidos y precedidos juntos de una manera coherente, estableciendo los procesos que conforman el análisis del razonamiento inferencial.

Particularmente en este trabajo se estudia el proceso de generalización de patrones que desarrolla un grupo de estudiantes cuando tiene su primer contacto en este campo y las formas de razonamiento inferencial que son desplegadas por ellos cuando se enfrentan a tareas que incluyen secuencias figurales, figurales con ayuda tabular (Vergel, 2014) y numéricas. El análisis del trabajo desarrollado se centra en describir cómo los estudiantes identifican, describen y reconocen los patrones que generan una secuencia, cuando se enfrentan a una tarea que tiene como objetivo expresar un patrón. En particular se analiza cómo los estudiantes desarrollan el proceso de generalización y la forma de abordar las características de las formas de razonamiento inferencial (abducción, inducción y deducción) además de mostrar cómo construyen explicaciones y argumentos de convencimiento sobre dichas formas de razonamiento.

Esta investigación se realizó con un enfoque cualitativo, dirigida a un grupo de estudiantes con edades de 11 a 14 años, del Instituto Técnico Laguna de Ortices, del municipio de San Andrés (Santander, Colombia). Con esta población se realizó una serie de actividades que buscan identificar las formas de razonamiento inferencial que expresan los estudiantes cuando realizan generalizaciones, al abordar diferentes tareas con patrones. Con esto, se espera que los estudiantes potencien su razonamiento matemático y logren el paso de la aritmética al álgebra en los siguientes grados de escolaridad, de tal manera que sea más provechoso y se despierte el interés por el estudio de las matemáticas. Se espera que con las actividades programadas se mejoren las experiencias pedagógicas de los estudiantes y contribuyan a mejorar la calidad educativa.

Este documento está organizado en cinco capítulos: en el primero *Antecedentes* en donde se presenta, una mirada desde los documentos curriculares, una síntesis de las investigaciones relacionadas con el proceso de generalización, para finalizar con las formas de razonamiento inferencial. En el segundo capítulo “Marco referencial” se presentan las características de cada una de las formas de razonamiento inferencial en el proceso de generalización de patrones, para luego presentar algunos estudios sobre el proceso de generalización desde este enfoque teórico. En el tercer capítulo, presentamos los objetivos generales y los específicos de la investigación. En el cuarto capítulo la “*Metodología*”, en donde se define el método de investigación, el contexto, la población, el diseño metodológico, técnicas e instrumentos que se utilizaron en la recolección de la información, así como el proceso de construcción del análisis a priori y a posteriori de las actividades implementadas. Finalmente, en el quinto capítulo “*Conclusiones*” se mencionan los resultados más importantes del proceso investigativo, así como algunos del proceso realizado y el desarrollo conceptual del profesor investigador. Además se presentan las referencias bibliográficas en que se sustenta este estudio.

1. Antecedentes

Este proyecto de intervención se apoya en diferentes investigaciones y autores que han estudiado la inclusión del álgebra en la educación básica secundaria, en particular con las formas de razonamiento inferencial a partir de los procesos de generalización de patrones, lo que permiten estudiar el desarrollo del pensamiento algebraico el cual no es de interés en esta investigación.

En este capítulo, inicialmente se presentan algunos aspectos relacionados con las políticas que rigen el desarrollo del pensamiento algebraico. En primer lugar desde los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN, Colombia) entendido como Pensamiento Variacional y en segundo lugar, desde la perspectiva del documento Principios y Estándares para la Educación Matemática, construido en Estados Unidos y traducido por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática, (Thales, 2003) en donde se hace referencia al estándar de Álgebra para todos los grados de educación escolar. Además se incluyen investigaciones que han analizado el proceso de generalización desde diferentes perspectivas teóricas, finalmente se presentan las diferentes formas de razonamiento inferencial.

1.1. Una mirada desde los documentos curriculares

En los documentos institucionales para matemáticas, Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos (2006), el MEN propone nuevos elementos teóricos y metodológicos con el fin de actualizar la estructura curricular de la Educación Matemática. En particular, en los Lineamientos se identifican dos elementos importantes: la introducción de los diferentes tipos de Pensamiento Matemático (Numérico, Espacial, Métrico, Variacional y Aleatorio); y la importancia de implementar al interior del aula procesos como la modelación, comunicación, la resolución de problemas, el razonamiento y la ejercitación de procedimientos que propicie el aprendizaje de las matemáticas en contextos significativos para los estudiantes.

En las recomendaciones de los Lineamientos Curriculares se propone una reestructuración conceptual y metodológica del álgebra escolar, desde el pensamiento variacional, centrado en el proceso de generalización como eje fundamental en la construcción del pensamiento algebraico, a

través del estudio de la variación, el cambio de las regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente, como elementos asociados al pensamiento algebraico. También se plantean sugerencias explícitas sobre actividades para desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros niveles de la Educación Básica:

Analizar de qué manera cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras. Hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia. Procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, conformar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. (MEN, 2006, p. 67)

Así mismo, en el documento de Estándares Curriculares se reafirma esta noción de pensamiento variacional como eje fundamental para dar estructura y sentido al aprendizaje del pensamiento algebraico en la escuela, además se muestra cómo el desarrollo del pensamiento variacional se puede potenciar desde los primeros años de la educación básica, centrado en el estudio de las regularidades y patrones.

En el documento de Principios y Estándares para la Educación Matemática (Thales, 2003) se reconoce la importancia de trabajar desde los primeros grados de primaria, actividades orientadas en la búsqueda de patrones, así como realizar experiencias significativas con números y sus propiedades, como fundamento para un trabajo posterior, comprensivo, con símbolos y expresiones algebraicas.

En Thales (2003) se propone, que se requiere prestar menos atención a manipulación de símbolos, memorizar procedimientos y hacer práctica de repetición sobre resolución de ecuaciones, así como también el no enfatizar la resolución de problemas rutinarios de un solo paso, o problemas prototipo cuyo razonamiento no dependa claramente del estudiante. De esta manera existe la necesidad como expresan (Rojas y Vergel, 2013) de:

Prestar más atención a identificar y usar relaciones funcionales, desarrollar y usar tablas, gráficas y reglas para describir situaciones, realizar interpretaciones entre diferentes representaciones (verbales, gráficas, numéricas, tabulares, figurales, simbólicas). Además de proponer problemas abiertos y tareas ampliadas, en diferentes contextos, que incorporen el uso de métodos informales en la resolución de problemas e investigar y formular preguntas a partir de situaciones problema (Rojas y Vergel, 2013, p, 765).

A su vez en este mismo documento (Thales, 2003) se plantean expectativas específicas, para el estándar “comprender patrones relaciones y funciones”, por grupos de grados, desde preescolar hasta el Grado 12, las cuales resaltan el crecimiento gradual de lo que se espera a través de las sucesivas etapas. A continuación se describen algunos ejemplos que se proponen en cada una de las etapas de la educación básica y media, y lo que se espera que el estudiante logre:

Pre Kínder-Grado 2: Las expectativas para este grupo de grados son: Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos; pasar de una representación a otra; analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento (Thales, 2003, p. 94). En la figura 1 se plantea un ejemplo de emparejamiento de números naturales con un patrón por repetición de objetos:

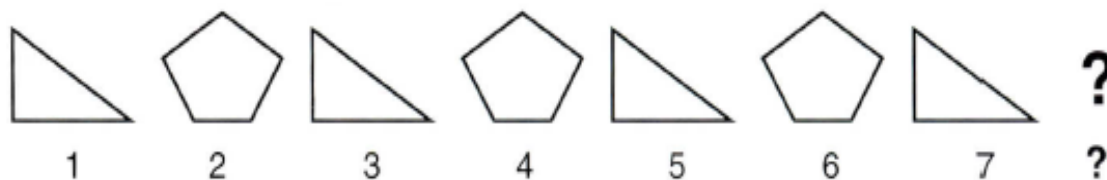


Figura 1. Emparejando números naturales con un patrón por repetición de objetos.

Nota. Adaptado de: (Thales, 2003, p.96)

Con esta situación se busca que el estudiante identifique las figuras geométricas y las relacione con los números naturales, los elementos de la secuencia, la posición y reconozca el patrón, para construir una función. Esto a partir de preguntas sencillas como: ¿qué es la segunda figura?, al continuar el patrón ¿qué figura es la próxima? ¿Qué número sigue cuando cuentas? (respecto a la posición de la figura) ¿Qué tienes que decir respecto de los números que están debajo de los triángulos?; ¿Qué figura debe corresponder al 14? Estas preguntas permiten que los estudiantes establezcan una relación con cada figura geométrica y su correspondiente número natural, esto puede ser entendido como una primera noción del concepto de función.

Grados 3-5: Las expectativas para este grupo de grados son: Describir, extender patrones geométricos y numéricos y hacer generalizaciones acerca de ellos; Representar y analizar patrones y funciones verbalmente y mediante, tablas y gráficas (Thales, 2003, p.162). En este nivel se busca que los estudiantes describan patrones y los representen con expresiones matemáticas; además se espera que los estudiantes expliquen verbalmente estos patrones y hagan predicciones sobre los términos de la secuencia. En la figura 2 se plantea un ejemplo de lo expuesto.

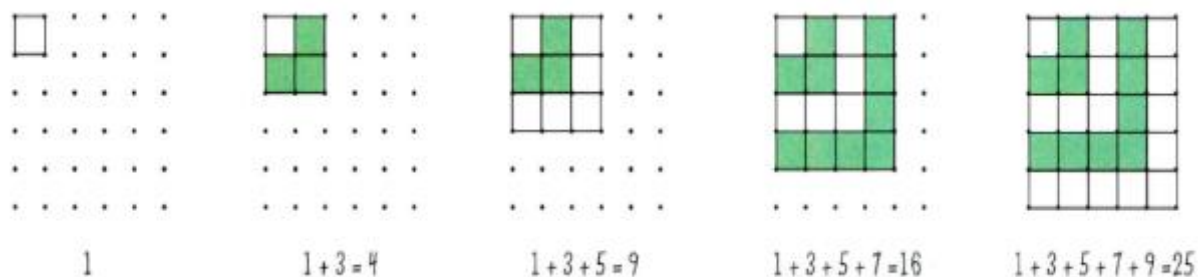


Figura 2. Representación de "cuadrados crecientes" con expresiones matemáticas

Nota. Adaptado de Burton et al.1992, p. 6) Thales, 2003, p.163.

En este ejemplo se puede observar cómo los estudiantes describen de diferentes formas el comportamiento de la secuencia, ya sea de manera verbal y a través de predicciones de lo que puede ocurrir, si la secuencia continúa. Específicamente en esta situación los estudiantes podrían observar que el área sombreada aumenta en el siguiente número impar, en cada nuevo cuadrado o que el cuadrado de la esquina encaja en el cuadrado mayor que le sigue.

Estas observaciones podrían conducir a resultados más específicos, como describir el área del cuadrado como: “el área del cuadrado anterior aumentada en la longitud de dos lados de este, más una unidad” esta forma de razonamiento permite que los estudiantes piensen en cómo establecer y expresar una generalización. A partir de un determinado número de ejemplos de tal manera que logren construir la generalización razonando sobre la estructura del patrón.

Grados 6-8: Las expectativas para este grupo de grados son: Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones con tablas, gráficas, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas; Relacionar y comparar distintas formas de representación de una relación; identificar funciones, lineales o no lineales y contrastar sus propiedades a partir de tablas, gráficas o ecuaciones (Thales, 2003, p.226). Esta etapa se centra en patrones asociados a funciones lineales, donde los estudiantes

deberían resolver problemas en los que se usen tablas, graficas, expresiones verbales y simbólicas para representar y examinar funciones y patrones de cambio (Ver figura 3).

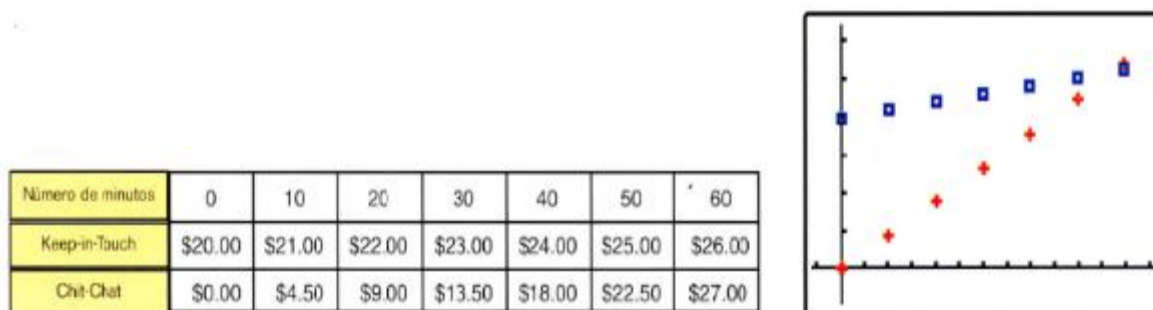


Figura 3. Costos de dos compañías telefónicas.

Nota. Adaptado de: (Thales, 2003, p. 227)

En este ejemplo se espera que los estudiantes representen los datos en una tabla, para luego obtener una gráfica y tratar de interpretar y expresar el patrón que genera. Algunos estudiantes podrían describir verbalmente el patrón que genera cada figura y otros escribir una ecuación. A su vez los estudiantes deberían establecer propiedades entre las diferentes representaciones (tabular, gráfica y simbólica) para comparar y contrastar sus ventajas.

Grados 9-12: Las expectativas para este grupo de grados son: Generalizar patrones usando funciones definidas explícitamente y recursivamente (Thales, 2003. p. 300), buscando que los estudiantes elaboren y utilicen las representaciones tabulares, simbólicas, gráficas y verbales para analizar y comprender patrones, relaciones y funciones con mayor complejidad, además se puede llegar hasta el punto de comparar y contrastar situaciones modelizadas por funciones de varias clases. (Ver Figura 4)

Situación 1: En Febrero de 2000 el costo de enviar una carta por correo era 33 centavos por la primera onza, y 22 centavos adicionales por cada onza o fracción de ésta hasta 13 onzas.

Número de onzas	1	2	3	4	5	...	P
Costo en centavos	33	$33 + 22$	$33 + 2(22)$	$33 + 3(22)$	$33 + 4(22)$	...	$33 + (P - 1)(22)$

Figura 4. Situación que puede modelarse mediante funciones de distintas clases.

Nota. Adaptado de: (Thales, 2003. p. 302)

En esta situación se busca que el estudiante elabore y utilice las diferentes representaciones matemáticas que el problema planteado soporta, para analizar y comprender los patrones, relaciones y funciones. Además se espera que logre pasar de una a otra representación de una manera más sencilla. Para el ejemplo, que primero elabore una tabla y comprenda que esta situación tiene algunas características lineales, además que valore las ventajas y desventajas de esta representación.

Teniendo en cuenta los documentos citados anteriormente (MEN, 1998, 2003) y (Thales, 2003), se plantea la necesidad de impulsar el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas, a través del proceso de generalización, especialmente con el estudio de patrones.

1.2 El proceso de Generalización

En el campo de la Educación Matemática se reconoce un interés por el estudio de los procesos de generalización. No se puede desatender que el establecimiento de proposiciones, la resolución de problemas, el proceso de definir en matemáticas, la abstracción, entre otros procesos, requieren con mucha frecuencia de estos procesos. Es importante recalcar que la generalización es una pieza

fundamental en matemáticas. A continuación se presentan algunas investigaciones tomadas de la tesis doctoral de Vergel 2014, acerca de los procesos de generalización. En la tabla 1, se resumen algunos autores que trabajaron acerca de estos procesos, destacando algunos elementos clave en la investigación.

Tabla 1.

Investigaciones sobre los procesos de generalización.

Temas	Autor/ es y año
Relacionado con los procesos de generalización.	Rubinstein (1966), Krutetzki (1976), Davydov (1981), Stacey (1989), Dorfler (1991), Azarquiél (1993), Alonso et al, (1993), Orton y Orton (1994), Mason (1996), García (1998), Calvo (2001), Radford, (2008), (2010), Rivera, (2013), Vergel, (2014)

Nota. Adaptado de la tesis doctoral de Vergel, 2014).

Estas investigaciones tratan de establecer posturas con respecto al proceso de generalización y a su vez tratan de enmarcar dicho proceso en niveles, habilidades, acciones, fenómenos y a su vez en procesos, por ejemplo Rubinstein (1996, citado por Vergel, 2014), afirma:

Es necesario diferenciar distintos niveles de pensamiento según sea el nivel de la generalización, para ello establece cinco niveles: Primer nivel: la representación singular de lo general Segundo nivel: la generalización producto de una deducción. Tercer nivel: la generalización por extensión de un concepto. Cuarto nivel: la generalización se logra mediante un cambio del problema con el que se trabaja. Quinto nivel: la generalización con desarrollo de un nuevo modelo. (Vergel, 2014, p. p. 18 y 19)

Por otra parte Krutetzki (1976, citado por Vergel, 2014) habla de habilidades para generalizar un contenido matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles:

La habilidad para ver algo general y conocido en lo que es particular y concreto (someter un caso particular a un concepto general conocido). La habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado (deducir lo general a partir de casos concretos para formar un concepto). (Vergel, 2014, p. 19)

Por su parte Dorfler (1991, citado por Vergel, 2014) considera que la generalización se da por medio de acciones, es decir una operación es una acción en el proceso de generalización. Una acción puede consistir en agrupar objetos materiales determinados o puede tomar el sentido de la operación matemática.

Según estos autores el proceso de generalización es catalogado como una habilidad o un conjunto de acciones de tal manera que se relaciona con observar casos generales a partir de situaciones particulares o viceversa, pasando por el estudio de propiedades que permiten llegar a identificar una generalidad, expresarla utilizando diferentes representaciones, para concluir con una expresión matemática. Estas tres posturas tienen un cierto parecido al tratar de esquematizar el proceso de generalización que puede generar en los estudiantes el desarrollo de pensamiento algebraico.

Por otra parte, Azarquiel (1993), Davydov (1981) y Mason (1996.) citados por Vergel, (2014) comparten una misma idea de la generalización:

La generalización es un proceso donde el sujeto no solo transita por un determinado conocimiento sino que este es capaz de extraer propiedades o ideas diferentes a las establecidas en la situación, es decir es capaz de determinar ideas preponderantes en su generalización que se evidencian en otro tipo de situaciones. (Vergel, 2014, p. p. 20-22)

Los trabajos de García, Stacey, Orton y Orton (1998, 1989 y 1994, citados por Vergel, 2014) aportan evidencias sobre el proceso de generalización utilizando problemas de generalización lineal. García (1998) reporta que este tipo de problemas tienen características en donde se pueden observar tipos de generalizaciones próxima y lejana. Stacey (1989) reporta los métodos utilizados por los estudiantes en problemas de generalización lineal y los clasifica en categorías: Diferencia, *Whole-Object*, Lineal.

Orton y Orton (1994 citado por Vergel, 2014), señalaron habilidades en el proceso de generalización:

Por un lado, la extensión de la generalidad como el empleo de un método correcto de generalización dentro de una tarea y en diferentes tareas. De otra parte, la expresión de la generalidad de tres formas distintas, desde las simples estructuras de los cálculos, hasta las expresiones algebraicas, pasando por la formulación con palabras de las relaciones encontradas. (Vergel, 2014, p. 25)

Desde la perspectiva de Alonso et al, (1993, citado por Moreno, 2014), los procesos de generalización tienen tres etapas o pasos lineales entre unos y otros;

La primera implica una visión de regularidad, que invita a la observación de las diferencias y las relaciones, para en un segundo espacio realizar su exposición verbal y finalizar con una expresión escrita lo más concisa posible; desde esta perspectiva, la generalización, y la simbolización son aspectos fundamentales para el aprendizaje del álgebra. (Moreno, 2014, p. 19)

Estos autores evidencian que el proceso de generalización, transita en un estado de búsqueda de particularidades, para luego establecer propiedades y atributos a la situación trabajada. Aquí el estudiante se centra en buscar este tipo de particularidades, expresando sus ideas de forma verbal

o escrita, estas ideas le permiten identificar características que puede utilizar en otro tipo de situaciones.

Radford (1996, citado por Vergel, 2014) plantea que la generalización es un procedimiento que lleva a una conclusión que, posteriormente, hay que validar, a partir de una sucesión de hechos observados. De esta manera, todo proceso de generalización conlleva una fase de validación. Más adelante el mismo autor (Radford, 2005b) señala que generalizar significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. Las investigaciones de Radford (2008, 2010) estudian, específicamente, situaciones en el contexto de la generalización de patrones. Se sugiere una tipología de formas del pensamiento algebraico; Pensamiento Algebraico Factual, Pensamiento Algebraico Contextual y Pensamiento Algebraico Simbólico.

Rivera (2013) evalúa los contextos de la generalización que se presenta en la clase de matemáticas y aporta aspectos que son relevantes para el proceso de generalización utilizando las formas de razonamiento inferencial. Para ello utiliza secuencias con patrones figurales y describe las características que se presentan a la hora de expresar una generalidad; estas características las categoriza en las tres formas del razonamiento inferencial, Abducción, Inducción y Deducción, que serán descritas en el siguiente capítulo.

El proceso de generalización de patrones y las formas de razonamiento inferencial son parte vital en la consecución del objetivo de esta investigación y se tratarán en el marco referencial. Como se evidencia el estudio del proceso de generalización, aporta elementos básicos, en el desarrollo del pensamiento algebraico. Ya que provee herramientas útiles para el afianzamiento y desarrollo del álgebra en la educación básica, principalmente en estudiantes con edades entre 11 y 14 años, los cuales se pueden justificar en la práctica educativa.

1.3 Razonamiento inferencial

El razonamiento inferencial se usa para describir la manera en que los sujetos elaboran conclusiones a partir de resolver problemas; por ejemplo la generalización de patrones. El matemático y semiólogo Charles Sanders Peirce (1878a, 1878b, 1903, citado por Sáenz, 1997) destacó tres formas de razonamiento inferencial: la abducción, la inducción y la deducción. Aunque estas tres formas de inferencia tienen características diferentes, ellas no trabajan aisladamente.

A la Abducción le corresponde el papel de introducir nuevas ideas en la ciencia, esto implica inicialmente generar una hipótesis o estrechar una gama de hipótesis, es decir que es la fuente de ideas originales que son influenciados por conocimientos previos y experiencias (Rivera, 2013). Para Merrell (1995, citado por Sáenz, 1997:

Una abducción o una conjetura abductiva o hipótesis, con frecuencia es una adivinación, pero una adivinación educada que prosigue al estudio de un problema particular. La generación de una hipótesis es sólo un aspecto del proceso de abducción; la abducción involucra aplicación además de creación. (Merrell 1995, citado por Sáenz, 1997, p. 4)

Una hipótesis debe ser aplicada al caso que se tiene a mano y debe competir con otras hipótesis que pueden posiblemente explicar los hechos observados (Corrington, 1993 citado por Sáenz, 1997). Es decir la Abducción consiste, en explicar una proposición **q** mediante otra proposición **p** considerando a **p** como hipótesis explicativa de **q**. Esta proporciona a quien razona una hipótesis que da cuenta de los hechos observados.

Por otra parte a la Inducción le corresponde confirmar experimentalmente la hipótesis en una determinada proporción de casos, es decir:

El sujeto ejecuta una demanda abductiva probándola sobre casos específicos con la esperanza de que los errores posibles se corrijan a lo largo del camino con más datos. En las inferencias inductivas se parte de fenómenos particulares y se busca una explicación de los mismos; la base del método es la suposición de que si algo es cierto en algunas ocasiones, también lo es en situaciones similares. (Rivera, 2013, p. 27)

También la inducción sirve para encontrar principios o reglas generales, las cuales se obtienen de la identificación de patrones y regularidades a partir de la observación de un número finito de experiencias. Esta puede tener la dificultad de que con las mismas observaciones iniciales se obtengan otras conclusiones, no necesariamente verdaderas. Sin embargo, la abducción y la inducción, no tendrían validez lógica; en ambos casos la conclusión afirma más de lo que puede inferirse de las hipótesis iniciales y por ello debe ser confirmada.

En cambio la Deducción extrae las consecuencias necesarias y verificables que deberían seguirse de ser cierta la hipótesis (abducción), y la inducción confirma experimentalmente la hipótesis en una determinada proporción de casos (Rivera, 2013). En el primer razonamiento, se tiene implícita la idea de la creatividad, apoyada en la formulación de conjeturas, y el segundo y tercer tipo de razonamiento se apoyan en la verificación y validación de conjeturas.

La inferencia deductiva afirma como conclusión un caso particular de una regla conocida, del contenido de ciertas proposiciones iniciales, denominadas premisas, se deduce una o varias consecuencias a partir de la aplicación de leyes de inferencia de la lógica; no es necesaria la observación, si las premisas son ciertas. Para Peirce (1903) una inferencia deductiva es un proceso analítico mediante el cual lo particular se sigue de premisas generales; es decir, en el proceso no se produce nuevo conocimiento puesto que no hay nada en los casos particulares que no estuviera implicado por las premisas.

Matemáticos y educadores matemáticos han reconocido la influencia de las formas de razonamiento inferencial en el pensamiento matemático, aunque bajo diferentes nombres. Polya (1945, citado por Sáenz, 1997), por ejemplo:

Coloca el razonamiento heurístico bajo la luz de una adivinación plausible y diferente del tipo deductivo de razonamiento que proporciona una prueba o que lleva a la solución completa de un problema. Él dice, “con frecuencia debemos estar satisfechos con una adivinación más o menos plausible. Necesitamos lo provisional antes de alcanzar lo final” (p. 113)

Por otra parte Lakatos (1976) reconoció la no linealidad del razonamiento inferencial cuando dice:

El descubrimiento no va hacia arriba o hacia abajo, sino que sigue un camino de zigzag; impulsado por contraejemplos, se mueve de la conjetura ingenua a las premisas y luego regresa nuevamente para borrar la conjetura ingenua y reemplazarla por un teorema. Las conjeturas ingenuas y los contraejemplos no aparecen en la estructura deductiva completa: el zigzag del descubrimiento no se puede discernir en el producto final. (p. 46)

Por tanto, el conocimiento matemático nuevo sigue un proceso inferencial zigzagueante de abducciones, inducciones y deducciones. En consecuencia, la naturaleza zigzagueante de los procesos inferenciales en la indagación matemática no aparece escrita en los libros de texto y no se vislumbrará en la enseñanza. Mason (1995, citado por Sáenz, 1997) señala que al tratar de evitar dificultades, “el currículo cambia todo en comportamiento, evita la conciencia, asume la deducción, tolera la inducción e ignora la abducción” (p. 46).

2. Marco Referencial

Este capítulo se centra en estudiar los principales elementos del razonamiento inferencial en el proceso de generalización de patrones que realizan los estudiantes cuando enfrentan tareas con patrones figurales, figurales con ayudas tabulares y numéricas, así como algunas características de este proceso. Además, se analizan algunas investigaciones que utilizaron elementos teóricos del razonamiento inferencial en el proceso de generalización.

Para realizar el análisis de las formas de razonamiento inferencial se toman los elementos teóricos propuestos por Rivera (2013) en, *“Teaching and Learning Patterns in School Mathematics Psychological and Pedagogical Considerations”*. En la Figura 5, se ilustra como Rivera establece un marco organizativo que toma en cuenta varios aspectos de la generalización de patrones. Central a este proceso se encuentran las formas inferenciales de razonamiento: abducción, inducción, y deducción las cuales son importantes en la consecución de los objetivos de la investigación.



Figura 5. Adaptación del marco organizativo planteado por Rivera (2013, p. 59)

2.1 Formas de Razonamiento Inferencial

Centrales a la generalización de patrones están las formas de razonamiento inferencial: la abducción, la inducción y la deducción, que según Peirce (1934, citado por Rivera, 2013):

La abducción es la fuente de ideas originales y es a menudo influenciado por el conocimiento y la experiencia previa, a diferencia de la inducción que ejecuta una reclamación abductiva probándola sobre casos específicos con la esperanza de que los posibles errores se corrigen en el camino con más datos. Y la deducción, a diferencia de la abducción y la inducción, principalmente establece la necesidad de una única conclusión válida y, al igual que la inducción, no genera ninguna idea original. (p. 27)

En la tabla 2 se enumeran las características de las tres formas de razonamiento inferencial que entran en juego en el momento de expresar una generalidad. (Rivera, 2013). En ella se plantea los pasos de cada forma de razonamiento y lo que se espera que el estudiante exprese cuando trabaja con actividades que involucran la generalización de patrones.

Tabla 2.

Características de las formas de razonamiento inferencial

Tipo Inferencial	Forma Inferencial	Propósito	Actitud Inferencial	Fuentes	Construcción Deseada	Verificación y Justificación
Abducción	De resultado y ley al caso	Profundidad	Entretiene una inferencia plausible hacia una regla; genera y selecciona	Impredecibles (hechos sorprendentes; destellos; conjeturas inteligentes,	Sin estructurar	Estructurado por inducción

Tipo Inferencial	Forma Inferencial	Propósito	Actitud Inferencial	Fuentes	Construcción Deseada	Verificación y Justificación
			una teoría explicativa - que "algo tal vez" (conjetura)	conjeturas espontáneas)		
Inducción	De resultado y más casos para la ley	Amplitud	Prueba una inferencia abductiva; Mide el valor y el grado de concordancia de una teoría explicativa para los casos -que "algo realmente es operativo" (aproximado)	Predecible (ejemplos)	Estructural basado en la abducción	Empírica (por ejemplo, enumeración, analogía y experimentos)
Deducción	De ley y caso al resultado	Prueba lógica	Predice de manera metódica un resultado válido -que "algo debe ser" (cierto)	Previsible (locales)	Estructural (forma canónica)	Pasos en una prueba

2.1.1. Abducción. Cuando los estudiantes investigan términos específicos en una secuencia que sigue un patrón figural o numérico, tienden a adivinar y producir interpretaciones plausibles acerca

de las siguientes términos. En consecuencia, algunas de estas observaciones plausibles evolucionan en hipótesis, por tanto, en abducciones. (Rivera, 2013)

Construir una abducción según (Paavola, 2011 citado por Rivera, 2013) es establecer inferencias basadas en íconos, los cuales son formas posibles de los objetos que representan o se componen. La siguiente actividad muestra dos ejemplos (Figura 6 y 7), de estudiantes pertenecientes a segundo grado (7 años), en la que estudian la paridad de números de dos dígitos, en el cual se evidencia el razonamiento abductivo.

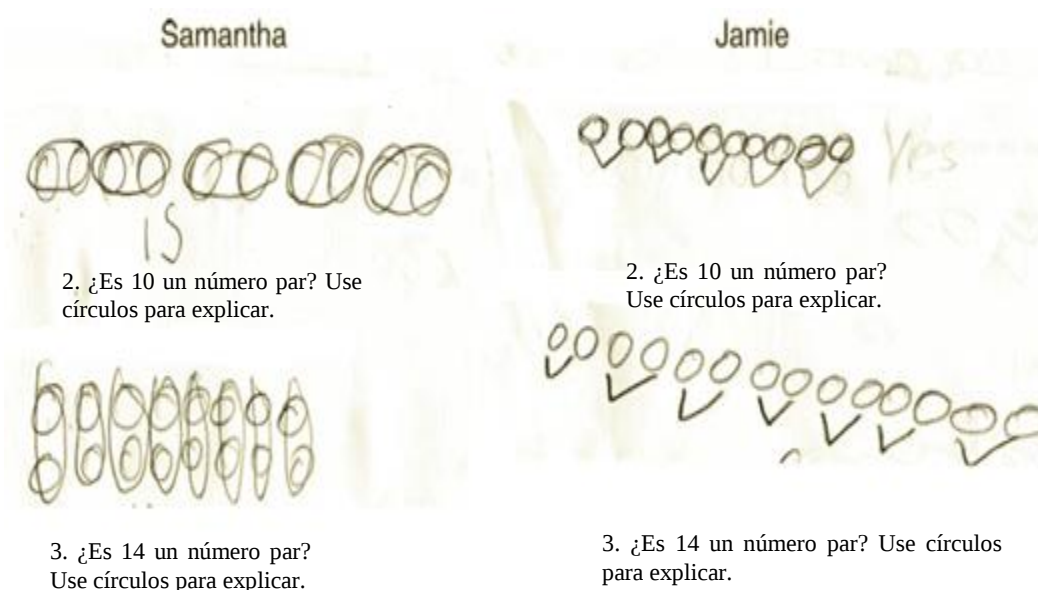


Figura 6. Ejemplos de trabajos de segundo grado sobre la paridad par de números de dos dígitos.

Nota. Adaptado de:(Rivera, 2013, p. 31)

22 is an even number
because every number that
ends with a number that
is counting by 2's is an even number.

22 es un número par, porque cada número que termina
en un número que se cuenta de a 2 es un número par

Figura 7. Trabajo de Nikki en la paridad par del número entero 22.

Nota. Tomado de: (Rivera, 2013, p. 31)

Los estudiantes inicialmente investigaron los números enteros de un solo dígito, esto les permitió abducir una característica estable de pares perfectos de puntos, para luego trabajar con números de dos dígitos. La representación realizada por estos dos estudiantes, “agrupar de dos en dos los círculos” (encerrándolos o señalándolos mediante líneas, figura 6) les ayuda a mostrar la paridad de un número de dos dígitos, lo cual permite evidenciar un razonamiento abductivo de manera gráfica generando una hipótesis. Así mismo la explicación realizada por Nikki (figura 7) evidencia una afirmación abductiva que podría utilizarse para predecir el resultado de un número más grande.

Este tipo de hipótesis abductivas proporcionan explicaciones o justificaciones de lo que se espera para otros casos del problema. En la actividad de generalización de patrones, así como en la mayoría de los casos en contexto Alder (2008, citado por Rivera, 2013) establece:

Una abducción fuerte es una condición deseada. La frase bien conocida de Lee (1996), algebraicamente útil, en relación con la generalización de patrones es una fuerte abducción en el sentido de que todas las generalizaciones estructurales interpretadas que implican patrones

numéricos y figúrales deben ser transmitidas en forma de una expresión directa o una fórmula cerrada. (p. 32)

Las expresiones icónicas y verbales de los estudiantes (Figuras 6 y 7) representan formas algebraicamente útiles que evidencian abducciones fuertes las cuales pueden ser transmitidas en forma de una expresión directa o una fórmula cerrada.

Así cuando los estudiantes investigan los términos específicos en una secuencia de figuras, simplemente conocen y producen interpretaciones admisibles que representan los juicios de percepción en relación con los términos que se generan siguiendo un patrón (Rivera ,2010).

2.1.2 Inducción. A la Inducción le corresponde confirmar experimentalmente la hipótesis en una determinada proporción de casos, como lo plantea (Rivera, 2013):

El sujeto ejecuta una demanda abductiva probándola sobre casos específicos con la esperanza de que los errores posibles se corrijan a lo largo del camino con más datos. explicación de los mismos; la base del método es la suposición de que si algo es cierto en algunas ocasiones, también lo es en situaciones similares. (p. 27)

Al probar una demanda abductiva en varios casos específicos, la inducción determina si esta es correcta o incorrecta. Si una inducción es correcta no produce un nuevo concepto, es decir, las inferencias inductivas no necesariamente generan verdaderas generalizaciones, sin embargo "a largo plazo se aproximan a la verdad" (Peirce, 1869, p.207 citado por Rivera, 2013). En lugar de ello, como lo explica Hibben, (1905, citado por Rivera, 2013):

Pretende mostrar que una vez que se tiene las premisas (es decir, el caso/s y el resultado/s), entonces las conclusiones pertinentes (es decir, la ley) deben ser verdaderas por enumeración

(número de casos observados), analogía (es decir, similitud estructural o relacional de rasgos entre los casos) o análisis científico (a través de experimentos reales o mentales) (p. 184)

La siguiente actividad muestra el significado de la inducción a través del desarrollo de una secuencia figural de los números triangulares (Figura 8), planteado a estudiantes de segundo grado (7 años). Esta busca que los estudiantes extiendan el patrón de construcción a otros términos de la secuencia mediante diferentes caminos distintas maneras.

Tarea de patrón triangular: A continuación hay términos de un patrón creciente de círculos



Término 1



Término 2



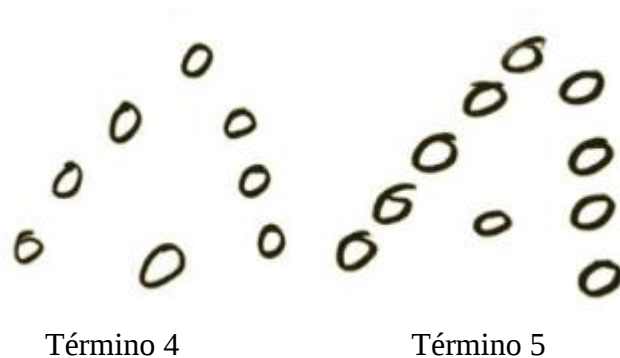
Término 3

1. ¿Cómo se ve el término 4? ¿Puedes dibujarlo para mí?
2. ¿Cómo se ve el término 5? ¿Puedes dibujarlo para mí?
3. Si saltamos términos, ¿cómo podría ser, el término 10? Si le dijera a un amigo cómo sería, digamos, el término 10, ¿cómo le explicarías?

Figura 8. Secuencia figural de números triangulares

Nota. Adaptado de: (Rivera, 2013. p. 33)

En esta actividad el entrevistador les pide a los estudiantes que extiendan el patrón para encontrar los términos 4 y 5 antes de saltar al término 10. La figura 9 muestra los términos 4 y 5 que construyeron con relación al patrón. Además se pide a los estudiantes que expliquen cómo realizaron las construcciones, estas respuestas se dieron de forma escrita (Figura 10).

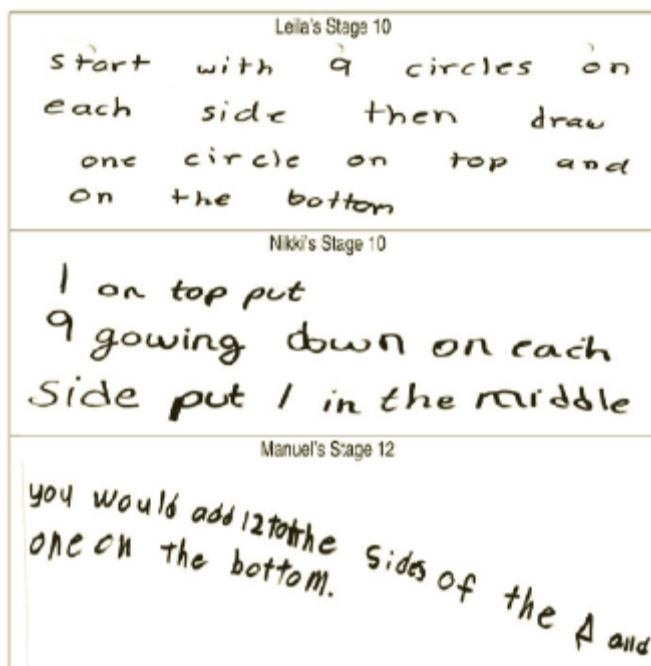


Término 4

Término 5

Figura 9. Construcción de los términos 4 y 5.

Nota. Adaptado de: Rivera (2013, p. 34)



Leila término 10
Comienza con un círculo en cada lado, luego dibuja un círculo en la parte de arriba y abajo.

Nikki término 10
1 en la parte de arriba, pon 9 bajando en cada lado, pon 1 en la mitad.

Manuel término 12
Usted adiciona 12 a los lados del triángulo y 1 abajo.

Figura 10. Generalizaciones incipientes,

Nota. Adaptado de: (Rivera 2013, p. 34)

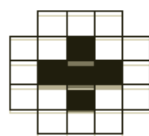
Las afirmaciones (figura 10) muestran tres generalizaciones incipientes para el patrón, que los estudiantes extienden para dos términos. Estas afirmaciones evidencian razonamientos abductivos

sobre estructuras plausibles para el patrón que inicialmente infirieron a partir de los tres primeros términos de la secuencia. Luego sobre la base de sus abducciones inferidas, los estudiantes extendieron el patrón para los términos 4, 5, 10 y superiores. Rivera observó, que las extensiones construidas, representan la fase de verificación inductiva que usualmente acompaña y apoya una afirmación abductiva. Sin embargo ninguno de los estudiantes intentó probar la afirmación abductiva para los dos términos iniciales del patrón, lo cual les serviría para corregir sus errores y establecer una reclamación abductiva fuerte que les permita establecer una generalización algebraica inicial.

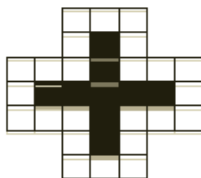
2.1.3. Abducción e Inducción juntas. La abducción y la inducción no trabajan aisladamente puesto que la primera es requisito para la segunda, incluso en los casos más ingenuos y complejos. Por ejemplo en secuencias numéricas sin contexto en que solo aparecen números contruidos a partir de un patrón, los estudiantes inicialmente tienden a producir una afirmación abductiva como un mecanismo práctico para hacer frente a la situación; es decir, pueden construir estructuras o formulaciones que pueden o no ser útiles a largo plazo.

En particular, Becker y Rivera (2005, citados por Rivera, 2013) realizaron un estudio con estudiantes de grado 9 (13 a 15 años) en los Estados Unidos. Estos muestran que para la secuencia (Figura 11) encontraron 23 estrategias: 13 numéricas y 10 figúrales. Las estrategias numéricas incluían métodos aleatorios de ensayo y error y métodos más sistemáticos.

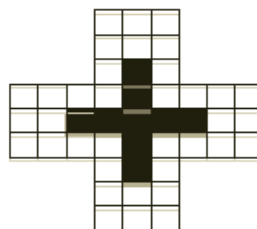
Tarea de patrones en cruz: Marcia está utilizando azulejos cuadrados en blanco y negro para hacer patrones.



Término 1



Término 2



Término 3

1. ¿Cuántos azulejos negros se necesitan para construir el término 4? Marcia comienza a hacer una tabla para mostrar el número de azulejos en blanco y negro que está usando.

Término Número	1	2	3	4
Número de azulejos blancos	16	24		
Número de azulejos negros	5	9		
Total	21	33		

2. Llene los números que faltan en la tabla de Marcia.

3. Marcia quiere saber cuántos azulejos blancos y azulejos negros habrá en el décimo término, pero no quiere dibujar todos los términos y contar los azulejos. Explique o muestre otra forma de encontrar su respuesta.

4. Usando W para el número de azulejos blancos y P para el número de término, anote una regla o fórmula que vincule W con P.

5. Utilizando B para el número de azulejos negros y P para el número de término, anote una regla o fórmula que vincule B con P.

6. Ahora, usando T para el número total de azulejos y P para el número de patrón, anote una regla o fórmula que vincule T con P.

Figura 11. Secuencia figural de patrones en cruz

Nota. Adaptado de: (Rivera, 2013, p. 36)

Los autores muestran el resultado de un estudiante, el cual no estableció la relación entre los términos de la secuencia (figura 11) y los números que generó a partir de ellos, él explicó su expresión directa $4n + 1$ a través de patrones numérico como sigue:

27. Empecé con más de 2 y eso no funcionó, así que intenté hacer que 5 funcionara.

28. Hice lo mismo con 2, 3, 3, 3, 2 y luego cuando lo intenté con 4, y traté de fijar,

29. un número para hacer 5, así que añadido 1, y lo probé en 2 y aun así me dio el número. (Rivera, 2013, p. 35)

El estudiante empleó adivinar, como un mecanismo abductivo de su serie inicial de afirmaciones abductivas, sin embargo, sufrió refutación y evolución a través de inducción que le permitió hacer correcciones a lo largo del camino.

Rivera establece otra consecuencia cuando las formas de razonamiento inferencial, esto es “el salto inductivo”, que implica establecer una generalización desde instancias concretas a una conclusión que parece contener más que las propias instancias y que se puede resolver mediante abducción. Sin embargo puede haber una abducción sin inducción (es decir, generalizaciones abductivas). Algunos teoremas de geometría, por ejemplo, no necesitan verificación inductiva, los cuales no exploramos en esta investigación debido al interés por los patrones. Resulta útil observar las ideas de Pedemonte y Prusak Hershkowitz y Schwarz ((2007, 2012, citados por Rivera, 2013) sobre la necesidad de una continuidad estructural entre un proceso de argumento de abducción y su correspondiente justificación en forma de una prueba lógica. Es decir, un proceso abductivo productivo en cualquier forma modal (visual, verbal) debe transmitir simultáneamente los pasos de una prueba deductiva.

Ahora consideremos la siguiente situación en donde la abducción y la inducción no pueden resolver situaciones en un contexto razonable. Por ejemplo, la situación mostrada en la figura 12 puede tener una abducción estipulada, es decir un razonamiento abductivo establecido, en el cual no surjan hipótesis diferentes a la planteada y un conjunto de resultados inductivamente verificados basados en una expresión directa interpretada. Sin embargo, no hay razón para que la situación sea resuelta por cualquier expresión, es decir esa pregunta no puede ser contestada.

Empezó a llover. Cada hora Sarah comprobaba su pluviómetro. Ella registró la precipitación total en una tabla. ¿Cuánta lluvia habría caído después de las h horas?	<table> <tr> <th>Horas</th><th>Lluvia</th></tr> <tr> <td>1</td><td>En 0,5</td></tr> <tr> <td>2</td><td>En 1</td></tr> <tr> <td>3</td><td>En 1,5</td></tr> </table>	Horas	Lluvia	1	En 0,5	2	En 1	3	En 1,5
Horas	Lluvia								
1	En 0,5								
2	En 1								
3	En 1,5								

Figura 12. Ejemplo de una secuencia en un contexto erróneo

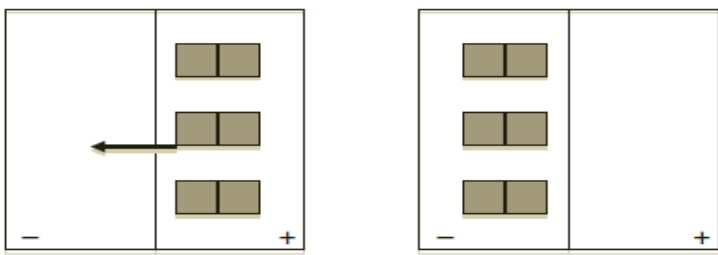
Nota. Adaptado de: (Rivera, 2013, p. 36)

2.1.4 Deducción. Mientras la abducción y la inducción apoyan la construcción de una generalización, la deducción se encarga de validarla. En la actividad de generalización de patrones, los estudiantes de primaria y de los primeros niveles de secundaria, emplean las dos formas de razonamiento inferencial iniciales, para obtener una generalización algebraica razonable o como lo expresa Lee (1996) una “generalización algebraicamente útil”. Por lo tanto un cierre deductivo puede ocurrir de al menos dos formas, dependiendo de las expectativas o nivel de grado de los estudiantes. Ellos pueden implícitamente formar una reclamación deductiva, sin embargo es probable que sea una explicación empírica estructural (numérica o visual), que una prueba deductiva formal (Rivera 2013) como forma de justificar sus generalizaciones. En cambio los estudiantes de secundaria de nivel medio y adultos pueden formular una reclamación deductiva y proporcionar cualquiera de los siguientes tipos de justificación que se superponen en algunas situaciones (Rivera 2013): Un argumento estructural empírico; Una prueba deductiva lógica; o una prueba de inducción matemática.

En la figura 14 se evidencia como un grupo de 34 estudiantes (13, 14 años) de la escuela intermedia de los Estados Unidos, justificó empíricamente el hecho de que $-a \times -b = -(a \times -b)$ mediante la demostración de un argumento basado en números siguiendo un esquema de razonamiento establecido (Rivera, 2011, p.p. 126-130).

Es importante notar que cuando los números del argumento empírico de la figura 13 son reemplazados por variables, el argumento se transforma en una prueba deductiva lógica (Rivera 2013) y los pasos de este, siguen un “proceso de reciclaje” lógico (Duval, citado en Pedemonte 2007, p.24 citado por Rivera, 2013), es decir, la conclusión de un paso anterior se convierte en la premisa de un paso posterior de principio a fin.

Basándonos en la siguiente figura, ilustramos
 Por qué $-3 \times 2 = -(3 \times 2)$ usando propiedades de
 Enteros $-3 \times 2 = -(3 \times 2)$ significa tirar 3 grupos de 2 cubos en la región positiva a la región negativa.



$-3 \times 2 = (-3 \times 2) + 0$ Propiedad de Identidad Aditiva
 $= (-3 \times 2) + [(3 \times 2) + - (3 \times 2)]$ Propiedad inversa aditiva
 $= [(-3 \times 2) + (3 \times 2)] + - (3 \times 2)$ Propiedad asociativa
 $= [(-3 + 3) \times 2] + - (3 \times 2)$ Propiedad distributiva
 $= 0 + - (3 \times 2)$ Propiedad Inversa Aditiva
 $= - (3 \times 2)$ Propiedad de Identidad Aditiva

Figura 13. Una justificación empírica de $-a \times -b = -(a \times -b)$

Nota. Adaptado de: (Rivera, 2013, p. 38)

En este caso los estudiantes pueden hacer un cierre deductivo de acuerdo al nivel en el cual se esté trabajando y a sus justificaciones estructurales empíricas, y así la abducción y la inducción, apoyan este proceso de modo que la deducción en el proceso de generalización de patrones se encarga de validar estas justificaciones.

2.2. Características de la generalización de patrones.

2.2.1. Generalización Próxima y Lejana. Algunas de las tareas presentadas anteriormente aparecen los primeros términos en formato visual, a lo que Rivera llama estados figurales para enfatizar su naturaleza “simultáneamente conceptual y figural” (Fischbein, 1993, p.160, citado por Rivera, 2013). Estas representan objetos o elementos que podrían tener una determinada estructura y representan características asociadas a representaciones diagramáticas (Rivera 2010 a). Los puntos 1 y 2 en la figura. 8 son consideradas como tareas de generalización próxima, mientras que el ítem 3 ejemplifica una tarea de generalización lejana; entendido como tarea de generalización próxima en un patrón, que va desde el término 1 hasta el término 9 y las lejanas como las tareas que van del término 10 en adelante.

Enfrentar a los estudiantes con al menos una tarea de “generalización próxima”, les permite formular una abducción inicial que puede ser verificada mediante inducción. Stacey (1989, citado por Rivera, 2013) observa que la obtención de resultados en tareas próximas se puede lograr construyendo diagramas, haciendo una tabla o contando. Más allá de estas estrategias, una abducción inicial, puede expresar lo que los estudiantes interpretaron del patrón, lo cual permite inducir en los términos próximos, en consecuencia surge la “generalización tentativa” (Rivera, 2013), que probada por inducción un cierto número de veces, en otros términos, proporciona seguridad para enfrentar y tratar la generalización que está emergiendo.

Según Varzi (2008, citado por Rivera, 2013), para la acción inductiva (correcta) hay dos condiciones necesarias para adivinar el patrón y pueden ser evaluadas por resultados de generalización próxima: (1) Una generalización de abducción tentativa para un patrón es capaz de

establecer una estructura única para extender correctamente el patrón elegido y (2) los términos en la secuencia no se generan sino que se regulan.

Cuando los estudiantes tratan con tareas de generalización lejana se presentan momentos de dificultad. En esta etapa según Rivera (2013), empiezan a probar el poder y la validez de sus proyecciones, incluyendo el uso de su generalización tentativa. La verificación de todos los elementos de la generalización lejana, sometidos a pruebas les permite transitar hacia las fases de encapsulación y justificación de la generalización (Rivera 2013), surgiendo una expresión final para dicha generalización. Es decir, esta expresión se ve como un objeto o como un proceso, según Rivera:

El objeto (la fórmula) transmite lo que interpretan como una estructura apropiada para el patrón y el proceso (es decir, los coeficientes individuales, los términos, y las operaciones indicadas en la fórmula) se refiere a la figura y a la aritmética de la fórmula establecida, en la determinación de cualquier resultado exacto en cualquier término del patrón. (p. 41)

2.2.2. Diversas características de la generalización. En el proceso de generalización existen diferentes posturas que reflejan un pasaje reflexivo de lo particular a lo general. Todos los patrones son procesados a través de la generalización, la cual según Polya (1957 citado por Rivera, 2013):

[Generalización es el] pasar de la consideración de un objeto, a la consideración de un conjunto que contiene ese objeto; o pasar de la consideración de un conjunto restringido, a la de un conjunto más completo, que contiene el conjunto restringido. (Polya, 1957, p. 108)

Este paso de las características de un miembro particular a todo el conjunto puede significar un número de acciones posibles. Para Davydov (1990, p. 10 citado por Rivera, 2103) este paso es una generalización conceptual, que implica “la búsqueda de una cierta invariante en un surtido de

objetos y sus propiedades, y una designación de esa invariante por una palabra”, en el cual se involucran tanto acciones abductoras como inductoras. Cuando se asocia la etiqueta con la invariante, esta relación se utiliza para identificar otros objetos pertenecientes a la clase dada, en consecuencia estas generalizaciones permiten en los estudiantes “ver lo general en cada caso particular e individual” (Davydov, 2008, p. 75 citado por Rivera, 2013). Además estas etiquetas, como generalizaciones permiten a los estudiantes según Gentner (2010, citado por Rivera, 2013), participar en: una mayor comparación y abstracción; un procesamiento relacional uniforme a través de diferentes situaciones; y una mayor estructuración conceptual.

Kaput (1995, citado por Rivera, 2013) establece que una generalización refleja un aumento de profundidad (en el sentido de Pierce) a través de procedimientos comunes, patrones procedimientos, estructuras y otras relaciones que los estudiantes generan y construyen:

La generalización implica extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, explícitamente identificando y exponiendo lo común a través de los casos, o elevando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el enfoque ya no está en los casos o situaciones en sí mismos, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y las relaciones entre ellos (que a su vez, se convierten en nuevos objetos de razonamiento o comunicación a un nivel superior). (Kaput, 1995, p. 136)

Cuando al realizar una inducción se vuelve demasiado difícil de interpretar, es decir no se generaliza, Manson (2002) señala la necesidad de realizar otra ronda de abducción y lo describe como una “acción inductiva con intención abductora”. Este proceso se lleva a cabo repetidamente hasta que surge un fuerte reclamo abductor, el cual se considera como un tipo de inducción eliminatoria. Mason y Johnston-Wilder (2004, citados por Rivera, 2013), argumentan un posible cierre en el pasaje de uno a todos, implica la construcción de expresiones notacionales sucintas

que pueden ser utilizadas para “sacar conclusiones adicionales que pueden ser particulares o generales” (p. 132) y son principalmente matemáticas, basadas en un contexto mínimo. Para Ellis (2007, citado por Rivera, 2013), estas expresiones caen dentro de la categoría de “generalizaciones de reflexión”, que también incluyen definiciones y resultados extraídos de generalizaciones anteriores y reflejan relaciones estables que son evidentes en los estudiantes que las construyen.

Mason y Johnston-Wilder (2004, citados por Rivera, 2013) caracterizan la generalización y el papel especial que atribuyen a la especialización:

Una versión relacionada y extendida es "ver lo general a través de lo particular, y lo particular en lo general"[inspirado de Whitehead (1911) (p. 138). La generalización es ciertamente presente cuando el examen minucioso de un número de casos, a menudo secuencial en alguna manera, un patrón común es detectado,..... Pero la generalización ocurre a menudo en la contemplación de un solo ejemplo. (Mason & Johnston-Wilder, 2004, p.p. 132-133).

El proceso de generalización implica reconocer un patrón común, que ocurre en varios términos particulares, se da a través de la especialización (o particularización en términos de la secuencia), que expresa una generalización pretendida como una instanciación. Radford, Bardini y Sabena (2007, citados por Rivera, 2013) caracterizan la especialización en tres situaciones generalizadoras diferentes y comparten la opinión de que un solo ejemplo, como particular, “debe convertirse en un signo para otra cosa” (p. 5) y este se transforma en una generalización que reflejan los tres momentos de especialización:

- (1) cuando es visto genéricamente como un objeto que representa y sustituye a todos los objetos de su clase;
- (2) cuando es utilizado metafóricamente como una forma de hablar sobre lo general;
- y (3) cuando es visto dinámicamente como una instanciación dotada de una estructura específica y general. (p. 43)

Peirce (1960, citado por Rivera, 2013) introdujo el término extensión generalizante, que se distingue de la generalización, el cual básicamente implica comparar entradas (etapas, instancias, casos, objetos) en la misma clase, el primero se aplica a lo que ya se ha generalizado a nuevas clases de objetos. “Por lo tanto, la extensión aborda un aumento en la amplitud y asume, todo lo que [la generalización] hizo, y más aún” (p. 256).

Ellis (2007, citado por Rivera, 2013) sugiere las siguientes acciones que apoyan la extensión generalizadora:

- (1) Expandirse a una gama más amplia de casos más allá de la fuente original; (2) desarrollar un análisis global sobre la descontextualización; (3) realizar operaciones en los casos relevantes que conduzcan a la construcción de nuevos casos; y (4) usar el mismo patrón como una forma de producir nuevos casos. (p. 43)

En las explicaciones o justificaciones de las generalizaciones y extensiones generalizadoras, la inducción es una herramienta de verificación, que se aplica a ambas y la argumentación estructural empírica y la inducción matemática son estrategias útiles para apoyar las generalizaciones en una situación deductiva. Por lo tanto, las generalizaciones se construyen a partir de premisas verdaderas, que parecen tener características que las hacen verdaderas. Israel (2006, citado por Rivera, 2013) lo expone de la siguiente manera:

Necesitamos reconocer que lo que "proyectamos" son generalizaciones en vez de propiedades. Si una generalización es proyectable o no depende del contexto... porque depende de toda la "red de creencias", incluyendo los valores epistémicos de equilibrio reflexivo, coherencia, simplicidad y similares que deben ser contados como parte de la "red" total. (Israel, 2006, p. 276)

Los estudiantes pueden establecer propiedades sobre los objetos de una clase que pueden llevar a la formación de generalizaciones, sin embargo, ellos proyectan sus generalizaciones tanto en objetos examinados como no examinados (o extendidos) en la misma clase, que dependen de su red total de creencias que comprende su contexto.

Davydov (2008, citado por Rivera, 2013) observó diferencias entre generalizaciones empíricas y teóricas. La generalización es una “actividad de pensamiento humano que une el pensamiento sensible y racional, el visual y discursivo, y el concreto y abstracto” (Davydov, 2008, p. 74). Las generalizaciones empíricas, por un lado, emplean abducciones e inducciones como formas de formar conceptos y nombres hallando características esenciales o estables de una clase de objetos. Sin embargo, no dan lugar a profundas caracterizaciones internas, ya que están ligadas a las "propiedades externas de los objetos" (Davydov, 2008, p. 77 citado por Rivera, 2013).

Las generalizaciones teóricas, según Davydov (2008, p. 78 citado por Rivera, 2013): Apuntan al razonamiento o al pensamiento dialéctico; va más allá de las dependencias empíricas y de la comprensión (empírica) al articular los objetos individuales. La concreción como unidad de diferentes definiciones que el entendimiento considera estrictamente separadas y al estudiar la naturaleza de los conceptos mismos (el estudio de la naturaleza de los conceptos mismos).

Así, para Rivera (2013) las abducciones e inducciones en generalizaciones teóricas: “son acciones mediadas dentro de un sistema que contrarresta las abducciones e inducciones basadas en la experiencia empírica, las cuales dependen principalmente de observaciones sensoriales y procesos tales como la repetibilidad, semejanza y diferenciación”. El modelado científico ejemplifica el proceso de generalización teórica.

Las discusiones precedentes indican el papel central de las formas de razonamiento inferencial, abducción, inducción y deducción, en varias caracterizaciones de la generalización. Mientras que

el punto de partida de una generalización es la inferencia abductora, la evolución progresiva de una generalización final implica una interacción dinámica entre las tres formas de razonamiento. Por lo tanto según Rivera, desde el punto de vista psicológico como pedagógico, es beneficioso evaluar si el problema del alumno en una tarea de generalización de patrones se refiere a la abducción, la inducción o la deducción. Afirmar simplemente que el estudiante no puede generalizar no aclara qué aspecto del proceso inferencial le resulta difícil.

Teniendo en cuenta las anteriores caracterizaciones de generalización, ahora parece posible evaluar las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de expresar una generalización, utilizando las formas de razonamiento inferencial. Algunas de estas posibles dificultades son las siguientes:

- Dificultades conceptuales para establecer una demanda abductiva.
- Dificultades conceptuales en la transición de una demanda inicial a una demanda abductiva fuerte.
- Dificultades conceptuales para verificar inductivamente la razonabilidad de una demanda de abducción en un término próximo o lejano de un patrón.
- Dificultades de procedimiento para realizar una inducción.
- Dificultades conceptuales para formular y justificar un argumento deductivo pertinente.

3. Problema de Investigación y Objetivos

La revisión de los antecedentes permite proponer la necesidad de potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad, a través del proceso de generalización de patrones. También, se evidenció en algunos estudios la importancia de reconocer las formas de razonamiento inferencial que emergen cuando los estudiantes se enfrentan a tareas de generalización en secuencias figurales, figurales con ayuda tabular y numéricas. En este sentido, las formas de razonamiento inferencial brindan diversos elementos que contribuyen en entender la necesidad de desarrollar el pensamiento algebraico, en los primeros grados de la educación básica y posibilitar desarrollo del mismo. Además Rivera (2013) plantea la necesidad de evaluar algunas dificultades de los estudiantes cuando realizan tareas de generalización de patrones y especificar en qué forma de razonamiento se presenta.

Teniendo en cuenta lo anterior es de interés en este trabajo aportar evidencias empíricas que contribuyeran a entender cada una de las formas de razonamiento inferencial, la manera como se expresan los estudiantes y las dificultades a la que se enfrentan en el desarrollo de las tareas propuestas. Con base en los elementos descritos en la sección anterior, y teniendo en cuenta la necesidad de analizar el proceso mediante el cual los estudiantes elaboran generalizaciones, en particular a través de los procesos de generalización de patrones y la forma como expresan las formas de razonamiento inferencial, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué formas de razonamiento inferencial expresan los estudiantes con edades comprendidas entre los 11 y 14 años, cuando abordan tareas relacionadas con la generalización de patrones?

3.1. Planteamiento del problema.

Con base en la problemática expuesta y con la pregunta de investigación, se plantea el objetivo general y los objetivos específicos de estudio.

3.2. Objetivo general

Describir y caracterizar las formas de razonamiento inferencial que expresan estudiantes entre 11 y 14 años cuando abordan tareas sobre generalización de patrones figurales y numéricos.

3.2.1. Objetivos del trabajo de aplicación.

- Identificar las formas de razonamiento inferencial (abductivo, inductivo y deductivo) que emergen de la actividad desarrollada por los estudiantes, cuando abordan el estudio de secuencias figurales, figurales con ayuda tabular y numéricas.
- Describir las características de las formas de razonamiento inferencial movilizadas por los estudiantes en el abordaje de las tareas diseñadas.

4. Método

Este trabajo se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, que permite realizar una descripción del fenómeno de estudio y profundizar sobre cómo emergen las formas de razonamiento inferencial; abductivo, inductivo y deductivo, en los estudiantes cuando realizan tareas de generalización de patrones.

4.1. Contexto de la Investigación y Población Participante

La investigación se desarrolló en el Instituto Técnico Laguna de Ortices del municipio de San Andrés (Santander) sede A. Esta institución es de carácter público, presta servicios educativos a estudiantes con niveles socioeconómicos bajos (0, 1, y 2) en todos los grados de escolaridad. Esta institución cuenta con única jornada (mañana) y se caracteriza por formar estudiantes bajo la modalidad de turismo y recreación.

La población objeto de estudio estuvo conformada por 14 estudiantes, con edades comprendidas entre los 11 y 14 años. Estos estudiantes cursan el grado sexto, durante el año 2017 y el grado séptimo en el año 2018.

4.2. Proceso Metodológico

El diseño metodológico de esta investigación toma como sustento teórico la propuesta de Rivera (2013). Quien analiza las formas de razonamiento inferencial, a través de la generalización de patrones lineales, con secuencias figurales, secuencias figurales con ayuda tabular y secuencias numéricas. Como se mostró en el capítulo anterior las formas de razonamiento inferencial, entran en juego cuando un estudiante busca expresar una generalidad

Por lo tanto para entender estas formas de inferencia, es importante analizar la actividad de los estudiantes en el aula, la interacción entre ellos y la forma de expresar sus ideas con respecto a las situaciones de variación presentadas en las tareas. Además, interesa describir las actuaciones matemáticas de los estudiantes y analizar, sus producciones, cuando se enfrentan a tareas sobre generalización de patrones. Esto incluye, el análisis y la transcripción de los videos de clase, las hojas de trabajo y la interacción de los estudiantes en los grupos de trabajo.

Como muestra la figura 14, en esta investigación la metodología se compone de cuatro etapas:

1. Diseño de Tareas para el aula de clase;
2. Implementación de las tareas en el aula de clase;
3. Recolección y selección de datos; y
4. Interpretación y análisis teórico de los datos.

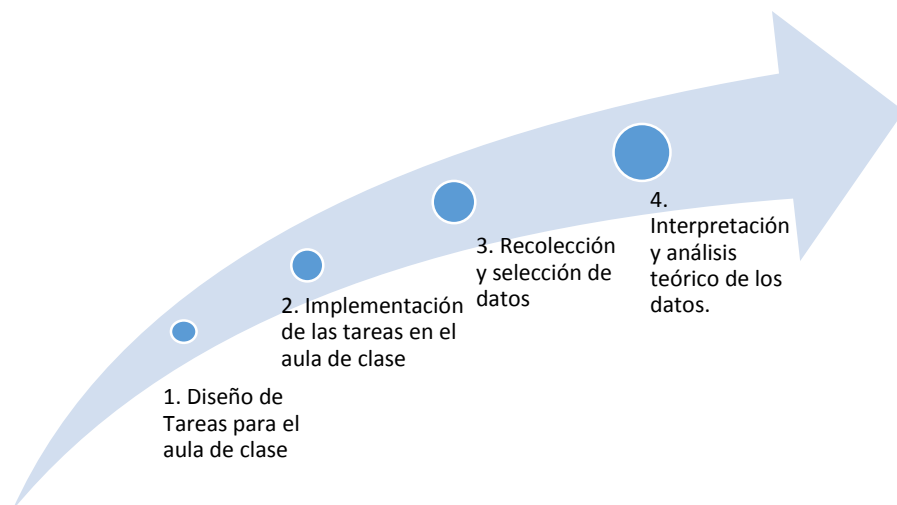


Figura 14. Diseño Metodológico

4.2.1. Diseño de Tareas para el aula de clase. En esta etapa se toman algunos elementos básicos de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), respecto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Desde el marco teórico se plantea como objetivo general de las actividades propuestas la identificación, descripción y el análisis de las formas de razonamiento inferencial sobre la generalización de patrones figurales, figurales con ayudas tabulares y numéricas.

Con base en lo anterior, se identifican y diseñan un conjunto de tareas apoyadas en un análisis a priori. Dicho análisis permite determinar qué formas de razonamiento pueden surgir a partir de la actividad generada en el aula. Por tanto se estructuraron 4 actividades conformadas por una tarea figural con ayuda tabular y una tarea numérica, además de una prueba de pilotaje conformada por dos tareas figurales con ayuda tabular y una prueba final conformada por una tarea figural con ayuda tabular y una tarea numérica sin ayuda tabular. Las tareas fueron tomadas y adaptadas de los trabajos de Vergel (2014) y Rivera (2013). En el rediseño de las tareas, es necesario que cada una de ellas tenga un análisis a priori, este da cuenta de la actividad que cada una puede generar

en el aula. Radford y Sabena (2015) indican que las primeras preguntas deben ser fáciles mientras los estudiantes se involucran en la actividad y poco a poco deben aumentar de complejidad para profundizar en ideas matemáticas clave. En esta etapa se realiza un proceso de identificación y rediseño de las tareas, dada la importancia de la validez de los instrumentos, para que sean las más indicadas al momento de identificar elementos que evidencien formas de razonamiento inferencial en los estudiantes.

Cada tarea se estructuró, para que se realizara de forma individual, se espera que cada estudiante realice una exploración inicial de la secuencia, para luego compartir sus resultados con otro compañero; se define el trabajo en grupos, máximo dos estudiantes, para generar una discusión entre los participantes y evidenciar las formas de razonamientos inferencial emergentes. A continuación se presenta en la tabla 4 el proceso de rediseño de las preguntas que conforman las tareas.

Tabla 3.

Diseño de las tareas.

Propósito de la Pregunta	Ejemplo de la Pregunta	Nº Tarea que incluye este tipo
Analizar si el estudiante ha realizado alguna reclamación abductiva, cuando encuentra o prolonga la secuencia a figuras o términos cercanos.	Dibuja la figura 5 y 6 de la secuencia.	Tarea 1 a la 9: ítem a. Tarea 10: ítem a y b.
Analizar si el estudiante valida o reafirma su hipótesis, para los demás términos de la secuencia utilizando la	Calcula el número de cuadros de la figura correspondiente al término 9.	Tarea 1 y 2: ítem b. Tarea 3 a la 9: ítem b y c. Tarea 10: ítem c y d.

Propósito de la Pregunta	Ejemplo de la Pregunta	Nº Tarea que incluye este tipo
inducción, en casos particulares o generales. Para ello se observa si el proceso para encontrar la figura o término próximo debe pasar por cada uno de los términos hasta llegar al solicitado o realiza un salto inductivo	¿Qué número ocupará la posición 100?	
Explicar en forma verbal los resultados de sus producciones	Explica la forma como procediste para encontrar la respuesta a la pregunta anterior	Tarea 1 a la 6: ítem d. Tarea 7 a la 9: ítem b y c. Tarea 10: ítem c y d.
Establecer una correspondencia entre la figura y el término de la misma.	La figura conformada por 204 círculos, ¿a qué término corresponde?	Tarea 1 y 2: ítem c. Tarea 5, 6 y 10: ítem e. Tarea 9: ítem d.
Establecer un razonamiento deductivo, partiendo de las ideas previas y suscitando una posible generalización empírica o formal	Encuentra una fórmula para el número total de cuadros de cada figura. . Explique su fórmula.	Tarea 1, 2, 7, 8 y 9: ítem d. Tarea 3 y 4: ítem e. Tarea 5 y 6: ítem e y f. Tarea 10: ítem f.

Cada tarea se estructuró para realizarse en dos etapas, Etapa I y etapa II. En la etapa I se establece el trabajo individual, en donde se espera que el estudiante desarrolle una exploración inicial de la secuencia y plantee sus razonamientos; en la actividad diagnóstica solo se planteó esta etapa. La Etapa II se establece el trabajo en equipo, conformado por dos estudiantes.

En la segunda Etapa se propone que el trabajo a desarrollar se divida en dos partes; Parte I, se espera que los estudiantes puedan confrontar los razonamientos que analizaron en la exploración inicial, exponiendo sus ideas y soluciones a cada una de las preguntas de la tarea, además de comentar las dificultades presentadas en el proceso. La Parte II consta de algunas preguntas buscando que los estudiantes encuentren características comunes en los términos de la secuencia, utilicen estrategias de tipo numérico y logren afianzar sus razonamientos.

Para cada una de las tareas se elaboró un análisis a priori (ver sección 4.4) en donde se resalta cómo podría desarrollarse cada tarea, basada en las características de las tres formas de razonamiento inferencial definidos por Rivera (2013). Con esto se busca dar algunas pautas de lo que pueda ocurrir en clase, dar luces a los profesores e investigadores, tener luces sobre este tipo de razonamientos y las formas de poder evidenciarlos.

4.2.2. Implementación de las tareas en el aula de clase. En la segunda etapa, implementación de tareas en el aula, se tuvo especial interés en observar la manera en que los estudiantes, expresan las generalizaciones utilizando las formas de razonamiento inferencial, cuando resuelven tareas que involucran patrones. De acuerdo con Rivera (2013) “se debe reconocer las diferentes generalizaciones que expresan los alumnos y las formas de razonamiento inferencial que emergen en la solución de dichas tareas” (p, 46). Por lo cual resulta fundamental prestar atención a todas las observaciones y respuestas ya sean verbales o escritas y no sólo a expresiones donde se usen signos alfanuméricos.

Para tal fin a cada estudiante se entregan las tareas en una hoja de trabajo; la implementación se realiza durante cuatro sesiones las cuales son grabadas y monitoreadas por el profesor

investigador autor de la investigación y divididas de la siguiente forma; Etapa individual, trabajo en grupo y discusiones grupales.

Etapas individual. En esta etapa se centra la intervención en observar el trabajo desarrollado por cada uno de los estudiantes, teniendo en cuenta los razonamientos que emergen en la solución de cada tarea. Se toma esta etapa como exploración y preparación para que los estudiantes logren mayor apropiación de sus propias ideas. Con esto se espera motivar la participación de cada uno de ellos, para iniciar la actividad tratando de comprender el problema planteado, identificando posibles soluciones y evaluando algunas estrategias emergentes de sus razonamientos.

Trabajo en grupos. En esta etapa se conformaron grupos de trabajo de dos estudiantes. Con ello se busca promover el trabajo colaborativo y la cooperación en la búsqueda de la solución de las tareas planteadas. Se considera importante esta etapa porque permite evidenciar el desenvolvimiento de cada estudiante en la explicación de sus razonamientos y a su vez se consigue observar cómo emergen las formas de razonamiento inferencial.

Discusiones generales. En esta última etapa, terminadas las discusiones y el trabajo colaborativo de los estudiantes y a su vez desarrolladas todas las preguntas de cada hoja de trabajo, se propone generar la discusión grupal y el intercambio de ideas. Para ello el profesor en su rol de investigador estuvo interactuando con todos los grupos, generando la discusión entre los estudiantes y conllevando a la confrontación de sus ideas. Esta situación fue clave porque se pudo profundizar en algunas ideas y posibilitó a los estudiantes la elaboración de significados y toma de conciencia de los objetos matemáticos.

4.2.3. Recolección y selección de datos. La recolección y selección de datos, en esta investigación se desarrolló en cuatro momentos: 1. grabación de todas las actividades de clase; 2.

obtención de las hojas de trabajo de los estudiantes; 3. transcripción del discurso de los estudiantes durante las actividades y 4. Análisis de videos de la interacción social de los estudiantes y sus procesos de resolución de las tareas.

El periodo de recolección de datos se realizó durante una semana del cuarto periodo del 2017 y 4 semanas del segundo periodo académico del 2018. Inicialmente se consideró que el trabajo se podría realizar en 10 jornadas de trabajo de 60 minutos cada una, iniciando con una prueba diagnóstica inicial, en la cual se estimaron dos sesiones de clase, y para las demás actividades también se estimó el mismo tiempo, para concluir con una actividad final. El desarrollo de estas actividades varió un poco por motivos de tiempo y desarrollo de actividades propias de la institución.

La recolección de datos, se enfoca en las discusiones de los estudiantes cuando emerjan distintas propuestas de solución a las actividades diseñadas en la etapa uno. Las grabaciones de video se analizan en episodios, buscando identificar los que resulten más representativos para los objetivos de investigación. Cuando se requiera más profundidad o corroborar hipótesis que surjan en el transcurso de la investigación se contempla la posibilidad de realizar entrevistas a los estudiantes, teniendo en cuenta las especificaciones de Goldin (2000) para entrevistas basadas en tareas. La entrevista, como lo señala Goldin:

... hace posible poner el foco de interés de la investigación más directamente en los procesos del sujeto al enfrentar la tarea matemática, más que sólo en los patrones de las respuestas correctas o incorrectas que ellos producen, por lo tanto hay la posibilidad de ahondar en una variedad de tópicos importantes con más profundidad de la que es posible por otros medios experimentales. (Goldin, 2000, p. 520 citado por Martínez, 2015)

Toda la información recolectada, se clasifica y se organiza de acuerdo a la actividad planteada, con su respectiva fecha, incluyendo las hojas de trabajo de los estudiantes, las notas de campo y el material videográfico (Videos y fotografías) con su respectiva descripción parcial.

Con toda la información recolectada se procede a realizar el proceso de selección y triangulación de datos. Los criterios de selección de los episodios se basan en los principios teóricos, la pregunta y objetivos de investigación. Otro criterio importante para la selección de los episodios más representativos, fue la centración de los profesores investigadores en los grupos en donde los estudiantes expresaban mejor sus razonamientos y además en donde se presentaban algunas dificultades para realizar las tareas.

4.2.4 Análisis de datos. En la cuarta y última etapa interpretación y análisis teórico de los datos, se asume inicialmente analizar el trabajo individual de los estudiantes, para luego comparar el trabajo en grupos, teniendo en cuenta tres categorías de intervención según la forma de razonamiento (abductivo, inductivo y deductivo) expresado por los estudiantes en la actividad.

Para tal fin se transcriben los videos que se consideran susceptibles a analizar, para luego centrarse en comparar teóricamente los resultados y categorizar las respuestas y conclusiones enfocadas en los objetivos.

Para el análisis teórico de los episodios seleccionados, se organizaron en una tabla de tres columnas. La primera columna indica el tipo de evidencia seleccionada y el número de línea de transcripción, la segunda columna contiene la transcripción, incluyendo imágenes y el análisis interpretativo del autor sobre la evidencia; y la tercera columna comprende el sustento teórico que da luz a la interpretación. En los diálogos realizados por los estudiantes se indican las pausas y las vacilaciones verbales, con puntos suspensivos incluyendo interjecciones (ejemplo: eh, um, ¡ah),

para luego construir una descripción del desarrollo de la actividad matemática presentada en el aula.

Posteriormente se categorizan las producciones de los estudiantes de acuerdo a formas de razonamiento inferencial definidas por Rivera (2013): razonamiento abductivo, razonamiento inductivo y razonamiento deductivo. Para facilitar la categorización se identifican las características de cada forma de razonamiento, así como algunas dificultades presentadas por los estudiantes en los diferentes tipos de generalización. El proceso de categorización también permitió ver la evolución de una forma de razonamiento a otra, ya que está determinada por las actuaciones de los estudiantes frente a las tareas y la evolución de sus razonamientos.

La documentación correspondiente al análisis de los datos se presenta detalladamente en la sección 4.5, análisis a posteriori de las actividades.

4.3 Técnicas e Instrumentos de Investigación

Al ser esta investigación de tipo cualitativo, las técnicas que se utilizan son: la observación, la cual se centra en la actividad de los grupos de estudiantes durante el periodo de intervención en el aula; el diálogo permanente, con el fin de dinamizar las discusiones entre los estudiantes e indagar sobre la comprensión de las tareas propuestas.

Los instrumentos para la recolección de la información serán: registro audiovisual de cada actividad y hojas de trabajo de cada estudiante. Para el registro audiovisual se utiliza una videocámara para capturar los momentos más significativos de cada sesión, así como las discusiones focalizadas de algunos grupos al intentar solucionar las tareas propuestas.

En cuanto a las hojas de trabajo de cada estudiante, Vergel (2015) recomienda que se trabajen durante las sesiones de clase, si el estudiante no termina en una sesión, se recogen y se pueden entregar para continuar con la actividad en la siguiente sesión. Una vez recolectados los datos, se pasan a un proceso de selección y triangulación de datos. Seleccionados los episodios, se transcriben para un análisis del vídeo teniendo en cuenta cada detalle para poder estudiar el papel de las formas de razonamiento inferencial en el proceso de generalización de patrones.

4.4 Análisis A priori de las tareas.

Para la intervención en el aula se identificaron y rediseñaron diez tareas sobre generalización de patrones para los estudiantes de básica secundaria; estas tareas son secuencias crecientes de patrones lineales algunos en contextos figurales, figurales con ayuda tabular o numéricos. Para esto se inicia con una actividad diagnóstica con dos secuencias figurales, luego cada una de las tareas conformadas por una secuencia figural y una numérica, para finalizar con una actividad final. Algunas de las tareas tienen las mismas preguntas, esto con el fin de poder evidenciar los razonamientos inferenciales, todos los ítems de las tareas se trabajan en forma individual y luego en grupos de dos estudiantes.

En la implementación de las tareas se espera que los estudiantes logren expresar las formas de razonamiento inferencial a través del proceso de generalización de secuencias figúrales o numéricas, basada en las siguientes características (Rivera, 2013):

- ✓ **Razonamiento abductivo:**
 - Forma inferencial: de resultado y ley a, caso.

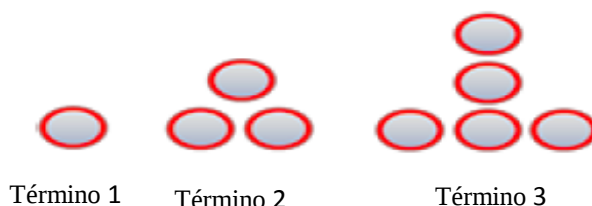
- Actitud inferencial: Entretiene una inferencia plausible hacia una regla; genera y selecciona una teoría explicativa - que "algo tal vez" (conjetura).
- Fuentes: Impredecibles (hechos sorprendentes; destellos; conjeturas inteligentes, conjeturas espontáneas).
- ✓ **Razonamiento inductivo:**
 - Forma inferencial: del resultado y más casos, a la ley.
 - Actitud Inferencial: prueba de una inferencia abductiva. Mide el valor y el grado de concordancia de una teoría explicativa.
 - Fuentes: Predecibles (ejemplos)
- ✓ **Razonamiento Deductivo:**
 - Forma inferencial: de ley y caso, a resultado.
 - Actitud Inferencial: Predice de manera metódica el resultado válido.
 - Fuentes: Previsibles (locales)

De acuerdo al tipo de generalización realizada por los estudiantes es posible categorizar sus producciones en alguna de las formas de razonamiento inferencial: abducción, inducción y deducción. Inicialmente se espera que las producciones de los estudiantes se centren en formas de razonamiento abductivo o inductivo, esto dadas las dificultades para identificar semejanzas o diferencias de la secuencia, utilizar estrategias de tipo numérico, o características espaciales o geométricas y no identificar el patrón y seguir la secuencia sin tener en cuenta los detalles de los términos anteriores.

A continuación se presenta la descripción y el análisis a priori de cada una de las tareas propuestas para cada una de las sesiones de trabajo.

Actividad Diagnóstica: El objetivo de esta actividad es familiarizar a los estudiantes con el proceso de generalización de patrones e introducir a los estudiantes en el desarrollo de secuencias figúrales; además se busca evidenciar las diferentes formas de razonamiento, cuando intentaban expresar una posible generalización. Las dos tareas fueron diseñadas, para que los estudiantes identifiquen las características de algún elemento de la secuencia que esté localizado ya sea en una posición cercana o en una posición lejana, lo cual permite que estos avancen hacia una generalización próxima o lejana (Rivera, 2013).

Tarea 1. Observa la siguiente secuencia:



- Dibuja las dos figuras siguientes
- ¿Cuántos círculos tendrá el Término 9? ¿Puede dibujarlo?
- ¿Qué posición tendrá el Término conformada por 19 círculos?
- Explica el procedimiento para encontrar los términos dibujados.

Figura 15. Actividad diagnóstica. Tarea 1

Nota. Adaptado de: (Vergel, 2014, p. 92)

Descripción. La tarea 1 (figura 15) propone una secuencia figural con apoyo tabular, que consiste en un arreglo de círculos ordenados en dos filas una horizontal y otra vertical. Una de las posibles maneras de describirlo es como un arreglo formado por $n - 1$ círculos ubicados en la fila vertical y n círculos ubicados en la fila horizontal o simplemente por $2n - 1$ círculos, para $n = 1, 2, 3, \dots$

Análisis de la tarea 1: En esta tarea se espera que los estudiantes utilicen estrategias de conteo de los términos que conforman las secuencias, a su vez se espera que observen las relaciones que prevalecen a medida que van descubriendo los demás términos de la secuencia. Por ejemplo, se pueden centrar en el conteo de círculos como objetos individuales y no como una agrupación de objetos, para encontrar una inferencia plausible que permita evidenciar el descubrimiento de una regla o caso y por ende el patrón que genera la secuencia. Otro tipo de respuestas a las cuales pueden recurrir son el uso de tablas, dibujos de las figuras y estrategias aditivas, para hallar los términos de la secuencia solicitados.

En esta primera tarea se espera que el estudiante observe que cada término empieza aumentar la misma cantidad de círculos, a medida que aumenta la posición de la secuencia. Al identificar este invariante, puede ver el término como una agrupación de círculos a los cuales se va agregando dos círculos en cada paso, o pueden verlo como una construcción de dos filas a las que se agrega un círculo a cada fila en cada paso.

Razonamiento Abductivo: En esta tarea es posible que el estudiante vea los términos compuestos por dos filas de círculos; para luego reconocer la estructura numérico-espacial de la secuencia a lo cual Rivera establece como el propósito del razonamiento. La actitud inferencial o posible regla, es que los estudiantes pueden notar que en cada nuevo término siempre aumenta la misma cantidad de círculos, en total dos; es decir, uno en la fila horizontal y otro en la fila vertical y con esta hipótesis logren construir los demás términos de la secuencia, construyendo una afirmación abductiva y que permite resolver los ítems a y b. Las posibles fuentes, para argumentar estas estrategias o ideas previas, se derivan del conteo que realizan los estudiantes y llegando a la conclusión que para obtener el siguiente término se le suma dos círculos al anterior formulando así un resultado o ley para el caso.

Razonamiento Inductivo: El propósito es que los estudiantes logren identificar la relación entre el número de término con la cantidad de círculos que lo conforman, y así extrapolar una generalización tentativa (Rivera 2013). Para ello los estudiantes realizan una prueba inductiva, que les permita determinar el número de círculos que conforman el término sin tener la necesidad de representar gráficamente el término 9 o el término formado por 19 círculos (ítem c) o también se pueden valer de otras fuentes como la construcción de tablas para determinar el número de círculos de cada término o realizar la construcción de los términos anteriores, al pedido, estableciendo la forma inferencial de resultado y más casos para la ley.

Razonamiento Deductivo: aunque en el propósito de la actividad no se espera que se evidencie este tipo de razonamiento, los estudiantes podrían expresar algunas pruebas lógicas para dar respuesta al ítem d, como el uso de fórmulas o expresiones que impliquen la relación entre el número de término con la cantidad de círculos que conforman cada figura. De tal manera que puedan predecir un resultado válido para hallar cualquier término de la secuencia, como: “primero hallamos la cantidad de círculos en la fila horizontal, y este va ser el número de la posición de la figura y luego a la fila vertical le restamos un círculo”. Las fuentes relacionadas a este razonamiento se sustentan en el trabajo realizado en las dos formas de razonamiento iniciales y en la comprobación de la prueba lógica expuesta, estableciendo la forma inferencial de ley y caso al resultado.

Tarea 2:

Observa la siguiente secuencia de figuras.



- Dibuja las figuras que corresponden a los términos 5 y 6
- ¿Cuántos triángulos y cuadrados tendrá el término 8? ¿Puedes dibujarlo?
- ¿Qué término tiene 20 cuadrados y 10 triángulos?
- Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta el comportamiento de la secuencia.

Figura	Figuras Geométricas	Dibujo
10	Triángulos	
	Cuadrados	
15	Triángulos	
	Cuadrados	
20	Triángulos	
	Cuadrados	

Figura 16. Actividad diagnóstica. Tarea 2 Vergel, 2014

Descripción. En la tarea 2 (figura 16) se propone una secuencia figural con ayuda tabular conformado por un arreglo de cuadrados y triángulos. En ella se puede evidenciar la relación entre el número de la figura con la cantidad de triángulos y la relación entre los cuadrados que corresponde a dos veces la cantidad de triángulos. Además se propone el uso de una tabla para, evidenciar las posibles hipótesis abductivas, y su validación mediante la inducción.

Análisis de la tarea 2: Al tratarse de una secuencia figural con ayuda tabular se espera que los estudiantes utilicen estrategias parecidas a las usadas en la tarea anterior, como: el conteo de figuras, el uso de tablas y la generación de ideas o hipótesis para determinar lo invariante como lo

constante en la secuencia. Al ser el conteo de figuras el razonamiento más utilizado, para analizar el patrón de la secuencia, en esta tarea se puede evidenciar que para hallar los términos siguientes, los estudiantes suman al total de triángulos de la figura el doble de cuadrados.

Razonamiento Abductivo: En esta tarea los estudiantes pueden centrar la atención en la dimensión geométrica. Se espera que las inferencias plausibles sean observar el crecimiento que tiene cada nuevo término con respecto al número de triángulos y cuadrados. Una posible hipótesis o conjetura que se puede convertir en una abducción fuerte, sería la relación existente entre el número de triángulos de cada término y su posición. Esto le permite establecer un argumento válido para una reclamación abductiva fuerte, esto es, que “para cada nuevo término se dibujan la cantidad de triángulos, que es igual a su posición y luego se adiciona el doble de cuadrados” y resolver los ítems a y b. Las posibles fuentes que soporta este razonamiento, se derivan en el conteo, el uso de estrategias aditivas y la consecución de tablas para determinar cualquier figura de la secuencia, estableciendo la forma inferencial de resultado y ley al caso.

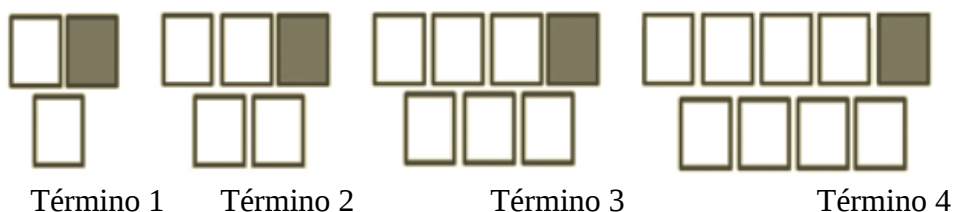
Razonamiento Inductivo: Con las hipótesis abductivas encontradas en el desarrollo de la tarea, el estudiante puede probar sus ideas con los demás términos de la secuencia (ítems c y d). En el desarrollo de este razonamiento se puede evidenciar la corrección de los errores de las hipótesis y la construcción de reclamaciones abductivas fuertes, las cuales permiten extrapolar una posible generalización. Las fuentes que se pueden evidenciar son el conteo de figuras, el uso de tablas y el uso de estrategias numéricas, estableciendo la forma inferencial de resultado y más casos para la ley.

Razonamiento Deductivo: aunque el objetivo de la actividad era netamente diagnóstica, se espera que este tipo de razonamiento emerja a través de la formulación de algunas expresiones verbales o escritas de las generalizaciones, ya sean incipientes o formales por parte de los

estudiantes. El hecho de formar una reclamación deductiva como, para hallar la figura en la posición 15, “se dibujan 15 triángulos y luego el doble de cuadrados”, nos permite extrapolar diferentes tipos de generalizaciones, que conforman una prueba lógica o empírica claves para este tipo de razonamiento.

Actividad 1: El objetivo de esta actividad es introducir a los estudiantes en el desarrollo del proceso de generalización de patrones con secuencias figurales y numéricas sencillas. Que les permitan encontrar las características que determinan el patrón y desarrollar la actividad; a su vez se busca que los estudiantes intenten realizar algún tipo de generalización ya sea de forma verbal, escrita por medio de tablas o relatos y si no es posible en una expresión algebraica.

Tarea 3. Observa detenidamente la siguiente secuencia



- Dibuja la figura correspondiente al término 5 y al término 6
- Calcula el número de cuadrados de la figura correspondiente al término 9
- Calcula el número de cuadrados de la figura del término 100
- Escribe como lograste encontrar la respuesta de la pregunta anterior.
- Explica a tu compañero como puede encontrar el número de cuadrados de cualquier figura de la secuencia.

Figura 17. Secuencia figural apoyada en representación tabular

Nota. Adaptado de: (Vergel, 2014, p. 87)

Descripción. La tarea 3 (figura 17) propone una secuencia figural con apoyo tabular, consiste en un arreglo de dos filas de cuadrados. Una de las posibles maneras de describirlo es como un

arreglo formado por $n + 1$ cuadrados ubicados en la primera fila y n cuadrados ubicados en la segunda fila o simplemente por $2n + 1$ cuadrados, para $n = 1, 2, 3, \dots$

Análisis de la tarea 3: En el desarrollo de esta tarea pueden prevalecer la aplicación de estrategias aditivas. Por ejemplo los estudiantes pueden centrarse en el conteo de los cuadrados como objetos individuales y no como una agrupación de objetos (Rivera, 2013), permitiendo así establecer ideas sobre cuántos cuadrados debe dibujar en la siguiente figura. Los estudiantes pueden recurrir a elementos como: palabras, representaciones gráficas, expresiones verbales, expresiones escritas, entre otros para expresar el patrón.

Razonamiento Abductivo: El propósito de la tarea es que el estudiante tome conciencia de la estructura espacial de la secuencia y observe que cada término está compuesto por dos filas de cuadrados, prestando atención al cuadrado sombreado, esto permite notar que en cada paso siempre se aumenta la misma cantidad de cuadrados, en total dos. Es decir, uno en la primera fila y otro en la segunda fila, permaneciendo fijo el cuadrado sombreado, a partir de dicho análisis puede resolver los ítems a y b. Con esta hipótesis o reclamación abductiva poder construir los demás términos de la secuencia. Las posibles fuentes de este razonamiento, son el conteo de las figuras, el encerramiento de la figura fija y el uso de tablas y dibujos, estableciendo la forma inferencial, de resultado y ley al caso.

Razonamiento Inductivo: Los estudiantes pueden identificar la relación entre el número del término con la cantidad de cuadrados que conforman la figura, y así extrapolar una generalización tentativa (Rivera 2013), para determinar el número de cuadros que conforman cada término sin tener la necesidad de representar gráficamente o tabularmente el término 9 o el término 100 (ítems c y d). Para medir el poder de su afirmación abductiva, los estudiantes pueden probarla sobre casos específicos para comprobar su validez. Se espera que este proceso se realice sobre los términos

anteriores de la secuencia para formar una reclamación abductiva fuerte y se pueda dar una posible generalización. Las fuentes emergentes son la representación de las figuras anteriores a los términos pedidos, el uso de técnicas numéricas de conteo y estrategias aditivas como la de contar el número de cuadrados de cada figura, estableciendo la forma inferencial de ley y caso a resultado.

Razonamiento Deductivo: En este tipo de razonamiento los estudiantes abduciendo a sus inferencias anteriores, pueden expresar algunas fórmulas (ítem d), a partir de la labor conjunta que impliquen la relación entre el número de término con la cantidad de cuadrados que conforman cada término, tal como: “para hallar el término 15, primero hallamos la cantidad de cuadrados en cada fila; en la primera fila hay 15 cuadrados y en la segunda también hay la misma cantidad, que es el mismo número que indica la posición del término y luego en la primera fila se le suma un cuadrado más, el cuál es el sombreado; luego el total de cuadrados del término 15 se obtiene sumando los dos valores hallados” o “el número de cuadrados del término 15 es igual al doble del número de la posición que ocupa más uno”, llegando así a una posible generalización empírica y estableciendo la forma inferencial de ley y caso al resultado.

Tarea 4: Ahora tienes la siguiente secuencia de números, en donde el número 3 ocupa la posición 1, el número 5 la posición 2, el 7 ocupa la posición 3, el 9 la posición 4, y así sucesivamente:

3 5 7 9

Responde:

- a. ¿Cuál es el número que ocupa la posición 5?, ¿cuál ocupa la posición 6?
- b. ¿Cuál es el número que ocupa la posición 9?
- c. ¿Qué número ocupará la posición 100?
- d. Explica la forma como procediste para encontrar la respuesta a la pregunta anterior
Explica a tu compañero como puede encontrar cualquier término de la secuencia.

Figura 18. Secuencia numérica apoyada en representación tabular

Nota. Adaptado de. (Vergel, 2014, p. 87)

Descripción. En la tarea cuatro (figura 18), se propone una secuencia, pero esta vez de forma numérica con apoyo tabular, que se genera a partir del término general $2n + 1$, para $n = 1, 2, 3, \dots$

Análisis de la tarea 4: Con respecto a la tarea se espera que el estudiante recurra a estrategias de conteo debido a que la secuencia es numérica con ayuda tabular. Para identificar lo invariante en la secuencia, los estudiantes pueden plantear estrategias aditivas, estableciendo relaciones entre números consecutivos, realizando operaciones, le permitan identificar el aumento de dos para determinar el número siguiente. En esta parte de la actividad puede ser posible que los estudiantes utilicen diferentes recursos, para identificar invariantes tales como el conteo, la tabulación y expresiones en lenguaje natural.

Razonamiento Abductivo: Por ser esta secuencia netamente numérica, el propósito de esta tarea es que los estudiantes puedan centrar la atención en la dimensión aritmética. Se espera que identifiquen, que las nuevas posiciones aumentan la misma cantidad en este caso de a dos. Con esta hipótesis se espera que los estudiantes logren hallar los términos siguientes de la secuencia y formulen una afirmación abductiva para validarla mediante inducción (ítems a y b). Estas estrategias o ideas previas, se derivan del conteo que los estudiantes realizan, llegando a la conclusión que para obtener el siguiente número en una nueva posición, se le suma dos al anterior. Esto permite establecer la forma inferencial de resultado y ley, al caso.

Razonamiento Inductivo: Con respecto a la tarea una vez los estudiantes logren identificar el invariante entre los números de la secuencia, es importante que establezcan una relación entre el número y la posición que ocupa, para calcular cualquier número de la secuencia, no solo en posiciones consecutivas. Aquí se puede presentar a lo que Rivera (2013) denomina un salto inductivo, ya que el estudiante realiza una posible generalización lejana, debido a que es capaz de percibir un patrón creciente por tanto puede dibujarlo y describirlo verbalmente en términos

aproximados; esto sin necesidad de recurrir a la construcción de los términos anteriores, pero no es capaz de construir o justificar una fórmula directa (ítem c y d), estableciendo así la forma inferencial, de resultado y más casos para la ley.

Razonamiento Deductivo: Para la tarea, pueden surgir expresiones verbales o escritas mediante el uso del lenguaje natural o fórmulas tales como: “para hallar el siguiente número le sumamos 2” o al igual que la primera secuencia pueden surgir respuestas como, para hallar el número en cualquier posición, “multiplicamos la posición por 2 y el resultado le sumamos 1” o “sumamos dos veces el número de la posición y al resultado le sumamos 1”, constituyéndose en posibles generalizaciones de tipo empírico, las cuales establecen la forma inferencial de ley y caso al resultado.

Actividad 2: El objetivo de esta actividad es continuar con el desarrollo de secuencias de patrones figúrales y numéricos con ayuda tabular, más complejas de patrones crecientes y familiarizar a los estudiantes con la generalización de patrones. A su vez se busca que los estudiantes logren generar estructuras que les permitan calcular términos lejanos de la secuencia y predecir los resultados de la manera más convincente posible, buscando llegar a una posible generalización empírica o formal.

Tarea 5: Observa detenidamente la siguiente secuencia de círculos:



Figura 1

Figura 2

Figura 3

- Dibuja el número de círculos correspondiente a la figura 4 y a la figura 5.
- Calcula el número de círculos correspondiente a la figura 10
- Calcula el número de círculos correspondiente a la figura 105
- Explica la forma como procediste para encontrar la respuesta de la pregunta anterior
- La figura conformada por 204 círculos, ¿a qué termino corresponde? Explícale a un compañero(a) con todos los detalles la manera como procediste para encontrar tu respuesta.
- ¿Existe alguna Figura que tenga un número impar de círculos? Explica

Figura 19. Secuencia figural apoyada en representación tabular

Nota. Adaptado de: (Vergel, 2014, p. 89)

Descripción. En la tarea 5 (figura 19) se propone una secuencia figural con apoyo tabular, que consiste en un arreglo de dos filas de círculos. La construcción de los términos de la secuencia puede explicarse por ejemplo, afirmando que la figura está formada por $n + 3$ círculos ubicados en la primera fila y $n + 1$ círculos ubicados en la segunda fila o simplemente por $2n + 4$ círculos, para $n = 1, 2, 3, \dots$

Análisis de la tarea 5: En esta tarea los estudiantes pueden utilizar estrategias aditivas o de conteo, además de recurrir al encerramiento de círculos, representaciones gráficas, expresiones escritas, entre otras. Por ejemplo, se espera que el estudiante formule hipótesis sobre cómo aumenta la cantidad de círculos, a medida que aumenta la posición de la figura dentro de la secuencia, logrando concluir que para cada nueva figura, se le dibujan dos círculos más a la anterior figura. Además los estudiantes pueden observar que para encontrar cualquier figura de la secuencia

a cada fila de círculos se le suma un círculo más que el término anterior, para eso se espera la utilización de tablas que les permiten a los estudiantes describir el comportamiento de cada nuevo término de la secuencia y establecer un patrón para la misma. Otra posibilidad dentro del razonamiento que puede generarse a partir de la tarea, es el “encerramiento” de una cierta cantidad de círculos, los cuales pueden ser considerados por el estudiante como fijos para determinar qué ocurre con los restantes. En cuanto a las expresiones escritas, se puede evidenciar el uso de frases como “para hallar el siguiente término, le sumamos un círculo a la primera fila y otra en la segunda fila” o “multiplicamos por dos la posición de la figura y le adicionamos cuatro círculos más”.

Razonamiento Abductivo: en esta tarea puede ocurrir que este tipo de razonamiento emerja en el trabajo de los estudiantes gracias a la construcción de las dos nuevas figuras pedidas en los ítems a y b, concluyendo que para hallar las figuras solicitadas, se suma a las anteriores dos nuevos círculos, emergiendo una afirmación abductiva. Otra posibilidad es que los estudiantes observen la estructura geométrica de la secuencia, de esta manera pueden analizar cada una de las figuras, formadas por dos filas de círculos y que para hallar cualquier término se deben adicionar un círculo en la primera fila y tres en la segunda; con respecto a la posición de la figura para encontrar otro arreglo de círculos de la secuencia. Esto permite que el estudiante establezca la forma inferencial de resultado y ley al caso; además las diferentes fuentes, para construir esta forma de razonamiento, se pueden dar de forma pictórica, tabular y por conteo.

Razonamiento Inductivo: con base en las afirmaciones abductivas encontradas en los ítems anteriores se espera que los estudiantes, desarrollen los ítems c, d y e, realizando varias rondas de inducción para que esta inferencia se convierta en una posible generalización tentativa del patrón. Además se espera que con esta estrategia los estudiantes, logren identificar la cantidad de círculos de otras figuras de la secuencia, para ello se espera que recurran a estrategias como: la

representación gráfica o el uso de tablas, en las cuales pueden establecer la relación entre el número de círculos con la posición de la figura. Estableciendo la forma inferencial de resultado y más casos para la ley.

Razonamiento Deductivo: Esta forma de razonamiento se evidencia cuando los estudiantes infieren fórmulas en lenguaje natural. Así mismo, pueden recurrir a explicaciones gestuales o icónicas del patrón y las diferentes formas de hallar cualquier término de la secuencia. Por ejemplo para el patrón figural (ítem f), los estudiantes relacionan el número de la figura con la cantidad de círculos, planteando que: “para hallar la figura que está en la posición 100, dibujaría 100 círculos en la primera fila y pintaría tres más, y 100 en la segunda fila y pintaría uno más”, o “sumar dos veces la posición de la figura y luego pintar cuatro círculos más”, lo cual establecería una generalización algebraicamente útil para el patrón y evidenciar la forma inferencial de ley y caso al resultado.

Tarea 6: Observa la siguiente secuencia de números de acuerdo con su posición:			
	6	8	10
Posición 1		Posición 2	Posición 3
Responde:			
a.	¿Cuál es el número que ocupa la posición 4?, ¿cuál ocupa la posición 5?		
b.	¿Cuál es el número que ocupa la posición 10?		
c.	¿Qué número ocupará la posición 105?		
d.	Explica la forma como procediste para encontrar la respuesta a la pregunta anterior		
e.	El número 204, ¿a qué término de la secuencia corresponde? Explícale a un compañero(a) con todos los detalles la manera como procediste para encontrar tu respuesta.		
f.	¿Existe algún término que sea un número impar? Explica		

Figura 20. Secuencia numérica apoyada en representación tabular

Nota. Adaptado de: (Vergel, 2014, p. 89)

Descripción. Se propone una secuencia numérica con apoyo tabular, esto con el fin de que los estudiantes puedan establecer inferencias perceptivas y simbólicas, y sean capaces de construir y justificar una estructura plausible y algebraicamente útil (Rivera, 2013). El desarrollo de esta secuencia se genera a partir del termino general $2n + 4$ círculos, para $n = 1, 2, 3, \dots$

Análisis de la tarea 6: En esta tarea los estudiantes pueden utilizar estrategias aditivas o de conteo. Al tratarse de una secuencia numérica con ayuda tabular, se espera que los estudiantes la relacionen con la anterior e identifiquen la similitud de las mismas. Además que establezcan relaciones entre el número y la posición, así como la relación entre las figuras y los números de la secuencia, esto puede permitirles a los estudiantes extrapolar una posible generalización.

Razonamiento Abductivo: En esta tarea se espera que los estudiantes establezcan formas inferenciales de resultado y ley al caso, es decir que identifiquen, que las posiciones aumentan la misma cantidad es decir de a dos y con esta hipótesis o afirmación abductiva, puedan hallar los siguientes números de la secuencia ítems a y b. Estas estrategias o ideas previas, se derivan del conteo que realizan, el uso de tablas, el uso de operaciones aditivas y multiplicativas, llegando a la conclusión que para obtener el siguiente término se le suma dos al anterior.

Razonamiento Inductivo: En este razonamiento se espera que los estudiantes establezcan formas inferenciales de resultado y más casos para la ley. Para ello ponen en práctica sus abducciones iniciales sobre las demás posiciones de la secuencia y puedan formular una reclamación abductiva, aplicando estrategias aditivas o multiplicativas para responder a los ítems c y e. Las posibles fuentes utilizadas para realizar estas acciones, son el conteo y el uso de estrategias aditivas con ayuda de tablas en donde pueden relacionar la posición con el número que corresponde a la secuencia.

Razonamiento Deductivo: Los estudiantes pueden deducir formas inferenciales de ley y caso al resultado, mediante expresiones verbales y escritas en donde plasmen sus posibles generalizaciones empíricas. Esto puede permitirles a los estudiantes validar sus inferencias iniciales y obtener una generalización algebraicamente razonable, presentándose un cierre deductivo. En la actividad que generan los estudiantes frente a la secuencia pueden surgir formulaciones de tipo aditivo y multiplicativo, como: “multiplicar por dos la posición del número y sumarle cuatro”, o “a cada nueva posición se le suma dos ala anterior posición” entre otras posibles razonamientos que pueden emerger.

Actividad 3: El objetivo de esta actividad consiste en que los estudiantes con base en las secuencias presentadas y según sus razonamientos abductivos e inductivos, logren expresar cualquier tipo de generalización la cual pueda transitar en sus criterios perceptuales y puede caracterizarse por el desarrollo del pensamiento algebraico, lo que permite una inferencia deductiva.

Tarea 7: Observa la siguiente secuencia:



Figura 1

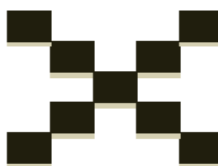


Figura 2

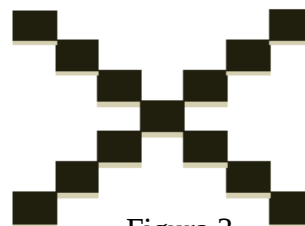


Figura 3

- ¿Cómo sería la Figura 4? ¿la figura 5? Explique su construcción.
- Si extendemos el patrón basado en las figuras anteriores, ¿cómo sería la figura 11? Dibújalo o explícalo.
- ¿Cómo podría explicarle a un compañero cómo construir la figura 25? ¿y la figura 100?
- Encuentra una fórmula para el número total de cuadros de cada figura. . Explique su fórmula.

Figura 21. Tarea 7: Secuencia figural apoyada en representación tabular

Nota. Adaptado de: (Rivera, 2013, p. 93)

Descripción. Se propone una secuencia figural con apoyo tabular que consiste en un arreglo de cuadros que describen un patrón cruzado (Rivera, 2013). Una de las posibles maneras de describirlo es, como “un arreglo formado por cuatro cuadros en cada esquina y uno fijo en el centro, los cuales se mantienen constantes para todos los términos de la secuencia y se le adiciona un cuadro más a cada esquina”, otra manera de describirlo, próxima a una posible generalización algebraicamente útil sería, el producto de la posición de la figura por cuatro cuadros, adicionando el cuadro fijo o simplemente por $4n + 1$ cuadros, para $n = 1, 2, 3...$

Análisis de la tarea 7: En esta tarea se espera que los estudiantes utilicen estrategias aditivas (como el conteo, de los cuadros de cada figura) y a la vez multiplicativas (establecer el producto de la posición de la figura por cuatro y aumentar un cuadro más), además pueden recurrir al empleo de representaciones tabulares o gráficas. Por tratarse de una secuencia figural con ayuda tabular, con la cual los estudiantes se encuentran familiarizados, el trabajo se proyectó para que sus inferencias plausibles les permitieran encontrar el patrón con mayor facilidad. Por lo tanto los razonamientos esperados son: “a medida que aumenta la posición de cada figura, la siguiente tendrá cuatro cuadrados más que la anterior, es decir que en cada esquina se le aumenta un cuadrado más”.

Razonamiento Abductivo: Se propone una tarea con una estructura figural por lo que posiblemente los estudiantes puedan establecer afirmaciones abductivas como, observar que para hallar una nueva figura, se le suma un cuadro más en cada una de las esquinas, dejando el cuadro central constante; o que existe una relación entre la posición de cada figura y el aumento de los cuadros va ser de cuatro, para cada nueva figura y este incremento lo puedan usar para hallar las figuras solicitadas en los ítems a, y b, de la secuencia. Las posibles fuentes para percibir el patrón de la secuencia, es dibujarlo o describirlo verbalmente en términos aproximados, además de la

construcción de las otras figuras, se pueden apoyar con estrategias numéricas, para establecer la forma inferencial de resultado y ley al caso.

Razonamiento Inductivo: Las formas inferenciales de resultado y más casos para la ley en esta tarea se pueden evidenciar con la solución del ítem c. En ella los estudiantes analizan y verifican el poder de sus afirmaciones abductivas, con la esperanza de corregir los errores y formular una posible abducción fuerte; para el patrón de la secuencia y por ende en una posible generalización. Las posibles fuentes que se evidencian en este razonamiento son pictóricas, gestuales y retóricas.

Razonamiento Deductivo: En esta forma de razonamiento se espera que con el trabajo realizado en las anteriores tareas los estudiantes puedan plantear generalizaciones algebraicamente útiles. Con base en sus inferencias iniciales, aunque no se descarta que aparezcan, expresiones verbales o escritas las cuales en esta investigación también son consideradas con generalizaciones; con la pregunta del ítem d, se busca que la reclamación deductiva descrita por Rivera (2013), se evidencie con el desarrollo de una prueba deductiva lógica y por ende con una expresión matemática, estableciendo la forma inferencial de ley y caso al resultado.

Tarea 8. Ahora tienes la siguiente secuencia de números:

2

5

8

Término 1

Término 2

Término 3

- ¿Cuáles son los números correspondientes a los Términos 4, 5 y 6? Explica
- ¿Cuál es el número que corresponde al Término 15? Explica cómo lo haces.
- ¿Cuál es el número correspondiente al Término 100? Explica cómo procediste para encontrar la respuesta.
- Encuentra una fórmula para hallar cualquier término de la secuencia. . Explique su fórmula.

Figura 22. Tarea 8: Secuencia numérica apoyada en representación tabular

Nota. Adaptado de: (Vergel, 2014, p. 93)

Descripción. La tarea (figura 22) se propone una secuencia numérica con apoyo tabular, esto con el fin de que los estudiantes no transcriban las mismas respuestas y se puedan evidenciar nuevas inferencias para esta tarea. El resultado de la secuencia se genera a partir de la expresión general $3n-1$ círculos, para $n = 1, 2, 3, \dots$

Análisis de la tarea 8: Por ser una secuencia numérica y no tener relación con la primera tarea como se venía realizando en las dos actividades pasadas, se espera que los estudiantes logren captar la comunalidad de la secuencia, utilizando estrategias de aditivas estableciendo relaciones entre números consecutivos; además de realizar operaciones aritméticas e identificar el aumento de tres de un término al siguiente.

Razonamiento Abductivo: En esta tarea se cuenta con una estructura numérica por lo que los estudiantes posiblemente, utilicen estrategias de conteo, representaciones tabulares o tratarán de asemejarlas con las tareas anteriores. Para ello se espera que establezcan formas inferenciales de resultado y ley al caso, observando que los términos aumentan la misma cantidad, en este caso su incremento es tres, y puedan utilizarlo para hallar los siguientes términos (ítem a) de la secuencia. Una de las posibles estrategias, es observar que para hallar el término siguiente, basta con aumentar en tres el número de la posición anterior u otra afirmación abductiva, observando que los términos de la secuencia son múltiplos de tres disminuidos en uno. Se espera que esta afirmación se evidencie en todos los estudiantes por sus experiencias previas en el trabajo con generalización de patrones. Las posibles fuentes utilizadas en esta tarea, son especialmente el conteo, el trabajo desarrollado en las tareas anteriores, las temáticas expuestas en las clases y el desarrollo de tablas que relacionen los números con su respectiva posición.

Razonamiento Inductivo: Para este razonamiento se espera que los estudiantes pongan en práctica sus hipótesis abductivas y realicen rondas de inducción sobre los términos de la secuencia

pedidos en los ítems c y d. Con esto se busca afianzar sus razonamientos y que los estudiantes logren la construcción de fórmulas algebraicamente útiles y se conviertan en hipótesis abductivas fuertes. De tal manera, que las puedan utilizar en otros términos de la secuencia y no solo en términos consecutivos y logren extrapolar una generalización lejana. Las posibles fuentes para el establecimiento de estas premisas (casos y resultado) y llegar a conclusiones pertinentes (Ley) son la enumeración, (números de casos observados), analogías (similitud o rasgos entre casos), y análisis científico (a través de experimentos).

Razonamiento Deductivo: En este razonamiento se espera que la forma inferencial de ley y caso al resultado, se evidencien cuando los estudiantes puedan plantear fórmulas en lenguaje natural para hallar los términos de la secuencia, como: “a los múltiplos de tres le restamos uno” o “para hallar el siguiente término le sumamos tres al anterior” o más específicamente que formulen una prueba deductiva lógica, mediante una expresión que trasmite lo que interpretan de la estructura de la secuencia. También se espera que la generalización tentativa, que ha surgido se convierta en un razonamiento deductivo en vez de una generalización incipiente y los estudiantes puedan explicar el proceso para hallar cualquier término de la secuencia.

Actividad Final: En esta actividad al igual que las anteriores se plantea una secuencia figural y una numérica, ambas con ayuda tabular, teniendo en cuenta el trabajo realizado hasta el momento por los estudiantes participantes de la investigación. Con base en esto, se espera que los razonamientos inferenciales, emerjan con más claridad en los participantes y logren expresar generalizaciones más formales. Además se espera que el éxito repetitivo de la verificación y corrección de los elementos de la generalización próxima y lejana, sometidas a pruebas, permitan que los estudiantes transiten a las fases de encapsulación y justificación de la generalización para concluir con una expresión final.

Análisis de la tarea 9: Se espera con esta tarea que los estudiantes recurran a las estrategias presentadas en las actividades anteriores, como: el uso de tablas, expresiones verbales e icónicas, aditivas y a la vez multiplicativas, representaciones gráficas y la relación entre el número de posición y de la figura. Un posible razonamiento, para hallar el patrón de esta primera tarea, es ver que para hallar una nueva figura de la secuencia, basta con multiplicar la posición de la figura por dos y sumar tres nuevos círculos y extrapolar una generalización algebraicamente útil, o establecer que para encontrar una nueva figura basta con pintar dos nuevos círculos a la figura anterior y generar una generalización tentativa para el patrón.

Tarea 9: Observa la siguiente secuencia:

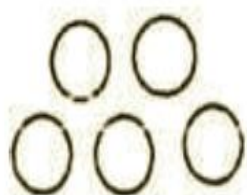


Figura 1

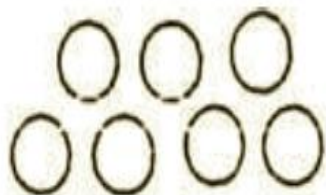


Figura 2

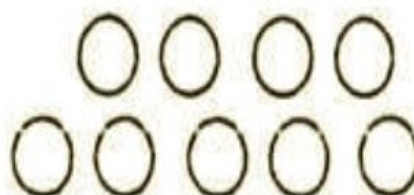


Figura 3

- Dibuja las figuras 5 y 6
- Calcula el número de círculos de la figura 9, sin construirla. Explica cómo lo haces.
- Calcula el número de círculos de la figura 100 y explica cómo lo haces.
- José tiene una Figura de esta secuencia. Él usó exactamente 81 círculos. ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta.
- Encuentra una fórmula para hallar cualquier término de la secuencia. Explique su fórmula.

Figura 23. Tarea 9: Secuencia figural apoyada en representación tabular

Nota. Adaptado de: (Vergel 2014, p. 93)

Descripción. Esta tarea es un arreglo creciente de círculos ubicados en dos filas y su razonamiento es muy parecido a una tarea anterior, el cual consistía en que a la fila superior se le adiciona un nuevo círculo, en cada término y a la fila inferior dos nuevos círculos, teniendo en

cuenta el número de la figura, o simplemente la secuencia se genera a partir del término general $2n+3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

Razonamiento Abductivo: Una de las posibles hipótesis o ideas previas para encontrar el patrón de la secuencia y establecer la forma inferencial de resultado y ley, al caso. Para el desarrollo de los ítems a y b, se espera que los estudiantes determinen que para hallar una nueva figura de la secuencia debe establecer una relación con la posición de la figura y el número de círculos en cada fila; es decir que para hallar la figura que está en la posición nueve, basta con multiplicar la posición por dos y pintar tres círculos más, para obtener el total de círculos.

Para alcanzar este nivel de razonamiento, los estudiantes pueden utilizar estrategias aditivas y multiplicativas que les permitan encontrar la comunalidad de la secuencia y además utilizar estrategias de encerramiento de círculos y representaciones icónicas de las figuras.

Razonamiento Inductivo: En esta fase del proceso inferencial se espera que los estudiantes afiancen sus hipótesis abductivas en otros términos de la secuencia y logren proponer una generalización tentativa, dando respuesta a los ítems c y d, estableciendo la forma inferencial de resultado y más casos para la ley. Con estas rondas de inducciones, se espera que el trabajo con generalizaciones próximas, afiancen la estructura abductiva de los estudiantes y la convierta en una hipótesis fuerte que más adelante se puede convertir en una generalización algebraicamente útil. Además se pretende que los estudiantes también apliquen estas ideas a los primeros términos de cada secuencia y así poder realizar una involución de las hipótesis iniciales y dar el salto inductivo en sus razonamientos.

Razonamiento Deductivo: En esta forma de razonamiento se pretende que el estudiante luego de responder a las primeras preguntas de la tarea, establezcan una generalización tentativa para la secuencia vía abducción e inducción, intenten inferir una posible deducción que pueda llegar a

convertirse en una generalización algebraica razonable o como lo expresa Lee (1996) una “generalización algebraicamente útil”. Los estudiantes pueden formar una reclamación deductiva y esta puede ser de manera visual o numérica en vez de una prueba deductiva formal. Para ello pueden trabajar con términos lejanos de la secuencia y probar el poder proyectivo de sus inferencias y para establecer una fórmula directa, de forma verbal o escrita, la cual puede probar en los términos iniciales para validar sus inferencias.

Tarea 10.

7 11 5 9

- a. ¿Cuál consideras es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?
- b. ¿Cuál es el término siguiente? ¿por qué?
- c. Calcula el término de la posición 9. Explica cómo lo haces.
- d. Calcula el término de la posición 100 y explica cómo lo haces.
- e. Fernando plantea que el número 83 está en la secuencia. ¿A qué posición de la secuencia corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta.
- f. Encuentra una fórmula para hallar cualquier término de la secuencia. Explique su fórmula.

Figura 24. Tarea 10: Secuencia numérica sin representación tabular.

Análisis de la tarea 10: el propósito de esta tarea es que al ser numérica sin ayuda tabular, los estudiantes construyan una inferencia inicial para ordenar los términos de la secuencia.

Para luego establecer cada uno de los razonamientos y extrapolar una posible generalización. Al tratarse del mismo desarrollo de la tarea anterior (pero esta vez numérica), se busca llegar a los mismos tipos de generalizaciones explicados anteriormente (ver análisis tarea 9).

Descripción. Esta tarea consiste en un arreglo de números sin posición fija que el estudiante debe ordenar para poder encontrar el patrón de la secuencia. Además con el resultado de las

inferencias plausibles de los estudiantes, pueden obtener que es un arreglo de números impares, cuyo primer término es el cinco y se genera a partir de la misma expresión de la tarea anterior, $2n + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

Razonamiento Abductivo: Una posible inferencia plausible que pueden asumir los estudiantes para establecer un posible resultado y ley al caso (forma inferencial), es que la secuencia de números, aumenta en cada nuevo termino en dos más que el anterior. A su vez pueden observar que los números son impares, y con esta hipótesis establecer una pasible conjetura del patrón. Las posibles fuentes a las cuales puede recurrir, son el uso de las afirmaciones abductivas de las tareas anteriores, el conteo de los números y la formulación de relaciones aditivas y multiplicativas que permitan establecer una estructura única para extender el patrón, en los demás términos de la secuencia (ítems a, b y c).

Razonamiento Inductivo: En esta forma de razonamiento se espera que los estudiantes realicen pruebas de sus inferencias abductivas, las cuales les permite medir el valor y la concordancia de la teoría explicativa que está emergiendo, con los casos anteriores. Por ejemplo en la solución del ítem c se espera que los estudiantes realicen verificaciones inductivas, lo cual permite corregir los errores de su posible generalización y establecer una reclamación abductiva fuerte, que puede ser aplicada para encontrar los demás términos de la secuencia.

Las posibles fuentes utilizadas para estas rondas de inducción, son el uso de tablas, el conteo y la asociación de los números con las figuras de la tarea anterior.

Razonamiento Deductivo: Luego de transitar por las dos formas de razonamiento iniciales se espera que el estudiante, pueda predecir de manera metódica un resultado válido de sus hipótesis. Para ello puede realizar observaciones sobre términos lejanos de la secuencia, que le permita evidenciar la veracidad de su generalización y así formular una reclamación deductiva, ya sea

mediante un argumento estructural empírico o una prueba lógica. Las posibles fuentes previsibles para el desarrollo del ítem d, es la prueba de su generalización en los términos iniciales de la secuencia y en otros más, para validar su razonamiento

4.5 Análisis A posteriori de las tareas

Para entender las formas de razonamiento inferencial que emergen en la actividad con patrones en el desarrollo de las actividades con los estudiantes, se realiza una observación exhaustiva y cuidadosa de los videos y hojas de trabajo, para identificar los episodios en donde fue más evidente las generalizaciones, cuando los estudiantes abordaban tareas con secuencias de patrones figúrales y numéricos con ayuda tabular.

Para la revisión de los resultados expuestos por los estudiantes, se requiere de un análisis por categorías, para poder evidenciar las diferentes acciones perceptivas, las alocuciones, el lenguaje, los signos matemáticos en general. Por tanto se realiza un seguimiento de la actividad en el trabajo individual y por grupos. Este análisis permitió apreciar la evolución de las diferentes formas de razonamiento inferencial, incluso se identificó que emergieron principalmente las formas de abducción e inducción.

Para el análisis de datos una vez identificados los episodios más destacados se organizan en una tabla con tres columnas. La primera columna indica el tipo de evidencia seleccionada y el número de línea de la transcripción; la segunda contiene la transcripción, incluyendo imágenes y el análisis interpretativo del autor sobre la evidencia; y la tercera columna comprende el sustento teórico que da luz a la interpretación, incluyendo comentarios interpretativos o notas de campo.

Para comprender los registros usados en la documentación de cada actividad, en las transcripciones de los videos presentados, se asigna una codificación para cada estudiante, llamándolo por su respectivo nombre, contando con la debida autorización de los padres de familia y para los grupos conformados utilizamos un código G_A , G_B , G_C , (Grupo A)...Con respecto a las líneas de transcripción utilizamos L_1 , L_2 , L_3 , (Línea 1)..., cada línea representa la intervención de cada individuo y se inicia con la enumeración cuando hay cambio de tarea (Vergel, 2014). Las transcripciones están acompañadas por imágenes de los participantes o de las producciones que realizan en sus hojas de trabajo.

Las sesiones se desarrollaron inicialmente de forma individual y luego en grupos conformados por dos estudiantes, seleccionados libremente, esto con el fin de promover el trabajo colaborativo y poder entender las características de las formas de razonamiento utilizadas para la solución de cada tarea. Se considera que esta dinámica, puede favorecer la generación de discusiones enriquecedoras las cuales conllevan a favorecer la reflexión y el aprovechamiento de las inferencias mostradas en el trabajo individual y colectivo. Establecidos los grupos de trabajo, se mantuvieron durante toda la intervención para aprovechar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

Actividad Diagnóstica

El grupo con el cual se trabajó estuvo conformado por catorce estudiantes, de edades comprendidas entre los 10 y 12 años, los cuales nos prestaron su colaboración, en la realización de la misma. Las tareas propuestas buscaban involucrar a los estudiantes, en el estudio de patrones a través de secuencias figúrales con ayuda tabular y conocer más de cerca las formas en que los estudiantes desplegaban sus diferentes razonamientos; interesaba detectar las formas de razonamiento inferencial que emergen en el desarrollo de las tareas, depurar las preguntas

planteadas y prever ciertas dificultades asociadas con cada una de las diferentes formas de razonamiento abductivo, inductivo y deductivo.

En el desarrollo de las Tareas 1 y 2, (figura 25) se tenían planeadas dos sesiones las cuales se cumplieron a cabalidad. Aunque el objetivo de esta actividad era familiarizar a los estudiantes con el estudio de patrones, se pudo evidenciar el uso de las tres formas de razonamiento inferencial, a través de los cuales los estudiantes expresaban sus primeros indicios en la generalización de patrones.

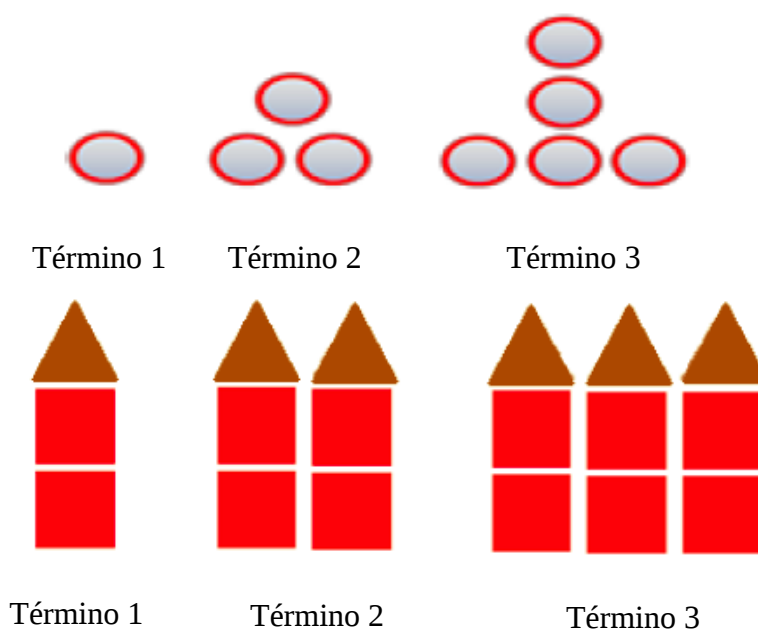


Figura 25. Actividad Diagnóstica Tarea 1 y 2 Secuencias Figurales.

Para dar respuesta a cada una de las preguntas planteadas en cada tarea los estudiantes recurrieron a estrategias numéricas, geométricas espaciales, representaciones mediante tablas y de conteo. Además sus generalizaciones transitaron entre las formas de razonamiento abductivo, e inductivo en las soluciones de los ítems a, b y c. Con respecto a la forma deductiva, se evidenció

su presencia con las respuestas del ítem d, lo cual dio indicios del desarrollo de la actividad, apuntaría a que las tres formas inferenciales se manifestaran en el trabajo de cada uno de los estudiantes. La articulación de las diferentes formas de razonamiento fue clave para que los estudiantes a través de la actividad expresaran sus ideas, las afianzaran y argumentaran sus razonamientos.

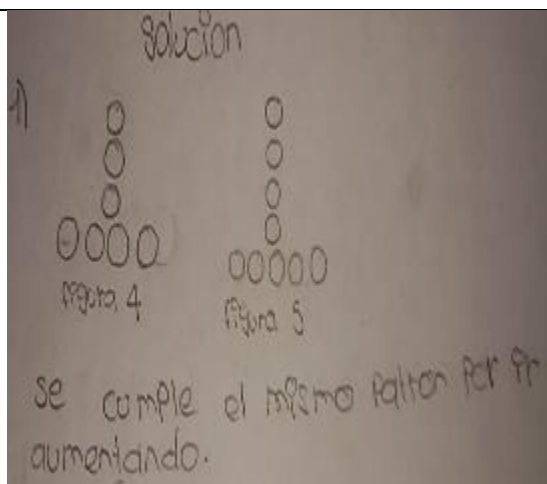
A continuación se presentan evidencias que corresponden a la primera y segunda sesión, desarrollada a partir de las dos tareas que conformaban la actividad, cabe resaltar que al tratarse del diagnóstico, el trabajo se desarrolló individualmente, esto buscando familiarizar a los estudiantes con el estudio de patrones.

En la siguiente tabla se muestra el trabajo realizado por los estudiantes Lisbeth, Davin y Alder y la forma de obtener los términos siguientes de la secuencia, ítem a, además del análisis de la forma de razonamiento abductivo presentado en las respuestas generadas.

Tabla 4.

Transcripción 1: Actividad Diagnóstica; Respuestas al ítem a, tarea 1, estudiantes Lisbeth, Davin y Alder.

Hoja de trabajo Solución ítem a, Tarea 1 por los estudiantes Lisbeth Davin.	Se evidenció una abducción, debido a que la estudiante comprende el patrón y lo proyecta en los dos términos pedidos. Se puede observar una hipótesis abductiva, la estudiante identifica que para construir los siguientes términos se debe aumentar un círculo horizontalmente y verticalmente a la figura anterior para obtener el siguiente término.	Asume una inferencia plausible, hacía una regla, cuando hace uso de la expresión “se cumple el mismo patrón por ir aumentando” o “me di cuenta cogiendo los círculos, que había y le iba sumando de a dos”
--	--	--

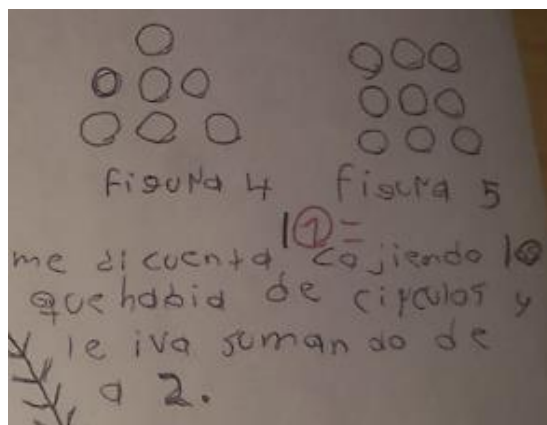


Fuentes: conteo de círculos, representaciones de los términos anteriores.

Verificación y justificación:

Estructurada por inducción

El estudiante identifica el invariante en la secuencia y lo proyecta en los términos solicitados, formulando una hipótesis abductiva, que valida en los otros términos de la secuencia.

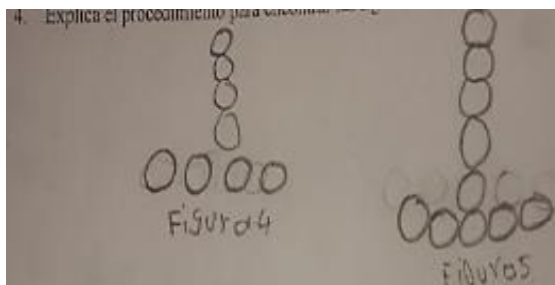


Hoja de trabajo
Solución ítem a,
Tarea 1 por el
estudiante
Alder.

Con respecto a la respuesta del estudiante, se evidencia que las hipótesis utilizadas demuestran que no comprendió el patrón que determina los términos de la secuencia. Sin embargo se nota que intenta representar los dos términos, pensando que cada uno de ellos está compuesto por la misma cantidad de círculos horizontal y verticalmente según su posición. El intento de formular una

Dificultades conceptuales para establecer una demanda abductiva.

hipótesis abductiva muestra la dificultad para entender la relación funcional entre el número de círculos del término con su respectiva posición.



En el trabajo anterior, observa que los estudiantes validaron sus hipótesis abductivas para encontrar lo invariante presentado en los términos solicitados de la secuencia, Lisbeth y Davin explican la manera de proceder en la construcción del cuarto y quinto término. Para esto recurren a inferencias plausibles, como el conteo de los círculos y expresiones verbales, que validan estas ideas sobre el desarrollo de los términos de la secuencia. Además observaron algunas características comunes de los términos que la conforman, como: las figuras geométricas que conforman cada término, la ubicación espacial y la relación entre el número del término y la cantidad de círculos que lo conforman.

Expresiones como “se cumple el mismo patrón por ir aumentando” o “me di cuenta cogiendo los círculos que había y le iba sumando de a dos” establecen hipótesis abductivas las cuales se pueden convertir en abducciones fuertes, mediante inducción, ya que los estudiantes hacen énfasis entre el número del término, con el número de círculos pertenecientes a la fila horizontal de cada término, permitiendo establecer el invariante de la secuencia, por tanto la construcción de los términos solicitados.

Estas explicaciones expuestas por Lisbeth y Davin, para dar respuesta a la primera pregunta de la tarea 1, se encuentran dentro del razonamiento abductivo, este tipo de razonamiento les permite inferir una característica común a otros términos de la secuencia especialmente los subsecuentes.

Por otro lado las dificultades para establecer una reclamación abductiva, centrándonos en el caso del estudiante Alder, quién plantea, que consiste en que para hallar los términos solicitados, se dibujan la misma cantidad de círculos en la fila horizontal y en la fila vertical. Este estudiante establece que la afirmación abductiva no transita por la relación espacial geométrica que se representa en la secuencia, es decir el estudiante no encuentra la regularidad existente en los términos expuestos.

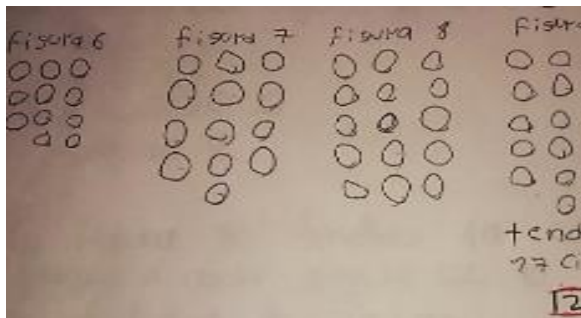
A partir de la pregunta ¿cuántos círculos tendrá la figura 9?, ítem b, se tuvieron en cuenta las respuestas Lisbeth y Davin, ya que se evidenciaron formas inferenciales interesantes, las cuales permiten evidenciar el poder proyectivo de sus hipótesis abductivas y además podemos observar su verificación mediante la inducción. Además tuvimos en cuenta la solución del estudiante Oscar, ya que se evidenció la dificultad para validar su hipótesis abductiva, mediante la inducción, lo que le permitió hallar la figura solicitada.

Tabla 5.

Transcripción 2: Actividad Diagnóstica; Respuestas al ítem b, tarea 1, estudiantes Lisbeth, Davin y Óscar.

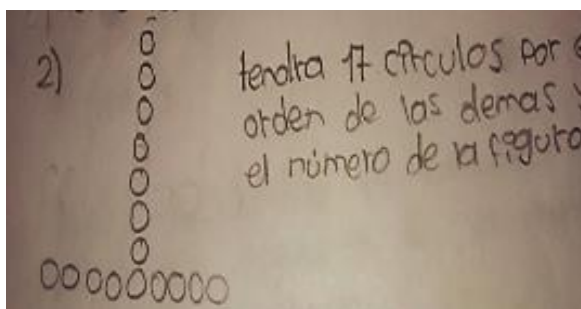
Hoja de trabajo	Se evidencia el poder proyectivo de las hipótesis abductivas sobre otros términos de la secuencia. En este caso el estudiante se valió de la construcción de los términos anteriores al solicitado, para expresar la regularidad y validar su razonamiento	Prueba de una inferencia abductiva, mide el valor de la hipótesis sobre otros términos de la secuencia.
Solución ítem b, Tarea 1 por los estudiantes Davin y Lisbeth.		

abductivo, a través de la inducción, mediante enumeración.



Fuentes: ejemplos, enumeración, análisis.

La validación de su razonamiento inicial le permitió reafirmar su hipótesis abductiva, para apoyar la ley sobre casos conocidos y proyectarlos sobre el término solicitado.

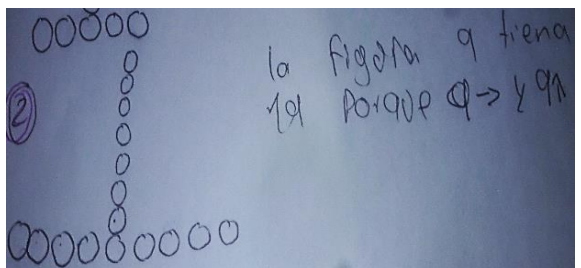


Verificación y justificación: empírica, por ejemplo por enumeración, analogía y experimentos.

Hoja de trabajo
Solución ítem b,
Tarea 1 por el
estudiante
Oscar.

Se evidencia que el estudiante no establece inductivamente su afirmación abductiva “va aumentando el número de círculos de 1 en 1”, al establecer que la figura solicitada está conformada por 9 círculos en la fila horizontal y 9 en la vertical.

Dificultades conceptuales para verificar inductivamente la razonabilidad de una afirmación abductiva en un término próximo o lejano en una secuencia.



En la solución de esta pregunta se esperaba que los estudiantes construyeran abducciones iniciales, para poder representar el término solicitado y mediante inducción validar el poder proyectivo de su hipótesis. Respecto a la respuesta de Davin, evidenciamos, que debió valerse de los términos anteriores y realizar su construcción mediante la ejemplificación, para encontrar el término solicitado. Al realizar la construcción de los nuevos términos, el estudiante afianzó sus ideas iniciales, sobre lo invariante de la secuencia y además le permitió refutar y evolucionar sus afirmaciones, llegando a estructurar una reclamación abductiva fuerte.

Con respecto a la respuesta de la estudiante Lisbeth, se observa la validación de su hipótesis inicial, a través de la fase de verificación inductiva, la cual acompaña y apoya una afirmación abductiva, debido a que su respuesta no debió ser construida por enumeración o ejemplificación, sino que transitó desde las etapas iniciales (dadas) hasta el término solicitado. Esto deja entrever el fuerte reclamo abductor que la estudiante va generando, para establecer una posible generalización tentativa sobre el patrón que determina la secuencia. En su afirmación “tendrá 17 círculos, por el orden de las demás y por el número de la figura”, la estudiante está validando la relación que ella establece entre el número del término y la cantidad de círculos que la componen; esto deja claro que su hipótesis abductiva se convirtió en un fuerte reclamo abductor que valida su posible generalización.

Estas explicaciones expuestas por Lisbeth y Davin, para dar respuesta al ítem b de la tarea 1, se encuentran dentro del razonamiento inductivo, lo cual les permitió comprobar, justificar y evolucionar las características comunes de los términos de la secuencia especialmente las posiciones lejanas.

Las dificultades presentadas por los estudiantes en el desarrollo de este ítem, demuestran que no comprendieron lo invariante de la secuencia y solo se limitaron a construir las figuras solicitadas

con la afirmación abductiva expresada por el estudiante Alder en la solución del ítem a; con respecto a esto se tiene la respuesta de Óscar, quien afirma “la figura del término 9 está conformada por 19 círculos, $9 \rightarrow$ y $9 \uparrow$ ” refiriéndose que este término tiene nueve círculos en la fila horizontal y los mismos en la fila vertical. Aquí se nota, que no se presentó una forma inductiva, debido a que el estudiante, no logra explicar la razonabilidad de su afirmación abductiva y se limitó a construir la figura con base en su percepción, sin establecer una regularidad para hallar cada nuevo término de la secuencia.

A partir de la pregunta ¿Qué posición tendrá la figura conformada por 19 círculos?, ítem c, se indagan las respuestas presentadas por Karen, Lisbeth y Oscar, sobre la manera en que hallaron la posición de la figura. A continuación presentamos, individualmente sus respuestas y analizamos cómo las formas de razonamiento abductivo e inductivo emergieron para la consecución de este ítem.

La respuesta de Lisbeth demuestra cómo realiza inferencias que apuntan a una generalización tentativa para expresar el patrón. Como se observa en la figura 26, la estudiante establece una relación entre el número del término y la cantidad de círculos que debe ubicar en las filas vertical y horizontal. Con base en su hipótesis abductiva inicial y la validación inductiva presentada en la respuesta anterior, la estudiante pudo extrapolar una generalización para el patrón de la secuencia. Además en indagaciones posteriores se destaca que esta hipótesis también la pone en práctica con las figuras iniciales y luego con las figuras lejanas.

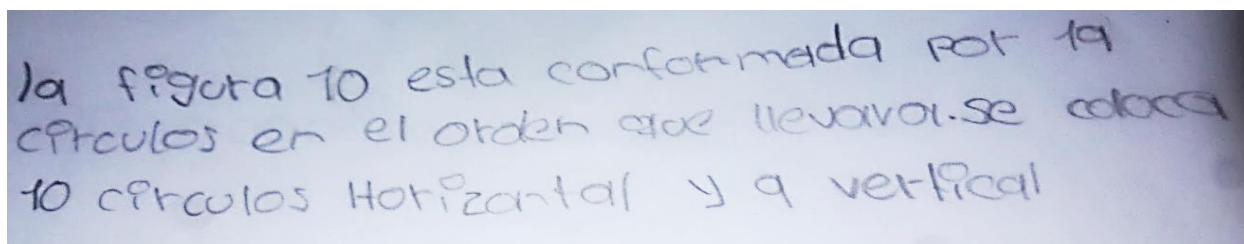


Figura 26. Producción Lisbeth, ítem c, tarea 1

La respuesta de Karen transita entre el razonamiento abductivo e inductivo, en este último, se nota que utiliza la ejemplificación, para poder establecer la posición del término solicitado. Para ello emplea su afirmación abductiva de “sumar de dos en dos” para hallar los otros términos, como se puede observar en la figura 27, ella argumenta que partió de la posición anterior y fue utilizando la estrategia aditiva de “sumar de a dos”, para llegar hasta el término en la posición diez y argumentar que esta era su solución.

En este caso, su afirmación abductiva, solo es verificada en posiciones cercanas, lo cual demuestra que la estudiante no puede extrapolar una generalización tentativa para el patrón, porque al indagar sobre posiciones más lejanas, su abducción no le permite interpretar las características del patrón y poder especializarla en otros términos.

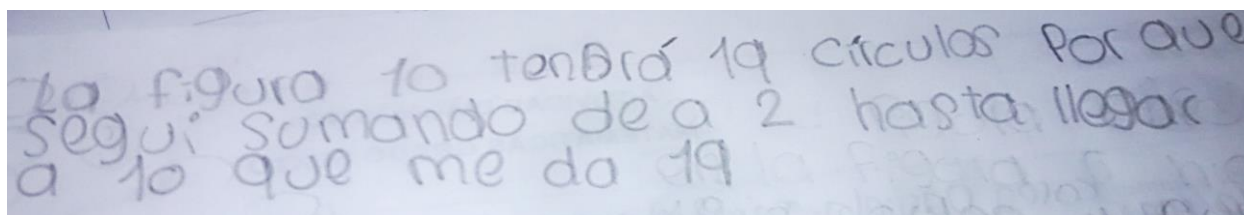


Figura 27. Producción Karen, ítem c, tarea 1

Por otra parte Óscar continuó con su afirmación abductiva (Figura 28), la cual consistía en poner la cantidad de círculos en las filas horizontal y vertical, con respecto a la posición del

término, lo cual demuestra, que seguía con la dificultad de formular una afirmación abductiva, validarla por inducción y luego encontrar cualquier término de la secuencia. Las formas inferenciales no emergieron o fueron muy débiles en los razonamientos del estudiante.

Esta situación se presenta al desconocer lo invariante en los términos de la secuencia y expresar hipótesis abductivas erróneas, las cuales argumenta de otra manera. Cuando el estudiante se encuentra con términos lejanos no encuentra su poder proyectivo y concluye con soluciones atípicas para la secuencia.

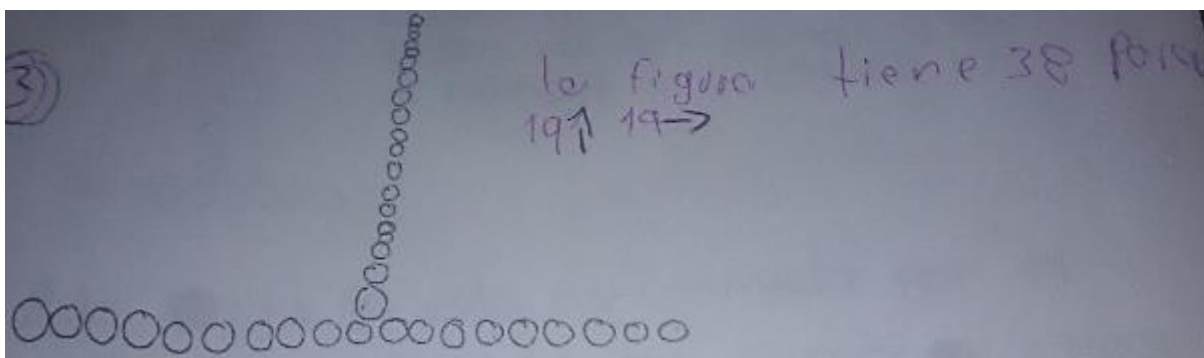


Figura 28. Producción Óscar, ítem c, tarea 1

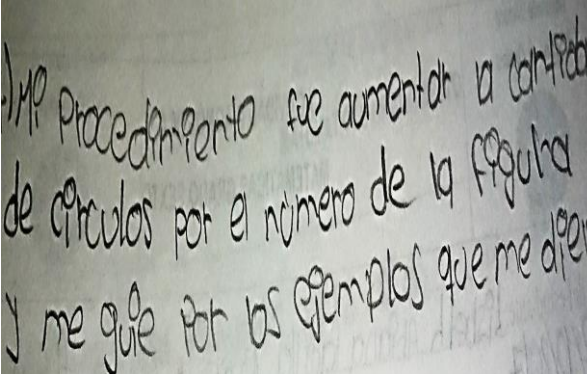
Con respecto al ítem d, de la tarea 1, se presentaron expresiones escritas, sobre la forma de encontrar las figuras solicitadas. En este ítem lo que se pretendía era evidenciar en el trabajo de los estudiantes, la construcción de un razonamiento deductivo, en este caso de manera empírica y por tratarse del primer acercamiento por parte de los estudiantes, sus inferencias proporcionaron explicaciones de forma verbal o escrita.

A continuación se analizan las respuestas de las estudiantes Lisbeth y Valentina, quienes extrapolaron una posible generalización tentativa de la secuencia, emergiendo el razonamiento

deductivo en la solución del ítem d, además se identificaron dificultades sobre esta forma de inferencia.

Tabla 6.

Transcripción 3: Actividad Diagnóstica; Respuestas al ítem d, tarea 1, estudiantes Lisbeth, Valentina y Karen.

Hoja de trabajo	Evidenciamos en estas respuestas, la	Predice de manera metódica
Solución ítem	validación de las posibles generalizaciones	un resultado válido, ya sea por
d, Tarea 1 por el	mediante la deducción, permitiendo un cierre	medio de una expresión verbal
estudiante	deductivo, mediante una explicación verbal	o una formula directa.
Lisbeth y	o empírica sobre la generalización del patrón	
Valentina.	de la secuencia.	
		Fuentes: afirmaciones
		Abductivas, validadas vía
		inducción.
		Verificación y Justificación:
		pasos en una prueba,
En ambas situaciones observamos el poder proyectivo de su reclamación abductiva, incluyendo la generalización tentativa, que ponen en práctica con los demás términos.		

agregando cada vez mas de 0.1
cada figura nos dice cuanto cantidad
debe tener abajo por ejemplo
si es la figura 7 debe que t
7 circulos abajo y arriba 6 la la
5 abajo debe que tener 5 y arriba

Hoja de trabajo	En la gran mayoría de los estudiantes	Dificultades conceptuales
Solución ítem	evidenciamos la dificultad de poder transmitir	para formular y justificar un
d, Tarea 1 por el	su razonamiento deductivo, en forma escrita,	argumento deductivo
estudiante	limitándose argumentar su abducción inicial	pertinente.
Karen.	y describiéndolo en términos próximos.	

me di cuenta que en las figuras
va aumentando de 2 circulos

Se encuentra que los estudiantes plantearon reclamaciones deductivas, mediante explicaciones empíricas de manera verbal, estas inferencias transmiten lo que comprendieron del patrón, después de analizar las figuras en términos cercanos y lejanos, los cuales permitieron establecer una generalización tentativa, que en algunos casos no aplicaron en los términos iniciales de la secuencia.

Con respecto a las dificultades evidenciadas por los estudiantes, se destaca que sus inferencias solo transitaron entre las dos formas de razonamiento iniciales. Esto no les permitió extrapolar una posible generalización para expresar el patrón que determina la secuencia. Sin embargo se espera

encontrar argumentos más sólidos en las siguientes tareas y que las inferencias mostradas, transiten en las tres formas de razonamiento.

En general, en la mayoría de los estudiantes se evidencia, que lograron prolongar la secuencia y construir los términos cercanos como la figura 4, 5 y 9. Además de interpretar el desarrollo del ítem c. También se notó que los comunicaban verbalmente, el invariante de la secuencia en la construcción de los nuevos términos, pero a la hora de comunicarlas en las hojas de trabajo se evidencio la dificultad para lograrlo. Todas las generalizaciones propuestas por los estudiantes, transitaron por las formas de razonamiento iniciales (abducción e inducción), se nota que sus hipótesis se basaban en adivinaciones o ideas previas, los cuales le permitían entender la regularidad de dicha secuencia y prolongarla a términos cercanos y en algunos a términos lejanos. En cuanto al razonamiento deductivo, se observa, que pocos estudiantes lograron un cierre deductivo formal, mostrando posibles generalizaciones tentativas, lo cual nos deja entrever, como emergen las tres formas de razonamiento de manera conjunta en el proceso de generalización de patrones.

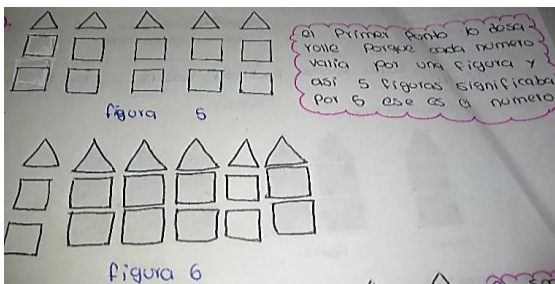
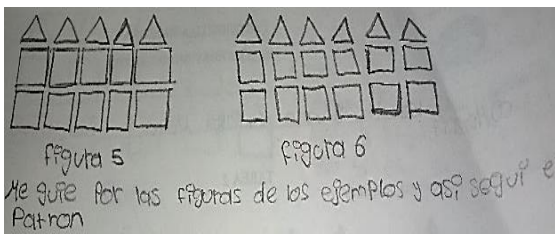
En cuanto a la tarea 2, los resultados de la interacción de los estudiantes con lo invariante de la secuencia, mostró aspectos muy parecidos, a los evidenciados en el análisis a priori. Por tanto el análisis sea estudiar dos resultados propuestos por las estudiantes Lisbeth y Saira, en los cuales se evidencia las formas de razonamiento para el patrón. Con respecto a las dificultades encontradas reportamos, algunos resultados del estudiante Luis Alberto, el cual no identificó, lo invariante de la secuencia y se limitó a entregar respuestas poco coherentes al desarrollo de la tarea.

Con respecto al ítem a, las respuestas de Lisbeth y Saira, evidenciaron formas abductivas, en la construcción de los términos solicitados. Las estudiantes, utilizaron el conteo como inferencia

inicial para determinar lo invariante en la secuencia. Sus construcciones se basaron en el análisis de cada una de las figuras geométricas que conformaban cada término de la secuencia.

Tabla 7.

Transcripción 4: Actividad Diagnóstica; Respuestas al ítem a, tarea 2, estudiantes Saira y Lisbeth.

Hoja de trabajo Solución ítem a, Tarea 2 por la estudiante Saira y solución ítem a por la estudiante Lisbeth.	Las respuestas hechas por ambas estudiantes evidencian formas de razonamiento abductivo, las cuales validaron mediante el conteo de las figuras que conforman cada término de la secuencia, y hallar los solicitados.  	Asume una inferencia plausible, hacia una regla, cuando hace uso de la expresión “el primer punto lo desarrollé porque cada número valía por una figura y así 5 figuras significa por 5 ese es el número” o “me guíe por las figuras de los ejemplos y así seguir el patrón” Fuentes: conteo de círculos, representaciones de los términos anteriores. Verificación y justificación: Estructurada por inducción
Hoja de trabajo Solución ítem a, Tarea 1 por el estudiante Luis.	Aunque en esta respuesta el estudiante no presentó dificultades, al igual que los demás estudiantes, reportamos una posible dificultad en la solución de este ítem; Se refiere a la construcción de la misma cantidad de cuadrados y círculos en los términos solicitados. En este caso sus ideas sobre el patrón transitan en el solo conteo de	Dificultades conceptuales para establecer una demanda abductiva.

los triángulos y no se percatan de que los
cuadrados son el doble de estos.

En los resultados de los estudiantes para el ítem a, de la segunda tarea, se evidencia que para hallar los términos solicitados, las estudiantes recurren a inferencias plausibles, como la identificación del número de triángulos y cuadrados que conforman cada término. Además de expresiones verbales como: “el primer punto lo desarrollé porque cada número valía por una figura y así 5 figuras significa por 5 ese es el número” o “me guíe por las figuras de los ejemplos y así seguir el patrón”, las cuales son hipótesis iniciales del patrón de la secuencia. Estas explicaciones se encuentran dentro del razonamiento abductivo, permitiendo inferir una característica común a otros términos de la secuencia, permitiendo formular una reclamación abductiva que más adelante se puede convertir en una abducción fuerte, validada mediante inducción.(Rivera, 2013)

Referente a las dificultades asociadas al razonamiento abductivo, aunque los estudiantes no presentaron problemas en encontrar los términos solicitados, se puede establecer que estas situaciones pueden aparecer en los estudiantes, al generar inferencias plausibles, cómo: para hallar los términos solicitados construyan la misma cantidad de triángulos como de cuadrados, o se limiten a construir solo cuadrados para representar el termino solicitado. Estas ideas o hipótesis sobre el patrón de la secuencia, establecen reclamaciones abductivas incipientes, que sufren una involución o refutación mediante inducción, aplicados a los términos iniciales.

A partir de la pregunta ¿cuántos triángulos y cuadrados tendrá el término 8?, ítem b, se continúa con el análisis de los resultados de los estudiantes mencionados anteriormente. A continuación se presenta las respuestas que realizaron los estudiantes. Cabe resaltar que por tratarse de la segunda tarea y su trabajo previo con este tipo de secuencias figurales, el razonamiento inductivo les

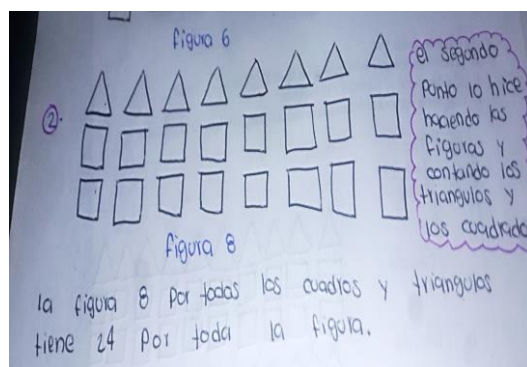
permitió estructurar de mejor manera sus hipótesis abductivas y así poder establecer una posible generalización para el patrón.

En tanto a las dificultades se analiza la respuesta de Luis Alberto, el cual no pudo validar su hipótesis abductiva, y se limitó a construir el término, como un arreglo de dos triángulos y 8 cuadrados.

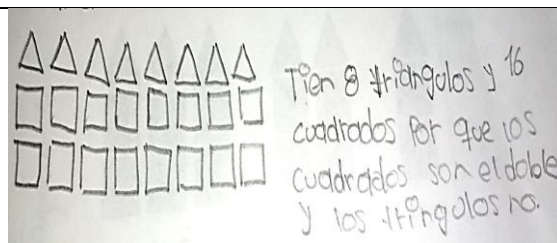
Tabla 8.

Transcripción 5: Actividad Diagnóstica; Respuestas al ítem b, tarea 2, estudiantes Saira, Lisbeth y Luis Alberto.

Hoja de trabajo	Con sus reclamaciones abductivas	Prueba de una inferencia
Solución ítem b,	emergentes, ahora se disponen a validarlas	abductiva, mide el valor de la
Tarea 2 por los	sobre otros términos cercanos, para probar	hipótesis sobre otros términos
estudiantes	el poder proyectivo de sus hipótesis. Esto se	de la secuencia.
Lisbeth y Saira.	evidencia en las expresiones escritas y en la	
	construcción del término solicitado. La	
	inducción se puede presentar en este caso	
	por enumeración.	

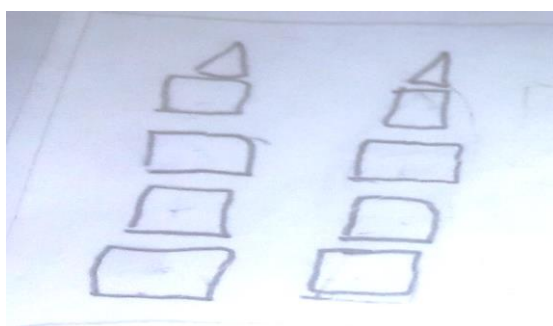


Fuentes: ejemplos, enumeración, análisis. Conteo de las figuras que conforman cada término



Verificación y justificación: empírica, por ejemplo por enumeración, analogía y experimentos.

Hoja de trabajo No se evidencia la validación de la Dificultades conceptuales
Solución ítem b, reclamación abductiva, por medio de la para verificar inductivamente
Tarea 2 por el inducción, ya que el estudiante construye la razonabilidad de una
estudiante Luis una figura, basado en la cantidad de afirmación abductiva en un
Alberto. cuadrados del término solicitado, si darse término próximo o lejano en
cuenta en el desarrollo de los términos una secuencia.
anteriores y que cada uno de ellos está
conformado por igual cantidad de
triángulos en su posición.



En las respuestas se evidencia el razonamiento inductivo, en el papel de validar, ya sea por ejemplificación o enumeración las reclamaciones abductivas iniciales. En la inferencia de la estudiante Saira, se destaca cómo utiliza la ejemplificación para poder encontrar el término solicitado; en su expresión, “lo hice haciendo las figuras y contando los triángulos y cuadrados” se basa en el conteo de las figuras que conforman el término y además de los términos anteriores para reafirmar su hipótesis inicial.

En cuanto a la respuesta de Lisbeth, se evidencia una fuerte reclamación abductiva, la cual no se valida mediante inducción. En este caso se observa lo que Rivera establece como un salto inductivo, ya que la estudiante, por sus ideas previas e inferencias iniciales, pudo extrapolar una posible generalización tentativa del patrón de la secuencia, al llegar a la conclusión que para hallar el término en la posición ocho este va tener “8 triángulos y 16 cuadrados porque los cuadrados son

el doble y los triángulos no” sin recurrir a la ejemplificación o enumeración de los términos anteriores para hallar el solicitado.

Esta respuesta permite analizar las inferencias tan marcadas que posee la estudiante, para establecer una regularidad y poder validarla en los términos cercanos como en los lejanos. En la confirmación de la hipótesis abductiva se evidencia la relación que establece, entre el número de triángulos y de cuadrados con respecto a la posición del término, convirtiendo su hipótesis inicial en una generalización algebraicamente útil, para el patrón de la secuencia.

La dificultad encontrada en la solución de este ítem respecto al estudiante Luis Alberto, permite observar el conflicto que se genera al validar su hipótesis inicial en términos próximos de la secuencia. Se evidencia que el estudiante utilizó la adivinación con la esperanza de validar el su inferencia inicial y poder hallar el término solicitado. En esta situación Luis Alberto, no sufrió refutaciones y evoluciones que le permitieran corregir o validar su hipótesis, sino que planteó una refutación de su hipótesis inicial, la cual la convirtió en otra posible solución para el patrón, la cual no es la esperada para los términos de la secuencia.

Para las respuestas a los ítems c y d, en donde se puede observar inferencias deductivas, o por lo menos una aproximación a este razonamiento, se analizan las soluciones de los mismos estudiantes en donde se evidenció en mayor medida esta forma de razonamiento. En cuanto a las dificultades para determinar el patrón de la secuencia, para ello analizamos en forma general las posibles respuestas que se pueden presentar, teniendo en cuenta que por tratarse de la actividad diagnóstica, no se consideraba encontrar evidencia de este tipo de razonamiento.

Tabla 9.

Transcripción 6: Actividad Diagnóstica; Respuestas al ítem d, tarea 1, estudiantes Lisbeth, y Yineth.

Hoja de trabajo Solución ítem c y d, Tarea 2 por la estudiante Lisbeth	Se observa una posible generalización tentativa para el patrón de la secuencia, en la respuesta de la estudiante Lisbeth, cuando establece que para hallar cualquier término construye la cantidad de triángulos y la duplica para obtener el total de cuadrados. La reclamación deductiva que emerge se justifica en un argumento estructural empírico, que transitó por las dos formas de razonamiento iniciales, para obtener una generalización algebraica razonable.	Predice de manera metódica un resultado válido, ya sea por medio de una expresión verbal o una formula directa. Fuentes: afirmaciones Abductivas, validadas vía inducción.
	3) La figura 10 por que el doble de diez es 20 y los cuadrados se duplican y los triángulos son 10 por que esos son de el número de la figura. lo hice por la cantidad de triángulos que me dieron y duplique los triángulos para que me diera la cantidad de cuadrados.	Verificación y Justificación: pasos en una prueba,
Hoja de trabajo Solución ítem d, Tarea 2 por el estudiante Yineth	Evidenciamos la dificultad en la gran mayoría de estudiantes, al formular una reclamación deductiva, ya sea de forma empírica o una prueba lógica, para la solución del ítem d, solo se limitaron a probar su hipótesis abductiva en términos lejanos pero no dedujeron un resultado general para el patrón de la secuencia.	Dificultades conceptuales para formular y justificar un argumento deductivo pertinente.

la figura 10 porque 10 es el doble de 20 +
los cuadrados se duplican + los triángulos que
+ como el número de la figura.

Para la tarea observamos que solo la estudiante Lisbeth, planteó una reclamación deductiva, mediante una explicación empírica, “lo hice por la cantidad de triángulos que me dieron y dupliqué los triángulos para que me diera la cantidad de cuadrados”, esta inferencia transmitió lo que la estudiante determinó del patrón que define los términos de la secuencia y le permitió hallar términos lejanos y a su vez reafirmó su hipótesis inicial. En comparación con la tarea anterior (Tarea1), para este razonamiento, si se evidencia en el trabajo de los estudiantes en la construcción de términos iniciales, lo cual les permitió responder al ítem d.

Las dificultades presentadas en esta forma de razonamiento, evidencian que la gran mayoría de los estudiantes, plantea una posible generalización, pero solo la prueban en términos cercanos. Cuando se enfrentan a términos lejanos se presenta una refutación e involución de su abducción, lo cual no les permite especializar su inferencia y generalizar su hipótesis inicial.

En general en el desarrollo de la tarea 2, observamos que las formas de razonamiento fueron más evidentes, lo cual le permitió a la gran mayoría de los estudiantes, plantear reclamaciones abductivas que validaron a través de la inducción, además observamos que los estudiantes, encuentran con mayor facilidad lo invariante de la secuencia y plantean la regularidad para otros términos del patrón que se genera en la secuencia. Además sus inferencias iniciales permiten abducir características de los términos, validarlas y concluir con una reclamación deductiva de esta regularidad, sin embargo fueron muy pocos los estudiantes que lograron llegar a un cierre deductivo, esto en gran parte, como se había mencionado anteriormente, al ser un diagnóstico, no pronosticábamos que esto sucediera.

El análisis de los resultados expuestos anteriormente, deja entrever para las siguientes actividades, cómo las formas de razonamiento emergen en los estudiantes cuando trabajan con secuencias figurales. Por otro lado estos resultados están apuntando a la consecución del objetivo de la investigación y a su vez plantear, el trabajo con secuencias numéricas.

Actividad 1

La actividad se desarrolló sin ninguna modificación y en el tiempo establecido para su realización, esta se trabajó en el mes de marzo del 2018. A continuación se presentan algunos episodios correspondientes a la actividad desarrollada a partir de las tareas 3 y 4 (figura 30). Después de la implementación de la actividad diagnóstica, los estudiantes se mostraron más familiarizados con este tipo de situaciones, esto permitió que identificaran y analizaran con más facilidad las características, validarlas y concluir una regularidad para la secuencia. La inclusión de secuencias numéricas permitió analizar las formas de razonamiento en este tipo de tareas, inicialmente se describe el desarrollo de la secuencia figural y luego la secuencia numérica.

Para el desarrollo de las sesiones, solo se contó con el trabajo de 11 de los 14 estudiantes, esto debido a la no autorización por parte de los padres de familia en el desarrollo de la investigación. Además se contó con la presencia del estudiante Marlon un estudiante nuevo en el grupo, que prestó su colaboración en la actividad.

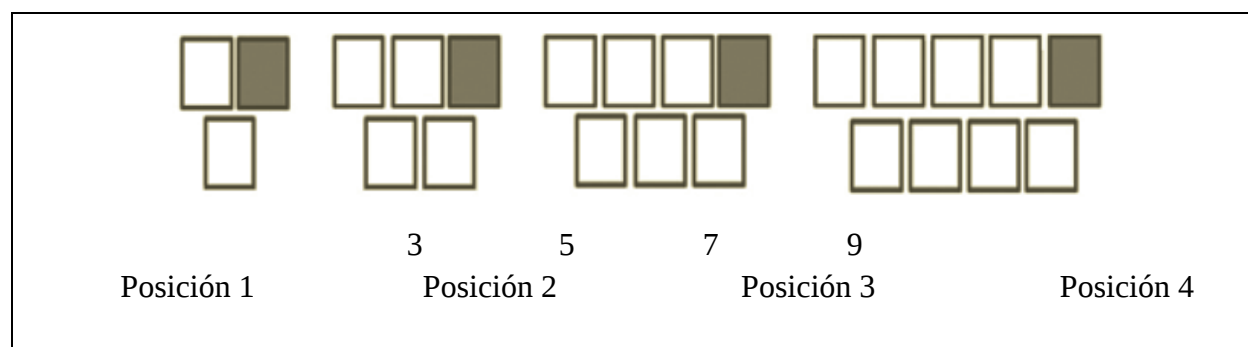


Figura 29. Secuencia figural Tarea 3 y secuencia numérica Tarea 4.

Durante la primera parte de la actividad (tarea 3) el análisis se enfoca en las ideas que estaban surgiendo en cada grupo sobre la manera de prolongar la secuencia a términos lejanos. Acudimos al trabajo del grupo G_A conformado por Yineth y Lisbeth para presentar las formas de razonamiento que emergieron en la interacción con la secuencia. Además se exploran los resultados del grupo G_B conformado por Valentina y Saira.

Tabla 10.

Transcripción 7: Tarea 3; Grupo G_A

Transcripción	L ₁ . Profesor investigador: ¿Cómo	Asume una inferencia
Video, Respuestas	explicarías la construcción de los términos	plausible, hacia una regla.
ítem a y b,	5 y 6?	
estudiantes		Fuentes: conteo de cuadrados,
Lisbeth y Yineth.	L ₂ . Lisbeth: Bueno le explicaría, eh... por	representaciones de los
	ejemplo, si me dieran cualquier término,	términos anteriores.
	entonces en la hilera de arriba colocaría el	
	número del término que me dieran y abajo	Verificación y justificación:
	también (refiriéndose a la cantidad de	Estructurada por inducción.
	cuadrados en cada fila), y en la de arriba	Prueba en otros términos de la
	aumentaría de a uno y la de abajo quedaría	secuencia.
	igual al número del término que me	
	dieron.	Prueba de una inferencia
		abductiva, mide el valor de la
	L ₃ . Profesor investigador: Bueno; y si tu	hipótesis sobre otros términos
	compañera te preguntara, ¿Cuántos	de la secuencia.
	cuadrados tendría el término en la	
	posición 500?	Fuentes: ejemplos,
		enumeración, análisis.
	L ₄ . [Se queda pensando] Serían 1001.	

L₅. Profesor investigador: y Yineth... Verificación y justificación: ¿Cómo explicarías la construcción de estas dos figuras? [Señalando el ítem a de la tarea]. empírica, por ejemplo por enumeración, analogía y experimentos.

L₆. Yineth: Eh... Como acá, [señalando los términos iniciales] me guíe, colocaría los cinco, más un cuadro [señalando la primera fila]; y acá abajo sí dejaría los cinco cuadros [señalando la segunda fila].

L₇. Profesor investigador: ¿Y para la segunda pregunta?

L₈. Yineth: Coloque los diez acá, [señalando la primera fila] y nueve [señalando la segunda fila]

L₉. Profesor investigador: ¿Cómo sabes que acá son diez? [señalando la primera fila]

L₁₀. Yineth: Como acá [señalando las figuras de los términos iniciales] se le agregaba uno, pues... acá también [señalando la figura solicitada]



En la interacción sostenida con el grupo G_A , se evidencia que las estudiantes han encontrado lo invariante de la secuencia. Sus inferencias abductivas les permite hallar los términos solicitados (ítem a) y validarlos mediante inducción (ítem b) para términos cercanos o lejanos y poder establecer una generalización tentativa. En el diálogo es claro (Líneas 2 y 6) que las estudiantes formularon sus hipótesis abductivas de la misma manera, estableciendo que para construir cualquier término de la secuencia, bastaba dibujar dos filas de cuadrados con igual cantidad, a la posición del término y a la primera fila se le agregaba uno más (el sombreado), el cual era el razonamiento planteado en el análisis a priori.

Este tipo de inferencias se encuentran dentro del razonamiento abductivo, ya que demuestran lo que las estudiantes perciben del patrón que genera la secuencia en sus términos iniciales y lo especializan con términos próximos. Como el caso de Lisbeth en términos lejanos, estableciendo una generalización tentativa, que utilizó cuando dio su respuesta en la línea cuatro.

Con respecto al ítem b, se evidencia, razonamientos inductivos, cuando las estudiantes tratan de validar sus inferencias iniciales en términos próximos y lejanos, en las respuestas expuestas (L_4 , L_8), se observa que las estudiantes desarrollan el salto inductivo, por lo cual no necesitan de valerse de la construcción de otros términos para llegar al solicitado, más bien generan una reclamación abductiva fuerte la cual les permite encontrar cualquier término de la secuencia.

Con respecto al ítem c y d, se toma el trabajo realizado por el grupo G_B , en el cual sus razonamientos abductivos son iguales a los del grupo G_A , pero al tratar de utilizarlos en términos lejanos presentaron dificultades.

Tabla 11.

Transcripción 8: Tarea 3; Grupo G_B

Transcripción	L ₁ . Profesor investigador: Saira ¿Cómo	Prueba de una inferencia
Video, Respuestas	explicarías la pregunta c?	abductiva, mide el valor de la
ítem d y e,		hipótesis sobre otros términos
estudiantes	L ₂ . Saira: Eh... primero que todo saqué la	de la secuencia.
Valentina y Saira.	cantidad de cuadrados que tenía el término	
	50.	Fuentes: ejemplos,
		enumeración, análisis.
	L ₃ . Profesor investigador: ¿Cuántos tenía?	
	[Refiriéndose al término 50]	Verificación y justificación:
		empírica, por ejemplo por
	L ₄ . Saira: Cincuenta. Y entonces, a cada	enumeración, analogía y
	término se le sumaban dos cuadrados,	experimentos.
	entonces sumé los cien más cien [cada fila	
	de cuadrados] y me dio 200, y a cada	
	término se le sumaban dos cuadrados y me	
	dio 202.	
	L ₅ . Profesor investigador: ¡Muy bien!	
	L ₆ . Profesor investigador: Y Valentina,	
	¿Cómo responderías?	
	L ₇ . Valentina: Porque, tienen la misma	
	cantidad arriba y abajo [refiriéndose a las	
	filas de cuadrados]. En este caso eran 100.	
	Entonces arriba tenía 100 y abajo también	
	100 y al sumarlos dan 200 y si se le	
	sumaba el otro cuadrado da 201.	

L₈. Profesor investigador: Si quieres hallar cualquier término de la secuencia ¿Cómo le explicarías a Saira?

Predice de manera metódica un resultado válido, ya sea por medio de una expresión verbal o una fórmula directa.

L₉. Valentina: miramos la posición del término y entonces construimos, eh... por ejemplo, el término 7, construimos, siete cuadrados, arriba y abajo y se le suma el cuadrado coloreado.

Fuentes: afirmaciones Abductivas, validadas vía inducción.

Verificación y Justificación: pasos en una prueba,

L₁₀. Profesor investigador: Saira ¿cómo le explicarías a Valentina?

L₁₁. Saira: eh... por ejemplo para hacer el término 40, halle la cantidad del término 20, que es 41, [refiriéndose a la cantidad de cuadrados del término] entonces para encontrar ese resultado, hice el procedimiento de cada figura, buscando los demás términos hasta llegar a 20, entonces sume 40 y 40 y le sume dos cuadrados más, para hallar los cuadrados del término 40



En este episodio se puede observar que los estudiantes perciben lo invariante de la secuencia de maneras distintas. Mientras Valentina (Grupo G_B) coincide con las estudiantes del grupo G_A para hallar los términos solicitados y lo valida mediante inducción, para luego formular una reclamación abductiva de forma empírica, Saira, presenta dificultades en justificar su hipótesis abductiva.

Se presenta la producción de Saira, figura 30, en su hoja de trabajo, para ilustrar como ha inferido inductivamente y deductivamente lo invariante del patrón que se genera en la secuencia.

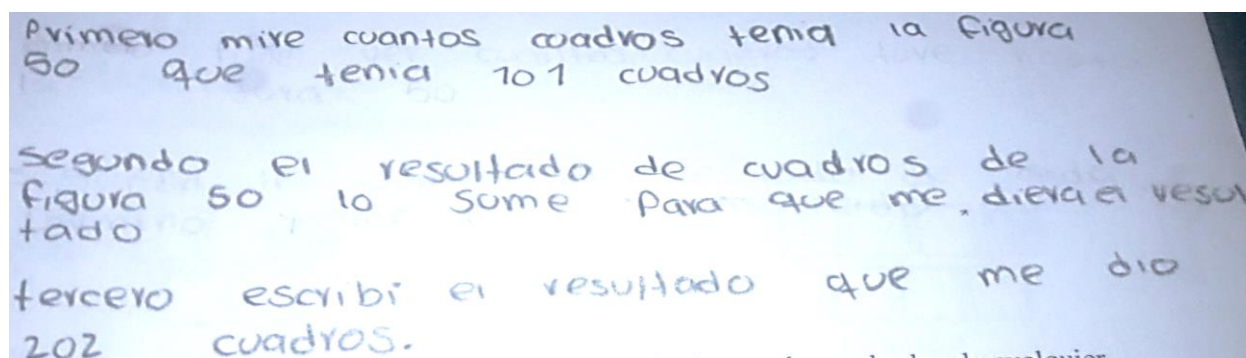


Figura 30. Producción de Saira, ítem d, Tarea 3

Observamos, que la hipótesis abductiva de la estudiante, consiste en “sumar dos cuadrados” en cada fila (uno arriba y otro abajo) a cada nuevo término. En las líneas 12 y 14, intenta validar esta hipótesis mediante inducción, para ello, explica, “que la cantidad de cuadrados en el término 100 es 202” debido a que cada fila está conformada por 100 cuadrados y se le suman dos más.

Notamos una dificultad en realizar la verificación inductivamente, sobre la razonabilidad de su hipótesis abductiva, en un término lejano, ya que infiere, que para hallar el término solicitado, hay que sumar dos veces, la cantidad de cuadrados, según su posición y a este resultado agregarle dos más, lo cual deja entrever que presenta conflictos entre su hipótesis inicial y su respectiva

validación. Teóricamente esto se refiere a una reclamación inductiva errónea, en donde el sujeto no tiene en cuenta su hipótesis inicial, sino que valida otro tipo de inferencias abductivas.

Saira asocia la posición del término con la cantidad de cuadrados de cada fila y luego le agrega dos más, en notación simbólica podríamos expresarla como la suma $(n) + (n) + 2$, para $n=1, 2, 3...$, lo que le permite determinar el número de cuadrados que conforman el término sin hacer una representación gráfica. Lo cual no es válido para la secuencia presentada.

Con respecto al razonamiento deductivo, que tanto Valentina, Lisbeth y Yineth (grupos G_B y G_A), utilizan argumentos empíricos, para tratar de llegar a una generalización tentativa del patrón (líneas, L_2 , L_{10} , L_{19}) Saira, por otro lado, presentó una refutación y evolución de sus hipótesis abductiva, en gran parte por la socialización del trabajo con su compañera Valentina lo cual le permitió formular una inferencia deductiva, con base en su hipótesis inicial (Figura 31).

Para encontrar el resultado de la figura 40 mire la cantidad de cuadrados de la figura 20 que era 41 cuadrados en tonces mire que la figura 40 tenia 81 cuadrados y esa era la secuencia.

Figura 31. Producción de Saira, ítem e, Tarea 3

Al comparar las respuestas, con su compañera, la estudiante valida el poder proyectivo de su inferencia inicial y lo comprueba en términos lejanos, lo cual le permite extrapolar una posible generalización tentativa. Se observa la originalidad de su respuesta, la cual le permite calcular el número de cuadrados que conforman los términos, utilizando las representaciones anteriores y especialmente la mitad del término solicitado (si este es par). El éxito repetitivo de la verificación

y corrección de los elementos de su generalización, le permitieron transitar hacia una justificación y validación de sus inferencias, para construir una expresión final.

A partir de la tarea 4, nos remitimos a exponer los resultados de los grupos G_B y G_C , en los cuales hacemos referencia a las soluciones de los ítems c y d, ya que las dos primeras preguntas, en la gran mayoría de los estudiantes, evidenciaron lo que se había expuesto en el análisis a priori. El razonamiento abductivo emerge, cuando establecen que para hallar términos consecutivos, “se suma de a dos” al término anterior o estrategias multiplicativas como “multiplico por dos la posición del término”. Con respecto a esta afirmación, se establece que es una reclamación abductiva que puede sufrir refutaciones o evoluciones a través de la inducción, además se observa la dificultad para validar el poder la generalización en términos lejanos, cuando se les preguntaba por la posición del término 100, expresaban “porque si son impares, son de a dos que le llevan, entonces, multiplique por dos y me dio 200”, su abducción se convertía en una estrategia multiplicativa, en la se expresaba una parte de lo invariante, dejando al lado la regularidad de sumar uno a este producto.

Tabla 12.

Transcripción 9: Tarea 4; Grupo G_B

Transcripción	L ₁ . Saira: Para hallar la posición 100, que	Prueba de una inferencia
Video, Respuestas	fue 202; entonces como cada número	abductiva, mide el valor de la
ítem c, y d,	“sube dos”, por ejemplo, la posición 9 es	hipótesis sobre otros términos
estudiantes	19, entonces la 10 sería 21, así le fui	de la secuencia.
Valentina y Saira.	sumando a cada uno y encontré la 50 que	
	fue 101, entonces a la posición 50, que fue	Fuentes: ejemplos,
	101, le sume 101 para saber el número de	enumeración, análisis.
	la posición 100.	

L₂. Profesor investigador: ¡Muy bien! ¿Y en la pregunta d?

Verificación y justificación: empírica, por ejemplo por enumeración, analogía y experimentos.

L₃. Saira: En esta secuencia nos dimos cuenta que todos los números [señalando los términos iniciales], son números impares, entonces a mí el resultado me dio un número par... [Se queda pensando].

Dificultades conceptuales para verificar inductivamente

L₄. Profesor investigador: ¿Y qué significa eso? Bueno [después de un tiempo de no respuesta] y Valentina, ¿Cómo responderías?

la razonabilidad de una demanda de abducción en un término próximo o lejano de un patrón.

L₅. Valentina: Yo, también hice lo mismo, en cada secuencia le iba “sumando de a dos”, [con respecto a la pregunta c], entonces la posición 100, también hice la secuencia y escribí una tabla, en donde iba calculando cual era la posición.

L₆. Profesor investigador: ¿Hiciste una tabla?

L₇. Valentina: Pero cuando iba sumando, iba recordando el número.

L₈. Profesor investigador: ¿Y dónde está la tabla?

L₉. Valentina: ¡No la hice! Pero iba recordando el número que me iba dando.

Entonces la posición 100, también me dio 202, porque la posición 50, me dio 101, y también sume y me dio 202.

L₁₀. Profesor investigador: Tiene el mismo problema que Saira.

L₁₁. Valentina: Sí, Por qué me di cuenta [señalando la secuencia] que eran impares y me dio par.

Con respecto a la solución de estos dos ítems (c y d) evidenciamos la dificultad para poder, validar la hipótesis abductiva inicial. En L₃ y L₁₁, se presenta una refutación de su abducción inicial, al darse cuenta que los términos de la secuencia son números impares, y sus resultados fueron números pares. Al poner a prueba el poder proyectivo de su razonamiento abductivo, notamos que el desarrollo de esta inferencia estaba presentado problemas, ya que para hallar un término lejano, se valían de los términos anteriores, en este caso de la mitad de su posición, para luego, sumar la cantidad dos veces y poder hallar el término; esta dificultad se asocia a la gran mayoría de los estudiantes, que presentaron problemas al validar su posible generalización tentativa en términos lejanos. Además es claro que sus propias refutaciones les permiten corregir los errores en términos más lejanos y poder extrapolar una posible generalización para el patrón de la secuencia que se genera.

En cuanto a la solución del ítem e, tomamos los resultados individuales del grupo G_C, en los cuales se evidencia el razonamiento deductivo y el trabajo de la estudiante Yineth, en el cual se muestra una posible generalización algebraicamente útil con un argumento empírico formal.

Tabla 13.

Transcripción 10: Tarea 4; Grupo G_C

Transcripción Video, Respuesta ítem e, estudiantes Davin y Neyder.	L ₁ . Profesor investigador: ¡Davin! ¿Cómo le explicarías a Neyder tu respuesta? L ₂ . Davin: Pues...por ejemplo podemos coger el término 2000 y lo sumamos, el número [refiriéndose al término] y después sumamos el mismo número y le aumentamos uno y da 4001. Porque siempre, va ser impar el número que nos dé en el resultado.	Predice de manera metódica un resultado válido, ya sea por medio de una expresión verbal o una formula directa. Fuentes: afirmaciones Abductivas, validadas vía inducción.
	L ₃ . Profesor investigador: ¡Muy bien! Y ahora Neyder, ¿Cómo le explicarías a Davin?	Verificación y Justificación: pasos en una prueba,
	L ₄ . Neyder: Bueno, yo escribí lo siguiente: “para encontrar cualquier término, con números, es muy fácil, porque, se sigue el patrón que se incrementa dos veces, cómo por ejemplo, el término 80, se suma el mismo número dos veces y luego se le agrega uno”	
	L ₅ . Profesor investigador: Bueno, para los dos, ¿Por qué se le agrega uno?	
	L ₆ . Davin: Porque siempre el resultado va ser impar.	
	L ₇ . Profesor investigador: Bueno, y si yo les pregunto ¿Cuál va ser el término que está en la posición 503?	

L₈. Davin: 1004...No.

L₉. Neyder: [pensando en su respuesta] 1007.

L₁₀. Profesor investigador: ¿Por qué 1007?

L₁₁. Davin: Porque es número impar.

L₁₂. Neyder: ¡No! Porque 503, más 503 es 1006. Entonces como se le agrega uno, queda 1007



En este episodio se destaca, cómo el razonamiento deductivo emerge de manera empírica, cuando los estudiantes en las líneas L₂ y L₄, demuestran cómo pueden hallar cualquier término de la secuencia. La estrategia de sumar la posición del término dos veces y luego aumentarle uno, deja entre ver la generalización algebraica del patrón que se genera en la secuencia, para luego validarlo en otros términos como ocurre en las líneas L₁₂; con respecto a la regularidad encontrada por Davin, al responder que todos los términos son números impares, evidencia el poder proyectivo de su generalización, llegando al punto de corregir los errores (línea 8) y poder ajustarlos, para hallar cualquier término de la secuencia. Acá se evidencia las fases de justificación y encapsulación de la generalización expuesta (Rivera, 2013).

La respuesta de la estudiante Yineth del grupo G_A (figura 32) es muy parecida a la de sus compañeros, pero ella utiliza una estrategia aditiva, que en notación simbólica sería, $n + (n + 1)$, donde n es la posición del término. Acá evidenciamos el cierre deductivo, para el patrón de la secuencia y evidenciamos la generalización de forma empírica y estructural que emerge en la estudiante.

la puede encontrar aumentando los números
que sea necesario con la posición del número
correspondiente
por ejemplo
Posición 9. $= 9 + 9 + 1 = 19$

Figura 32. Producción de Yineth, ítem e, Tarea 4

En general, con el desarrollo de esta tarea observamos un avance significativo, en como los estudiantes pueden encontrar con mayor facilidad lo invariante para el patrón de la secuencia. Además es claro que asociaron esta tarea con la anterior, evidenciando la relación entre los números en una secuencia numérica y las figuras en las secuencias figurales.

Actividad 2

La actividad se desarrolló sin ninguna modificación, cumpliendo con los tiempos acordados, aunque las tareas fueron de mayor complejidad, observamos avances en el trabajo desplegado por los estudiantes, de los cuales presentamos algunos episodios correspondientes a las tareas 5 y 6 (Figura 33). Cabe resaltar que las dos secuencias no tenían similitudes en su realización, por lo tanto se evidenciaron en mayor medida las dificultades para cada forma de razonamiento. Al igual

que la anterior actividad se presentó inicialmente la secuencia figural y luego la secuencia numérica.

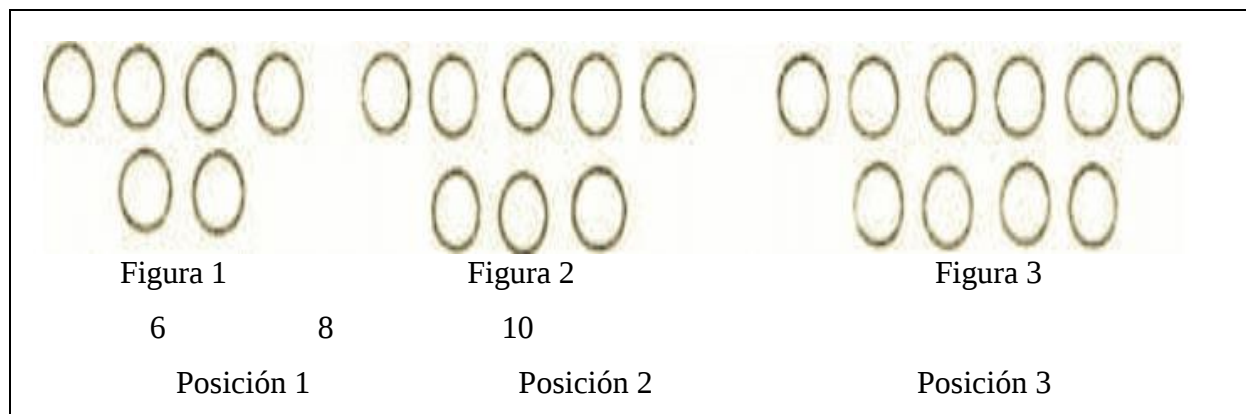


Figura 33. Secuencia figural Tarea 5 y secuencia numérica Tarea 6.

En la primera parte de la actividad (Tarea 5) observamos que la gran mayoría de los estudiantes, encontró la regularidad del patrón y estableció la hipótesis abductiva expuesta en el análisis a priori y su validación en términos lejanos mediante un razonamiento inductivo. Sin embargo exponemos algunas dificultades que se presentaron los estudiantes Karen y Charith al expresar sus razonamientos y validarlos, ítems b y c.

En la respuesta hecha por la estudiante Karen del grupo G_D se observa que al poner a prueba su razonamiento abductivo, en términos próximos, presenta dificultades conceptuales en la transición de una demanda inicial a una demanda abductiva fuerte.

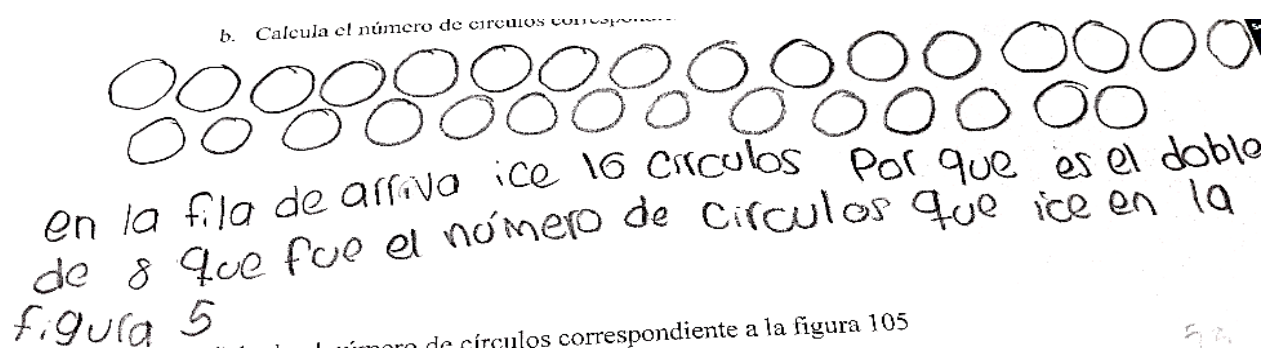


Figura 34. Respuesta ítem b, tarea 5, estudiante Karen.

En su respuesta, se observa que para hallar la cantidad de círculos del término en la posición 10, utiliza la estrategia de multiplicar por dos, la cantidad de círculos que hay en la construcción del término 5, y ubicarlos en la primera fila y luego la cantidad de círculos para la segunda fila, serían los mismos disminuidos en dos. Con respecto a esta dificultad se evidencia, la involución de la hipótesis abductiva establecida, la cual era la correcta para describir los términos de la secuencia, sin embargo al tratar de concretar una posible generalización tentativa en términos próximos, surge una nueva hipótesis abductiva que no convalida en los términos iniciales y así poder convertirla en una abducción fuerte.

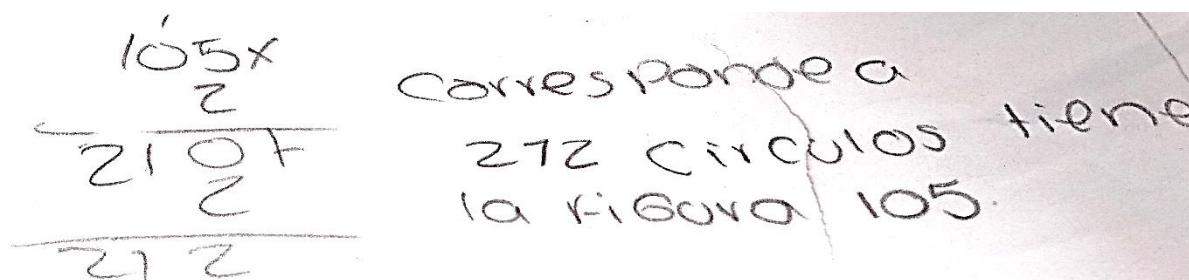


Figura 35. Respuesta ítem c, tarea 5, estudiante Charith.

En cuanto a las respuestas hechas por Charith, se observan estrategias multiplicativas, pero esta vez asociadas a las tareas anteriores (tarea 3 y 4), la estudiante argumenta que para hallar la

cantidad de círculos del término 10, se “multiplica por dos el diez y el resultado se le suma dos”, acá se define una posible generalización tentativa para el patrón de la secuencia, que en notación simbólica, sería $2n + 2$. Con respecto a la respuesta anterior, la estudiante establece una regularidad para los términos de la secuencia, pero al realizar la comprobación en los términos iniciales, se descarta su validez y en muchas ocasiones puede ser reestructurada para encontrar una generalización algebraicamente útil la cual es una dificultad conceptual para verificar inductivamente la razonabilidad de una hipótesis abductiva en un término próximo o lejano. Evidenciamos que esta generalización, no sufre ninguna transformación ya que la estudiante continua aplicándolo en términos lejanos y no se percata de utilizarlo en los iniciales para corregir su validez.

En cuanto al razonamiento deductivo, se explora las respuestas a los ítems c, d y e, dadas por los estudiantes Lisbeth del grupo G_A y Neyder del grupo G_C . Evidenciamos características propias del cierre deductivo, como: estrategias aditivas y multiplicativas, para cualquier término de la secuencia, además de argumentos empíricos y estructurales, propios de la secuencia, para expresar una generalización del patrón, el cual fue expuesto en el análisis a priori.

Tabla 14.

Transcripción 11: Tarea 5 ítem c, estudiante Neyder.

Transcripción Video, Respuesta ítem c, estudiante Neyder.	L ₁ . Profesor investigador: Neyder ¿Cómo hizo para hallar el número de círculos del término 105? L ₂ . Neyder: sume dos veces el 105 y luego como el patrón va aumentando de a dos, le aumente dos.	Predice de manera metódica un resultado valido, ya sea por medio de una expresión verbal o una formula directa.
--	---	---

L₃. Profesor investigador: ¡Muy bien! Y ahora Neyder, ese procedimiento que realizó, ¿le sirve para los términos anteriores? [Señalando la pregunta a y b]. L₄. Neyder: ...[momento de no respuesta] L₅. Profesor investigador: Bueno, veamos, usted toma la posición del término y la sumas dos veces, y después le sumas dos ¿cierto? L₆. Neyder: ¡Sí! L₇. Profesor investigador: Comprobemos, tu idea. Bueno, en el término cuatro; sumas cuatro más cuatro y luego le sumas la resultado dos. ¿Cuántos círculos tendrá el termino cuatro? L₈. Neyder: 10 [desarrollando la operación en la hoja de trabajo] L₉. Profesor investigador: ¿Acá hay diez círculos? [señalando la construcción hecha por el estudiante del termino cuatro] L₁₀. Neyder: Hay 12 L₁₁. Profesor investigador: Entonces, ¿Qué está pasando? L₁₂. Neyder: Hay que aumentarle cuatro.	Fuentes: afirmaciones Abductivas, validadas vía inducción. Verificación y Justificación: pasos en una prueba,
--	---

En esta conversación es posible observar como Neyder logra corregir una posible generalización tentativa para el patrón que se genera en la secuencia, cuando deductivamente, establece que para hallar, la cantidad de círculos de cualquier término, hay que sumar dos veces la posición del término y a este resultado sumarle dos.

Cuando se validó esta estrategia en los términos anteriores, él sufrió una refutación de su hipótesis inicial (líneas 8 a 12), evidenciando que para hallar cualquier término de la secuencia, en vez de sumar dos, al resultado anterior, el estudiante establece que debe ser cuatro, en notación simbólica sería, $n + n + 4$. Validar este tipo de generalizaciones tentativas, le permitió al estudiante extrapolar una generalización algebraicamente útil y más adelante poder encontrar una fórmula general para encontrar cualquier término de la secuencia.

En cuanto al trabajo realizado por Lisbeth, se evidencia el trabajo de asociar cada término con la cantidad de círculos que conforman la construcción de cada término, esto le permite inferir por cuantos círculos estarán conformadas las demás construcciones tanto de términos próximos como lejanos, para ello formula la hipótesis abductiva de construir la cantidad de círculos en las dos filas y a la primera sumarle tres nuevos círculos y a la segunda fila sumarle un nuevo círculo; poniéndola en práctica con otros términos como el evidenciado en el ítem e, permitiendo extrapolar una generalización de forma empírica y estructural.

Tabla 15.

Transcripción 12: Tarea 5 ítem e, estudiante Lisbeth.

Transcripción	L1. Profesor	investigador: ¿Cómo	Predice de manera metódica
Video, Respuesta	encontraste la solución del ítem e?		un resultado valido, ya sea por
ítem e, de la			medio de una expresión verbal
estudiante Lisbeth	L2. Lisbeth: Pues... busqué un número y		o una formula directa.
	se me ocurrió el 100, entonces, puse 100		

arriba y 100 abajo [refiriéndose a las filas de círculos] y le aumente tres arriba y uno abajo y si me dio el total, 204.

Fuentes: afirmaciones Abductivas, validadas vía inducción.

L₃. Profesor investigador: ¡Muy bien! Ahora, ¿Puedes explicarnos un procedimiento para encontrar cualquier término de la secuencia?

Verificación y Justificación: pasos en una prueba,

L₄. Lisbeth : ...[momento de no respuesta]

L₅. Profesor investigador: Bueno, por ejemplo si te pido ¿cuantos círculos tiene el término 1000, lo podrías encontrar?

L₆. Lisbeth: ¡Sí, claro! Para ello colocaría 1000 círculos arriba y le sumaria tres más y 1000 abajo y le sumo uno más. Y el total se suman y me darían la cantidad.

L₇. Profesor investigador: Y si n , es la posición de un término cualquiera, ¿podría escribir una expresión?

L₈. Lisbeth: ... [Se queda pensando, y no responde a la petición]

Lisbeth en su trabajo individual establece una inferencia deductiva, para hallar cualquier término de la secuencia, de forma verbal (Línea 5), la cual se convierte en una generalización tentativa para el patrón. Su razonamiento transita en las fases de justificación y encapsulación, lo

cual le posibilita encontrar términos cercanos o lejanos. La justificación se presenta cuando establece su respuesta en la línea 2, y la encapsulación cuando responde en la línea 6 y además en el trabajo desarrollado en la hoja de trabajo.

coloque el número de la figura
arriba y abajo arriba le doy
3 y abajo 1

Figura 36. Respuesta ítem e, tarea 5, estudiante Lisbeth.

En la figura 21 se muestra la producción de Lisbeth donde expresa de forma escrita la forma en que ha generalizado lo invariante de la secuencia para cualquier término. A nivel grupal en la actividad se sugirió a los estudiantes construir las figuras, sin temor a equivocarse en los espacios diseñados para esta actividad fueron insuficientes. La gran mayoría de los estudiantes logró construir figuras de los términos cercanos y lejanos, y a su vez algunos lograron expresar en lenguaje natural sus generalizaciones sobre casos particulares.

En la tarea 6, por tratarse de una secuencia numérica, la cual se podía asociar con la tarea anteriormente descrita. Es decir los estudiantes lograron extrapolar algunas características de la secuencia figural, exploramos los resultados de los ítems c, d y e, de los grupos G_A y G_E , ya que los resultados fueron los mismos, en los ítems a, b y c, según nuestro análisis a priori.

Con respecto al razonamiento abductivo, se evidenciaron los resultados expuestos en el análisis de la tarea, las inferencias establecidas demuestran, el avance de los estudiantes, con respecto al trabajo con secuencias figurales y numéricas. Al asociar las dos tareas los estudiantes, fueron capaces de formular una reclamación abductiva, y validarla por inducción sobre términos cercanos y lejanos.

A continuación exploramos los resultados del grupo G_A , en el cual se evidenció, razonamientos deductivos, muy bien establecidos y además miramos los resultados del grupo G_E , en el cual se presentaron dificultades de procedimiento para realizar una inducción y a su vez dificultades conceptuales para formular y justificar un argumento deductivo pertinente.

Tabla 16.

Transcripción 13: Tarea 6; Grupo G_A

Transcripción	L1. Profesor investigador: ¿Cómo	Predice de manera metódica
Video, Respuesta	encontraron la solución del ítem c?	un resultado valido, ya sea por
ítem c, d y e,		medio de una expresión verbal
estudiantes	L2. Yineth: Yo, me guíe por los términos	o una formula directa.
Lisbeth y Yineth	anteriores [señalando los términos	
	iniciales] y sume la posición del término,	Fuentes: afirmaciones
	ósea 105 más 105 y luego le sume cuatro.	Abductivas, validadas vía
	L3. Profesor investigador: Y Lisbeth.	inducción.
	L4. Lisbeth: Igual que el trabajo anterior	Verificación y Justificación:
	[se refiere a la tarea 5] pondría 105 arriba	pasos en una prueba,
	y 105 abajo. Y arriba le sumaria tres y	
	abajo uno. Para sumar esos dos números y	
	me daba el resultado.	
	L5. Profesor investigador: Bueno, ahora	
	según el procedimiento que me acabaron	
	de explicar, ¿lo podemos utilizar para el	
	término 5?	

L₆. Lisbeth y Yineth: ¡Sí, claro! Los dos procedimientos nos dan el resultado del término en la posición 5.

L₇. Profesor investigador: ¿Cómo hicieron para solucionar el ítem e?

L₈. Lisbeth: pues cómo me dieron el mismo número, el cual era igual a la secuencia anterior, entonces hice los mismo y me daba el mismo número, 100.

L₉. Profesor investigador: igual que la secuencia anterior ¿cierto?

L₁₀. Lisbeth: Sí, así es.

L₁₁. Profesor investigador: Y, Yineth ¿hiciste lo mismo que la secuencia anterior?

L₁₂. Yineth: Sí, porque la pregunta es la misma que la secuencia anterior, y me guie por ese procedimiento.

En los resultados expuestos por el grupo G_A evidenciamos que las dos estudiantes, utilizaron diferentes estrategias para hallar una generalización para el patrón, inicialmente Lisbeth, utilizó el mismo razonamiento deductivo, expuesto en la secuencia anterior, en cambio Yineth encontró una estrategia aditiva la cual consistía en sumar la posición del termino dos veces y luego sumar cuatro

al resultado. Estas estrategias les permitieron determinar rápidamente términos lejanos y además validarla en términos cercanos y los iniciales de la secuencia.

Resulta interesante en este episodio ver cómo las estudiantes intentan validar sus razonamientos en otros términos, sin necesidad de recurrir a la construcción de los anteriores. Además sus inferencias logran captar lo invariante del patrón y estas estrategias aditivas, parece provocar un trabajo de generalización basado en las relaciones entre los números.

En cuanto a las dificultades analizamos las respuestas de los estudiantes Charith y Luis Alberto, integrantes del grupo G_E.

Tabla 17.

Transcripción 14: Tarea 6; Grupo G_E

Transcripción Video, Respuesta ítem b, d y e, estudiantes Charith y Luis Alberto.	L ₁ . Profesor investigador: ¿Cómo encontraron la solución del ítem c?	Dificultades de procedimiento para realizar una inducción.
	L ₂ . Luis Alberto: La posición 10 ocupa dos, porque tengo 10, se le quita tres y de los cinco queda dos entonces es dos.	Dificultades conceptuales para formular y justificar un argumento deductivo pertinente.
	L ₃ . Profesor investigador: Y, ¿la pregunta c?	
	L ₄ . Charith: Sume 105 más dos y me dio 107.	
	L ₅ . Profesor investigador: ¿Por qué?	
	L ₆ . Charith: Porque el patrón es de a dos, entonces, se suma de a dos	

L₇. Profesor investigador: Entonces el número que está en la posición 104, ¿Cuál sería?

L₈. Charith: 106.

L₉. Profesor investigador: Y, ¿Luis?

L₁₀. Luis Alberto: Respondí, entonces sumo 50 más 50 y me dio 100, entonces, la posición que ocupa es la cinco, porque a 100 le quite cinco.

L₁₁. Profesor investigador: Y, ¿cómo hicieron la siguiente pregunta?

L₁₂. Charith: Acá [señalando la hoja de trabajo] sume 102 más 102 y me dio 204.

L₁₃. Profesor investigador: Ósea, el número 204, ¿es el término 102?

L₁₄. Charith: Si, señor.

L₁₅. Profesor investigador: ¿Y para Luis?

L₁₆. Luis Alberto: Sumé 102 más 102 y me dio 204.

En la conversación anterior, se evidencia las dificultades de los estudiantes, para validar su abducción inicial, en términos próximos a través de la inducción. Lo expuesto en las línea 2, demuestran que el estudiante no interpreta la regularidad de la secuencia y establece que para hallar el término solicitado, en vez de sumar una cierta cantidad, él la resta. Esta dificultad está asociada, a la no atención de lo invariante, en cuanto al estudiante hay que resaltar que él no comprendió lo que se le estaba preguntado y expuso respuestas poco coherentes con las que se querían para la tarea.

En cuanto al trabajo hecho por Charith, observamos que utiliza una estrategia para responder al ítem c (líneas 4 y 6) y otra totalmente diferente para el ítem e (línea 12). Para la primera respuesta, la estudiante valida su hipótesis abductiva inicial, que consiste en sumar a la posición de cada término dos, probando su validez en términos lejanos como el término 105. La dificultad presentada es que no comprendió la pregunta y a su vez no se dio por entendida que la posición del término era 105 y no el número al cual corresponde el término. Ósea se presentó un error de procedimiento para validar el razonamiento inductivo.

En cuanto a la segunda respuesta, observamos que su hipótesis abductiva tuvo un cambio rotundo, posiblemente por el trabajo conjunto con su compañero, o por la validación repetida mediante inducción en otros términos. Pero acá se sigue evidenciando la dificultad, para formular o justificar un razonamiento deductivo, porque al indagar con las respuesta anteriores, se presenta un conflicto es las soluciones encontradas y al validarlos en otros términos, no se presentan justificaciones válidas para el patrón.

En general para el desarrollo de esta segunda actividad, se evidencia que en la gran mayoría de los estudiantes, se hace aún más notable que el trabajo con secuencias figurales contribuye para que los estudiantes relacionaran, características espaciales-numéricas. Esto les permitió identificar

la relación entre la construcción de la figura y su correspondiente término, lo cual posibilitó plantear abducciones fuertes, validadas por inducción y a su vez argumentos deductivos empíricos para el patrón que se genera en la secuencia.

Actividad 3

La actividad se desarrolló en dos sesiones, el trabajo se realizó por grupos, contrario a las actividades anteriores, ya que se evidencia, un mejor trabajo colaborativo y se pueden analizar en mayor medida las formas de razonamiento inferencial en los estudiantes. Durante la actividad los grupos trabajaron una a una las soluciones y las debatieron para llegar a una respuesta conjunta (en algunos grupos), esta interacción nos permitió, analizar las inferencias emergentes en cada una de las tareas (figura 37) y establecer qué tipo de generalizaciones se presentaban, para cada uno de los patrones estudiados.

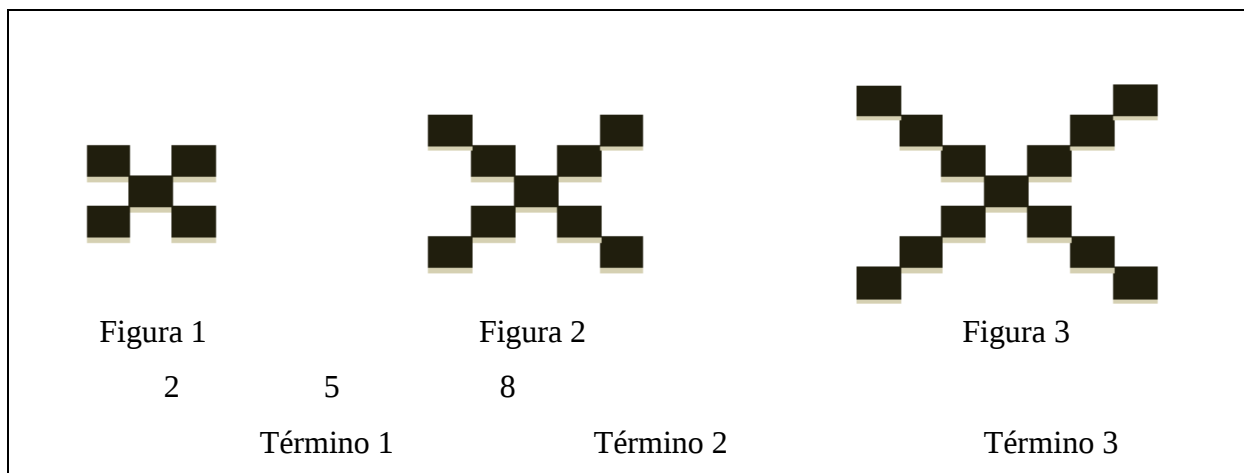


Figura 37: Secuencia figural Tarea 7 y secuencia numérica Tarea 8.

A continuación se presenta algunos episodios representativos del trabajo de los grupos, G_C , G_E . Se observa que la gran mayoría de los estudiantes, perciben lo invariante en la secuencias, por lo tanto sus razonamientos abductivos, fueron semejantes a los expuestos en el análisis a priori. En

cuanto al razonamiento inductivo, los estudiantes validaron sus hipótesis abductivas, utilizando estrategias aditivas y multiplicativas, como: poner un cuadro en el centro y en las esquinas del cuadro, poner la cantidad de cuadros que indica la posición del término, o multiplicar por cuatro la posición del término y luego sumar un cuadro más a la construcción. Estas estrategias les permitieron validar sus hipótesis abductivas en términos lejanos como el 25 o el 100, mostrando resultados acertados para los términos solicitados.

En cuanto a las dificultades exploramos el trabajo desarrollado por Luis Alberto, el cual no pudo establecer una generalización válida para las secuencias; a pesar del trabajo colaborativo de su compañera Charith, el estudiante seguía presentando, soluciones erróneas, a las preguntas establecidas y sus estrategias variaban de una a otra, a medida que la dificultad aumentaba. Es evidente que Luis Alberto, formulaba hipótesis abductivas incipientes, que no validaba mediante inducción, al contrario generaba una nueva hipótesis a cada nueva pregunta, y no se percataba del trasfondo de cada una de los ítems en cada tarea.

Al interior del grupo G_C , es posible evidenciar en la solución del ítem c, inferencias deductivas fuertes para la generalización del patrón. Los estudiantes logran reflexionar sobre su trabajo comunitario, permitiéndoles cooperar sobre las posibilidades y limitaciones de sus generalizaciones propuestas.

Tabla 18.

Transcripción 15: Tarea 7; Grupo G_C

Transcripción	L1. Profesor investigador: Ustedes ya	Predice de manera metódica
Video, Respuesta	lograron, hallar el patrón de la secuencia	un resultado valido, ya sea por
ítem c y d	¿cierto?	medio de una expresión verbal
estudiantes Davin		o una formula directa.
y Neyder.	L2. Davin y Neyder: Sí señor	

L₃. Profesor investigador: Bueno, Fuentes: afirmaciones entonces ¿Cuántos cuadros tiene el Abductivas, validadas vía término 105? inducción.

L₄. Neyder: 105... Bueno 105 lo Verificación y Justificación: multiplicaría por 4 y le sumaría uno. pasos en una prueba,

L₅. Profesor investigador: Entonces, ¿Cuántos cuadros tendría el término?

L₆. Davin: Daría, 421.

L₇. Profesor investigador: ¡Muy bien! Y si yo les preguntara, ¿Cómo explicarían el patrón encontrado?

L₈. Davin: Bueno para la figura cinco, acá hay cinco cuadros [señalando su construcción] en cada esquina cinco cuadritos, lo cual es igual a la figura cinco y al final le sumamos uno. [relacionando la cantidad de cuadrados que hay que agregar en cada esquina, con la posición del término]

L₉. Profesor investigador: Bueno, ¿y para el término que está en la posición n ?

L₁₀. Davin: Multiplicamos a n por cuatro y le sumamos uno.

En la conversación es posible observar como el trabajo entre los estudiantes, les permitió establecer un cierre deductivo, a través de una expresión verbal y una fórmula directa, para el patrón de la secuencia. En las líneas 4 y 6, se nota cómo los estudiantes validan el poder proyectivo de su hipótesis abductiva, a través de la inducción, permitiéndoles encontrar una generalización algebraicamente útil, al expresar que para hallar cualquier término, “se multiplica por cuatro su posición y se le suma uno”, en esta afirmación y en la respuesta dada en la línea 10, notamos como la fórmula directa, establecida por los estudiantes (Figura 38) evolucionó como tal en forma simbólica.

Left side of Figure 38:

tiene 2009 cuadras
figura 2000

por se multiplica 2000 4 veces
después se le suma 1 y el
resultado será 8001.

$$\begin{array}{r} 2009 \times \\ 8009 + \\ \hline 8001 \end{array}$$

$n \times 4 + 1$

Right side of Figure 38:

$506 \times 4 = 1504 + 1 = 1501$

es así: se calcula una vez la 1/4 de los datos
relojes de 500.

$N \times 4 + 1 =$

Figura 38: Respuesta al ítem d, grupo Gc.

En la expresión $n \times 4 + 1$, los estudiantes justifican su fórmula directa, es decir utilizan otros términos de la secuencia para explicar su validez, pueda que empleen una estrategia de verificación empírica basada en números que consiste en ajustar la fórmula, con la esperanza de que los datos generados les permita corregir su inferencia tanto en los términos lejanos como próximos.

Para analizar las dificultades evidenciadas en cada forma de razonamiento acudimos a los resultados del estudiante Luis Alberto. En cuanto al razonamiento abductivo, la dificultad presentada, al establecer una hipótesis abductiva, fue que el estudiante, primero percibe lo

invariante de la secuencia (sumar cuatro), para luego intentar establecer una característica común; sin embargo al entregar su procedimiento, plantea operaciones aditivas para encontrar los términos 4 y 5, de tal forma, que los términos encontrados, son el segundo y el tercer término, considerándose una dificultad conceptual para establecer una abducción.

En cuanto al razonamiento inductivo, en la solución del ítem b y c, en el cual se le solicitaba al estudiante, construir términos próximos y lejanos, él se remitió a continuar sumando la posición del término tres veces y luego restarle esa misma cantidad, lo cual deja entrever la dificultad de probar su abducción en otros términos de la secuencia.

Handwritten work by student Luis Alberto:

Left column:

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 4 \\ + 9 \\ \hline 18 \end{array}$$

Notes: la figura 4 queda constituida por nueve cuadrados. 4

$$\begin{array}{r} 18 \\ - 13 \\ \hline 5 \end{array}$$

Notes: entonces la figura 5 queda constituida por 13 cuadrados. Por 13 cuadrados por que conte los cuadrados que iban sumando y restando y sumando 4+4+4=12 y se una suma y medio 13.

Right column:

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 11 \\ + 11 \\ \hline 33 \end{array}$$

Notes: Use una suma. Suma tres veces once y medio 33 y luego resta once por los cuadrados que tiene que tener la figura 11 es 22.

Figura 39. Respuesta al ítem b y c, estudiante Luis Alberto

El trabajo desarrollado por Luis Alberto, nos permite evidenciar dificultades conceptuales, presentes en otros estudiantes, los cuales no establecen correspondencia entre las figuras y su posición, la cual sería una estrategia efectiva para empezar a formular una inferencia abductiva, que puede ser validada en términos consecuentes y lejanos, mediante la inducción.

En cuanto a la tarea 8, se establece que para este trabajo con los estudiantes, las secuencias no se relacionaran, como en las actividades pasadas, para poder observar, en cuál de las dos tareas era más evidente el surgimiento de las formas de razonamiento inferencial.

Notamos que en la gran mayoría de los estudiantes logró captar la comunalidad de la secuencia, por tanto el razonamiento abductivo e inductivo, fue el esperado y explicado en el análisis a priori. Esto es; para hallar los términos solicitados, al anterior se le iba “sumando de a tres”. Con base en esta inferencia abductiva, los estudiantes prolongaron esta hipótesis a términos lejanos (ítem b), observamos que la gran mayoría, tuvo que buscar los términos anteriores para encontrar el solicitado y en algunos se observó, la utilización de estrategias multiplicativas como: “multiplicar por tres la posición del término y restar uno al resultado” , esta afirmación, se convierte en una abducción fuerte, la cual al comprobarla en los términos iniciales reafirma el poder proyectivo de su razonamiento, estableciendo una generalización algebraicamente útil para el patrón de la secuencia.

En cuanto al razonamiento deductivo, se observa la respuesta dada por la estudiante Yineth la cual encontró una forma diferente al planteado en el análisis a priori, el cual reafirma un cierre deductivo formal para el patrón de la secuencia.

Tabla 19.

Transcripción 16: Tarea 8; Grupo G_A

Transcripción	L ₁ . Profesor investigador:	¿Cómo	Predice de manera metódica
Video, Respuesta	respondió la última pregunta?		un resultado valido, ya sea por
ítem d estudiantes.			medio de una expresión verbal
Yineth	L ₂ . Yineth: Yo hice sumando, por ejemplo		o una formula directa.
	aquí sume [señalando los términos		
	iniciales] uno más uno, dos; y acá, dos más	Fuentes:	afirmaciones
	dos, cuatro, más uno y así le “iba	Abductivas,	validadas vía
	agregando”, por ejemplo tres más tres,	inducción.	
	seis, más dos ocho.		

L₃. Profesor investigador: ¡Muy bien! Verificación y Justificación:
¿Puedes escribir eso en tu hoja? pasos en una prueba.

L₄. Yineth: Sí [comienza a escribir su
procedimiento]

L₅. Profesor investigador: Término uno,
¿Cómo lo hiciste?

L₆. Yineth: Eh...pues sume dos veces el
uno.

L₇. Profesor investigador: Escríbelo
[llegando al término 4]. Y ¿para el término
15?

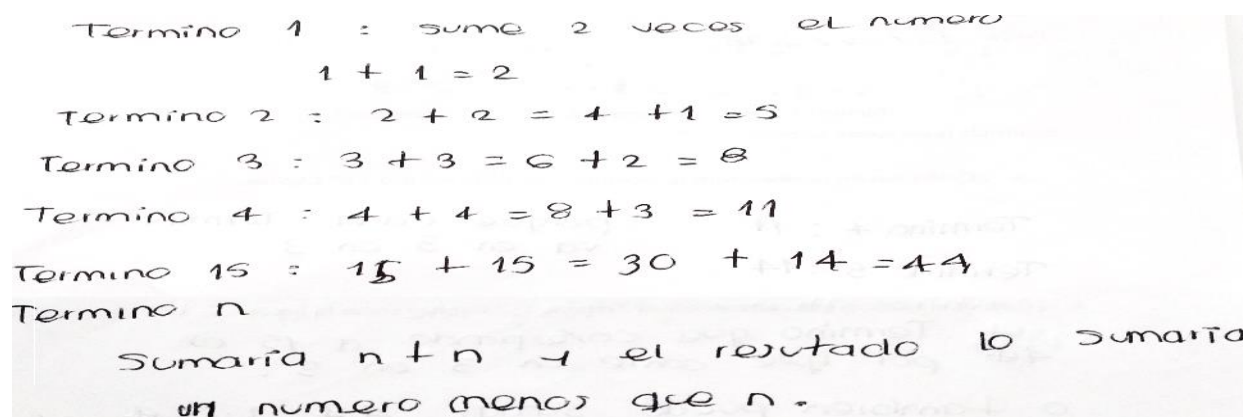
L₈. Yineth: Para el quince... [Escribiendo
su afirmación], $15 + 15 = 30 + 14 = 44$.

L₉. Profesor investigador: Bueno, ¿y para
el término que está en la posición n ?

L₁₀. Yineth: Sumaría $n + n$ y el resultado le
sumo “ un número menor que n ”

Resulta interesante en este episodio ver como Yineth, plantea una solución a la respuesta d, de forma diferente a la gran mayoría de sus compañeros. Su razonamiento deductivo evidencia una prueba lógica de su inferencia abductiva. En las líneas 2 y 8, se observa cómo describe en forma general su comprensión del patrón, para ello, relaciona la posición de cada término, como una suma y luego le adiciona, el resultado de restar la posición del término menos uno, en notación

simbólica sería, $n + n + (n - 1)$, donde n , es la posición del término (Figura 40). Esta generalización algebraica respecto al patrón de la secuencia, refleja una coordinación entre su fórmula directa y los términos iniciales del patrón, lo cual le permitió concluir la necesaria pertinencia compartida entre todos los términos (conocidos o proyectados) sobre la base de sus inferencias iniciales.



Término 1 : suma 2 veces el número
 $1 + 1 = 2$
 Término 2 : $2 + 2 = 4 + 1 = 5$
 Término 3 : $3 + 3 = 6 + 2 = 8$
 Término 4 : $4 + 4 = 8 + 3 = 11$
 Término 15 : $15 + 15 = 30 + 14 = 44$
 Término n
 Sumaría $n + n$ y el resultado lo sumaría
 un número menor que n.

Figura 40. Respuesta al ítem d estudiante Yineth.

Con respecto a las dificultades, se evidencia la respuesta del estudiante Davin, al ítem d, en el cual plantea que para hallar cualquier término “se multiplica cualquier número con 10 y el resultado es par”, evidenciando el no poder justificar y formular un argumento deductivo pertinente para el patrón de la secuencia. A pesar de su progreso en las preguntas iniciales, el cierre deductivo que trato de exponer, no transmitió un entendimiento de la posible generalización que estaba emergiendo, es más proyecto una hipótesis abductiva diferente, a la que inicialmente había propuesto e intento validarla en términos lejanos.

En general con el desarrollo de esta actividad, se observa cómo emergen en mayor medida las formas de razonamiento inferencial en una gran parte de los estudiantes. Esto debido al trabajo realizado con las secuencias y la buena disposición por parte de ellos. Además es muy notorio el empleo de fórmulas directas para hallar cualquier término de la secuencia, evidenciando el

progreso que han tenido las actividades en el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes. Con respecto a las tareas se puede concluir que al no estar relacionadas, es decir sus respuestas no eran similares, como ocurría en las actividades pasadas los estudiantes se enfrentaron a estrategias diferentes. Esto permitió diferenciar en qué tipo de secuencia se hacían más evidentes las formas de razonamiento y a su vez encontrar otras posibles soluciones para el patrón de la secuencia.

Actividad Final

Para el desarrollo de la actividad, se establecieron dos sesiones cada una de 45 minutos, debido a la realización de tareas propuestas en la institución. El trabajo se desarrolló de forma individual y luego por grupos, para obtener la mayor cantidad de respuestas a cada pregunta y observar las discusiones que se generaban en las explicaciones de los estudiantes.

Las tareas propuestas (figura 41), tenían especial relación con su desarrollo, debido a las dificultades presentadas en la anterior actividad, por ello se decidió continuar con este tipo de secuencias. Al establecer lo invariante en la secuencia figural y relacionarlo con la secuencia numérica, los estudiantes pudieron percibir con mayor claridad el patrón que se generaba, a su vez que los razonamientos eran más visibles y coherentes.

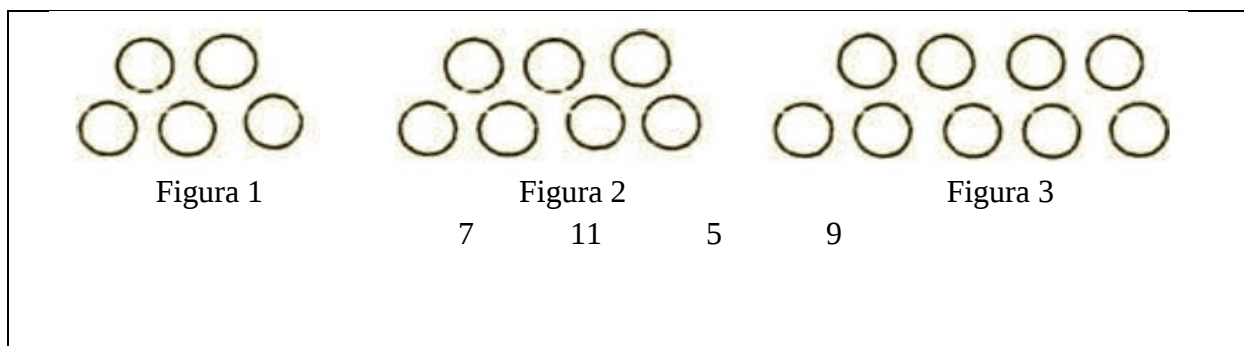


Figura 41. Secuencia figural Tarea 9 y secuencia numérica sin ayuda tabular Tarea 10.

A continuación se analizan las respuestas dadas a los ítems a, b y c, para la tarea 9 por los estudiantes Yineth, Valentina y Davin. El razonamiento abductivo en los tres estudiantes estuvo marcado por el establecimiento de inferencias asociadas a las tareas anteriores (Tarea 3 y 5).

Por ejemplo Yineth establece que para hallar los términos solicitados, se dibuja la cantidad de círculos correspondientes a la posición del término y luego se le agregan tres más, uno en la parte superior y otro en la parte inferior; para luego corroborar su idea en el término en la posición nueve. En cambio Davin asegura que para hallar los términos hay que “sumar de dos en dos”, es decir que para hallar cualquier término, el inicia desde el primero y va sumando de a dos para llegar al solicitado. En estas respuestas se observa las hipótesis abductivas que emergen en los estudiantes, las cuales son puestas a prueba mediante inducción, para posteriormente convertirlas en abducciones fuertes y establecer una posible generalización.

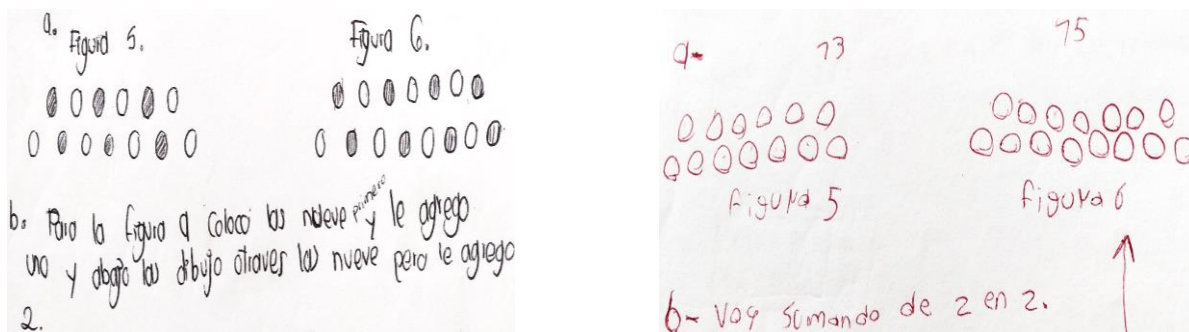


Figura 42. Tarea 9. Respuestas ítem a y b Yineth y Davin.

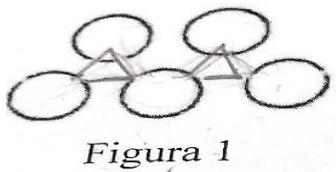
La respuesta del ítem c, les permitió a estos dos estudiantes afianzar su hipótesis inicial, verificándola y justificándola en otros términos, mediante inducción. Por ejemplo Yineth encontró con facilidad la solución, validando su hipótesis inicial sobre términos lejanos, en cuanto a Davin, se tuvo que valer de una estrategia multiplicativa, porque al indagar sobre su hipótesis inicial, se dio cuenta que esta era algo tediosa y complicada. Su nueva hipótesis consistió en tomar la posición

del término multiplicarla por dos y el resultado sumarle tres. Davin al indagar en términos lejanos, sufrió refutación e involución de su hipótesis inicial, permitiéndole establecer una generalización algebraicamente útil, emergiendo el razonamiento inductivo.

Con respecto a la solución de Valentina, se presenta la trascripción de la conversación que sostiene con el profesor investigador sobre la explicación de los ítems a, b y c. Esto debido a sus razonamientos, los cuales fueron diferentes a los de sus compañeros, pero que lograron captar lo invariante de la secuencia.

Tabla 20.
Transcripción 17: Tarea 9; Estudiante Valentina

Transcripción Video, Respuesta ítem a, b, c estudiante Valentina.	L1. Profesor investigador: ¿Cómo respondió a la primera pregunta? L2. Valentina: Bueno, yo me di cuenta, que para hallar cualquier término, cada figura, estaba conformada por triángulos hechos con tres círculos, por ejemplo el termino uno tiene dos triángulos y ellos comparten un círculo, el segundo tres triángulos y comparten dos círculos y así sucesivamente.	Asume una inferencia plausible, hacía una regla. Fuentes: conteo de círculos, representaciones de los términos anteriores, emparejamiento de figuras. Verificación y justificación: Estructurada por inducción. Prueba en otros términos de la secuencia.
---	---	---



L₃. Profesor investigador: ¡Muy bien!

Entonces ¿Cuántos triángulos tiene el término 4?

L₄. Valentina: Tendría 5 triángulos.

L₅. Profesor investigador: Y ¿Cuántos círculos comparten?

L₆. Valentina: Eh... ¡ya se! Cada término comparte la misma cantidad que su posición.

L₇. Profesor investigador: Bueno y entonces como hallamos la cantidad de círculos del término 9.

L₈. Valentina: Bueno, identifico cuantos triángulos hay en el término, los cuales son 10, y multiplico por tres esa cantidad, lo que me da 30 para después restarle la posición del término. En total son 21.

L₉. Profesor investigador: ¡Muy bien!

En este episodio se observa como la estudiante, establece una inferencia abductiva, mediante el emparejamiento de las figuras que conforman cada término, al asociar triángulos conformados por círculos y notando que cada figura tiene $n + 1$, triángulos, siendo n , la posición del término. Esto permite extrapolar una posible generalización del patrón (líneas 2, 6 y 8), permitiendo probar este

razonamiento en los términos iniciales, como en los lejanos. Acá se identifica un fuerte reclamo abductor, realizado por la estudiante, al considerar la estructura espacial de cada termino y realizar el conteo y la asociación de las figuras que lo conformaban. En la respuesta al ítem c, valida su hipótesis inicial al establecer un argumento multiplicativo, que consiste en multiplicar por tres, la cantidad de triángulos que hay en el término 100, y luego restar la cantidad de la posición de la figura, simbólicamente sería: $(101 \times 3) - 100$, para un total de 201 círculos.

En cuanto a las respuestas del ítem d, el cual consistía en hallar la posición del término, sabiendo cuantos círculos lo conformaban, se considera la respuesta de la estudiante Yineth, la cual encontró un razonamiento consecuente con la fórmula directa para hallar cualquier término de la secuencia.

81 - le saco mitad a 78 y me da 39
 $\begin{array}{r} 3 \\ 27 \end{array}$
 78 y entonces sumo $39 + 39 = 78 + 3 = 81$

Figura 43. Tarea 9. Respuestas ítem d, estudiante Yineth.

La estudiante, con base en su hipótesis abductiva, aplicó el procedimiento contrario al que utilizó para las preguntas iniciales, es decir, que para hallar la posición del término solicitado, ella, restó de la cantidad de círculos totales y luego el resultado lo dividió por dos. La justificación de este razonamiento, deja entre ver la evolución de la generalización que este emergiendo en la estudiante, la cual es capaz de articular la formula directa, con la posición de cualquier término de la secuencia. Y para comprobar su veracidad, la valida con su hipótesis abductiva (Figura 44).

En cuanto al ítem e, se presentan las respuestas del grupo G_A , el cual fue el único capaz (por cuestiones de tiempo) de intentar realizar una generalización a través de una formula directa para el patrón de la secuencia.

Tabla 21.

Transcripción 18: Tarea 9; Grupo G_A .

Transcripción	L ₁ . Profesor investigador: ¿Cómo	Predice de manera metódica
Video, Respuesta	respondieron a la última pregunta?	un resultado valido, ya sea por
ítem e, estudiantes		medio de una expresión verbal
Lisbeth y Yineth.	L ₂ . Lisbeth: Pues... El número de	o una formula directa.
	cualquier figura [refiriéndose a la posición	
	del término] lo coloco en la fila de arriba	Fuentes: afirmaciones
	y le aumento uno, hago lo mismo, pera	Abductivas, validadas vía
	esta vez le aumento dos, pero en la fila de	inducción.
	abajo [observando la construcción como	
	el arreglo de dos filas de círculos].	Verificación y Justificación:
		pasos en una prueba.
	L ₃ . Profesor investigador: Bueno y si lo	
	escribimos mediante una formula ¿Cómo	
	lo harían? Si decimos que x es la posición	
	del término ¿Cómo escribiremos esa	
	fórmula?	
	L ₄ . Yineth: Ponemos x arriba y x abajo, a	
	la de arriba le sumo uno y a la de abajo	
	dos.	
	L ₅ . Profesor investigador: Pero esa x ¿es la	
	misma?	

L₆. Yineth: Si es la misma. Y le sumamos tres.

L₇. Profesor investigador: Entonces ¿Cómo quedaría la fórmula?

L₈. Yineth: La fórmula quedaría $2x$ más tres.

L₉. Profesor investigador: ¡Muy bien!
Ahora ¿Quién es esa x ?

L₁₀. Lisbeth: La posición del término.

La discusión sostenida con el grupo G_A, sugiere que las estudiantes han articulado la estructura espacial y numérica de la secuencia, ellas han llegado a acuerdos de cómo construir cualquier término de la secuencia. En las líneas 2, 6, 8 y 10, se hace evidente el razonamiento deductivo de forma empírica, ya que establecen una estrategia, parecida a las tareas pasadas, con un argumento simbólico, guiado por el profesor, lo cual les permite validar sus hipótesis iniciales y ponerla a prueba en los demás términos de la secuencia. El trabajo conjunto de las estudiantes, les permitió extrapolar una generalización algebraicamente útil, las formas de razonamiento emergente e ellas, les permitió una toma de conciencia para manifestar su pensamiento en la actividad matemática.

En cuanto al desarrollo de la tarea 10, esta se cumplió a cabalidad con respecto al tiempo establecido. La dinámica del trabajo, se basó en la consecución de una secuencia numérica sin ayuda tabular. Esto con el propósito de identificar formas de razonamiento abductivos más profundos y observar el desenvolvimiento de los estudiantes, para hallar la posición de los términos

de la secuencia. Debido a la dificultad presentada por la gran mayoría de los estudiantes, para el desarrollo del ítem a, algunos no alcanzaron a culminar en su totalidad la actividad.

Los razonamientos inferidos para las primeras preguntas (ítem a y b), establecen la dificultad, que representa la falta de la posición para los términos de la secuencia, esta ayuda tabular, le permite a ellos establecer el tipo de secuencia, ya sea creciente o decreciente. Algunos de los estudiantes se limitaron a seguir el orden de los números dados, sin percatarse de la intención de la primera pregunta. Respuestas como: “al siguiente le sumo cuatro” o “el patrón va de cuatro en cuatro” evidencian la dificultad conceptual para establecer una hipótesis abductiva.

A continuación exploramos las respuestas de los grupos G_A y G_C en donde se evidenciaron en mayor medida las formas de razonamiento inferencial asociadas a los ítems d, e y f, y además fueron los grupos que culminaron en su totalidad la tarea.

Con respecto a las respuestas de los ítems iniciales en donde se establecía el razonamiento abductivo, la gran mayoría de los estudiantes, lograron formular una hipótesis, para hallar la posición y el término 9 de la secuencia. Respuestas como: “va de dos en dos” o “la secuencia está formada por números impares” o “la secuencia esta relaciona con la tarea anterior” les permitieron encontrar ideas fundamentales para entender el patrón que se genera en la secuencia y especializarlo en los términos iniciales.

En el siguiente episodio exploramos el razonamiento inductivo del grupo G_C , en el cual se evidenció una clara justificación de la hipótesis abductiva inicial.

Tabla 22.

Transcripción 19: Tarea 10; Grupo G_C.

Transcripción	L ₁ . Profesor investigador: ¿Calcula el término de la posición 100?	Prueba de una inferencia abductiva, mide el valor de la hipótesis sobre otros términos de la secuencia.
Video, Respuesta ítem d, estudiantes		
Davin y Neyder.	L ₂ . Davin: Encontramos una forma más sencilla de hacerlo.	
		Fuentes: ejemplos, enumeración, análisis.
	L ₃ . Profesor investigador: ¿Cuál sería?	
	L ₄ . Davin: Bueno, nos dimos cuenta, que esta secuencia era parecida a la anterior.	Verificación y justificación: empírica, por ejemplo por enumeración, analogía y experimentos.
	L ₅ . Profesor investigador: ¡Parecida! ¿Cómo es eso?	
	L ₆ . Neyder: La cantidad de círculos [refiriéndose a la tarea 9] es igual a los números de la secuencia.	
	L ₇ . Profesor investigador: Bueno. ¿Cómo sería esa forma?	
	L ₈ . Davin: Nosotros multiplicamos la posición por dos y después el resultado, le sumamos tres.	
	L ₉ . Profesor investigador: Comprobemos en los términos iniciales. Por ejemplo el término 1.	

L₁₀. Davin: Entonces uno por dos, dos y más tres cinco.

En el diálogo con los estudiantes, se identifica cómo su idea sobre el patrón se convierte en una hipótesis abductiva, que es validada por inducción. En la líneas 2, 4 y 6, los estudiantes establecen un salto inductivo, al determinar una generalización en casos conocidos y validarlos en otros términos. Los estudiantes buscan utilizar la acción de adivinar como mecanismo abductivo, sobre las preguntas iniciales. Sin embargo sufrieron refutación y evolución a través de la inducción lo cual les permitió, hacer este tipo de correcciones. Al establecer la relación entre las tareas (Líneas 4 y 6) los estudiantes encontraron una justificación empírica del patrón de la secuencia y lo verificaron en los términos iniciales.

Al establecer la generalización tentativa para la secuencia (Línea 8), los estudiantes transitan a las fases de encapsulación y justificación de la misma, es decir la expresión el razonamiento encontrado se ve en términos de ser a la vez un objeto (fórmula) y un proceso (propiedades, coeficientes, operaciones, etc.). En este caso puede surgir una expresión final de dicha generalidad, ya sea por medio de una expresión verbal o una fórmula matemática,

Con respecto al ítem e, de la tarea, analizamos la respuesta dada por Davin (figura 44) en el cual plantea una ecuación para hallar la posición del número 83 de la secuencia.

$$\begin{array}{l} (X) * 2 + 3 = 83 \\ 40 * 2 + 3 = 83 \\ \boxed{40 = X} \end{array} \quad \begin{array}{l} 83 \\ 40 \\ \text{Posición} \end{array}$$

Figura 44. Tarea 10. Respuestas ítem e, estudiante Davin.

El trabajo realizado por el estudiante reafirma aún más su razonamiento abductivo, además por estar tratando el tema de ecuaciones en la clase de matemáticas, él puede encontrar un método para hallar la posición de cualquier número en la secuencia. Afianzando su hipótesis abductiva y convirtiéndola en una generalización algebraicamente útil. En su explicación se evidencia un posible cierre deductivo al formular una expresión verbal en términos generales.

Para el análisis de la respuesta del ítem f, se comparan las soluciones de los dos grupos, porque encontraron la misma generalización para el patrón, mientras el primer grupo formula un cierre deductivo en forma empírica, el otro argumenta una prueba lógica.

En el grupo G_C , los estudiantes argumentan que para hallar cualquier término de la figura, “*hay que multiplicar la posición por dos y el resultado lo sumamos con tres*”, esta afirmación, demuestra lo que ellos lograron entender del patrón y además lo especializaron en otros términos por tanto el cierre deductivo fue de forma empírica y estructural, asemejando la misma generalización para la tarea anterior.

En cuanto al grupo G_A , analizamos la discusión en torno a esta última pregunta ya que logaron estructurar una formula directa para el patrón.

Tabla 23.

Transcripción 20: Tarea 10; Grupo G_A .

Transcripción Video, Respuesta ítem f, estudiante Lisbeth.	L ₁ . Profesor investigador: ¿Cómo respondieron a la pregunta f? L ₂ . Lisbeth: Yo hice una ecuación [señalando en su hoja de trabajo]	Prueba de una inferencia abductiva, mide el valor de la hipótesis sobre otros términos de la secuencia. Fuentes: ejemplos, enumeración, análisis.
---	---	--

	L₃. Profesor investigador: ¿Quién es x?[con respecto a la ecuación] $2x \times 2 + 3$ x es la posición del término L₄. Lisbeth: La posición del término. L₅ Profesor investigador: ¿Lo probaron en otros términos? L₆. Lisbeth: Sí, en los términos iniciales y nos dieron los números.	Verificación y justificación: empírica, por ejemplo por enumeración, analogía y experimentos.
--	--	--

En las líneas 2 y 4 se deja en evidencia cuando Lisbeth trasmite su generalización algebraica con respecto al patrón, en forma deductiva, donde sus premisas reflejan una coordinación entre su fórmula directa y los términos iniciales de la secuencia, a lo que Rivera (2013) define como cierre deductivo lógico.

En cuanto a su fórmula matemática, hay una relación con la tarea 9, que le permitió especializarla para el patrón trabajado, la estudiante argumenta (línea 4) que la posición del termino se debe multiplicar por dos y luego sumarle 3. Luego de transitar por las dos formas de razonamiento iniciales, pudo predecir de manera metódica un resultado válido de sus hipótesis. Para ello realizó observaciones sobre términos lejanos de la secuencia (Línea 6), lo cual le permitió

evidenciar la veracidad de su generalización y convertirla en un argumento estructural empírico demostrado por una prueba lógica.

5. Conclusiones

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en el proceso investigativo en torno a la identificación, descripción y análisis de las formas de razonamiento inferencial que desarrollan los estudiantes con edades comprendidas entre los 11 y 14 años cuando abordan tareas sobre generalización de patrones figurales y numéricos.

Las formas de razonamiento inferencial, abducción, inducción y deducción se documentaron mediante categorías, las cuales nos permitieron identificarlas, describirlas y realizar un análisis de cada una de ellas en el desarrollo de las actividades planeadas. El razonamiento abductivo fue crucial para que los estudiantes plantearan sus generalizaciones ya que mediante esta inferencia pudieron orientar sus acciones en las actividades. Por ejemplo en las tareas con secuencias figurales, mediante el razonamiento abductivo, algunos estudiantes aprovecharon sus experiencias y relaciones numérico-espaciales, para usar las mismas hipótesis en las secuencias numéricas. Por otro lado mediante el razonamiento inductivo los estudiantes lograron construir hipótesis abductivas fuertes. Por ejemplo, en las tareas iniciales, se observa que a través de la validación en términos cercanos y lejanos de las secuencias, los estudiantes logran evolucionar o refutar sus ideas previas del patrón que se genera y además conseguían encontrar lo invariante, esto les permite extrapolar una posible generalización tentativa. Con respecto al razonamiento deductivo, logran

concretar las regularidades o el entendimiento que tenían del patrón, en las secuencias figurales o numéricas, para luego expresar una generalización de forma verbal o mediante una fórmula directa.

Tal como lo reporta Rivera (2013), cuando los estudiantes se enfrentan a tareas de generalización de patrones, son capaces de construir y justificar una estructura plausible y algebraicamente útil, que puede ser transmitida en forma deductiva o empírica. Durante las actividades los estudiantes transmitieron su entendimiento del patrón en cada secuencia. Para ello establecían características de las figuras o números de cada término y relacionaban la posición con su correspondiente término para evidenciar la relación existente entre estos. Por ejemplo en el caso de Lisbeth, en tarea 2 de la actividad diagnóstica, cuando establece que para hallar la figura en la posición ocho, se debe construir ocho triángulos y 16 cuadrados, “porque los cuadrados son el doble de los triángulos”, deja entrever la relación funcional existente entre la posición y su respectivo término, lo que le permite a Lisbeth a partir de la identificación de lo invariante proponer una posible generalización tentativa, que puede proporcionar la construcción de cualquier término.

Otras características utilizadas por los estudiantes durante las actividades, fueron el conteo y el uso de tablas de valores. En cuanto al conteo, los estudiantes recurrieron a esta estrategia para validar sus hipótesis abductivas, en las secuencias figurales y probar el poder proyectivo de las mismas mediante inducción. Además esto les permitió identificar el aumento de un término a otro en las secuencias numéricas. El uso de las tablas se constituyó en un instrumento de gran ayuda para hallar los términos lejanos. Por ejemplo en la tarea 3, las estudiantes del grupo G_B construyeron una tabla para identificar el término que estaba en la posición 100, permitiéndoles establecer un orden de la secuencia y percibir el patrón que se generaba, constituyéndose en una abducción fuerte.

El análisis de cada una de las tareas permite observar, como la actividad generada por las tareas logró propiciar dinámicas de discusión en el aula, permitiendo en los estudiantes un desenvolvimiento en el trabajo con generalización de patrones, ya que fueron capaces de identificar patrones, formular hipótesis a partir de una colección dada de términos de una secuencia figural o numérica, validar y argumentar esas hipótesis, para finalmente expresar sus generalizaciones.

En un principio se categorizaron las producciones de los estudiantes de acuerdo a las formas de razonamiento inferencial propuestas por Pierce (1903) y analizadas por Rivera (2013): razonamiento abductivo, razonamiento inductivo y razonamiento deductivo. Durante el desarrollo de las primeras actividades, se evidenciaron las tres formas de razonamiento, en mayor medida la abducción y la inducción. Entre las características utilizadas por los estudiantes para formular estas inferencias encontramos el conteo, el uso de tablas, expresiones verbales, comparación de las construcciones entre los términos de secuencias figurales y la identificación de propiedades en las secuencias numéricas. En cuanto a la deducción se observa que muy pocos estudiantes alcanzaron a formular un cierre deductivo para las tareas y este era mediante una generalización empírica (Verbal o escrita) o una formula directa.

En el desarrollo de las actividades se pudo inferir que el trabajo conjunto contribuyó en que los estudiantes expresaran sus razonamientos inferenciales claves en su actividad matemática. Así como la utilización de expresiones interesantes, para referirse a los objetos matemáticos para plantear una posible generalización, por lo que en algunas producciones emergieron las tres formas inferenciales con sus respectivas características.

Con base en lo anterior, es posible concluir que el abordaje de las tareas posibilitó en los estudiantes el análisis y la reflexión de diferentes estrategias para solucionar el tipo de preguntas

planteadas. Sin embargo, los resultados de la realización de las actividades con las secuencias figurales y numéricas, confirman que las producciones de los estudiantes presentaran dificultades y que las formas de razonamiento inferencial no emergieran en la gran mayoría, o se situaran sólo en inferencias abductivas e inductivas.

Esto permite afirmar que las tareas con secuencias figurales posibilitaron a los estudiantes a través del análisis y la reflexión conjunta de diferentes estrategias, resolver las preguntas planteadas. Sin embargo, los resultados de los estudiantes en su gran mayoría confirman lo que esperábamos desde el análisis a priori, evidenciando que con el uso de estas secuencias, las formas de razonamiento eran más notables en las soluciones encontradas. Hay que resaltar que se tuvo en cuenta que las preguntas iban aumentando su complejidad, tratando de indagar sobre términos particulares, por lo que las formas de razonamiento, abductivo e inductivo permitían ejemplificar razonamientos plausibles (apoyar conjeturas) y el deductivo ejemplificar el razonamiento demostrativo (conocimiento Matemático) (Rivera, 2013).

Por tanto en los ítems a y b de las tareas los estudiantes logran percibir lo invariante de cada secuencia, es decir plantear una abducción, para prolongar la secuencia a figuras o términos cercanos o lejanos, validando la hipótesis mediante inducción, Esto les permitió extrapolar una posible generalización tentativa para el patrón. La gran mayoría de estudiantes recurrió a la estrategia de conteo de figuras, que conformaban cada término y a la construcción de tablas en donde se establecía una relación de las figuras y su posición. En cuanto a los demás ítems de cada tarea, los estudiantes empezaron a buscar otro tipo de estrategias para validar las hipótesis iniciales, en este caso formularon inferencias deductivas, evaluando que las estrategias anteriores no eran muy precisas a la hora de hallar términos en posiciones lejanas, por lo que las nuevas estrategias fueron de tipo aditivo y multiplicativo.

En el análisis de las secuencias numéricas (tareas 4, 6 y 8) es posible evidenciar cómo los estudiantes relacionaban los términos con las figuras de las secuencias figurales, permitiendo establecer una articulación numérica-espacial de cada término y formulando una hipótesis abductiva, a través de estrategias como el conteo y operaciones aditivas y multiplicativas, las cuales validaban mediante inducción en los términos cercanos o lejanos, para luego formular una posible generalización, mediante una expresión verbal o una fórmula directa expresando un cierre deductivo. En cuanto a la tarea 10, se observaron dificultades en los primeros ítems ya que los estudiantes no percibían el orden de la secuencia y esta imposibilidad le obligaba a establecer hipótesis erróneas, pero después del análisis entre los grupos, se observa cómo las estrategias utilizadas en las secuencias anteriores les permitió encontrar lo invariante y establecer un orden para los términos. Estas estrategias les permitieron crear la necesidad de nombrar lo indeterminado y evolucionar hacia formas de reflexión a través de la actividad matemática. En este tipo de secuencias, a diferencia de las tareas anteriores (Secuencias numéricas) se introduce un nuevo elemento, la falta de la posición del término, permitiendo evidenciar la dificultad para encontrar lo invariante de la secuencia, y dificultado el desarrollo de inferencias abductivas para el patrón.

En cuanto a las dificultades presentadas en el desarrollo de las tareas, se observa cómo algunos estudiantes expresaban ideas contrarias a lo invariante del patrón. Además con cada nueva pregunta, aparecen nuevas hipótesis en este caso erróneas, que se volvían en generalizaciones incipientes o fuera de contexto por lo cual se establece que el estudio de estas dificultades en futuras investigaciones, permitirá profundizar en cómo las formas de razonamiento inferencial, potencian en los estudiantes, la construcción del proceso de generalización a partir de la actividad con patrones.

Durante el desarrollo de la actividad se evidencia que la gran mayoría de los estudiantes logró comunicar la regularidad para hallar los términos solicitados, en sus producciones existe la dificultad para transmitir el entendimiento de su posible generalización, ya que la mayoría se limitó a dar ejemplos de los términos o dejar en blanco el espacio, en los ítems donde se solicitaba escribir la explicación para hallar los términos particulares.

En cuanto a las posibles generalizaciones propuestas por los estudiantes en las actividades, se observa que solo se aplicaron a términos cercanos en concreto, es decir que solo se limitaban a dar explicaciones para casos particulares. Lo invariante aparece a través de ejemplos concretos en un término en particular, así como el uso de estrategias operativas por lo que se estaría hablando de generalizaciones tentativas propias para las edades de los estudiantes.

En cuanto al proceso investigativo, se destaca cómo la dinámica de las actividades favoreció la cooperación e interacción en la producción de los estudiantes. Se evidenció como los miembros de cada grupo mostraban actitudes de cooperación y desenvolvimiento al explicar sus razonamientos. Por ejemplo en el grupo G_B, el diálogo constante entre las estudiantes les permitió refutar y evolucionar en varias de las respuestas halladas. Por ejemplo, Saira se apoya en las hipótesis abductivas de Valentina para evidenciar que sus respuestas eran erróneas y establecer una posible generalización para el patrón que se generaba; o cuando Lisbeth y Yineth discutían sobre la forma de establecer una estrategia más sencilla para hallar términos lejanos.

Referencias Bibliográficas

- Adler, J. (2008). Introduction: Philosophical foundations. In J. Adler & L. Rips (Eds.), *Reasoning: Studies of human inference and its foundations* (pp. 1–34). New York, NY: Cambridge University Press.
- Alonso, F, Barbero, C, Fuentes, I, Azcarate, A, Dozagarat, J, Gutiérrez, S., Rivière, V., (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Azarquiel, Grupo. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Becker, J., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school students. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121–128). Melbourne: PME.
- Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Butto, C. (2005). *Introducción temprana al pensamiento algebraico: una experiencia en la escuela primaria*. (Tesis doctoral). Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional. México, D. F
- Butto, C. & Rojano, T. (2010). *Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo* Educación Matemática, Santillana. Distrito Federal, México, pp. 55-86
- Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

- Cañadas, M., & Castro, E. (2007). A proposal of categorization for analyzing inductive reasoning. *PNA*, 1 (2), 67–78.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669 705). Reston, VA: NCTM e IAP.
- Corrington, R. (1993). *An introduction to C. S. Peirce*. Boston: Rowman and Littlefield Publishers.
- Davydov, V. V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Davydov, V. V. (1990). Type of generalization in instruction: Logical and Psychological problems in the structuring of school curricula. In J. Kilpatrick (Ed.), *Soviet studies in mathematics Education* (Vol. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Davydov, V. (2008). *Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study* (P. Moxhay., Trans.). New York, NY: Nova Science Publishers.
- Dörfler, W. (1991). ‘Forms and means of generalization in mathematics’. En A. Bishop et all (eds), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, 63-85.
- Ellis, A. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students’ reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (3), 194–229.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139–162.
- García-Cruz, J., & Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22 nd conference of the International Group for the 202 References Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 2, pp. 329–336). Stellenbosch, South África: PME.

- García, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna.
- Godino, J & Font, V. (2000). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Granada. Recuperado en internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/>
- Goldin, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research (pp. 517-545). En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey London: LEA, publishers.
- Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21 st century* (pp. 29–37). Boston: Kluwer.
- Hibben, J. (1905). *Logic: Deductive and inductive*. New York: Charles Scribner's Sons.
- Israel, R. (2006). Projectibility and explainability or how to draw a new picture of inductive practices. *Journal for General Philosophy of Science*, 37, 269–286.
- Kaput, J. (1995). Long term algebra reform: Democratizing access to big ideas. In C. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Eds.), *The algebra initiative colloquium* (Vol. 1, pp. 33–49). Washington, DC: U.S. Department of Education.
- Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran. *Research agenda for mathematics education: Vol. 4. Research issues in the learning and teaching of algebra*, pp.33-56. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 18(1), 139-151.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and the teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. In *Handbook of research on the psychology of Mathematics education: Past, present, future*, ed. A. Gutiérrez and P. Boero, 23-49. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. Can be useful to the analysis of this phenomenon. *ICMI*, Rome, March 2008.
- Kieran, C. & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 7, 229-240.
- Krutetzki, V.A. (1976). *'The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren'*. Translated from the Russian by J. Teller. Edited by J. Kilpatrick and I. Wirszup. The University of Chicago Press.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. New York: Cambridge University Press.
- Lee, L. (1996). An initiation into algebra culture through generalization activities. In C. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 87–106). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Martínez, J. (2016). *Procesos de Objetivación en el Desarrollo del Pensamiento Algebraico Temprano*. Tesis de Maestría. Universidad Industrial de Santander.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. London: Kluwer Academic Publishers.
- Mason, J. (2002). Generalization and algebra: Exploiting children's powers. In L. Hegarty (Ed.), *Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice*. London: Routledge Falmer.
- Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. London: Routledge Falmer.

Merrell, F. (1995). *Peirce's semiotics now*. Toronto: Canadian Scholars' Press.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN- (1998). *Lineamientos Curriculares para Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia–MEN-(2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Magisterio.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

Moreno, P. (2014). *La contracción semiótica como proceso de objetivación en estudiantes de grado sexto en el campo del pensamiento algebraico*. Tesis de maestría. Universidad Francisco José de Caldas. Bogotá-Colombia.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Orton, A. & Orton, J. (1994). 'Students' perception and use of pattern and generalization', en J. P. da Ponte y J. F. Matos (eds), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, University of Lisbon, 407-414.

Paavola, S. (2011). Diagrams, iconicity, and abductive discovery. *Semiotica*, 186 (1/4), 297 314.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analyzed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23–41.

Peirce, C. (1869). Grounds of validity of the laws of logic: Further consequences of four incapacities. *The Journal of Speculative Philosophy*, 2, 193–208.

- Peirce, C.S. (1878a). Deduction, induction, and hypothesis. *The Popular Science Monthly*, vol. *XIII*, 470-480.
- Peirce, C.S. (1878b). The probability of induction. *The Popular Science Monthly*, vol. *XII*, 705-718.
- Peirce, C.S. (1903). Abduction and induction (de las Conferencias sobre pragmatismo, en Harvard, 1903). CP 5.189). *En J. Buchler (1955), Philosophical writings of Peirce* (pp. 150-156). New York: Dover Publications.
- Peirce, C. (1934). *Collected papers of Charles Saunders Peirce: Volume 5*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Prusak, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 19–40.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40, 83-96.
- Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.
- Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimensión of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (5), 507–530.
- Radford, L. y Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. Dordrecht: Springer, *Advances in Mathematics Education*, 157-182.

- Rivera, F. (2010a). Visual templates in pattern generalization. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 297–328.
- Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics Psychological and Pedagogical Considerations*. Ed.Springer. New York.
- Rojas & Vergel (2013). *Proceso de generalización y Pensamiento algebraico*, Revista científica, Educación científica y tecnológica. Bogotá.
- Rubinstein, S.L. (1966). *El proceso del Pensamiento*. La Habana: Editora Nacional de Cuba.
- Sáenz-Ludlow, A. (1997). Inferential processes in Michael's mathematical thinking. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 120 -127).
- SAEM Thales (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. Editorial Síntesis. Madrid.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 77, 5-34.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147–164.
- Varzi, A. (2008). Patterns, rules, and inferences. In J. Adler & L. Rips (Eds.), *Reasoning: Studies of human inference and its foundations* (pp. 282–290). New York, NY: Cambridge University Press.
- Vasco, C. E. (2002). El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías. *En Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá-Colombia.

Vergel, R. (2014). *Formas de Pensamiento Algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Tesis doctoral. Universidad Francisco José de Caldas. Bogotá-Colombia.

Vergel, R. (2015). Generalización de Patrones y formas de Pensamiento Algebraico Temprano. *PNA*, 9(3), 193-215.