

Diseño y construcción de un péndulo invertido lineal como banco de experimentación para el Laboratorio de Dinámica y Control de la Escuela de Ingeniería Mecánica.

Carlos David Albarracín Ortiz

Trabajo de Grado para Optar al Título de Ingeniero Mecánico

Director

Carlos Borrás Pinilla

PhD en Ingeniería mecánica

Codirector

Helio Sneyder Esteban Villegas

MSc en Ingeniería Mecánica

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Físico-mecánicas

Escuela de Ingeniería Mecánica

Ingeniería Mecánica

Bucaramanga

Dedicatoria

A la Madre Tierra y a Dios por su eterna generosidad y complicidad para guiarme en el camino de la existencia.

A mis padres Carlos David Albarracín Balaguera y Gloria Cecilia Ortiz Ospina por su apoyo constante, su ejemplo y su buen consejo, gracias a ellos estoy hoy cumpliendo esta meta.

A mis hermanos Cristian Andrés y Kevin Jesús Albarracín Ortiz, por su compañía y ayuda incondicional a lo largo de todos estos años.

Agradecimientos

A la Universidad Industrial de Santander por su organización y apoyo al bienestar universitario.

Agradezco a la Escuela de Ingeniería Mecánica y a sus profesores por la valiosa educación y orientación que he recibido a lo largo de estos años, la cual ha sido fundamental para mi desarrollo profesional.

A los profesores Helio Sneyder Esteban Villegas y Carlos Borrás Pinilla, por su orientación, tiempo y dedicación en el desarrollo de este proyecto.

Agradezco a mis familiares y amigos que, de diversas maneras, contribuyeron al éxito de este proyecto y logro académico.

Tabla de Contenido

	Pág.
1	Planteamiento del Problema 17
2	Justificación para solucionar el problema..... 18
3	Objetivos del Trabajo de Grado 20
3.1	Objetivo General..... 20
3.2	Objetivos Específicos..... 20
4	Justificación de la Solución 21
5	Marco teórico 22
5.1	Antecedentes del proyecto 22
5.2	Marco conceptual..... 23
5.2.1	Péndulo invertido 23
5.2.2	Control de procesos..... 24
5.2.3	Diseño de sistemas de control..... 25
5.2.4	Sistemas de Control en Lazo Abierto 27
5.2.5	Sistemas de Control en Lazo Cerrado..... 27
5.2.6	Controlador Automático 28
5.2.7	Sistemas Lineales..... 28
5.2.8	Sistemas no lineales 28
5.2.9	Linealización de modelos matemáticos 29
5.2.9.1	Matriz Jacobiana para linealizar sistemas dinámicos no lineales 29
5.2.10	Sistemas de Control en Tiempo Discreto..... 30
5.2.10.1	Transformada Z..... 30

5.2.11	Función de Transferencia.....	30
5.2.12	Representación en el espacio de estados de sistemas dinámicos	32
5.2.12.1	En tiempo continuo	32
5.2.12.2	En tiempo discreto	32
5.2.13	Controlador PID	33
5.2.13.1	PID discreto	34
5.2.14	Especificaciones de la respuesta transitoria para un sistema de control.....	35
6	Metodología	36
6.1	Fase de inicio	36
6.2	Fase de diseño	36
6.3	Fase de construcción.....	37
7	Diseño conceptual.....	37
7.1	Despliegue de La Función Calidad	37
7.1.1	Tipos de subsistemas.....	38
7.1.2	Requerimientos de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la UIS	38
7.1.3	Matriz de Calidad Mecanismo Péndulo Invertido	39
7.1.4	QFD Para los Subsistemas con Mayor Relevancia.....	41
7.1.4.1	QFD subsistema estructura	41
7.1.4.2	QFD subsistema de desplazamiento	42
7.1.4.3	QFD subsistema de control y simulación	43
7.2	Planteamiento de Alternativas	44
7.2.1	Alternativas subsistema estructura.....	44
7.2.1.1	Alternativa 1, Ensamble con ángulo metálico – prensa manual de resorte.	44

7.2.1.2	Alternativa 2, Estructura impresa en 3D – Prensa sargento.....	45
7.2.2	Alternativas subsistema desplazamiento.....	46
7.2.2.1	Alternativa 1: Guía lineal HIWIN – Motor eléctrico con encoder – transmisión polea correa.	46
7.2.2.2	Alternativa 2: Guía lineal de bloque con trasmisión piñón cremallera – motor eléctrico con encoder.	47
7.2.2.3	Alternativa 3: Motor eléctrico 12[V] – Transmisión por poleas y correa – Perfil aluminio OB2020V con carrito móvil V-Slot.....	47
7.2.3	Alternativas subsistema simulación y control.....	48
7.2.3.1	Alternativa 1: Arduino MEGA 2560 – Modulo relevador.....	48
7.2.3.2	Alternativa 2: Arduino DUE – Puente H BTS7960.....	49
7.3	Evaluación de Alternativas	50
7.4	Especificación de Alternativa Ganadora.....	52
7.5	Diseño electrónico	53
8	Diseño en Detalle.....	53
8.1	Descripción del Banco	53
8.1.1	Funcionamiento del Banco	55
8.1.2	Descripción de los principales componentes	55
8.1.2.1	Motor eléctrico.....	55
8.1.2.2	Sensor de ángulo P3022.....	56
8.1.2.3	Enconder incremental	57
8.1.2.4	Arduino DUE.....	57
8.1.2.5	Puente H (BTS7960).....	58

8.1.2.6	Circuito Impreso (PCB)	59
8.1.2.6.1	Componentes PCB	60
8.2	Modelado del péndulo invertido en SolidWorks	61
8.2.1	Piezas en impresión 3D.....	63
9	Construcción del Prototipo	63
9.1	Estructura	63
9.2	Circuito eléctrico y de control.....	64
10	Diseño del Controlador	65
10.1	Modelado Matemático del Péndulo Invertido.....	65
10.1.1	Sintonización de parámetros	71
10.1.2	Validación del modelo	75
10.2	Representación del modelo en tiempo continuo	77
10.2.1	Linealización del modelo.....	78
10.2.2	Espacio de estados del modelo en tiempo continuo.....	80
10.2.2.1	Espacio de estados en tiempo continuo, definido para el estado 3 (posición del carro)	80
10.2.2.2	Espacio de estados en tiempo continuo, definido para el estado 4 (posición angular del péndulo)	80
10.2.3	Representación en funciones de transferencia en tiempo continuo	80
10.2.3.1	Función de transferencia en tiempo continuo, para el estado 3 (posición del carro)	81
10.2.3.2	Función de transferencia en tiempo continuo, para el estado 4 (posición angular del péndulo)	81
10.3	Representación del modelo en tiempo discreto	81

10.3.1	Espacio de estados del modelo en tiempo discreto.....	81
10.3.1.1	El espacio de estados en tiempo discreto, definido para el estado 3 (posición del carro)	
	81	
10.3.1.2	El espacio de estados en tiempo discreto, definido para el estado 4 (posición angular de péndulo):	82
10.3.2	Representación en funciones de transferencia en tiempo discreto.....	82
10.3.2.1	Función de transferencia en tiempo discreto, para el estado 3 (posición del carro) .	82
10.3.2.2	Función de transferencia en tiempo discreto, para el estado 4 (posición angular del péndulo)	82
10.4	Comparación entre el comportamiento de las funciones de transferencia a una entrada escalón en tiempo continuo y discreto:.....	83
10.5	Análisis de estabilidad de la dinámica del péndulo invertido.....	84
10.5.1	Lugar geométrico de las raíces del modelo.....	84
10.6	Estabilización del modelo por medio de un PID discreto.....	85
10.6.1	PID discreto para el control de la posición del carro	86
10.6.2	PID discreto para el control de la posición angular del péndulo	88
10.7	Validación de los controladores con el modelo matemático	91
11	Implementación de controladores PID discretos	92
11.1	Pruebas en laboratorio del péndulo invertido lineal	94
11.1.1	Prueba de estabilidad sin perturbación	94
11.1.2	Prueba de estabilidad con perturbación	95
12	Algoritmo Swing-Up para elevación del péndulo invertido.....	96
12.1	Desarrollo del modelo Swing-Up	96

12.2	Implementación del modelo Swing-Up	97
13	Conclusiones	99
14	Recomendaciones	101
	Referencias Bibliográficas	102

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1 <i>Matriz de calidad QFD subsistemas.</i>	40
Tabla 2 <i>Resultado matriz QFD subsistemas.</i>	40
Tabla 3 <i>QFD subsistema estructura.</i>	41
Tabla 4 <i>Resultados QFD subsistema estructura.</i>	41
Tabla 5 <i>QFD subsistema de desplazamiento.</i>	42
Tabla 6 <i>Resultados QFD subsistema de desplazamiento</i>	42
Tabla 7 <i>QFD subsistema de control y simulación.</i>	43
Tabla 8 <i>Resultados QFD subsistema de control y simulación.</i>	43
Tabla 9 <i>Resultados alternativa ganadora subsistema estructura.</i>	50
Tabla 10 <i>Resultados alternativa ganadora subsistema desplazamiento</i>	51
Tabla 11 <i>Resultados alternativa ganadora subsistema simulación y control.</i>	51
Tabla 12 <i>Parámetros modelo matemático del péndulo invertido.</i>	66
Tabla 13 <i>Valores por sintonización de parámetros</i>	74
Tabla 14 <i>Constantes PID discreto para la posición del carro.</i>	87
Tabla 15 <i>Parámetros de desempeño de la respuesta del controlador para la posición del carro</i>	88
Tabla 16 <i>Constantes PID discreto para la posición angular del péndulo.</i>	89
Tabla 17 <i>Parámetros de desempeño de la respuesta del controlador para el ángulo</i>	90

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1 <i>Péndulo Invertido Lineal</i>	24
Figura 2 <i>Descripción simplificada de un sistema de control</i>	25
Figura 3 <i>Proceso de diseño para un controlador automático</i>	26
Figura 4 <i>Sistema de control en lazo abierto</i>	27
Figura 5 <i>Sistema de control en lazo cerrado</i>	27
Figura 6 <i>Diagrama de bloques sistema de control automático</i>	28
Figura 7 <i>Diagrama de bloques sistemas de control</i>	31
Figura 8 <i>Diagrama de bloques en lazo cerrado de un controlador PID</i>	33
Figura 9 <i>Especificaciones de la respuesta transitoria en un sistema de control</i>	35
Figura 10 <i>Componentes subsistema estructura alternativa 1</i>	45
Figura 11 <i>Componentes subsistema estructura alternativa 2</i>	45
Figura 12 <i>Componentes subsistema desplazamiento alternativa 1</i>	46
Figura 13 <i>Componentes subsistema desplazamiento alternativa 2</i>	47
Figura 14 <i>Componentes subsistema desplazamiento alternativa 3</i>	48
Figura 15 <i>Componentes subsistema simulación y control alternativa 1</i>	49
Figura 16 <i>Componentes subsistema simulación y control alternativa 2</i>	50
Figura 17 <i>Diagrama esquemático del circuito electrónico</i>	53
Figura 18 <i>Carro móvil base del péndulo invertido</i>	54
Figura 19 <i>Modelado CAD péndulo invertido</i>	54
Figura 20 <i>Motor CC de 12 V marca Buhler</i>	56

Figura 21 <i>Conexión Sensor de ángulo P3022</i>	56
Figura 22 <i>Encoder incremental</i>	57
Figura 23 <i>Arduino DUE</i>	58
Figura 24 <i>Driver puente H BTS7960</i>	59
Figura 25 <i>Modelo del circuito impreso</i>	60
Figura 26 <i>Modelo 3D Péndulo Invertido Lineal (vista isométrica)</i>	61
Figura 27 <i>Vista isométrica en corte lado encoder</i>	61
Figura 28 <i>Vista isométrica en corte lado motor</i>	62
Figura 29 <i>Vista isométrica en corte, carro móvil</i>	62
Figura 30 <i>Piezas soporte del banco impresas en 3D</i>	63
Figura 31 <i>Banco péndulo invertido lineal</i>	64
Figura 32 <i>Circuito eléctrico y de control</i>	65
Figura 33 <i>Diagrama de cuerpo libre péndulo invertido</i>	66
Figura 34 <i>DCL distancias relativas avance del péndulo</i>	67
Figura 35 <i>Esquema eléctrico para un motor de corriente continua</i>	68
Figura 36 <i>Diagrama de bloques para pruebas de movimiento</i>	72
Figura 37 <i>Metodología para la estimación del modelo</i>	73
Figura 38 <i>Comparación de las respuestas simuladas</i>	75
Figura 39 <i>Diagrama de bloques para la validación del modelo matemático</i>	76
Figura 40 <i>Respuestas a las pruebas de validación del modelo</i>	76
Figura 41 <i>Respuesta de la función de transferencia del movimiento del carro, para una entrada escalón, en tiempo continuo y tiempo discreto</i>	83

Figura 42 <i>Respuesta de la función de transferencia de la posición angular del péndulo, para una entrada escalón, en tiempo continuo y tiempo discreto.</i>	84
Figura 43 <i>Lugar geométrico de las raíces para las funciones de transferencia de la posición del carro y péndulo.</i>	85
Figura 44 <i>Arquitectura en lazo abierto para el diseño del PID discreto</i>	86
Figura 45 <i>Lugar geométrico de las raíces para el lazo de control abierto de la posición del carro</i>	87
Figura 46 <i>Respuesta a una entrada escalón del PID discreto para la posición del carro, en lazo cerrado.</i>	88
Figura 47 <i>Lugar geométrico de las raíces para el lazo de control abierto, de la posición angular del péndulo.</i>	89
Figura 48 <i>Lazo de control en lazo cerrado para la posición angular del péndulo.</i>	90
Figura 49 <i>Validación de los controladores PID discretos con el modelo matemático.</i>	91
Figura 50 <i>Resultados prueba de validación de los controladores PID discretos, aplicados al modelo matemático.</i>	92
Figura 51 <i>Diagrama de bloques para implementación de los controladores PID discretos en la planta real</i>	93
Figura 52 <i>Zonas de acción de los controladores</i>	94
Figura 53 <i>Respuesta del sistema sin perturbación</i>	95
Figura 54 <i>Respuesta del sistema con perturbación</i>	96
Figura 55 <i>Diagrama de bloques Swing-Up</i>	98

Lista de Apéndices

Los apéndices están adjuntos y puede visualizarlos en la base de datos de la biblioteca UIS

Apéndice A: Desarrollo en Matlab del modelo matemático.

Apéndice B: Modelo de caja gris para sintonización de parámetros.

Apéndice C: Planos de piezas para mecanizado del Péndulo invertido.

Apéndice D: Material de apoyo didáctico: Manual de uso y mantenimiento del Péndulo Invertido.

Resumen

Título: Diseño y construcción de un péndulo invertido lineal como banco de experimentación para el Laboratorio de Dinámica y Control de la Escuela de Ingeniería Mecánica.*

Autor: Carlos David Albarracín Ortiz**

Palabras Clave: Péndulo Invertido Lineal, control PID discreto, modelo no lineal, sistemas inestables, diseño mecánico, función de calidad, modelado CAD, impresión 3D.

Descripción:

El presente proyecto de grado tuvo como propósito el diseño, construcción y control, por medio de un PID discreto, de un péndulo invertido lineal, con el fin de que se implemente como material didáctico para mejorar las estrategias de enseñanza y aprendizaje en el área de dinámica, control y robótica de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la UIS. El desarrollo del proyecto se efectuó con base en una metodología de tres fases, la fase de inicio, donde se hizo el planteamiento de los requerimientos y análisis de información, la fase de construcción, donde se diseñaron alternativas, se realizó el modelado CAD y matemático, por último, la fase de construcción y control, donde se manufacturaron y ensamblaron los componentes, además se diseñó e implementó el controlador PID discreto.

Con la ejecución de pruebas para el péndulo, se concluyó que el controlador diseñado pudo estabilizar el péndulo de manera satisfactoria, demostrando que un PID discreto es una solución idónea a este problema de control, además se diseñó un algoritmo Swing-Up para levantar el péndulo desde su posición en reposo. Como parte del alcance de este proyecto se diseñó un manual de uso y mantenimiento, que sirve de guía para los usuarios en el reconocimiento, caracterización y modelado de los diferentes componentes que conforman el péndulo, con el fin de darles un correcto uso.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ingenierías Físicomecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Ingeniería Mecánica. Director: Carlos Borrás Pinilla. PhD en Ingeniería mecánica. Codirector: Helio Sneyder Esteban Villegas. MSc en Ingeniería Mecánica.

Abstract

Title: Design and construction of a linear inverted pendulum as an experimentation bench for the Dynamics and Control Laboratory of the School of Mechanical Engineering. *

Author: Carlos David Albarracín Ortiz **

Key Words: Inverted Linear Pendulum, discrete PID control, non-linear model, unstable systems, mechanical design, quality function, CAD modeling, 3D printing.

Description:

The purpose of this degree project was the design, construction, and control, using a discrete PID controller, of a linear inverted pendulum to serve as didactic material for enhancing teaching and learning strategies in the field of dynamics, control, and robotics at the School of Mechanical Engineering at UIS. The project's development followed a three-phase methodology, the initial phase involved defining requirements and analyzing information. The construction phase included designing alternatives, creating CAD and mathematical models, and, the construction and control phase encompassed the manufacturing and assembly of components, as well as the design and implementation of the discrete PID controller.

Through conducting tests on the pendulum, it was concluded that the designed controller could satisfactorily stabilize the pendulum, demonstrating that a discrete PID controller is a suitable solution to this control problem. Additionally, a Swing-Up algorithm was designed to raise the pendulum from its resting position. As part of the project's scope, a user manual was developed to guide users in recognizing, characterizing, and modeling the various components that make up the pendulum, ensuring their correct usage.

* Degree Work

** Faculty of Physical – Mechanical Engineering, School of Mechanical Engineering. Mechanical Engineering. Director: Carlos Borrás Pinilla. PhD in Mechanical Engineering. Co-director: Helio Sneyder Esteban Villegas. MSc in Mechanical Engineering.

1 Planteamiento del Problema

Una de las principales funciones de un ingeniero es resolver problemas y es con base en esta necesidad que han surgido muchas de las ramas de la ingeniería que conocemos hasta el momento, es así como nace el control automático de procesos, que ha dado solución a problemas ingenieriles desde los tiempos de las máquinas de vapor, con el regulador de velocidad centrifugo de James Watt en el siglo XVIII hasta nuestros tiempos, donde esta disciplina cumple un papel importante e integral en los vehículos autónomos, aeroespaciales, en sistemas robóticos, en procesos de manufactura modernos y en cualquier otra operación que necesite controlar velocidad, temperatura, presión y/o caudal, etc.

La Escuela de Ingeniería Mecánica (EIM) de la Universidad Industrial de Santander en pro de fortalecer uno de sus propósitos misionales, el cual es formar ingenieros mecánicos integrales con alta calidad humana, ética, política, técnica y científica, ha dispuesto en su plan de estudios de pregrado la materia “*Ingeniería de Control*” la cual introduce a los estudiantes en el modelamiento dinámico de sistemas físicos y el análisis de desempeño del sistema ante una perturbación, además incentiva al estudiante a utilizar adecuadamente herramientas computacionales para el modelamiento y análisis de sistemas; con esto la universidad logra afianzar un plan de estudios robusto y a la vanguardia en formación profesional.

En los últimos años la EIM ha venido en un proceso de mejora y transformación de su planta física en lo que corresponde a la construcción de un nuevo edificio, la remodelación de espacios para profesores y alumnos, además de la restructuración y modernización de aulas de clase y laboratorios, estos últimos son parte fundamental de la escuela porque es donde se ponen en práctica todas las leyes, conceptos y teorías vistos en clase.

Como consecuencia a estos cambios ha surgido en la escuela una problemática: la adecuación total y entrega de los laboratorios, sumado a esto la contingencia sanitaria del COVID-19 que aplazó varias actividades administrativas. Por tanto, estudiantes y profesores vemos la oportunidad de aportar en esta tarea con proyectos que contribuyan a tener laboratorios prácticos, didácticos y funcionales, articulados a las asignaturas teóricas de nuestra carrera, ingeniería mecánica, específicamente materias del ciclo profesional como lo es la ingeniería de control, donde este proyecto brindará una herramienta experimental para la enseñanza y puesta en práctica de conceptos clave en la asignatura.

2 Justificación para solucionar el problema

La ingeniería de control es una de las ramas de la ingeniería mecánica que está evolucionando a un ritmo cada vez más rápido, en la actualidad, es un factor importante en la mayor parte de las industrias que están en constante modernización en temas de innovación y productividad. Es por esto, que desde la escuela de Ingeniería mecánica de la Universidad Industrial de Santander es importante el fortalecimiento de las competencias de los estudiantes cursantes de la materia “*Ingeniería de Control*”, donde a través de este proyecto, tendrán como propósito poner en práctica conceptos y técnicas de control automático de procesos, incentivando así, a los futuros ingenieros mecánicos UIS a potenciar su aprendizaje de una forma didáctica.

Este proyecto proporcionará una herramienta educativa para el *Laboratorio de Control y Sistemas Dinámicos* de la Escuela de Ingeniería Mecánica, la cual brindará la oportunidad de que estudiantes y profesores apliquen diferentes estrategias de control en el modelamiento de un sistema mecánico no lineal como lo es el péndulo invertido, del mismo modo, se utilizarán distintas

herramientas computacionales para realizar simulaciones y análisis de resultados. Un nuevo banco para el laboratorio de control le dará la facilidad al docente de modificar su clase hacia una metodología más practica incentivando al estudiante a consolidar de mejor manera sus estudios en la materia.

3 Objetivos del Trabajo de Grado

3.1 Objetivo General

Desarrollar un péndulo invertido lineal como banco de laboratorio para la materia de ingeniería de control que sirva como herramienta pedagógica y de investigación, fomentando así, la misión educativa impartida por la escuela de ingeniería mecánica de la universidad industrial de Santander.

3.2 Objetivos Específicos

- Diseñar la plataforma base para el péndulo invertido lineal, seleccionando cada una de sus partes componente en base a estos criterios:
 - * Guía lineal para plataforma deslizante.
 - * Fuente motriz, motor eléctrico de corriente continua.
 - * Sensores de posición y ángulo del péndulo.
 - * Controlador tipo Arduino.
- Modelar y construir el sistema mecánico del banco de laboratorio péndulo invertido lineal, apoyado en un software CAD como SolidWorks.
- Construir un modelo matemático del comportamiento del péndulo para escoger y parametrizar las variables de control.
- Diseñar e implementar un modelo de control PID discreto para el balanceo y equilibrio del péndulo invertido lineal.
- Elaborar y documentar pruebas sobre el banco de laboratorio para analizar tiempos de respuesta y comportamiento del péndulo invertido lineal al someterlo a señales de perturbación.

- Desarrollar material de apoyo académico en el área de dinámica, control y robótica, que vincule los componentes prácticos del banco péndulo invertido lineal, al contenido de la materia Ingeniería de Control.

4 Justificación de la Solución

Para el estudio de sistemas de control uno de los ejemplos clásicos es el péndulo invertido con carro oscilante, comúnmente se encuentra en libros de texto y en literatura de investigación, su gran aplicabilidad radica en el hecho de que es inestable sin control, además de ser un sistema con una dinámica no lineal. En un péndulo invertido se pueden modelar y probar diferentes técnicas de control, mostrando resultados inmediatos lo cual lo hace un sistema versátil y práctico.

En el mercado colombiano no es fácil de encontrar, su costo es elevado y comúnmente hay que importarlo, lo cual genera costos adicionales, tiempo de espera mayores, riesgos en la calidad y usabilidad del producto, por tal motivo se decide que su diseño y construcción es la solución idónea; en este sentido un banco de laboratorio con estas características es de gran utilidad para la enseñanza de la ingeniería de control.

5 Marco teórico

5.1 Antecedentes del proyecto

- ARISMENDI, J y BRAVO A. (2020). *Diseño y construcción de una plataforma elevadora de carrocerías de camiones en la empresa Ninox S.A.S.* (Tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Este trabajo de grado es útil como guía metodológica, específicamente en el proceso de diseño y selección de modelo final del banco de laboratorio, el cual es el objetivo principal de este proyecto.

- OSWALDO J. (2012). *Diseño y construcción de un péndulo invertido rotativo como herramienta de investigación y desarrollo para el laboratorio de sistemas dinámicos e ingeniería de control.* (Tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- ESPARZA, E y RUIZ L. (2012). *Diseño y construcción de una plataforma experimental (de péndulo invertido lineal) como herramienta de investigación y desarrollo para el laboratorio de sistemas dinámicos, ingeniería de control y robótica.* (Tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Estos dos proyectos de la escuela de Ingeniería Mecánica de la UIS, trabajaron sobre el diseño de un péndulo invertido, el primero mediante el diseño y construcción de un péndulo rotativo, y el segundo más semejante a este proyecto, por tanto sirven como guía metodológica, además de mostrar parámetros más específicos del tema de control para un sistema de péndulo invertido.

- CONTROL TUTORIALS MATLAB AND SIMULINK. (2017). *Inverted Pendulum: System Modeling*. umich.edu

Esta es una página estilo blog, en colaboración con las universidades de Michigan, Carnegie Mellon y Detroit Mercy, que aborda la teoría de control moderno, acá se pueden encontrar explicaciones de diferentes proyectos en control, los cuales van desde la introducción a los conceptos claves, hasta su puesta en marcha en diferentes simuladores, como Matlab-Simulink. Por tanto, para este proyecto esta página se utiliza como material de consulta en temas específicos de control aplicados en un péndulo invertido lineal.

- OGATA, K. (5Ed.). (2010). *Ingeniería de control moderna*. Editorial Pearson y NORMAN.
- NISE, N. S. (2007). *Control systems engineering*, fifth edition with wileyplus set (5a ed.). John Wiley & Sons.

Estos dos son libros de texto guía en la materia *Ingeniería de Control* de la universidad, siendo una guía para aprender todos los conceptos básicos de la asignatura, por tanto, su metodología y explicaciones son útiles a la hora de conformar el lazo de control estable y confiable para el presente proyecto.

5.2 Marco conceptual

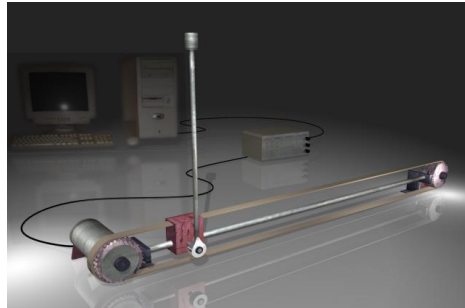
5.2.1 Péndulo invertido

El péndulo invertido ha sido uno de los ingenios más populares a la hora de comenzar a estudiar técnicas de control, su construcción consta de una varilla recta que funciona como péndulo, articulada a una base rectilínea estable y móvil como se puede ver en la figura 1, consta de dos grados de libertad lo que lo hace un sistema inestable, su funcionamiento es similar a apoyar un vara de madera erguida perpendicular a la palma de la mano y tratar de mantenerla en equilibrio, convertir este simple proceso algo automático realizado por máquinas es una labor de la ingeniería

de control, para la cual un péndulo invertido lineal ofrece los fundamentos para comenzar a experimentar y poner a prueba diferentes técnicas de control clásico y moderno.

Figura 1

Péndulo Invertido Lineal



Nota. Adaptado de *Levantamiento y Estabilización del Péndulo Invertido* (p. 9), por Fernando Castaño Luna, 2003.

Existen diversos tipos de sistemas de péndulo, de los cuales se escoge el péndulo invertido simple debido a sus siguientes características:

- Sistema no lineal
- De carácter inestable
- Dos grados de libertad
- Versatilidad en su construcción y control.

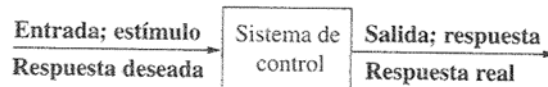
5.2.2 *Control de procesos*

Controlar un proceso es producir una salida o un resultado esperado a través de manipular las variables de entrada del sistema (ver figura 2), esta señal de salida se conoce como *variable controlada*, la cual se mide para ser modificada por una señal de control o variable manipulada con el objetivo de acercarse al máximo a un valor deseado. Algunos ejemplos de sistemas de

control son el control de líquidos en tanques industriales, control de velocidad en algún proceso, controles de presión y temperatura en calderas, etcétera.

Figura 2

Descripción simplificada de un sistema de control.



Nota. Tomado de *sistemas de control para ingeniería* (p. 2), por Norman S. Nise, 2006.

Con el paso de los años y el desarrollo matemático, se han desarrollado teorías de control que han servido para darle solución a problemas ingenieriles, las cuales son la teoría de control clásica, que se basa en el método de respuesta a la frecuencia y lugar de las raíces, esta trata con sistemas de una entrada y una salida, siendo este método relativamente estable y preciso. Así mismo, los requerimientos de control de procesos han venido creciendo en la medida que se desarrollan nuevas tecnologías esto dio paso a teorías de control moderna y control robusto.

A diferencia del control clásico, las bases del control moderno son el análisis en el dominio del tiempo y la síntesis de sistemas a partir de variables de estado, estos métodos se han venido desarrollando para controlar plantas modernas que requieren mayor precisión y menor costo (Ogata, 2010). Por último, el control robusto se basa en asumir que el modelo matemático con el que se haya parametrizado la planta no es perfecto y tiene un margen de error que se tendrá en cuenta desde el inicio del diseño (Ogata, 2010).

5.2.3 *Diseño de sistemas de control*

El propósito de diseñar un sistema de control se centra en satisfacer una necesidad descrita por una serie de especificaciones, estas pueden ser características de la repuesta transitoria del

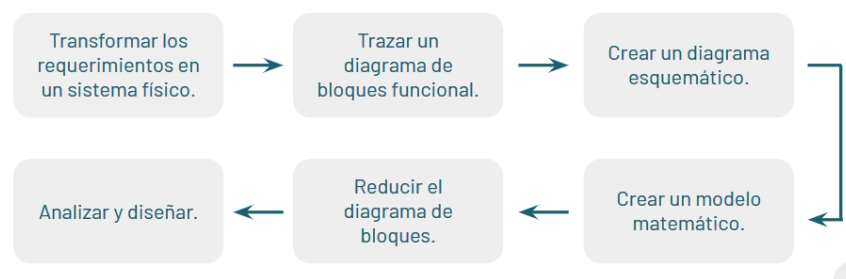
sistema como lo serian la máxima sobre elongación y el tiempo de asentamiento, o características de la respuesta estacionaria como lo puede ser el error en estado estacionario de la señal de salida.

El proceso de diseño de un controlador puede llegar a ser un resultado de prueba y error, todo depende de las necesidades planteadas y los recursos disponibles. Se parte desde un modelo matemático que se acerque lo mejor posible al comportamiento real de la planta y de compensadores que modifiquen la dinámica del sistema para satisfacer unas especificaciones determinadas (Ogata, 2010).

Para llegar a tener un controlador óptimo para un sistema hay que seguir un proceso de diseño, la exactitud de este controlador, su confiabilidad y rapidez dependerán de que camino se utilice, Nise (2011) propone en su libro *Sistemas de Control para Ingeniería* una secuencia ordenada de pasos para el diseño de sistemas de control realimentados, como se puede ver en la figura 3.

Figura 3

Proceso de diseño para un controlador automático.



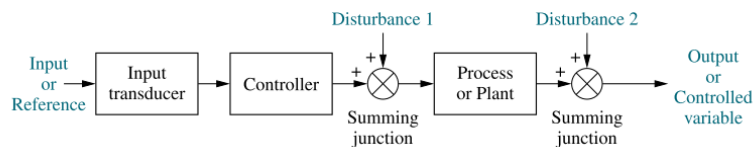
Nota. Metodología bajo una serie de pasos para obtener un controlador automático. Adaptado de *Sistemas de control para ingeniería* (p. 15), por Norman S. Nise, 2011.

5.2.4 Sistemas de Control en Lazo Abierto

Para estos sistemas la salida del proceso no está relacionada con la entrada o alguna acción de control, ya que esta no se cuantifica ni se realimenta para compararla con la entrada, por tanto, el lazo de control tiene una condición fija y no puede compensar ninguna perturbación externa. En la figura 4 se muestra el diagrama de bloques del sistema.

Figura 4

Sistema de control en lazo abierto.



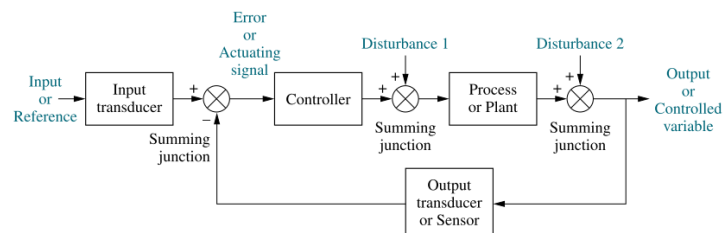
Nota. Tomado de *Sistemas de control para ingeniería* (p. 8), por Norman S. Nise, 2011.

5.2.5 Sistemas de Control en Lazo Cerrado

Estos sistemas también conocidos como sistemas realimentados se caracterizan porque se crea una nueva señal a partir de la diferencia entre la señal variable de salida y un valor deseado, conocida como señal de error. El propósito de este lazo de control es llevar esta señal de error a cero o minimizarla lo mejor posible, en este sentido se pueden corregir perturbaciones al sistema. Su diagrama de bloques se puede ver en la figura 5.

Figura 5

Sistema de control en lazo cerrado.



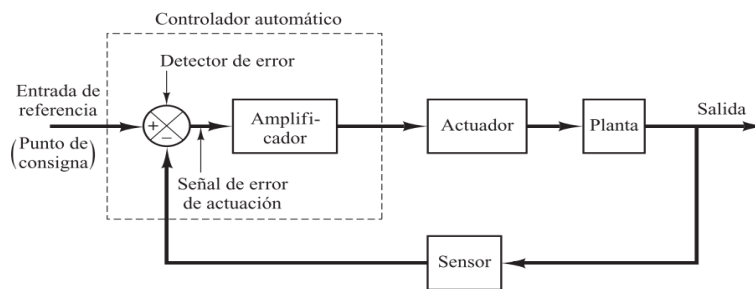
Nota. Tomado de *Sistemas de control para ingeniería* (p. 8), por Norman S. Nise, 2011.

5.2.6 Controlador Automático

Este es el encargado de minimizar el error entre la variable obtenida como salida del sistema y el valor deseado, es decir, el error del proceso, por medio de una acción de control. La figura 6 representa el diagrama de bloques general de un controlador automático.

Figura 6

Diagrama de bloques sistema de control automático



Nota. Tomado de *Ingeniería de control moderna* (p. 21), por Katsuhiko Ogata, 2010.

5.2.7 Sistemas Lineales

Se dice que un sistema es lineal si obedece el principio de superposición, esto significa que dos funciones de entradas diferentes aplicadas al mismo tiempo tienen la misma respuesta que las sumas de las dos funciones aplicadas individualmente, esto quiere decir que son proporcionales la causa y el efecto en el estudio de un sistema dinámico (Ogata, 2010).

5.2.8 Sistemas no lineales

Un sistema se considera no lineal si no obedece el principio de superposición, lo cual significa que la suma de dos entradas no es igual que la suma de cada entrada aplicada individualmente. En la práctica, muy pocos sistemas se consideran lineales, por tanto, saber cómo estudiarlos es de suma importancia a la hora de controlarlos.

5.2.9 *Linealización de modelos matemáticos*

Muchos sistemas dinámicos en su funcionamiento varían alrededor de un punto, o el sistema opera alrededor de un punto de equilibrio, en este sentido, si las señales involucradas son varían alrededor de este punto, es posible aproximar un sistema no lineal a uno lineal, dentro de un rango de operación limitado.

5.2.9.1 **Matriz Jacobiana para linealizar sistemas dinámicos no lineales**

La matriz Jacobiana es una herramienta matemática utilizada para representar la derivada de un sistema de ecuaciones no lineales con respecto a sus variables de estado, es decir es una matriz que relaciona la razón de cambio de las variables respecto los estados, por lo tanto, para linealizar un modelo, las desviaciones de las variables de estado con respecto a un punto de equilibrio deben ser pequeñas.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que describe la dinámica de un sistema:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (1)$$

Donde, x , es el vector de estados del sistema, dx/dt derivada temporal del vector de estado; u , es el vector de entrada; $f(x, u)$ función no lineal que describe la dinámica del sistema.

La matriz Jacobiana definida para un punto de equilibrio (x_e, u_e)

$$A = \left. \frac{df}{dx} \right|_{(x_e, u_e)} \quad (2)$$

df/dx , representa las derivadas parciales de f con respecto a los estados x , Evaluada en el punto de equilibrio, (Nise, 2011).

5.2.10 Sistemas de Control en Tiempo Discreto

Estos sistemas tienen como característica que una o más de sus variables puede cambiar solo en valores discretos de tiempo, siendo este intervalo lo suficientemente corto para dar una buena aproximación al comportamiento real. Los sistemas de control en tiempo discreto se diferencian de los de tiempo continuo en que las señales para los primeros están en forma de datos muestreados o en forma digital (Ogata, 1996).

Este tipo de controladores son ampliamente utilizados en la industria moderna ya que permiten llegar a una confiabilidad y precisión mejores en comparación con controladores en tiempo continuo, gracias a las computadoras digitales son más fáciles y económicos de implementar.

5.2.10.1 Transformada Z

Cuando se trabaja con sistemas de control en tiempo discreto su dinámica generalmente se modela a través de ecuaciones en diferencias y para determinar la respuesta del sistema a una entrada dada se deben resolver estas ecuaciones a través del método de la transformada z, este es un método muy efectivo porque transforma ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo en ecuaciones algebraicas en z, las cuales son más fáciles de resolver, un procedimiento similar al de la transformada de Laplace en sistemas de tiempo continuo (Ogata, 1996).

5.2.11 Función de Transferencia

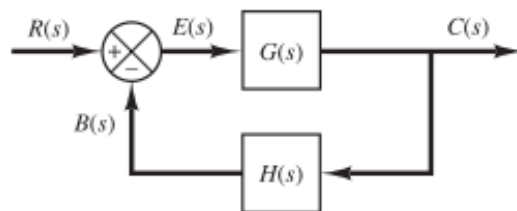
La función de transferencia caracteriza las relaciones de entrada – salida en sistemas que se modelan a través de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo. Esta se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición que las condiciones iniciales son cero. Una de las utilidades de la

función de transferencia es que se puede analizar la naturaleza del sistema a través de estudiar las respuestas para varias formas de entrada.

Ogata (2010) muestra las funciones de transferencia para lazos de control abierto, directo y cerrado, en base al diagrama de bloques mostrado en la figura 7.

Figura 7

Diagrama de bloques sistemas de control.



Nota. Tomado de *Ingeniería de control moderna* (p. 19), por Katsuhiko Ogata, 2010.

- Función de transferencia en lazo abierto

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s) \times H(s) \quad (3)$$

- Función de transferencia de trayectoria directa

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s) \quad (4)$$

- Función de transferencia de lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s) \times H(s)} \quad (5)$$

Las funciones de transferencia para sistemas discretos vienen dadas de la forma $H(z)$ donde z es una variable compleja que representa la transformada Z , que es el equivalente discreto de la transformada de Laplace en sistemas continuos.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (6)$$

Donde $Y(z)$, es la transformada Z de la salida y $U(z)$, es la transformada Z de la entrada.

5.2.12 Representación en el espacio de estados de sistemas dinámicos

5.2.12.1 En tiempo continuo

La representación en espacio de estados permite describir matemáticamente el comportamiento de un sistema dinámico, en términos de ecuaciones diferenciales de primer orden. Proporciona una visión integral de cómo evoluciona el estado del sistema y cómo se relaciona con las entradas y salidas. Se caracteriza por medio de dos ecuaciones:

Ecuación de estado para un sistema de orden n , y su ecuación de salida, respectivamente

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (8)$$

Donde: donde x , es el vector de estados; y , es el vector de salida; u es el vector de entrada; la matriz A es de estados; B , es la matriz de entrada; C , es la matriz de salida; D , es la matriz de transmisión directa, (Ogata,2010).

5.2.12.2 En tiempo discreto

La representación en espacio de estados para sistemas discretos es especialmente útil en aplicaciones de control digital, procesamiento de señales. Permite describir de manera completa y versátil sistemas dinámicos que evolucionan en intervalos discretos de tiempo.

En el análisis de sistemas dinámicos por espacio de estados se tienen en cuenta 3 tipos de variables, de entrada, de salida y de estados, además para sistemas lineales o no lineales, de tiempo discreto invariantes en el tiempo, la ecuación de estado y la variable de salida, se puede escribir respectivamente como:

$$x(k + 1) = G \cdot x(k) + H \cdot u(k) \quad (9)$$

$$y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \quad (10)$$

Donde: donde x , es el vector de estados; y , es el vector de salida; u es el vector de entrada; la matriz G es de estados; H , es la matriz de entrada; C , es la matriz de salida; D , es la matriz de transmisión directa; la presencia de la variable K en los argumentos, implica que son matrices variables con el tiempo (Ogata,1996).

5.2.13 Controlador PID

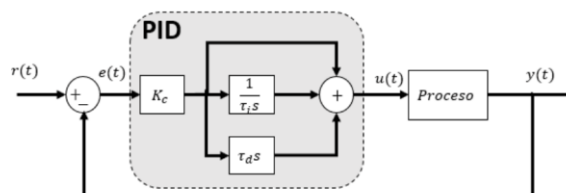
En la industria moderna los controladores del tipo PID y sus variaciones, se han vuelto muy populares por su versatilidad de uso, a continuación, se muestra una lista de los diferentes tipos:

1. De dos posiciones o controladores on-off
2. Controladores proporcionales (P)
3. Controladores integrales (I)
4. Controladores proporcionales-integrales (PI)
5. Controladores proporcionales-derivativos (PD)
6. Controladores proporcionales-integrales-derivativos (PID)

Para el desarrollo de este proyecto se empleará un controlador del tipo PID, el cual combina las acciones de control proporcional, integral y derivativo. Es un controlador versátil ya que puede, generar una corrección proporcional al error, anticiparse al comportamiento con la acción derivativa y lleva un historial del mismo gracias a la acción integral.

Figura 8

Diagrama de bloques en lazo cerrado de un controlador PID



Nota. Tomado de Sergio, C. (2019, octubre 10). *concepto básico de cómo funciona un control. Control Automático Educación.* <https://goo.su/OxHWW9>

Considerando un sistema con realimentación como el de la figura 8 un controlador PID en tiempo continuo está definido como:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (11)$$

Donde $e(t)$ es la señal de error, $u(t)$ es la entrada del controlador, K_p es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral, T_d es el tiempo derivativo.

Su función de transferencia es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (12)$$

5.2.13.1 PID discreto

Un controlador PID discreto se diseña para sistemas que operan bajo un tiempo de muestreo especificado, buscando llevar y mantener a la planta en un valor deseado, ajustando una variable manipulada, en función a tres componentes (Ogata, 1996):

1. Componente proporcional (P), directamente proporcional al error de la señal de salida con respecto al *set point*

$$P(K) = K_p \cdot e(k) \quad (13)$$

2. Componente integral (I), suma los errores pasados y los multiplica por la constante integral, ayuda a eliminar el error en estado estacionario.

$$I(k) = K_i \cdot \sum_{i=0}^k e(i) \quad (14)$$

3. Componente derivativa (D), estima la tasa de cambio del error y multiplica esta diferencia por una constante K_d , esta actúa para prevenir la acumulación excesiva de error y controlar la velocidad de cambio de la variable controlada.

$$D(k) = Kd \cdot (e(k) - e(k - 1)) \quad (15)$$

En este sentido la salida de un controlador PID discreto es la suma de sus componentes:

$$u(k) = P(k) + I(k) + D(k) \quad (16)$$

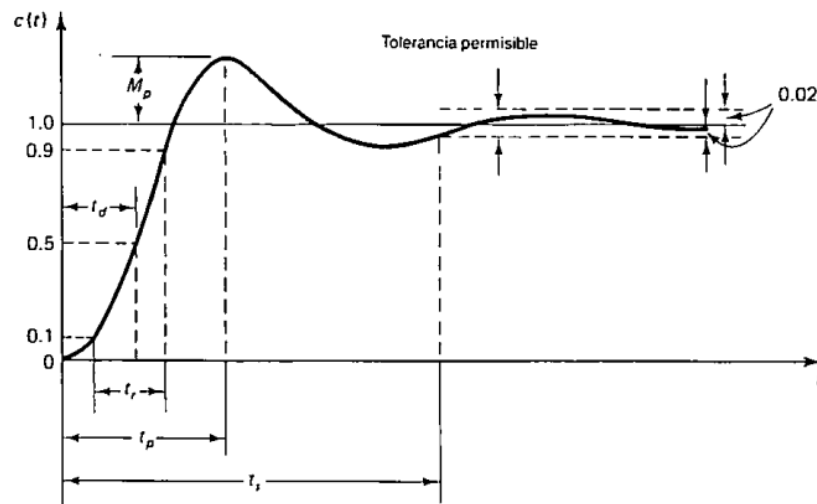
Las constantes K_p , K_i , K_d , se deben sintonizar para lograr un comportamiento adecuado y estable del controlador.

5.2.14 Especificaciones de la respuesta transitoria para un sistema de control

Las especificaciones de la respuesta en el dominio del tiempo son importantes para el diseño de un sistema de control porque caracterizan y califican la respuesta bajo unos requerimientos dados, por lo tanto, se puede decidir si es un resultado valido o no. En la figura 9 se muestra las principales especificaciones utilizadas en los sistemas control

Figura 9

Especificaciones de la respuesta transitoria en un sistema de control



Nota. Tomado de *Sistemas de control en tiempo discreto* (p. 195), por Katsuhiko Ogata, 1996.

1. Tiempo de retardo, t_d
2. Tiempo pico, t_r

3. Tiempo de levantamiento, t_p
4. Sobrepasso máximo, M_p
5. Tiempo de asentamiento, t_s

6 Metodología

El presente proyecto se desarrolla bajo una metodología de 3 fases:

6.1 Fase de inicio

Comprende la recopilación y análisis de información sobre el diseño y construcción del péndulo invertido lineal, así mismo, de su modelación matemática, simulación y control.

Actividades:

- Planteamiento de requerimientos.
- Recopilación y análisis de información.
- Selección de procesos de manufactura.

6.2 Fase de diseño

Se comienza a trabajar en el proceso de diseño a través de una matriz QFD, para luego proceder al modelado matemático y en un software CAD.

Actividades:

- Elaborar propuestas de diseño y evaluación de alternativas.
- Elección de controlador, sensores y demás componentes.
- Selección de materiales para la construcción.
- Modelado CAD del prototipo final.

- Modelado matemático del comportamiento del banco.

6.3 Fase de construcción

Actividades:

- Manufactura y mecanizado de las piezas.
- Adquisición y preparación de componentes.
- Ensamblaje de las partes.
- Diseño de controlador PID.
- Pruebas de simulación y control del péndulo.
- Desarrollar material de apoyo académico que vincule los componentes prácticos del banco péndulo invertido lineal, al contenido de la materia Ingeniería de Control.

7 Diseño conceptual

7.1 Despliegue de La Función Calidad

Para lograr el objetivo principal de este proyecto, un péndulo invertido como herramienta pedagógica, se comienza el proceso de diseño evaluando las necesidades del cliente, en este caso la Escuela de Ingeniería Mecánica de la UIS, estas se comparan con los requisitos de diseño del elemento a construir, estos resultados se utilizan como evaluadores de las diferentes alternativas propuestas con base en los requerimientos establecidos. Por tal motivo, a continuación, se desarrollará una matriz *QFD* (*Quality Function Deployment*) por medio de la cual se llegará a un diseño óptimo que satisfaga las necesidades planteadas en este proyecto.

7.1.1 Tipos de subsistemas

Como estrategia de diseño se dividirá el sistema completo del péndulo invertido en diferentes subensambles/componentes, lo cual permitirá evaluar las alternativas de construcción de una manera más practica y sencilla.

Subsistema Estructura:

- Bases y soporte de los elementos del equipo.
- Elementos de sujeción del banco a la mesa de laboratorio.

Subsistema Desplazamiento:

- Perfil de recorrido del carro y carro móvil.
- Poleas y correa.
- Motor eléctrico.
- Péndulo.

Subsistema de control:

- Controlador Arduino Due.
- Controlador de motor, puente H.

Subsistema de lectura y recolección de datos:

- Encoder motor.
- Encoder péndulo.

7.1.2 Requerimientos de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la UIS

En esta sección se establecen los requerimientos que debe cumplir el banco de laboratorio:

- Un banco de laboratorio útil para la ejecución practica de la temática de la materia ingeniería de control. (Funcionabilidad)

- Sistemas y mecanismos de uso seguro para estudiantes, profesores y demás usuarios. (Seguridad)
- De fácil manejo.
- Conectividad con un software de recolección y simulación de datos como Matlab-Simulink. (Conectividad).
- Disponibilidad y mantenibilidad del equipo óptimas para un uso académico. (Fácil mantenimiento).

7.1.3 *Matriz de Calidad Mecanismo Péndulo Invertido*

A continuación, se presenta la matriz de calidad hecha, fundamentada en los requerimientos de la Escuela de Ingeniería Mecánica (tabla 1), organizados de mayor a menor relevancia de forma vertical y los subsistemas implementados para el diseño del banco, listados de manera horizontal.

La evaluación de esta matriz busca encontrar cuales subsistemas tienen mayor relevancia para el diseño del banco, con base en las necesidades de la escuela, por tal motivo se comparan uno a uno cuantificando su grado de relación con los siguientes valores:

- 0, no hay relación.
- 1, baja relación.
- 3, relación media.
- 6, alta relación.

Tabla 1

Matriz de calidad QFD subsistemas.

SUBSISTEMAS	PRIORIDAD	SUB. ESTRUCTURA		SUB. DESPLAZAMIENTO		SUB. CONTROL Y SIMULACIÓN		SUB. LECTURA Y RECOLECCION DE DATOS		SUB. SUJECIÓN	
REQUERIMIENTOS											
FUNCIONABILIDAD	6	6	36	6	36	6	36	6	36	6	36
SEGURIDAD	5	6	30	6	30	3	15	1	5	6	30
CONECTIVIDAD	4	3	12	1	4	6	24	6	24	0	0
FACIL MANEJO	3	6	18	6	18	6	18	6	18	1	3
FACIL MANTENIMIENTO	2	6	12	6	12	3	6	3	6	6	12
BUEN ASPECTO	1	6	6	6	6	3	3	3	3	6	6
Totales			<u>114</u>		<u>106</u>		<u>102</u>		92		87

Se concluye de la matriz que los subsistemas más relevantes para el diseño son el de estructura, desplazamiento, simulación y control, con las siguientes ponderaciones:

Tabla 2

Resultado matriz QFD subsistemas.

N.	SUBSISTEMAS	PONDERACIÓN
1	Sub. estructura	23%
2	Sub. desplazamiento	21%
3	Sub. control y simulación	20%

El siguiente paso es evaluar para los subsistemas de la tabla 2, cuales características de diseño son más importantes en relación con los requerimientos establecidos, esto se logra a partir de una matriz QFD para cada uno de ellos.

7.1.4 QFD Para los Subsistemas con Mayor Relevancia

7.1.4.1 QFD subsistema estructura

Tabla 3

QFD subsistema estructura.

REQ. DE DISEÑO	PRIORIDAD	FUNCIONABILIDAD		RESISTENCIA AL DESGASTE		BAJO COSTO		BAJO PESO		OPERACIÓN SEGURA	
REQ. ESCUELA											
FUNCIONABILIDAD	6	6	36	3	18	1	6	1	6	3	18
SEGURIDAD	5	3	15	3	15	3	15	1	5	6	30
CONECTIVIDAD	4	0	0	0	0	1	4	1	4	0	0
FACIL MANEJO	3	3	9	0	0	1	3	1	3	3	9
FACIL MANTENIMIENTO	2	3	6	6	12	3	6	3	6	3	6
BUEN ASPECTO	1	3	3	3		6	6	3	3	3	3
Totales			69	48		40		27		66	

Analizando los resultados obtenidos, en la tabla 4 se muestran los requerimientos más determinantes para el diseño.

Tabla 4

Resultados QFD subsistema estructura.

N°	REQ. DE DISEÑO	PONDERACIÓN
1	Funcionabilidad	28%
2	Operación segura	26%
3	Resistencia al desgaste	19%

Para la parte estructural del sistema, se concluye que su buena funcionabilidad es un parámetro crítico en el diseño del mecanismo, seguido por que sea una operación segura para el usuario y por último que tenga una buena resistencia al desgaste.

7.1.4.2 QFD subsistema de desplazamiento

Tabla 5

QFD subsistema de desplazamiento.

REQ. DE DISEÑO	PRIORIDAD	RESISTENCIA AL DESGASTE		BAJO COSTO		OPERACIÓN SEGURA		FACIL MANTENIMIENTO		CONFIABILIDAD	
REQ. ESCUELA											
FUNCIONABILIDAD	6	6	36	3	18	3	18	3	18	6	36
SEGURIDAD	5	1	5	6	30	6	30	3	15	1	5
CONECTIVIDAD	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
FACIL MANEJO	3	3	9	1	3	3	9	3	9	1	3
FACIL MANTENIMIENTO	2	6	12	3	6	3	6	6	12	3	6
BUEN ASPECTO	1	1	1	3	3	3	3	3	3	1	1
Totales			63		60		66		57		51

Analizando los resultados obtenidos, en la tabla 6, se muestran los requerimientos más determinantes para el diseño.

Tabla 6

Resultados QFD subsistema de desplazamiento

N°	REQ. DE DISEÑO	PONDERACIÓN
1	Operación segura	22%
2	Resistencia al desgaste	21%
3	Bajo costo	20%

En el subsistema de desplazamiento, ofrecer una operación segura es el requerimiento más sobresaliente a tener en cuenta en el diseño final, así mismo una buena resistencia al desgaste y un bajo costo en el margen de lo permitido por los requerimientos.

7.1.4.3 QFD subsistema de control y simulación

Tabla 7

QFD subsistema de control y simulación.

REQ. DE DISEÑO	PRIORIDAD	FACIL OPERACIÓN		FACIL MANTENIMIENTO		CAPACIDAD DE PROCESAMIENTO		PRECISION Y EXACTITUD		BAJO COSTO	
REQ. ESCUELA											
FUNCIONABILIDAD	6	6	36	3	18	6	36	6	36	3	18
SEGURIDAD	5	3	15	3	15	1	5	1	5	3	15
CONECTIVIDAD	4	1	4	1	4	6	24	6	24	3	12
FACIL MANEJO	3	6	18	3	9	3	9	1	3	3	9
FACIL MANTENIMIENTO	2	6	12	6	12	1	2	0	0	3	6
BUEN ASPECTO	1	6	6	1	6	0	0	0	0	3	0
Totales			91		64		76		68		60

Analizando los resultados obtenidos, en la tabla 8, se muestran los requerimientos más determinantes para el diseño.

Tabla 8

Resultados QFD subsistema de control y simulación.

N°	REQ. DE DISEÑO	PONDERACIÓN
1	Fácil operación	25%
2	Capacidad de procesamiento	21%
3	Precisión y exactitud	19%

En el subsistema de control y simulación, la fácil operación es un criterio importante en el uso que se le va a dar a sistema, ya que es un ambiente académico y debe ser lo más claro posible, el segundo parámetro para tener en cuenta, es contar con una muy buena capacidad de

procesamiento en el controlador ya que le da una mejor resolución a la señal de respuesta, por lo tanto un comportamiento preciso, esto va de la mano con el tercer ítem a tener en cuenta, la precisión y exactitud de los controladores y se tendrá en cuenta a la hora de diseñar el controlador PID en tiempo discreto.

7.2 Planteamiento de Alternativas

Con base en los criterios de diseño, se presentan varias alternativas para cada uno de los subsistemas en lo que fue dividido el banco de laboratorio, teniendo en cuenta los requisitos planteados en las matrices QFD anteriormente vistas, para luego proceder a un proceso de evaluación y selección de las más adecuadas.

7.2.1 Alternativas subsistema estructura.

Este subensamble está compuesto por las bases y soportes para los diferentes componentes del banco, es decir sensores, riel de desplazamiento, motor, controladores, así mismo hacen parte del subensamble los mecanismos para sujetar todo el sistema a las mesas de laboratorio donde será instalado, por lo tanto, se contemplan las siguientes alternativas:

7.2.1.1 Alternativa 1, Ensamble con ángulo metálico – prensa manual de resorte.

Para esta alternativa se utiliza un ángulo de acero de 2 pulgadas como en la figura 10 (a), el cual es mecanizado y unido por tornillos para darle la forma y dimensiones necesarias para construir dos plataformas base que soportaran algunos de los componentes del banco, además del sistema móvil, estas bases a su vez están ancladas a la mesa del laboratorio a través de dos prensas manuales de resorte como la de la figura 10 (b) , estas van ubicadas sobre la superficie plana de las bases sujetándolas al borde de la mesa.

Figura 10*Componentes subsistema estructura alternativa 1*

Nota. a). Angulo metálico 2 de in. Tomado de Slotted Angle. (s/f). Lkgoodwin.com. b). Prensa manual de resorte. Adaptado Catálogo de productos 2019 Colombia. (s/f).

7.2.1.2 Alternativa 2, Estructura impresa en 3D – Prensa sargento

Para esta alternativa se toman las dimensiones de los elementos del banco y con estas se diseña un modelo preciso en un software de simulación como SolidWorks, que se adecua a las medidas y geometrías que se necesitan en los soportes. Luego de tener un modelo apropiado, bajo una técnica de impresión 3D se obtiene un modelo en físico de las bases soporte del sistema, como se puede ver en la figura 11 (a). Para la sujeción y estabilidad se utilizan prensas sargento, como se ven en la figura 11 (b) unidas al banco en la parte plana de las bases y al borde de la mesa de laboratorio.

Figura 11*Componentes subsistema estructura alternativa 2*

Nota. a). bases del banco impresas en 3D. b). Prensa tipo sargento.

7.2.2 Alternativas subsistema desplazamiento.

Este subsistema contiene la transmisión del mecanismo conformada un motor eléctrico, dos poleas y una correa dentada a la que esta adherido un carro móvil, que se mueve solidario a la misma. Este carro móvil, él cual tiene instalado el péndulo se desplaza sobre un riel que marca la trayectoria y los límites del movimiento.

7.2.2.1 Alternativa 1: Guía lineal HIWIN – Motor eléctrico con encoder – transmisión polea correa.

Este armado consiste en utilizar una guía lineal HIWIN como la mostrada en la figura 12 (a), la cual va posicionada sobre las bases del subsistema de estructura, sobre el carro móvil va instalado el péndulo con su respectivo encoder de ángulo giratorio. El movimiento lineal será otorgado por una transmisión de poleas de igual diámetro como la mostrada en la figura 12 (c) que está conectada al carro y será accionada por un motor eléctrico de 12 [V] con encoder incorporado de resolución de 64 P/R (pulsos por rotación) como el de la figura 12 (b).

Figura 12

Componentes subsistema desplazamiento alternativa 1

a).



b).



c).



Nota. a). Guía lineal HWIN. Tomado de Técnico, C. (s/f). Bolas y Rodillos. b). Motor eléctrico con encoder incorporado. c). Transmisión por poleas. Tomado de Hiwinmectrol.com.

7.2.2.2 Alternativa 2: Guía lineal de bloque con transmisión piñón cremallera – motor eléctrico con encoder.

Para este modelo se utiliza una guía lineal de soporte con un rodamiento de bloque lineal abierto, en donde se instala el péndulo invertido con su respectivo encoder angular. Este carro móvil tiene dos puntos de apoyo, uno el anteriormente dicho y el otro estará en el sistema de tracción, un mecanismo piñón cremallera, articulado a un motor eléctrico con encoder de 12 [V] que dará el torque necesario para el desplazamiento del péndulo, como el mostrado en la figura 13.

Figura 13

Componentes subsistema desplazamiento alternativa 2.



Nota. Este es un mecanismo preensamblado comercializado por la empresa Quanser. Tomado de Quanser. (s/f). *Linear Servo base unit with inverted pendulum - quanser.* <https://goo.su/Me4Tr>

7.2.2.3 Alternativa 3: Motor eléctrico 12[V] – Transmisión por poleas y correa – Perfil aluminio OB2020V con carrito móvil V-Slot.

En esta alternativa la guía lineal es un kit de desplazamiento V-Slot, el cual es un perfil de aluminio OB2020V con un carrito móvil como el mostrado en la figura 14 (a) el cual es accionado a través de una transmisión poleas del mismo diámetro y correa, la cual está unida al carrito y se mueve en forma solidaria con él, como se observa en la figura 14 (b). El torque para mover el sistema será proporcionado por un motor eléctrico de 12 [V] de corriente continua sin encoder, dado que este implementa por separado conectado a la polea conducida.

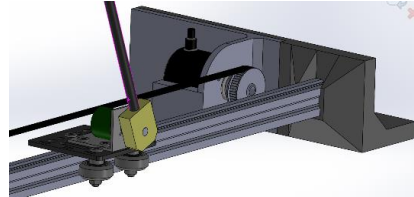
Figura 14

Componentes subsistema desplazamiento alternativa 3

a).



b).



Nota. a). Conjunto carro móvil y riel V-slot. Tomado de (s/f). Naylampmechatronics.com. b)

Modelado tridimensional del subsistema de desplazamiento para la alternativa 3.

7.2.3 Alternativas subsistema simulación y control.

El subsistema de control es uno de los más importantes del banco de laboratorio porque se encarga de cumplir el objetivo principal del sistema, el cual es mantener un péndulo en equilibrio por medio de unas técnicas de control establecidas, aplicadas a través de un microcontrolador en un lenguaje de programación compatible. Otro elemento importante de este subsistema para el correcto funcionamiento del banco es el control del motor eléctrico, que no puede hacerse directamente con el microcontrolador anteriormente nombrado dado que maneja un voltaje menor al del motor, por lo tanto, se plantean las siguientes alternativas:

7.2.3.1 Alternativa 1: Arduino MEGA 2560 – Modulo relevador.

Esta propuesta comprende utilizar un Arduino MEGA 2560 con un microcontrolador ATMEGA2560 figura 15(b) como microcontrolador, para recibir y procesar los datos provenientes de los sensores del equipo, ya que tiene una buena capacidad de memoria y procesamiento. Así mismo para el control de velocidad y sentido del motor se utiliza como pre actuador un módulo relevador como el mostrado en la figura 15 (a) el cual es un dispositivo electromagnético que

funciona como un interruptor controlado por un circuito eléctrico en el que se acciona un juego de uno o varios contactos que permiten abrir o cerrar otros circuitos eléctricos independientes.

Figura 15

Componentes subsistema simulación y control alternativa 1

a).



b).



Nota. a). Modulo relevador 2 canales. Tomado de UAEH. (s/f). *Módulo Relé*. Edu.mx.

<https://goo.su/XvCDOh> b). Arduino Mega2560. Tomado de *Arduino Mega 2560 Rev3*. (s/f).

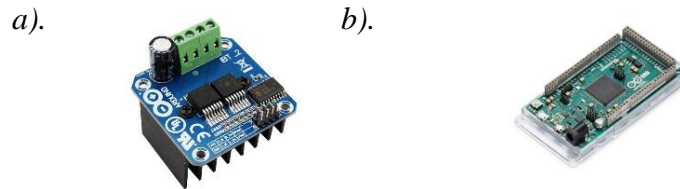
Arduino Online Shop. <https://goo.su/A3goZ9>

7.2.3.2 Alternativa 2: Arduino DUE – Puente H BTS7960

Para esta alternativa se selecciona un Arduino DUE, figura 16 (b) con un microprocesador AT91SAM3X8E, esta placa recibe y procesa mediante técnicas de control preestablecidas los datos de entrada provenientes de los sensores del péndulo y motor. Como pre actuador se utiliza un puente H, figura 16 (a), encargado del control del actuador principal, un motor eléctrico de 12 [V], este dispositivo cuenta con un protector ante sobre calentamiento y sobre corriente además de un aislador que permite separar el circuito de control de la parte de potencia para mantener la integridad del dispositivo, puesto que este controlador puede llegar a generar una corriente de hasta 43A.

Figura 16

Componentes subsistema simulación y control alternativa 2.



Nota. a). Puente H. Adaptado de Módulo puente H BTS7960 de 43A (vistronica.com). b). Arduino DUE. Adaptado de Arduino Due — Arduino Online Shop.

7.3 Evaluación de Alternativas

Luego de haber precisado las alternativas para cada subsistema el siguiente paso es evaluarlas, para esto se utilizan los tres parámetros de diseño más influyentes con relación a los requisitos establecidos para cada subconjunto, estos son los resultados de las matrices QFD anteriormente vistas. Para esta evaluación se utiliza una ponderación de 1 a 5, siendo 1 la mínima calificación y 5 la más alta, en la tabla 9, 10, 11 se pueden observar los resultados.

Tabla 9

Resultados alternativa ganadora subsistema estructura.

SUB. SISTEMA ESTRUCTURA					
Criterios de selección		Alter. 1		Alter. 2	
PARÁMETROS	Ponderación	C	P	C	P
Funcionabilidad	28%	4	1.12	5	1.4
Resistencia al desgaste	19%	4	0.76	4	0.76
Bajo costo	16%	2	0.32	4	0.64
RESULTADOS		2.2		2.8	
CLASIFICACIÓN		2		<u>1</u>	

Nota. C: Calificación P: Puntuación

Según el proceso anteriormente realizado la alternativa ganadora para el subsistema de estructura es la numero 2, estructura impresa en 3D – prensa sargento.

Tabla 10*Resultados alternativa ganadora subsistema desplazamiento*

SUB. SISTEMA DESPLAZAMIENTO							
Criterios de selección		Alter. 1		Alter. 2		Alter. 3	
PARÁMETROS	Ponderación	C	P	C	P	C	P
Operación segura	23%	5	1.15	4	0.92	5	1.15
Resistencia al desgaste	22%	4	0.88	4	0.88	4	0.88
Bajo costo	16%	2	0.32	2	0.32	4	0.64
RESULTADOS		2.35		2.12		2.67	
CLASIFICACIÓN		2		3		<u>1</u>	

Nota. C: Calificación P: Puntuación

Según el proceso anteriormente realizado la alternativa ganadora para el subsistema desplazamiento es la numero 3, motor eléctrico 12[V] – transmisión por poleas y correa – perfil aluminio OB2020V con carrito móvil V-Slot.

Tabla 11*Resultados alternativa ganadora subsistema simulación y control.*

SUB. SISTEMA SIMULACIÓN Y CONTROL					
Criterios de selección		Alter. 1		Alter. 2	
PARÁMETROS	Ponderación	C	P	C	P
Fácil operación	25%	5	1.25	5	1.25
Capacidad de procesamiento	21%	4	0.84	5	1.05
Fácil mantenimiento	18%	4	0.72	5	0.9
RESULTADOS		2.81		3.2	
CLASIFICACIÓN		2		<u>1</u>	

Nota. C: Calificación P: Puntuación

Según el proceso anteriormente realizado la alternativa ganadora para el subsistema simulación y control es la numero 2, Arduino DUE – Puente H BTS7960.

7.4 Especificación de Alternativa Ganadora

Después de realizar un proceso metodológico de selección de alternativas para los subsistemas más críticos del banco a través de diferentes matrices de calidad, se llega a un diseño óptimo que cumple con las necesidades y requisitos establecidos en este plan, el cual se compone de:

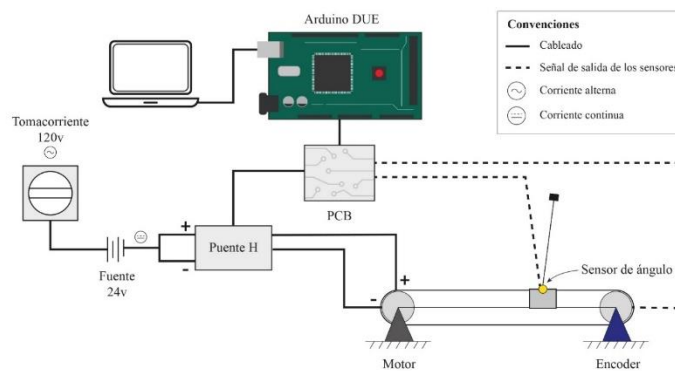
La parte estructural del banco se compone de dos bases diseñadas a medida e impresas en 3D, las cuales son el soporte para un riel de aluminio V-Slot de un metro de longitud dispuesto en medio de ambas plataformas, así mismo estas cuentan con cavidades para dar soporte a elementos como un motor eléctrico de 12 [V], un encoder rotativo de 2000 P/R, y el sistema de polea correa. Para darle soporte al banco, sus bases están acopladas a la mesa a través de dos prensas sargento que mantienen al banco estable con respecto a la mesa de laboratorio. La transmisión del movimiento se da a través de un sistema polea correa, ambas poleas del mismo diámetro de referencia 2GT de 48 dientes y eje de 5 mm, unidas por una correa de distribución abierta de 6 mm de ancho, esta correa a su vez va integrada a un carro móvil V-Slot que desliza en el riel. Sobre el carro va montado el sistema péndulo y sensor de ángulo giratorio, ambos sensores el del motor y péndulo van conectados por cables a la placa principal un Arduino DUE, microcontrolador principal del banco, encargado de recibir y procesar los datos de entrada provenientes de los sensores. Por medio de técnicas de control preestablecidas se dirige el sentido y revoluciones del motor eléctrico, a través del puente H, este pre actuador trae la energía al motor de una fuente externa. La simulación de los resultados obtenidos se hace a través de la interfaz de Matlab-Simulink, en donde se puede realizar la programación del lazo de control y modificación de este si es necesario.

7.5 Diseño electrónico

Como parte del diseño conceptual se presenta en figura 17 un diagrama de conexiones entre los diferentes periféricos que componen el banco péndulo invertido. Dado que son varios, surge la necesidad de diseñar una placa de circuitos impresa, por sus siglas en inglés PCB, en donde se integra la señal de salida de los sensores, el controlador Arduino, el circuito de potencia a través del puente H, además de diferentes elementos electrónicos como reguladores de voltaje, condensadores, para hacer las conexiones de una forma práctica, segura y confiable.

Figura 17

Diagrama esquemático del circuito electrónico



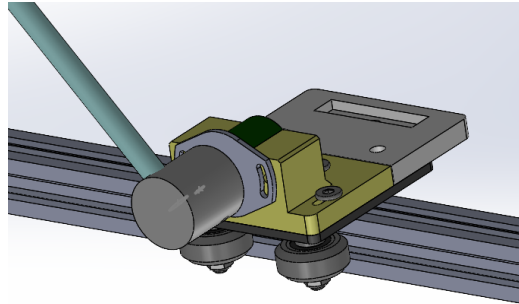
8 Diseño en Detalle

8.1 Descripción del Banco

El banco de laboratorio péndulo invertido lineal está constituido por una varilla de aluminio de 8 mm de diámetro y 40 cm de largo, con un contrapeso aproximado de 50 g anclado en un extremo, esta barra está articulada con un grado de libertad a un carro móvil del tipo V-slot, este carro está acondicionado con un sensor de ángulo rotativo P3022 CW 360, como se muestra en la figura 18 y puede moverse en línea recta en ambos sentidos.

Figura 18

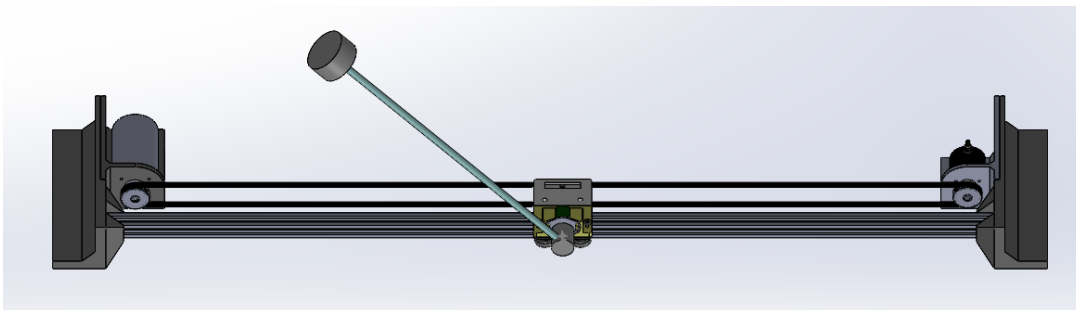
Carro móvil base del péndulo invertido



El subsistema carro móvil está acoplado a un riel V-slot OB 2020 de 1 m de longitud, este riel está soportado en dos bases diseñadas a medida e impresas en 3D, un extremo está acondicionado para soportar un motor eléctrico de 12 V y el otro extremo contiene un encoder incremental de 2000 pulsos por revolución (P/R), como se puede ver en la figura 19. Estos subsistemas conforman el péndulo invertido el cual se fija a una mesa de laboratorio por medio de prensas manuales.

Figura 19

Modelado CAD péndulo invertido.



Este banco de laboratorio va a estar controlado por un microcontrolador Arduino Due por medio de una placa de circuito impreso (PCB) especialmente diseñada para conectar el controlador, actuadores y sensores. Para la alimentación de energía al actuador principal, se utiliza

una fuente de voltaje de 24v. A continuación, se presentará la documentación de las partes más importantes del banco.

8.1.1 *Funcionamiento del Banco*

El objetivo principal del péndulo invertido es mantener la barra erguida a 90° medidos desde la horizontal, esto se logra aplicando una fuerza de control al carro móvil, la cual lo desplaza únicamente de derecha a izquierda o viceversa en el rango de acción del riel, esta fuerza viene transmitida desde un motor eléctrico por una transmisión de banda dentada flexible.

En este banco de laboratorio se implementan dos sensores, el primero un encoder rotativo encargado de medir la posición del motor y por lo tanto la posición del carro móvil, el segundo sensor que esta sobre la base del péndulo es el encargado de medir el ángulo en el que se encuentra la barra en cada momento. Estos sensores van conectados a la placa de circuitos al igual que el actuador (motor eléctrico), el controlador (Arduino Due) y la fuente de energía, en conjunto estos elementos dan control al péndulo invertido lineal.

8.1.2 *Descripción de los principales componentes*

8.1.2.1 *Motor eléctrico.*

Un motor eléctrico es el encargado de transformar energía eléctrica a energía mecánica de rotación, existen dos tipos de corriente continua y de corriente alterna. Los motores alimentados con corriente continua funcionan gracias a interacciones entre campos eléctricos y campos magnéticos variables en el tiempo, lo que resulta en el par necesario para generar energía mecánica.

Para el caso de este proyecto se utilizó un motor de corriente continua con escobillas de la marca Buhler DC Motor 51 x 88 como lo muestra la figura 20 este es un motor de 12 – 24 V y tiene un torque máximo de 15 N*cm a 3000 rpm.

Figura 20

Motor CC de 12 V marca Buhler



Nota. Tomado de Catalogo de motores Buhler (P.2)

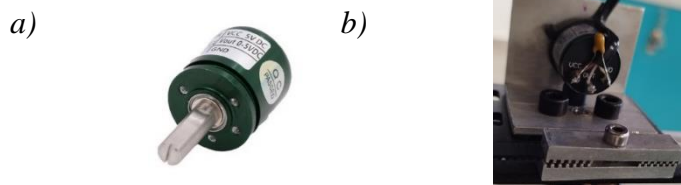
8.1.2.2 Sensor de ángulo P3022

Para este proyecto se utilizan dos sensores de ángulo, el primero es el de referencia P3022 como lo muestra la figura 21 (a) este es un sensor giratorio de 0 a 360 grados, y funciona bajo el principio de inducción magnética convirtiendo el ángulo que gira el eje principal en una señal eléctrica de 0 a 5V.

Su conexión a la placa de circuitos es sencilla, se conectan sus polaridades como se muestra en la figura 21 (b), con un condensador de tantalio, que tiene como finalidad reducir el ruido de la señal.

Figura 21

Conexión Sensor de ángulo P3022



Nota. a) sensor de ángulo. b) Conexión sensor de ángulo.

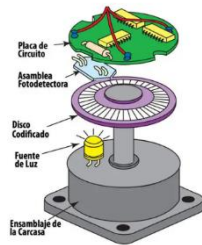
8.1.2.3 Enconder incremental

El segundo sensor es un encoder rotativo incremental de la marca OMRON con referencia E6B2-CWZ3E este sensor es del tipo óptico, al igual que el anterior convierte la energía mecánica de la rotación de su eje en una señal de tipo eléctrico en forma de pulsos. En la figura 22 (a) se pueden ver sus partes componentes, el encoder contiene un eje rotatorio que está unido a un disco codificado con franjas claras y oscuras, a sus vez también posee un emisor de luz infrarroja que apunta al disco el movimiento, estos dos elementos generan una señal codificada por las aberturas de disco, y es leída por el sensor óptico fotorreceptor. Estas señales son transformadas por la placa de circuitos en señales de salida del tipo cuadrado como se ve en la figura 22 (b) las cuales caracterizan el movimiento rotacional al que este sometido en encoder.

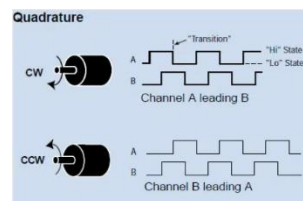
Figura 22

Enconder incremental

a).



b).



c).



Nota. a). Despliegue de partes encoder incremental. b). Señales de salida del encoder. c). encoder rotativo incremental de la marca OMRON E6B2-CWZ3E. Tomado de R., J. L. (2018, enero 4). *ENCODER. ComoFunciona*. <https://como-funciona.co/un-encoder/>

8.1.2.4 Arduino DUE

Arduino Due, El controlador principal de este banco de laboratorio, ver figura 23, de la familia Arduino son controladores ampliamente utilizados desde aplicaciones sencillas a

aplicaciones más complejas por su facilidad de uso y programación didáctica. En este caso es el encargado de recibir las señales provenientes de los diferentes sensores del banco y a través de técnicas de control digital manejar el actuador principal a través de un circuito de potencia y darle un equilibrio estable al péndulo.

Figura 23

Arduino DUE



El Arduino Due es una placa de microcontrolador basada en la CPU Atmel SAM3X8E ARM Cortex-M3. Es la primera placa Arduino basada en un microcontrolador de núcleo ARM de 32 bits. Es una placa donde sus entradas y salidas funcionan a 3.3 [v]. Tiene 54 pines digitales de entrada/salida (de los cuales 12 se pueden utilizar como salidas PWM), 12 entradas analógicas, 4 UART (puertos serie de hardware), un reloj de 84 MHz, una conexión compatible con USB OTG, 2 DAC (digital a analógico), 2 TWI, un conector de alimentación, un cabezal SPI, un encabezado JTAG, un botón de reinicio y un botón de borrado ([Arduino Due — Tienda online de Arduino](#)).

8.1.2.5 Puente H (BTS7960)

Puente H, ver figura 24 (a), es un circuito utilizado para controlar el sentido de giro de un motor de corriente continua, Si se cierran los interruptores 1 y 4, el positivo estará conectado al lado izquierdo del motor y el negativo al otro lado. Y el motor comenzará a girar en una dirección. Si en cambio se cierran los interruptores 2 y 3, el positivo estará conectado al lado derecho y el negativo al lado izquierdo. Y el motor gira en sentido contrario. Este principio de funcionamiento esta implementado en un controlador de motor BTS7960 como se ve en la figura 24 (b), está

diseñado para motores de CC de alta potencia y unidades de solenoides. La interconexión de este controlador de alta corriente con Arduino, PIC y AVR es extremadamente fácil. Este módulo de controlador le permite controlar un motor de CC con una corriente tan alta como 43 A. La frecuencia máxima de operación es de hasta 25 kHz. (Moviltronics, 2023).

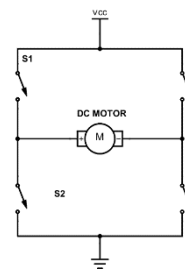
Figura 24

Driver puente H BTS7960

a).



b).



Nota. a). *Módulo puente H BTS7960 de 43A* tomado de vistronica.com. b). *Circuito puente H para controlar la dirección de giro de un motor.* Tomado de cursos.mcielectronics.cl

8.1.2.6 Circuito Impreso (PCB)

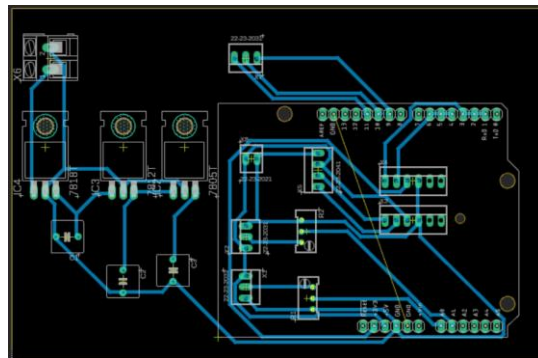
Esta placa circuito permite interconectar los diferentes periféricos del banco en un circuito de control de baja potencia, y un circuito de accionamiento del motor por medio del puente H.

La señal de salida de los sensores se conecta a los pines analógicos del Arduino Due, por medio de la PCB que los transforma en una señal a una intensidad que pueda leer, dado que este está diseñado para voltajes no mayores a 3.3[v]. De los pines digitales del Arduino sale la señal de control PWM para el motor, también a través de esta PCB hacia al puente H que a su vez manda el voltaje correspondiente al motor, por lo tanto, esta placa se configura para consolidar una transferencia de datos optima y confiable.

El diseño de la PCB parte de su construcción esquemática, que se hace en base a las necesidades de funcionamiento del banco, en donde se escogen y organizan los componentes necesarios para conducir, y transformar las señales de control, para luego a través de un software como Eagle de Autodesk diseñar el circuito impreso con sus conexiones como se muestra en la figura 25.

Figura 25

Modelo del circuito impreso



8.1.2.6.1 Componentes PCB

4. Condensadores de tantalio
5. Reguladores de voltaje LM7818, LM7812, LM7805
6. Moles y cables de conexión
7. Trimer 2k y 5k
8. Modulo conversor de nivel lógico 5v a 3.3v.
9. Regleta de pines de conexión

Por último, se sueldan todos los componentes preestablecidos y se incorpora en el banco de laboratorio.

8.2 Modelado del péndulo invertido en SolidWorks

Con la información recopilada, análisis y proceso de diseño se procede a modelar un prototipo en un software CAD tal como SolidWorks, su modelado final se muestra en la figura 26, 27, 28 y 29.

Figura 26

Modelo 3D Péndulo Invertido Lineal (vista isométrica)

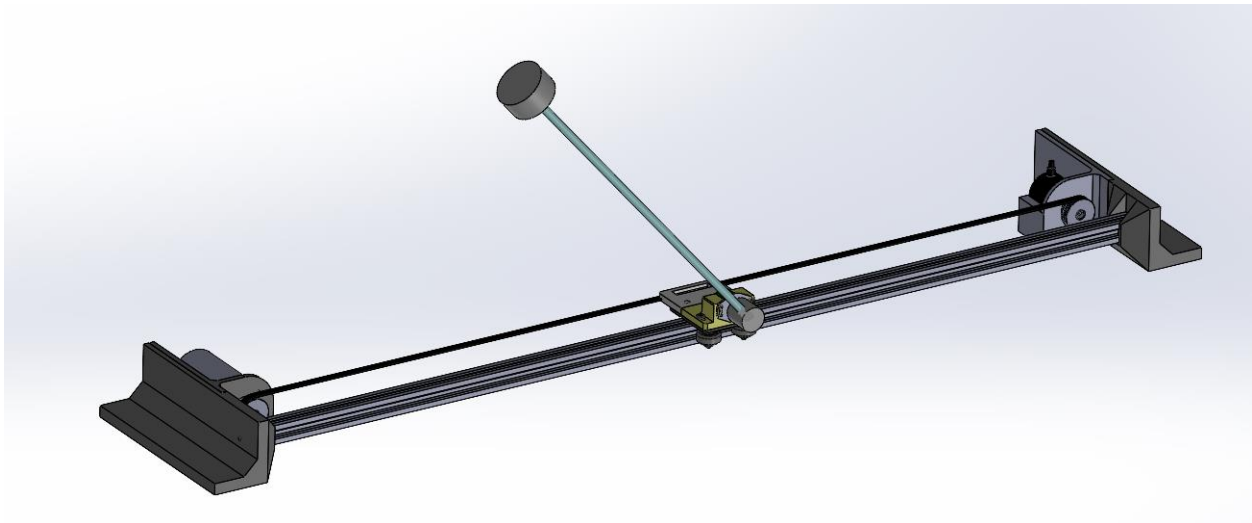


Figura 27

Vista isométrica en corte lado encoder

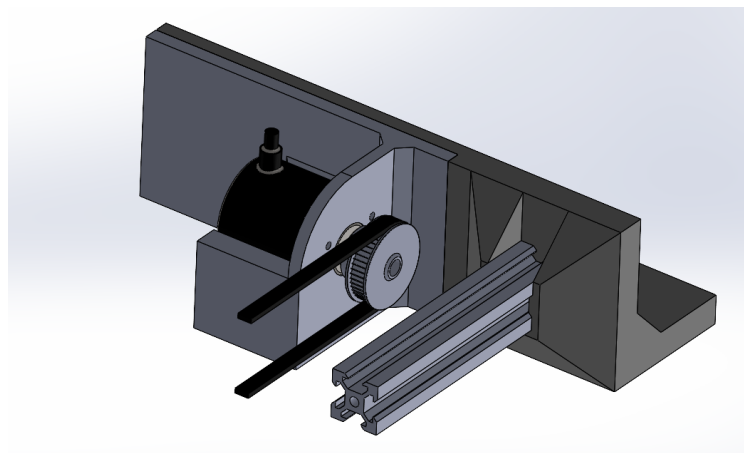
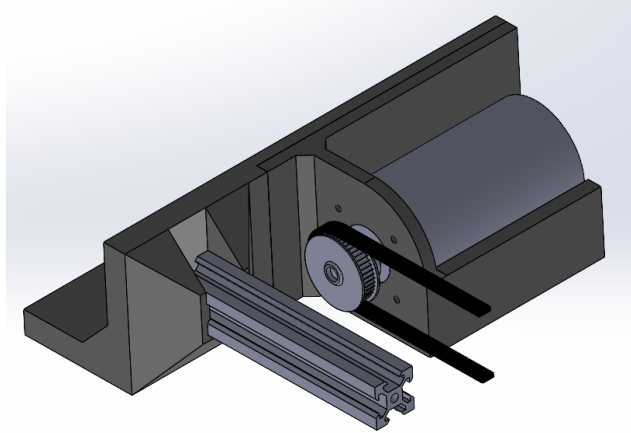
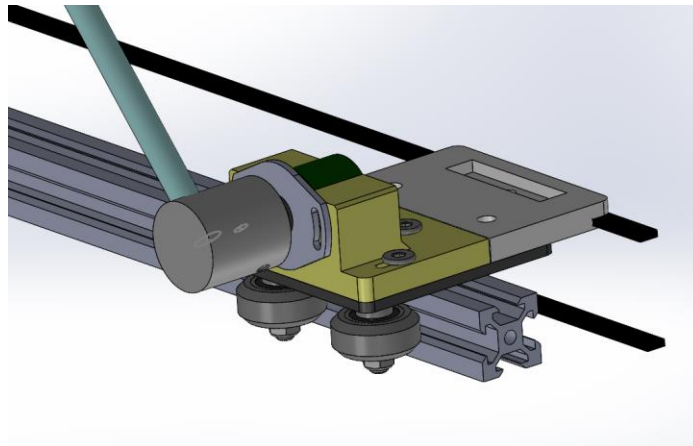


Figura 28

Vista isométrica en corte lado motor.

**Figura 29**

Vista isométrica en corte, carro móvil



Luego de obtener el modelo en 3D, ya se tiene una idea clara de cómo quedará el prototipo, por tanto, se procede a hacer la compra de los componentes, piezas, elementos de sujeción necesarios para la construcción del banco de laboratorio. Los planos de las piezas para mecanizado y modelo se encuentran en el apéndice C.

8.2.1 Piezas en impresión 3D

Para las piezas en impresión 3D, se utilizan los modelos CAD de las bases del banco para el motor y enconder, así mismo también se imprime el soporte para el péndulo en el carro móvil. Las piezas finales se muestran en la figura 30.

Figura 30

Piezas soporte del banco impresas en 3D.



9 Construcción del Prototipo

9.1 Estructura

La construcción de prototipo final se basó en la metodología planteada en la sección 6. Luego de la adquisición de piezas, se procede a imprimir los modelos finales de las piezas diseñadas en SolidWorks, y construir el banco. La barra del péndulo y su contrapeso mecanizaron en aluminio, en base a las medidas del diseño.

Luego de algunas correcciones de acabados y medidas, en la figura 31 se muestra el banco de laboratorio terminado, así como sus conexiones eléctricas y circuito de control.

Figura 31

Banco péndulo invertido lineal

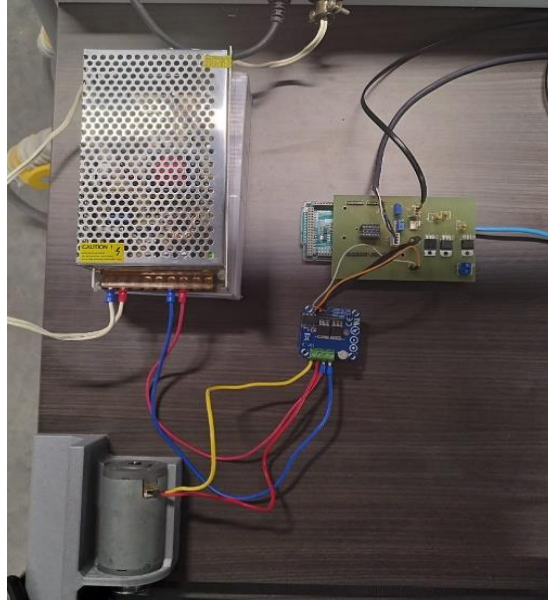


9.2 Circuito eléctrico y de control

Como primer paso se revisan las hojas de características y los manuales de todos los componentes electrónicos para conocer sus diagramas de conexión, teniendo en cuenta la seguridad, no solo para los usuarios, si no para los mismos dispositivos. Luego se procede a seguir el diseño preestablecido, soldando los componentes de la placa de circuitos, escogiendo cables de conexión y transferencia de datos adecuados, conectando componente a componente y verificando su correcto funcionamiento, en la figura 32 se muestra el resultado final, con los principales componentes del circuito, fuente de voltaje, puente H, motor eléctrico y tarjeta de circuitos integrada al Arduino DUE.

Figura 32

Circuito eléctrico y de control.



10 Diseño del Controlador

10.1 Modelado Matemático del Péndulo Invertido

En este apartado se hará el desarrollo analítico y matemático de la dinámica del sistema péndulo invertido lineal, lo primero es realizar un diagrama de cuerpo libre (DCL), figura 33, que muestre las fuerzas y propiedades físicas implicadas en el modelo. Partiendo de un análisis tridimensional, el movimiento del péndulo está restringido a dos grados de libertad, uno en el eje x , que le permite al carro moverse en una dirección y en ambos sentidos, y otro que permite al brazo del péndulo rotar sobre el eje z , articulado al carro móvil. En este sentido, la entrada de control es la fuerza (F) que mueve al carro horizontalmente, y las salidas son la posición del carro (x) y la posición angular del péndulo (θ).

El siguiente paso es realizar un análisis de fuerzas para el modelo en un DCL del despiece con las fuerzas involucradas, como el que se muestra en la figura 33. En la tabla 12 se muestra la convención de signos utilizada.

Figura 33

Diagrama de cuerpo libre péndulo invertido

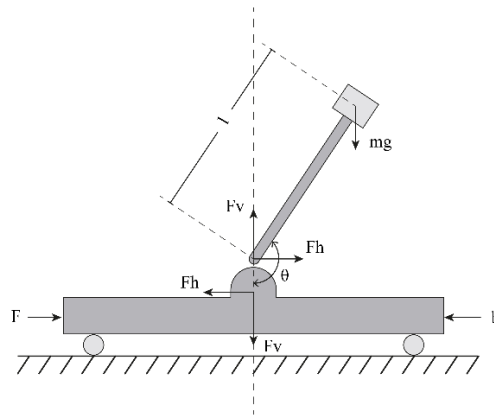


Tabla 12

Parámetros modelo matemático del péndulo invertido.

Guía de Parámetros utilizados			
M	Masa del carro	$u(t)$	Voltaje de entrada al motor o señal PWM
m	Masa del péndulo	L	Inductancia del motor
b	Coefficiente de fricción del carro	R	Resistencia eléctrica del motor
l	Longitud del péndulo al centro de masa	K_e	Cte de fuerza electromotriz
I	Momento de inercia del péndulo	K_t	Cte de par motor
F	Fuerza aplicada al carro	F_h	Reacción horizontal en el péndulo
x	Posición del carro	F_v	Reacción vertical en el péndulo
θ	Angulo del péndulo desde la vertical	g	Fuerza de gravedad
\dot{x}	Velocidad lineal del carro	$i(t)$	Corriente de armadura del motor
$\dot{\theta}$	Velocidad angular del péndulo	$e(t)$	Fuerza contraelectromotriz del motor
\ddot{x}	Aceleración lineal del carro	ω_m	Velocidad angular eje de motor
$\ddot{\theta}$	Aceleración angular del péndulo	r_p	Radio de las poleas

Del carro:

Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección x, se obtiene:

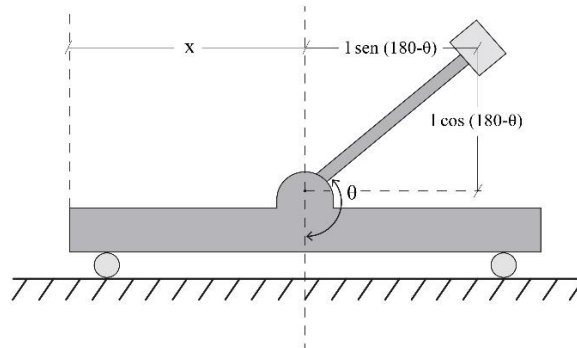
$$\begin{aligned}\sum f_x &= M\ddot{x} \\ F - F_h - b\dot{x} &= M\ddot{x} \\ F &= M\ddot{x} + b\dot{x} + F_h\end{aligned}\quad (17)$$

Del péndulo:

Para el caso del péndulo, la posición en el eje x es relativa a la del carro, figura 34. Teniendo en cuenta las identidades trigonométricas para el seno, se llega a: $x + l \sin(180 - \theta) = x + l \sin(\theta)$.

Figura 34

DCL distancias relativas avance del péndulo



$$\begin{aligned}\sum f_x &= ma_x \\ F_h &= m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin(\theta)) \\ F_h &= m \frac{d}{dt} (\dot{x} + l\dot{\theta} \cos(\theta)) \\ F_h &= m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta)\end{aligned}\quad (18)$$

Sustituyendo (2) en (1), se tiene:

$$F = M\ddot{x} + b\dot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta)$$

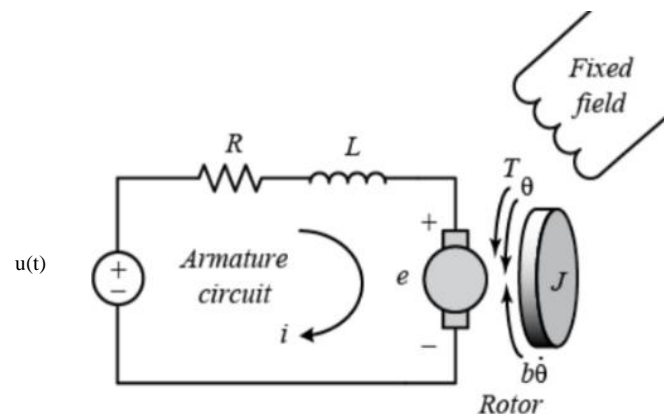
$$F = (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \quad (19)$$

Se ha definido a la fuerza F , como una variable de control de entrada, pero para el caso de este proyecto, esta fuerza viene accionada desde el motor eléctrico, el cual está articulado al carro móvil con la correa dentada, por lo tanto, esta fuerza se debe interpretar desde los parámetros físicos del motor y desde la verdadera variable de control, el voltaje de entrada al motor (u).

En la figura 35 se muestra el diagrama de componentes relevantes de un motor de corriente continua, para realizar el modelo electromecánico, la armadura del motor DC se modela como si tuviera una resistencia constante (R) en serie con una inductancia constante (L), que representa la inductancia de la bobina de la armadura, y una fuente de alimentación (u) que representa la tensión generada por la armadura.

Figura 35

Esquema eléctrico para un motor de corriente continua.



Nota. DC Motor Position: System Modeling. Tomado de [Control Tutorials for MATLAB and Simulink - Motor Position: System Modeling \(umich.edu\)](http://www.umich.edu/~controls/courses/EECS401/lectures/DC_Motor_Position_System_Modeling.pdf)

De la malla del circuito:

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (20)$$

Donde $e(t)$ es la fuerza contraelectromotriz [volts]

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m \quad (21)$$

K_e es la constante contraelectromotriz [v/rad*s].

Para este proyecto se asume que los cambios en corriente son inmediatos, por lo tanto, no hay un estado transitorio, lo cual indica que $di(t)/dt$ es igual a cero. La velocidad angular del eje del motor (ω_m) se debe dejar en términos de la velocidad lineal del carro (\dot{x}) dado que es una cantidad que se puede medir con el encoder incremental instalado, por lo tanto:

$\dot{x} = \omega_m \cdot r_p$ donde r_p es el radio de la polea instalada en el motor, sustituyendo en la ecuación (21):

$$e(t) = K_e \cdot \frac{\dot{x}}{r_p}$$

K_e/r_p se sigue considerando una cantidad constante ya que el radio de la polea es fijo, por lo tanto:

$$e(t) = K_e \cdot \dot{x} \quad (22)$$

Sustituyendo la ecuación (22) en la ecuación (20), y despejando la corriente $i(t)$:

$$u(t) = R \cdot i(t) + K_e \cdot \dot{x}$$

$$i(t) = \frac{u(t) - K_e \cdot \dot{x}}{R} \quad (23)$$

Por lo regular, el par generado por un motor de corriente continua es proporcional a la corriente de armadura y a la fuerza del campo magnético; para este proyecto se asumirá que el campo magnético es constante, por lo tanto, el torque es proporcional solo a la corriente por un factor constante K_t , como lo muestra la ecuación (24).

$$T = K_t \cdot i(t) \quad (24)$$

El torque generado en la correa por el grupo polea-motor, está definido como la fuerza F , por la distancia al punto de aplicación, que sería el radio de la polea, sustituyendo esto en la ecuación (24), se tiene:

$$F \cdot r_p = K_t \cdot i(t) \quad (25)$$

Despejando la fuerza F :

$$F = \frac{K_t \cdot i(t)}{r_p} \quad (26)$$

Al igual que en el caso anterior, la cantidad K_t/r_p se sigue considerando una cantidad constante, dado que el radio de la polea es fijo, así entonces:

$$F = K_t \cdot i(t) \quad (27)$$

Ahora el siguiente paso es sustituir la ecuación (23) en la ecuación (27), para obtener la relación entre la fuerza y la dinámica del motor:

$$F = K_t \cdot \frac{u(t) - K_e \dot{x}}{R} \quad (28)$$

Para finalizar el desarrollo de la primera ecuación de movimiento del péndulo invertido lineal, se sustituye la ecuación (28) en la ecuación (19):

$$K_t \cdot \frac{u(t) - K_e \dot{x}}{R} = (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \quad (29)$$

En la ecuación (29) se tiene la relación entre los parámetros físicos del motor y la dinámica del péndulo, asumiendo como variable de control el voltaje de entrada al motor $u(t)$, por lo tanto, a través de esta, se controla el movimiento del carro con una señal PWM.

Para obtener la segunda ecuación de movimiento del sistema péndulo invertido es necesario regresar a la figura 33 y aplicar la segunda ley de Newton para la rotación, en el centro

de masa del brazo del péndulo. Realizando la descomposición de las fuerzas vertical y horizontal sobre el eje del péndulo, se llega a que la sumatoria de momentos es igual a:

$$\sum M_c = I \cdot \ddot{\theta}$$

$$-F_v l \sin(\theta) - F_h l \cos(\theta) = I \ddot{\theta} \quad (30)$$

Ahora utilizando la estrategia de descomponer las fuerzas que actúan en el brazo del péndulo a sus componentes perpendiculares y sumándolas, con el fin de simplificar los cálculos, se obtiene la siguiente relación:

$$F_v \sin(\theta) + F_h \cos(\theta) - mg \sin(\theta) = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} \cos(\theta) \quad (31)$$

Solucionado el sistema de ecuaciones generado por las ecuaciones (30) y (31) se simplifican los valores de las fuerzas vertical y horizontal; se llega entonces a la segunda ecuación de movimiento para el péndulo invertido:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = -ml\ddot{x} \cos(\theta) \quad (32)$$

Con las ecuaciones (29) y (32) que son las dos ecuaciones de movimiento obtenidas para el péndulo invertido, se procede a comprobar si este modelo matemático se aproxima al comportamiento real de la planta.

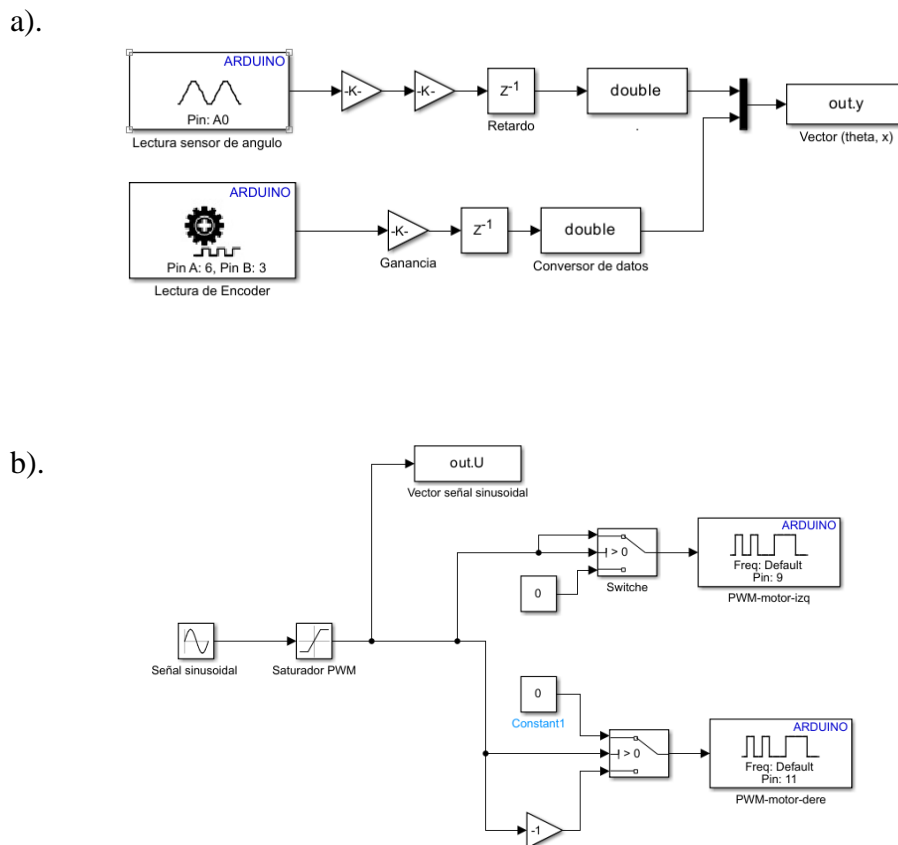
10.1.1 Sintonización de parámetros

Para terminar de integrar el modelo matemático, se debe definir el valor de los parámetros físicos utilizados en las ecuaciones de movimiento, algunos son fáciles de medir como el radio de las poleas, el largo del péndulo, la resistencia del motor eléctrico, las masas aproximadas de los componentes, pero, los demás datos necesitan procedimientos un poco más complejos para obtener sus valores. Es por esto, que para este proyecto se utilizó una estrategia de sintonización de parámetros por aproximación e iteración, implementado en Matlab.

Este método consiste en, primero, realizar una serie de pruebas de movimiento al banco de laboratorio, esto significa, poner el péndulo a oscilar en su posición de equilibrio estable, moviendo el carro de un sentido al otro, para registrar datos de la posición del carro y el ángulo del brazo del péndulo con respecto a un punto de referencia preestablecido, además de la señal de voltaje o PWM utilizada para mover el motor. Para la lectura de los sensores del banco, se diseña un diagrama de bloques en Matlab-Simulink articulado a una extensión para Arduino hardware, el cual se muestra en la figura 36.

Figura 36

Diagrama de bloques para pruebas de movimiento.



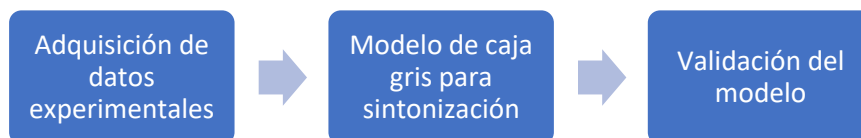
Nota. a). Diagrama de bloques para lectura de sensores. b). Diagrama de bloques para activar el motor con una señal sinusoidal.

El diagrama de bloques de la figura 36 (a) lee los sensores de posición del motor y posición angular del brazo del péndulo, para luego de una serie de ganancias y conversiones, guardarlos en un vector en el bloque “out.y”, a su vez, el diagrama de bloques de la figura 36 (b) se utiliza para ingresar una señal PWM en forma de señal sinusoidal para activar el motor, bajo unos parámetros determinados y guardar estos datos en el bloque “out.u”.

Luego de tener los datos reales de movimiento, y las dos ecuaciones que lo describen teóricamente, se ingresa esta información al algoritmo de sintonización, en Matlab, el cual es un modelo de caja gris, figura 37, donde se comienza a iterar desde los valores de los parámetros que son fácilmente medibles, es decir las longitudes, masas, resistencia eléctrica del motor, y para los otros valores se proponen valores aproximados, así que por medio de estos cálculos matemáticos, se obtienen los parámetros y propiedades físicas necesarias para culminar con el modelo matemático del sistema, las cuales se muestran en la tabla 13. En el Apéndice A, se encuentra el modelo de caja negra con los códigos para sintonización de parámetros.

Figura 37

Metodología para la estimación del modelo.



Nota. Adaptado de *Linear Control with delay scheduling of a under actuated unstable dynamic system* (P.62), por H. S. E. Villegas, 2021.

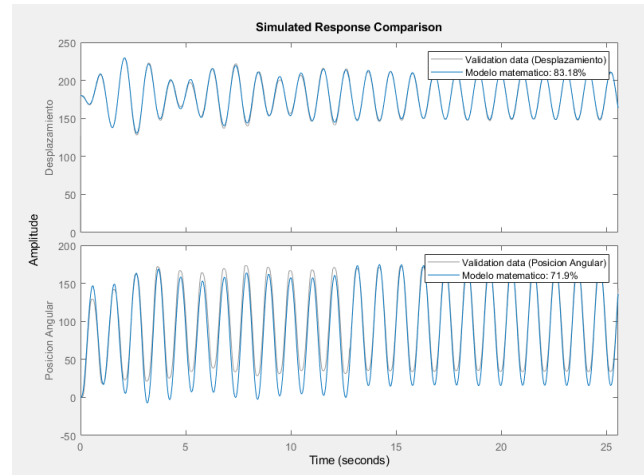
Tabla 13*Valores por sintonización de parámetros*

Guía de Parámetros utilizados (valores)					
M	Masa del carro [kg]	0.2187	R	Resistencia eléctrica del motor [Ω]	6.7
m	Masa del péndulo [kg]	0.1449	Ke	Cte. de fuerza electromotriz [$V \cdot s/rad$]	1.8911
b	Coefficiente de fricción del carro [$N \cdot m \cdot s/rad$]	0.3582	Kt	Cte. de par motor [$n \cdot m/a$]	14.59
l	Longitud del péndulo al centro de masa [m]	0.2295	g	Fuerza de gravedad [m/s^2]	9.81
I	Momento de inercia del péndulo [$kg \cdot m^2$]	0.0054	rp	Radio de la polea [m]	0.02

El valor de estos parámetros indica la dinámica del sistema, la cual se califica en comparación a la dinámica de los datos reales, su comportamiento se estima con un valor de 0 a 100% de similitud. Para validar estos valores obtenidos, se grafica el comportamiento de la planta, es decir, el recorrido que el carro hace, y la posición angular del péndulo, ambas con respecto al tiempo, y estas mismas graficas se comparan con la respuesta del modelo matemático bajo las mismas condiciones, como lo muestra la figura 38. Se puede ver en estas gráficas que la semejanza del modelo para la posición del carro es de 83.2%, y para la posición angular del péndulo es de 71.9%, comportamientos altamente cercanos y aceptables.

Figura 38

Comparación de las respuestas simuladas

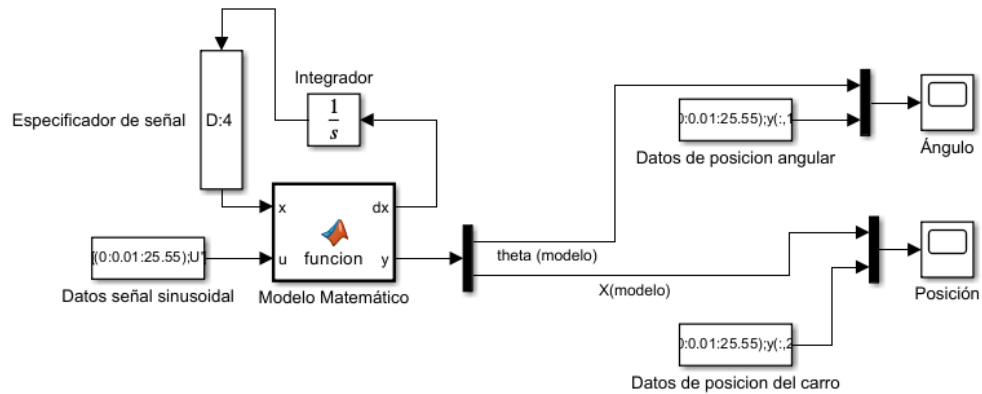


10.1.2 Validación del modelo

Se tiene el modelo matemático con sus parámetros físicos establecidos, además se tienen los datos de las pruebas de movimiento anteriormente hechas, en este sentido, para lograr una validación completa, se procede a crear una planta virtual que simule al péndulo real, y permita comparar la respuesta del modelo, con la dinámica real que tuvo en las pruebas, a la misma entrada sinusoidal. En Simulink se crea un bloque “Matlab function” donde se ingresa el modelo matemático, ver apéndice B, y se diseña un diagrama de bloques que permita probar y comparar los datos de las pruebas de movimiento, como el que se muestra en la figura 39.

Figura 39

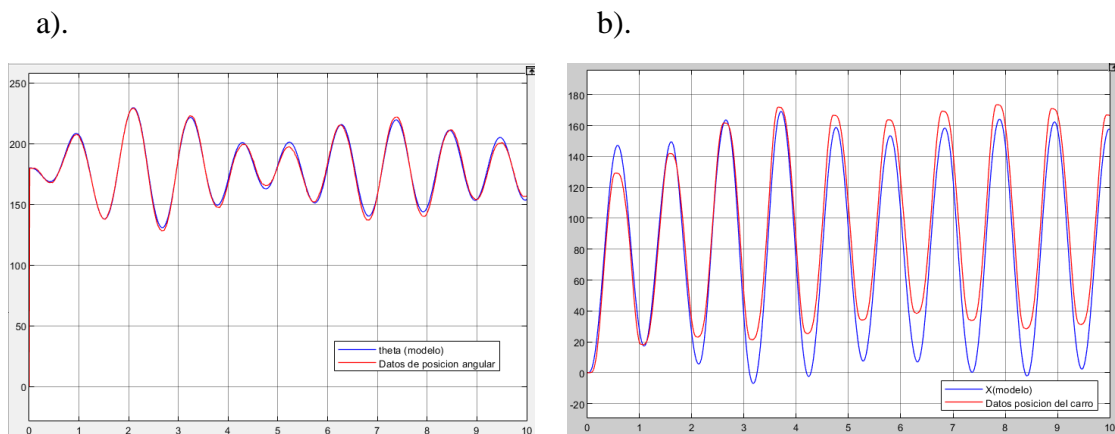
Diagrama de bloques para la validación del modelo matemático



En la figura 40, se muestran las repuestas a las pruebas de validación, con una entrada sinusoidal, aplicada por 10 segundos.

Figura 40

Respuestas a las pruebas de validación del modelo.



Nota. a) Comparación entre la posición angular proveniente del modelo y la obtenida por los datos de las pruebas. b). Comparación entre la posición del carro proveniente del modelo matemático y la resultante de los datos de las pruebas.

Según las gráficas la dinámica que muestra el modelo matemático se acerca en gran medida al comportamiento real de la planta, por tanto, se concluye que este modelo es adecuado para continuar con el proceso de diseño del controlador.

10.2 Representación del modelo en tiempo continuo

Recordando las dos ecuaciones que simulan la dinámica del péndulo invertido, en Matlab se procede a realizar los cálculos y procedimientos matemáticos para la linealización del modelo y representación en el espacio de estados

$$\text{Eq1} = K_t \cdot \frac{u(t) - K_e \cdot \dot{x}}{R} = (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta)$$

$$\text{Eq2} = (I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = -ml\ddot{x} \cos(\theta)$$

Resolviendo la Eq1 en términos de la aceleración del carro y la Eq2 en términos de la aceleración angular del péndulo respectivamente se tiene:

$$\ddot{x} =$$

$$\frac{Iktu + ktl^2mu - IRb\dot{x} - Ikekt\dot{x} + Rl^3m^2\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - Rbl^2m\dot{x} - kektl^2m\dot{x} + \frac{Rgl^2m^2 \sin(2\theta)}{2} + IRlm\dot{\theta}^2 \sin(\theta)}{R(-l^2m^2 \cos(\theta)^2 + l^2m^2 + Ml^2m + Im + IM)}$$

$$\ddot{\theta} =$$

$$\frac{lm(Rlm \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ktu \cos(\theta) + MRg \sin(\theta) - Rb\dot{x} \cos(\theta) + Rgm \sin(\theta) - kekt\dot{x} \cos(\theta))}{R(-l^2m^2 \cos(\theta)^2 + l^2m^2 + Ml^2m + Im + IM)}$$

10.2.1 Linealización del modelo

Se definen las variables de estado para el sistema x_1, x_2, x_3, x_4 como:

$$x_1 = \dot{x}; x_2 = \dot{\theta}; x_3 = x; x_4 = \theta$$

Para linealizar el modelo se utilizó el método de la matriz Jacobiana, donde se definen las matrices A y B linealizadas para la representación en el espacio de estado en tiempo continuo, como se muestra a continuación:

Asym =

$$\begin{pmatrix} \frac{1 R b + 1 k c k t + R b l^2 m + k c k t l^2 m}{R \sigma_1} & \frac{2 R \dot{\theta} \sin(\theta) l^2 m^2 + 2 1 R \dot{\theta} \sin(\theta) l m}{R \sigma_1} & 0 & \frac{R \cos(\theta) l^2 m^2 \dot{\theta}^2 + R g \cos(2 \theta) l^2 m^2 + 1 R \cos(\theta) l m \dot{\theta}^2}{R \sigma_1} - \frac{2 l^2 m^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{R \sigma_1^2} \left(1 k t u + k t l^2 m u - 1 R b \dot{x} - 1 k c k t \dot{x} + R l^2 m^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - R b l^2 m \dot{x} - k c k t l^2 m \dot{x} + \frac{R g l^2 m^2 \sin(2 \theta)}{2} + 1 R l m \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \right) \\ \frac{l m (k c k t \cos(\theta) + R b \cos(\theta))}{R \sigma_1} & -\frac{2 l^2 m^2 \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\theta)}{\sigma_1} & 0 & \frac{2 l^2 m^3 \cos(\theta) \sin(\theta)}{R \sigma_1^2} \left(R l m \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + k t u \cos(\theta) + M R g \sin(\theta) - R b \dot{x} \cos(\theta) + R g m \sin(\theta) - k c k t \dot{x} \cos(\theta) \right) - \frac{l m (M R g \cos(\theta) - k t u \sin(\theta) + R g m \cos(\theta) + R b \dot{x} \sin(\theta) + k c k t \dot{x} \sin(\theta) + R l m \dot{\theta}^2 \cos(\theta)^2 - R l m \dot{\theta}^2 \sin(\theta)^2)}{R \sigma_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = -l^2 m^2 \cos(\theta)^2 + l^2 m^2 + M l^2 m + 1 m + 1 M$$

Bsym =

$$\begin{pmatrix} \frac{k t m l^2 + 1 k t}{\sigma_1} \\ -\frac{k t l m \cos(\theta)}{\sigma_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = R (-l^2 m^2 \cos(\theta)^2 + l^2 m^2 + M l^2 m + 1 m + 1 M)$$

Para completar la linealización del modelo, se asume que la zona de trabajo es alrededor del punto de equilibrio, es decir el péndulo formando un ángulo de 180° (π radianes) con la vertical, por lo tanto, se sustituye en las condiciones iniciales:

$$x_1 = \dot{x} = 0; x_2 = \dot{\theta} = 0; x_3 = x = 0; x_4 = \theta = \pi$$

Asym =

$$\begin{pmatrix} -\frac{I R b + I k e k t + R b l^2 m + k e k t l^2 m}{R \sigma_1} & 0 & 0 & \frac{g l^2 m^2}{\sigma_1} \\ -\frac{l m (R b + k e k t)}{R \sigma_1} & 0 & 0 & \frac{l m (M R g + R g m)}{R \sigma_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = M m l^2 + I m + I M$$

Bsym =

$$\begin{pmatrix} \frac{k t m l^2 + I k t}{R (M m l^2 + I m + I M)} \\ \frac{k t l m}{R (M m l^2 + I m + I M)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remplazando el valor de los parámetros en las matrices:

$$\text{Asym} = \begin{pmatrix} -\frac{579024369359683}{36056330253630} & 0 & 0 & \frac{1785767339727}{597949092100} \\ -\frac{16417122118600}{400625891707} & 0 & 0 & \frac{195252981840}{5979490921} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bsym} = \begin{pmatrix} \frac{28168252073000}{3605633025363} \\ \frac{7986566000000}{400625891707} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10.2.2 Espacio de estados del modelo en tiempo continuo

Se procede a presentar los arreglos en espacio de estados, con las matrices linealizadas y reducidas, para las variables a controlar.

10.2.2.1 Espacio de estados en tiempo continuo, definido para el estado 3 (posición del carro)

$$A3 = \begin{bmatrix} -16.0589 & 0 & 0 & 2.9865 \\ -40.9787 & 0 & 0 & 32.6538 \\ 1.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B3 = \begin{bmatrix} 7.8123 \\ 19.9352 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$D3 = [0]$$

10.2.2.2 Espacio de estados en tiempo continuo, definido para el estado 4 (posición angular del péndulo)

$$A4 = \begin{bmatrix} -16.0589 & 0 & 0 & 2.9865 \\ -40.9787 & 0 & 0 & 32.6538 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B4 = \begin{bmatrix} 7.8123 \\ 19.9352 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$D4 = [0]$$

10.2.3 Representación en funciones de transferencia en tiempo continuo

10.2.3.1 Función de transferencia en tiempo continuo, para el estado 3 (posición del carro)

$$tf_{sys3} = \frac{7.812s^2 - 6.939e^{-15}s - 195.6}{s^4 + 16.06s^3 - 32.65s^2 - 402s} \quad (33)$$

10.2.3.2 Función de transferencia en tiempo continuo, para el estado 4 (posición angular del péndulo)

$$tf_{sys4} = \frac{19.94s + 7.403e^{-14}}{s^3 + 16.06s^2 - 32.65s - 402} \quad (34)$$

10.3 Representación del modelo en tiempo discreto

La estrategia que se utilizó para la discretización del modelo, parte desde las matrices A, B, C, D del espacio de estados en tiempo continuo, estas a través del comando “c2d” de Matlab se discretizan y se llevan a la forma $x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$, como se muestra a continuación:

10.3.1 Espacio de estados del modelo en tiempo discreto

Se mantiene la definición de las variables de estado para el sistema x_1, x_2, x_3, x_4 como:

$$x_1 = \dot{x}; \quad x_2 = \dot{\theta}; \quad x_3 = x; \quad x_4 = \theta$$

10.3.1.1 El espacio de estados en tiempo discreto, definido para el estado 3 (posición del carro)

Se discretizan las matrices A3 y B3, con un tiempo de muestreo de 0.01 segundos, quedando las matrices G3 y H3.

$$G3 = \begin{bmatrix} 0.8516 & 0.0001 & 0 & 0.0276 \\ -0.3788 & 1.0016 & 0 & 0.3209 \\ 0.0092 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0001 \\ -0.0019 & 0.0100 & 0 & 1.0016 \end{bmatrix}$$

$$H3 = \begin{bmatrix} 0.0722 \\ 0.1843 \\ 0.0004 \\ 0.0009 \end{bmatrix}$$

$$C3_d = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$D3_d = [0]$$

10.3.1.2 El espacio de estados en tiempo discreto, definido para el estado 4 (posición angular de péndulo):

Se discretizan las matrices A4 y B4, con un tiempo de muestreo de 0.01 segundos, quedando las matrices G4 y H4.

$$G4 = \begin{bmatrix} 0.8516 & 0.0001 & 0 & 0.0276 \\ -0.3788 & 1.0016 & 0 & 0.3209 \\ 0.0092 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0001 \\ -0.0019 & 0.0100 & 0 & 1.0016 \end{bmatrix}$$

$$H4 = \begin{bmatrix} 0.0722 \\ 0.1843 \\ 0.0004 \\ 0.0009 \end{bmatrix}$$

$$C4_d = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$$D4_d = [0]$$

10.3.2 Representación en funciones de transferencia en tiempo discreto

10.3.2.1 Función de transferencia en tiempo discreto, para el estado 3 (posición del carro)

$$tfsysd3 = \frac{0.0003705z^3 - 0.0003908z^2 - 0.0003328z + 0.0003512}{z^4 - 3.855z^3 - 5.561z^2 - 3.558z + 0.8516} \quad (35)$$

10.3.2.2 Función de transferencia en tiempo discreto, para el estado 4 (posición angular del péndulo)

$$tfsysd4 = \frac{0.0009457z^2 - 4.929e^{-05}z - 0.0008964}{z^3 - 2.855z^2 + 2.706z - 0.8516} \quad (36)$$

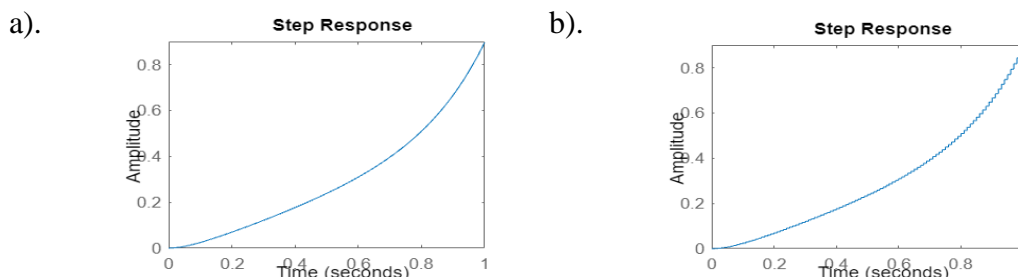
10.4 Comparación entre el comportamiento de las funciones de transferencia a una entrada escalón en tiempo continuo y discreto:

En secciones anteriores se ha comprobado que el modelo matemático que se obtuvo, puede modelar de manera eficiente la dinámica real del péndulo invertido; siguiendo con el proceso de diseño del controlador, se creó su representación en el espacio de estados además de su función de transferencia, para un tiempo continuo y para un tiempo discreto, en este sentido para comprobar que la discretización y su respuesta, es coherente con el modelo, se comparan ambas respuestas a una entrada de escalón aplicada en 1 segundo.

Como se puede ver en la figura 41 los comportamientos de los modelos en tiempo continuo y tiempo discreto son similares, la única diferencia son los tiempos de muestreo que se utilizaron para la discretización.

Figura 41

Respuesta de la función de transferencia del movimiento del carro, para una entrada escalón, en tiempo continuo y tiempo discreto.

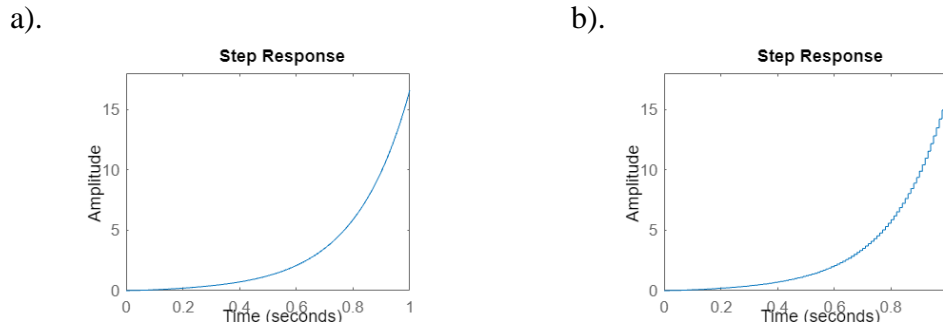


Nota. a) Respuesta en tiempo continuo. b) Respuesta en tiempo discreto.

Al igual que en el caso anterior, en la figura 42, los comportamientos para las funciones de transferencia de la posición angular del péndulo son similares, por lo tanto, es una respuesta homogénea y coherente en ambos modos de tiempo.

Figura 42

Respuesta de la función de transferencia de la posición angular del péndulo, para una entrada escalón, en tiempo continuo y tiempo discreto.



Nota. a) Respuesta en tiempo continuo. b) Respuesta en tiempo discreto.

De las gráficas anteriores se puede además ver los comportamientos que tuvieron son curvas que tienden al infinito, en este sentido, se concluye que la dinámica del péndulo es altamente inestable. En base a los objetivos del proyecto, se continúa con los modelos discretizados.

10.5 Análisis de estabilidad de la dinámica del péndulo invertido

10.5.1 Lugar geométrico de las raíces del modelo

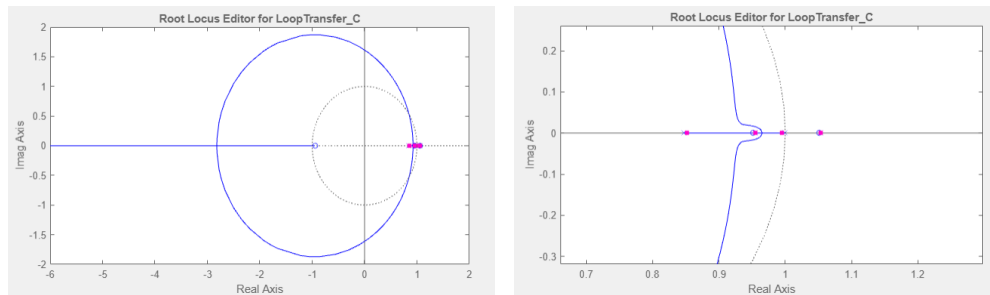
Para realizar el análisis de estabilidad del sistema en tiempo discreto, se utilizó el método del lugar geométrico de las raíces (LGR), elaborado a través de Matlab. En la figura 43 (a) se muestra el lugar de las raíces de la función de transferencia para la posición del carro, el estado 3 del modelo, el cual muestra que es una planta inestable, ya que posee polos y ceros fuera del círculo unitario, además de que tiene algunos superpuestos.

En la figura 43 (b) se muestra el lugar de las raíces de la función de transferencia para la posición angular del péndulo, estado 4 del modelo, en el cual se observa de igual manera que su comportamiento es inestable, ya que posee polos por fuera del círculo unitario.

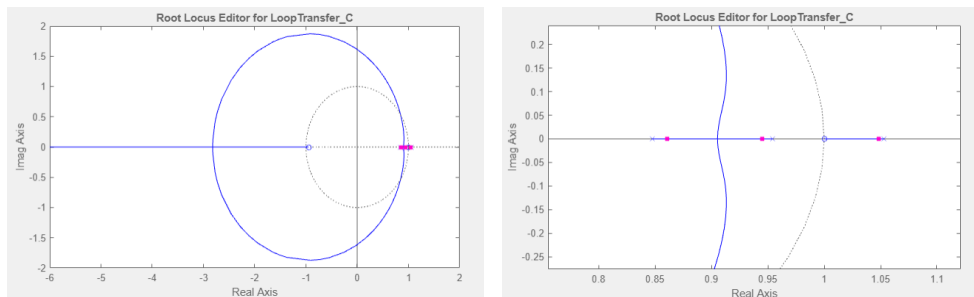
Figura 43

Lugar geométrico de las raíces para las funciones de transferencia de la posición del carro y péndulo.

a)



b)



Nota. a) Lugar geométrico de las raíces para: a) la posición del carro. b) La posición angular del péndulo. Las gráficas a la derecha son las vistas ampliadas de los polos y ceros.

10.6 Estabilización del modelo por medio de un PID discreto

Se tienen las dos funciones de transferencia del modelo para las dos variables de control que interesan, además se ha probado que son inestables en los diagramas obtenidos. Como estrategia de estabilización, con la herramienta Sisotool en Matlab, y bajo técnicas de estabilización del lugar geométrico de las raíces se diseñó un controlador, del tipo PID discreto en lazo abierto, de la forma:

$$C = P + I \cdot Ts \cdot \frac{1}{z-1} + D \cdot \frac{N}{1+N \cdot Ts \cdot \frac{1}{z-1}} \quad (37)$$

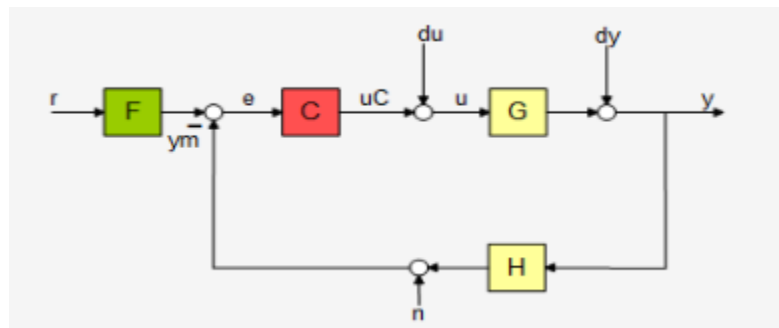
Donde:

C, es el controlador; P, es la constante proporcional; I, es la contante integral; D, contante derivativa; Ts, es el tiempo de muestreo; N, filtro de señal.

Se ha utilizado la arquitectura en lazo abierto, que se muestra en la figura 44

Figura 44

Arquitectura en lazo abierto para el diseño del PID discreto



Nota. C es la función de transferencia del controlador; G, es la planta que se requiere controlar; F y H para este caso tienen el valor de 1.

10.6.1 PID discreto para el control de la posición del carro

Volviendo al gráfico del LGR, figura 43(a), para la función de transferencia de la posición del carro, se puede ver que tiene ceros y polos superpuestos, lo cual hace que no se pueda diseñar un controlador estable, por lo tanto, como solución se propone reducir este modelo a través de una herramienta de Matlab llamada ModelReducer, con la cual se hace una reducción de polos y ceros de la función de transferencia dada, y hace posible generar un controlador para la misma.

Función de transferencia para el modelo reducido:

$$tf_{modeloReducido} = \frac{0.0003705 z^2 - 5.846e-07 z - 0.0003335}{z^3 - 2.802 z^2 + 2.61 z - 0.8086} \quad (38)$$

A integrar este modelo reducido al modelamiento del controlador en Sisotool se ha podido diseñar un controlador con un comportamiento estable en el diagrama del LGR de la función de transferencia para la posición del carro, como se puede ver en la figura 45.

El controlador resultante se muestra a continuación, y los valores de sus constantes están en la tabla 14.

$$C33 = \frac{5z^2 - 9.875z + 4.875}{z^2 - 1.94z + 0.94} \quad (39)$$

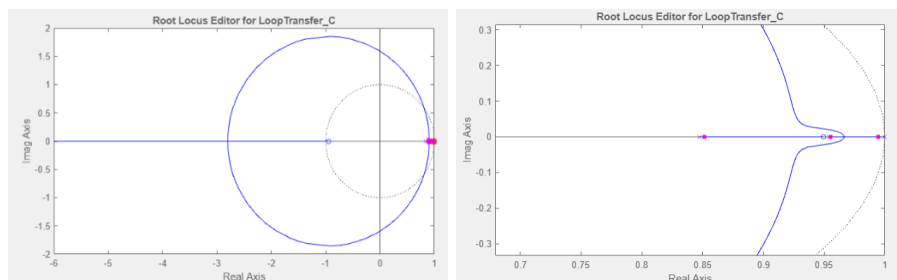
Tabla 14

Constantes PID discreto para la posición del carro.

Constante	Valor
P	2
I	0.5
D	0.5
N	6

Figura 45

Lugar geométrico de las raíces para el lazo de control abierto de la posición del carro

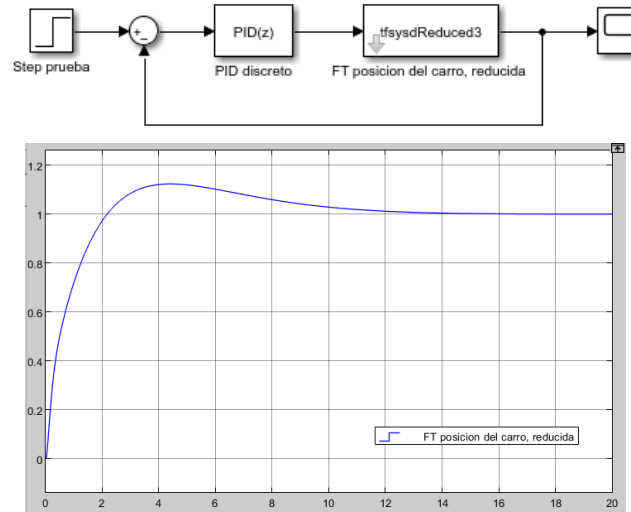


Nota. En la parte izquierda el LGR completo, a la derecha la posición de los polos y ceros ampliada.

Se cierra el lazo de control y se prueba el controlador para la posición del carro, con una entrada escalón, como se ve en la figura 46.

Figura 46

Respuesta a una entrada escalón del PID discreto para la posición del carro, en lazo cerrado.



Para la posición del carro, el controlador diseñado llega a la referencia y se estabiliza, por tanto, se aprueba este controlador para el diseño, en la tabla 15 se muestran 3 parámetros representativos de la respuesta del sistema con el controlador.

Tabla 15

Parámetros de desempeño de la respuesta del controlador para la posición del carro

Parámetros	PID discreto
Sobrepaso Máximo	16 %
Tiempo de asentamiento	15 [s]
Tiempo de levantamiento	4 [s]

10.6.2 PID discreto para el control de la posición angular del péndulo

Por el LGR para la posición angular del péndulo, figura 43 (b), está claro que es una planta inestable, por lo tanto, a través de la herramienta sisotool, y con los criterios de estabilidad del

LGR, se diseña un controlador PID en discreto, para esta planta en lazo abierto, según lo expuesto en la figura 44, su función de transferencia es:

$$C44 = \frac{258 z^2 - 457.2 z + 202.6}{z^2 - 0.1 z - 0.9} \quad (40)$$

Las constantes para este controlador se muestran en la tabla 16.

Tabla 16

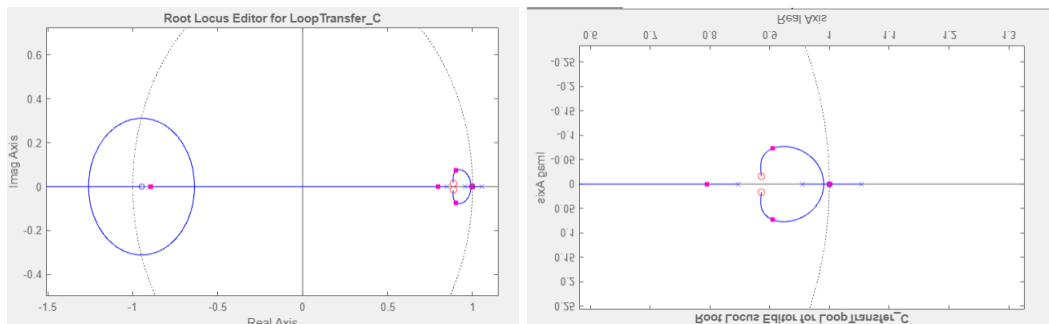
Constantes PID discreto para la posición angular del péndulo.

Constante	Valor
P	30
I	180
D	1.2
N	190

Implementando este controlador en lazo abierto, el nuevo LGR resultante se muestra en la figura 47, en donde sus polos y ceros se encuentran dentro del círculo unitario, por lo tanto, es una planta estable.

Figura 47

Lugar geométrico de las raíces para el lazo de control abierto, de la posición angular del péndulo.

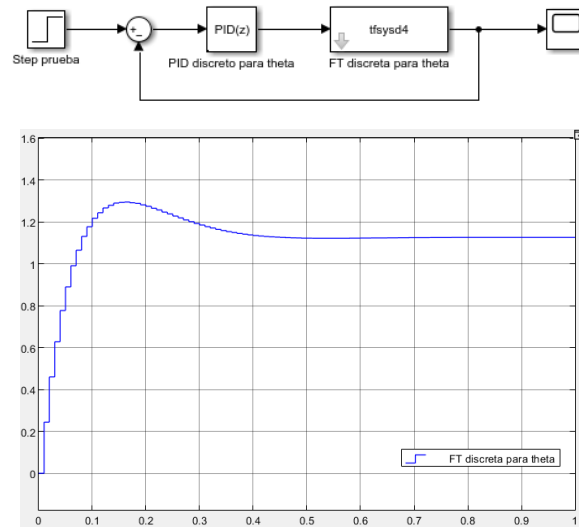


Nota. en la parte izquierda el LGR completo, a la derecha la posición de los polos y ceros ampliada.

Cerrando el lazo de control y aplicando una entrada escalón para probar el comportamiento del controlador se tienen los siguientes resultados:

Figura 48

Lazo de control en lazo cerrado para la posición angular del péndulo.



De la figura 48 se observa que la respuesta del PID discreto para la posición angular del péndulo no llega a la referencia, esto es debido a que esta variable es altamente inestable, pero si se estabiliza y con este resultado es suficiente para aprobar el controlador, en la tabla 17 se muestran 3 parámetros importantes en el desempeño de la respuesta obtenida.

Tabla 17

Parámetros de desempeño de la respuesta del controlador para el ángulo

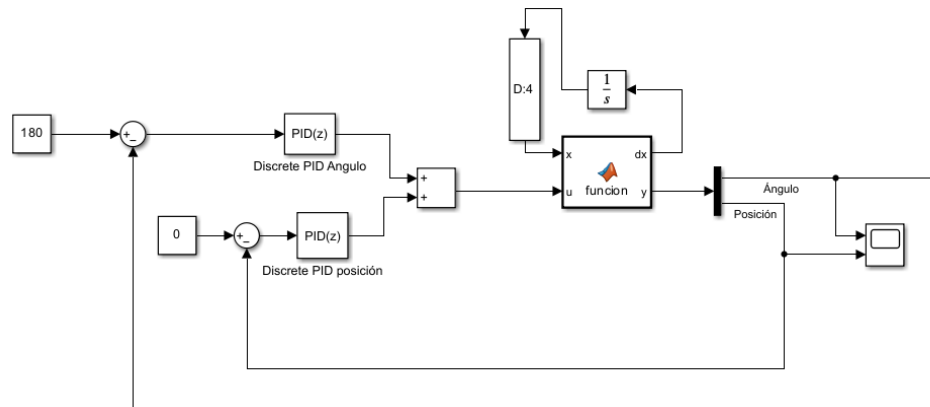
Parámetros	PID discreto
Sobrepaso Máximo	30%
Tiempo de asentamiento	0.6 [s]
Tiempo de levantamiento	0.16 [s]

10.7 Validación de los controladores con el modelo matemático

Para comprobar el comportamiento de los controladores, se diseña un diagrama de bloques, figura 49, en donde se implementes los dos PID discretos, en paralelo, conectados al modelo matemático. El *set point* adoptado para la posición angular del péndulo es a 180° , medidos desde la vertical, y para el control del carro, es mantener la posición de inicio, condición inicial 0 desplazamiento.

Figura 49

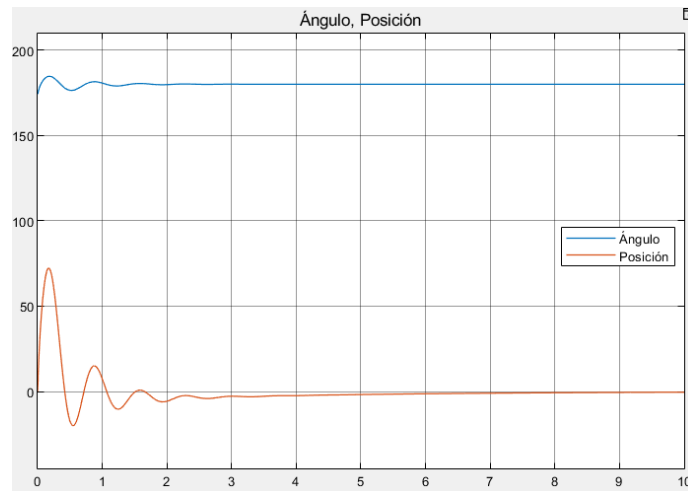
Validación de los controladores PID discretos con el modelo matemático.



Los resultados de validación de los controladores con el modelo se muestran en figura 50, al aplicar una pequeña perturbación en el ángulo, es decir, para una condición inicial, $\theta = \pi - 0.1$, ambos controladores llegan al *set point* establecido y lo mantienen de manera estable, por consiguiente, se consideran controladores válidos para probarlos en la planta real.

Figura 50

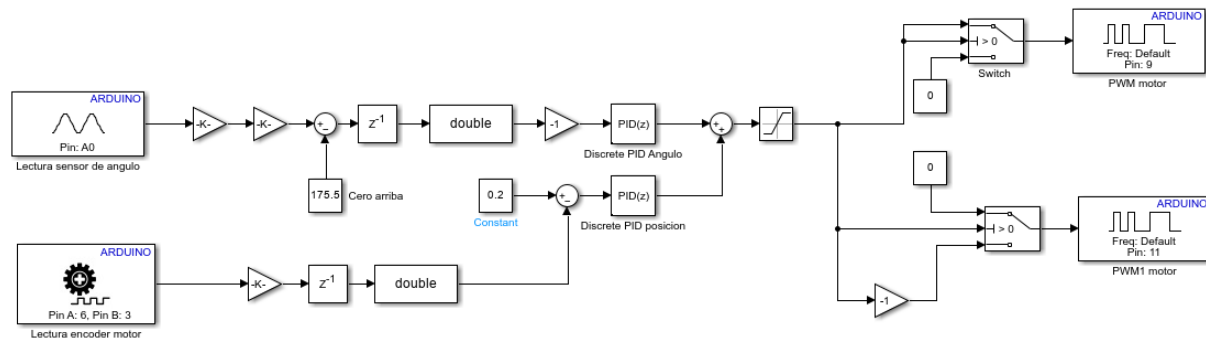
Resultados prueba de validación de los controladores PID discretos, aplicados al modelo matemático.

**11 Implementación de controladores PID discretos**

La implementación de los controladores PID discretos anteriormente diseñados, se llevó a cabo a través del software Matlab-Simulink articulado con Arduino hardware, diseñando un diagrama de bloques que articule la lectura de los sensores, y la señal de control al motor, con los controladores conectados en paralelo, tal y como se muestra en la figura 51.

Figura 51

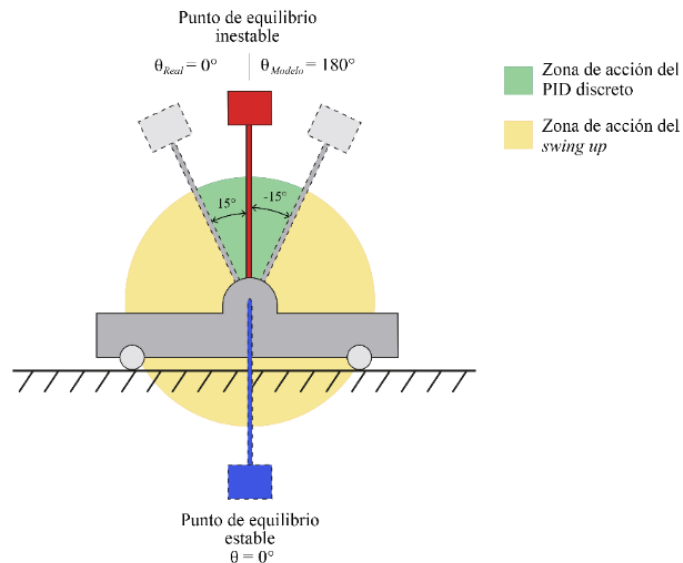
Diagrama de bloques para implementación de los controladores PID discretos en la planta real



A diferencia de las pruebas de control en el modelo matemático, en la planta real, como puntos de referencia para la implementación de los controladores, se resta aproximadamente 180° a la referencia del ángulo del sensor del péndulo, es decir, en el punto de equilibrio inestable, el *set point* del sistema, según el modelo matemático, θ valdría aproximadamente 180° , al restar esta misma cantidad, en este punto el ángulo valdría aproximadamente 0° , esto en razón a manejar un valor continuo de ángulo, de 15° a -15° , la cual sería la zona de acción de los PID discretos. En la figura 52, se muestran las zonas de acción de los controladores.

Figura 52

Zonas de acción de los controladores



11.1 Pruebas en laboratorio del péndulo invertido lineal

Con la puesta a punto de los controladores y un diagrama de bloques establecido, figura 51, se procede a realizar pruebas de estabilidad al banco de laboratorio, estos ensayos parten desde una posición cercana a la posición de equilibrio inestable para el péndulo, se evaluó la respuesta del sistema y se graficaron los datos, referentes a la posición angular del péndulo en grados, posición del carro en milímetros, y la señal de control al motor, como señal PWM en un rango de -255 a 255.

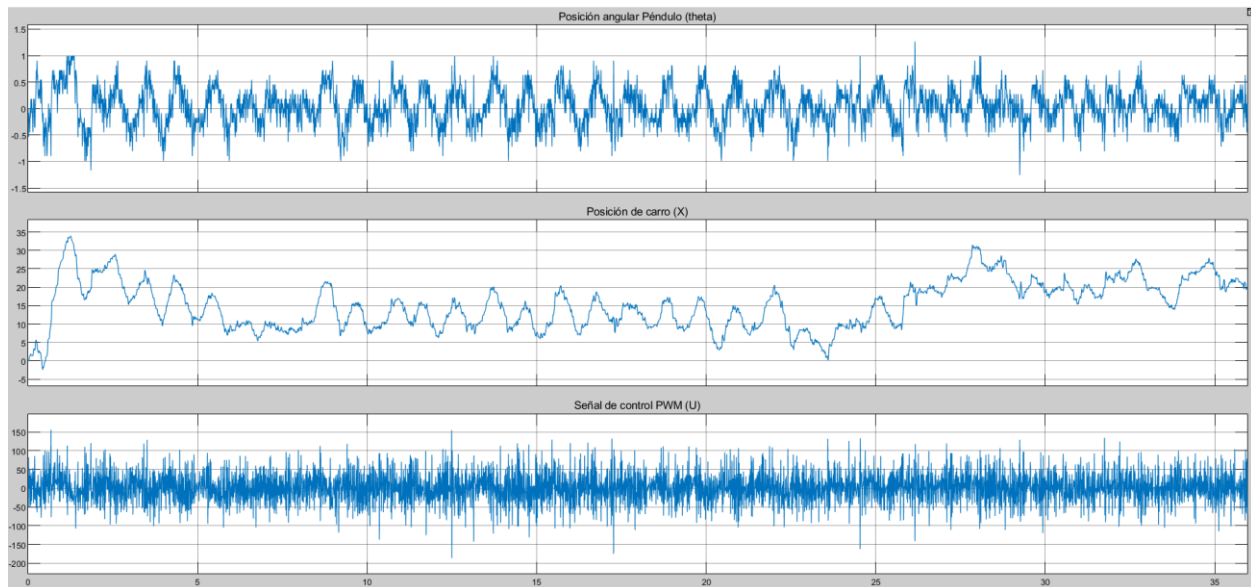
11.1.1 Prueba de estabilidad sin perturbación

En la figura 53 se graficaron los datos de la prueba sin perturbación, se puede observar un comportamiento estable en las cercanías al *set point* del sistema, $\theta = 0^\circ$, la desviación del ángulo máxima en 35 segundos que duro la prueba es de aproximadamente 1.5 grados, así mismo, se

puede ver la reacción del sistema en la señal PWM, y el desplazamiento del carro, la cual es eficiente para mantener el péndulo en equilibrio.

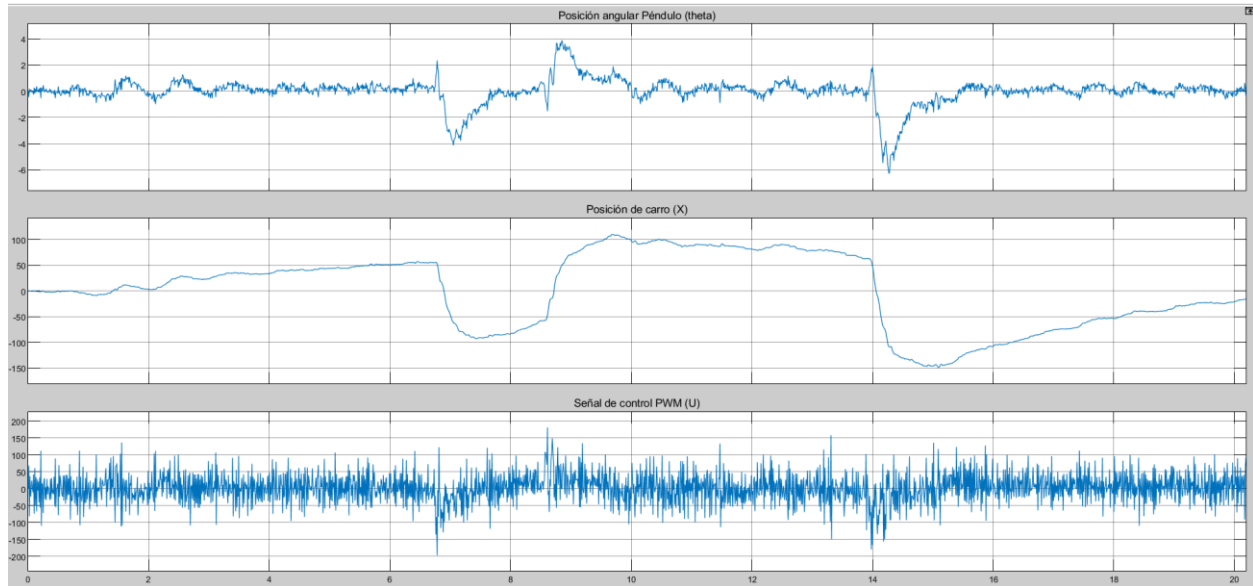
Figura 53

Respuesta del sistema sin perturbación



11.1.2 Prueba de estabilidad con perturbación

Para esta prueba se ve la reacción del sistema a las perturbaciones, duro aproximadamente 20 segundos, y se perturbó al sistema en los segundos 7, 9 y 14. La modificación al ángulo máxima fue aproximadamente 6 grados, a los 14 segundos, y la reacción del sistema tarda alrededor de 1 segundo en volver a la posición de equilibrio. Del mismo modo, la respuesta del sistema se ve reflejada en la señal PWM inyectada al motor, y el movimiento del carro para estabilizar el péndulo. Los resultados se graficaron y se muestran en la figura 54.

Figura 54*Respuesta del sistema con perturbación*

12 Algoritmo Swing-Up para elevación del péndulo invertido

12.1 Desarrollo del modelo Swing-Up

El algoritmo utilizado para realizar el levantamiento del péndulo, desde su posición de equilibrio estable, es decir $\theta = 0^\circ$, es una adaptación del utilizado por Sharma y Fulwani (2021), el cual es un método de energías, que se basa en medir la variación entre la energía cinética y potencial del péndulo a lo largo de su recorrido y compararla con la energía deseada que el péndulo tendría en el punto de equilibrio inestable, es decir $\theta = 180^\circ$.

La energía mecánica total del péndulo (E) viene dada por la ecuación 41, la cual suma la energía cinética y potencial del péndulo

$$E = \frac{1}{2} \cdot (I + ml^2) \cdot \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos(\theta)) \quad (41)$$

La energía en el punto de equilibrio deseado (E_d), es únicamente potencial, de este modo se tiene que:

$$E_d = mgl(1 - \cos(\pi)) = 2mgl \quad (42)$$

La dinámica de este método radica en lograr que el péndulo llegue a la energía deseada, por lo tanto, si hay mayor energía, el sistema debe amortiguarse y ceder energía, si por el contrario la energía del péndulo es menor que la deseada, el sistema debe ganar energía. Estas acciones se llevan a cabo a través de una acción de control (u), aplicada directamente al actuador principal, el motor eléctrico. Esta acción de control viene dada por:

$$u = sat_{max}(kp \cdot (E - E_d) \cdot \text{sing}(\dot{\theta} \cdot \cos(\theta))) \quad (43)$$

Donde K_p es una ganancia proporcional, sintonizable, con relación a los cambios de energía necesarios en el modelo.

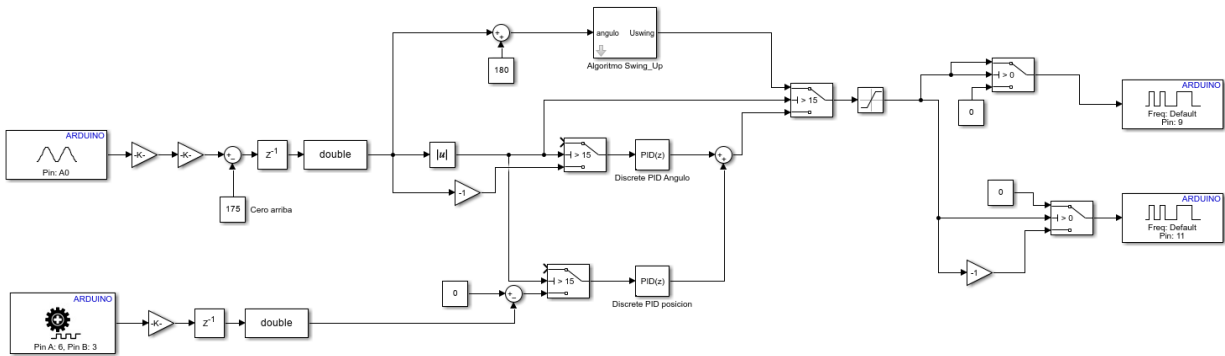
12.2 Implementación del modelo Swing-Up

El modelo swing-up se integra al diagrama de bloques para el control del péndulo invertido, figura 55 (a), limitando su accionamiento cuando el péndulo está en un ángulo fuera del rango de -15 a 15 grados, como se puede ver en la figura 52 (zonas de acción de los controladores). La acción de control (u) se modela en el bloque llamado “algoritmo swing-up” mostrado en la figura 55 (b), donde su comportamiento se controla en base a las ganancias K_p y el boque de saturación máxima, ya que con estas se modifica la cantidad de energía que le está entrando al sistema, mientras el péndulo este en la zona de acción del swing-up.

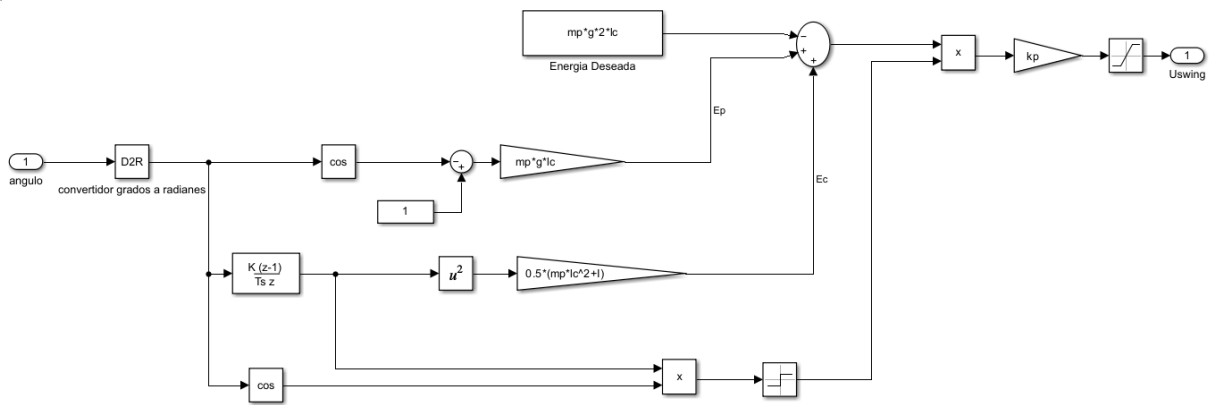
Figura 55

Diagrama de bloques Swing-Up

a)



b)



Nota. a) Diagrama de bloques del control péndulo invertido con swing-up. b) Representación de la acción de control para el Swing-Up, en diagrama de bloques.

13 Conclusiones

Se logró de manera satisfactoria el diseño, construcción, control y adecuación de un péndulo invertido lineal en Laboratorio de Dinámica y Control de la Escuela de Ingeniería Mecánica el cual proporciona una herramienta de orientación más practica para las técnicas y conceptos de Ingeniería de Control impartidos; cumpliendo de esta manera los objetivos planteados al inicio de este proyecto.

Considerar y establecer una idea clara y una metodología flexible al construir un banco de laboratorio desde cero o como parte de un proceso de rediseño, permite integrar las soluciones más apropiadas con base en los criterios de diseño y los requerimientos establecidos.

El diseño conceptual en conjunto con un diseño CAD competente, logra un mayor aprovechamiento de tiempo y recursos, facilitando el modelado, visualización e integración tridimensional de los componentes requeridos para la construcción y ensamblaje del péndulo invertido lineal.

La creación de un modelo CAD preciso permitió la implementación de piezas impresas en 3D, que dieron solución a retos de dimensionamiento y articulación de los diferentes componentes del banco en cuestión.

El modelado matemático desarrollado a partir de la integración del modelo físico del péndulo invertido lineal y el circuito eléctrico de este proporcionó la información necesaria para conocer, comprender y parametrizar las características clave en el control de este sistema; en adición, el uso del software Matlab-Simulink articulado con Arduino hardware facilitaron la realización de las tareas de control.

Los controladores PID discretos diseñados, lograron equilibrar el péndulo invertido lineal de forma exitosa, alcanzando estabilidad en la posición angular del péndulo en aproximadamente 1 segundo y el establecimiento de la posición del carro en aproximadamente 10 segundos; tiempos que se consideran idóneos para este tipo de ejercicios de control. Así mismo, el uso de este tipo de controladores demostró resultados altamente confiables, eficaces y prácticos al momento de su aplicación.

La implementación del método de energías Swing up, permitió llevar satisfactoriamente el péndulo desde su posición de equilibrio estable a su posición de equilibrio inestable. Los tiempos de asentamiento del sistema se ven directamente afectados por las ganancias implementadas en el modelo matemático. Para obtener resultados favorables se trabajaron valores de ganancia k_p de 3000 a 5000, ya que, al hacer uso de valores superiores a estos, se genera una respuesta agresiva poco controlada.

Proporcionar un manual de uso para el banco de laboratorio péndulo invertido lineal, concede a profesores y estudiantes adscritos a la Escuela de Ingeniería Mecánica, la información necesaria para hacer buen uso de los componentes prácticos que se obtienen mediante dicho banco, y de esta manera, aprovecharlo para la aplicación teórica impartida en la materia de *Ingeniería de Control*.

14 Recomendaciones

Con base en los resultados alcanzados se hacen las siguientes recomendaciones:

El manejo adecuado del banco es de vital importancia para su correcto funcionamiento, una revisión visual por parte del usuario, en donde se detallen componentes críticos como la tensión de la correa, el adecuado posicionamiento de las prensas, el correcto ajuste de piezas como el péndulo, el carro móvil, las poleas, el motor y los sensores, ya que estos se pueden desajustar debido a las vibraciones propias del movimiento del sistema, además de la revisión de conexiones eléctricas, mantendrán los componentes en buen estado y la seguridad del equipo.

Referencias Bibliográficas

- Arismendi, J y Bravo a. (2020). *Diseño y construcción de una plataforma elevadora de carrocerías de camiones en la empresa Ninox S.A.S.* (Tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- Buler Motors (2020). *Catalogo de motores Buhler*. www.buehlermotor.com
- Castaño F (2003). *Levantamiento y Estabilización del Péndulo Invertido*. (tesis de pregrado)
- Castaño S. (2023). *Control Automático Educación*. <https://goo.su/OxHWX9>
- Control Tutorials Matlab and Simulink. (2017). *Inverted Pendulum: System Modeling*. (umich.edu)
- Esparza, E y Ruiz L. (2012). *Diseño y construcción de una plataforma experimental (de péndulo invertido lineal) como herramienta de investigación y desarrollo para el laboratorio de sistemas dinámicos, ingeniería de control y robótica*. (Tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- Herrera L, y Melo U. (2013). *Control en espacio de estados para un prototipo real de péndulo invertido*. (Tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- MathWorks (2023). *Simulink para diseño y simulación de sistemas*. la.mathworks.com
- Nise, N. S. (2007). *Control systems engineering, fifth edition with wileyplus set (5a ed.)*. John Wiley & Sons.
- Nylamp Mechatronic (2020). *Catálogo de productos V-Slot*. naylampmechatronics.com
- Ogata, K. (1995). *Discrete-time control systems: International edition (2a ed.)*. Pearson.
- Ogata. (1998). *Ingeniería De Control Moderna (Hispan) (3a ed.)*. Prentice-Hall.

Oswaldo J. (2012). *Diseño y construcción de un péndulo invertido rotativo como herramienta de investigación y desarrollo para el laboratorio de sistemas dinámicos e ingeniería de control*. (Tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Villegas H. S. (2021). *Linear Control with delay scheduling of a under actuated unstable dynamic system*. (Tesis de Maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Yang, C., & Lewis, P. H. (2000). *Sistemas de control en ingeniería*. Prentice Hall.