

Pensamiento algebraico temprano: un estudio de sus orígenes y aportes para el trabajo en el aula
de matemáticas

Laura N. García, Laura N. Panqueva y Gustavo A. Tarazona

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciado en Matemáticas

Director

Solange Roa Fuentes

Doctora en Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2024

Dedicatoria

A mis padres Humberto y Sandra Liliana quienes con su ejemplo, amor y apoyo incondicional han sido mi mayor inspiración para cumplir cada uno de mis sueños, sin su esfuerzo y dedicación esto no sería posible.

A Santiago quien ha sido mi motivación constante para seguir adelante y ser mejor persona cada día, gracias por inspirarme a ser un gran ejemplo.

A mis abuelos Humberto, Juan de Jesús, Gladys y Aminta cuyas enseñanzas y amor han sido fortaleza en todo momento, su ejemplo de perseverancia y sabiduría son mi mayor tesoro.

Laura Nathalia Panqueva Rangel

A mi padre, José Manuel, quien ha estado a mi lado apoyándome en cada momento de mi vida.

Agradezco por todo el amor y dedicación porque han sido fundamentales para superar cada desafío y alcanzar mis metas.

A mi novio Luisfer, por ser siempre una fuente de ánimo y aliento, especialmente en los momentos más difíciles y todo el apoyo incondicional que me ha dado.

A los amigos que hice durante la carrera y a todos los que me ayudaron, les agradezco profundamente por su apoyo y compañía.

Laura Nathalia García Reyes

Agradecimientos

A Dios por ser fortaleza y guía en momentos de incertidumbre.

A nuestros padres por ser pilar fundamental de nuestras vidas y fuente inagotable de motivación, quienes creyeron y confiaron en nosotros durante cada paso de este camino.

A nuestros familiares quienes representan una mano amiga y una voz de aliento en todo momento.

A nuestra directora Solange Roa por su confianza, dedicación y compromiso. Gracias por orientarnos en este camino.

A todos nuestros maestros quienes con su vocación y pasión por la enseñanza han dejado huella y un sinfín de conocimiento.

A nuestras mascotas Bless y Oliverto que con su compañía y lealtad han sido calma en momentos difíciles y fuente de amor incondicional.

A todos ustedes nuestro más sincero agradecimiento

Gustavo, Laura y Nathalia

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción	10
1. Objetivos.....	13
1.1. Objetivo General.....	13
1.2. Objetivos Específicos.....	13
2. Pensamiento Algebraico Temprano en Educación Matemática	13
3. Marco conceptual.....	19
4. Diseño Metodológico.....	22
4.1. Definición de criterios de búsqueda y preselección de artículos	23
4.2. Selección y Método de Estudio de la Literatura Elegida.....	28
4.3. Resultados del diseño metodológico.....	29
5. Aportes Para el Aula	29
5.1. ¿Qué Definiciones y/o Explicaciones del Pensamiento Algebraico Temprano se Identifican en Educación Matemática?.....	29
5.2. ¿Qué aportes se han planteado para favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico temprano en el aula de matemáticas?.....	39
5.2.1. Aritmética generalizada	40
5.2.2. Pensamiento funcional	51
5.2.2.1. Estudio de secuencias.	60
5.2.2.2. Secuencias Numéricas.	61
5.2.2.3. Patrones figurales.....	64
5.2.3. Modelación	66

5.2.3.1.	Uso de variable contador en Scratch.....	67
6.	Reflexiones finales.....	70
	Referencias.....	71

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1 <i>Listado de preselección de revistas de alto impacto</i>	24
Tabla 2 <i>Lista de artículos seleccionados para analizar durante el seminario</i>	25
Tabla 3 <i>Variables propias en Scratch</i>	68
Tabla 4 <i>Interacciones propias en Scratch</i>	69

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1 <i>Marco conceptual de pensamiento algebraico (Ralston, 2013. Adaptado de Sibgatullin et al., 2022)</i>	38
Figura 2 <i>Introducción del cuento-problema de las tarjetas</i>	41
Figura 3 <i>Participación de Gustav</i>	42
Figura 4 <i>Participación de Mariana</i>	43
Figura 5 <i>Tabla representaciones de la incógnita dadas por algunos estudiantes</i>	44
Figura 6 <i>Tabla que contienen</i>	47
Figura 7 <i>Tres tareas de fracciones inversas</i>	49
Figura 8 <i>Solución a través de una estrategia completamente multiplicativa</i>	50
Figura 9 <i>Solución de Gloria a través de una estrategia utilizando diagramas</i>	50
Figura 10 <i>Material para abordar el signo igual o como igualdad dual</i>	54
Figura 11 <i>Problema de ecuación de un valor faltante</i>	55
Figura 12 <i>Ejemplos en la condición de igualdad con sus rutas de estrategia estructural</i> ..	56
Figura 13 <i>Ejemplos de estudiantes en la condición de Igualdad + Sustitutiva que muestran la ruta de la estrategia estructural</i>	56
Figura 14 <i>Tarea de pensamiento funcional usada en lecciones de álgebra</i>	58
Figura 15 <i>Tarea de secuencias numérica</i>	62
Figura 16 <i>Intervención en el tablero de tres estudiantes en los ítems 1 y 2</i>	63
Figura 17 <i>Tarea secuencia figural</i>	65
Figura 18 <i>Deslizamientos con el lápiz realizados por la estudiante Laura Sofia</i>	65
Figura 19 <i>Ejemplo de programación en Scratch</i>	68

Resumen

Título: Pensamiento algebraico temprano: Un estudio de sus orígenes y aportes para el trabajo en el aula de matemáticas *

Autor: Laura N. García, Laura N. Panqueva y Gustavo A. Tarazona **

Palabras Clave: Álgebra temprana, Pensamiento Algebraico, Educación Matemática

Descripción: El desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años se ha reconocido como fundamental en el ámbito educativo, especialmente dentro del marco del denominado álgebra temprana. Este enfoque ha captado la atención de investigadores por su potencial para enseñarse desde edades tempranas, lo que motiva esta investigación. El propósito fundamental de este seminario es explorar el origen y la integración de actividades que estimulan el pensamiento algebraico dentro del entorno educativo. Este pensamiento abarca el desarrollo del pensamiento funcional y la generalización de patrones. Estas competencias no solo son esenciales para adquirir una comprensión profunda de las matemáticas, sino que también promueven habilidades cognitivas fundamentales en los estudiantes. El seminario se centra en la recopilación y selección de literatura especializada que permitirá a los futuros docentes integrar efectivamente actividades diseñadas para cultivar el pensamiento algebraico en las aulas. Mediante esta investigación, se espera trazar un panorama claro sobre las prácticas más efectivas y los fundamentos teóricos que sustentan la enseñanza del álgebra temprana. Esto no solo beneficiará el desarrollo académico de los estudiantes, sino que también preparará a los educadores para implementar estrategias pedagógicas innovadoras y adaptadas a las necesidades de sus alumnos.

* Seminario de Investigación

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en matemáticas. Director: Dora Solange Roa Doctora en Matemática Educativa.

Abstract

Title: Early Algebraic thinking: A study of its origins and contributions to mathematics classroom work*

Author(s): Laura N. Garcia, Laura N. Panqueva y Gustavo A. Tarazona **

Key Words: Mathematics Education, Early Algebra, Algebraic Thinking.

Description: The development of algebraic thinking in children has been recognized as a fundamental in education, especially within the framework of early algebra. This approach has attracted the attention of researchers because of its potential to be taught from an early age, which motivates this research. The main purpose of this seminar is to the origin and integration of activities that stimulate algebraic thinking within the educational environment. This thinking encompasses the ability to generalize patterns and the development of functional and relational thinking. These competencies are not only essential for acquiring a deep understanding of mathematics, but also promote fundamental cognitive skills in students. The seminar focuses on the collection and specialized literature that will enable prospective teachers to effectively integrate activities designed to cultivate algebraic thinking in their classrooms. Through this research, it is hoped to provide a clear picture of the most effective practices and theoretical foundations that underpin the teaching of early algebra. This will not only benefit the academic development of students but will also prepare educators to implement pedagogical strategies tailored to the needs of their students.

* Research Seminar

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Bachelor's Degree in Mathematics. Director: Dora Solange Roa Doctor in Educational Mathematics.

Introducción

El rol del docente trasciende lo que acontece en las aulas de clase, implica la formación permanente sobre un conjunto de habilidades que abarcan el diseño de recursos, la función de valorar el aprendizaje de sus estudiantes y de su enseñanza, el estudio permanente como profesor investigador en temas que contribuyan a su desarrollo profesional, entre otros. Bajo esta perspectiva, nos interesa en este Seminario analizar el desarrollo del Pensamiento algebraico temprano (Early Algebra) que ha ganado progresivamente relevancia en las últimas décadas. En particular profundizar sobre aspectos relacionados con su origen, su evolución, los tipos de actividad que se promueven en el aula y las tareas que potencian su desarrollo. Por tanto, el propósito fundamental de este Seminario es profundizar en el estudio del Pensamiento algebraico temprano, en particular, en aspectos relacionados con el desarrollo del proceso de generalizar, así como en la comprensión de nociones abstractas propias de dicho pensamiento. Como futuros profesores de matemáticas, nos interesa entre otros aspectos, conocer estrategias que permitan una disminución de las dificultades que pueden surgir en los estudiantes de diferentes niveles educativos, en el dominio del lenguaje simbólico propio de nuestra disciplina.

Este seminario se considera relevante por tres razones principales: las pocas investigaciones sobre la incorporación del pensamiento algebraico temprano en el currículo escolar colombiano, los beneficios que aporta el álgebra temprana al desarrollo del pensamiento algebraico en todos los niveles de escolaridad y la contribución que investigaciones de esta naturaleza brindan a los futuros docentes de matemáticas. A continuación, se profundiza en cada una de estas razones.

El álgebra temprana, como se mencionó previamente, forma parte de un planteamiento de cambio curricular que surge como resultado de investigaciones realizadas a partir del año 2000 por investigadores como Blanton y Kaput (2005), Carraher et al. (2006), entre otros. Sin embargo, no se encuentra integrada en los documentos base que regulan la educación colombiana en los niveles básico y medio; estos son: Lineamientos curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencias (2002). Actualmente existen pocas investigaciones, por lo menos reportadas en publicaciones visibles, que hayan evaluado el desarrollo del pensamiento algebraico en los currículos de educación infantil y primaria durante las últimas dos décadas en el contexto colombiano; como se muestra en el desarrollo de este documento, los trabajos más destacados son los realizados por Vergel, en el contexto de la teoría de la Objetivación. Por lo tanto, el propósito de este seminario se centra en examinar el origen y desarrollo del pensamiento algebraico temprano por medio del análisis de la literatura que resulta de un método de búsqueda de tal manera, que podamos profundizar sobre el tipo de actividades que propician la generalización de patrones, el desarrollo de pensamiento relacional y funcional entre otros aspectos. Esto, a su vez, permite contribuir en el desarrollo profesional de los futuros docentes, además, puede incluir el estudio de currículos de otros países como Estados Unidos, que han servido de referencia para los currículos latinoamericanos (Picheira y Alsina 2021).

Según Blanton y Kaput (2005), el álgebra temprana busca desarrollar una estructura subyacente en las matemáticas a través de actividades que permiten el reconocimiento de relaciones y propiedades. No necesariamente implica el uso de variables como x e y ni la introducción de ecuaciones, en el sentido formal de una combinación de letras y números. La forma de pensar que promueve el álgebra temprana fomenta la construcción de diálogos entre estudiantes

y profesores para promover la argumentación y la discusión. Es fundamental mencionar que la incorporación del álgebra temprana en el currículo no se refiere a un curso específico sobre este tema, y, por ende, no implica una lista de contenidos concretos. Más bien, se considera un conjunto de experiencias destinadas a proporcionar a los estudiantes una base sólida para el desarrollo del proceso de generalización propio de toda actividad matemática.

Por tanto, se busca producir un estado del conocimiento en nuestra disciplina sobre el pensamiento algebraico temprano. Para esto se propone hacer una revisión rigurosa y actualizada alrededor de dos preguntas que orientan el diseño y desarrollo de esta investigación:

P1: ¿Qué definiciones y/o explicaciones del pensamiento algebraico temprano se identifican en Educación Matemática?

P2: ¿Qué aportes se han planteado para favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico temprano en el aula de matemáticas?

1. Objetivos

Con base en lo expuesto anteriormente, a continuación, se proponen los objetivos que guían el diseño y desarrollo de este Seminario de Investigación.

1.1. Objetivo General

Estudiar el origen y la evolución del pensamiento algebraico temprano a través del análisis de sus principales aportes para fomentar su desarrollo en el aula de matemáticas.

1.2. Objetivos Específicos

Realizar un estudio bibliográfico sobre la definición, el desarrollo y los principales aportes reportados en la literatura reciente referente al pensamiento algebraico temprano.

Sistematizar la información de las secciones del Seminario centradas en el proceso de generalización de patrones y la comprensión de las relaciones funcionales.

2. Pensamiento Algebraico Temprano en Educación Matemática

En este capítulo se presenta una revisión de investigaciones que se proponen como relevantes para sustentar el diseño y desarrollo del Seminario. La primera selección de artículos se ha centrado en las investigaciones más recientes publicadas en la revista *ZDM-Mathematics*

Education. En 2022 dedica un número especialmente al desarrollo del pensamiento algebraico. De las numerosas investigaciones disponibles, hemos elegido cuatro estudios para su revisión, tres de alcance internacional y uno de alcance nacional. Esto nos permite tener un panorama retrospectivo referente al desarrollo del pensamiento algebraico temprano, para definir y establecer la literatura a estudiar.

En primer lugar, interesa analizar la investigación de Kilhamn et al. (2022) titulada *Variables in Early algebra: exploring didactic potentials in programming activities*, llevada a cabo en Suecia. Este estudio tiene como objetivo desentrañar los diferentes significados de las variables que se involucran en las actividades de programación.

En dicho estudio, las actividades de programación se realizaron en el Instituto de Investigación Ifous que funciona como una asociación sin ánimo de lucro y prioriza la innovación, investigación y el desarrollo en escuelas y centros preescolares. El proyecto se desarrolló durante tres años con profesores, donde se diseñaron lecciones para enseñar programación dentro del marco de las asignaturas escolares existentes, cuando se introdujo por primera vez en el plan de estudios sueco. En las 32 lecciones de matemáticas implementadas hay tres que constan de tareas, donde las variables estaban en juego de maneras diferentes. Para este estudio, las tareas son vistas como ejemplos de actividades auténticas planificadas por el maestro que podrían mejorar el pensamiento algebraico. Cada una de estas tareas incluían código en el entorno visual llamado Scratch, que permite construir códigos arrastrando bloques predefinidos de un área a otra en la pantalla y luego ordenándolos secuencialmente en pilas conectándose entre sí como un rompecabezas (Resnick et al., 2009).

El proyecto en su conjunto se enmarca en el modelo de Chevallard (2006) sobre cómo se transpone el conocimiento entre diferentes instancias del sistema educativo. En este proyecto, el conocimiento académico de la Programación como ciencia y herramienta para los matemáticos, se convierte en conocimiento para la enseñanza y el aprendizaje en las aulas de matemáticas.

La importancia de este artículo para nuestro estudio radica en su enfoque en los procesos de aprendizaje y enseñanza, en este caso en entornos de programación. Este enfoque podría tener un impacto significativo en el desarrollo del Seminario, ya que sugiere posibles direcciones para investigaciones futuras sobre cómo contribuyen los entornos visuales de programación al pensamiento algebraico temprano y de qué manera pueden ser relevantes en el contexto de esta propuesta.

Una segunda investigación que aporta al desarrollo curricular del pensamiento algebraico temprano es el trabajo de Pam y Sunwoo (2022) denominado *Design of a pattern and correspondence unit to foster functional thinking in an elementary mathematics textbook*, realizado en Corea. Este estudio se basa en señalar la importancia del pensamiento funcional, como una vía para fortalecer el pensamiento algebraico en edades tempranas. Los autores identificaron cuatro elementos clave para promover el pensamiento funcional: (a) relaciones de correspondencia en contextos de la vida real; (b) diversas tareas de patrones; (c) exploración de relaciones de correspondencia; y (d) el uso de variables de símbolo para representar una relación de correspondencia.

Con base en estos elementos, los autores rediseñaron una unidad denominada "patrones y correspondencia" para un libro de texto de matemáticas del año 2009. Este proceso implicó adaptar y rediseñar las actividades del libro para crear una versión más actualizada. Todo este proceso de

diseño y desarrollo de la unidad ejemplifica cómo se puede fomentar el pensamiento funcional mediante modificaciones sobre los recursos curriculares actuales.

La investigación de Pam y Sunwoo (2022) se llevó a cabo con dos grupos de cuarto grado con un rango de edad entre los 9-10 años en una escuela primaria en Corea del Sur. Uno de los grupos utilizó el borrador de “la unidad de patrones y correspondencia” diseñado en la investigación, mientras que el otro grupo siguió utilizando el material tradicional. Las respuestas de los estudiantes que utilizaron el nuevo material se analizaron en función de los cuatro elementos previamente mencionados. Además, se proporcionaron a los maestros no solo el libro de texto actualizado, sino también un cuaderno de trabajo y un manual del docente. Se esperaba que los docentes interactuaran activamente con estos recursos curriculares para comprender las intenciones de cada tarea y reconfigurar el proceso de enseñanza. Pam y Sunwoo (2022) destacan la importancia de contar con un currículo de matemáticas que establezca objetivos de aprendizaje y estándares de rendimiento para guiar de manera sistemática el desarrollo del pensamiento funcional. La investigación también señala que se han realizado relativamente pocos estudios centrados en cómo desarrollar recursos educativos que potencien el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. En este contexto, los autores comparten detalles valiosos sobre el proceso de desarrollo de una unidad específica de patrones y correspondencia, lo que se espera que contribuya en futuras investigaciones sobre el desarrollo de libros de texto y recursos curriculares que promuevan el pensamiento funcional en edades tempranas. Esta contribución es esencial para nuestro estudio, ya que se centra en la elaboración de recursos curriculares que sean efectivos para fomentar el pensamiento algebraico, además, destaca la relevancia del currículo en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por otro lado, se presenta el trabajo de Carolyn Kieran (2022) titulado *The multidimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions*, desarrollado en Canadá. El estudio destaca el creciente interés de investigadores y educadores por la introducción del álgebra temprana en los primeros niveles de la educación tomando como aspecto central la multidimensionalidad del pensamiento algebraico. Kieran identifica tres dimensiones esenciales: el pensamiento analítico, el pensamiento estructural y el pensamiento funcional. Dentro de estas dimensiones se enfatiza en la capacidad de generalización, una perspectiva apoyada por Radford (2006) considerándola como fundamental para contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico. En este contexto, el álgebra se presenta como el lenguaje que permite expresar y formalizar la generalización en matemáticas. Por otra parte, esta autora detalla las dimensiones mencionadas y proporciona una base teórica sólida para comprender su importancia. Kieran presenta ejemplos de investigaciones empíricas que ilustran los tipos de tareas utilizados por investigadores para fomentar el pensamiento algebraico temprano. Las dos primeras dimensiones, la analítica y la estructural, se relacionan con la perspectiva generalizada del álgebra desde un enfoque aritmético, mientras que la tercera dimensión se vincula de manera evidente con la perspectiva matemático-funcional del álgebra.

Por último, desde una mirada nacional se destaca la tesis doctoral titulada *La emergencia del pensamiento algebraico y su desarrollo en la educación primaria* del doctor Rodolfo Vergel (2016), realizada en la ciudad de Bogotá. La tesis consta de cinco capítulos que esbozan la preocupación actual sobre el desarrollo del pensamiento algebraico. Un interés que aborda en esta investigación es en la promoción de actividades educativas que fomenten la interacción entre estudiantes y profesores en torno a tareas de generalización de patrones. A partir de estas tareas se

busca proporcionar a los estudiantes la oportunidad de expresar y reflexionar sobre su pensamiento algebraico.

Este enfoque está respaldado por teorías que subrayan el papel fundamental de la cultura en los procesos de aprendizaje. La influencia de Vygotsky, especialmente su teoría sobre el desarrollo del pensamiento se destaca como un punto clave en la comprensión de cómo los estudiantes adquieren conocimientos matemáticos. La teoría que sustenta el trabajo de Vergel (2016) es la teoría de la objetivación. Esta teoría se basa en la idea de que el individuo aprende a través de su participación en actividades dentro de un contexto cultural, donde hereda formas de pensar, actuar y razonar. El trabajo de campo se realizó con estudiantes de cuarto y quinto grado en un colegio público de Bogotá. Los hallazgos de la investigación revelaron que la materialidad de las actividades desempeña un papel fundamental en la comprensión del pensamiento algebraico por parte de los estudiantes. Elementos sensoriales, prácticas conjuntas y recursos semióticos, como gestos y movimientos, emergen como aspectos fundamentales en la formación del pensamiento algebraico temprano.

Si bien los estudiantes adquieren conocimientos sobre el pensamiento algebraico al abordar tareas relacionadas con secuencias y patrones, la comprensión obtenida no es completa. Es evidente que este conocimiento es un proceso en desarrollo, y se necesita una comprensión más profunda y sólida para su plena asimilación. Esto lleva a la reflexión de que los métodos y enfoques actuales en la enseñanza de las matemáticas podrían necesitar ser enriquecidos y adaptados para fomentar un desarrollo más completo del pensamiento algebraico en una etapa temprana.

En este sentido, este Seminario de investigación propone que los resultados obtenidos deberían ser considerados para mejorar los programas de formación de docentes en matemáticas.

Esto implica un cambio en la percepción general sobre el aprendizaje de las matemáticas, desafiando la creencia errónea de que son procesos puramente memorísticos y mecánicos. Es esencial resaltar la importancia de una comprensión más profunda y contextualizada de las matemáticas en la vida cotidiana, mostrando que estos aprendizajes son dinámicos, útiles y relevantes para un uso práctico más allá del aula de clase.

3. Marco Conceptual

La inclusión del álgebra en el currículo forma parte de una iniciativa de reforma curricular conocida como "Early algebra" (álgebra temprana). Esta iniciativa se originó en Estados Unidos después de que Kaput presentara su trabajo en 1998 durante un evento organizado por el *National Council of Teachers of Mathematics* (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas - NCTM). La idea central detrás del concepto de álgebra temprana es introducir conceptos y habilidades algebraicas desde las etapas iniciales del currículo educativo, en lugar de esperar hasta niveles educativos más avanzados. En las últimas décadas, esta perspectiva ha ganado relevancia y se ha convertido en un tema de investigación y discusión en la educación matemática a nivel global. Académicos destacados como Schliemann (2007), Kaput (2000) y Cai y Knuth (2011) han contribuido significativamente al desarrollo de esta perspectiva. A medida que se profundiza en la comprensión de sus fundamentos y beneficios, se ha comenzado a considerar la inclusión de nociones algebraicas en las primeras etapas del currículo como una estrategia efectiva para promover una comprensión sólida y completa de las matemáticas entre los estudiantes desde edades tempranas.

La importancia de introducir el álgebra en la educación primaria se basa en argumentos respaldados por diversos autores. Hohensee (2017), por ejemplo, destaca que numerosos estudios

respaldan la idea de incorporar el álgebra desde edades tempranas, ya que esto puede preparar a los estudiantes para abordar tareas de naturaleza algebraica en el futuro. Derry et al. (2007) comparten una perspectiva similar, argumentando que la enseñanza del álgebra en los primeros años de educación primaria puede ser altamente efectiva para preparar a los estudiantes en el trabajo algebraico que encontrarán en la escuela secundaria. Además, Carpenter, Frankle y Levi (2003) enfatizan que la comprensión del carácter simbólico del álgebra requiere tiempo y madurez cognitiva, y consideran que iniciar su enseñanza en los primeros niveles de educación es apropiado, permitiendo a los estudiantes desarrollar gradualmente esta comprensión simbólica para facilitar su avance en la materia.

Por su parte, Zapatera (2016) agrega una dimensión crítica al destacar que el álgebra se considera el núcleo fundamental de las matemáticas y es plenamente accesible para estudiantes de primaria. Esta perspectiva subraya la importancia de introducir conceptos algebraicos en edades tempranas para cimentar bases sólidas en matemáticas, potenciando habilidades cognitivas esenciales como: el razonamiento lógico, la resolución de problemas y la abstracción.

A pesar de estos beneficios, la implementación del álgebra en los niveles iniciales del currículo educativo se encuentra con desafíos considerables. Solar (2016) menciona que los profesores se enfrentan a la tarea de adaptar enfoques pedagógicos y seleccionar recursos educativos efectivos para fomentar la comprensión de conceptos algebraicos en un contexto de educación primaria. Esto subraya la necesidad de una planificación cuidadosa y del respaldo adecuado por parte de los educadores para asegurar que la inclusión del álgebra en la educación primaria sea un proceso efectivo y enriquecedor. En resumen, la incorporación del álgebra temprana en el currículo educativo se valora positivamente debido a su potencial para construir

una sólida base matemática y fomentar habilidades cognitivas clave, aunque su implementación requiere esfuerzo y apoyo docente.

En Colombia, el enfoque del álgebra temprana se manifiesta en el marco de los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias. Aunque no se aborda explícitamente el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas, se reconoce el propósito fundamental de introducir el álgebra en la escuela fomentando el pensamiento variacional. Este enfoque no está restringido a un grado educativo específico, ya que se promueve desde la educación primaria hasta la secundaria y la educación media, lo que demuestra una coherencia horizontal en la enseñanza de los procesos algebraicos (MEN, 2006).

El pensamiento variacional, según los Estándares Básicos de Competencias, se relaciona con la capacidad de percibir y caracterizar la variación y el cambio en diversos contextos (MEN, 2006, p. 66). Se sugiere que su estudio puede comenzar con la exploración de reglas de formación, lo que brinda oportunidades para formular conjeturas, ponerlas a prueba, generalizarse y argumentar sobre ellas. Esta aproximación busca desarrollar la capacidad de los estudiantes para comprender y manejar patrones y regularidades en datos numéricos, geométricos y algebraicos.

Los Lineamientos Curriculares (1998) también presentan ideas y actividades explícitas para que los estudiantes, desde los primeros niveles de escolaridad, desarrollen pensamiento variacional. Esto está directamente relacionado con las tareas de algebrización en la escuela. Los estudiantes se animan a analizar cómo cambian, aumentan o disminuyen las formas o los valores en secuencias o sucesiones de figuras, números o letras. Además, se les alienta a formular conjeturas sobre el siguiente término en la secuencia, expresar sus observaciones de manera oral o escrita, utilizar dibujos y otras representaciones, y tratar de establecer procedimientos, algoritmos

o fórmulas que les permitan replicar los patrones identificados, calcular los términos siguientes y evaluar la validez de sus conjeturas. Al final, se busca que los estudiantes puedan generalizar sus descubrimientos y aplicarlos en diferentes contextos matemáticos. Esta aproximación fomenta la construcción progresiva de un pensamiento algebraico sólido desde los primeros años de escolaridad en Colombia.

4. Diseño Metodológico

El presente trabajo se sustenta en el diseño y desarrollo de un Seminario enfocado en la revisión de documentos académicos, que fueron seleccionados y analizados en sesiones semanales programadas durante el semestre 2023-II y 2024-I, en el contexto del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

El seminario se llevó a cabo desde agosto del 2023 hasta junio del 2024. Durante las intervenciones semanales, se asignaban roles a los integrantes bajo la orientación de la directora. Los tres integrantes tomábamos turnos rotativos para asumir el rol de relator, quien era el responsable de orientar la reunión mediante preguntas, artículos, puntos clave y demás. A su vez, otro de los integrantes se encargaba de redactar un registro de los discutido, el cual se refleja como resultado este documento. Todos los participantes leíamos, analizábamos, indagábamos previamente a cada reunión realizando así aportes, preguntas y demás contribuciones para ir construyendo el documento final.

La metodología se centra en la identificación y selección de documentos que aborden de manera relevante el Pensamiento Algebraico temprano. Los criterios de selección de la literatura a estudiar se describen en las siguientes secciones.

El proceso de selección consiste en una revisión detallada de los documentos resultado de la búsqueda según los criterios que se desarrollan más adelante. Esto permite ampliar la visión de un problema, en nuestro caso analizando los resultados presentados principalmente en revistas de investigación en Educación Matemática relacionadas con el desarrollo de pensamiento algebraico temprano (Serna, Cardona y Carmona, 2021).

En concreto, se plantean tres fases para el desarrollo del Seminario de investigación: i. Definición de criterios de búsqueda y preselección de artículos, ii. Selección y método de estudio de la literatura elegida y iii. Resultados; a continuación, se define y desarrolla cada fase.

4.1. Definición de criterios de búsqueda y preselección de artículos

Inicialmente se propone realizar la revisión en un periodo de diez años entre 2013 y 2023. En un principio en la revisión se identifica que, en 2008 James J. Kaput, David W. Carraher y Maria L. Blanton editan el libro *Algebra in the Early Grades*, a partir de esta publicación se continúa con un trabajo dedicado al estudio del álgebra y su impacto en el desarrollo de pensamiento matemático temprano. Dentro de la literatura y dadas las limitaciones de este trabajo, se realiza una primera identificación de documentos teniendo en cuenta principalmente artículos de investigación publicados en revistas de alto impacto. Se consideran las revistas de acuerdo con los rankings elaborados por Toerner y Arzarello (2012) y Williams y Leatham (2017) que agrupan principalmente revistas en inglés. En un segundo nivel se seleccionan los artículos de revistas iberoamericanas tomando como referente la lista publicada por Andrade-Molina et al. (2020); tal como se señala en la tabla 1.

Tabla 1*Listado de preselección de revistas de alto impacto*

Revistas Anglosajonas	Revistas Iberoamericanas
Educational Studies in Mathematics	Boletim de Educação Matemática. BOLEMA
Journal for Research in Mathematics Education	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME
For the Learning of Mathematics	Educación Matemática
The Journal of Mathematical Behavior	Revista Latinoamericana de Etnomatemática
Journal of Mathematics Teacher Education	ZETETIKÉ Revista de Educação Matemática
Mathematical Thinking and Learning	UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática
ZDM Mathematics Education	QUADRANTE. Revista de Investigaçõ em Educação Matemáticas

Nota. Algunas de las revistas en las que se planeó realizar la búsqueda y selección de los artículos a discutir.

De las listas consultadas en idioma inglés, se opta por estudiar principalmente el número especial publicado por ZDM Mathematics Education titulado: “*Early Algebraic Thinking: A Multi-*

Dimensional and Ever-Expanding Global Vision". Dado que éste representa una agrupación importante de autores que están trabajando en el mundo sobre el desarrollo de pensamiento algebraico temprano en un amplio periodo de tiempo, lo que presupone experiencia en la temática. A continuación, en la tabla 2 se ilustran los artículos tratados durante el seminario.

Tabla 2

Lista de artículos seleccionados para analizar durante el seminario

Autor(es) y año	Publicación	Contribución
Carolyn Kieran (2022)	The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions	Presenta la evolución histórica de la noción de álgebra, además aborda trabajos empíricos y trabajos recientes sobre la caracterización del pensamiento algebraico temprano.
Andrea Marquardt Donovan, Ana Stephens, Burcu Alapala, Allison Monday, Emily	Is a substitute the same? Learning from lessons centering different relational conceptions of the equal sign.	Desarrollo de una comprensión fundamental del signo igual como símbolo relacional mediante la

Szkudlarek, Martha W. Alibali & Percival G. Matthews (2022)		implementación de actividades guiadas.
Catherine Pearn, Max Stephens & Robyn Pierce (2022)	Algebraic reasoning in years 5 and 6: classifying its emergence and progression using reverse fraction tasks	Proporciona una transición progresiva del pensamiento algebraico no simbólico hacia el pensamiento algebraico totalmente generalizado a través de tareas de fracción inversa.
Denise Lenz (2022)	The role of variables in relational thinking: an interview study with kindergarten and primary school children	Estudia el pensamiento relacional y el tratamiento de variables en estudiantes de preescolar y primaria.
Deborah Schifter y Susan Jo Russell (2022)	The centrality of student-generated representation investigating	Analiza la naturaleza de las representaciones, los procesos de justificación y

	generalizations about the operations.	generalización de los estudiantes.
Eder pinto, Maria C. cañadas y Antonio Moreno (2022)	Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra.	Define el pensamiento funcional así como un ejemplo de actividad que permite propiciar en el aula de clase.
Shengying Xie y Jinfa Cai (2022)	Fifth graders' learning to solve equations: the impact of early arithmetic strategies.	Analiza el uso de estrategias aritméticas tempranas en la resolución de ecuaciones que involucran dos representaciones de incógnitas en un grupo de estudiantes de quinto grado.
Cecilia Kilhamn, Kajsa Bråting, Ola Helenio y Juan Masón (2022)	Variables in early algebra: exploring didactic potentials in programming activities.	Estudia actividades de programación utilizadas por profesores de matemáticas en Suecia para potenciar el

		pensamiento algebraico temprano.
<hr/>		
Ulises	Starting points:	Explora las reacciones
Xolocotzin, Ana	understanding children's	intuitivas previas a la
M. Medrano Moya	pre-instructional intuitions	instrucción de los niños al
y Teresa Rojano	about function tables.	contenido del pensamiento
(2022)		funcional.

Nota. Se mencionan los artículos, autores y el aporte más relevante que estos pueden aportar al proceso de investigación.

4.2. Selección y Método de Estudio de la Literatura Elegida

La aplicación de la fase anterior permite reconocer un panorama general sobre las investigaciones relacionadas con el pensamiento algebraico temprano, sus definiciones, la diversidad de las poblaciones estudiadas, el tipo de tareas y actividades no rutinarias, en general, los diferentes aspectos que permiten conocer con mayor profundidad esta manera de pensar, así como las formas de promover su desarrollo en el aula.

Además de los documentos seleccionados dentro de la lista de artículos, tomando como base el conocimiento propio de los integrantes del Seminario de Investigación, decidimos incluir el trabajo de Rodolfo Vergel y Luis Radford, éstos específicamente sustentados en la teoría de la Objetivación. Los artículos son estudiados tal como se desarrollan en la siguiente sección.

4.3. Resultados del diseño metodológico

Los resultados del diseño y desarrollo del Seminario giran alrededor de las preguntas que sustentan las Fases propuestas en el método. Primero se presenta una síntesis de los orígenes, el desarrollo y evolución del pensamiento algebraico temprano; para luego señalar los diversos contextos, tareas, actividades, entre otros, que han sido planteados por diversos investigadores como promotores del pensamiento algebraico temprano en el aula.

5. Aportes Para el Aula

5.1. ¿Qué Definiciones y/o Explicaciones del Pensamiento Algebraico Temprano se Identifican en Educación Matemática?

Para abordar los conceptos y definiciones clave en educación matemática, es fundamental comenzar por entender el razonamiento algebraico. Diversos autores, como Sfard (1991) y Tall (2001) citados recientemente por Lenz (2022) han identificado dos visiones principales que arrojan luz sobre este tema: una centrada en el proceso y otra en el concepto en relación con el uso de símbolos matemáticos.

La visión relacionada con el proceso se enfoca en la manipulación rutinaria de objetos matemáticos, describiendo un pensamiento algorítmico que implica el descubrimiento de soluciones. Este enfoque está estrechamente vinculado al *pensamiento no algebraico (aritmético)*, donde las operaciones se realizan de manera secuencial y sistemática para resolver problemas.

En contraste, la visión relacionada con el concepto es más compleja, ya que aborda el conocimiento que existe en una variedad de relaciones entre objetos matemáticos. Aquí se hace énfasis en las relaciones entre las estructuras matemáticas, lo que se conoce como *pensamiento algebraico*. Este último se enfoca en cómo los elementos matemáticos se relacionan entre sí.

Por consiguiente, estudiaremos el pensamiento algebraico desde el panorama nacional, este orientado por el Ministerio Nacional de Educación (MEN), destacando documentos como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (2016).

En primer lugar, el pensamiento algebraico temprano en los Lineamientos Curriculares (1998) establece pensamientos que potencian el pensamiento matemático a través del pensamiento variacional el que por supuesto incluye al funcional. Este pensamiento busca acercar el álgebra a los estudiantes a través de una progresión didáctica. En particular, se propone la generalización de patrones aritméticos, lo cual sienta las bases para una posterior modelización mediante situaciones de cuantificación.

El proceso implica una transición gradual hacia el simbolismo algebraico, donde las expresiones juegan un papel crucial. Asimismo, se enfatiza la importancia de comprender la noción y el significado de la variable, entendida como la variación o cambio en un contexto dado.

Es relevante destacar que la igualdad en una ecuación puede adquirir diversos significados, así como ciertas estructuras algebraicas se convierten en herramientas para la resolución de problemas y el análisis de relaciones funcionales y de variación en general. Este enfoque variacional permite explicar cómo una cantidad varía en relación con otra y facilita la contextualización de modelos de dependencia entre variables, aspecto inherente al pensamiento algebraico.

La evolución histórica del pensamiento variacional y de los sistemas algebraicos y analíticos se origina en antiguas civilizaciones como la babilónica, donde se inició el estudio a partir de tablas que registraban variaciones. Este enfoque evolucionó a lo largo de la historia, encontrando su expresión en la Edad Media, donde destacados pensadores como Oresme

contribuyeron al desarrollo de gráficas de variación. El Renacimiento, por su parte, fue testigo del surgimiento de fórmulas algebraicas que enriquecieron este campo.

Durante la Edad Media, el pensamiento variacional se percibía como una teoría que explicaba cómo la variación estaba implícita en las acciones cotidianas. Esta evolución del pensamiento variacional sugiere que las estructuras conceptuales se desarrollan con el tiempo y que su comprensión es un proceso gradual que se vuelve más sofisticado con el tiempo.

En la actualidad, la transición de las formas de representación asociadas a la variación ha experimentado un avance significativo. Además de los métodos tradicionales como enunciados verbales, representaciones tabulares y gráficas cartesianas, se han desarrollado herramientas más especializadas como la programación informática y la modelización computacional. Estas tecnologías permiten abordar de manera más precisa y compleja el estudio de la variación, facilitando así la comprensión y aplicación de conceptos algebraicos y analíticos en diversos campos del conocimiento.

A partir de lo anterior, la introducción temprana del estudio de la variación en el currículo de matemáticas es de suma importancia. El significado y la relevancia de la variación pueden ser establecidos a través de situaciones problemáticas que reflejen fenómenos de cambio y variación en la vida cotidiana. La organización sistemática de la variación en tablas puede servir como punto de partida para iniciar a los estudiantes en el desarrollo del pensamiento variacional. Resolver tareas que implican procesos aritméticos no solo fomenta la comprensión de la variable y las fórmulas, sino que también sienta las bases para una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

Este enfoque reflexivo en el currículo matemático permite a los estudiantes no solo adquirir habilidades técnicas, sino también comprender la relevancia y la aplicabilidad de los conceptos

matemáticos en su entorno. Al abordar situaciones problemáticas del mundo real que implican variación, los estudiantes desarrollan una comprensión más sólida de cómo los principios matemáticos pueden utilizarse para analizar y resolver problemas prácticos.

Asimismo, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuestos por el MEN (2006) denominan al pensamiento algebraico como el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, según este, el pensamiento algebraico abarca la habilidad para identificar y describir la variación y cambio en diferentes situaciones, así como para modelar estas variaciones utilizando diversos sistemas y registros simbólicos, incluyendo expresiones verbales, gráficas, icónicas y algebraicas. Esta competencia es esencial para la resolución de problemas matemáticos, así como para interpretar fenómenos de variación en diversos campos.

En los primeros años escolares, proponen empezar a estudiar el cambio de manera cercana a los estudiantes mediante actividades que impliquen el análisis de la variación, por ejemplo: los cambios de temperatura, registro del crecimiento de una planta, circulación vial, etc. estos ya sea por día, semana o mes. Como resultado los estudiantes pueden llegar a comprender el cambio y la variación.

Por otra parte, también resalta el análisis de patrones que implica explorar nociones fundamentales del pensamiento variacional, como la constante, la variable, la función, la razón o la tasa de cambio. También implica comprender la relación entre variables, su dependencia e independencia entre sí. Además, se relaciona con diversos tipos de funciones, así como con la interpretación de relaciones de desigualdad y la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

Conviene mencionar, otro de los documentos guías, los DBA, estos tienen una estructura compuesta por un enunciado u objetivo, evidencias de aprendizaje y ejemplos, inmersamente están relacionados al pensamiento algebraico, pero no brindan una definición formal.

Por lo que se refiere a una perspectiva más amplia que la nacional podemos ver cómo se define el pensamiento algebraico temprano según el NCTM (2000) cuando propone los principios y estándares para la educación matemática plantea que los estudiantes requieren comprender las funciones, representar y analizar estructuras matemáticas y analizar diferentes situaciones usando símbolos algebraicos, además, usar modelos matemáticos para representar relaciones cuantitativas y analizar el cambio en diferentes situaciones de la vida real.

Uno de los investigadores que más han trabajado sobre el pensamiento algebraico es Kaput, en particular Sibgatullin et al., (2022) destacan cinco aspectos principales que Kaput en 1999 usa para delimitar esta forma de pensar, estas son: i. Generalización aritmética y estudio de patrones, ii. Usar símbolos significativamente; iii. Construir una estructura del sistema numérico visible y abstracto al realizar cálculos; iv. Trabajar con funciones y relaciones sobre diferentes conjuntos; y v. Todo lo anterior implica modelar matemáticamente.

A continuación, abordaremos algunas subdivisiones que conforman el pensamiento algebraico.

En primer lugar, nos interesa estudiar el *pensamiento relacional*. Autores como Lenz (2022) mencionan que este enfoque implica considerar las expresiones matemáticas y las ecuaciones en su totalidad, en lugar de verlas como simples procesos de cálculo individuales. Así mismo define el pensamiento relacional en función de la construcción de relaciones entre dos variables, a partir de la exploración sobre diferentes formas de representación.

En el estudio del pensamiento algebraico temprano, se distinguen diversas definiciones, entre ellas se encuentra el pensamiento relacional enfocado en el estudio de la igualdad. Según lo expuesto por Donovan et al (2022), la comprensión del signo igual resulta vital en este contexto.

Este símbolo no se restringe únicamente a denotar una igualdad estática entre dos valores, sino que se concibe como un símbolo que establece una relación de equivalencia entre ellos.

Desde esta visión, autores como Jones y Pratt (2012) sugieren que entender el signo igual implica considerar tanto la igualdad como aspectos sustitutivos. Es decir, comprender este símbolo implica no sólo reconocer la igualdad entre dos cantidades, sino también entender la posibilidad de sustituir una cantidad por otra manteniendo dicha igualdad.

Por otra parte, encontramos el concepto de *pensamiento funcional*, este se refiere, según Pinto, Cañadas y Moreno (2022) a la habilidad de comprender, analizar y trabajar con funciones matemáticas de diversas maneras. Las funciones son relaciones entre conjuntos, donde a cada elemento de un conjunto se le asigna un único elemento de otro conjunto. De la misma forma las autoras mencionan que el pensamiento funcional implica entender la manera en que todos los valores se encuentran relacionados.

Otra definición que se le otorga al pensamiento funcional es la que Blanton et al. (2011, p. 13) citado por Kieran (2022), quienes proponen que el pensamiento funcional "implica generalizar relaciones entre cantidades covariables, expresar esas relaciones en palabras, símbolos, tablas o gráficos, y razonar con estas diversas representaciones para analizar el comportamiento de las funciones" (Kieran, 2022, p. 13).

Autores como Smith (2003, 2008) citados por Pinto, Cañadas y Moreno (2019) centran su atención en tres tipos de relaciones funcionales:

a) Patrones recursivos: Implica entender una variable en función de la imagen de un término anterior. Por ejemplo, tenemos que en una sucesión como 8, 10, 12, ..., cada término aumenta de dos en dos.

b) Correspondencia: Enfatiza la relación entre pares de variables. Por ejemplo, en el conjunto de puntos $\{(1,8), (2,10), (3,12), \dots\}$ la relación entre la primera componente y la segunda se describe verbalmente como: la segunda componente es dos veces la primera más seis unidades o de forma algebraica como: $y = 2x + 6$

c) Covariación: Analiza cómo dos cantidades varían y explica cómo el cambio en una variable afecta a la otra. Usando el mismo conjunto de puntos del ejemplo anterior podemos decir que cuando la primera componente aumenta en una unidad y la segunda componente aumenta en dos unidades. (Ejemplos adaptados de Pinto, Cañada y Moreno, 2022).

Otra noción fundamental en el álgebra temprana es la noción de incógnita, ya que resulta clave en la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico y su generalización permite un estudio más profundo de la variable y el parámetro. Sin embargo, Xie y Caí (2022) resaltan que, al abordar la resolución de ecuaciones, la comprensión de la incógnita puede verse comprometida, ya que a menudo se presta más atención a la representación que a la interpretación.

De igual manera, los autores afirman “nuestro objetivo no solo es examinar los métodos que los estudiantes usan para resolver ecuaciones como $15 (\cdot) = 5$ y $15 x = 5$, sino también examinar cómo los estudiantes ven (\cdot) y x en las ecuaciones.”, se destaca la importancia de comprender cómo los estudiantes perciben y manejan la incógnita en el contexto específico de la resolución de ecuaciones.

Del mismo modo, se reconoce en las aulas que los estudiantes resuelven de manera rutinaria problemas con incógnitas como: $37 + ? = 54$, pero resuelven este tipo de problemas sin tener que representar y operar sobre las incógnitas, Barr et al. (2003), citado por Xie y Cai (2022) ejemplifican que cuando le pedimos a los estudiantes que resuelvan una ecuación, pueden seguir un ejemplo y obtener una respuesta correcta sin entender cómo o por qué funciona el proceso.

Por esto, al explorar cómo los estudiantes perciben y manejan la incógnita en la resolución de ecuaciones, es posible desarrollar una comprensión de cómo se desarrolla el pensamiento algebraico en una etapa temprana del aprendizaje matemático. Según Kaput (2008) citado por Chimoni, Pitta-Pantazi y Christou (2023) el desarrollo del pensamiento algebraico se consigue mediante el avance a largo plazo del álgebra en diferentes facetas:

1) Álgebra como aritmética generalizada y razonamiento cuantitativo. En este primer aspecto, se enfatiza la importancia de ir más allá de la aritmética básica. Se trata de que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan ser conscientes de las relaciones entre operaciones. Esto implica el uso de propiedades para el cálculo de expresiones algebraicas, así como comprender el signo igual como una equivalencia más profunda, en lugar de simplemente una señal de realizar cálculos.

2) Álgebra como pensamiento funcional. En este caso, se destaca la necesidad de que los estudiantes puedan identificar y expresar las relaciones entre variables, las cuales pueden estar presentadas a través de patrones numéricos o figurativos.

3) Álgebra como lenguaje de modelado. Aquí se aborda la utilización del álgebra como una herramienta para modelar fenómenos tanto dentro como fuera del contexto matemático. Esto implica representar situaciones concretas a través de diversas herramientas algebraicas. Es relevante señalar que los conceptos de aritmética generalizada y pensamiento funcional también se entrelazan con el lenguaje de modelado. Por ejemplo, el uso de funciones puede ser considerado como una aplicación de lenguajes de modelado si permite describir las regularidades presentes en un problema (Kaput, 2000).

Chimoni, Pitta-Pantazi y Christou (2023) también exploran tres procesos relacionados con el pensamiento algebraico: En donde, la conjetura, se refiere a la habilidad de formular hipótesis

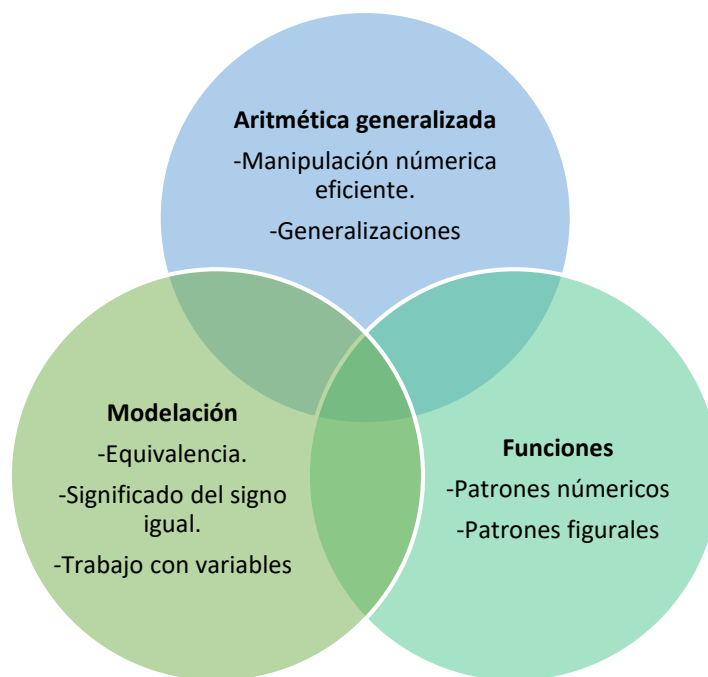
o suposiciones sobre patrones o regularidades observadas en datos o situaciones matemáticas; la generalización, esta implica el proceso de identificar y expresar patrones o reglas generales basadas en observaciones específicas, extendiendo así el conocimiento a casos más amplios y finalmente, la justificación, que se relaciona con la capacidad de proporcionar razones lógicas, pruebas o argumentos que respalden la validez de una conjetura o generalización. Para los autores la generalización y la justificación podrían clasificarse en una categoría asociada a procesos de búsqueda de similitudes y diferencias y la tercera a procesos relacionados con la validación. Según Radford (2008) la generalización ha sido descrita como el núcleo del pensamiento algebraico, ya que este tipo de pensamiento se manifiesta a medida que los estudiantes toman conciencia de las generalizaciones y las expresan utilizando diversos signos semióticos (Radford, 2008).

Hasta ahora hemos explorado las diferencias entre el pensamiento algebraico y no algebraico, reconociendo al primero como aquel que busca analizar relaciones más complejas entre objetos matemáticos. También hemos abordado el concepto de pensamiento relacional, que se sitúa en un punto intermedio entre el pensamiento aritmético y el algebraico; de la misma manera hemos destacado al pensamiento funcional como una parte fundamental del pensamiento algebraico. En este sentido, se han discutido conceptos clave en cada uno de estos enfoques, asociados con: el uso del signo igual en el pensamiento relacional y la presencia de incógnitas en el pensamiento funcional. Además, hemos analizado la definición de Kaput sobre el pensamiento algebraico, que abarca tres dimensiones esenciales: la aritmética generalizada, el pensamiento funcional y el lenguaje de modelado. También se ha presentado la definición de Radford centrada en el proceso de generalización.

De la misma manera, Sibgatullin et al, (2022) presentan una síntesis de tres aspectos fundamentales que ya hemos establecido sobre el marco conceptual que se define como Pensamiento algebraico temprano y que se desarrolla desde edades tempranas.

Figura 1

Marco conceptual de pensamiento algebraico (Ralston, 2013. Adaptado de Sibgatullin et al., 2022)



Nota. Representa la interacción de los tres aportes del álgebra temprana

La figura 1 muestra una adaptación de aspectos específicos que pueden ser desarrollados en estudiantes de primaria, que permiten dar paso a la construcción de nociones más abstractas en secundaria y en el nivel universitario. La intersección de elementos comunes marca la construcción y desarrollo de pensamiento algebraico. Un aspecto común en el espectro de definiciones sobre dicho pensamiento propone que los estudiantes deben desarrollar todo tipo de representaciones al abordar situaciones en diversos contextos. Kieran

(2011, citado en Sibgatullin et al., 2022) señala que no se trata de desarrollar habilidades sobre el uso de símbolos reales sino más bien de desarrollar formas de pensar. Los trabajos de Luis Radford han señalado que en edades tempranas el esfuerzo por expresar la generalidad incluye gestos, expresiones verbales, dibujos, entre otras formas semióticas (Radford 2000, citado en Sibgatullin et al., 2022).

Ahora, dirigimos nuestra atención hacia las actividades que fomentan y promueven este tipo de pensamiento, destacando cómo estas prácticas pueden nutrir y desarrollar las habilidades algebraicas en los estudiantes.

5.2. ¿Qué aportes se han planteado para favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico temprano en el aula de matemáticas?

Diferentes investigadores han analizado la naturaleza de las tareas que los profesores deberían implementar en el aula para incentivar el desarrollo de pensamiento algebraico temprano. Dentro de esta perspectiva se encuentran inmersas tres líneas básicas del álgebra temprana: la aritmética generalizada, el pensamiento funcional y la aplicación de lenguajes de modelado propuestas por Kaput (2008). Éstas implican diversos conceptos algebraicos y una serie de procesos como: representar, generalizar, notar y justificar; además, de diversas formas de razonamiento, como lo son: abductivo, inductivo y deductivo (Chimoni, Pitta-Pantazi, & Christou, 2018).

Ahora bien, siguiendo las tres líneas de investigación se presenta una clasificación de tareas, esta organización permite que sean insumos para la actividad de los profesores como recurso o guía para abordar el pensamiento algebraico temprano en el aula de matemáticas.

5.2.1. Aritmética generalizada

En el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, una de las formas más efectivas de potenciar este pensamiento es la incorporación de tareas basadas en la aritmética generalizada. Ya que, permite a los estudiantes transitar gradualmente desde lo aritmético hacia el pensamiento algebraico. Cabe resaltar que la aritmética generalizada no solo se centra en los números y las operaciones, sino que también enfatiza sobre la comprensión de las propiedades y las relaciones entre estos elementos, promoviendo así un pensamiento más abstracto y relacional.

Por tal razón, el objetivo principal de mostrar tareas sobre la aritmética generalizada es proporcionar a los docentes una guía que permita a los estudiantes desarrollar habilidades para el manejo de las incógnitas como si fueran conocidas, reglas basadas en operaciones involucradas en la simplificación de ecuaciones y tratar a las ecuaciones como transformaciones de equivalencia que permite nociones de equilibrio. Cabe señalar que, según Radford (2022), la denotación de cantidades indeterminadas (incógnitas) puede lograrse utilizando diversos recursos semióticos, como el lenguaje natural, los gestos y los signos no convencionales.

La siguiente tarea se encuentra en un artículo de Radford (2022) esta se basa en un cuento-problema en el cual están involucradas ideas relacionadas con la simplificación de ecuaciones, en particular en la ecuación: $3 + x = 7$.

Figura 2*Introducción del cuento-problema de las tarjetas*

Nota. Tomado de Radford 2022 (P.5)

En la figura 2 se puede observar la interacción que la maestra realiza con los estudiantes al introducir el cuento-problema. En este caso se hace referencia a Sara, quien tenía un sobre con algunas tarjetas. Durante la clase cuando se presentaba el sobre, la profesora les dijo a los estudiantes: "El sobre está sellado. No sabemos cuántas tarjetas de hockey hay dentro". Seguido de esto, pegó el sobre en el tablero y agregó: "Pero Sara ya tenía 3 tarjetas de hockey", y pegó 3 tarjetas en la pizarra. Después, la maestra explicó que la amiga de Sara, llamada Christina, tenía 7 tarjetas y las pegó en el tablero junto al sobre y las tarjetas de Sara. Luego pasa a dibujar un signo igual entre los dos grupos de objetos y preguntó: "¿Qué es este símbolo? ¿Qué significa?" A lo que un estudiante contestó: "Significa que Sara y Christina deben tener la misma cantidad de tarjetas de hockey". Y por esto la profesora dice: "Me gustaría que un estudiante use lo que está en la pizarra para tratar de averiguar cuántas tarjetas hay en el sobre".

A continuación, se proponen algunas de las reflexiones sobre los análisis de los estudiantes a partir de la información presentada en el tablero.

Figura 3*Participación de Gustav*

Nota. Tomado de Radford 2022 (P.5)

En la figura 3 se puede observar a Gustav la solución que él da es encerrar en un círculo un bloque de 3 cartas en el lado izquierdo de la ecuación y de la misma forma encerrar en un círculo 3 cartas en el lado derecho. Luego realizó un segundo dibujo del signo igual en la parte de abajo todo esto era para explicar que las tres cartas de la izquierda eran iguales a las otras tres cartas identificadas de la derecha. "Entonces, esto de aquí (señalando las 4 tarjetas restantes) debe ser igual a esto por eso en el sobre debe tener 4 tarjetas en su interior" (Radford, 2022, p.6).

Figura 4*Participación de Mariana*

Nota. Tomado de Radford 2022 (P.5)

En la Figura 4 la maestra interviene para analizar el trabajo de Mariana a través de preguntas para resolver el problema de otra forma; ella sugiere que se podría intentar aislar el sobre. Acá se introduce un poco la idea de aislar lo desconocido ¿A qué nos referimos con aislar? Mariana preguntó: ¿Significa eso que es como ponerlo solo? Después la maestra dijo si era correcto poner el sobre solo. Eso es justamente lo que significa, ¿Cómo podríamos poner el sobre solo? Queremos saber cuántas tarjetas hay en el sobre, pero queremos aislar el sobre. ¿Cómo podríamos poner el sobre aislado o solo? Entonces la alumna comienza a quitar algunas tarjetas como se observa en la figura 4. De tal forma que a ambos lados de la ecuación quita el mismo número de tarjeta que en este caso es tres porque la idea era dejar al sobre solo cuando paso eso, en el lado derecho sólo quedarían 4 tarjetas (Radford, 2022, p.6).

Algunas conclusiones que se pueden observar después de las intervenciones de los estudiantes en el tablero, son las diversas maneras que los estudiantes pueden comenzar a razonar de manera algebraica y no precisamente llegar a algo simbólico como escribir la ecuación. La idea de Gustav fue reconocer el signo igual de manera que particionaba las tarjetas en trozos iguales.

Luego de comparar lo igual con lo igual y asociar las partes restantes del diagrama. Analizando el procedimiento vemos que esta trata de una comprensión relacional del signo igual, lo que llevó a deducir el valor que correspondía al sobre. Donde dice: "Entonces, esto de aquí (señalando las 4 cartas restantes) debe ser igual a esto (señalando el sobre)". El procedimiento de Gustav se podría categorizar en un procedimiento de comparación. Ahora bien, con la intervención de la maestra con Mariana se puede observar que la idea de aislar fue apropiada para trabajar con el concepto de variable, de hecho, este diálogo de preguntas se basó en la idea de optar por un procedimiento de aislamiento de lo desconocido.

Por otra parte, es acertado implementar en el aula tareas que involucren la noción de incógnita, y analizar cómo la representación de esta influye en el desarrollo del pensamiento aritmético como paso al pensamiento algebraico. En particular, analizaremos los resultados de una misma tarea de resolución de ecuaciones propuesta por Xie y Caí (2022) la cual involucró dos representaciones de incógnitas (oraciones numéricas que contenían "corchetes" vacíos, como en el ejemplo $5 + (\cdot) = 10$, o ecuaciones que contenían x , como en $5 + x = 10$). Los participantes de esta investigación eran estudiantes de una escuela ubicada en una ciudad de la provincia china de Hunan, en total fueron 126 estudiantes de quinto grado en edades entre los 11 a 12 años.

Figura 5

Tabla representaciones de la incógnita dadas por algunos estudiantes

La incógnita representada como "(.)"	La incógnita representada como "X"
$(.) + 5 = 9$	$X + 5 = 9$
$(.) - 5 = 9$	$X - 5 = 9$
$9 - (.) = 5$	$9 - X = 5$
$(.) \times 5 = 15$	$X \times 5 = 15$
$(.)5 = 4$	$X5 = 4$
$15(.) = 5$	$15X = 5$

Nota. Adaptado de Xie y Cai (2022) que muestra la prueba con dos representaciones a los estudiantes.

Una vez implementado, se dividieron los resultados en estrategias utilizadas por los estudiantes, el análisis de estos nos permite tener una cercanía con las posibles respuestas que se pueden presentar en futuras aplicaciones.

Estrategia: Sólo invertir - usan sólo operaciones aritméticas

Ejemplos propuestos por estudiantes en Xie y Caí (2022):

- $(3) \times 5 = 15$, donde el estudiante justifica que “tres por cinco son quince”.
- $(3) \times 5 = 15$, donde el estudiante dice que la división es encontrar un factor desconocido, si divides 15 entre 5 tienes la respuesta.
- $x \times 5 = 15$, Acá el estudiante dice que x es igual a 3 porque el resultado de la división es un número que se multiplica por el divisor para obtener el dividendo.

Estrategia: Sólo formales – Hacen uso únicamente de propiedades aditivas y propiedades multiplicativas a la hora de resolver la ecuación.

Ejemplos propuestos por estudiantes en Xie y Caí (2022):

- $x \times 5 = 15$

solución: $(x \times 5)5 = 15 5$

$$x = 3$$

- $2x - 5 = 9$

solución: $2x - 5 + 5 = 9 + 5$

$$2x = 14$$

$$2x \div 2 = 14 \div 2$$

$$x = 7$$

- $9 - x = 5$

solución: $9 - x + x = 5 + x$

$$9 = 5 + x$$

$$5 + x - 5 = 9 - 5$$

$$x = 4$$

Estrategia: Sustitución- Probaron al menos dos números para el paréntesis o x para ver si el valor calculado era correcto

Ejemplos propuestos por estudiantes en Xie y Caí (2022):

- $(14) - 5 = 9$, el estudiante afirma que si la respuesta es 12, entonces $12 - 5 = 7$, si la respuesta es 13, entonces $13 - 5 = 8$, entonces debes usar 14 porque $14 - 5 = 9$.
- $9 - (4) = 5$, sean 9 menos 1, 2, 3, 4... lo hace uno por uno, hasta que el resultado sea 5, deja de contar.

- $15(3) = 5$, el estudiante comprueba 1×5 es igual a 5, y que 2×5 es igual a 10, $3 \times 5 = 15$, entonces la respuesta es 3.

La investigación de Xie y Caí (2022) demostró que los estudiantes tuvieron mayor éxito resolviendo ecuaciones cuando la incógnita se representaba con corchetes vacíos (·) en lugar de la letra x, ya que era la representación “conocida” para ellos, como se ve en la figura 6. Este hallazgo sugiere que se representan de diversas maneras desde un inicio, pero más que hacer énfasis en una representación se busca que los estudiantes logren una adecuada interpretación y significado de incógnita.

Figura 6

Tabla que contienen

Test	% correcto	Test2	% correcto3
$(.) + 5 = 9$	99,2	$X + 5 = 9$	85,7
$(.) - 5 = 9$	94,4	$X - 5 = 9$	78,6
$9 - (.) = 5$	99,2	$9 - X = 5$	77,8
$(.) \times 5 = 15$	97,6	$X \times 5 = 15$	89,7
$(.)5 = 4$	92,9	$X5 = 4$	86,5
$15(.) = 5$	97,6	$15X = 5$	80,2

Nota. Adaptada de Xie y Caí (2022) Prueba con dos representaciones propuestas a los estudiantes

De manera general, la diversidad de representaciones, la interpretación y la enseñanza de múltiples estrategias de resolución no solo ayudan a los estudiantes a comprender mejor los conceptos algebraicos, sino que también fortalecer habilidades cognitivas como razonar, recordar, resolver problemas y tomar decisiones. Por lo tanto, es recomendable incorporar gradualmente representaciones más abstractas, así como la contextualización de problemas para desarrollar un pensamiento algebraico desde una etapa temprana.



Por otro lado, la introducción de tareas de fracción inversa potencia el pensamiento algebraico temprano, contribuyendo significativamente al desarrollo de la aritmética generalizada. Estas tareas están diseñadas para ayudar a los estudiantes a comprender conceptos algebraicos fundamentales a través de la manipulación y el razonamiento simbólico en el contexto de las fracciones.

Según Kaput (2008), el pensamiento algebraico se compone de dos aspectos importantes. El primero es la capacidad de hacer y expresar generalizaciones en sistemas simbólicos cada vez más formales y convencionales. El segundo aspecto se centra en la capacidad de razonar y manipular formas simbólicas. Abordar tareas de fracción inversa es una excelente manera de desarrollar estas habilidades, ya que requieren una comprensión profunda de la equivalencia y la capacidad de manipular simbólicamente las expresiones matemáticas.

Por lo tanto, al incluir estas tareas en el aula de clase, no solo se busca enseñar aritmética básica, sino también fomentar un pensamiento algebraico más profundo y robusto desde una etapa temprana. Esto permitirá a los estudiantes desarrollar una comprensión sólida y flexible de los conceptos matemáticos que serán fundamentales en grados posteriores. Pero a que se refiere con tareas de "fracción inversa" estas tareas requieren que los estudiantes encuentren el número de objetos en una colección cuando se les da el número de objetos que representan una fracción dada (Pearn et al., 2022, p.4). En otras palabras, son aquellas tareas en las que los estudiantes conocen el número de objetos que representan una parte fraccionaria dada y luego necesitan encontrar el número de objetos que representan el todo desconocido.

A continuación, se abordan tres tareas de fracción inversa tomadas de una entrevista propuesta en Pearn et al (2022):

Figura 7*Tres tareas de fracciones inversas*

Reverse Fraction 1	Reverse Fraction 2	Reverse Fraction 3
<p>This collection of 10 counters is $\frac{2}{3}$ of the number of counters I started with.</p>  <p>How many counters did I start with? Explain how you decided that your answer is correct.</p>	<p>Susie's CD collection is $\frac{4}{7}$ of her friend Kay's. Susie has 12 CDs. How many CDs does Kay have? _ Show all your working.</p>	<p>This collection of 14 counters is $\frac{7}{6}$ of the number of counters I started with.</p>  <p>How many counters did I start with? Explain how you decided that your answer is correct.</p>

Nota. Tomado de Pearn et al., 2022, p.4.

Las preguntas que se realizaban a los estudiantes a partir de las tareas de la Figura 7 incluían cambios en el número de objetos, manteniendo las fracciones iguales y luego introduciendo cantidades no especificadas asociadas con las mismas fracciones utilizadas en la prueba de selección de fracciones. Estas sugerencias de incluir cambios se realizan de acuerdo con la investigación (Marton et al., 2004) ya que se demostró que la variación de números en tareas matemáticas puede fomentar la generalización. Se anticipó que habría una evidencia más fuerte de pensamiento o razonamiento algebraico si los estudiantes usaban consistentemente estrategias multiplicativas y/o aditivas, puesto que al responder a preguntas de fracciones inversas estas cambiaban las cantidades, pero las fracciones seguían siendo las mismas en las tres tareas de fracciones inversas.

Figura 8

Solución a través de una estrategia completamente multiplicativa


$10 \div 2 = 5$ $5 = \frac{1}{3}$ $5 \times 3 = 15$	$12 \div 4 = 3$ $3 = \frac{1}{7}$ $3 \times 7 = 21$	$14 \div 7 = 2$ $2 = \frac{1}{6}$ $2 \times 6 = 12$
---	---	---

Nota. Tomado de (Pearn et al., 2022, p.6)

Como se observa en la Figura 8 la respuesta que proporciona el estudiante para el conjunto de las tres tareas de fracciones inversas se basa en estrategias totalmente multiplicativas ya que, independientemente de la fracción o la cantidad que representara esa fracción, encontró consistentemente la cantidad representada por la fracción unitaria. Noté que el estudiante no utiliza ecuaciones algebraicas simbólicas formales. No obstante, escribió de forma simbólica lo que consideraba a través de números sin necesidad de escribir nada más.

Figura 9

Solución de Gloria a través de una estrategia utilizando diagramas

<p>2. Susie has 8 CDs. Her CD collection is $\frac{4}{7}$ of her friend Kay's.</p> <p>a. How many CDs does Kay have? _____</p> <p>b. Explain your thinking.</p> 	<p>b. If it was any number of counters, which was $\frac{7}{6}$ of the number of counters I started with, what would you need to do to find the number of counters I started with?</p> <p>put it into 7 groups however many in that group take it away from the original number</p>
--	--

Nota. Tomado de (Pearn et al., 2022, p.11)

En la Figura 9 se observa como Gloria utiliza un diagrama el cual es una representación visual, que presenta información para resolver una variación de la tarea 2, que se desprende de las 3 tareas iniciales de fracción inversa. El objetivo es que los estudiantes al hacer variaciones comiencen a generalizar y no solo dependan de resolver aritméticamente los problemas. Para este caso, Gloria inicialmente dibujó los 8 círculos que representaban los 8 CDs para después agrupar estos 8 CDs en 4 grupos de 2 CDs cada uno, porque sabemos que estos 8 CDs son $\frac{4}{7}$ de la colección de Kay. A continuación, creó tres grupos más de dos círculos lo que representa $\frac{3}{7}$. Por lo tanto, Kay tenía 14 CDs. La idoneidad de un diagrama para la solución de un problema depende de lo bien que represente la estructura de ese problema. De acuerdo con (Pearn et al., 2022, p. 11) sugirieron que, si bien los diagramas son útiles para algunos estudiantes, otros estudiantes pueden no ver la estructura del problema en los diagramas o pueden no estar familiarizados con el uso de estos, en el proceso de resolución de problemas. En este caso, Gloria dibujó con éxito un diagrama que representa la estructura del problema.

5.2.2. Pensamiento funcional

Las tareas relacionadas con el pensamiento funcional brindan a los estudiantes una guía progresiva para promover la identificación de patrones y la generalización a través de las relaciones funcionales (Cañadas y Molina, 2016). Para Radford (2014) el pensamiento funcional es fundamental para que los estudiantes logren desarrollar un pensamiento algebraico temprano. De igual forma, este tipo de pensamiento facilita pasar progresivamente de formas informales, a través de un lenguaje natural sobre las variables y sus relaciones a otras formas más sofisticadas.

Una concepción relacional del signo igual es la comprensión de que el símbolo denota la "igualdad" de dos cantidades o expresiones (Donovan et al., 2022, p.2). Para los estudiantes que tienen una visión relacional del signo igual interpretan y trabajan fácilmente con ecuaciones en formas estándar, en las que las operaciones aparecen a la izquierda del signo igual y el "resultado" a la derecha (por ejemplo, $7 + 3 = 10$, $4 + 2 = 6$), y con ecuaciones en formas no estándar, en las que las operaciones pueden aparecer en cualquiera de los dos ninguno, o ambos lados del signo igual (por ejemplo, $10 + 4 = _ + 7$, $12 = 12$, $14 = 9 + 5$).

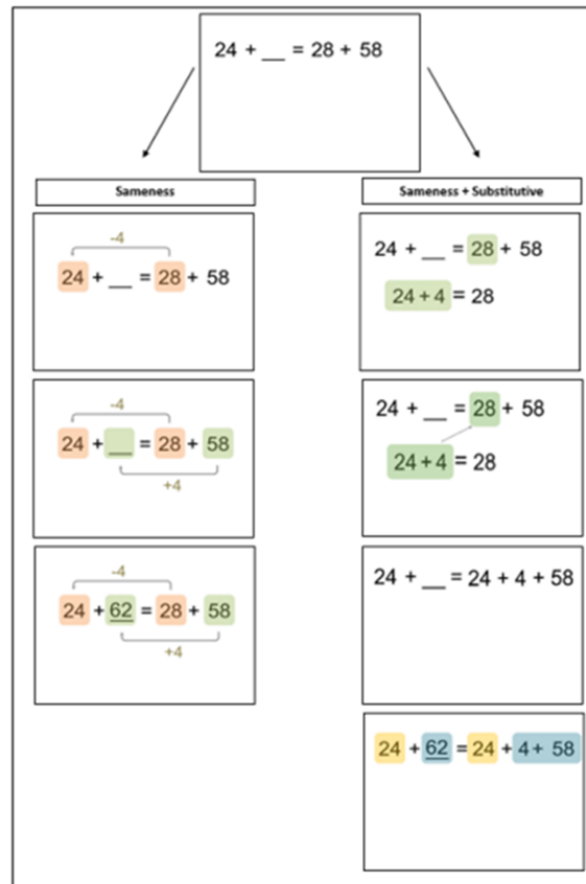
Por otra parte, los estudiantes que tienen una concepción operativa del signo igual, interpretando el símbolo como "el total" o "la respuesta" (Donovan et al., 2022, p.2). De hecho, cuando los estudiantes resuelven las ecuaciones de valor faltante pueden realizar las operaciones del lado izquierdo del signo igual o realizando todas las operaciones dadas; por ejemplo, para $8 + 4 = _ + 5$, escribiendo 12 o 17 en el espacio en blanco (Donovan et al., 2022, p.2). En ocasiones el uso del signo igual puede causar confusión cuando aparece en ecuaciones de manera no estándar; por ejemplo, $8 = 8$ ya que carece de una operación, o los estudiantes no logran comprender por qué la respuesta está al lado izquierdo, por ejemplo $9 = 5 + 4$ (Donovan et al., 2022, p.2).

De hecho, las concepciones de los estudiantes sobre el signo igual generalmente se han caracterizado como relacionales u operativas, Jones y Pratt (2012) afirman que una comprensión relacional completa del signo igual implica una comprensión de la "igualdad" como una expresión puede ser sustituida por una equivalente. Por lo que, se propone generar actividades, materiales en los cuales se permita desarrollar una visión relacional completa del signo igual incluyendo tanto la igualdad como componentes sustitutos.

El objetivo de la tarea que se propone a continuación según los autores es investigar si los estudiantes adoptan estrategias de resolución de ecuaciones estructurales para ecuaciones con valores faltantes. El término "estructural" se emplea para describir estrategias que implican "observar expresiones y ecuaciones en su conjunto, notando las relaciones numéricas entre y dentro de estas expresiones y ecuaciones" (Donovan et al., 2022, p.3). Asimismo, se busca determinar cómo impacta en los estudiantes estructurar una concepción dual del signo igual como símbolo de igualdad y de sustitución, en comparación con verlo solo como un símbolo de igualdad. Para ello, se desarrolla una estrategia de enseñanza utilizando material concreto, donde se presentan tarjetas a los estudiantes, a partir de las cuales se plantean preguntas según la noción del signo igual que se desee promover.

Figura 10

Material para abordar el signo igual o como igualdad dual



Nota. Tomado de Donovan et al (2022, p. 5)

En la figura 10, se observa la implementación de tarjetas para la enseñanza del valor faltante de la ecuación $24 + __ = 28 + 58$. A través de preguntas se guiaba a los estudiantes sobre cómo determinar el valor faltante sin necesidad de sumar los números. En el primer recuadro se presentó a los estudiantes la igualdad sola donde se utilizan flechas para enfatizar una estrategia de compensación y de esta manera encontrar los valores faltantes. En el otro recuadro que se denota al signo igual como una igualdad+sustitutiva se enfoca en la descomposición y la sustitución de

una expresión por una equivalente para revelar una estructura subyacente que hizo posible encontrar el valor faltante sin calcular las sumas en ambos lados.

Figura 11

Problema de ecuación de un valor faltante

Missing value equations
Find the number that goes in each blank. You can try to find a short cut so you don't have to do all the adding. Show your thinking and write your answer in the blank.

$67 + 84 = _ + 83$

$_ + 55 = 37 + 54$

$60 + _ = 48 + 24$

$18 + 31 + 53 = _ + 63$

Nota. Tomado de Donovan et al (2022, p. 6)

A partir de la enseñanza de los tipos de estrategias los autores optan por entregar a los estudiantes una serie de ecuaciones de valor faltante como se observa en la figura 11. Con este tipo de tareas se busca analizar las respuestas de algunos de los estudiantes según las estrategias estructurales que utilizaron. Estas estrategias se definen como: estrategias de compensación y estrategias de descomposición/sustituciones enseñadas con anterioridad gracias al material que se proporcionado a los estudiantes. Un ejemplo, de cómo un estudiante puede usar la compensación para resolver la ecuación $67+84=_+83$ él podría notar que 84 es uno más que 83 y concluir que el número en la casilla debe ser uno más que 67, o 68, para mantener la equivalencia. Asimismo, un estudiante que use descomposición/sustitución podría reescribir la ecuación como $67 + 83 + 1 = _ + 83$ y luego encontrar el valor en el cuadro agregando $67 + 1$.

Las respuestas se agruparán a través de dos tablas donde se concentrará en las respuestas de 4 estudiantes, donde 2 de ellos se basaron en la estrategia de compensación y los otros 2 se enfocaron en la estrategia de descomposición/sustitución.

Figura 12

Ejemplos en la condición de igualdad con sus rutas de estrategia estructural

Ecuación con valor faltante	Respuesta (estrategia de compensación)
Estudiante 1: $67+84= _ +83$	En un lado está el 83 que está a uno de 84, así que agregué $67 + 1$ y obtuve 68.
Estudiante 2: $67+84= _ +83$ $60+ _ =48+24$	84 es uno más que 83, por lo que el número en el espacio en blanco tiene que ser uno mayor que 67, y eso es 68. 60 es 12 números mayor que 48, por lo que la respuesta tiene que ser 12 números menor que 24.

Nota. Tomado de Donovan et al (2022, p. 11)

Figura 13

Ejemplos de estudiantes en la condición de Igualdad + Sustitutiva que muestran la ruta de la estrategia estructural

Ecuación con valor faltante	Respuesta (estrategia de descomposición/sustitución)
------------------------------------	---

Estudiante 1:

$$67+84= _+83$$

$83 + 1 = 84$, por lo que $67 + 1$ es 68

porque sustituí 1.

$$60+ _ =48+24$$

$48+12$ es 60, por lo que $24 - 12$ es

12, por lo que sumar $60+12$ es la respuesta.

Estudiante 2:

$$67+84= _+83$$

$83 + 1 = 84$, por lo que sumar 1 a 67

hace que ambos lados sean iguales.

$$60+ _ =48+24$$

$60=48+12$ así que restamos 12 de 24

Nota. Tomado de Donovan et al (2022, p. 11)

Es importante destacar que la estrategia para resolver la igualdad + sustitutivo otorga en los estudiantes una perspectiva más beneficiosa para desarrollar concepciones sobre el signo igual. De hecho, esta visión sustitutiva del signo igual en la resolución de ecuaciones y el aprendizaje del álgebra amerita una mayor investigación ya que proporciona diferentes maneras de abordar las ecuaciones. Generar discusiones en el aula y dedicar más tiempo a las estrategias que se expusieron aumentarán las oportunidades de interacción con los compañeros en torno a las ideas matemáticas que podrían resultar fructíferas. De igual manera, al permitir a los estudiantes explicar más plenamente sus estrategias de resolución de problemas se puede lograr una mayor comprensión de sus razonamientos y promover su evolución. Es por esto que mantener una visión sustitutiva del signo igual ayuda a los estudiantes a integrar una nueva dimensión del pensamiento relacional

sobre el signo igual, es posible que se produzcan cambios en las estrategias de resolución de problemas de los estudiantes.

Para continuar analizamos de acuerdo con Chimoni, Pitta-Pantazi, y Christou (2018) una tarea relacionada con el pensamiento funcional, en la Figura 14, se muestra una tarea donde se pedía a los estudiantes analizar una secuencia figural haciendo uso de palillos para representar concretamente los términos de una secuencia. Al mismo tiempo, se presenta una tabla, para que los alumnos estudien la secuencia figural de manera tabular facilitando la organización de datos y representación de la estructura de la secuencia; esto puede promover la construcción del patrón. Así, el estudiante podrá comprender la estructura de la secuencia figural y construir una regla general.

Figura 14

Tarea de pensamiento funcional usada en lecciones de álgebra

Cristina creó el patrón de abajo, usando palillos.








FIGURA 1 FIGURA 2 FIGURA 3

(a) Dibuja la siguiente figura del patrón.

(b) Rellena la tabla.

	Longitud de la figura (L)	Palillos (P)
	1	
	2	
	3	
	4	

(c) ¿Cuántos palillos necesitará Cristina para construir la Figura 10? Explica tu respuesta.

Nota. Tomada de (Chimoni et al., 2021, p.35)

Al momento de resolver la actividad solicitada por Cristina con los palitos, dos estudiantes en el punto a de la tarea comienzan a verificar las figuras anteriores para poder dibujar la Figura 4. Observan que la Figura 1 consta de un triángulo con 3 palillos. En la Figura 2, se añaden dos triángulos más, uno de los cuales está invertido y situado en el medio del triángulo que ya estaba más el nuevo triángulo, sumando un total de 7 palillos. Para la Figura 3, los estudiantes notan que se dibujan 2 triángulos adicionales y, en la mitad de estos, se colocan dos triángulos invertidos, resultando en un total de 11 palillos. Basándose en esa secuencia, los estudiantes concluyen que para dibujar la Figura 4, se debe seguir dibujando más triángulos: donde se dibuja 3 triángulos adicionales al que ya estaba al principio, es decir, que para ellos queda siempre el triángulo de la figura 1 fijo y a medida que va pasando de las figuras pues le van agregando más triángulos y en el espacio entre ellos, dibuja 3 triángulos invertidos. Siguiendo este esquema, logran deducir correctamente cómo se estructura la Figura 4 y cuántos palillos serán necesarios para completarla.

De hecho, la manera como están interpretando los estudiantes se caracteriza por un tipo de generalización recursiva ya que describe la relación entre términos de patrón sucesivos y, esto se vincula con el pensamiento aditivo, mientras que las generalizaciones explícitas requieren que los estudiantes vean la relación entre dos variables, por ejemplo, la cantidad de patrón y el término de patrón. A menudo se presentan patrones crecientes que limitan la conciencia y la accesibilidad de los estudiantes para generalizar las estructuras de patrones multiplicativos (Chimoni et al., 2021, p.42).

Para completar la tabla y establecer el conteo de los palitos que forman cada una de las figuras, los estudiantes observaron que, al mirar verticalmente, la cantidad de palitos utilizados en cada figura sigue un patrón. Notaron que cada figura nueva añade exactamente 4 palitos más que la figura anterior. Este patrón se hace evidente al analizar las figuras consecutivas. Esta capacidad de identificar y generalizar patrones es fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Permite a los estudiantes predecir y calcular de manera eficiente el número de palitos necesarios para cualquier figura sin necesidad de dibujar cada una individualmente.

La clave de estas tareas es fomentar el uso de diferentes tipos de representación, como las pictóricas, numéricas, tabulares y en lenguaje natural. Estas estrategias facilitan que los estudiantes se conecten con diversas formas de representación, permitiéndoles comprender mejor los conceptos. El avance que los estudiantes pueden lograr se refleja claramente cuando se les brinda la oportunidad de desarrollar tareas utilizando representaciones pictóricas para visualizar la estructura del patrón. Esta práctica puede ser muy beneficiosa para los profesores, ya que les permite incorporar estas técnicas en sus clases.

Además, a través de diálogos en el aula, los profesores pueden explorar y entender por qué los estudiantes piensan de determinada manera. Esto promueve la argumentación y la reflexión sobre la estructura del problema, ayudando a los estudiantes a desarrollar un pensamiento más crítico y profundo. Fomentar estas discusiones y utilizar múltiples formas de representación en el aula fortalece el razonamiento algebraico temprano y prepara a los estudiantes para enfrentar problemas matemáticos más complejos.

5.2.2.1. Estudio de secuencias.

Un aspecto clave del desarrollo del razonamiento algebraico temprano es la capacidad de visualizar e identificar estructuras que permitan abstraer y generalizar conceptos matemáticos. A través del estudio de secuencias, se busca que los estudiantes, desde edades tempranas, se involucren con diversas representaciones (pictóricas, numéricas, tabulares y en lenguaje natural) para expresar sus pensamientos matemáticos (Blanton et al., 2018). Este enfoque incluye la identificación de tareas, la observación y por ende la generalización que puedan establecer los estudiantes. De igual manera, permite fomentar que los estudiantes puedan encontrar términos lejanos en las secuencias y de esta

manera adquieran habilidades como la recursividad en lugar de ver la estructura y formar generalizaciones como una relación funcional.

5.2.2.2. Secuencias Numéricas.

La generalización de patrones es reconocida como una de las actividades fundamentales para desarrollar pensamiento algebraico temprano (Radford, 2010). Esto permite a los estudiantes enfrentarse a situaciones de cambio esenciales para fomentar el pensamiento algebraico.

Es por esto, que se destaca la importancia de reconocer que todas las tareas deberían involucrar situaciones discursivas (orales y escritas), gestuales y procedimentales que evidencien en los estudiantes intentos de construir explicaciones y argumentos sobre estructuras generales y modos de pensar. Así es posible disminuir formas mecánicas ya que se pone en evidencia que los estudiantes, aunque no encuentren de forma simbólica la regla general a través de las argumentaciones y explicaciones logran generar razonamientos apoyados en situaciones particulares, o en acciones concretas.

A continuación, se muestra una tarea dada en Vergel (2014) en donde se propuso una secuencia numérica que se genera a partir del término general $2n + 3$, con $n = 1, 2, 3, \dots$. En la parte inicial se aborda una secuencia de números en donde los estudiantes deben trabajar de forma individual y luego una vez respondidas los ítems 1 y 2 discuten en pequeños grupos.

Figura 15*Tarea de secuencias numérica*

<p>NOMBRE: _____</p> <p>Edad: _____ Curso: _____ Fecha: _____</p> <p>Ahora tienes la siguiente secuencia de números:</p> <p style="text-align: center;">5 7 9 11</p> <ol style="list-style-type: none">1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?2. ¿Cuál es el término siguiente?3. La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una marcada con un número. Cada uno de estos números corresponde a uno de los términos de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. La profesora Johanna quiere que se escriba un mensaje a la profesora Estella, que será introducido en el sobre junto con la tarjeta, el cual explique cómo calcular rápidamente el número que corresponda a ese término.4. Ahora, la profesora Johanna hace lo mismo que en el punto anterior, pero esta vez cada uno de los números corresponde a uno de los números de la secuencia. Escribe un mensaje a la profesora Estella en donde le expliques cómo calcular rápidamente el término que corresponde al número marcado en la tarjeta.
--

Nota. Tomada de Vergel Causado (2014)

La actividad realizada por los estudiantes fue mediada por la profesora Johanna la cual circulaba por algunos grupos para revisar lo que contestaron a los ítems 1 y 2. En uno de estos grupos (conformado por Lorena, Luis Felipe, Adriana, Sunner y Santiago) interviene preguntándoles cómo les había ido con el trabajo.

Figura 16

Intervención en el tablero de tres estudiantes en los ítems 1 y 2



Nota. Tomada de Vergel Causado (2014)

En la discusión con el grupo general, la profesora Johanna intenta visibilizar las diferencias de las tres secuencias, como se pueden observar en la figura 16, donde se focaliza la atención en el hecho que las tres tienen el primer término distinto, aunque el patrón que las genera es el mismo (aumenta en 2). La secuencia propuesta por Santiago, al parecer, tiene su origen en el universo de los números naturales, el cual ha venido siendo trabajado por los estudiantes en la clase de matemáticas. Por su parte, en la secuencia que propone Luis Felipe (3 5 7 9), el segundo término es el 5 y no el 7, pues para él el primer término debe ser 3.

Algunas producciones en las hojas de trabajo dejan ver las razones por las cuales 5 es el primer término de la secuencia propuesta. Efectivamente para estos estudiantes el primer término siempre es el menor. La respuesta de Laura Sofía, afirmamos, reside en su experiencia cultural vivida en las sesiones anteriores. Ella afirma que el 5 es el primer término porque “en todas las secuencias anteriores es (el primer término) el menor”.

5.2.2.3. Patrones figurales.

“La generalización de patrones es crucial en los primeros años de escolaridad para introducir el álgebra, visto que, generalizar significa observar algo que va más allá de lo que realmente” (Radford, 1997). En efecto, los estudiantes al exponerse a este tipo de tareas desarrollan el pensamiento algebraico, ya que estas tareas los acercan a situaciones de variación y, a la vez, se propusieron para indagar los medios semióticos, que pueden movilizar en secuencias numéricas y figurales sin herramienta tabular. En particular, Vergel (2014) presenta en su estudio la hipótesis que parecen no movilizarse, o, por lo menos, con la misma intensidad.

Además, es válido aclarar en el análisis que esta tarea fue propuesta después de la tarea de patrones numéricos anteriormente expuesta. Por ello, esta segunda experiencia también propuesta por vergel (2014) se les facilitó, ya que con anterioridad habían discutido la secuencia numérica junto con la profesora Johanna y demás compañeros. En este caso encontraron el término general $2n + 1$ con $n = 1, 2, 3, \dots$ haciendo que se les facilitara encontrar cual era la primera figura, la segunda figura y así hasta la enésima figura de este patrón o secuencia.

Tomada de Vergel (2014)

Figura 17*Tarea secuencia figural*

NOMBRE: _____
 Edad: _____ Curso: _____ Fecha: _____
 Observa la siguiente secuencia

1. ¿Cuál consideras tú es la primera Figura?, ¿por qué?, ¿cuál es la segunda?, ¿cuál es la tercera? y ¿cuál es la cuarta?
2. Calcula el número de rectángulos que tiene la Figura 8. Explica la manera como procediste para encontrar la respuesta.
3. La profesora Estella quiere construir la Figura 12. Explicale a ella qué debe hacer para construirla.
4. Ahora la profesora Estella quiere construir una Figura grande. Explicale a la profe qué debe hacer para construirla.
5. La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número. Este mensaje debe explicar a la profesora Estella cómo calcular rápidamente el número de rectángulos que corresponde al número de la tarjeta.

Nota. Tomado de Vergel (2014)

Uno de los resultados destacados, es el de Laura Sofia, donde discuten sobre la construcción del patrón. En la figura 17 vemos una serie de movimientos o deslizamientos con el lápiz realizados por la estudiante para comunicar cómo se generan las figuras.

Figura 18*Deslizamientos con el lápiz realizados por la estudiante Laura Sofia*

Nota. Tomado de Vergel (2014)

Además, un fragmento de la entrevista tomada de Vergel (2014):

L1. Laura Sofía: Por ejemplo, en la figura 4, pones 4 abajo y 4 arriba [señala la hilera inferior de rectángulos y después la de arriba] más 1 [señala el último rectángulo de la hilera superior].

L2. Profesor Rodolfo: y, por ejemplo, ¿cómo sería la figura 5?

L3. Laura Sofía: 5 abajo y 5 arriba [mientras señala las hileras] más 1.

En esta entrevista vemos cómo la estudiante empieza a construir una generalización del patrón con el comportamiento de las figuras que se van formando y así conocer cómo sería la construcción de cada una.

5.2.3. *Modelación*

El avance tecnológico en la enseñanza ha venido evolucionado la matemática en los últimos años, brindando así múltiples herramientas que ayudan en el aprendizaje y diversas opciones a la hora de enseñar. En el entorno matemático digital, se destaca la programación como estrategia fundamental para la enseñanza, y el álgebra no es la excepción. En los últimos años, el uso y el significado de las variables en la programación han llegado a desempeñar un papel cada vez más importante en las matemáticas, y han puesto de relieve un nuevo dominio que los profesores de matemáticas deben adoptar (Kilhamn 2021).

Por consiguiente, analizaremos una de las tres tareas tomadas de lecciones de matemáticas propuestas por Kilhamn (2021) donde se introduce la programación para trabajar variables, resaltando que participaron 135 profesores en el estudio de lecciones tradicionales, y tenían como reto desarrollar nuevas lecciones para enseñar programación dentro de las asignaturas escolares establecidas, como resultado se obtuvieron 32 lecciones de matemáticas entre entornos de programación y lo tradicional.

5.2.3.1. Uso de variable contador en Scratch

La lección fue diseñada por tres profesores y aplicada en primer lugar en el grado sexto con estudiantes de aproximadamente 12 años, seguido fue aplicada en grado séptimo y octavo. El objetivo de la tarea propuesto en Kilhamn (2021) era "comprender cómo la programación puede ayudar a crear algoritmos para resolver y visualizar métodos matemáticos", usando Scratch, esto presentando inicialmente una multiplicación como suma repetitiva y así llegar a que los estudiantes comprendan qué es una variable y cómo se usa en programación.

En las clases tradicionales de álgebra, una variable se representa comúnmente con el símbolo "x" o "y", y muchas veces no se interpreta este, menos se crea un significado del mismo. Por ello, se quiere llegar a lo que es la variable mediante la programación. En concreto, es usual encontrar expresiones como $y=2x+3$ siendo X y Y las variables que necesito hallar. En cambio, en programación una variable "x" podría ser usada en un código como " $x=6-2$ " donde "x almacenará el valor "3".

De manera que, la tarea propuesta inicia con el profesor planteando lo siguiente: $3+3+3+3+3$ y les pregunta a los estudiantes si es posible realizar una simplificación de esto, lo que guía a la siguiente pregunta: ¿Qué es la multiplicación? Y que lo trabajen mediante el siguiente código de Scratch mientras explica paso a paso cómo construirlo en el tablero, para que ellos lo realicen en el programa como se ve en la figura 19:

Figura 19

Ejemplo de programación en Scratch



Nota. Tomada de Kilhamn (2021) Código de Scratch para la adición repetida.

Donde las variables de la figura 19 representan los siguiente: Primera variable “var1” representa el número a sumar repetidamente, en este caso sería 3, la segunda variable “var2” representa el número de repeticiones, en este caso serían 5, y la tercera variable “sum” acumula el total de la suma repetida, entonces el valor sería 15 ya que estamos sumando $(3+3+3+3+3)$.

Tabla 3

Variables propias en Scratch

Variables
“count” inicia en 0
“sum” inicia en 0
“var1” se le asigna el 3

“var2” se le asigna el 5

Nota. Se elaboraron variables propias para la adición repetitiva, tomado de Kilhamn (2021)

Los estudiantes realizan el siguiente razonamiento, teniendo en cuenta que “var1” es 3 y “var2” es 5, se quiere sumar 3 cinco veces que es lo mismo que 3×5 . Analizan que se debe llegar a que “count” sea igual a “var2” entonces describen el comportamiento de Scratch de la siguiente manera:

Tabla 4

Interacciones propias en Scratch

Iteraciones
Primera iteración: count = 1, sum = 3 (0 + 3)
Segunda iteración: count = 2, sum = 6 (3 + 3)
Tercera iteración: count = 3, sum = 9 (6 + 3)
Cuarta iteración: count = 4, sum = 12 (9 + 3)
Quinta iteración: count = 5, sum = 15 (12 + 3)

Nota. Se elaboraron interacciones propias para la adición repetitiva, tomado de Kilham (2021)

Luego de 5 iteraciones “count” es igual a “var2” y el valor final de “sum” es 15, que es el resultado de 3×5 o $3+3+3+3+3$.

Los estudiantes interactuaron con variables como count y sum, al implementar el código de Scratch, estas variables eran las encargadas de rastrear el número de sumas repetidas y acumular los resultados, respectivamente. Mediante la experimentación y manipulación de Scratch con diferentes valores para las variables, los estudiantes pueden visualizar como cambian las sumas y por ende el resultado final de la multiplicación.

Además de la manipulación de las variables en el código, los estudiantes se enfrentaron al desafío de comprender la estructura del bucle en Scratch, que facilitaba el proceso de sumas repetidas. Este enfoque permitió no solamente resolver problemas matemáticos, sino una introducción al mundo de la programación como herramienta digital educativa, enfatizando en el uso de bucles y la manipulación de variables.

En resumen, la tarea planteada en Kilhamn (2021) no solo ayudó a que los estudiantes a profundizar en la comprensión de la multiplicación y las variables, sino que también les proporcionó una experiencia práctica en la aplicación de la programación para resolver problemas matemáticos, que pueden aplicarse en contextos futuros.

6. Reflexiones Finales

El estudio profundo de aspectos relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico temprano; así como la identificación de los principales avances que se han logrado para fomentar su desarrollo en el aula, es una contribución importante en la formación de los futuros profesores de matemáticas. Entender esta problemática nos ha permitido reconocer el alcance de fomentar desde los primeros años de escolaridad una forma de pensar fundamental para el pensamiento matemático. El pensamiento algebraico temprano, permite iniciar con el fomento de los procesos de generalización, donde el cambio y su explicación se estructuran a partir de la experiencia de los estudiantes y la necesidad de comunicar ideas.

Considerar las preguntas: P1: ¿Qué definiciones y/o explicaciones del pensamiento algebraico temprano se identifican en Educación Matemática? y P2: ¿Qué aportes se han planteado para favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico temprano en el aula de matemáticas?; que han guiado el desarrollo de la búsqueda bibliográfica, así como el estudio de los documentos

seleccionados, es un insumo fundamental para el diseño de clase de los futuros profesores de matemáticas, así como en la contribución en la línea de investigación asociada al pensamiento algebraico temprano.

Las revisiones de los estudios presentes demuestran que el álgebra temprana no debe limitarse únicamente al uso de variables y ecuaciones, sino promover desde el aula un enfoque más profundo partiendo de la construcción de argumentos matemáticos y la comprensión de relaciones, ya que esto va fortalecer desde edades tempranas la introducción y desarrollo de conceptos y habilidades en los estudiantes.

También es de resaltar, la integración del álgebra temprana en el currículo nacional continúa siendo limitada, a pesar de la creciente relevancia que ha adquirido internacionalmente. Esta situación plantea una necesidad imperante de promover la investigación y el desarrollo de propuestas educativas que enriquezcan los programas escolares desde los primeros grados. Es fundamental que se fomenten iniciativas que permitan la incorporación de estrategias didácticas innovadoras y adaptadas a nuestro contexto, con el objetivo de mejorar la comprensión y el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en los estudiantes.

De igual manera, la revisión de estudios internacionales sobre el diseño de libros de texto y la implementación de actividades de programación orientadas a fortalecer las relaciones funcionales y el pensamiento algebraico temprano ofrece valiosas perspectivas que pueden ser adaptados y replicados en nuestras aulas. La experiencia de otros países en este ámbito nos proporciona una base sólida para reflexionar sobre la pertinencia de estas estrategias en nuestro contexto local, sugiriendo un enfoque que podría tener un impacto significativo en la calidad educativa de nuestras instituciones.

Es crucial que los docentes de Santander y de otras regiones del país se involucren activamente en este proceso de adaptación e innovación pedagógica. La implementación de estas estrategias no solo contribuiría a una mejora en las capacidades algebraicas de los estudiantes, sino que también podría desencadenar nuevas líneas de investigación educativa orientadas a comprender mejor cómo se desarrolla el pensamiento algebraico en contextos locales. La adopción de estas prácticas tiene el potencial de generar una transformación en la enseñanza del álgebra temprana, permitiendo a nuestros alumnos acceder a un aprendizaje más profundo y significativo desde los primeros años de su formación académica.

En este sentido, se hace un llamado a la comunidad educativa para que explore y adapte estas propuestas con el fin de cultivar un entorno de aprendizaje más dinámico y eficaz. Al replicar y contextualizar las innovaciones educativas internacionales en nuestras aulas, no solo se contribuiría a la mejora del rendimiento académico, sino que también se fomentaría una cultura de investigación y desarrollo pedagógico que es esencial para el avance educativo de nuestra región y del país en su conjunto.

Referencias

- Andrade-Molina, M., Montecino, A., y Aguilar, M. S. (2020). Beyond quality metrics: defying journal rankings as the philosopher's stone of mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics*, 103(3), 359–374. <http://doi.org/10.1007/s10649-020-09932-9>
- Blanton, M. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446. <https://doi.org/10.2307/30034944>
- Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87–115. <https://doi.org/10.2307/30034843>
- Donovan, A.M., Stephens, A., Al apala, B. *et al.* (2022). Is a substitute the same? Learning from lessons centering different relational conceptions of the equal sign. *ZDM—the International Journal on Mathematics Education* 54, 1199–1213. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01405-y>
- Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebraizing” the K-12 curriculum. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM—the International Journal on Mathematics Education* 54, 1131–1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>

- Killham, C., Bråting, K., Helenius, O. *et al.* (2022). Variables in early algebra: exploring didactic potentials in programming activities. *ZDM—the International Journal on Mathematics Education* 54, 1273–1288. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01384-0>
- Lenz, D. The role of variables in relational thinking: an interview study with kindergarten and primary school children. *ZDM Mathematics Education* 54, 1181–1197 (2022). <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01419-6>
- MEN (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. Recuperado el 16 de marzo de 2023, de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles89869_archivo_pdf9.pdf
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. MEN (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas. (2ª ed.) Colombia
- Pang, J., Sunwoo, J. (2022). Design of a pattern and correspondence unit to foster functional thinking in an elementary mathematics textbook. *ZDM—the International Journal on Mathematics Education* 54, 1315–1331. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01411-0>
- Pearn, C., Stephens, M. & Pierce, R. (2022). Algebraic reasoning in years 5 and 6: classifying its emergence and progression using reverse fraction tasks. *ZDM—the International Journal on Mathematics Education* 54, 1257–1271. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01426-7>
- Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, 33(1), 153-180. <https://doi.org/10.24844/EM3301.06>
- Pinto, E. Cañas, M. y Moreno, A. (2022). Functional Relationships Evidenced and Representations Used by Third Graders Within a Functional Approach to Early Algebra. *International*

- Journal of Science and Mathematics Education* 20, 1183-1220.
<https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0>.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of pat[1]terns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th Annual Meet[1]ing of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 2–21). PME-NA.
- Serna Agudelo, T. M. ., Cardona Cortés, E. I., & Carmona-Mesa, J. A. (2021). Una revisión de literatura sobre estrategias de enseñanza de las expresiones algebraicas en educación secundaria. *Uni-Pluriversidad*, 21(2), 1–13.
<https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.348601>
- Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. Bogotá: Editorial U.D.
- Toerner, G., y Arzarello, F. (2012). Grading mathematics education research journals. *News letter of the European Mathematical Society*, 86, 52–54.
- Schifter, D., Russell, S.J. The centrality of student-generated representation in investigating generalizations about the operations. *ZDM Mathematics Education* 54, 1289–1302 (2022).
<https://doi.org/10.1007/s11858-022-01379-x>.
- Williams, S. R., y Leatham, K. R. (2017). Journal quality in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(4), 369–396. <https://doi.org/10.5951/jres-matheduc.48.4.0369>
- Xie, S., Cai, J. Fifth graders' learning to solve equations: the impact of early arithmetic strategies. *ZDM Mathematics Education* 54, 1169–1179 (2022). <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01417-8>

