

# **DISEÑO Y MONTAJE DE UN SISTEMA DE CONTROL DE UNA NUEVA TRANSMISIÓN VARIABLE CONTINUA (CVT) APLICADA A UN MOTOR ELÉCTRICO**

**GISSELL BERNATE IZQUIERDO**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**  
**Facultad de Ingenierías Físico Mecánicas**  
**Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones**  
**Bucaramanga, Colombia**  
**2011**

# **DISEÑO Y MONTAJE DE UN SISTEMA DE CONTROL DE UNA NUEVA TRANSMISIÓN VARIABLE CONTINUA (CVT) APLICADA A UN MOTOR ELÉCTRICO**

**GISSELL BERNATE IZQUIERDO**

**Ingeniera Electrónica**



**Tesis presentada como requisito parcial para obtener el título de:  
Magíster en Ingeniería Electrónica**

**Director: PhD Rodrigo Correa Cely  
Grupo de Investigación CEMOS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
Facultad de Ingenierías Físico Mecánicas  
Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones  
Bucaramanga, Colombia**

2011

A mi querido esposo, *Jhony*  
A mis padres *María Elena* y *Jaime*  
A mi abuela *Edith*  
A mis hermanos *Víctor, Carlos* y *Aumerle*  
A todos mis tíos y tías

## AGRADECIMIENTOS

A **Rodrigo Correa Cely**, director de este trabajo de investigación, por su apoyo constante e incondicional, su convicción y defensa continua y por sus valiosos y oportunos aportes.

A mis amigos y compañeros del **Grupo de Investigación CEMOS**, por su respaldo y colaboración.

Al Doctor **Adolfo León Arenas**, Decano de la Facultad de Fisicomecánicas, por brindarnos su apoyo incondicional en los momentos más importantes.

A todos aquellos profesores que durante mis épocas de pregrado y postgrado se esmeraron en brindar lo mejor de sí en mi formación tanto humana como profesional.

Al Ingeniero **Javier Fernando Arellanos**, Coordinador de Propiedad Intelectual de la Vicerrectoría de Investigación y Extensión, por depositar su fe en este proyecto.

A mis padres: **María Elena Izquiedo y Jaime Bernate**, por su confianza, amor y entrega, y porque con sus consejos y guía fundaron las bases más sólidas de mi personalidad. A mis hermanos, Víctor, Carlos y Aumerle, por su paciencia, comprensión y apoyo. Y especialmente, a mi tía Nazly, por apoyar desde la distancia mis estudios.

Y muy especialmente a mi alma gemela, **Jhony Leyva**, por su paciencia y comprensión durante todos estos años.

# CONTENIDO

	Pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>15</b>
<b>1. ASPECTOS METODOLÓGICOS</b>	<b>17</b>
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	17
1.2 JUSTIFICACIÓN	18
1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	19
1.3.1 Objetivo general	19
1.3.2 Objetivos específicos	19
1.4 ALCANCE	19
1.5 METODOLOGÍA	20
<b>2. MARCO TEÓRICO</b>	<b>21</b>
2.1 SISTEMAS DE VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD	21
2.2 COMPARACIÓN ENTRE LAS TRANSMISIONES CVTs	22
2.3 IMPORTANCIA DEL CONTROL EN UNA TRANSMISIÓN CVT	23
2.4 IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS	23
2.5 TÉCNICAS DE CONTROL AVANZADO IMPLEMENTADAS EN CVTs	26
2.6 SISTEMAS DE CONTROL $H_\infty$	27
2.6.1 Definiciones básicas	27
2.6.2 El problema de control $H_\infty$	29
2.7 QFT	37
2.8 CONTROL PREDICTIVO	39
2.8.1 Estrategia del control predictivo basado en modelos	39
2.8.2 Elementos básicos del control predictivo	41
<b>3. DESCRIPCIÓN DEL PROTOTIPO DE LA TRANSMISIÓN CVT</b>	<b>49</b>
3.1 PROTOTIPO FÍSICO	49
3.1.1 Tren de engranajes planetarios de doble etapa	50
3.1.2 Sistema impulsor	51
3.1.3 Motor de control	52
3.1.4 Mecanismo de sinfín–corona	53
<b>4. MODELADO E IDENTIFICACIÓN DE LA PLANTA</b>	<b>54</b>

4.1	MODELADO DEL PROTOTIPO DE LA TRANSMISIÓN	54
4.1.1	Modelado del Servomotor DC	54
4.1.2	Modelado del mecanismo sinfín - corona	55
4.1.3	Modelado de la Transmisión CVT	58
4.2	IDENTIFICACIÓN DEL PROTOTIPO DE LA TRANSMISIÓN	60
4.2.1	Descripción de la planta	61
4.2.2	Adquisición de los datos	62
4.2.3	Identificación	63
4.2.4	Validación	65
<b>5.</b>	<b>DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL</b>	<b>66</b>
5.1	CONTROL CLÁSICO: DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL PI	66
5.2	DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL $H_\infty$	67
5.2.1	Configuración de la planta aumentada	68
5.2.2	Estimación de la incertidumbre multiplicativa a la salida	70
5.2.3	Diseño de las funciones de ponderación $W_T$ y $W_S$	71
5.2.4	Diseño del peso de robustez $W_T$	72
5.2.5	Diseño del peso de prestación $W_S$	75
5.2.6	Cálculo del controlador	77
5.2.7	Implementación en Simulink®	79
5.3	DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL QFT	80
5.3.1	Especificaciones de diseño	82
5.3.2	Proceso de diseño QFT	83
5.4	DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL PREDICTIVO	95
5.4.1	Metodología del control MPC	96
5.4.2	Descripción y modelo del proceso	97
5.4.3	Predicción de los estados y variable de salida	98
5.4.4	Planteamiento del problema de optimización	100
5.4.5	Diseño del controlador	102
<b>6.</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL</b>	<b>105</b>
6.1	ELEMENTOS DEL SISTEMA DE CONTROL	106
6.1.1	Sensor de velocidad	106
6.1.2	Tarjeta de control	106

6.2	RESULTADOS EXPERIMENTALES	108
6.2.1	Respuesta a lazo abierto	108
6.2.2	<i>Resultados experimentales para el controlador PI</i>	<i>110</i>
6.2.3	<i>Resultados experimentales para el controlador QFT</i>	<i>113</i>
<b>7.</b>	<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>116</b>
7.1	CONCLUSIONES	116
7.2	RECOMENDACIONES	118
	<b>REFERENCIAS</b>	<b>120</b>

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Diagrama De Bloques De Un Sistema De Control Generalizado [27]	28
Figura 2. Estructura De Un Sistema De Control Convencional [29]	29
Figura 3. Ponderaciones En Frecuencia De Vectores De Entrada Y Salida	33
Figura 4. Estructura General Para Problemas De Control $H_{\infty}$	33
Figura 5. Planta Generalizada Y Controlador	34
Figura 6. Estructura Genérica De Control Realimentado [32]	38
Figura 7. Estrategia Del Control Predictivo [33]	40
Figura 8. Estructura Básica Del Control Predictivo Basado En Modelo [33]	41
Figura 9. Respuesta Libre Y Forzada [33]	46
Figura 10. Prototipo De La Cvt	49
Figura 11. Tren De Engranajes Planetarios	50
Figura 12. Motor Universal Y Reducción Por Poleas	51
Figura 13. Servomotor Dc	52
Figura 14. Mecanismo Sinfín - Corona	53
Figura 15. Esquema Interno Del Motor Dc [36]	55
Figura 16. Análisis De Las Fuerzas Presentes En El Mecanismo Sinfín - Corona	56
Figura 17. Modelado En Simulink® De La Transmisión Cvt	59
Figura 18. Modelo Teórico De La Transmisión Cvt	59
Figura 19. Prototipo De La Cvt	60
Figura 20. Modelo Teórico De La Planta	61
Figura 21. Adquisición De Datos	62
Figura 22. Estimación De Los Parámetros	63
Figura 23. Análisis Del Residuo	64
Figura 24. Respuesta Al Escalón De La Planta	64
Figura 25. Validación Del Modelo	65
Figura 29. Planta Aumentada $P(s)$	69

Figura 30. Incertidumbre Multiplicativa	71
Figura 31. Forma Genérica De $W_T$	74
Figura 32. Incertidumbre Multiplicativa Y $\omega_T$	74
Figura 33. Pesos $\omega_S$ Y $\omega_T$	77
Figura 34. Matriz De Transferencia	78
Figura 35. Funciones De Sensibilidad Y Sus Ponderación	78
Figura 36. Funciones De Sensibilidad Complementaria Y Su Ponderación	79
Figura 37. Implementación $H_\infty$	80
Figura 38. Respuesta Al Escalón	80
Figura 39. Esquema De Control Realimentado [32]	81
Figura 40. Generación De Plantillas	84
Figura 41. Contornos De Estabilidad A Distintas Frecuencias	85
Figura 42. Respuesta Al Escalón De Los Márgenes Superior E Inferior	87
Figura 43. Diagrama De Bode De Los Márgenes Superior E Inferior	87
Figura 44. Contornos De Seguimientos A Distintas Frecuencias	88
Figura 45. Intersección De Contornos	89
Figura 46. Diagrama De Nichols - Lazo Abierto - Planta	91
Figura 47. Diagrama De Nichols – Lazo Abierto Planta + Controlador	91
Figura 48. Límites Del Seguimiento En Frecuencia	92
Figura 49. Validación	93
Figura 50. Diagrama De Bode De Las Incertidumbres A Lazo Cerrado	93
Figura 51. Respuesta Al Escalón De Las Incertidumbres A Lazo Cerrado	94
Figura 52. Respuesta En Frecuencia De Las Incertidumbres A Lazo Cerrado Y Los Límites De Seguimiento	94
Figura 53. Diagrama En Simulink® En Tiempo Discreto	95
Figura 54. Respuesta A Lazo Cerrado	95
Figura 55. Diagrama De Bloques Del Control Predictivo En Variables De Estado	102
Figura 56. Sistema De Control Predictivo Modelado En Simulink®	103
Figura 57. Sistema De Control Predictivo Modelado En Simulink®	104
Figura 58. Esquema Del Sistema De Control	105

Figura 59. Encoder & Tacogenerador	106
Figura 60. Tarjeta De Control	107
Figura 61. Respuesta De Velocidad A Un Escalón En El Motor Ac	108
Figura 62. Respuesta De La Cvt A Una Entrada Escalón En El Motor Dc	109
Figura 63. Respuesta Escalón En El Motor Dc, Con El Motor Ac Encendido	110
Figura 64. Respuesta De La Cvt A Una Entrada Escalón En El Motor Dc	111
Figura 65. Señal De Control Pi	111
Figura 66. Perturbación En El Motor Ac	112
Figura 67. Señal De Control Ante Una Perturbación	112
Figura 68. Respuesta Escalón - Control Qft	113
<i>Figura 69. Señal De Control Qft</i>	114
Figura 70. Respuesta A Una Perturbación En El Motor Ac	114
Figura 71. Esfuerzo De Control Ante Una Perturbación	115

## RESUMEN

**TÍTULO:** DISEÑO Y MONTAJE DE UN SISTEMA DE CONTROL DE UNA NUEVA TRANSMISIÓN VARIABLE CONTINUA (CVT) APLICADA A UN MOTOR ELÉCTRICO\*\*

**AUTOR:** Gisell Bernate Izquierdo\*\*

**PALABRAS CLAVE:** Transmisión variable continua (CVT), control QFT, Control  $H_{inf}$ , control predictivo, control clásico PID.

### DESCRIPCIÓN:

La eficiencia de una transmisión variable continua, se ve afectada grandemente por la estrategia de control utilizada y por el tipo de tecnología aplicada para modificar la relación de transmisión. Normalmente se implementa un mecanismo hidráulico para controlar la relación de transmisión, requiriendo por tanto dispositivos adicionales como bombas de alta presión, servo-válvulas, reguladores de presión, entre otros; no solamente se aumenta el costo de la transmisión, sino que se deteriora la eficiencia del sistema debido a las pérdidas hidráulicas inherentes a las altas presiones. En la presente tesis de maestría se propone un mecanismo de regulación novedosa para una transmisión CVT exenta de esta clase de problemas. Se propone la regulación de un tren de engranajes planetarios de dos entradas de velocidad, una de las cuales está acoplada al motor cuya potencia se desea controlar, y la otra a un servomotor que actúa sobre un mecanismo sinfín-corona. La estrategia propuesta para atacar el problema fue hacer una identificación de la transmisión CVT para obtener el modelo de la planta y realizar el diseño las técnicas de control PI,  $H_{inf}$ , QFT y control predictivo. Luego de realizar la simulación de las distintas técnicas, se evaluó la respuesta en el tiempo y en la frecuencia para seleccionar la estrategia de control a implementar. Se seleccionó la técnica QFT como la de mejor respuesta debido a la sencillez, menor esfuerzo de control y mayor rechazo a perturbaciones. Finalmente, se implementó la estrategia de control en un microcontrolador de 32 bits de la Familia de microcontroladores de ColdFire® de Freescale® y se realizaron diferentes pruebas para encontrar la respuesta a un escalón en la señal de referencia y ante variaciones en la velocidad del motor AC.

---

\* Trabajo de investigación

\*\* Facultad de Ingenierías Físico Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones.  
Director: PhD Rodrigo Correa Cely

## SUMMARY

**TITLE:** DESIGN AND INSTALLATION OF A CONTROL SYSTEM OF A NEW CONTINUOUSLY VARIABLE TRANSMISSION (CVT) APPLIED TO AN ELECTRIC MOTOR\*\*

**AUTHOR:** Gisell Bernate Izquierdo\*\*

**KEYWORDS:** Continuously Variable Transmission (CVT), QFT control, Hing control, predictive control, PID classic control.

### DESCRIPTION:

There are five main reasons worldwide accepted that justify the research and development on continuously variable transmission (CVT): fuel economy, reduced negative environmental impact, convenience for the user, maximizing the engine performance at all times and functional simplicity. However, the efficiency of a continuously variable transmission is greatly affected by the control strategy used and the type of technology used to modify the gear ratio. It usually implements a hydraulic mechanism to control the transmission ratio, thus requiring additional devices such as high pressure pumps, servo valves, pressure regulators, among others; not only increasing the cost of transmission, but also deteriorating the efficiency of the hydraulic losses due to the inherent high pressures. This is reflected in the power trains formed by the combustion engine, the CVT and the mechanism of control have not been able to overcome the level of economy in fuel consumption achieved by the automated manual transmissions. This master thesis proposes a novel regulatory mechanism for a CVT transmission free of such problems. It proposes to regulate a planetary gear train of two speed inputs, one of which is attached to the engine power to be controlled, and the other to a servomotor acting on a worm gear mechanism. By varying the screw speed a change in gear ratio smooth and continuous is achieved, thereby obtaining an actuator for easy adjustment, lower costs and more stable dynamic response. The proposed strategy to tackle the problem was to make an identification of the CVT transmission for the model of the plant and perform the technical design of PI control, QFT and predictive control. After the simulation of different techniques, we evaluated the response in time and frequency to select the control strategy implemented. The QFT technique was selected as the best answer because of its simplicity, less effort and greater control disturbance rejection. Finally, the control strategy implemented in a microcontroller 32 bit microcontroller family from ColdFire<sup>®</sup> Freescale<sup>®</sup> and carrying out different tests to find the answer to a step in the reference signal and changes in speed AC motor.

---

\* Thesis research

\*\* Faculty of physical and mechanical engineering. School of Electrical, Electronics and Telecommunications.  
Director: PhD Rodrigo Correa Cely

## INTRODUCCIÓN

Desde sus orígenes, la teoría de control estuvo encaminada a mejorar el funcionamiento de una máquina, siendo el sistema de control más sofisticado a medida que la máquina a controlar es más compleja o es crítica para el proceso de la planta en que se encuentra. En el caso de los automóviles, a pesar de su alto costo, su funcionamiento ha sido en lazo abierto y la realimentación la proporciona el conductor, sin tener criterios que garantice un óptimo funcionamiento del sistema, por lo que el desempeño dependerá de la experiencia de éste. Las transmisiones variables continuas (CVT) nacieron con el objetivo de proporcionar un mejor grado de aprovechamiento del combustible, ejerciendo un control directo sobre la velocidad del automóvil.

Las primeras CVTs tuvieron su origen en los Estados Unidos, pero fue en Japón donde vieron en ella una salvación a la segunda crisis del petróleo de los 70's y 80's cuando los precios llegaron a alcanzar un alza de hasta cuatro veces su valor [1]. La primera CVT comercial fue propuesta por primera vez por la NSK, la segunda fábrica de rodamientos del mundo. Sus investigaciones encontraron que un cambio de marchas brusco, como el que se presenta con una caja de cambios convencional, produce un despilfarro de combustible. Al alejarse el motor de la velocidad para la que fue diseñada, se incursionaba en niveles de velocidad de baja eficiencia, provocando de esta forma que el motor consumiera energía extra para acomodarse al torque exigido [2].

Desde entonces, las CVTs atrajeron la atención de los consumidores. Luego que NISSAN lanzara el primer automóvil con una transmisión CVT en 1999, las empresas fabricantes de automóviles han estado progresivamente incorporando esta tecnología en algunos de sus nuevos vehículos [3, 4]. Sin embargo, estas transmisiones aún no están siendo producidas tan masivamente como las transmisiones convencionales. La razón es que los sistemas inventados son basados en la fricción, la hidrostática y en complejos mecanismos con limitaciones importantes, que requieren de elementos de control hidráulicos para la variación de la velocidad y los cuales introducen pérdidas de potencia adicionales. Esto tiene implicaciones negativas en el grado de aceptación de los consumidores principalmente debido a los altos costos involucrados.

El control de la relación de velocidad en la mayoría de transmisiones CVTs, se resumen en control de posición del vástago de una válvula hidráulica tipo proporcional. Para esto, se requiere la instalación en el automóvil de componentes adicionales como bombas de desplazamiento positivo, válvulas de control de presión, servo-válvulas, válvulas proporcionales. La inclusión de estos elementos no sólo eleva el costo inicial, sino también el costo de mantenimiento. Además, la respuesta dinámica de control se ve comprometida debido a la introducción de retardos presentes en estos componentes [5].

Un problema importante resaltado en la literatura [6] es la disminución en la eficiencia del tren de potencia (motor de combustión-CVT) cuando se implementa un control de tipo hidráulico. El uso de este tipo de solución está ligada a la fase de diseño de estas transmisiones CVT, en su etapa conceptual. En esta tesis se propuso un mecanismo diferente de control para variar la relación de transmisión y se implementó una estrategia de control avanzado para regular la velocidad de la transmisión CVT propuesta por J. Leyva [7].

En el presente documento, el capítulo uno se presentan la metodología que se llevó a cabo, los objetivos y la justificación para realizar para realizar este proyecto. En el capítulo expone la teoría sobre la cual se base el proyecto, abordando una introducción a las transmisiones CVT y temas generales sobre identificación de sistemas, control QFT, control  $H_\infty$  y control predictivo.

# CAPÍTULO 1

## 1. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Dentro de los aspectos metodológicos se tratarán el objeto y problema de estudio, así como también el objetivo general y los objetivos específicos, la metodología implementada y la justificación para la realización de la presente investigación.

### 1.1 Planteamiento del problema

Esta tesis de maestría surgió de la necesidad de diseñar e implementar un sistema de control para un nuevo diseño de CVT basado en la transmisión de torque, sólo mediante fuerza normal, que garantice el desempeño óptimo del tren de potencia y donde se pueda apreciar claramente la ventaja que este tipo de tecnología representa en comparación con la tecnología a base de fricción. Cuando se transmite fuerza a base de fricción, se amplifican las fuerzas necesarias para transmitir la potencia, lo cual, requiere de complejos mecanismos para control de la relación de velocidad, en la mayoría de los casos de sistemas hidráulicos. El problema, que ha sido identificado por varios trabajos de investigación consiste en que a mayores torques se requieren mayores presiones, con el consecuente aumento en las pérdidas de potencia, inherentes a estos sistemas [10]. En algunos casos, el detrimento es tan alto que el ahorro en consumo de combustible logrado al mantener al motor en su punto de máxima eficiencia se pierde nuevamente al acoplar los actuadores del sistema de control. Sin embargo, una presión débil también disminuye la velocidad de respuesta del sistema hidráulico y puede verse comprometida la capacidad de aceleración del vehículo. En estos casos, el ingeniero de control asume la responsabilidad de encontrar el mejor equilibrio entre los parámetros de aceleración y rendimiento mecánico global.

Debido a este inconveniente, el sistema de control debe garantizar que el motor se mantenga el mayor tiempo posible en su punto óptimo de operación y de esta manera compensar las pérdidas hidráulicas y de fricción. A pesar del gran número de técnicas avanzadas de control utilizadas, las transmisiones variables no ha podido superar por una

diferencia apreciable a las transmisiones convencionales, aunque si han mantenido un rendimiento mecánico más elevado que las transmisiones automáticas [9].

En este trabajo se propuso una forma alternativa de variar la relación de transmisión sin utilizar complejos mecanismos hidráulicos, sino simplemente un actuador eléctrico acoplado a un mecanismo sinfín-corona que se encuentra conectado a una de las entradas de un tren de engranajes epicicloidales. Esto reduce enormemente el problema al control de velocidad de un motor DC, consiguiendo de este modo un actuador con un elevado rendimiento eléctrico y mecánico.

La estrategia propuesta para atacar el problema fue realizar una identificación del sistema para caracterizar el comportamiento dinámico del sistema, el paso siguiente consistió en la selección de una estrategia de control adecuada de acuerdo al modelo encontrado. Finalmente, se hizo la respectiva implementación en un microcontrolador.

Se exploraron diferentes técnicas de control avanzado, partiendo de la hipótesis que éstas mejorarían el desempeño del sistema en comparación a un sistema de control clásico PI, para lo cual se partió del trabajo previo desarrollado por J. Leyva (et al) [7]. Se realizó el diseño y la simulación de tres estrategias de control y se realizaron las pruebas de carga a condiciones diferentes para evaluar el comportamiento del sistema de control.

## **1.2 Justificación**

La presente propuesta de maestría hace parte de uno de los proyectos favorecidos de la “CONVOCATORIA PARA LA CONSOLIDACIÓN DE GRUPOS DE INVESTIGACIÓN 2007-2008” organizada por la Vicerrectoría de Investigación y Extensión (VIE). Constituye una forma de consolidar el grupo de investigación CEMOS tanto en instrumentación como el fortalecimiento de la fuerza de trabajo investigativa, ya que brinda la experiencia de trabajar con un equipo de trabajo conformado por investigadores y estudiantes pertenecientes a las escuelas de Ingeniería Mecánica e Ingeniería Electrónica.

Es relevante investigar en este tema porque el concepto de transmisión variable continua, permite mantener el motor de combustión en un régimen de revoluciones fijas, con lo cual

se pueden alcanzar diferentes modos de trabajo en el motor, ya sea de máximo torque, mínimo consumo específico de combustible o máxima potencia.

Unas de las aplicaciones que se recomendaron para trabajos posteriores en la investigación inicial [7], fue la posibilidad de aplicar la nueva CVT a campos como el sector de máquinas-herramientas y robótica donde se requiere de un control preciso de la velocidad. Esta aplicación muestra otra perspectiva de funcionalidad de la CVT, el comportamiento de este nuevo mecanismo, capaz de obtener una salida de velocidad regulada sin importar que tipo de fuerza motriz la genere. En esta propuesta de tesis se obtuvo otro resultado, el cual consistió en que la transmisión propuesta presentó un modo de funcionamiento análogo al de un transistor electrónico permitiendo controlar la potencia de una fuente motriz variando solamente la velocidad de un motor DC de control de menor potencia, debido a las características de diseño de la transmisión.

### **1.3 Objetivos de la investigación**

Los objetivos del proyecto de investigación se componen de un objetivo general y soportado por tres específicos.

#### ***1.3.1 Objetivo general***

Diseñar e Implementar un sistema de control digital para una nueva transmisión variable continua aplicada a un motor eléctrico.

#### ***1.3.2 Objetivos específicos***

- Seleccionar la estrategia de control más adecuada para la nueva CVT desarrollada.
- Diseñar el sistema de control digital.
- Implementar el sistema de control en la CVT y contrastar resultados con la simulación realizada.

### **1.4 Alcance**

El presupuesto aprobado en la convocatoria para la ejecución del proyecto global en el cual se enmarca esta tesis de maestría fue de 20 millones de pesos para un lapso de

tiempo de ejecución de 12 meses. Con base en este tiempo estipulado y a los recursos destinados, se tuvieron los siguientes alcances:

- Se evaluaron tres estrategias de control mediante simulación en Matlab, en los cuales se mostraron los parámetros dinámicos del sistema.
- Se verificó la estabilidad en la velocidad de salida dentro de un margen aceptable ante la presencia de variaciones de carga y variaciones en la velocidad del motor principal; para esto se realizaron pruebas con un motor eléctrico como impulsor central y un generador como carga.
- Se desarrolló de un sistema de control embebido para la transmisión cuando se acopla a un motor eléctrico.

## **1.5 Metodología**

La metodología seguida para alcanzar los objetivos propuestos en el trabajo de maestría fue la siguiente:

### *Selección Estrategia de control*

- Se estudiaron las diferentes estrategias de control, para la planta caracterizada.
- Se seleccionaron tres estrategias de control avanzado y se realizaron los respectivos diseños mediante simulación por computador.

### *Optimización del algoritmo de control*

- Se evaluaron algunos métodos de optimización con el fin de reducir el tiempo de respuesta, al implementar el algoritmo de control, en el caso que se requiera minimizar una función objetivo.

### *Implementación del banco de pruebas*

- Se seleccionaron los componentes electrónicos para la implementación del sistema de control.
- Se adecuó la instrumentación y sensores del la nueva CVT.
- Se implementó el algoritmo de control en un microcontrolador.

- Se construyó un banco de pruebas de la CVT acoplada a un motor eléctrico, para evaluar el desempeño del sistema de control.

## **CAPÍTULO 2**

### **2. MARCO TEÓRICO**

Los sistemas de variación continua de la velocidad CVT son las transmisiones ideales, ya que permiten variar la velocidad de salida y mantener el motor en un régimen de revoluciones constantes; esta ventaja teórica que poseen las CVT se ve afectada por las pérdidas que se presentan al implantar el sistema de control de la relación de velocidad de la transmisión. En el caso de las transmisiones más usadas, las de poleas tipo V, requieren de complejos mecanismos hidráulicos para variar el radio de contacto de las poleas [10]. En estos casos se busca mejorar el desempeño del motor de combustión por medio del diseño de una estrategia de control que permita al motor mantenerse en su punto de óptima operación.

El sistema de control de una CVT debe ser eficiente, ya que el desempeño y eficiencia del sistema esta ligada al tipo de tecnología que se utilice para variar relación de velocidad. En el caso de las transmisiones por poleas estas son ineficientes comparadas con las transmisiones manuales convencionales, ya que para realizar el control de la relación se requiere de complejos mecanismos hidráulicos, disminuyendo la eficiencia y la relación costo/beneficio [6].

#### **2.1 Sistemas de Variación de la Velocidad**

Dos de los sistemas para variar la velocidad de un auto que han sido muy utilizados son las transmisiones manuales (TM) y las transmisiones automáticas (TA). Las TM son aquellas transmisiones que se componen de elementos estructurales (carcasas y mandos) y funcionales de tipo mecánico (engranajes, ejes, rodamientos, etc.). En este tipo de transmisiones la selección de las diferentes velocidades se realiza manualmente, aunque éste puede estar automatizado [11]. En las transmisiones automáticas el cambio de marcha se realiza de acuerdo a los requerimientos de la carga en el vehículo, sin

embargo uno de los problemas de las TA, es que requieren el uso de convertidores de torque. Un convertidor de torque transmite la potencia proveniente del motor mediante el acople hidráulico de dos discos; el problema con estos convertidores, es que siempre operan con una condición de deslizamiento entre los discos, aun cuando no se efectúa cambio alguno. Esto representa una pérdida constante de potencia debido a la fricción viscosa del aceite.

En los últimos años, debido a la aparición de las CVT (transmisiones variables continuas), el panorama ha cambiado y desde entonces, los automóviles han incorporado sistemas automáticos de relación de velocidad. La razón principal ha sido la presión que ha estado ejerciendo el gobierno sobre los fabricantes de automóviles en el uso racional de la energía y la disminución de emisiones contaminantes para que se sometieran a los nuevos estándares de ahorro de combustible [12].

El sistema de transmisión continuamente variable (CVT) es un sistema de transmisión automática en el que se permite fijar el motor de combustión en el régimen más adecuado, según los requerimientos de carga, y variar de forma continua la relación de transmisión [13].

## **2.2 Comparación entre las transmisiones CVTs**

Múltiples empresas como NISSAN, AUDI, entre otras [3,4], han enfocado sus investigaciones en torno a estos mecanismos de variación continua de la velocidad. Estas empresas ya están ofreciendo este tipo de transmisiones como alternativa de ahorro de combustible. Pero la realidad es que estas están lejos de representar una marcada diferencia en ahorro con respecto a las TM, a pesar de mantener el motor en su punto óptimo de operación. En la literatura se encuentran diversos trabajos como el de M. Deacon, en el que se ajustaron dos vehículos con TM y un tercer vehículo con transmisión CVT, donde las TM automatizadas con una estrategia de arranque/parada obtuvieron menor consumo en un determinado trayecto con respecto a la transmisión TM y la CVT [9]. Los resultados obtenidos de esta investigación en cuanto a la eficiencia y ahorro de combustible están muy lejanos de los esperados, ya que la ventaja teórica de las CVT se ven afectada por las pérdidas debido a los mecanismos hidráulicos, que se requieren para regular la relación de transmisión [5,8].

Las CVTs han tenido una buena aceptación en los usuarios y a pesar de las investigaciones, los fabricantes de autos siguen ofreciendo este concepto: “Una CVT mantiene el motor en su punto de operación óptimo” [14]. Esto se debe a que las CVTs ofrecen otras ventajas, como una mejor manejabilidad y un mejor porcentaje de confort [4], [15]. Sin duda, proporciona gran libertad al conductor al ofrecer la posibilidad de poder viajar a cualquier velocidad dentro del rango de velocidad disponible y, una mayor comodidad gracias a la eliminación de los tirones (cambios bruscos en la aceleración) cada vez que se realiza un cambio de velocidad [16] y al hecho de no tener que preocuparse por realizar cambios a las revoluciones del motor adecuadas para no causar daños en éste ni en los demás componentes mecánicos.

### **2.3 Importancia del control en una transmisión CVT**

El control en una transmisión es muy importante ya que busca solucionar algunos problemas como retardos, inestabilidad y comportamiento de fase no mínima de los sistemas CVT [6, 10]. Además, la estrategia de control está encaminada a disminuir las pérdidas inherentes al tipo de tecnología utilizada, para esto debe garantizar que el motor trabaje en su región de mayor eficiencia con el fin que sean compensadas las mermas de potencia debido a la fricción de los elementos que intervienen en esta, así como también las pérdidas hidráulicas en las líneas de presión en el caso de la transmisión por poleas ajustables.

### **2.4 Identificación de sistemas**

La identificación de sistemas permite construir modelos matemáticos de un sistema dinámico basado en datos medidos. Esto se hace esencialmente ajustando los parámetros dentro de un modelo dado, hasta que su salida coincida lo mejor posible con la salida medida [17].

La técnica más sencilla de identificación experimental consiste en aplicar al sistema una señal en escalón (a partir de un punto de equilibrio), midiendo de alguna forma los valores que va adquiriendo la salida con el tiempo. A partir de ahí, el procedimiento consiste en obtener un modelo (función de transferencia) cuya respuesta ante un escalón sea lo más parecida posible a los datos medidos en el proceso. El escalón de entrada debe ser lo

suficientemente grande para que la salida del proceso cambie de forma significativa respecto del ruido del sensor utilizado. Si la señal es demasiado pequeña, el ruido puede enmascarar la verdadera respuesta del sistema, por lo que la identificación no sería viable.

Los métodos de identificación se clasifican en **paramétricos** y **no paramétricos** y ayudan a distinguir claramente el modelo y el tipo de método para determinar los grados de libertad del modelo que represente un proceso.

- **Modelos paramétricos:** se asume que son capaces de describir el verdadero comportamiento de un proceso con un número finito de parámetros. Las ecuaciones diferenciales o en diferencias son ejemplos de este tipo de modelos. En ocasiones los parámetros tienen una relación directa con cantidades físicas del proceso.
- **Modelos no paramétricos:** generalmente requieren un número infinito de parámetros para describir exactamente el proceso. Un modelo FIR (Finite Response Impulse) es un ejemplo de estos modelos.

El modelado de un proceso, debe incluir una suposición del tipo de modelo que representa el proceso real. Entre los tipos de modelos se encuentran:

- **Modelos de Conocimiento:** se obtienen mediante razonamientos y la aplicación de principios de conservación de masa, energía, momento, etc. y otras leyes particulares del dominio de la aplicación.
- **Modelos Caja Negra:** se postula una relación matemática entre la entrada y la salida que depende de unos parámetros que deben ser estimados mediante los datos experimentales, sin que dicha relación deba estar fundada directamente en leyes físico-químicas u otras.
- **Modelos Grises:** son modelos de conocimiento en los que una parte está modelada como un modelo de caja negra y la otra como modelos matemáticos. Se usan para representar ciertos fenómenos complejos o difíciles de modelar de otra forma.
- **Modelos Dinámicos:** deben representar los aspectos esenciales del proceso; si en el proceso hay presentes perturbaciones, estas deben tenerse en cuenta.

- **Modelos Discretos:** la salida en  $t = kT$  depende de las entradas y salidas en instantes de tiempo  $(k - j)T$  anteriores.

Otra clasificación que enmarca las anteriores es:

- **Modelos lineales:**
  - Paramétricos
  - No paramétricos
- **No lineales:**
  - Hammerstein
  - Redes Neuronales
  - Modelos basados en leyes físico-químicas

La construcción del modelo se realiza mediante los siguientes pasos:

1. **Conocimiento previo y diseño de experimentos:** Estudio de la dinámica del sistema, identificación de las entradas y salidas de este.
2. **Toma de datos experimentales:** Excitar el sistema con determinado tipo de señal en las entradas y observar su evolución en las salidas. Captura de los datos y tratamiento previo de los datos registrados que generalmente están acompañados de ruido o cualquier otro tipo de imperfecciones.
3. **Selección del tipo de modelo:** Si el modelo que se desea obtener es un modelo paramétrico, el primer paso es determinar la estructura deseada para dicho modelo. Este punto se facilita en gran medida si se tiene un cierto conocimiento sobre las leyes físicas que rigen el proceso.
4. **Estimación de parámetros:** Ajuste de los datos tomados a la estructura seleccionada en la escogencia del tipo de modelo.
5. **Validación del modelo:** El último paso consiste en determinar si el modelo obtenido satisface el grado de exactitud requerido para la aplicación en cuestión. Si se llega a la conclusión de que el modelo no es válido, se deben revisar los siguientes aspectos como posibles causas:
  - a. El conjunto de datos de entrada-salida no proporciona suficiente información sobre la dinámica del sistema.

- b. La estructura escogida no es capaz de proporcionar una buena descripción del modelo.
- c. El criterio de ajuste de parámetros seleccionado no es el más adecuado.

## 2.5 Técnicas de control avanzado implementadas en CVTs

En la literatura revisada, se nota una inclinación hacia las técnicas de inteligencia artificial, como por ejemplo, redes neuronales [18], lógica fuzzy [19] algoritmos genéticos o una combinación de ellos, estas presentan un mayor ahorro de consumo combustible con respecto a los controladores diseñados mediante técnicas clásicas como: PID y los compensadores en frecuencia [15]. En la literatura existe la comprobación experimental de las ventajas que presenta este tipo de controladores [20]. Las técnicas basadas en inteligencia artificial resultan ser apropiadas para estas transmisiones, ya que el modelo representativo tiene un alto grado de incertidumbre y posee no linealidades. Además, la sencillez de los algoritmos lo hacen mas eficiente en cuanto a tiempo de cómputo de la respuesta debido a unas condiciones dadas; estos beneficios se deben a que el controlador utiliza patrones parecidos al comportamiento de los seres humanos (comportamiento cualitativo) [21].

Otras técnicas de control utilizadas son la compensación en frecuencia y la técnica del lugar de las raíces [8, 15, 22]. Para el diseño de estas es necesario tener el modelo determinístico del sistema, lo cual requiere aplicar algunos métodos de identificación para encontrar los parámetros de la función de transferencia que describe el mecanismo de transmisión [23]. En este caso el modelo de función de transferencia sólo cubre un determinado rango de operación y no tiene en cuenta las no linealidades de los mecanismos en los cuales fue implementado (poleas separables) [5].

En el caso en el que se presenta un controlador integrado motor – transmisión, la estrategia de control se hace más compleja, ya que mantener el motor en el punto óptimo de operación depende de muchos factores externos tales como condiciones atmosféricas, calidad del combustible, retardo de acción mecánica, pérdidas hidráulicas, entre otros. En consecuencia, se ha empezado a trabajar en estrategias de control más elaborados utilizando técnicas avanzadas de control; así por ejemplo, algunos trabajos combinan estrategias de control adaptativo con lógica difusa y control predictivo [24, 25].

## 2.6 Sistemas de control $H_\infty$

El diseño de sistemas de control  $H_\infty$  se inició en la década de los 80. Básicamente consiste en la minimización de una determinada función de coste, formulada en el dominio de la frecuencia, la cual establece las especificaciones de diseño. La medida del comportamiento, ampliamente utilizada en los problemas de control óptimo y robusto, es la norma  $H_\infty$  [26].

### 2.6.1 Definiciones básicas

A continuación se describen algunas de las definiciones de control robusto [27].

- **Estabilidad:** Las salidas retornan a su estado de equilibrio cuando el sistema es sometido a alguna perturbación o señal de comando.
- **Desempeño:** Señales de error pequeñas en presencia de perturbaciones y de señales de comando.
- **Estabilidad Nominal NS:** Cuando además de necesitar que el sistema de control diseñado funcione adecuadamente en un proceso real, se desea que sea estable en lazo cerrado para ciertas condiciones de trabajo dadas o nominales.
- **Comportamiento Nominal NP:** Comportamiento óptimo deseado para ciertas variables respecto a una función de costes o índice de comportamiento.
- **Estabilidad Robusta RS:** Estabilidad en lazo cerrado requerida para el conjunto de plantas que puedan aparecer por la presencia de incertidumbre en el modelo de la planta.
- **Comportamiento Robusto RP:** Cuando a más de conseguir la estabilidad robusta, el sistema de control debe cumplir unas especificaciones de funcionamiento.
- **Robustez:** Que las condiciones de estabilidad y desempeño se mantengan en presencia de incertidumbres en el modelo.
- **Sensibilidad, Sensibilidad del Control y Sensibilidad Complementaria:** A partir de la Fig. 1 de un sistema de control generalizado, se definirán matemáticamente las relaciones de sensibilidad  $S(s)$ , sensibilidad del control  $R(s)$  y la sensibilidad complementaria  $T(s)$ .

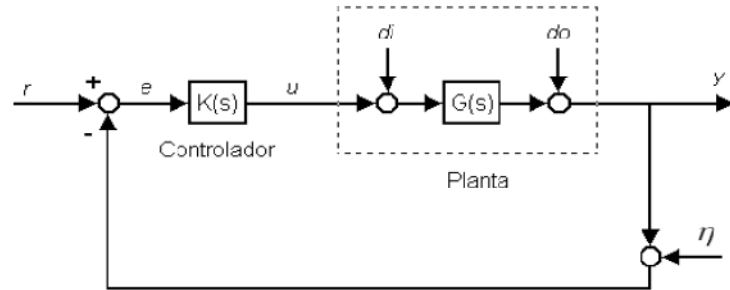


Figura 1. Diagrama de bloques de un sistema de control generalizado [27]

Se tiene que,

$$\text{Sensibilidad:} \quad S(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} \quad (\text{Ec. 1})$$

$$\text{Sensibilidad de control:} \quad R(s) = K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1} \quad (\text{Ec. 2})$$

$$\text{Sensibilidad complementaria:} \quad T(s) = G(s)K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1} \quad (\text{Ec. 3})$$

$$S(s) + T(s) = I \quad (\text{Ec. 4})$$

$$S(s) + R(s) = [I + K(s)][I + G(s)K(s)]^{-1} \quad (\text{Ec. 5})$$

donde:

$r$  = Referencia o señal de consigna

$d_i$  = Perturbación de entrada

$K(s)$  = Algoritmo matemático del controlador

$d_o$  = Perturbación de salida

$G(s)$  = Modelo matemático de la planta

$y$  = Respuesta de salida

$n$  = Ruido en los sensores de realimentación de la salida

- **Incertidumbres:** Partiendo del hecho en el cual un modelo matemático no puede describir con exactitud a una planta real debido a la existencia de incertidumbres ó

errores en el modelado, la definición de incertidumbre es la siguiente: Diferencia entre el modelo nominal y real. Las incertidumbres pueden ser clasificadas de diferentes formas entre las cuales se puede mencionar: según su origen en estructurales y paramétricas; según su estructura en estructurada y no estructurada; y por último de acuerdo a la forma en la que se represente la imprecisión en aditiva y multiplicativa [28].

### 2.6.2 El problema de control $H_\infty$

El método de optimización de sistemas de control  $H_\infty$  está relacionado con la minimización del valor pico de la respuesta en frecuencia de cierta función en bucle cerrado. Sea  $G(s)$  la función de transferencia de la planta que se desea controlar (Fig. 2),  $T(s)$  la función de transferencia en lazo cerrado,  $K(s)$  la función de transferencia del controlador,  $d$  las perturbaciones que actúan sobre el sistema y  $y$  la señal de salida del sistema [29].

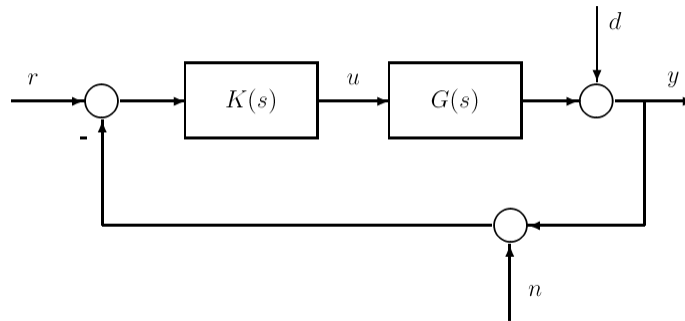


Figura 2. Estructura de un sistema de control convencional [29]

Para este sistema tenemos que:

- Lazo abierto:  $L_i = KG$  ;  $L_o = GK$  (Ec. 6)

- Diferencia de Retorno:  $F_i = I + L_i$  ;  $F_o = I + L_o$  (Ec. 7)

- Sensibilidad:  $S_i = F_i^{-1}$  ;  $S_o = F_o^{-1}$  (Ec. 8)

- Sensibilidad Complementaria:  $T_i = I - S_i$  ;  $T_o = I - S_o$  (Ec. 9)

- Sensibilidad de Control:  $N = KS_o$  (Ec. 10)

donde los subíndices  $\{i, o\}$  hacen referencia a que el operador se defina a la entrada o a la salida de la planta recíprocamente.

A partir de la Fig. 2, puede obtenerse la dependencia de la respuesta del sistema y la variable de control con el resto de las variables que actúan sobre el sistema:

$$y(s) = T(s)r(s) + S(s)d(s) - T(s)n(s) \quad (\text{Ec. 11})$$

$$u(s) = K(s)S(s)[r(s) - n(s) - d(s)] \quad (\text{Ec. 12})$$

Como puede verse en la Ec. 11, la función de sensibilidad  $S$  caracteriza el comportamiento del sistema de control con respecto a las perturbaciones ( $d$ ). El problema de diseño consiste en obtener un controlador  $K$  que consiga un rechazo o atenuación considerable de las perturbaciones,

$$S \approx 0$$

al menos en la zona de frecuencia de actuación de la perturbación.

El problema original considerado por Zhames (1981) [29] consiste en encontrar un compensador  $K$  que haga al sistema de control estable y minimice el valor pico definido como,

$$\|S\|_{\infty} = \max_{\omega} |S(j\omega)| \quad (\text{Ec. 13})$$

Dado que para algunas funciones el valor pico puede no existir, se reemplaza éste por el supremo o menor de las cotas superiores, así que,

$$\|S\|_{\infty} = \sup_{\omega} |S(j\omega)|$$

En general, para el caso multivariable, significa minimizar el supremo del valor singular máximo.

$$\|S\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[S(j\omega)] \quad (\text{Ec. 14})$$

La justificación de este problema reside en que si el valor de pico de la función de sensibilidad es pequeño, entonces la magnitud de  $S$  necesariamente es pequeña para todas las frecuencias, y por tanto las perturbaciones serán atenuadas para todas las frecuencias. La minimización de  $\|S\|_{\infty}$  es la optimización del peor caso, porque ello equivale a la minimización del efecto sobre la salida de la peor perturbación.

El problema del peor caso tiene una interpretación matemática muy significativa, tal y como se expone a continuación. Supuesto que la perturbación  $d$  es conocida para las frecuencias de interés, pero tiene energía finita, el valor

$$\|d\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |d(t)|^2 dt} \quad (\text{Ec. 15})$$

se conoce como la norma-2 de la perturbación  $d$ . La energía de  $d$  es el cuadrado de la norma-2. Entonces, la norma  $\|S\|$  del sistema  $S$  con entrada  $d$  y salida  $y$  inducida por la norma-2, se define como,

$$\|S\| = \sup_{d: \|d\|_2 < \infty} \frac{\|y\|_2}{\|d\|_2} \quad (\text{Ec. 16})$$

De aquí, se deriva que la norma está directamente relacionada con la ganancia de energía para la entrada con la distribución en frecuencia peor posible. Utilizando el teorema de Parseval se llega a que,

$$\|S\| = \|S\|_{\infty} \quad (\text{Ec. 17})$$

Para ello, el valor de pico es precisamente la norma del sistema inducida por las normas-2 sobre las señales de entrada y salida. La norma es conocida como norma- $\infty$  del sistema.

Si se realiza una breve reflexión, se observa que la minimización de  $\|S\|_\infty$  como tal no es una herramienta útil de diseño. La respuesta en frecuencia de cada planta y compensador físico decrece a alta frecuencia. Esto significa que a menudo la sensibilidad  $S$  puede hacerse pequeña a baja frecuencia pero eventualmente tiende a un valor asintótico a alta frecuencia. Por ello, un valor pequeño de  $S$  a baja frecuencia no se refleja en el valor de pico, pero es de considerable importancia para las especificaciones del sistema de control. Por esta razón, es habitual introducir una función de peso dependiente de la frecuencia  $W$  y considerar la minimización de,

$$\|WS\|_\infty = \sup_{\omega} |W(j\omega)S(j\omega)| \quad (\text{Ec. 18})$$

La forma habitual de elegir  $W$  es que sea grande a baja frecuencia, y vaya decreciendo a medida que aumente la frecuencia. El problema de minimización de la sensibilidad así definido, tiene ciertos aspectos interesantes. Sin embargo, no tiene en cuenta las limitaciones físicas en la variable de control del sistema. Por lo que habría que modificar la función de coste a minimizar, de forma que ello se tuviera en consideración.

En este sentido, las exigencias de diseño se pueden plantear como un problema de optimización en el dominio de la frecuencia, a través de unas funciones (matrices) de ponderación, que suponga una solución compromiso para el conjunto de objetivos contrapuestos que aparecen en todo problema de control.

Considérese el diagrama de bloques de la Fig. 3, donde el conjunto de señales actuantes sobre el sistema:  $r, d_i, d_o, n$ , quedan caracterizadas o ponderadas en frecuencia respectivamente por:

$$W_r(j\omega), W_{d_i}(j\omega), W_{d_o}(j\omega), W_n(j\omega)$$

En dicho diagrama además se incluyen las medidas ponderadas de las señales de error ( $e$ ), control ( $u$ ) y la señal a controlar ( $y$ ), empleando respectivamente,

$$W_s(j\omega), W_u(j\omega), W_T(j\omega)$$

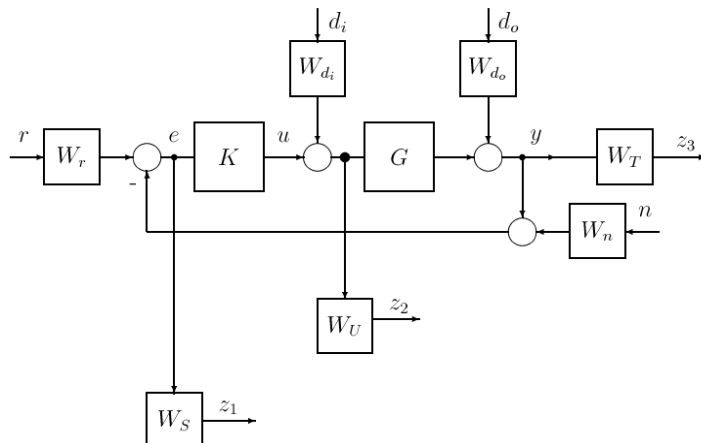


Figura 3. Ponderaciones en frecuencia de vectores de entrada y salida

El conjunto de funciones (matrices) de ponderación junto con la planta y el controlador puede transformarse en un diagrama de bloques equivalente más compacto, como el de la Fig. 4.

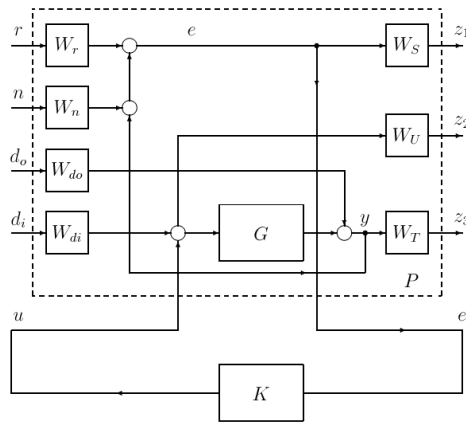


Figura 4. Estructura general para problemas de control  $H_\infty$

A partir del sistema dado en la Fig. 5, se plantea el siguiente problema de diseño: obtener un regulador ( $K$ ) que minimice algún tipo de medida de la función de transferencia  $T_{zw}$ ,

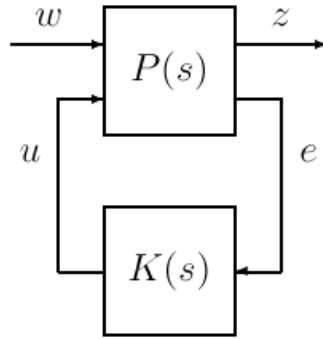


Figura 5. Planta generalizada y controlador

$$z = T_{zw} \omega \quad (\text{Ec. 19})$$

que relaciona el vector  $z$  (vector de señales requeridas para caracterizar el comportamiento del sistema en lazo cerrado),

$$z = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^T$$

$$z_1 = W_S e, \quad z_2 = W_U u, \quad z_3 = W_T y$$

con el vector de entrada  $\omega$

$$\omega = [r \quad n \quad d_o \quad d_i]^T$$

A partir de las expresiones que relacionan  $e, u, y$  con  $r, n, d_o, d_i$  y del diagrama de bloques de la Fig. 4, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_S S_o W_r & -W_S S_o W_n & -W_S S_o W_{d_o} & -W_S S_o G W_{d_i} \\ W_U K S_o W_r & -W_U K S_o W_n & -W_U K S_o W_{d_o} & -W_U S_i W_{d_i} \\ W_T T_o W_r & -W_T T_o W_n & W_T S_o W_{d_o} & -W_T S_o G W_{d_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ n \\ d_o \\ d_i \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 20})$$

Si sólo se considera  $r$ , con  $W_r = I$  y  $W_U = 0$ , queda:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_S S_o \\ W_T T_o \end{bmatrix} r \quad (\text{Ec. 21})$$

de forma similar, si se considera únicamente  $d_o$ , queda:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_S S_o \\ -W_T T_o \end{bmatrix} d_o \quad (\text{Ec. 22})$$

y en estos casos, el problema de optimización es conocido como: problema de sensibilidad mixta [30].

Se puede obtener una partición de la planta generalizada  $P$  de la siguiente forma:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 23})$$

donde se tiene que:

$$z = P_{11}\omega + P_{12}u \quad (\text{Ec. 24})$$

$$e = P_{11}\omega + P_{12}u$$

$$u = Ke$$

y al sustituir queda:

$$z = \left[ P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \right] \omega \quad (\text{Ec. 25})$$

Por lo tanto, se tiene la función (matriz) de transferencia que relaciona  $z$  con  $w$ :

$$z = T_{zw}\omega \quad (\text{Ec. 26})$$

donde la función (matriz) de transferencia

$$T_{zw} = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P \quad (\text{Ec. 27})$$

se conoce como *transformación lineal fraccionaria* (LFT). A partir de esta relación se plantea el problema estándar: encontrar un regulador  $K$  (que sea propio) que minimice la norma  $H_\infty$  de la función (matriz) de transferencia que relaciona  $\omega$  con  $z$ , bajo la restricción de que  $K$  estabilice a  $P$  (en el sentido de que consiga un sistema de control con estabilidad interna). Se plantea el problema de optimización  $H_\infty$ , en el que se trata de obtener el mínimo de [31]:

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(T_{zw}) \quad (\text{Ec. 28})$$

Para el caso monovariable (escalar) se tiene que:

$$\|T_{zw}\|_\infty = \gamma \quad (\text{Ec. 29})$$

esto equivale a que para una señal  $\omega$  con  $\|\omega\|_{rms} \leq 1$ , el sistema dará una respuestas  $z = T_{zw}\omega$  tal que  $\|T_{zw}\omega\|_{rms} \leq \gamma$ .

Ahora bien, para que el sistema presente un comportamiento nominal deseado (NP), se debe cumplir que:

$$\|W_S(j\omega)S_o(j\omega)\|_\infty \leq 1 \quad (\text{Ec. 30})$$

Mientras que para garantizar una estabilidad robusta (RS) del sistema de control frente a incertidumbres multiplicativas situadas a la salida de la planta, se debe cumplir que:

$$\|W_T(j\omega)T_o(j\omega)\|_\infty \leq 1 \quad (\text{Ec. 31})$$

Una forma de que se verifiquen simultáneamente las desigualdades anteriores es haciendo que se cumpla:

$$\|T_{zw}\|_{\infty} = \left\| \begin{matrix} W_S S_o \\ W_T T_o \end{matrix} \right\|_{\infty} \leq 1 \quad (\text{Ec. 32})$$

## 2.7 QFT

La Teoría QFT está basada en el análisis en el dominio de la frecuencia del efecto de la realimentación para reducir la influencia en el sistema tanto de las perturbaciones externas como de la incertidumbre del modelo, y estabilizar el sistema en caso necesario. Saca provecho de la utilización de un prefiltro en lazo abierto delante del lazo de realimentación para ajustar el comportamiento dentro de las tolerancias de seguimiento de referencia en su caso, diseñándose así un sistema de dos grados de libertad [32].

El diseño parte de un modelo del sistema que incluye la posible incertidumbre, ya sea paramétrica, no paramétrica o mixta. A partir de este punto se calcula la respuesta para un conjunto significativo de plantas dentro de todas las posibles del espacio de incertidumbre, y a unas frecuencias igualmente representativas de la dinámica del proceso. Cada uno de los conjuntos de respuestas a una frecuencia dada es lo que se conoce como *template*.

A continuación, las especificaciones en el dominio de la frecuencia exigidas se convierten en una serie de zonas permitidas y prohibidas para cada frecuencia en el diagrama de Nichols. Las líneas que delimitan estas zonas son los llamados *bounds*. Para garantizar la robustez del diseño, estos cálculos se realizan tomando en consideración la incertidumbre del sistema.

En la etapa de diseño, denominada *loop-shaping* se aprovechan las propiedades del diagrama de Nichols y se traza el producto de la planta por el controlador -inicialmente igual a la unidad- para el caso de una de las plantas (planta nominal). El diseñador, basándose en su experiencia añade elementos al controlador: en el momento en que cada uno de los puntos de dicha representación en el dominio de la frecuencia se encuentre sobre la zona permitida por el *bound* a la correspondiente frecuencia, el diseño se considera satisfactorio.

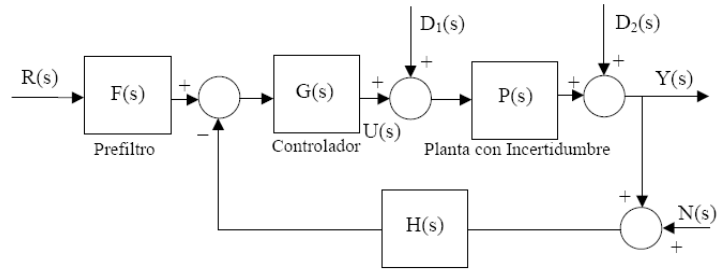


Figura 6. Estructura genérica de control realimentado [32]

La Fig. 6 ilustra un esquema genérico de control realimentado 2-DOF (de dos grados de libertad) con incertidumbre necesario para asegurar comportamientos adecuados en el seguimiento de señales,  $R(s)$  y en el rechazo de perturbaciones,  $D_1(s)$  y/o  $D_2(s)$ .  $P(s)$  representa la planta perteneciente a una familia  $\varphi$  (sistema con incertidumbre). La incertidumbre puede ser estructurada, no estructurada o mixta.

Un diseño QFT se realiza en dos etapas, en la primera se sintoniza el controlador,  $G(s)$ , que reduce la variación de la planta en lazo cerrado debida la incertidumbre en el modelo (lazo abierto) y las entradas de perturbación. Reducida dicha sensibilidad en lazo cerrado, se diseña un pre-filtro  $F(s)$  en una segunda etapa para asegurar el comportamiento exacto en cada frecuencia en el seguimiento de las señales de referencia.

El proceso de diseño QFT se compone de los siguientes pasos:

1. Definición de las **especificaciones** de estabilidad y comportamiento robustas en lazo cerrado deseadas. Se trasladarán al dominio de la frecuencia.
2. Determinación del **modelo** de la planta con incertidumbre (familia de plantas), LTI, SISO, fase mínima y con incertidumbre paramétrica, como el caso más sencillo. Evaluación de la familia de plantas en las frecuencias de interés. Para cada frecuencia se obtiene una representación fase[°] - magnitud[dB] de la planta con incertidumbre sobre el plano de Nichols (NC ó Nichols Chart), que se denomina **plantilla o template**  $\omega_i, \mathfrak{P}(j\omega_i)$ . En cada plantilla se selecciona una planta nominal,  $P_0(j\omega_i)$ .

3. La incertidumbre de la planta, implícita en las plantillas, y las especificaciones de lazo cerrado, se transforman en unas curvas de restricción, denominadas **contornos o bounds**, existiendo uno para cada frecuencia y cada tipo de especificación. Al igual que las especificaciones, habrá contornos de estabilidad robusta,  $B_U(j\omega_i)$ , y de comportamiento robusto,  $B_R(j\omega_i)$  para el seguimiento de señales y  $B_D(j\omega_i)$  para el rechazo de perturbaciones. Finalmente se determina en cada frecuencia, el contorno intersección más desfavorable entre los que representan cada especificación,  $B(j\omega_i)$ .
4. Para cumplir las especificaciones robustas a pesar de la incertidumbre, la función de transferencia nominal de lazo abierto,  $L_0(j\omega_i)$ , debe satisfacer el contorno  $B(j\omega_i)$  en cada frecuencia  $\omega_i$ . Para ello, se añade a la planta nominal  $P_0(j\omega_i)$  el controlador adecuado  $G(j\omega_i)$ , resultando  $L_0(j\omega_i) = G(j\omega_i)P_0(j\omega_i)$ . Este proceso se conoce como **síntesis o loop-shaping del controlador**.
5. **Diseño del pre-filtro**,  $F(s)$ , o segundo grado de libertad que permite desacoplar el comportamiento en el seguimiento de señales del desempeño en el rechazo de perturbaciones. Reducida la sensibilidad frente a incertidumbre con el controlador, el prefiltro permite modelar en cada frecuencia el comportamiento del lazo cerrado según la especificación robusta requerida en el seguimiento de señales.
6. **Validación** de los diseños en el dominio temporal, ya que éstos se han llevado a cabo en el dominio de la frecuencia.

## 2.8 Control predictivo

El control predictivo basado en modelos (CPM) engloba un conjunto de métodos de control desarrollados en torno a ciertas ideas comunes e integra diversas disciplinas, tales como: control óptimo, control estocástico, control de procesos con tiempos muertos, control multivariable o control con restricciones [33].

### 2.8.1 Estrategia del control predictivo basado en modelos

La estrategia del control predictivo se presenta a continuación:

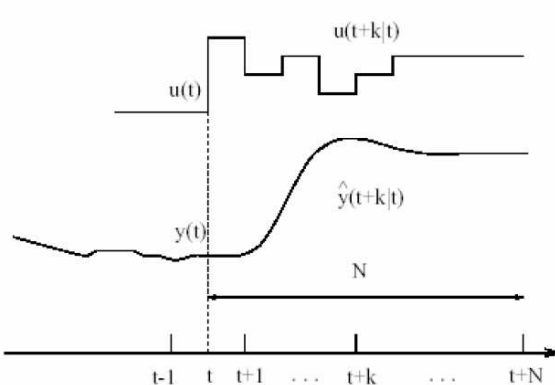


Figura 7. Estrategia del control predictivo [33]

1. En cada instante de tiempo  $t$  y utilizando el modelo del proceso se calculan las salidas futuras para un horizonte determinado  $N$ , llamado horizonte de predicción. Estas predicciones de la salida  $\hat{y}(t+k|t)$ , para  $k=1, \dots, N$ , dependen de los valores conocidos hasta el instante  $t$  (entradas y salidas conocidas) y de las señales de control futuras  $u(t+k|t)$ , desde  $k=0, \dots, N-1$ , que han de ser calculadas y enviadas al sistema (Fig. 7).
2. La secuencia de señales de control futuras se calcula minimizando un criterio para mantener al proceso lo más cerca posible de la trayectoria de referencia  $w(t+k)$ . Este criterio toma normalmente la forma de una función cuadrática del error entre la salida predicha y la trayectoria de referencias futuras. En la mayor parte de los casos se incluye también el esfuerzo de control dentro de la función objetivo.
3. La señal de control  $u(t|t)$  se envía al proceso mientras que el resto de las señales calculadas no se consideran, pues en el instante siguiente de muestreo  $y(t+1)$  ya es conocida y los pasos anteriores se repiten con este nuevo valor. Por consiguiente,  $u(t+1|t+1)$  se calcula con información diferente y en principio sería también diferente de  $u(t+1|t)$ .

En la Fig. 8 se muestra la estructura básica necesaria para implementar el control predictivo. Se usa un modelo para predecir la evolución de la salida o estado del proceso a partir de las señales de entrada y salidas conocidas. Las acciones de control futuras se calculan con el optimizador, que considera la función de costo y las posibles restricciones.

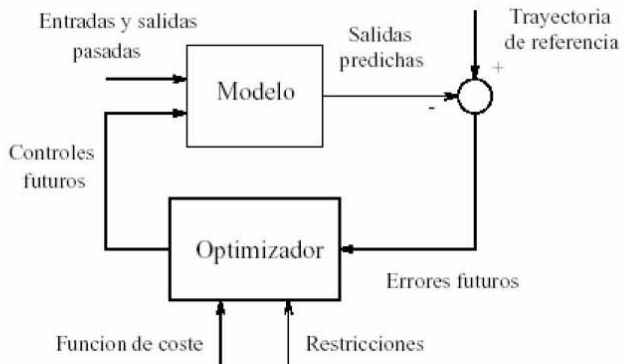


Figura 8. Estructura básica del control predictivo basado en modelo [33]

### 2.8.2 Elementos básicos del control predictivo

Todos los controladores predictivos poseen elementos comunes y para cada uno de estos elementos se pueden elegir diversas opciones, dando lugar a distintos algoritmos.

Estos elementos son:

- Modelo de predicción.
- Función objetivo.
- Obtención de la ley de control.

#### 2.8.2.1 Modelo de predicción

El diseño completo del controlador debe incluir los mecanismos necesarios para obtener el mejor modelo posible, de tal forma que permita observar por completo la dinámica del proceso, además que calcule las predicciones y pueda hacerse un análisis teórico. El uso del modelo es precisamente para determinar las salidas predichas en instantes futuros  $\hat{y}(t+k|t)$ .

Las formas posibles de modelar un proceso aparecen en alguna formulación del CPM, siendo las más utilizadas las siguientes:

- **Respuesta Impulsional:** También conocida como secuencia de ponderación o modelo de convolución. La salida viene relacionada con la entrada por la ecuación:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i u(t-i) \quad (\text{Ec. 33})$$

donde, los  $h_i$  son los valores muestreados obtenidos al someter al proceso a un impulso unitario de amplitud igual al período de muestreo . Esta suma es truncada y sólo se consideran  $N$  valores (por tanto sólo permite representar procesos estables y sin integradores), teniendo así la siguiente expresión:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i u(t-i) = H(Z^{-1})u(t) \quad (\text{Ec. 34})$$

donde  $H(Z^{-1}) = h_1 Z^{-1} + h_2 Z^{-2} + h_3 Z^{-3} + \dots + h_N Z^{-N}$  . Un inconveniente de este método es el gran número de parámetros que necesita, ya que  $N$  suele ser un valor elevado (del orden de 40-50). La predicción vendrá dada por:

$$y(t+k | t) = \sum_{i=1}^N h_i u(t+k-i | t) = H(Z^{-1})u(t+k | t) \quad (\text{Ec. 35})$$

Este método es ampliamente aceptado en la práctica industrial debido a que no requiere información previa sobre el proceso, con lo que el procedimiento de identificación se simplifica, a la vez que permite describir fácilmente dinámicas complejas como fase no mínima o retardos.

- **Respuesta ante escalón:** Es muy similar al anterior, sólo que ahora la señal de entrada es un escalón. Para sistemas estables se tiene la respuesta truncada que será:

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(t-i) = y_0 + G(Z^{-1})(1-Z^{-1})u(t) \quad (\text{Ec. 36})$$

donde los  $g_i$  son los valores muestreados ante la entrada escalón y  $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$  . El valor de  $y_0$  puede tomarse 0 sin pérdida de generalidad, con lo cual el predictor viene representado por:

$$y(t+k|t) = \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(t+k-i|t) \quad (\text{Ec. 37})$$

Este método presenta las mismas ventajas e inconvenientes que el anterior.

- **Función de transferencia:** utiliza el concepto de función de transferencia  $G = A/B$  con lo que la salida se expresa así:

$$A(Z^{-1})y(t) = B(Z^{-1})u(t) \quad (\text{Ec. 38})$$

donde:

$$A(Z^{-1}) = 1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_{na} Z^{-na}$$

$$B(Z^{-1}) = 1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_{na} Z^{-na}$$

De tal manera que, la predicción estará representada por la Ec. 39:

$$y(t+k|t) = \frac{B(Z^{-1})}{A(Z^{-1})} u(t+k|t) \quad (\text{Ec. 39})$$

Esta representación es válida también para procesos inestables y posee la ventaja de necesitar pocos parámetros, aunque es fundamental un conocimiento a priori del proceso, sobre todo en cuanto al orden de los polinomios  $A$  y  $B$ .

- **Espacio de estado:** Tiene la siguiente estructura:

$$x(t) = Ax(t-1) + Bu(t-1) \quad (\text{Ec. 40})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{Ec. 41})$$

siendo  $x$  el estado,  $A$  y  $B$  las matrices de entrada del sistema (Ec. 40) y  $C$  la matriz de salida respectivamente (Ec. 41). Para este modelo, la predicción está dada por:

$$\hat{y}(t+k|t) = Cx(t+k|t) = C \left[ A^k x(t) + \sum_{i=1}^N A^{i-1} B u(t+k-i|t) \right] \quad (\text{Ec. 42})$$

Posee la ventaja de que sirve también para sistemas multivariables, a la vez que permite analizar la estructura interna del proceso.

### 2.8.2.2 Modelo de las perturbaciones

La elección del modelo utilizado para representar las perturbaciones es de tanta importancia como la elección de un determinado modelo del proceso. Un modelo bastante extendido es el Autoregresivo Integrado de Media Móvil (ARIMA), en el que las perturbaciones, es decir, las diferencias entre la salida medida y la calculada por el modelo, vienen dadas de la siguiente manera:

$$n(t) = \frac{C(Z^{-1})e(t)}{D(Z^{-1})} \quad (\text{Ec. 43})$$

donde el polinomio  $D(Z^{-1})$  incluye explícitamente el integrador  $\Delta = 1 - Z^{-1}$ ,  $e(t)$  es un ruido de media cero y normalmente el polinomio  $C$  es considerado igual a uno. Este modelo es apropiado para dos tipos de perturbaciones: cambios aleatorios ocurridos en instantes aleatorios (por ejemplo cambio en la calidad del material) y movimiento browniano (en procesos con balance de energía) y es usado en varios métodos.

Como caso particular del ARIMA se puede incluir la perturbación constante

$$n(t) = \frac{e(t)}{1 - Z^{-1}} \quad (\text{Ec. 44})$$

Cuya mejor predicción será:

$$\square \hat{n}(t+k|t) = n(t)$$

### 2.8.2.3 Respuestas libre y forzada

Una característica típica de la mayoría de los CPM es el empleo de los conceptos de repuesta *libre* y *forzada*. La idea es expresar la secuencia de acciones de control como la suma de dos señales:

$$u(t) = u_f(t) + u_c(t) \quad (\text{Ec. 45})$$

La señal  $u_f(t)$  corresponde a las entradas pasadas (anteriores al instante  $t$ ) y en el futuro se mantiene constante e igual al último valor de la variable manipulada. Es decir:

$$u_f(t-j) = u(t-j); j = 1, 2$$

$$u_f(t+j) = u(t-1); j = 1, 2$$

La señal  $u_c(t)$  vale cero en el pasado y corresponde a las señales de control en los instantes futuros:

$$u_c(t-j) = 0 \quad \text{para} \quad j = 1, 2$$

$$u_c(t+j) = u(t+j) - u(t-1) \quad \text{para} \quad j = 0, 1, 2$$

La predicción de la secuencia de salida se separa en dos partes: una de ellas es la respuesta libre  $y_f(t)$ , la cual corresponde a la predicción de la salida cuando la variable manipulada se hace igual a  $u_f(t)$  y la otra es, la repuesta forzada  $y_c(t)$ , que corresponde a la predicción de la salida cuando la señal de control es  $u_c(t)$ . La respuesta libre corresponde a la evolución del proceso debido a su estado actual (incluido por tanto el efecto de acciones pasadas), mientras que la respuesta forzada es la debida a las acciones de control futuras (Fig. 9).

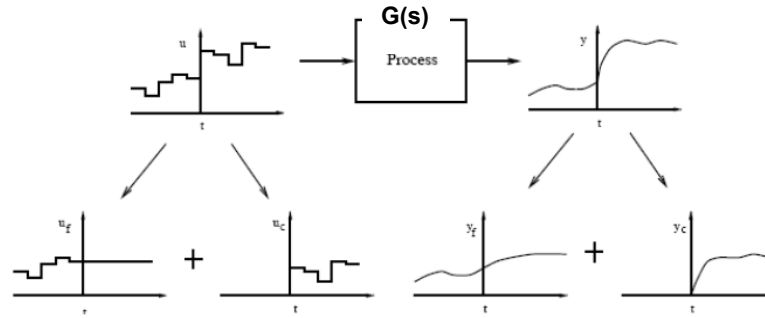


Figura 9. Respuesta libre y forzada [33]

#### 2.8.2.4 Función Objetivo

Los diversos algoritmos del CPM proponen distintas funciones de costo para la obtención de la ley de control. La expresión general de la función objetivo (función de costo), es la siguiente:

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) * [y(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) * [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (\text{Ec. 46})$$

En algunos métodos el segundo sumando, que considera el esfuerzo de control, no se tiene en cuenta, mientras que en otros también aparecen directamente los valores de la señal de control. En la función de costo se pueden considerar [34]:

- **Parámetros  $N_1$  y  $N_2$ :** son los horizontes mínimo y máximo de costo (o de predicción) y  $N_c$  es el horizonte de control, que no tiene por qué coincidir con el horizonte máximo.  $N_1$  y  $N_2$  marcan los límites de los instantes en que se desea que la salida siga a la referencia.
- **Trayectoria de referencia:** Una de las ventajas del control predictivo es que si se conoce a priori la evolución futura de la referencia, el sistema puede empezar a reaccionar antes de que el cambio se haya realizado efectivamente, evitando los efectos del retardo en la respuesta del proceso.
- **Restricciones:** En la práctica, todos los procesos están sujetos a restricciones. Los actuadores tienen un campo limitado de acción, así como una determinada velocidad de cambio, como es el caso de las válvulas, limitadas por las posiciones de totalmente abierta o cerrada y por la velocidad de respuesta. Razones constructivas, de seguridad

o medio-ambientales o bien los propios alcances de los sensores pueden causar límites en las variables del proceso, tales como niveles en depósitos, caudales en tuberías o temperaturas y presiones máximas. Además, normalmente las condiciones de operación vienen definidas por la intersección de ciertas restricciones por motivos fundamentalmente económicos, con lo que el sistema de control operaría cerca de los límites. Todo lo expuesto anteriormente hace necesaria la introducción de restricciones en la función a minimizar. Muchos algoritmos predictivos tienen en cuenta el tema de las restricciones, por lo cual han tenido gran éxito en la industria. Normalmente se considerarían límites en la amplitud y en la velocidad de cambio de la señal de control y límites en las salidas:

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (\text{Ec. 47})$$

$$\Delta u_{\min} \leq u(t) - u(t-1) \leq \Delta u_{\max}$$

$$y_{\min} \leq y(t) \leq y_{\max}$$

#### 2.8.2.5 Obtención de la Ley de Control

Para obtener las acciones de control futuras  $u(t+k|t)$  será necesario minimizar la función de costo o función objetivo. Para ello se calculan los valores de las salidas predichas  $\hat{y}(t+k|t)$  en función de valores pasados de entradas y salidas y de señales de control futuras, haciendo uso del modelo que se haya elegido y se sustituyen en la función de costo, obteniendo una expresión cuya minimización conduce a los valores buscados. Esta estructura de la ley de control se plasma en el uso del concepto de horizonte de control ( $N_c$ ), que consiste en considerar que tras un cierto intervalo  $N_u < N_2$  no hay variación en las señales de control propuestas, es decir:

$$\Delta u(t+j-1) = 0; J > N_u \quad (\text{Ec. 48})$$

Lo cual es equivalente a dar pesos infinitos a los cambios en el control a partir de cierto instante. El caso límite sería considerar  $N_u$  igual a 1 con lo que todas las acciones futuras serían iguales a  $u(t)$ .



# CAPÍTULO 3

## 3. DESCRIPCIÓN DEL PROTOTIPO DE LA TRANSMISIÓN CVT

Esta tesis forma parte de un '*proyecto macro*' presentado a la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander por el Grupo de Investigación en Control, Electrónica, Modelado y Simulación (CEMOS), el cual fue dividido en dos etapas. En la primera etapa se atacó el problema del diseño conceptual de una nueva transmisión, el modelado matemático y la construcción del prototipo [35]. En la segunda fase, mediante el desarrollo de la presente tesis de maestría, se tomó el modelo matemático analizado en la primera parte y se le aplicaron diferentes técnicas de control avanzado para determinar la mejor respuesta dinámica de la transmisión. A continuación se presenta la construcción previa del prototipo.

### 3.1 Prototipo físico

La implementación física en un prototipo busca mostrar las características cinemáticas y dinámicas de un modelo teórico, y también permite explorar qué ventajas y desventajas presentaría la máquina al ser implementada. Para la comprobación del funcionamiento de la CVT y del análisis teórico realizado, se hizo la construcción de un prototipo a escala de la máquina diseñada [7]. El prototipo consta del sistema impulsor, el sistema de engranajes planetarios, el mecanismo de sinfín corona y el motor de control (Fig. 10).

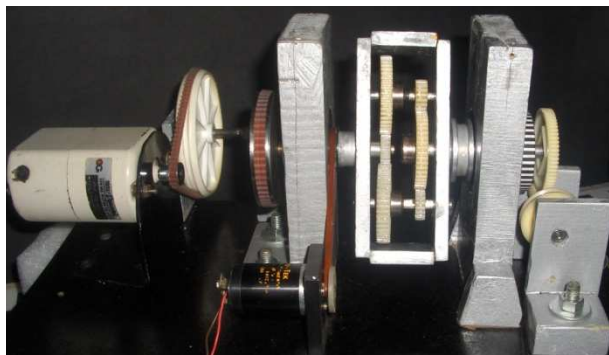


Figura 10. Prototipo de la CVT

El prototipo fue construido con los siguientes elementos:

### 3.1.1 Tren de engranajes planetarios de doble etapa

El sistema de engranajes planetarios representa el núcleo de la transmisión. Los sistemas epicicloidales son muy útiles para concentrar dos acciones motrices en un eje (Fig. 11). A diferencia de un reductor de engranajes, los ejes de todas las ruedas no están inmóviles, sino que alguno de ellos puede girar alrededor de los ejes de las otras. Se llaman ruedas *planetas* a las que se mueven alrededor de ejes fijos, y ruedas *satélites* a las que tienen ejes móviles, que a su vez giran alrededor de las ruedas planetas. Estas ruedas satélites van siempre unidas a un *brazo*, el cual gira sobre un eje fijo.

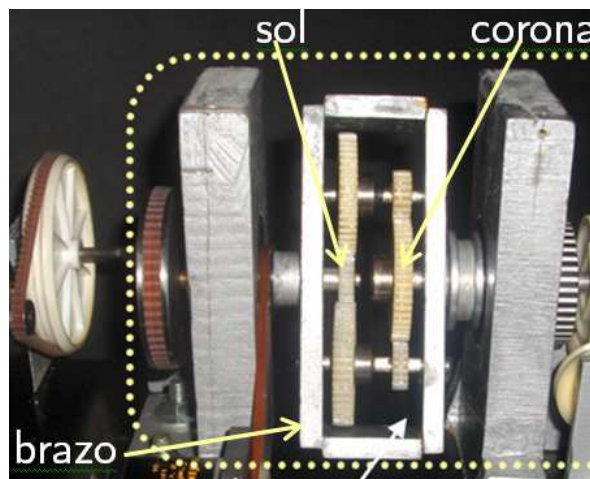


Figura 11. Tren de engranajes planetarios

La ecuación que rige un sistema de planetarios es:

$$\frac{\omega_s - \omega_b}{\omega_c - \omega_b} = M = \frac{\prod z_{impulsados}}{\prod z_{impulsores}} \quad (\text{Ec. 49})$$

$$RV = \frac{\omega_s}{-a\omega_s + b\omega_c} = \frac{1}{-a + \frac{b}{\omega_s}\omega_c}$$

donde  $\omega_s$  es la velocidad angular del sol,  $\omega_c$  es la velocidad de la corona,  $\omega_b$  es la velocidad del brazo y  $M$  es la relación de dientes ( $z_i$ ) de los engranajes.

### 3.1.2 Sistema impulsor

El prototipo de la transmisión obtiene su energía mecánica de un motor de corriente alterna. El motor utilizado en el prototipo es un motor universal, debido a que es un motor comercial de fácil adquisición y a que posee la mayor relación potencia/peso de los motores eléctricos (Fig. 12).



Figura 12. Motor universal y reducción por poleas

Características del motor Universal:

- Motor Universal, 2 polos
- Tensión de alimentación de 110 voltios, frecuencia de 60 Hz.
- Velocidad en nominal: 7000 RPM
- Potencia 90 vatios.

A continuación del motor se instaló una reducción de poleas de doble etapa, para disminuir la alta velocidad alcanzada en este tipo de motores. La reducción total alcanzada es de 20, y fue calculada para una velocidad del brazo de cero dada la velocidad de la corona, de 54 rpm.

$$\omega_{brazo} = -0.164 \cdot \omega_{sol} + 1.164 \cdot \omega_{corona} \quad (\text{Ec. 50})$$

### 3.1.3 Motor de control

Como motor de control, se ha implementado un servomotor de corriente (Fig. 13).

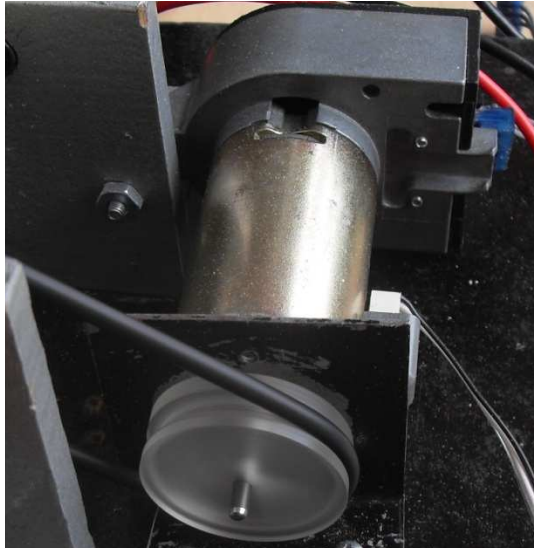


Figura 13. Servomotor DC

El comportamiento bastante lineal de estos motores facilita la caracterización de los mismos. En vacío, sin la acción de carga externa, la velocidad angular de salida  $\omega_m$  en función de la tensión continua  $V_m$  aplicada puede simplificarse mediante la relación:

$$\frac{\omega_m}{V_m} = \frac{K_e^{-1}}{\frac{R_a \cdot J_m}{K_m \cdot K_e} \cdot s + 1} \cdot e^{-L_m \cdot s} \cdot K_T \qquad \frac{\omega_m}{V_m} = \frac{A_m}{\tau_m \cdot s + 1} e^{-L_m \cdot s} \qquad (\text{Ec. 51})$$

donde  $K_e$  es la constante de de fuerza contraelectromotriz,  $K_m$  la constante de par,  $R_a$  la resistencia de armadura,  $J_m$  la inercia del rotor y  $L_m$  el retardo. Estos parámetros pueden englobarse en una ganancia estática  $A_m$  [rpm/V], en una constante de tiempo electromecánica  $\tau_m(s)$  [s] y en un retardo  $L_m$  [s].

### ***3.1.4 Mecanismo de sinfín-corona***

La relación de transmisión es regulada mediante la acción del servomotor y un mecanismo sinfín-corona (Fig. 14). La función del tornillo sinfín es acoplar el eje del motor DC con la corona de los engranajes plantarios. El tornillo tiene un ángulo de hélice de  $12^\circ$  y posee dos entradas. La corona tiene 65 dientes, con lo que la reducción en el mecanismo es de 32,5. El sinfín es impulsado por el servomotor a través de una reducción de poleas de 4:1. La reducción en total desde el motor hasta la corona es de 129, resultando en una velocidad en la corona de 54 rpm.

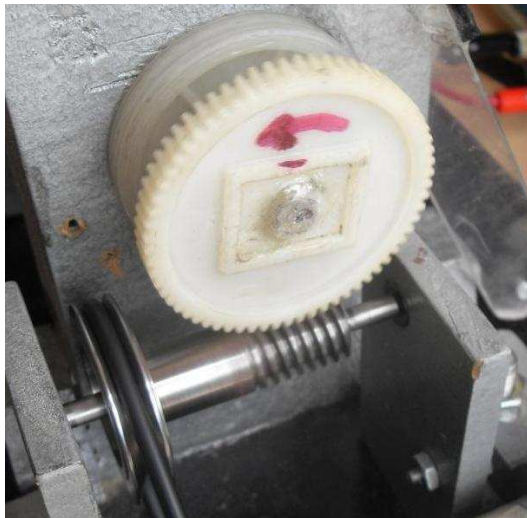


Figura 14. Mecanismo Sinfín - Corona

# CAPÍTULO 4

## 4. MODELADO E IDENTIFICACIÓN DE LA PLANTA

Un problema importante que se ha detectado en la literatura y que aún no ha sido solucionado es la disminución en la eficiencia del tren de potencia motor de combustión-CVT debido a la implementación de un sistema de control de la relación de transmisión basado en actuadores hidráulicos [6]. El uso de sistemas hidráulicos impone una restricción en la máxima eficiencia que puede ser alcanzada por la transmisión y, las altas presiones requeridas para controlar la relación de transmisión provocan pérdidas debido a la fricción viscosa del aceite. Por esta razón, en la presente tesis se propone un mecanismo de control diferente para un novedoso sistema de variación de la velocidad.

### 4.1 Modelado del prototipo de la transmisión

A continuación se redacta el planteamiento del modelo que se desarrolló en la tesis de maestría alterna a este proyecto.

#### *4.1.1 Modelado del Servomotor DC*

La relación de velocidad de la Transmisión (RV) queda determinada por la velocidad de la corona de acuerdo a la Ec. 49, la cual está acoplada al motor DC mediante un sistema de poleas y un mecanismo sinfín – corona. De este modo, este motor hará las veces de controlador de la relación de velocidad y será importante seleccionar un motor con buenas características dinámicas. Para el prototipo a escala, se implementó como motor de control un Servomotor Buehler a 24 V.

El motor DC es un dispositivo ampliamente estudiado y su modelo se encuentra disponible en la literatura [36]. Tiene en cuenta el circuito eléctrico y un análisis de las fuerzas presentes sobre el eje del rotor (Fig. 15).

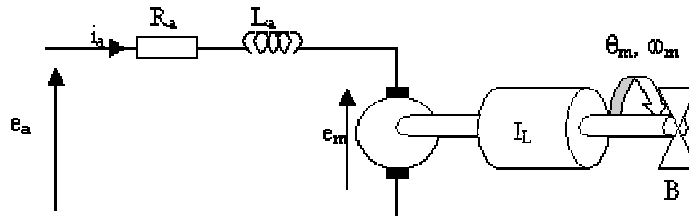


Figura 15. Esquema interno del motor DC [36]

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del motor DC son:

$$\frac{d\omega}{dt} = \left( \frac{K_t}{JR_a} \right) V_m - \left( \frac{K_t K_e}{JR_a} + b \right) \omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \alpha_1 V_m - \alpha_2 \omega \quad (\text{Ec. 52})$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \alpha_2 \omega = \alpha_1 V_m$$

donde:

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| $J$ = momento de inercia;       | $b$ = coeficiente de amortiguamiento       |
| $V$ = voltaje de alimentación;  | $R_a$ = resistencia del bobinado           |
| $L$ = inductancia del bobinado; | $k_e$ = constante electromotriz de retorno |
| $k_t$ = constante del par motor |  |

#### 4.1.2 Modelado del mecanismo sinfín - corona

Cuando se realiza un análisis global a la transmisión CVT, se encuentra que el sistema de planetarios actúa como un sumador de velocidad (potencias) y el moto-reductor sinfín-corona como mecanismo de control de la relación de transmisión. En realidad, es en el tornillo sinfín (Fig. 16a) en el que se centra la respuesta dinámica de la transmisión y su naturaleza como 'amplificador de potencia'. Cuando se consigue un diseño autobloqueante, el tornillo sinfín no puede impulsar al engrane del sinfín y por lo tanto, el sistema de planetarios se comporta como si la corona estuviera anclada a la estructura.

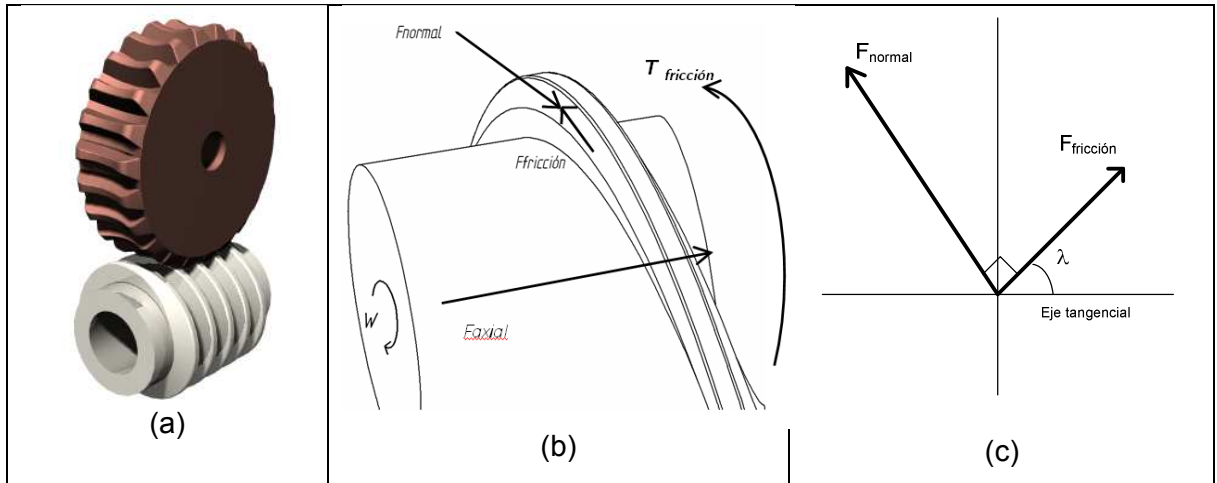


Figura 16. Análisis de las fuerzas presentes en el mecanismo sinfín - corona

El torque en la corona es transmitido hacia la rueda del sinfín por medio del eje que las une. En la hélice del tornillo se presentan dos fuerzas de contacto, una normal al diente, y la otra tangencial, que es la fricción (Fig. 16c). También se presenta la fuerza de fricción en el rodamiento debido a la carga axial en el tornillo, la cual no es despreciable (Fig. 16b). Disponiendo de una manera conveniente la hélice del tornillo, se logra que la misma fuerza normal impulse al tornillo, mientras que las dos componentes de fricción se oponen al movimiento de este último. Justo en el ángulo en que los torques se equilibran, se presenta el comportamiento esperado de la transmisión variable continua.

Realizando un análisis de fuerzas sobre la hélice del tornillo:

$$J_{eq} \alpha = m_{rd} T_{Mdc} - T_{rod} - T_N - T_{vis} \Rightarrow J \frac{d\omega}{dt} = m_{rd} T_{Mdc} - T_{rod} - T_N - \beta \omega \quad (\text{Ec. 53})$$

$$J_{eq} \frac{d\omega}{dt} = m_{rd} k_i i - \beta \omega - \left( 2\pi D_{rod} \mu_{k-rod} m^2 m_{Mac} + \frac{m^2 m_{Mac} D_w (\text{sen}(\lambda) - \mu \text{cos}(\lambda))}{D_{cor} (\text{cos}(\lambda) + \mu \text{sen}(\lambda))} \right) T_{Mac}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} (m_{rd} k_i i - \beta \omega - k_{ac} T_{Mac} (\omega_{Mac})) \quad (\text{Ec. 54})$$

donde:

$$k_{ac} = \left( 2\pi D_{rod} \mu_{k-rod} m^2 m_{Mac} + \frac{m^2 m_{Mac} D_w (\text{sen}(\lambda) - \mu \cos(\lambda))}{D_{cor} (\cos(\lambda) + \mu \text{sen}(\lambda))} \right) \quad (\text{Ec. 55})$$

$J_{eq}$  = momento de inercia equivalente

Si se tiene en cuenta que el torque en el motor universal ( $T_{Mac}$ ) es función de la velocidad del motor ( $\omega_{Mac}$ ), de modo que la Ec. 35 quedaría como:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} (m_{rd} k_t i - \beta \omega - k_{ac} T_{Mac}(\omega_{Mac})) \quad (\text{Ec. 56})$$

Comparando la Ec. 35 con la Ec. 21 para el motor DC, se puede notar que el término diferente es el torque debido al motor universal ( $T_{Mac}(\omega_{Mac})$ ). Si se analiza la Ec. 35 como un sistema multivariable MIMO (multiple input multiple output) con una salida y dos entradas, el voltaje en el motor DC ( $u_1$ ) y el voltaje en el motor AC ( $u_2$ ), puede aplicarse el principio de superposición calculando una función de transferencia para cada par de valores entrada-salida. Si se anula la entrada al motor AC, se tiene que:

$$\frac{d\omega}{dt} = \left( \frac{m_{rd} K_t}{J_{eq} R_a} \right) V_m - \left( \frac{K_t K_e}{J_{eq} R_a} + \beta \right) \omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \alpha_3 V_m - \alpha_4 \omega \quad (\text{Ec. 57})$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \alpha_4 \omega = \alpha_3 V_m$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$sW(s) + \alpha_4 W(s) = \alpha_3 V_m(s) \Rightarrow (s + \alpha_4)W(s) = \alpha_3 V_m(s)$$

$$H_1(s) = \frac{W(s)}{V_{mdc}(s)} = \frac{\alpha_3}{(s + \alpha_4)} = \frac{k_1}{(\tau_1 s + 1)} \quad (\text{Ec. 58})$$

donde:

$$k_1 = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}; \quad \tau_1 = \frac{1}{\alpha_4}$$

De igual manera, si se anula la entrada al motor DC, se obtiene una relación para la velocidad de salida con respecto al voltaje aplicado al motor AC:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} (-\beta\omega - k_{ac}T_{Mac}(\omega_{Mac})) = -\frac{\beta}{J_{eq}}\omega - \frac{k_{ac}}{J_{eq}}T_{Mac}(\omega_{Mac}(t)) \quad (\text{Ec. 59})$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \alpha_5\omega = -\alpha_6T_{Mac}(t)$$

$$H_2(s) = \frac{W(s)}{T_{Mac}(s)} = \frac{-\alpha_6}{(s + \alpha_5)} = \frac{k_2}{(\tau_2s + 1)} \quad (\text{Ec. 60})$$

donde:

$$k_2 = \frac{\alpha_6}{\alpha_5}; \quad \tau_2 = \frac{1}{\alpha_5}$$

#### **4.1.3 Modelado de la Transmisión CVT**

Finalmente, se combinaron los modelos matemáticos del motor universal, el servomotor DC, el sistema de planetarios y del tornillo sinfín en un único modelo y que utilizando la herramienta computacional de Matlab®, Simulink® se llega al modelo de la Fig. 17.

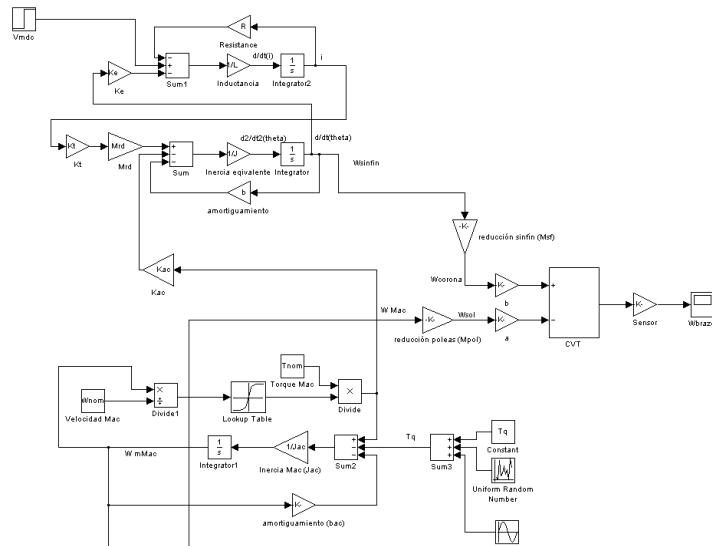


Figura 17. Modelado en Simulink® de la Transmisión CVT

En la transmisión CVT, la potencia es suministrada por medio del motor universal, el cual se encuentra conectado al sol. Sin embargo, la transmisión podría ser impulsada por cualquier otro tipo de fuente motriz, ya sea de tipo eléctrico, neumático o hidráulico. De aquí se destaca que la respuesta dinámica intrínseca del motor impulsor no afecta la respuesta dinámica de la transmisión, puesto que la señal de velocidad de dicho motor ingresa en el diagrama de bloques de la planta como una señal de perturbación, afectando tanto la velocidad del brazo Table como el torque neto en el tornillo sinfín (Fig. 18).

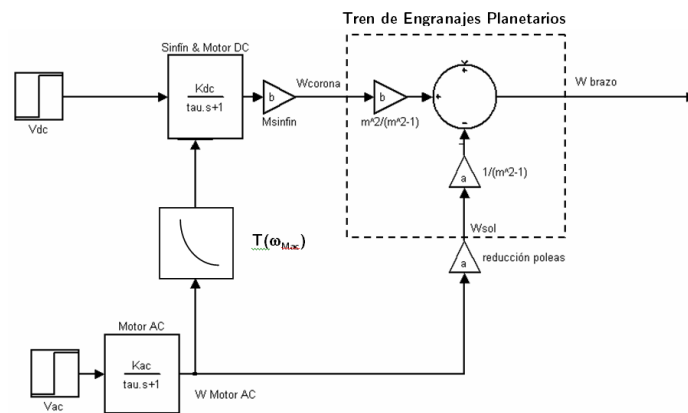


Figura 18. Modelo teórico de la Transmisión CVT

## 4.2 Identificación del prototipo de la transmisión

Si bien el estudio de las leyes físicas que rigen la CVT (Fig. 19) permite obtener un modelo teórico del mismo, es conveniente obtener y validar el modelo de forma experimental, mediante técnicas de identificación. Esto permite eliminar las tolerancias de los datos proporcionados por medio de la experimentación de cada elemento.

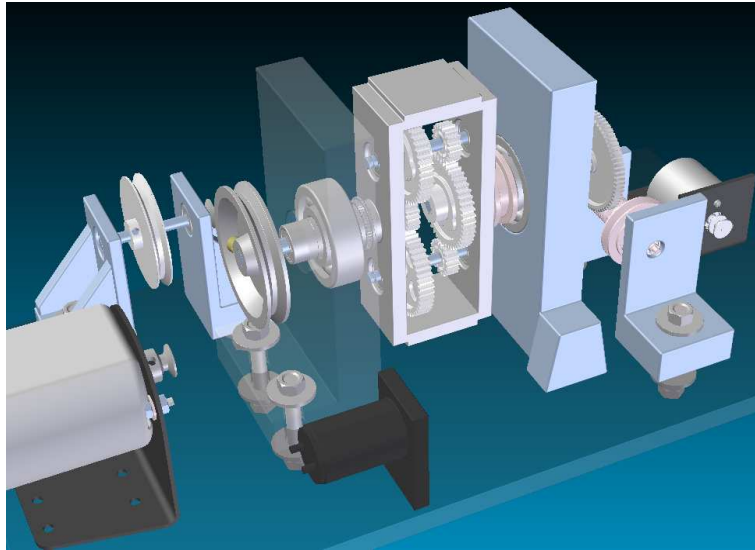


Figura 19. Prototipo de la CVT

El problema de identificación de un sistema consiste en estimar un modelo basado en la observación de los datos de entrada y salida. El procedimiento para determinar el modelo de un sistema dinámico desde la observación de datos de entrada y salida involucra tres ingredientes básicos [37]:

1. Los datos de entrada y salida
2. Selección de modelos candidatos (la estructura del modelo)
3. Un criterio para seleccionar un modelo particular, basado en la información de los datos (el método de identificación)

Los pasos que generalmente se siguen para efectuar el reconocimiento de un sistema son los siguientes:

1. Preparar un experimento y recolectar datos de entrada/salida del proceso que se desea identificar.
2. Examinar los datos. Realizar un filtrado de los datos, para eliminar el ruido presente, seleccionando las porciones más útiles del conjunto de datos original y enfatizando en los rangos de frecuencias más importantes.
3. Seleccionar y definir una familia de modelos (un conjunto de candidatos para la descripción del sistema) dentro de la cual se deberá encontrar el modelo obtenido.
4. Calcular el mejor modelo de la familia de modelos, basándose en los datos de entrada – salida y en un criterio dado para los ajustes, que se ajuste a los datos.
5. Examinar las propiedades del modelo obtenido.
6. Si el modelo es lo suficientemente bueno, detenerse; de lo contrario volver atrás e intentar con un conjunto de modelos diferente.

#### 4.2.1 Descripción de la planta

Conforme se ilustra en la Fig. 20, la planta esta compuesta por un motor de AC, un motor DC de control y un juego de engranajes planetarios, cuya función es combinar las ventajas de ambas fuentes motrices en la salida: facilidad de control de la velocidad (motor DC) y alto torque (motor AC).

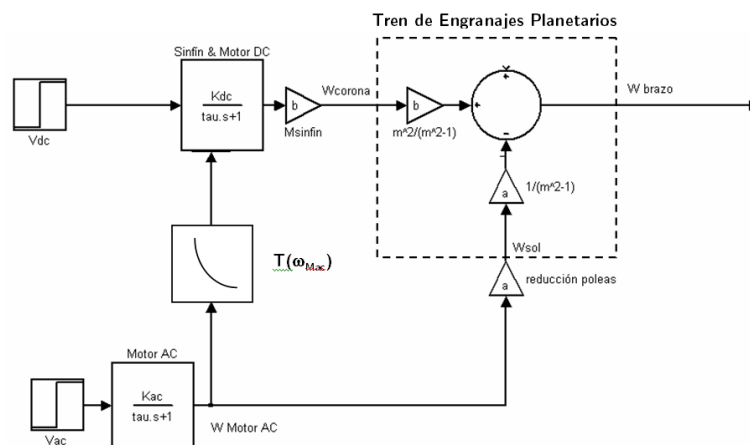


Figura 20. Modelo Teórico de la planta

La idea principal consiste en controlar la velocidad en la salida sin actuar directamente sobre el flujo de energía entrante del motor de potencia. Se modela éste último como una

perturbación, con el fin de buscar un sistema de control de velocidad que pueda ser controlado independientemente del tipo de fuente.

Después de analizar cada componente en el capítulo anterior, la función de transferencia  $P(s)$  de la planta sin tener en cuenta la perturbación es el conjunto: Driver + Motor DC + Tren de planetarios + Tacómetro, el cual responde a una expresión de primer orden:

$$P(s) = K_A \cdot \frac{A_m}{\tau_m \cdot s + 1} \cdot K = \frac{A}{\tau_m \cdot s + 1} \quad (\text{Ec. 61})$$

#### 4.2.2 Adquisición de los datos

Conocida la estructura teórica del modelo de la planta, es necesario obtener el valor de sus parámetros. La alternativa consistió en realizar una identificación experimental basada en el registro de datos de entrada-salida y la posterior aplicación de las técnicas de identificación de sistemas. Se tomaron los datos de la respuesta en lazo abierto de la velocidad del brazo (encoder) para una señal de entrada de un tren de pulsos (Fig. 21).

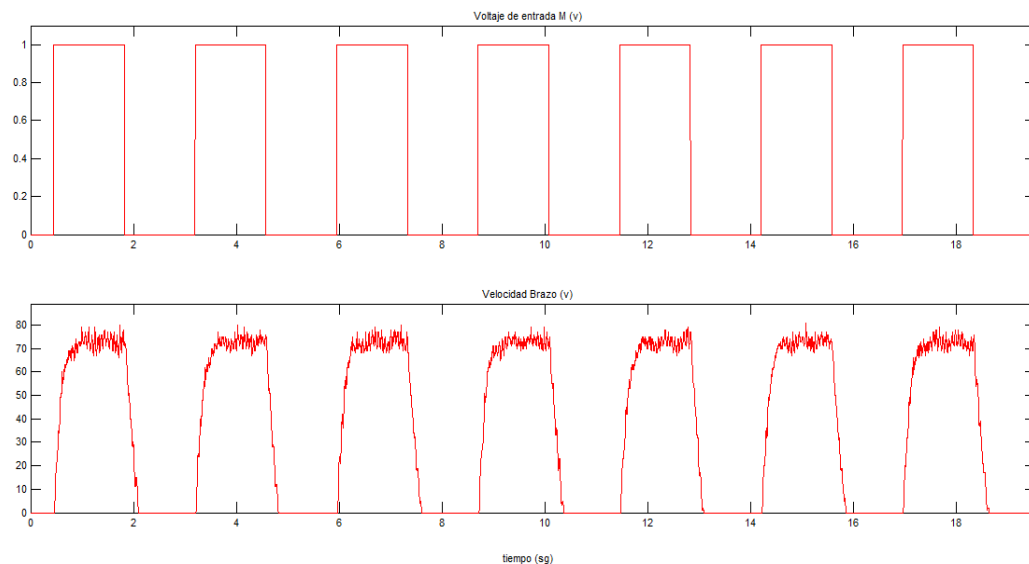


Figura 21. Adquisición de datos

### 4.2.3 Identificación

La siguiente etapa fue la '*identificación del sistema*'. Esta etapa fue realizada con la ayuda de la Toolbox de identificación de Matlab®. Se debió seleccionar la estructura del modelo y el método de ajuste de parámetros. Las posibles estructuras fueron:

- Función de transferencia continua.
- Coeficiente de la respuesta impulsional.
- Coeficiente de la respuesta escalón.
- Respuesta en frecuencia.
- Función de transferencia expresada factorialmente por  $G(s)$ , ceros y polos.

En nuestro caso, se escogió el modelo de función de transferencia, según el estudio previo del proceso, para lo cual era necesario definir el orden del denominador, numerador y el retardo en múltiplos del periodo de muestreo. A continuación se procedió a escoger el método de identificación. En la Fig. 22 se visualiza la respuesta estimada y la real y el residuo resultante del proceso de ajuste de parámetros.

El método escogido para la identificación fue el del error en la salida, este es una de los mejores ya que ajusta los datos al modelo dado minimizando el error al realizar la estimación.

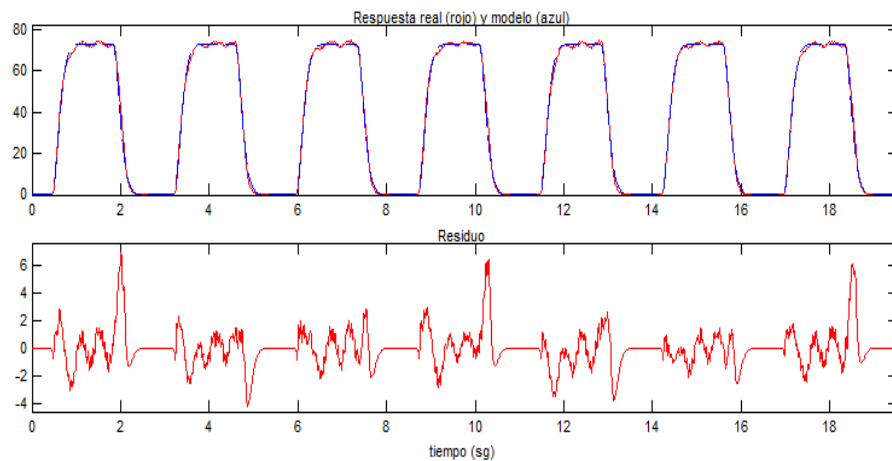


Figura 22. Estimación de los parámetros

Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, los residuos son independientes de la entrada, se puede observar claramente en el gráfico de la correlación cruzada entre el residuo y la entrada (Fig. 23).

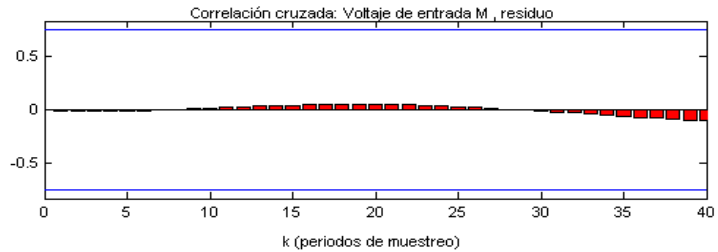


Figura 23. Análisis del Residuo

La función de transferencia en tiempo discreto que más se ajustó a los datos es un modelo de primer orden:

$$G(z) = \frac{2.215}{z - 0.9698} \quad (\text{Ec. 62})$$

Donde el tiempo de muestreo fue de 4 ms. La respuesta al escalón de este sistema es como se muestra en la Fig. 24.

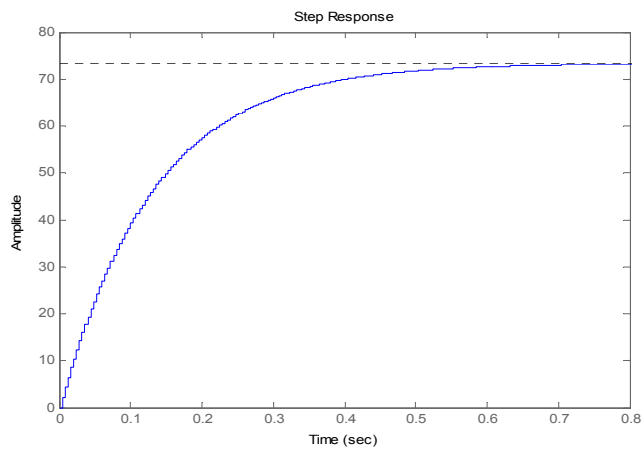


Figura 24. Respuesta al escalón de la planta

#### 4.2.4 Validación

Siguiendo con la metodología de identificación, el paso siguiente fue la validación del modelo. Fueron tomadas varias muestras del experimento para validar los modelos obtenidos mediante la estimación de los parámetros (Fig. 25).

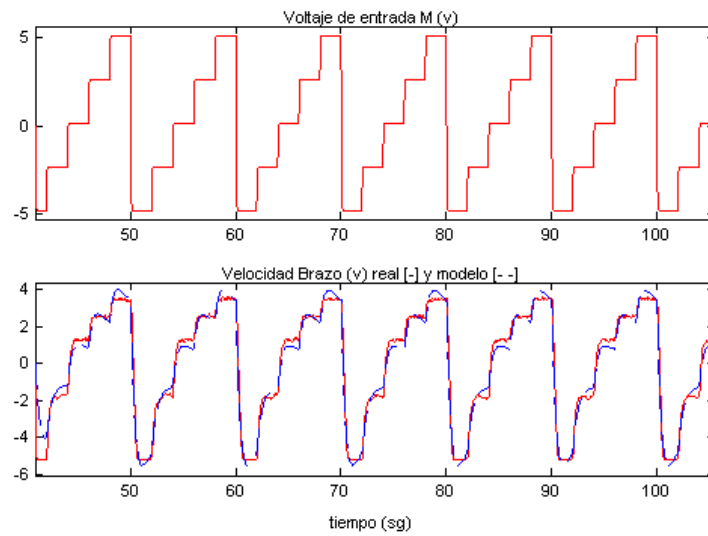


Figura 25. Validación del modelo

Se observa que los datos experimentales se ajustan adecuadamente a la respuesta del modelo obtenido para instantes de tiempo en intervalos no procesados.

# CAPÍTULO 5

## 5. DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

Se exploraron diferentes técnicas de control avanzado, entre ellas  $H_\infty$ , QFT y Control Predictivo. Para el diseño de los diferentes algoritmos de control, se partió de la función de transferencia en tiempo continuo resultante del proceso de identificación:

$$G(s) = \frac{562.4}{s + 7.664} \quad (\text{Ec. 63})$$

### 5.1 Control Clásico: diseño del sistema de control PI

Con el objetivo de tener una referencia del comportamiento de la transmisión con respecto al control clásico, fue diseñado un controlador Proporcional – Integral con compensación de la saturación en el integrador (anti-windup). El diseño del sistema fue realizado en tiempo continuo teniendo en cuenta el efecto del retenedor de orden cero en la función de transferencia de lazo abierto. El tipo de regulador escogido es un PI (Ec. 64), ya que nos permite eliminar el error de estado estacionario, logrando una buena estabilidad relativa del sistema de control.

$$C(s) = K \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{K \cdot (s + a)}{s} \quad (\text{Ec. 64})$$

Las especificaciones a tener en cuenta para el diseño del controlador fueron: un tiempo de subida de 0.35s ( $t_s$ ) y un sobrepico de 5% ( $M_p$ ). Los valores obtenidos después de ingresar las especificaciones de diseño, para la posición del cero y el valor de la ganancia son:

- $b = 15.95$
- $K = 1.831$

La ecuación del Compensador calculada es:

$$C(s) = \frac{1.831(s + 15.95)}{s} \quad (\text{Ec. 65})$$

La respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado se ilustra en la Fig. 26:

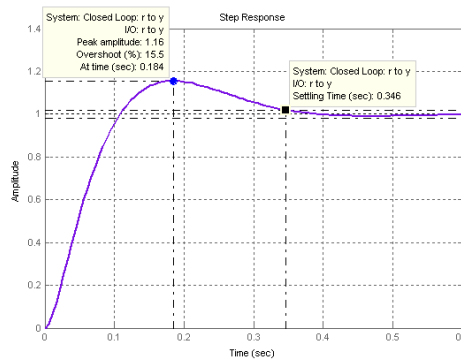


Figura 26. Respuesta al escalón

## 5.2 Diseño del sistema de control $H_\infty$

Se diseñó un controlador ( $K(s)$ ) para el prototipo de la transmisión ( $G(s)$ ) que conservara buenas características de robustez y rechazo de perturbaciones ( $\omega$ ) mediante la técnica de control  $H_\infty$ . La configuración general del problema de control  $H_\infty$  es mostrada en la Fig. 27, donde  $u$  es la señal de control,  $v$  es el vector de medidas,  $\omega$  es el vector de perturbaciones externas y  $z$  es el vector objetivo cuya norma se quiere hacer pequeña.

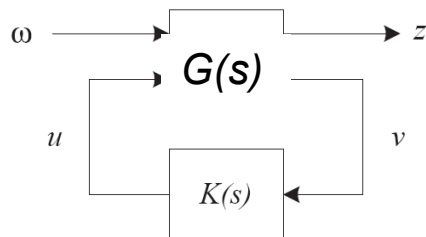


Figura 27. Configuración general de control

De acuerdo al apartado 2.6 del capítulo 2, el problema del control óptimo  $H_\infty$  puede ser formulado como un problema de optimización en el que se requiere calcular un controlador tal que la razón “ $\gamma$ ” entre la energía del vector de errores y la energía del vector de señales exógenas se minimice. A continuación se exponen los pasos que se llevaron a cabo en el diseño del controlador  $H_\infty$ .

Para nuestro problema, la planta que se desea controlar es:

$$G(s) = \frac{562.4}{s + 7.664} \quad (\text{Ec. 66})$$

### 5.2.1 Configuración de la planta aumentada

En la Fig. 28 se presenta un esquema de un sistema de control en lazo cerrado, en el que están presentes perturbaciones,  $d$ , y ruidos en los sensores de medida,  $n$ .

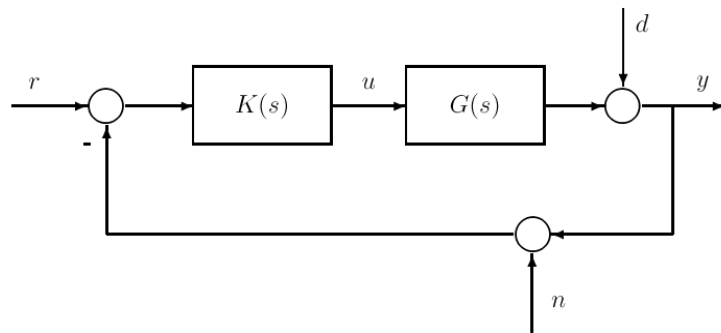


Figura 28. Estructura de un sistema de control convencional

Teniendo en cuenta las definiciones:

$$L(s) = G(s)K(s) \quad (\text{Ec. 67})$$

$$S(s) = (I + L(s))^{-1} \quad (\text{Ec. 68})$$

$$T(s) = L(s)S(s) = I - S(s) \quad (\text{Ec. 69})$$



La resolución del problema  $H_\infty$  con esta configuración recibe el nombre de *problema de sensibilidad mixta S / KS / T*. La expresión a minimizar en este caso queda de la siguiente manera:

$$\|T_{zw}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_S S_o \\ W_T T_o \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1$$

Se plantean unas reglas para seleccionar  $W_S$  y  $W_T$ , que son los pesos que básicamente tiene que ver con la prestación nominal del sistema y la estabilidad robusta [38].

### **5.2.2 Estimación de la incertidumbre multiplicativa a la salida**

La síntesis de un controlador robusto se basa en el conocimiento de la incertidumbre del sistema. En este trabajo, se usó una descripción de su efecto multiplicativo a la salida, siendo la elección de un modelo nominal el primer paso para estimar dicho efecto.

Por definición la incertidumbre multiplicativa indica el porcentaje de desconocimiento que se tiene de la planta en cada frecuencia. Este porcentaje suele aumentar con la frecuencia y siempre habrá una frecuencia a partir de la cual el valor de la incertidumbre multiplicativa supere la unidad, es decir, una frecuencia a partir de la cual el desconocimiento del sistema es total. La incertidumbre multiplicativa a la salida puede ser estimada como sigue [28]:

$$E_{o,i}(s) = [G_i^*(s) - G(s)] \cdot G(s)^{-1} \quad (\text{Ec. 73})$$

donde  $G_i^*(s)$  representa los diferentes sistemas no lineales en cada punto de operación donde se necesita que el controlador trabaje adecuadamente.

Teniendo en cuenta el procedimiento de ajuste de parámetros realizado en el proceso de identificación, fueron tomadas dos funciones de transferencia con el fin de simular la incertidumbre existente en los parámetros de la planta:

$$P_1(s) = \frac{183.2s + 12030}{s^2 + 12.42s + 163}, \quad P_2 = \frac{-287.9s^2 + 91910s + 7.036 \times 10^6}{s^3 + 612.1s^2 + 13870s + 95950} \quad (\text{Ec. 74})$$

El diagrama de incertidumbre multiplicativa para estas funciones tiene un aspecto tal como el que se ilustra en la Fig. 30.

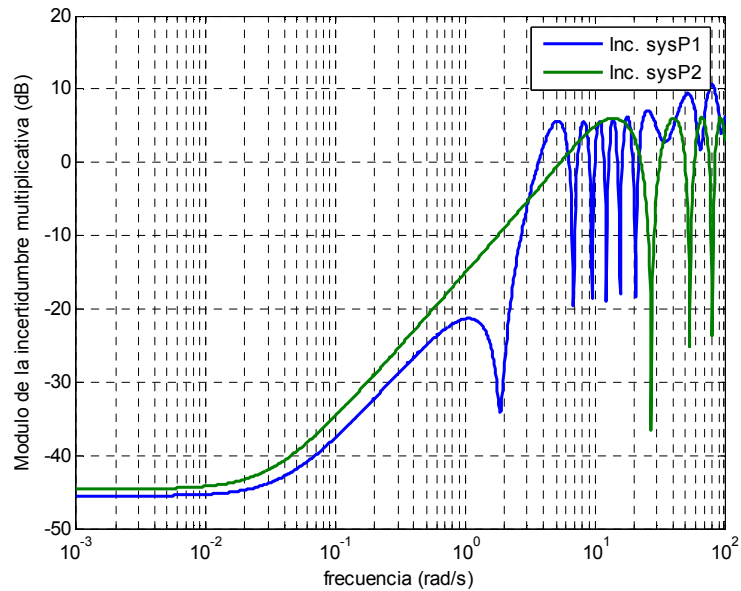


Figura 30. Incertidumbre multiplicativa

### 5.2.3 Diseño de las funciones de ponderación $W_T$ y $W_S$

En el control robusto las especificaciones de diseño pueden estar dadas en el dominio de la frecuencia, y con ello se busca satisfacer algunos de los siguientes objetivos [27]:

1. El controlador  $K(s)$  debe estabilizar  $G(s)$
2. Rechazo de perturbaciones a la salida  $\bar{\sigma}(S) \ll 1$
3. Atenuación del ruido  $\bar{\sigma}(T) \ll 1$
4. Buen seguimiento de la referencia  $\bar{\sigma}(T) \approx \underline{\sigma}(T) \approx 1$
5. Control de la reducción de energía  $\bar{\sigma}(R) \ll 1$

De acuerdo al diagrama de la planta aumentada (Fig. 29), si se desea atenuar la influencia de  $d_o(s)$  a la salida, o de la referencia  $r(s)$  y la perturbación  $d_i(s)$  en el error

de seguimiento  $e(s)$ , se debe minimizar la sensibilidad  $S(s)$  del lazo,  $|S(s)| \ll 1$ . Si se desea atenuar la influencia del ruido de medición  $n(s)$  a la salida o sobre el error de seguimiento, u obtener robustez en el diseño ante la incertidumbre dinámica del modelo, se debe en cambio minimizar  $T(s)$ ,  $|T(s)| \ll 1$ . Entonces, la especificación que incluye ( $e$ ) resulta en un peso sobre  $S(s)$  y la especificación que incluye ( $u$ ) resulta en un peso sobre  $T(s)$ . El compromiso fundamental entre hacer  $S(s)$  pequeña y hacer  $T(s)$  pequeña es el principal punto en el diseño, en el que debe satisfacerse todo sistema realimentado, dado por la ecuación:

$$T(s) + S(s) = I \quad (\text{Ec. 75})$$

Según la condición establecida por la ecuación 75, no se podrán minimizar ambas sensibilidades a la vez. Particularmente ambos  $|S(s)|$  y  $|T(s)|$  no pueden ser menor que 0.5 a la misma frecuencia, la solución a este problema se logra minimizando tanto la sensibilidad como su complemento en distintos rangos de frecuencias  $s = j\omega$ . Es por esto que para cumplir de manera independiente con estos objetivos se han creado las llamadas funciones de ponderación:  $W_S$ ,  $W_U$ ,  $W_T$ .

#### 5.2.4 Diseño del peso de robustez $W_T$

La función de ponderación  $W_T$  es utilizada para hacer más robusto al sistema frente a incertidumbres multiplicativas. Se propone escoger una función de transferencia  $W_T(s)$  que sea estable, de fase mínima y tal que para cada frecuencia, el módulo sea superior al módulo de la incertidumbre, esto es,

$$|W_T(j\omega)| \geq \bar{\sigma}(E_{o,i}(j\omega)) \quad \forall \omega, i = 1, \dots, q \quad (\text{Ec. 76})$$

Además, dado que  $W_T(s)$  pondera a la función de sensibilidad complementaria, la cual debe tener una ganancia pequeña en alta frecuencia, se diseñará aquella de forma que su módulo posea un valor alto en alta frecuencia. Habrá que asegurarse de que  $W_T(s)$  tenga

en alta frecuencia un módulo grande para conseguir que  $T(j\omega)$  tenga un módulo pequeño y pueda rechazar ruidos en los sensores e incertidumbres.

$W_T$  debe ser diseñada teniendo en cuenta:

1. En todo el rango de frecuencias, los valores de la sensibilidad complementaria, deben ser cubiertos por el inverso del peso  $W_T$ .
2. En frecuencias altas, donde  $\bar{\sigma}(E_{o,i}(j\omega)) \gg 1$ ,  $\bar{\sigma}(T(j\omega))$  tiene valores muy pequeños, o la magnitud de  $|W_T(j\omega)|$  tiene un valor máximo, las ganancias del lazo se hacen suficientemente pequeñas para compensar las incertidumbres.
3. Por experiencia se elige el peso  $W_T(s)$ , tal que los valores de la magnitud de la incertidumbre sea limitada  $0.3 < |E_{o,i}| > 1/\sqrt{2}$ , de forma que el controlador sea robusto y trabaje en el mismo rango de frecuencia, o dicho de otra manera que el máximo valor singular de  $T(s)$  no sea menor de  $\sqrt{2}$ .
4. El ancho de banda del sistema (modelo de la planta con el controlador) en lazo cerrado es el rango de frecuencia sobre el cual  $\bar{\sigma}(T(s)) = 1$ , o  $\bar{\sigma}(S(s)) \ll 1$  y la realimentación es eficaz para atenuar la perturbación. El ancho de banda puede servir como una simple medida del comportamiento del sistema en lazo cerrado; por eso con una adecuada elección de  $W_T$ , es posible controlar el ancho de banda en lazo cerrado del sistema, de tal modo que los ceros y polos de  $W_T$  definen los límites de los valores singulares de  $T(s)$ .

Teniendo en cuenta las restricciones anteriores para  $W_T$  y dado que  $W_T$  es una función en frecuencia que nos da una idea de la distribución de la incertidumbre de la planta, se deduce que la forma de  $W_T$  es la de un filtro pasa-altas, tal como el de la Fig. 31.

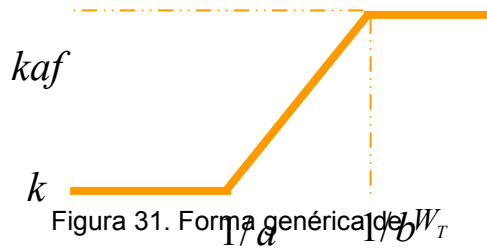


Figura 31. Forma genérica de  $W_T$

De acuerdo a [27], se propone que  $W_T$  sea de la forma:

$$W_T = \frac{10^{\frac{k}{20}}(as + 1)}{(bs + 1)} \quad (\text{Ec. 77})$$

En la Fig. 32 se presenta el perfil de la respuesta en frecuencia para la función de ponderación  $W_T$  escogida, que como puede verse, cumple las restricciones impuestas ( $|W_T|$  debe estar por encima de  $|P_1|$  y  $|P_2|$ ).

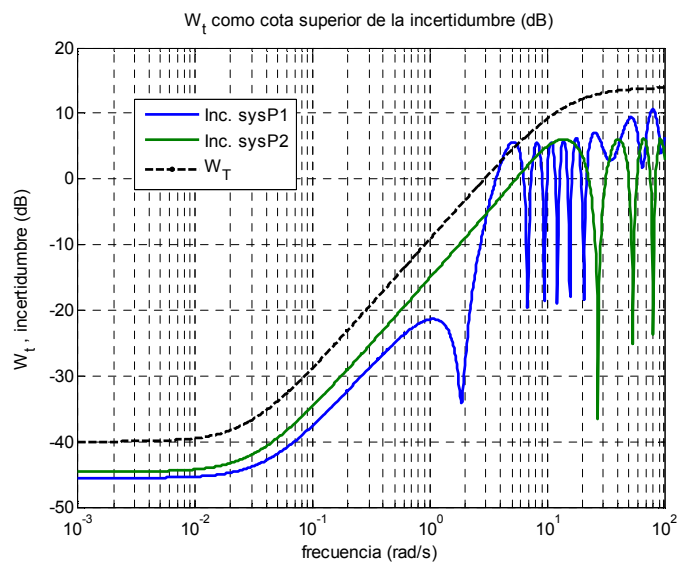


Figura 32. Incertidumbre multiplicativa y  $\omega_T$

La función de transferencia correspondiente para  $W_T$  es:

$$W_T = \frac{35.41s + 1.012}{0.07s + 1} \quad (\text{Ec. 78})$$

### 5.2.5 Diseño del peso de prestación $W_S$

La función  $W_S$  será empleada para imponer condiciones al comportamiento del sistema.  $W_S$  es una función de peso que refleja la información disponible sobre el contenido en frecuencias de las perturbaciones. Para conseguir una buena atenuación de las perturbaciones, es necesario asegurarse de que la cota superior de la matriz  $[W_S(s)S(s)]$  sea suficientemente pequeña.

$W_S$  debe ser diseñada teniendo en cuenta:

1. En todo el rango de frecuencias, los valores de la sensibilidad complementaria, deben ser cubiertos por el inverso del peso  $W_S$ .
2. En frecuencias bajas, donde  $\bar{\sigma}(E_{o,i}(j\omega)) \ll 1$  y  $\bar{\sigma}(S(j\omega))$  tiene valores muy pequeños, o la magnitud de  $|W_S(j\omega)|$  tiene un valor máximo, las ganancias del lazo se hacen suficientemente grandes para compensar las perturbaciones.
3. Si se desea seguimiento de señales de tipo escalón se debe lograr  $S(0) = 0$  (en consecuencia  $T(s) = I$ ) y por lo tanto elegir  $W_S$  con un polo en  $s = 0$ , ya que se desea minimizar  $|W_S(s)S(s)|_\infty$ .
4. Si  $r(s)$  es una rampa, y se desea que  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $S(s)$  debe tener al menos dos ceros en el origen, o elegir  $W_S$  con dos polos en  $s = 0$ .
5. En todo el rango de frecuencia, los valores singulares de la sensibilidad  $S(s)$ , deben ser cubiertos por los valores singulares de  $W_S(s)^{-1}$ . Los valores singulares de  $S(s)$  y  $W_S(s)^{-1}$  sean coincidentes o iguales por debajo de 0db y lo más posible cercanos por encima de este.

Se propone en [28] que  $W_S$  tenga la forma:

$$W_s(s) = \frac{\sqrt{\alpha} s + 10^{(\kappa-1)} \omega_T}{s + \sqrt{\beta} 10^{(\kappa-1)} \omega_{T_s}} \quad (\text{Ec. 79})$$

donde:

- $\alpha$  es la ganancia de la función en alta frecuencia. Se recomienda  $\alpha \cong 0.5$
- $\beta$  es la ganancia de la función a baja frecuencia. Este valor supone un límite superior al error de estado de equilibrio permitido. Desde el punto de vista de control, sería deseable alcanzar estados de equilibrio con error nulo, lo que implica tomar  $\beta = 0$ . Sin embargo, esta selección daría problemas numéricos al algoritmo de síntesis. Un valor pequeño apropiado para este parámetro sería  $[10^{-6}, 10^{-4}]$ .
- $\omega_T$  es la frecuencia de corte de  $W_T$
- $\kappa$  determina la frecuencia de corte de la función
- $N = 2$ , determina el número de polos y ceros.

En base a estas recomendaciones y a los criterios de diseño, la función de transferencia dada para es  $W_s$  :

$$W_s = \frac{0.1(s + 0.58)^2}{(s + 0.005)^2} \quad (\text{Ec. 80})$$

En la Fig. 33 se muestra los pesos  $W_s$  y  $W_T$ . Las especificaciones de diseño de  $W_s(s)$  y  $W_T(s)$  deben ser tales que la frecuencia de corte 0db del diagrama de Bode de  $W_s(s)$  esté suficientemente por debajo de la frecuencia de corte 0db del diagrama de Bode de  $W_T(s)^{-1}$ . En caso contrario, los requisitos de comportamiento serán imposibles de alcanzar [27].

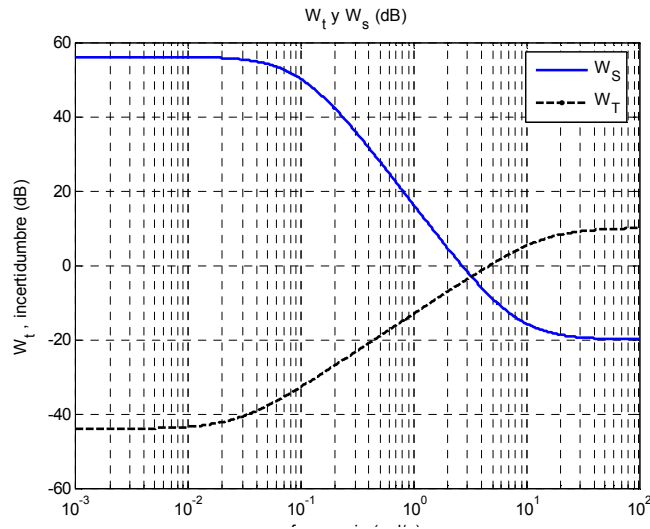


Figura 33. Pesos  $\omega_S$  y  $\omega_T$

Para este caso no se tuvo en cuenta  $W_U$ , ya que las incertidumbres fueron integradas en las incertidumbres multiplicativas, afectando solo la función de sensibilidad complementaria.

### 5.2.6 Cálculo del controlador

Con estas funciones de ponderación, se diseñó el controlador con la ayuda de las funciones que incorpora la Toolbox de control robusto de Matlab para la solución del problema  $H_\infty$ . El controlador obtenido es:

$$K(s) = \frac{322.6s^4 + 1.273 \times 10^4 s^3 + 1.82 \times 10^5 s^2 + 1.035 \times 10^6 s + 1.328 \times 10^6}{s^5 + 1059s^4 + 2.477 \times 10^5 s^3 + 1.208 \times 10^7 s^2 + 2.409 \times 10^6 s + 1.203 \times 10^5} \quad (\text{Ec. 81})$$

La respuesta en frecuencia de la matriz de transferencia  $\|T_{zw}\|$  se ilustra en la Fig. 34, en la que se observa que su magnitud es menor que la unidad en todo el rango de frecuencias :

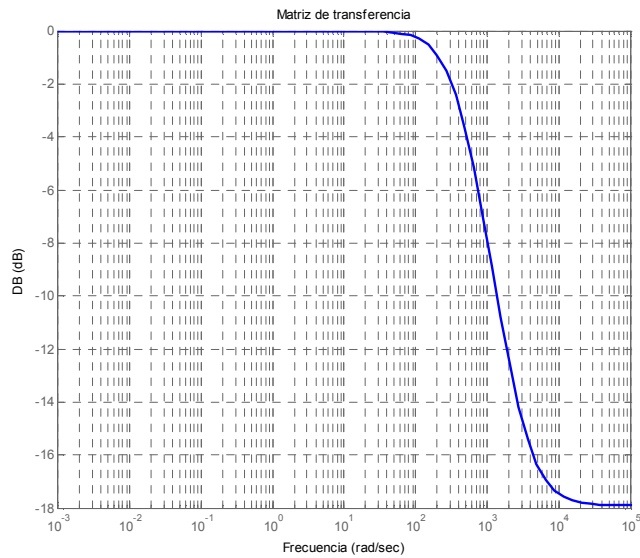


Figura 34. Matriz de Transferencia

En la Fig. 35 se muestran las respuestas en frecuencia de la sensibilidad y la sensibilidad complementarias. Se puede observar que se cumplieron los criterios de diseño,  $|W_S^{-1}|$  supera los valores de  $|S(s)|$  en el todo el dominio de frecuencia y para valores por debajo de 0dB, éstos están muy cercanos.

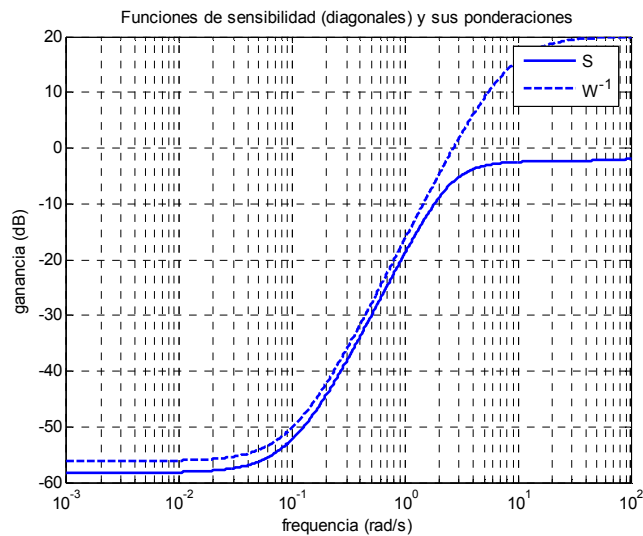


Figura 35. Funciones de sensibilidad y sus ponderación

De igual forma, se cumplieron los criterios para el caso de la sensibilidad complementaria (Fig. 36). En todo el rango de frecuencia, los valores singulares de la sensibilidad complementaria  $|T(s)|$  están por encima de los valores de  $|W_T(s)^{-1}|$  y son cercanos para valores por debajo de 0db.

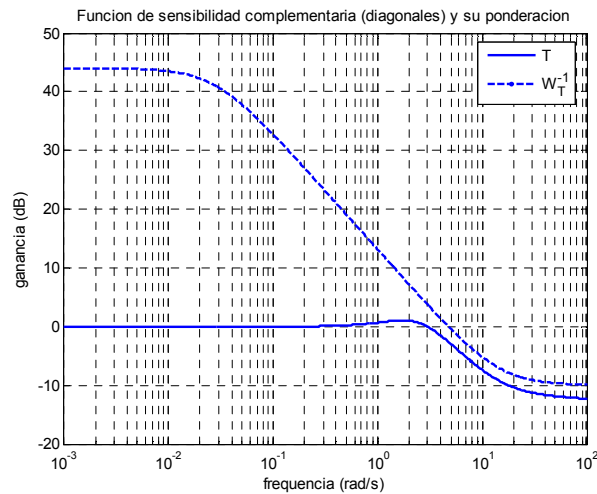


Figura 36. Funciones de sensibilidad complementaria y su ponderación

### 5.2.7 Implementación en Simulink®

Con el objetivo de evaluar el sistema de control  $H_\infty$  diseñado, se realizó la simulación en Simulink® teniendo en cuenta las restricciones en los actuadores (Fig. 37). La función de transferencia del controlador en tiempo discreto para un período de muestreo de .02s es:

$$K(z) = \frac{-0.003978z^4 + 0.02304z^3 - 0.03146z^2 + 0.01105z + 0.001379}{z^5 - 2.27z^4 + 1.545z^3 - 0.2771z^2 + 0.002089z + 6.31e-10}$$

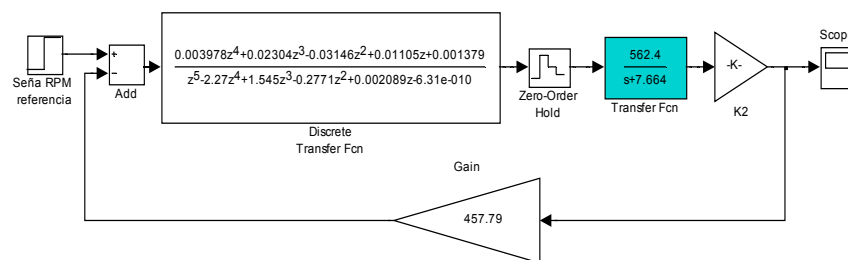


Figura 37. Implementación  $H_\infty$

La respuesta en el tiempo para el sistema en lazo cerrado se muestra en la Fig. 38.

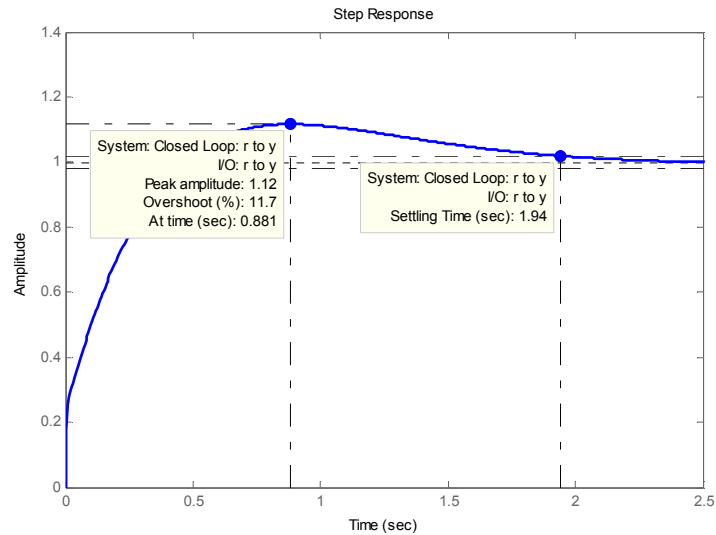


Figura 38. Respuesta al escalón

Como se observa, se obtuvo una respuesta más lenta pero asegurando la prestación robusta del sistema, tanto a lo que se refiere a perturbaciones como a incertidumbres presentadas en la planta.

### 5.3 Diseño del sistema de control QFT

QFT es una técnica de diseño en el dominio de la frecuencia que permite obtener controladores robustos con unas prestaciones mínimas, formuladas de forma cuantitativa y considerando las incertidumbres de la planta y las perturbaciones en el sistema (Fig. 39).

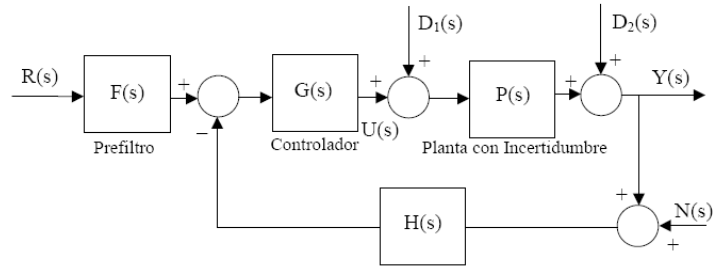


Figura 39. Esquema de control realimentado [32]

El método QFT tiene en cuenta de manera cuantitativa la incertidumbre de la planta y los requerimientos de funcionamiento robusto, seguimiento robusto, amplitud de las perturbaciones que se esperan y sus requerimientos de atenuación.

La metodología QFT se puede representar en los siguientes pasos [32].

1. Modelado de la planta con incertidumbre.
2. Generación de plantillas (templates).
3. Especificaciones de diseño.
4. Creación de los contornos (bounds).
5. Síntesis del controlador (loop-shaping).
6. Síntesis del prefiltro.
7. Validación del diseño.

Para el caso de diseño del controlador mediante la técnica QFT, se tomó la planta nominal de primer orden resultante del proceso de identificación, y se simuló varias condiciones para los parámetros  $k$  y  $a$ .

$$P_0 = \frac{k}{s+a} = \frac{562.4}{s+7.664} \quad (\text{Ec. 82})$$

$$a \in [1-10], \quad k \in [3-6.2]$$

### 5.3.1 Especificaciones de diseño

En la práctica no pueden satisfacerse simultáneamente todos los requisitos explícitos e implícitos en un control realimentado y esto conduce a soluciones de compromiso entre las especificaciones de diseño. Las especificaciones a tener en cuenta serán la de estabilidad y la de tracking.

- **Estabilidad robusta**

QFT define la estabilidad robusta para toda  $P(s) \in \wp, \omega \in [0, \infty]$  como [39]:

$$\left| \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| \leq \delta_1 \quad (\text{Ec. 83})$$

Chait y Yaniv, traducen la especificación robusta en (3) como:

$$MF \geq 180^\circ - \arccos\left(\frac{0.5}{\delta_1^2} - 1\right) \quad (\text{Ec. 84})$$

$$MF \geq 1 + \frac{1}{\delta_1} \quad (\text{Ec. 85})$$

siendo  $MG$  y  $MF$  el margen de ganancia y de fase, respectivamente.

Como criterio general de diseño para tener estabilidad relativa aceptable se aconseja:

$$\delta_1 \leq 1.3 = 2.28dB \quad (\text{Ec. 86})$$

$$\min(MG) \geq 1.77 \approx 5dB$$

$$\min(MF) \geq 45^\circ$$

- **Tracking robusto**

El seguimiento de señales de referencia en presencia de incertidumbre se define en QFT como:

$$|\delta_2(j\omega)| \leq \left| \frac{F(j\omega)L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| \leq |\delta_3(j\omega)| \quad (\text{Ec. 87})$$

para todo  $P(s) \in \wp, \omega < \omega_2$

Las especificaciones de tracking se basan en satisfacer índices de comportamiento típicos ante entradas escalón. Se fijan un modelo superior  $|\delta_3(j\omega)| = T_{R_u}$ , subamortiguado a través de:  $M_p$  (sobrepulso),  $t_p$  (tiempo de pico),  $t_s$  (tiempo de establecimiento),  $t_r$  (tiempo de subida) ó  $K_m$  (ganancia estática) y un modelo inferior  $|\delta_2(j\omega)| = T_{R_l}$  sobreamortiguado con:  $t_s, t_r$  ó  $K_m$ .

### 5.3.2 Proceso de diseño QFT

El procedimiento de diseño con la técnica QFT comprendió los siguientes pasos:

- **Generación de las plantillas de la planta:**

Para una planta con incertidumbre  $P(s) \in \wp$ , se seleccionan una serie de frecuencias de estudio  $\omega_i, i = 1, \dots, n$ , de acuerdo con las especificaciones y las propias características de la planta. A continuación, se calculan el conjunto de valores de la planta,  $P(j\omega_i)$  en el plano complejo (diagrama de Nichols) para cada  $\omega_i$ , constituyéndose  $n$  plantillas  $\omega_i, i = 1, \dots, n$ .

Una planta arbitraria del conjunto de plantas se selecciona como el caso nominal, existiendo una representación para cada frecuencia,  $P_0(j\omega_i)$ . Para disminuir la ganancia estática se debe tener como referencia el comportamiento en baja frecuencia  $\omega_f$ .

La Fig. 40 muestra la incertidumbre sobre el diagrama de Nichols para la planta de estudio  $G(s)$ , a través de las plantillas de frecuencias  $\omega_i = [0.1, 0.5, 1, 15, 100]$ .

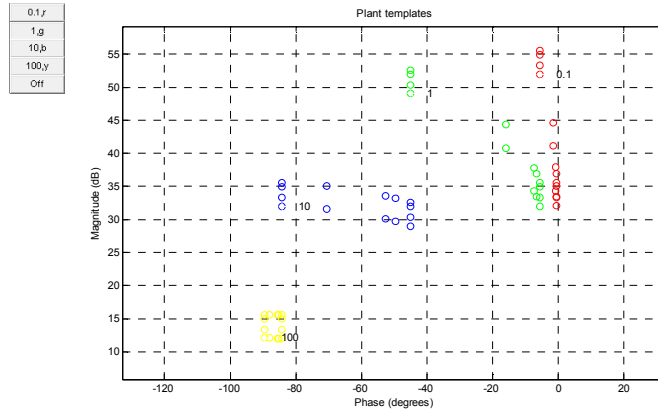


Figura 40. Generación de plantillas

Analizando la plantilla de baja frecuencia  $\omega_f = 0.1$  rad/s, ésta podría caracterizarse por una incertidumbre vertical (magnitud en decibelios) y por una incertidumbre horizontal (fase). La incertidumbre vertical de baja frecuencia es debida a parámetros ganancia, ceros y/o polos, mientras que la incertidumbre horizontal en bajas frecuencias, es aportada exclusivamente por parámetros cero y/o polo (no ganancia).

- **Generación de las líneas límite de la especificación (Bounds)**

Las especificaciones de lazo cerrado y la incertidumbre del sistema se traducen ahora en términos de unos contornos que la función de transferencia en lazo abierto,  $L(j\omega) = G(j\omega)P(j\omega)$  debe cumplir. De este modo, existirán contornos para cada especificación y en aquellas frecuencias de interés.

Para el problema considerado, se calcularon contornos de estabilidad y contornos de *tracking*.

**a) Contornos de estabilidad**

Para que el sistema sea estable  $L(j\omega)$  no deberá rodear al punto (0dB, -180) del diagrama de Nichols (NC), y aun más deberá cumplir con las especificaciones de  $MG$

(margen de ganancia) y  $MF$  (margen de fase) establecidas para  $\delta_1$ . Por otro lado, la especificación de máximo pico de resonancia  $M_m$ , permitido en lazo cerrado, se traduce en que  $L(j\omega)$  no se introduzca en un determinado círculo- $M$  del NC, lo cual engloba lo mencionado anteriormente de mantener un cierto  $MG$  y  $MF$  positivos. Una especificación de estabilidad robusta de  $\delta_1 = 1.3$ , se traduce en  $MG \geq 5dB$  y  $MF \geq 45^\circ$ .

El contorno de estabilidad de alta frecuencia se representa en la Fig. 41.

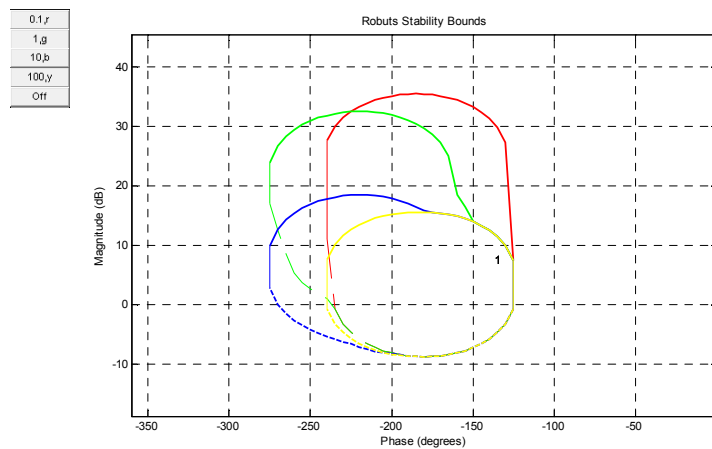


Figura 41. Contornos de estabilidad a distintas frecuencias

### b) Contornos de tracking

Como se anotaba en las especificaciones de diseño, las especificaciones de tracking se basan en satisfacer índices de comportamiento típicos ante entradas escalón. Los modelos superior e inferior podrían expresarse como:

$$T_{R_U}(s) = \frac{(\omega_n^2/a) \cdot (s+a)}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2} \quad (\text{Ec. 88})$$

$$T_{R_{UL}}(s) = \frac{K}{(s-\sigma_1) \cdot (s-\sigma_2)(s-\sigma_3)} \quad (\text{Ec. 89})$$

Estos implican que el módulo de lazo cerrado del sistema,  $T_R = F \frac{L}{1+L}$ , debe caer dentro

de:

$$\delta_R(\omega) = T_{R_U}(\omega) - T_{R_L}(\omega) \quad (\text{Ec. 90})$$

Para ello:

$$\Delta T_R(\omega) = T_{R_U} - T_{R_L} \leq \delta_R(\omega) \quad (\text{Ec. 91})$$

o bien:

$$\Delta L(\omega) \leq \delta_R(\omega)$$

El comportamiento de los modelos anteriores para  $M_p = 1.2$  y  $t_s = 0.85$  en el dominio del tiempo se ilustra en la Fig. 42 y la curva de Bode de magnitud (en el dominio de la frecuencia) en la Fig. 43.

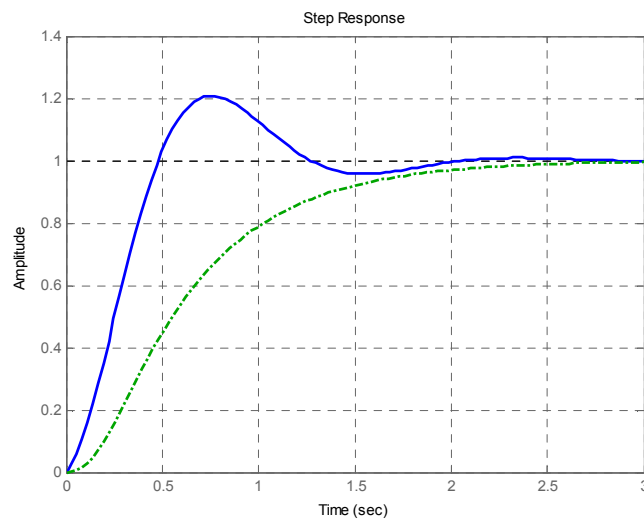


Figura 42. Respuesta al escalón de los márgenes superior e inferior

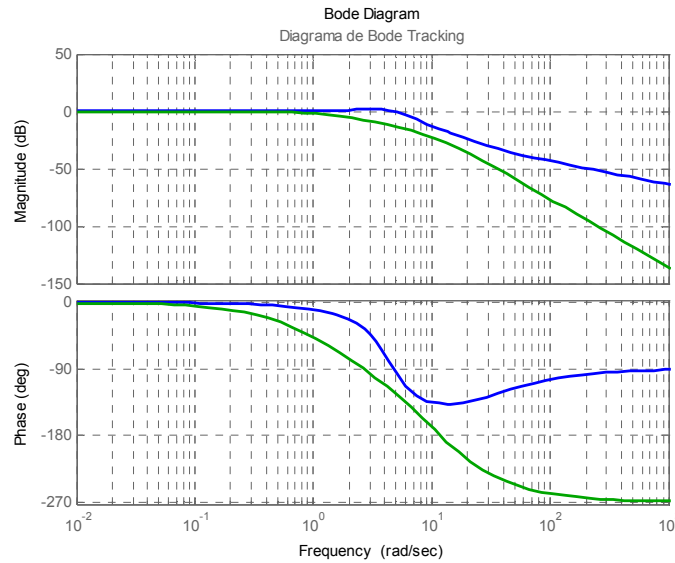


Figura 43. Diagrama de Bode de los márgenes superior e inferior

El trazado de los contornos de seguimiento (*tracking*),  $B_R$  para cada frecuencia  $\omega_i$ , fue realizado como la ayuda de la Toolbox QFT de matlab mediante el procedimiento que se detalla a continuación [40]:

- Se tomó una plantilla  $P(j\omega_i)$  con su planta nominal  $P_0(j\omega_i)$  en una determinada frecuencia  $\omega_i$
- En NC, a lo largo de una línea de fase constante, se mueve la plantilla  $P(j\omega_i)$  hacia arriba o hacia abajo, hasta que los extremos de la plantilla sean tangentes a dos líneas  $M$  tal que  $M_{\max} - M_{\min} \leq \delta_R(\omega_i)$
- Entonces, el punto de la planta nominal  $P_0(j\omega_i)$  será el punto del contorno de *tracking*  $B_R(j\omega_i)$  en la línea de fase constante tomada.
- El procedimiento se repite para distintas fases hasta completar el contorno  $B_R(j\omega_i)$  para la frecuencia  $\omega_i$ .

Posteriormente se repitió el mismo procedimiento para las demás frecuencias hasta calcular los contornos de *tracking* para todas las frecuencias de estudio. Los contornos de seguimiento obtenidos según este procedimiento se ilustran en la Fig. 44.

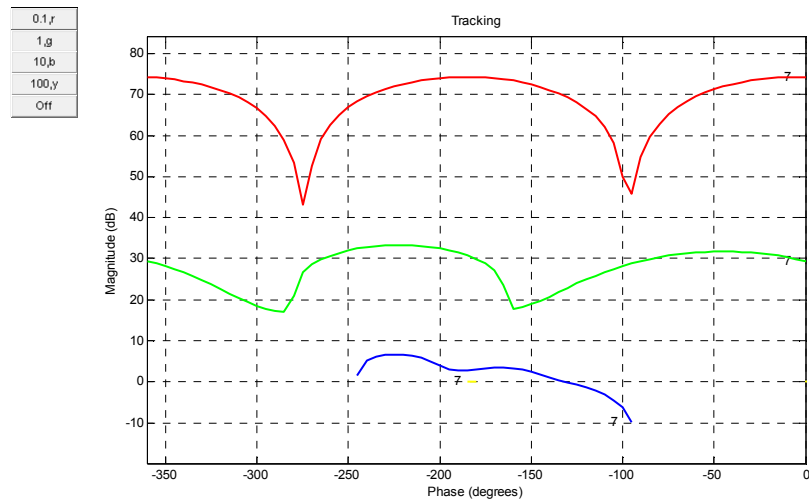


Figura 44. Contornos de seguimientos a distintas frecuencias

- **Inserción de contornos**

Para cada especificación (estabilidad y *tracking*) se trazaron los contornos de la manera indicada en las frecuencias de interés (según las especificaciones y las propias características de la planta). Según esto, pueden coexistir para cada frecuencia varios contornos atendiendo a las diferentes especificaciones. La intersección fue calculada seleccionando el contorno más desfavorable para cada frecuencia,  $B(j\omega_i)$ . Una vez obtenidos los contornos (*bounds*), se procedió a la intersección de estos, ya que el diseño requiere el cumplimiento de ambas condiciones (Fig. 45).

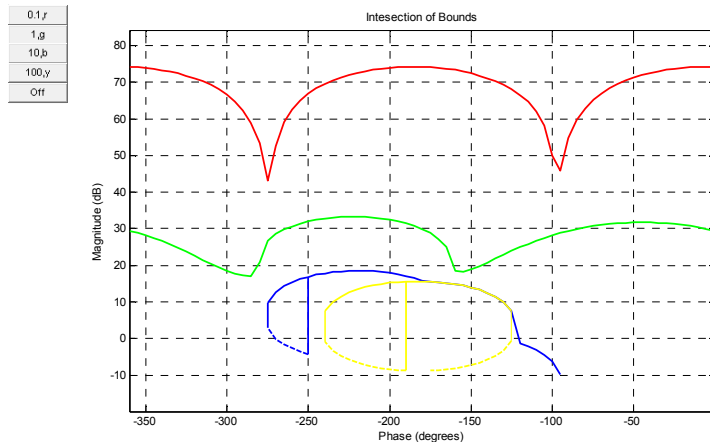


Figura 45. Intersección de contornos

- **Síntesis del controlador y punto de inicio de diseño**

El siguiente paso fue el diseño del controlador o loop-shaping. El diseño del controlador QFT  $G(s)$ , se lleva a cabo sobre el diagrama de Nichols (NC) en el que se han representado los contornos intersección para cada  $\omega_i$ ,  $B(j\omega_i)$  y la planta nominal  $P_0(j\omega_i)$ .

Los contornos representan la posición a alcanzar por el sistema en lazo abierto,  $L_0(j\omega_i) = G(j\omega)P_0(j\omega_i)$ , para cumplir las especificaciones de lazo cerrado que consideran la incertidumbre. De este modo, con la técnica de síntesis QFT se añaden elementos ganancia, polos y/o ceros de modo que la planta nominal de cada frecuencia  $P_0(j\omega_i)$  satisfaga su correspondiente contorno  $B(j\omega_i)$ : se sitúe por encima, si el contorno es continuo, y por debajo, si el contorno es discontinuo.

Si cumpliendo el contorno, la función  $L_0(j\omega_i)$  se aleja de éste, existe un sobre-dimensionamiento, es decir, el controlador no es óptimo y el coste de realimentación se hace mayor.

El proceso de diseño de  $G(j\omega)$  fue llevado a cabo gráficamente, de nuevo con la ayuda de la Toolbox de QFT de Matlab, como se muestra a continuación:

- A la planta nominal de baja frecuencia,  $P_0(j\omega_f)$ , se le añadieron los polos en el origen necesarios para cumplir las especificaciones estacionarias deseadas. A este nuevo punto, clave en el proceso de fragmentación se le denominará, punto de inicio de diseño,  $P_d$ :

$$P_d = \frac{P_0(j\omega_f)}{(j\omega_f)^t} \quad (\text{Ec. 92})$$

siendo  $t$  el número de polos en el origen que se deben añadir de modo que  $t + r$  determina el tipo final del sistema.

- Se añadió la ganancia estática necesaria para satisfacer el contorno  $\omega_f$ ,  $B(j\omega_f)$
- Se agregaron los polos y ceros necesarios para que en cada frecuencia  $\omega_i$ , la planta nominal  $P_0(j\omega_i)$  satisficiera su contorno  $B(j\omega_i)$ .

El objetivo fue básicamente ir agregando componentes de tal manera que cada punto de la curva en lazo abierto evaluado en las frecuencias de trabajo, pasara muy cercanamente al contorno correspondiente. En el caso que sea una línea abierta y continua el punto debía ubicarse por encima, si la línea era discontinua, debía estar por debajo, y en el caso que sea una línea cerrada el punto debía estar por afuera.

El diagrama de Nichols con sus respectivos contornos es mostrado en la Fig. 46.

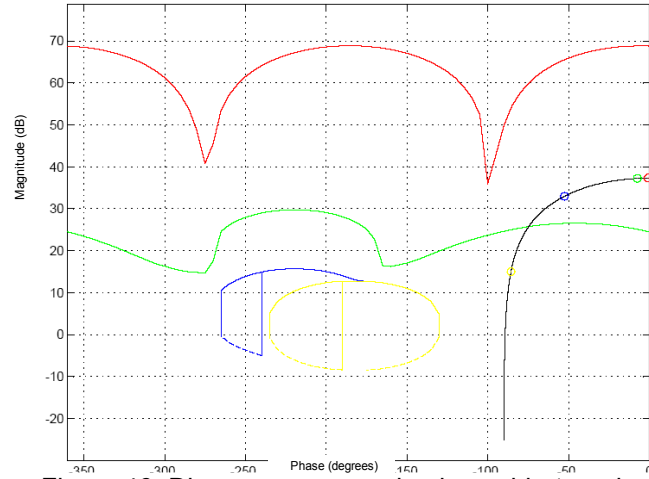


Figura 46. Diagrama de nicols - lazo abierto - planta

Después de agregar tres polos y un cero se obtuvo la curva en lazo abierta deseada, como se muestra en la Fig. 47:

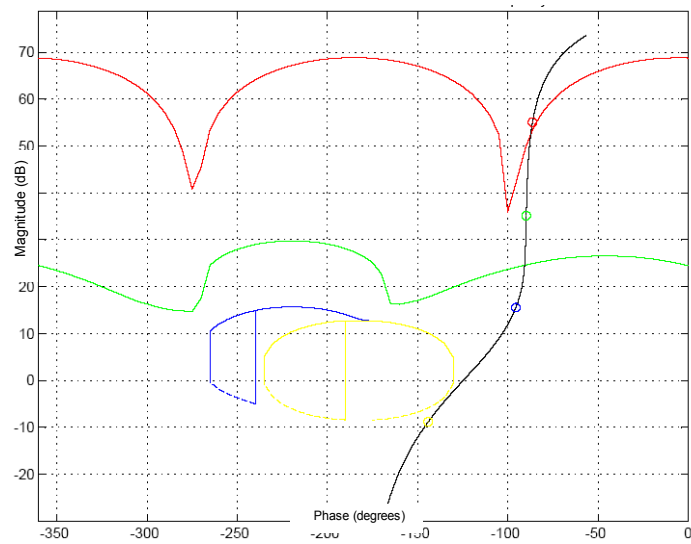


Figura 47. Diagrama de Nichols – lazo abierto planta + controlador

El controlador obtenido fue el siguiente:

$$\frac{7.8808(s + 7.007)}{(s + 71.15)(s + 0.006602)} \quad (\text{Ec. 93})$$

- **Diseño del prefiltro**

En la síntesis de  $G(j\omega)$  y en relación con los contornos de comportamiento, sólo las incertidumbres absolutas de  $|T(j\omega)| = |L(j\omega)/1 + L(j\omega)|$  fueron reducidas a  $\delta_R(\omega) = \delta_{R_U}(\omega)/\delta_{R_L}(\omega)$ . Será necesario ahora desplazar las curvas de lazo cerrado  $T(j\omega)$  de modo que las nuevas  $|T'(j\omega)| = |T(j\omega)||F(j\omega)|$  queden incluidas según precisa la doble desigualdad en:

$$\delta_{R_L}(\omega) \leq \left| \frac{F(j\omega) \cdot L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| \leq \delta_{R_U}(\omega) \quad (\text{Ec. 94})$$

El prefiltro  $F(j\omega)$  aportará la magnitud necesaria en cada frecuencia.

Una vez se culminó el diseño del sistema de control, se atacó el problema de diseño del prefiltro. Se agregaron dos ceros y un polo con el fin de que el diagrama de Bode del sistema se encuentre entre los límites del seguimiento, tal y como se observa en la Fig. 48.

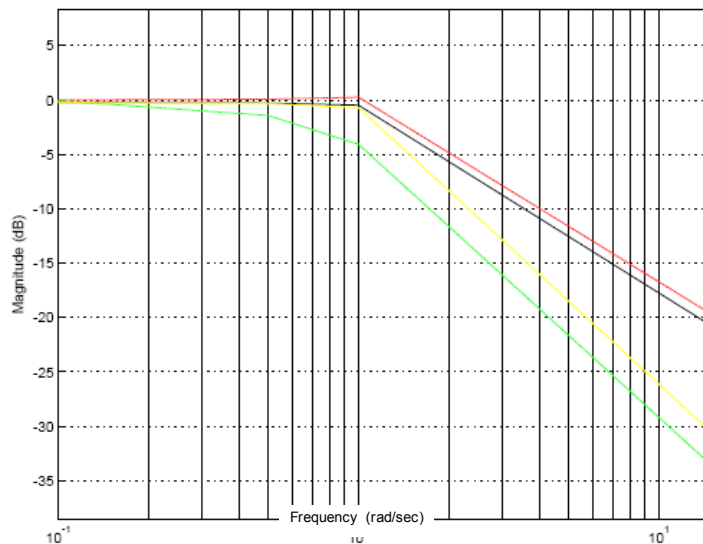


Figura 48. Límites del seguimiento en frecuencia

El prefiltro obtenido es:

$$F(s) = \frac{0.93493(s + 9.234)}{(s + 3.415)(s + 2.528)} \quad (\text{Ec. 95})$$

- **Validación**

Debido a que se usó un método gráfico, fue necesario realizar una validación del diseño. Como se observa en la Fig. 49, la curva de sensibilidad complementaria se encuentra por debajo del criterio de diseño, cumpliendo así los requerimientos de diseño.

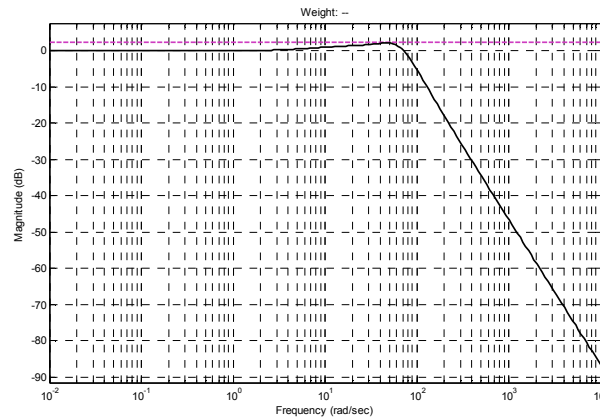


Figura 49. Validación

Se observó que el valor el margen de fase cumple con el valor que tomamos  $\delta_1 = 1.3$ . La respuesta en frecuencia del sistema con respecto a la incertidumbre se muestra en el diagrama de Bode (Fig. 50), donde se comprueba que se cumple la especificación de rechazo de perturbaciones, tanto para las altas como para las bajas frecuencias, dentro del intervalo de frecuencias dado.

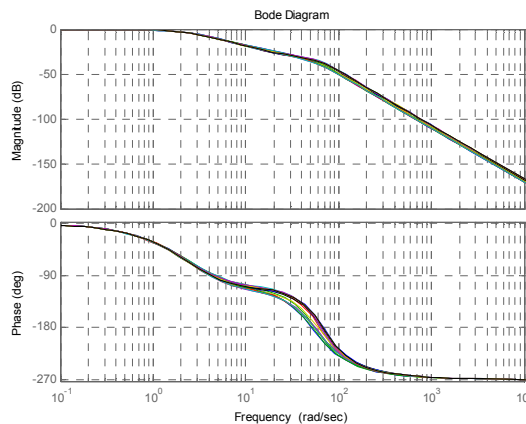


Figura 50. Diagrama de Bode de las incertidumbres a lazo cerrado

A continuación se encontraron las respuestas del sistema frente a posibles variaciones en el modelo. En la Fig. 51, se observa que en todos los casos, el sistema presenta un comportamiento estable.

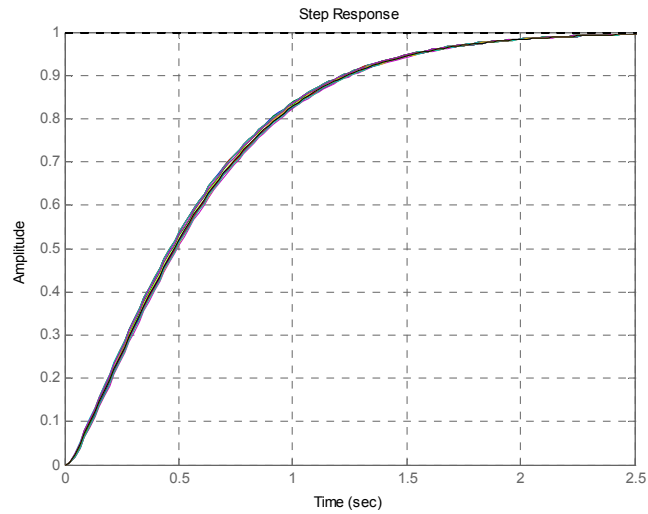


Figura 51. Respuesta al escalón de las incertidumbres a lazo cerrado

Finalmente, se verificó el desempeño en cuanto al seguimiento (*tracking*). En la Fig. 52 se ilustra que la respuesta en frecuencia del sistema se encuentra dentro de los límites permitidos.

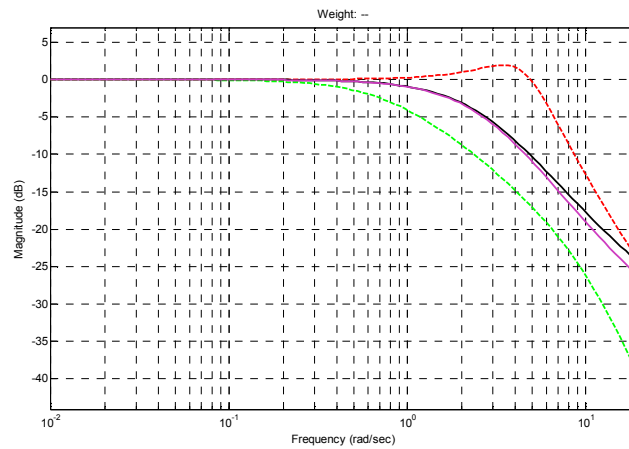


Figura 52. Respuesta en frecuencia de las incertidumbres a lazo cerrado y los límites de seguimiento

- **Implementación en Simulink®**

Con el fin de comprobar el comportamiento del controlador cuando se tienen en cuenta las restricciones en los actuadores de la planta, se realizó la simulación en Simulink® con el controlador y el prefiltro diseñado (Fig. 53).

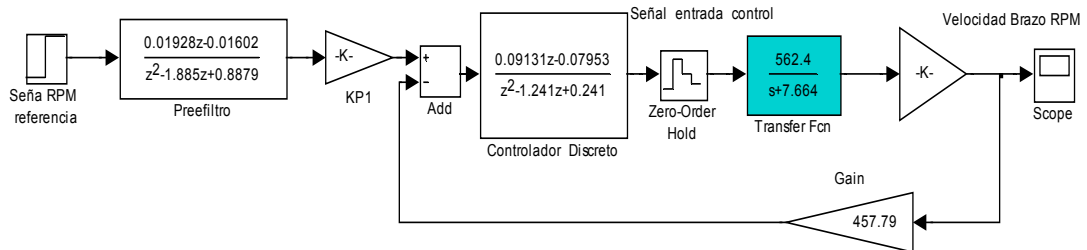


Figura 53. Diagrama en Simulink® en tiempo discreto

La respuesta del sistema se observa en la Fig. 54. El sistema no alteró su respuesta dinámica y presentó una curva similar al caso sin restricciones.

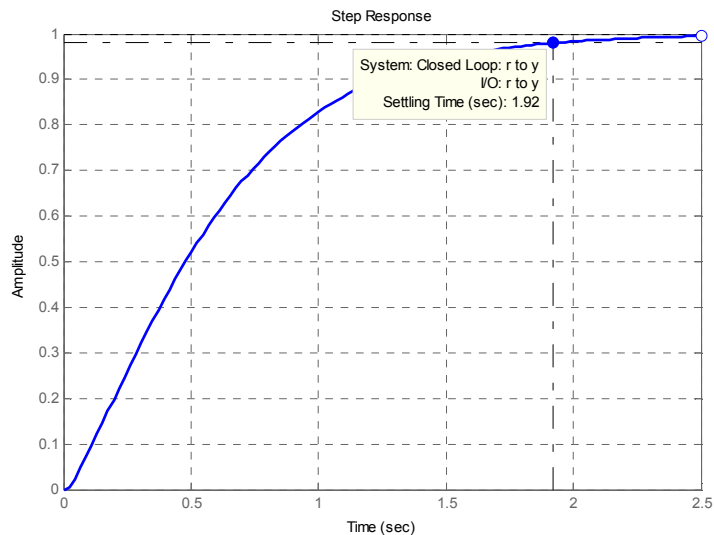


Figura 54. Respuesta a lazo cerrado

## 5.4 Diseño del sistema de control predictivo

El control predictivo basado en modelos (Model Predictive Control, MPC) es una de las formas más generales de formular el problema de control en el dominio del tiempo.

Integra control óptimo, control de procesos con tiempos muertos, procesos multivariables, y utiliza las referencias futuras cuando están disponibles. Al utilizar esta estrategia de control con horizonte finito permite además, la consideración de restricciones y procesos no lineales.

El MPC permite incorporar criterios operacionales a través de la utilización de una función objetivo y restricciones para el cálculo de las acciones de control. El MPC se fundamenta en los siguientes criterios [41]:

- Utiliza el modelo matemático del proceso para predecir la evolución futura de las variables controladas sobre un horizonte de predicción.
- La imposición de una estrategia de control para el cálculo de las variables manipuladas, optimizando una función objetivo.
- El establecimiento de una trayectoria futura conocida a priori, una trayectoria de referencia actual o una trayectoria filtrada para las variables controladas del proceso.
- La aplicación de la estrategia de horizonte de control deslizante, se aplica la primera señal de control en cada instante y se desecha el resto, luego se repiten los cálculos en cada instante de muestreo.

Uno de los inconvenientes del MPC es su elevado grado de computación numérica requerido para la solución de ciertos algoritmos. Sin embargo, el control predictivo (MPC) puede ser implementado eficientemente sin realizar optimización en tiempo real. Se pueden obtener soluciones exactas a los programas cuadrático y/o lineal multiparamétricos usando algoritmos fuera de línea, con cálculo explícito la ley de control restringidos linealmente, lo que facilita su implementación en tiempo real [42].

#### ***5.4.1 Metodología del control MPC***

El control predictivo MPC utiliza una metodología detallada por los siguientes pasos [41]:

- a. Para cada tiempo  $t$  y haciendo uso del modelo del proceso se predicen las salidas futuras para un determinado horizonte de predicción  $H_p$ .

Estas salidas predichas, dependen de los valores conocidos hasta el instante  $t$  (entradas y salidas pasadas)

$$\hat{y}(t+k|t), \quad k=1, \dots, H_p \quad (\text{Ec. 96})$$

y de las señales de control futuras

$$u(t+k|t), k=0, \dots, N_u-1 \quad (\text{Ec. 97})$$

La nomenclatura general  $r(t+k|t)$  indica que el cálculo en el instante  $(t+k)$ , depende de su valor inmediatamente anterior en  $t$ .

- b. Las señales de control futuras se calculan empleando un criterio de optimización en el que se busca mantener el proceso lo más próximo posible a la trayectoria de referencia, que usualmente es el punto de ajuste o una trayectoria conocida. Este criterio (función objetivo), es en ciertos casos una función cuadrática de los errores entre la salida predicha por el modelo matemático y la trayectoria de referencia predicha.
- c. Envío de únicamente la primera señal de control  $u(t|t)$  al proceso, desechándose las otras calculadas, puesto que en el siguiente instante de muestreo ya se conoce  $y(t+1|t)$ , repitiéndose nuevamente el paso  $a$ ; con este nuevo valor todas las secuencias se deben actualizar. Luego se calcula  $u(t+1|t+1)$ , que en principio será diferente a  $u(t+1|t)$  al disponer de nueva información.

#### **5.4.2 Descripción y modelo del proceso**

El proceso a controlar es una transmisión continuamente variable [7], conformada por un tren de engranajes planetarios y un mecanismo sinfín – corona. La variable a controlar es la velocidad del brazo, la cual es función lineal de las velocidades del motor AC y el motor DC. En la etapa de modelado del sistema (capítulo 4), se concluyó que el la transmisión se comporta como un sistema de primer orden con respecto al actuador principal, un servomotor que se encarga de regular la relación de transmisión mediante la variación de

la velocidad en el tornillo sinfín. De acuerdo a la identificación realizada (capítulo 4), la planta a controlar en el espacio de estados discreta es:

$$\begin{bmatrix} x_{m1}(k+1) \\ x_{m2}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.8748 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(k) \\ x_{m2}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1259 \end{bmatrix} u(k) \quad (\text{Ec. 98})$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(k) \\ x_{m2}(k) \end{bmatrix}$$

Tomando  $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ , el espacio de estados alternativo queda expresado como:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.8743 & 0 & 0 \\ 0.8743 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1259 \\ 0.1259 \end{bmatrix} \Delta u(k) \quad (\text{Ec. 99})$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

Esta configuración será más conveniente para tratar el problema de optimización.

### ***5.4.3 Predicción de los estados y variable de salida***

Para resolver el problema de control predictivo, se deben calcular los valores futuros  $\hat{y}(k+1|k)$  a partir del estado actual  $\hat{x}(k|k)$ , la última entrada  $u(k-1)$  y los cambios en la señal de control futuras  $\Delta \hat{u}(k+i|k)$  para el horizonte de control  $N_c$ , que es el intervalo de predicción en el que se realiza la predicción. La trayectoria futura de control por tanto, son los valores futuros que toma  $\Delta u$  para el horizonte de control  $N_c$ :

$$\Delta u(k_i), \Delta u(k_i+1), \dots, \Delta u(k_i+N_c-1) \quad (\text{Ec. 100})$$

De igual forma, se debe realizar la predicción de los estados para la trayectoria de control en la ventana de optimización de tamaño  $N_p$ , que es llamado el horizonte de predicción (intervalo de tiempo en el que se realiza la predicción):

$$x(k_i + 1 | k_i), x(k_i + 2 | k_i), \dots, x(k_i + m | k_i), \dots, x(k_i + N_p | k_i) \quad (\text{Ec. 101})$$

El horizonte de control debe ser menor que el de predicción. Basándose en el modelo del espacio de estados, los estados de las variables y salidas futuras son:

$$x(k_i + 1 | k_i) = Ax(k_i) + B\Delta u(k_i) \quad (\text{Ec. 102})$$

$$\begin{aligned} x(k_i + 2 | k_i) &= Ax(k_i + 1) + B\Delta u(k_i + 1) \\ &= A^2x(k_i) + AB\Delta u(k_i) + B\Delta u(k_i + 1) \end{aligned}$$

⋮

$$x(k_i + N_p | k_i) = A^{N_p}x(k_i) + A^{N_p-1}B\Delta u(k_i) + A^{N_p-2}B\Delta u(k_i) + B\Delta u(k_i + 1) + \dots + A^{N_p-N_c}B\Delta u(k_i + N_c - 1)$$

$$y(k_i + 1 | k_i) = CAx(k_i) + CB\Delta u(k_i) \quad (\text{Ec. 103})$$

$$y(k_i + 2 | k_i) = CA^2x(k_i) + CAB\Delta u(k_i) + CB\Delta u(k_i + 1)$$

$$y(k_i + 3 | k_i) = CA^3x(k_i) + CA^2B\Delta u(k_i) + CAB\Delta u(k_i + 1) + CB\Delta u(k_i + 2)$$

⋮

$$y(k_i + N_p | k_i) = CA^{N_p}x(k_i) + CA^{N_p-1}B\Delta u(k_i) + CA^{N_p-2}B\Delta u(k_i + 1) + \dots + CA^{N_p-N_c}B\Delta u(k_i + N_c - 1)$$

Resumiendo las ecuaciones anteriores se tiene:

$$Y = Fx(k_i) + \phi \Delta U \quad (\text{Ec. 104})$$

donde,

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}; \quad \phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & \dots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix}$$

#### 5.4.4 Planteamiento del problema de optimización

El objetivo de la optimización es encontrar el valor de  $\Delta u$  que hace que el error entre el set-point y la salida predicha sea mínimo. Asumiendo un set-point constante para la ventana de optimización:

$$R_s^T = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \end{bmatrix} r(k_i) \quad (\text{Ec. 105})$$

La función objetivo del problema de control predictivo para un horizonte de predicción  $H_p$  es:

$$J = (R_s - Y)^T (R_s - Y) + \Delta U^T \bar{R} \Delta U \quad (\text{Ec. 106})$$

donde  $\bar{R}$  es una matriz diagonal de la forma  $r_w I_{N_{cx}N_c}$ ,  $r_w \geq 0$  y  $R_s$  es el set-point. Si el sistema no posee restricciones en las señales de control y variable de salida, la función objetivo tiene una solución explícita:

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = 0 \quad (\text{Ec. 107})$$

para el cual la señal de control óptimo es:

$$\Delta U = (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T (R_s - Fx(k_i)), \quad (\text{Ec. 108})$$

La señal de control aplicada para cada tiempo de muestreo, será el valor en el instante  $k_i$ , los demás valores serán desechados y calculados en el próximo tiempo de muestreo:

$$\Delta u(k_i) = \begin{bmatrix} \text{-----}^{N_c} \text{-----} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} (\phi^T \bar{R}_s r(k_i) - \phi^T Fx(k_i)) \quad (\text{Ec. 109})$$

donde  $K_y$  es:

$$K_y = (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T \bar{R}_s, \quad (\text{Ec. 110})$$

y  $K_{mpc}$ :

$$K_{mpc} = \begin{bmatrix} K_x & K_y \end{bmatrix} = (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T F \quad (\text{Ec. 111})$$

simplificando la Ec. 109, la señal de control óptima es:

$$\Delta u = K_y R_s - K_{mpc} x(k_i) \quad (\text{Ec. 112})$$

La Ec. 112 devuelve un vector con todos los valores futuros de la señal de control, de los cuales sólo se toma el primer valor y se desecharán los demás valores.

El diagrama de bloques para implementar el sistema de control predictivo en el espacio de estados con los valores calculados para  $K_x$  y  $K_y$  (Fig. 55).

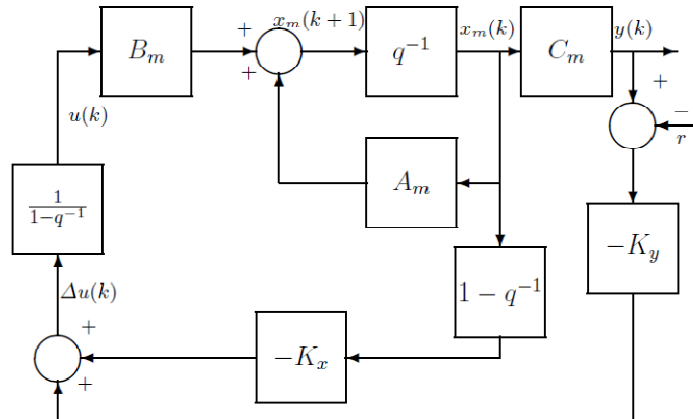


Figura 55. Diagrama de bloques del control predictivo en variables de estado

Con este modelo se obtiene el control predictivo de mínima varianza. Sin embargo, la expresión que se utiliza con más frecuencia es:

#### 5.4.5 Diseño del controlador

Para el diseño del sistema de control predictivo, se tuvieron en cuenta los siguientes parámetros:

Parámetro	Valor
Duración de la simulación ( $T$ )	60
Horizonte de predicción ( $N_p$ )	10
Horizonte de control ( $N_c$ )	3
Pesos de las salidas ( $Q$ )	1
Pesos de las entradas ( $R$ )	10

Tabla 1. Parámetros de diseño del control predictivo

Las constantes calculadas para  $K_y$  y  $K_{mpc}$ .

$$K_y = 0.2526, \quad K_{mpc} = [K_x \quad K_y] = [0.6467 \quad 0.5655 \quad 0.2526]$$

Utilizando la ecuación en el espacio de estados y los valores de  $K_y$  y  $K_{mpc}$  se calculan los polos del sistema en lazo cerrado:

$$x(k+1) = Ax(k) - BK_{mpc}x(k) + BK_y r(k) = (A - BK_{mpc})x(k) + BK_y r(k) \quad (\text{Ec. 113})$$

Para encontrar los polos del sistema, se resuelve la Ec. 114:

$$\det[\lambda I - (A - BK_{mpc})] = 0 \quad (\text{Ec. 114})$$

Los polos resultantes son:

$$\begin{bmatrix} -0.9348 \\ 0.9159 + 0.0968i \\ 0.9159 - 0.0968i \end{bmatrix}$$

De los cuales se puede deducir que el sistema es estable a lazo cerrado, ya que se encuentran por dentro del círculo de radio 1.

El sistema de control predictivo fue implementado en Simulink® incluyendo las restricciones en el actuador (Fig. 56).

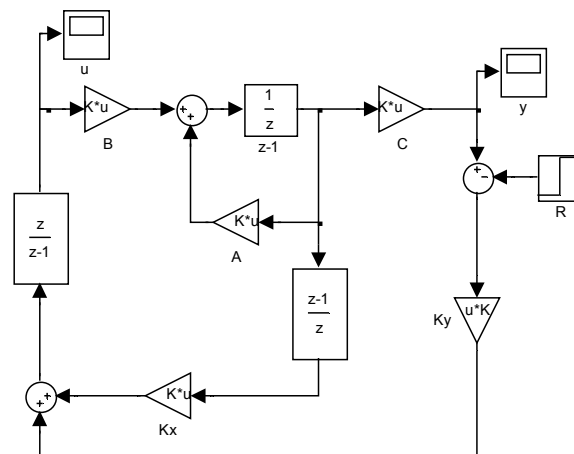


Figura 56. Sistema de control predictivo modelado en Simulink®

La respuesta escalón del sistema y la señal de control se ilustran en la Fig. 57, en la cual se muestran conjuntamente las señales para el sistema sin restricciones en el actuador y con restricciones. En el caso sin restricciones, se obtuvo la ganancia en lazo cerrado  $K_{mpc}$  que minimiza el error de seguimiento de la trayectoria de referencia, mientras que en

el caso con restricciones, se resolvió el problema de optimización lineal cuadrática mediante el método de Hildreth [43]. Se observa que se presentó un mayor sobrepico para el sistema sin restricciones.

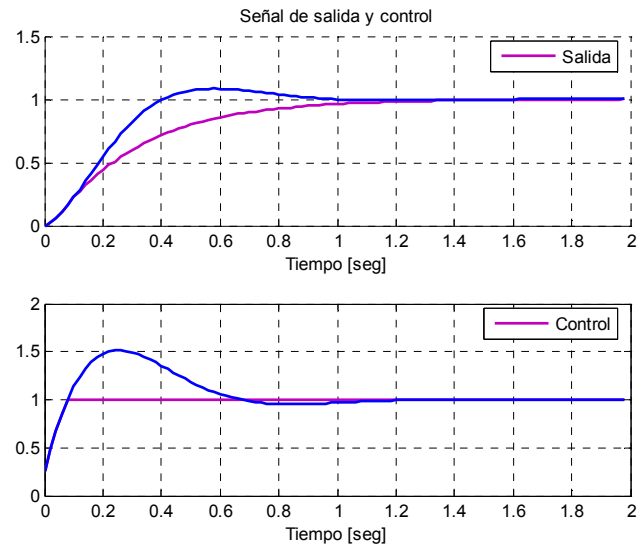


Figura 57. Sistema de control predictivo modelado en Simulink®

# CAPÍTULO 6

## 6. IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

En este capítulo se detalla la implementación de las técnicas de control PI, QFT y  $H_\infty$  que fueron aplicadas sobre el prototipo de la transmisión CVT descrito en el apartado 3.1. El esquema de control implementado se ilustra en la Fig. 58. La señal de referencia  $r$  es restada de la velocidad sensada del brazo  $\omega_{brazo}$ , la cual es tomada mediante el encoder que se encuentra montado en el tacogenerador. La transmisión CVT está acoplada a dos motores, un servomotor DC y un motor DC. La velocidad del motor AC es ingresada al diagrama de bloques en el tren de engranajes planetarios como una señal de perturbación, mientras la velocidad del servomotor DC ejerce un control sobre la relación de transmisión y por ende, sobre la velocidad salida de la CVT (velocidad del brazo). El servomotor está acoplado a un circuito de potencia (driver), que se encarga de regular el voltaje que es alimentado al servomotor mediante la variación del ancho de pulso de una señal PWM (Pulse Width Modulation). El procesamiento del algoritmo de control es realizado por un microcontrolador y la señal de control generada es enviada al driver del servomotor.

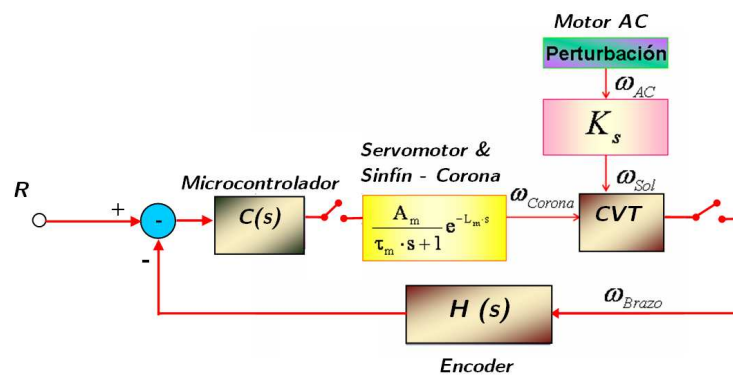


Figura 58. Esquema del sistema de control

## 6.1 Elementos del sistema de control

A continuación se da una descripción de los componentes utilizados usados en la implementación.

### 6.1.1 Sensor de velocidad

La velocidad en la transmisión CVT fue sensada mediante un encoder montado en un tacogenerador acoplado al brazo del sistema de planetarios. El sensor utilizado es un fototransistor de alta frecuencia, el cual genera una señal de pulsos debido a un disco que posee una resolución de 504 ranuras por vuelta (Fig. 59). Los pulsos generados en un período de muestreo de 20 ms es alimentada al microcontrolador para el cálculo de la velocidad del brazo. Dado que la velocidad del brazo es baja, se ha aumentado esta velocidad en un factor de 20:1 acoplando un sistema de poleas para amplificar la velocidad del tacogenerador.

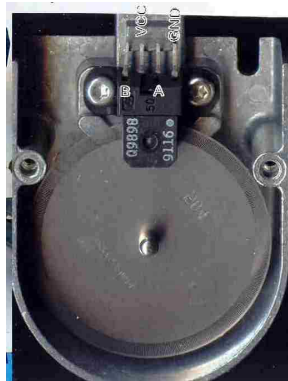


Figura 59. Encoder & tacogenerador

### 6.1.2 Tarjeta de control

Para implementación del sistema de control se optó por un sistema de control digital basado en un microcontrolador de 32 bits de la Familia de microcontroladores de ColdFire® de Freescale®. Se seleccionó este microcontrolador debido a que es una solución en 32 bits de bajo costo y muy bajo consumo, su núcleo es de tamaño reducido, posee la más baja disipación de potencia y el más amplio desempeño. Además, permite el tratamiento de datos en 32 bits del tipo entero (*integer*) para lenguajes de alto nivel, destacándose por su baja complejidad y tiempo de depuración.

La tarjeta de control desarrollada (Fig. 60) se encarga de realizar el procesamiento del algoritmo de control así como también de la señal del encoder.



Figura 60. Tarjeta de control

Las características de la tarjeta de control construida se especifican a continuación:

- Procesador: MCF51QE128, Core COLDFIRE V1
- Velocidad: 50 MHz de velocidad de procesamiento sobre una tecnología de 0.25 micrones.
- Memoria de programación: 128 KBytes en memoria FLASH, de dos ciclos de acceso, con bajo consumo de energía. El controlador de la FLASH permite acceso por especulación como técnica de reducción de tiempos y eficiencia en la ejecución del programa del usuario.
- Memoria de datos: 8 Kbytes en memoria RAM con un ciclo de acceso, implementada en la plataforma del procesador sobre un bus de alta velocidad.
- Capacidad de procesamiento: 0.95 Dhrystone por Mhz, 2.1 MIPS (*Millions of Instructions Per Second*) cuando se ejecuta en FLASH y 1.05 DMIPS (Dhrystone MIPS) cuando se ejecuta en RAM
- Puertos de propósito general: 54 pines repartidos en 7 puertos de 8 bits
- Puerto salida analógico configurable (DAC @ 10 bits) 0-5 Voltios.
- Puertos de encoder: 2 incrementales, 1 en cuadratura.
- Puertos Analógicos: 8 canales @ 8,10,12 bits, 150 ksps @ 50.33 MHz

- Puertos Digitales: 14 pines, repartidos en 3 puertos.
- Canales PWM: 2 canales de 16 bits, bufered.

## 6.2 Resultados experimentales

A continuación se exponen los resultados en tiempo real para la aplicación de los sistemas de control PI, QFT y  $H_\infty$ .

### 6.2.1 Respuesta a lazo abierto

Con el objetivo de caracterizar la transmisión, se evaluó la respuesta de la velocidad del brazo ante dos señales de entrada escalón, una para el motor AC y la otra para el motor DC, actuando de manera independiente. La primera prueba consistió en observar la respuesta en la velocidad del brazo ante un escalón en la velocidad del motor AC. Para ello se partió de un estado de reposo con ambos motores apagados y se encendió el motor AC a su voltaje nominal de 120 V. La respuesta de la transmisión se muestra en la Fig 61, donde se observa el motor AC desplaza la señal de velocidad del brazo en -70 rpm y presenta un tiempo de establecimiento de  $t_s = 2.48$  s.

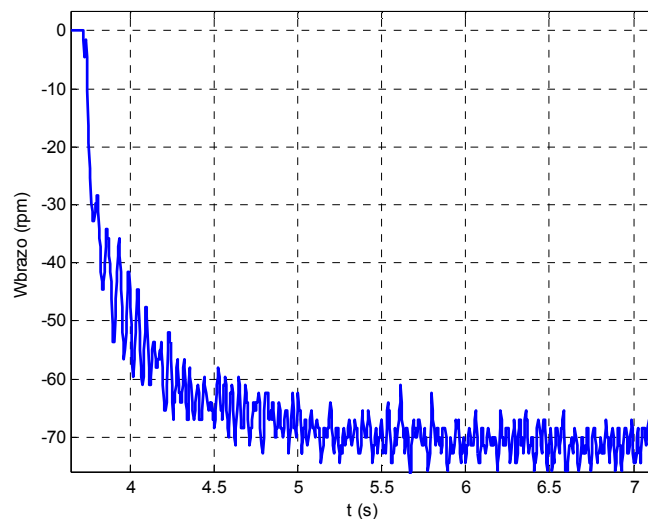


Figura 61. Respuesta de velocidad a un escalón en el motor AC

La segunda prueba consistió en observar la respuesta en lazo abierto de la transmisión a un escalón en la velocidad del motor DC alimentado a 27V, con el motor AC apagado

(Fig. 62). Se observa una velocidad en estado estacionario de  $\omega_{brazo} = 150 \text{ rpm}$  y un tiempo de establecimiento de  $t_s = 0.64 \text{ s}$ .

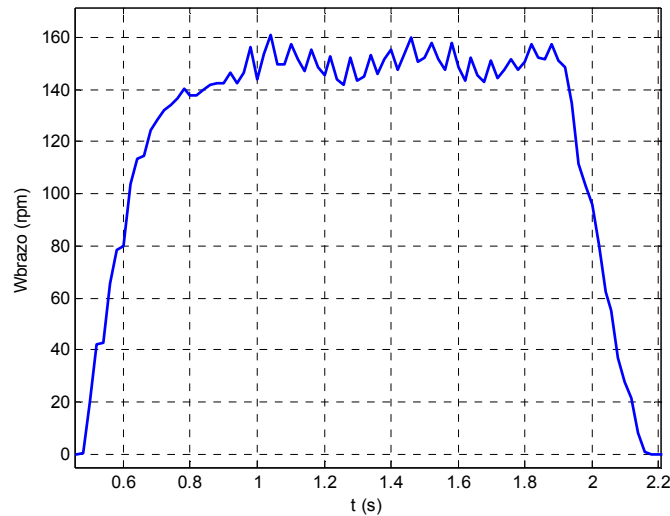


Figura 62. Respuesta de la CVT a una entrada escalón en el motor DC

Finalmente, se realizó una prueba en lazo abierto para encontrar la respuesta a un escalón en la velocidad del motor DC, pero esta vez, con el motor AC encendido (Fig. 63). La señal de velocidad va desde una velocidad positiva de 73,9 rpm hasta una velocidad negativa de -88,5 rpm. Se observó la presencia de un rizado en la señal adquirida de la velocidad del brazo. Estas oscilaciones en la señal, no son causa del ruido eléctrico sino que se deben a que el sistema de planetarios no se encuentra balanceado dinámicamente y al rozamiento entre la banda y la polea que acoplan el encoder y el brazo.

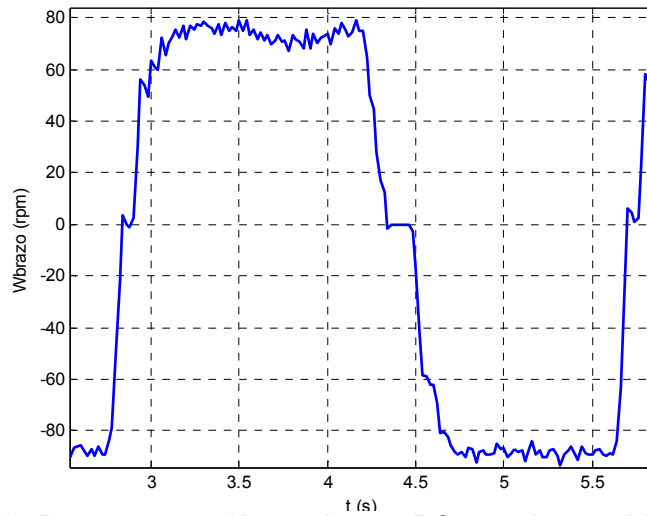


Figura 63. Respuesta escalón en el motor DC, con el motor AC encendido

Con la aplicación de la nueva transmisión variable continua, se consiguió una considerable reducción en la dinámica del sistema desde un tiempo de establecimiento con respecto al motor AC de  $t_s = 2.48$  s y un tiempo de respuesta de  $\tau = 0.5$  s, logrando un tiempo de establecimiento de apenas  $t_s = 0.64$  s y un tiempo de respuesta ( $\tau$ ) de  $\tau = 0.128$  s, tan sólo un 25% de la respuesta con respecto al motor AC.

### 6.2.2 Resultados experimentales para el controlador PI

En la Fig. 64 se muestran los resultados obtenidos para una prueba escalón de 0 a 70 rpm para el control PI. Se presenta un seguimiento adecuado de la señal de salida para el transitorio, sin embargo, una vez alcanzada la señal de referencia, el controlador no alcanza a atenuar completamente las perturbaciones presentes en el prototipo.

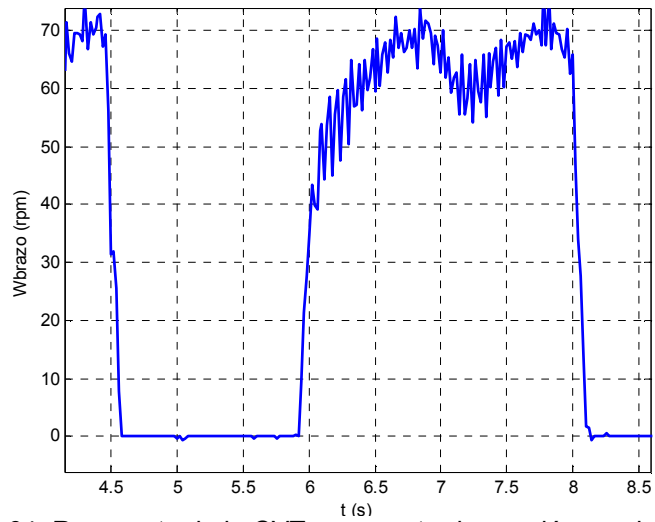


Figura 64. Respuesta de la CVT a una entrada escalón en el motor DC

La salida de la señal de control oscila entre el valor máximo (50.000) y un 50% en instantes de tiempo muy pequeños (Fig. 65).

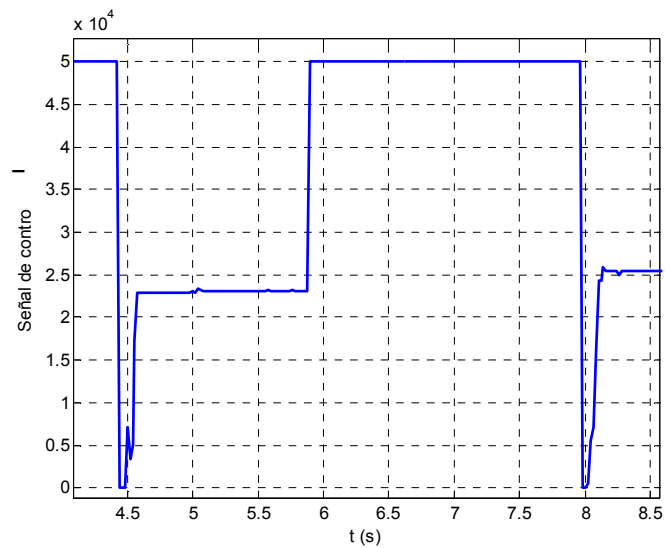


Figura 65. Señal de control PI

Con la aplicación del sistema de control PI, se ha conseguido un error de estado estacionario de cero y una respuesta de velocidad en el brazo satisfactoria, con lo que, se han alcanzado las especificaciones de diseño. Como resultado, se observó que el

controlador es estable ante el efecto de una carga constante, conservando las especificaciones de error estacionario y del tiempo de estabilización.

La respuesta del sistema de control cuando se realiza un escalón en la velocidad del motor AC se presenta en la Fig. 66, en la que se observa que el sistema trata de estabilizar la velocidad en la salida para una referencia dada cero rpm (0 rpm).

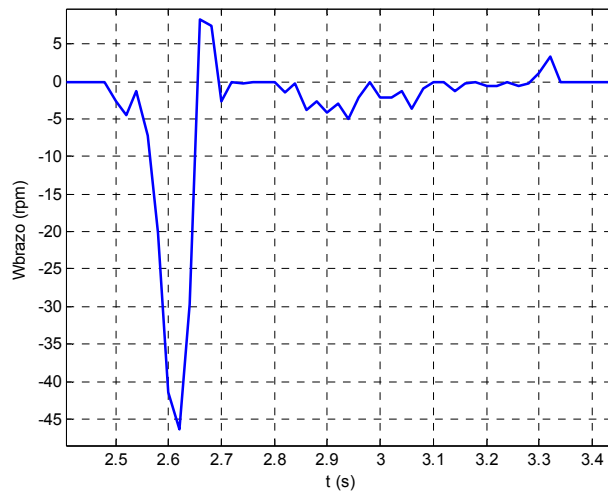


Figura 66. Perturbación en el motor AC

La salida del controlador se muestra en la Fig. 67.

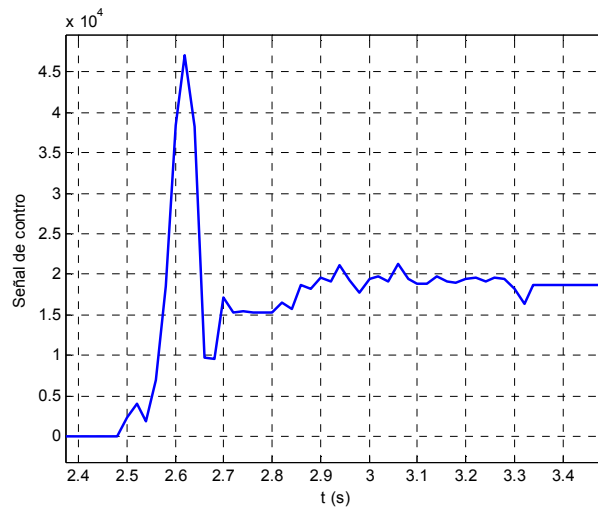


Figura 67. Señal de control ante una perturbación

De esta prueba se destaca que el sistema pudo atenuar incluso la peor perturbación posible (escalón en el motor AC), sin embargo, se observó un sobrepico de solo 45 rpm en la velocidad del brazo. También cabe resaltar la rapidez con que el sistema responde a la perturbación, que corresponde al tiempo de establecimiento con el que fue diseñado el sistema de control, de 0.35 segundos.

### 6.2.3 Resultados experimentales para el controlador QFT

Manteniendo un paralelo con respecto a la prueba del sistema de control PI, se introdujo un escalón en la señal de referencia de 70 rpm con el fin de evaluar su desempeño. La respuesta en el tiempo se muestra en la Fig. 68.

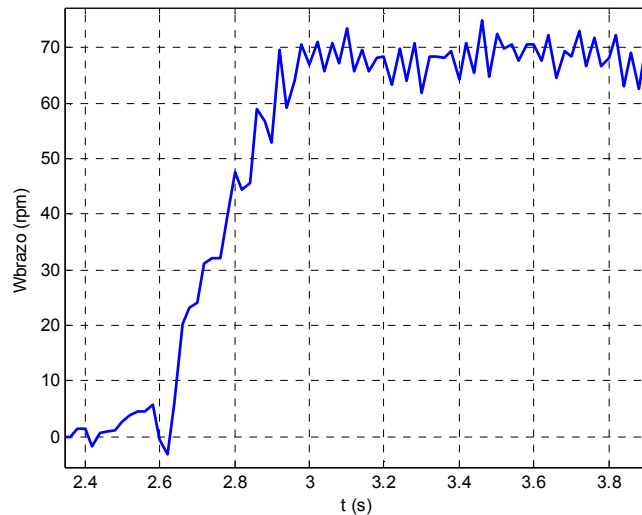


Figura 68. Respuesta escalón - control QFT

A diferencia del control PI, el controlador QFT logra reducir en mayor proporción la señal de perturbación presente en la salida y presenta una respuesta dinámica satisfactoria. La señal de control obtenida en este caso presentó un comportamiento más suave (Fig. 69).

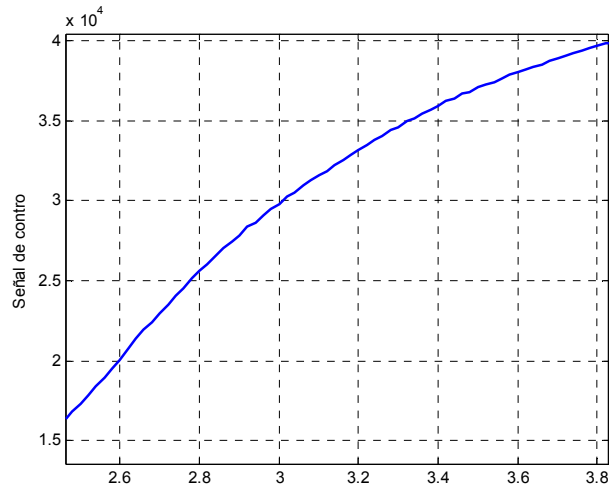


Figura 69. Señal de control QFT

Con el sistema de control QFT también se ha conseguido un error de estado estacionario de cero, atenuación a las perturbaciones y buen seguimiento de la señal de referencia. Como resultado, se observó que el controlador es estable ante el efecto de una carga constante, conservando las especificaciones de error estacionario y del tiempo de estabilización.

Al aplicar un escalón en el motor AC, el sistema responde de manera más lenta que en el caso del PI, pero, con una mayor estabilidad en la señal una vez alcanzado el punto de referencia de 0 rpm y un menor esfuerzo de control (Fig. 70).

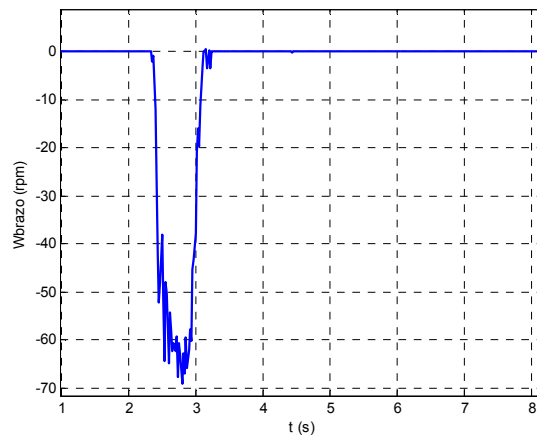


Figura 70. Respuesta a una perturbación en el motor AC

La salida del controlador se muestra en la Fig. 71.

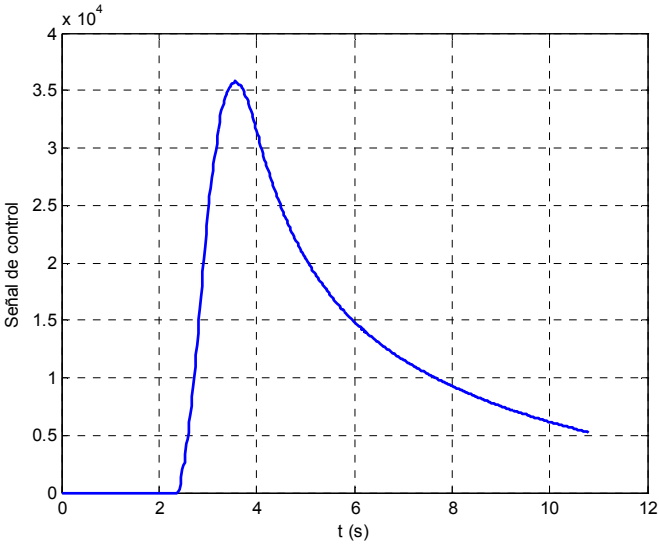


Figura 71. Esfuerzo de control ante una perturbación

# CAPÍTULO 7

## 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 7.1 Conclusiones

Como conclusión de esta tesis de maestría, se puede destacar que la eficiencia de una transmisión variable continua, se ve afectada grandemente por la selección de la estrategia de control a utilizar y por el tipo de tecnología aplicada para modificar la relación de transmisión.

En los casos en que se implementa un mecanismo hidráulico para controlar la relación de transmisión, se requieren dispositivos adicionales como bombas de alta presión, servoválvulas, reguladores de presión, entre otros; lo cual no solamente aumenta el costo de la transmisión, sino que se deteriora la eficiencia del sistema debido a las pérdidas hidráulicas inherentes a las altas presiones.

A pesar que la aplicación directa de una transmisión CVT está en sector automotriz, las pruebas estándares se realizan sobre bancos de laboratorio donde se acopla la transmisión a un motor eléctrico a la entrada y un generador a la salida. En esta tesis, se replanteó el problema de la transmisión mediante la propuesta de una solución de diseño que no se centraba en el motor a controlar, sino ejerciendo una regulación indirecta sobre un motor complementario acoplado a una transmisión CVT propuesta por J. Leyva et al.

Se trabajó sobre un prototipo de la transmisión disponible de un proyecto de grado anterior [7] y se implementaron la instrumentación y el hardware necesario para implementar la estrategia de control implementada en esta tesis. Las pruebas en lazo abierto también fueron tomadas para realizar la identificación de la planta, la cual arrojaron un modelo de primer orden, acorde con el modelado de la transmisión [35]. Se consiguió una considerable reducción en la respuesta dinámica del sistema cuando es impulsado con el motor universal AC, frente a cuando es acoplado a la transmisión CVT y controlado con el servomotor. Se consiguió una reducción del 25%, pasando de un tiempo

de establecimiento de con respecto al motor AC de  $t_s = 2.48$  s a un tiempo de establecimiento de apenas  $t_s = 0.64$  s cuando se controla mediante la CVT.

Para las pruebas en lazo cerrado, se diseñaron y simularon cuatro técnicas de control para evaluar su comportamiento sobre el prototipo: control PI, QFT,  $H_\infty$ , control predictivo.

Del controlador  $H_\infty$ , podemos concluir que dado el fuerte compromiso que existe entre la estabilidad robusta y la prestación nominal, la respuesta en el tiempo se vio afectada por éstas, ya que se hizo un poco lenta comparado con el diseño realizado con la técnica QFT, para asegurar la condición de prestación robusta tanto de incertidumbre de la planta como respuesta a perturbaciones. Con respecto al controlador QFT, se observó que el diseño está muy comprometido con las frecuencias a las cuales se evalúan los contornos, ya que éstos determinan cómo debe ser la forma de la respuesta a lazo abierto en el diagrama de Nichols y aseguran un comportamiento robusto ante variaciones.

Por el caso del control predictivo, se consiguió un error en régimen permanente nulo y un comportamiento invariable para la referencia dada. Para el caso sin restricciones, se observó un sobrepico en la señal de salida, el cual se atenuó después de realizar el proceso de optimización teniendo en cuenta las restricciones de la variable de control.

De acuerdo a los resultados encontrados en cuanto a respuesta dinámica, rechazo a perturbaciones y facilidad de implementación, se seleccionaron dos técnicas: la técnica de control PI clásica y el control QFT. Se pudo concluir que la técnica QFT es una técnica muy precisa en cuanto a metodología se refiere, a diferencia de  $H_\infty$  en la que se tiene que elegir cualitativamente dónde se desea especificar el ancho de banda de las perturbaciones, en el caso de la elección de  $W_S$  y  $W_T$ , además, el controlador resultó de un menor orden que el estimado por el  $H_\infty$  y con un tiempo de cómputo menor que el control predictivo.

Ambas técnicas de control, QFT y PI, presentaron un seguimiento adecuado de la señal de referencia con un error de estado estacionario nulo, sin embargo, el controlador PI no

alcanzó a atenuar completamente las perturbaciones presentes en el prototipo, a diferencia del control QFT, que presentó una señal más uniforme.

Para evaluar el rechazo a las perturbaciones se aplicó un set-point de cero rpm y se aplicó una señal escalón en velocidad del motor AC, el cual estaba inicialmente apagado. Se observó que el sistema controlado PI responde con mayor rapidez que el QFT, sin embargo, el control QFT una mayor estabilidad en la respuesta de la velocidad, un menor esfuerzo de control y una curva más suave en la señal de control.

La transmisión CVT implementada con el sistema de control propuesto presentó las siguientes características:

- Permite la variación continua en la velocidad en ambos sentidos de giro incluyendo velocidad nula, marcha adelante y hacia atrás
- Permite controlar de una manera sencilla, una fuente motriz con independencia del tipo y forma de energía que ésta use para impulsarse.
- Demuestra una gran linealidad en el seguimiento de la velocidad deseada.
- Reduce o simplifica la implementación de un sistema de control, mediante la disminución del esfuerzo de control, la potencia requerida en el actuador y la complejidad de los dispositivos.
- El tiempo de respuesta es independiente de la inercia que posea la fuente motriz principal, éste dependerá del diseño del sistema de control y respuesta del motor de control.

## **7.2 Recomendaciones**

Se recomienda explorar otras aplicaciones para la transmisión CVT, especialmente en el área de control numérico computarizado (CNC), donde se requiere reducir los tiempos de respuesta de los motores sin reducir la capacidad de torque.

Se propone también continuar trabajando en este proyecto de tal manera que se logre caracterizar el funcionamiento de la transmisión según las pruebas estándares de investigación, tales como la denominada TEST RIG, la cual no fue realizada debido que requería la implementación de sensores de torque y su uso excedía los recursos

disponibles para este proyecto. Así mismo, continuar con la implementación de un sistema de control embebido para la transmisión montada sobre un banco de pruebas a escala real [35].

De igual manera se recomienda incentivar el desarrollo de proyectos de grado de naturaleza interdisciplinaria, en colaboración no sólo entre las escuelas de ingenierías mecánica y electrónica, sino entre las demás escuelas y grupos de investigación consolidados en la universidad.

## REFERENCIAS

- [1] "CRISIS DEL PETRÓLEO. IMPACTO SOBRE LA ECONOMÍA." [ON LINE]. Info. Disponible en internet, 31 de enero 2011: <URL:<http://www.tecnociencia.es/especiales/petroleo/petroleo8.htm>>
- [2] BBC. 'Fricción cero', "Fronteras de la Ciencia". Documental: 1999; 45 min
- [3] Don Sherman. "GOOD GADGETS Search for mileage inspires variety of hardware". The Plain Dealer. Cleveland, Ohio: Mar 3, 2002. pg. ProQuest.
- [4] Frost & Sullivan. "Research and Markets: Over 45 Per Cent of MT Users Prefer to have Six-Speed Transmissions in their Vehicles". M2 Presswire. Coventry: Apr 24, 2007. pg. 1. ProQuest.
- [5] H Lee, H Kim. "Improvement of fuel economy by shift speed control for a metal belt continuously variable transmission". Journal of automobile engineering. ProQuest. London: 2002. Tomo 216, N° 9; pg. 741, 9 pgs.
- [6] T Kim, H Kim. "Performance of integrated engine-CVT control considering powertrain loss and CVT response lag". Journal of automobile engineering. ProQuest. London: 2002. Tomo 216, N° 7; pg. 545, 9 pgs.
- [7] J. Leyva, C. Correa & G. Bernate. "Propuesta de una nueva transmisión variable continua controlada digitalmente". Bucaramanga, 2006, 194 p. Trabajo de grado (Ingeniero Mecánico e Ingeniera Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuelas de Ingeniería Mecánica y Electrónica.
- [8] S M Savaresi, F Taroni, F Prevedi, S Bittanti. "On the design and tuning of the controllers in a power-split continuously variable transmission for agricultural tractors". Journal of automobile engineering. ProQuest. London: 2003. Tomo 217, N° 8; pg. 745.
- [9] M Deacon, R W Horrocks, M J Watts. "The development of a sub-3 litre/100 km passenger car". Journal of automobile engineering. ProQuest. London: 2000. Tomo 214, N° 8; pg. 827, 11 pgs.
- [10] H Lee, H Kim. "Improvement in fuel economy for a parallel hybrid electric vehicle by continuously variable transmission ratio control". Journal of automobile engineering. ProQuest. London: Jan 2005. Tomo 219, N° 1; pg. 43, 9 pgs.
- [11] Calero Pérez, Roque y Carta González, José Antonio. Fundamentos de mecanismos y máquinas para ingenieros. 1 ed. Aravaca, Madrid: Mc Graw Gill, 1999. 615 p. [13]
- [12] Steven Plotkin. "Examining New U.S. Fuel Economy Standards". Environment. Washington: Jul/Aug 2007. ProQuest. Tomo 49, N° 6; pg. 8, 12 pgs
- [13] BARATA, Vitor. Continuously Variable Transmission – CVT. [ON LINE]. Disponible en Internet, 31 de enero 2011: <URL:[http://cvt.com.sapo.pt/toc\\_en.htm](http://cvt.com.sapo.pt/toc_en.htm)>. [16]
- [14] Revista Gamers. "Nissan presenta el Tiida Sedán y su ofensiva autos con caja CVT". 2007. Disponible en Internet, 31 de enero 2011: <URL:[http://www.gamers.vg/noticias/18322\\_Nissan\\_presenta\\_el\\_Tiida\\_Sedan\\_y\\_su\\_ofensiva\\_autos\\_con\\_caja\\_CVT.html](http://www.gamers.vg/noticias/18322_Nissan_presenta_el_Tiida_Sedan_y_su_ofensiva_autos_con_caja_CVT.html)>.

- [15] Ironside, J.M. Stubbs, P.W.R. "Continuously variable transmission control". Vehicular Technology Conference, 1980. 30th IEEE. ; 108 - 115 pgs.
- [16] Setlur, P. Wagner, J.R. Dawson, D.M. Samuels, B. "Nonlinear control of a continuously variable transmission (CVT) for hybrid vehicle powertrains". American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001. IEEE. 1304 - 1309 pgs. vol.2
- [17] S. Garrido. "Identificación, estimación y control de sistemas no-lineales RGO". Madrid, 1999. Universidad Carlos III de Madrid. Departamento de ingeniería eléctrica, electrónica y automática.
- [18] M Deacon, C J Brace, N D Vaughan, C R Burrows, R W Horrocks. "Impact of alternative controller strategies on exhaust emissions from an integrated diesel/continuously variable transmission powertrain". Journal of automobile engineering. ProQuest.London: 1999. Tomo 213, N° 2; pg. 95, 13 pgs.
- [19] Wonoh Kim Vachtsevanos, G. "Fuzzy logic ratio control for a CVT hydraulic module". Intelligent Control, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium, 151 - 156 pgs.
- [20] Wang Hongyan, Zhou Yunshan, Zhang Boying ,Qiu Xiding . Research on integrated control strategy of CVT for passenger cars. Vehicle Electronics Conference, 1999. (IVEC '99) Proceedings of the IEEE International. 401 - 405 pgs .vol.1.
- [21] Universidad de las América Puebla. "Fundamentos de lógica Difusa". Disponible en Internet, 31 de enero 2011: <URL:www.itq.edu.mx/vidatec/espacio/aiee>.
- [22] Zhou Meilan Wang Xudong Zhou Yongqin. "Modeling and Simulation of Continuously Variable Transmission for Passenger Car". Strategic Technology, The 1st International Forum .IEEE.2006.100 - 103 pgs.
- [23] López Guillen, Maria Elena. Identificación de Sistemas: Aplicación al modelado de un motor de continua.
- [24] Ramond, G. Dumur, D. Boucher, P. "Application of direct adaptive generalized predictive control to an automatic gear box with a continuous variable transmission". Control Applications, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference.
- [25] Wang Xudong, Zhou Meilan, Zhou Yongqin. "Research on Electronic Control System of a New-type CVT". Strategic Technology, The 1st International Forum. IEEE. 2006.
- [26] E. Vidal. "Aportación de la lógica borrosa y del control H-inf a la regulación de sistemas conmutados continua-continua", Cataluña, 2003. Universidad Politécnica de Cataluña.
- [27] C. Salazar. "Simulación de técnicas de control avanzado aplicadas a casos de estudio" Quito, 2010. Escuela Politécnica Nacional. Facultad de ingeniería eléctrica y electrónica.
- [28] M. López, M. Ortega & F. Rubio. "Control robusto de un sistema de dos rotores en cuadratura", Sevilla. Universidad de Sevilla. Departamento de ingeniería de sistemas y automática.
- [29] G. Shames (1981), Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformation, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-26, No. 2, pp 301-320
- [30] M. Green & D.J.N. Limebeer (1994), Linear Robust Control. Prentice Hall.
- [31] F.R. Rubio & M.J. López (1996), Control adaptativo y robusto. Universidad de Sevilla. Sevilla (España).

- [32] M. Gil. "Síntesis de controladores robustos mediante el análisis de la compatibilidad de especificaciones e incertidumbre", Pamplona - España, 2001. Universidad Pública de Navarra. Departamento de automática y computación.
- [33] E. Vélez. "Control predictivo multipaso usando predictor difuso y optimización discreta", Venezuela, 2006. Universidad de los Andes, Mérida. Ingeniería de sistemas.
- [34] L. Wang. "Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB®" España, 2009. Editorial: Springer. 403 p.
- [35] J. Leyva & C. Correa. "Modelado, simulación, diseño y construcción de una nueva transmisión variable continua". Bucaramanga, 2006, 126 p. Trabajo de grado (Magister en Ingeniería Electrónica). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuelas de Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones.
- [36] F. Espinosa, J. García & E. López. "Modelado de un motor DC. Diseño, simulación y construcción del sistema de control de velocidad", 1996. Universidad de Alcalá de Henares.
- [37] "Herramientas de MATLAB para el Control Automático". Disponible en Internet, 31 de enero de 2011 URL < <http://www.bbfactory.it/content/01/toolboxes.html>
- [38] M. Alanbari, R. de la Sen & A. Avello. "Selección de Pesos de Prestación y Estabilidad para Control Robusto", Universidad Politécnica de Madrid.
- [39] Chait Y. and Yaniv O., (1993). "Multi-input/single-output computer-aided control design using the Quantitative Feedback Theory", *Int. J- Robust & Non-linear Control*, 3, pp. 47-54.
- [40] F.R. Rubio & M.J. López (1996), Control adaptativo y robusto. Universidad de Sevilla. Sevilla (España).
- [41] R. Salcedo & R. Correa. "SICOMPC: Simulador para control predictivo basado en modelos", Bucaramanga, 2007. Universidad Industrial de Santander.
- [42] V. Miranda & C. Prada. "Controlador predictivo explícito de un evaporador", España. Universidad de Valladolid. Dpto. de Sistemas y Automática.
- [43] D. Luenberger. "Linear and Nonlinear Programming", EEUU, 1989. 2 ed. Editorial: Addison - Wesley.