

**ESTUDIO DE LA DISPERSIÓN Y PÉRDIDAS DEPENDIENTES DE LA  
FRECUENCIA EN UN MEDIO DISPERSIVO POR TRANSFORMADA DE  
FOURIER FRACCIONARIA DE ORDEN COMPLEJO**

DAYAN ORLANDO ASELAS ACEVEDO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2024

**ESTUDIO DE LA DISPERSIÓN Y PÉRDIDAS DEPENDIENTES DE LA  
FRECUENCIA EN UN MEDIO DISPERSIVO POR TRANSFORMADA DE  
FOURIER FRACCIONARIA DE ORDEN COMPLEJO**

DAYAN ORLANDO ASELAS ACEVEDO

Trabajo de Grado para optar al título de  
Físico

Directora:  
Dra. Zandra Yoana Lizarazo Mejía

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2024

## **DEDICATORIA**

A mi madre, padre y hermana, por su apoyo y confianza interminable.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco profundamente a mi madre Lyadira, a mi padre Orlando y a mi hermana Andrea, quienes, a pesar de las circunstancias, siempre confiaron en mí y me brindaron su amor y apoyo incondicional. A Johana, un pilar en los momentos difíciles que inevitablemente debemos atravesar, gracias por tantos cafés y por tu constante apoyo. A toda mi familia y amigos, que de una u otra manera han contribuido a mi vida académica y personal, les estoy eternamente agradecido.

A mi directora Zandra, muchas gracias por guiarme de la mejor manera posible en este camino de la ciencia. Al profesor Rafael, y a todos los profesores y personas que me han aportado en estos años de formación, muchas gracias.

## CONTENIDO

	pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>16</b>
<b>1. Objetivos</b>	<b>21</b>
1.1. Objetivo General	21
1.2. Objetivos específicos	21
<b>2. Marco teórico</b>	<b>22</b>
2.1. Ecuaciones de Maxwell en la materia	22
2.2. Dispersión cromática y pérdidas	24
2.3. Transformada de Fourier fraccionaria de orden complejo	28
2.4. Dispersión y pérdidas de paquetes de ondas Gaussianos	30
2.5. Propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria	32
<b>3. Resultados</b>	<b>35</b>
3.1. Descripción del algoritmo $TFFC$	35
3.1.1. Función $TFFC$	36
3.1.2. Función $TFFrgen\_complex$	37
3.1.3. Función $TFFdgen2(f, sin2)$	38
3.2. Validación del Algoritmo	38
3.2.1. Linealidad	38
3.2.2. Teorema de Parseval	40
3.2.3. Teorema del corrimiento	41
3.2.4. Teorema de la modulación	43
3.2.5. Teorema del escalamiento	45

3.2.6. Aditividad del orden del operador	47
3.2.7. Inversa	49
3.3. Comportamiento del algoritmo con diferentes órdenes complejos	51
3.3.1. Ejemplo 1	51
3.3.2. Ejemplo 2	52
3.3.3. Ejemplo 3	53
3.3.4. Ejemplo 4.	54
3.4. Comportamiento de la amplitud para diferentes órdenes complejos	55
3.5. Comparación del algoritmo con la solución analítica	56
3.6. Respuesta del algoritmo a diferentes parámetros físicos	59
3.7. Relación entre el orden de la transformada y la propagación de la onda	60
3.8. Discusión de Resultados	62
<b>4. CONCLUSIONES</b>	<b>65</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>66</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>71</b>
4.0.1. Compensación de un desplazamiento por modulación de fase	71
4.0.2. Interpolación	72
4.0.3. Transformada discreta de Fourier fraccional	74

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Las funciones utilizadas son $g(x) = \exp[x^2/2]$ y $r(x)$ es una función rectángulo que toma el valor de 1 cuando $x$ está en el intervalo $[1, 3]$ , y toma el valor de 0 en cualquier otro caso.	39
Figura 2. Las funciones utilizadas son $c(x) = \sin [2\pi (f_0x + \frac{1}{2}kx^2)]$ , donde $k = \frac{f_1-f_0}{T}$ y la misma función rectángulo $r(x)$ mencionada en la figura anterior 1.	39
Figura 3. Las funciones utilizadas son $f(x) = \sin(2\pi x)$ , y la misma función $g(x)$ mencionada en 1.	40
Figura 4. La función utilizada es $s(x) = \sin(x)$ y los desplazamientos se muestran para cada curva. El orden complejo utilizado es $a = 1.8 + 0.04i$ .	42
Figura 5. La función utilizada es $g(x)$ mencionada en la figura 1. El orden complejo utilizado es $a = 1.1 + 0.6i$ .	42
Figura 6. La función $r(x)$ se define como 1 en el intervalo $[-1, 1]$ y 0 fuera de este rango. Los desplazamientos se muestran para cada curva. El orden complejo utilizado es $a = -1.3 - 0.025i$ .	43
Figura 7. La función utilizada es $s(x) = \sin(x)$ y los parámetros de modulación se muestran para cada curva. El orden complejo utilizado es $a = 0.1 + 0.008i$ .	44
Figura 8. La función utilizada es $g(x)$ definida en la figura 1, los parámetros de modulación se muestran para cada curva. El orden complejo utilizado es $a = -1.9 - 0.05i$ .	44

- Figura 9. En este caso se usa la función  $r(x)$  definida en la figura 6 y los parámetros de modulación se muestran para cada curva. El orden complejo utilizado es  $a = 0.07 + 0.0025i$ . 45
- Figura 10. La figura muestra la función  $s(x)$  junto con los parámetros de escalamiento para cada curva. El orden complejo utilizado es  $a = 0.35 + 0.04i$ . 46
- Figura 11. La figura muestra la función  $g(x)$  junto con los parámetros de escalamiento para cada curva. El orden complejo utilizado es  $a = -1.21 - 0.031i$ . 46
- Figura 12. La figura muestra la función  $r(x)$  definida en la figura 6 junto con los parámetros de escalamiento para cada curva. El orden complejo utilizado es  $a = 1.8 - 0.007i$ . 47
- Figura 13. La función utilizada es  $s(x) = \sin(x)$ . 48
- Figura 14. La función utilizada es  $g(x) = \exp[50x^2]$ . 48
- Figura 15. La función rectángulo utilizada es  $r(x)$ , toma el valor de 1 cuando  $x$  está en el intervalo  $[-1, 1]$ , y toma el valor de 0 en cualquier otro caso. 49
- Figura 16. La función utilizada es  $s(x)$ . 50
- Figura 17. La función utilizada es  $g(x)$ . 50
- Figura 18. La función rectángulo utilizada es  $r(x)$ . 50
- Figura 19. Las dos imágenes a la izquierda muestran la variación de la parte imaginaria del orden con un incremento de 0.1 mientras que en las dos imágenes de la derecha, el incremento es de 0.01. 52
- Figura 20. Las dos imágenes a la izquierda muestran la variación de la parte imaginaria del orden con un incremento de 0.1 mientras que en las dos imágenes de la derecha, el incremento es de 0.01. 53
- Figura 21. Las dos imágenes a la izquierda muestran la variación de la parte imaginaria del orden con un incremento de 0.1 mientras que en las dos imágenes de la derecha, el incremento es de 0.01. 54

Figura 22. Las dos imágenes a la izquierda muestran la variación de la parte imaginaria del orden con un incremento de 0.1 mientras que en las dos imágenes de la derecha, el incremento es de 0.01.	55
Figura 23. La variación de la parte imaginaria del orden es de 0.01, la amplitud se encuentra entre 0 y 1. Cada color equivale a distintos valores de la parte real del orden, como se muestra en la parte superior derecha.	56
Figura 24. La curva azul es la transformada de Fourier fraccionaria de una función Gaussiana calculada de forma analítica 47. La curva roja es la misma transformada calculada por el algoritmo <i>TFFC</i> .	57
Figura 25. La curva azul es la transformada de Fourier fraccionaria de una función Gaussiana calculada de forma analítica 47. La curva roja es la misma transformada calculada por el algoritmo <i>TFFC</i> .	58
Figura 26. Parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) de la transformada.	58
Figura 27. Cada curva se asocia a un orden distinto que está relacionado con los parámetros físicos, tal como se ilustra en la tabla 8.	59
Figura 28. Variación de la parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) del orden ( $a$ ) y su influencia en el ensanchamiento y la amplitud de la función $s(x)$ .	61
Figura 29. Variación de la parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) del orden ( $a$ ) y su influencia en el ensanchamiento y la amplitud de la función $g(x)$ .	61
Figura 30. Variación de la parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) del orden ( $a$ ) y su influencia en el ensanchamiento y la amplitud de la función $r(x)$ .	62

- Figura 31. Función muestreada a una tasa adecuada. Tomado de P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. “Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional”. En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004). 73
- Figura 32. Colección de “espectros fraccionales” para el caso  $\Delta_x = \frac{\sin \alpha}{\zeta}$ . Tomado de P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. “Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional”. En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004). 73
- Figura 33. Función de fase que compensa los desplazamientos. Tomado de P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. “Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional”. En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004). 74
- Figura 34. Aditividad de los ordenes fraccionales. Tomado de P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. “Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional”. En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004). 75
- Figura 35. Espectro no reconstruido completamente (muy alta tasa de muestreo). Tomado de P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. “Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional”. En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004). 76
- Figura 36. Espectro no reconstruido completamente (rata de muestreo deficiente). Tomado de P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. “Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional”. En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004). 76

## LISTA DE TABLAS

	<b>pág.</b>
Tabla 1. Desviación cuadrática media con la propiedad de linealidad.	40
Tabla 2. Valor de la integral para diversas funciones con distintos valores del orden de la transformada.	41
Tabla 3. Desviación cuadrática media con la propiedad de corrimiento.	43
Tabla 4. Desviación cuadrática media con la propiedad de modulación.	45
Tabla 5. Desviación cuadrática media con la propiedad de escalamiento.	47
Tabla 6. Desviación cuadrática media con la propiedad de aditividad del orden.	49
Tabla 7. Desviación cuadrática media de aplicar el orden inverso del operador.	51
Tabla 8. Valores del orden complejo a partir de los parámetros físicos.	60

## ANEXOS

	<b>pág.</b>
Anexo A. Teorema del muestreo fraccionario.	71
Anexo B. Algoritmo en Scilab.	78

## GLOSARIO

**ALGORITMO** Conjunto de instrucciones o reglas definidas para realizar un cálculo o resolver un problema, en este caso, para calcular la transformada de Fourier fraccionaria de orden complejo.

**DISPERSIÓN CROMÁTICA** Fenómeno donde diferentes frecuencias de una onda se propagan a diferentes velocidades en un medio, causando que el paquete de ondas se disperse.

**MEDIOS DISPERSIVOS** Materiales o entornos donde la velocidad de las ondas varía con la frecuencia, causando dispersión del paquete de ondas.

**PÉRDIDAS DEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA** Modificación de la onda que varía con la frecuencia, afectando la propagación del paquete de ondas.

**TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONARIA** Generalización de la transformada de Fourier que permite el análisis de señales con un orden fraccionario.

**SCILAB** Software de cálculo numérico utilizado para desarrollar algoritmos y realizar simulaciones matemáticas, empleado en este estudio para calcular la transformada de Fourier fraccionaria de orden complejo.

## RESUMEN

**TÍTULO:** ESTUDIO DE LA DISPERSIÓN Y PÉRDIDAS DEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA EN UN MEDIO DISPERSIVO POR TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONARIA DE ORDEN COMPLEJO. \*

**AUTOR:** DAYAN ORLANDO ASELAS ACEVEDO \*\*

**PALABRAS CLAVE:** TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONARIA DE ORDEN COMPLEJO, PÉRDIDAS DEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA, DISPERSIÓN CROMÁTICA.

### DESCRIPCIÓN:

Este estudio se centra en la propagación de paquetes de ondas a través de medios dispersivos, donde se toman en cuenta: la dispersión cromática y las pérdidas dependientes de la frecuencia. La comprensión de estos fenómenos es esencial para una descripción más completa de la evolución temporal del paquete de ondas. Además se muestra que al incluir las pérdidas, la propagación se puede describir mediante una integral de Fresnel de variable compleja, y esta expresión puede ser escrita como una transformada de Fourier fraccionaria de orden complejo. Es crucial destacar que tanto la dispersión cromática como las pérdidas dependientes de la frecuencia actúan como limitantes, restringiendo la capacidad de transmisión de datos a través del medio. Con base en los resultados teóricos, en este trabajo se desarrolla un algoritmo en Scilab que calcula esta transformada, brindando una herramienta práctica para analizar y comprender cómo estos factores influyen en la propagación de paquetes de ondas en medios dispersivos con pérdidas. Asimismo, se analiza el impacto de incluir las pérdidas en la propagación y se verifica que el algoritmo cumpla con algunas propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria. Además, se realiza un barrido de la parte imaginaria del orden manteniendo constante la parte real, y se contrasta el rendimiento del algoritmo con la solución analítica de una función Gaussiana con datos reales. Finalmente, se explora la relación entre el orden de la transformada y la propagación del paquete de ondas.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física.

## ABSTRACT

**TITLE:** STUDY OF DISPERSION AND FREQUENCY DEPENDENT LOSSES IN A DISPERSIVE MEDIUM BY COMPLEX ORDER FRACTIONARY FOURIER TRANSFORM. \*

**AUTHOR:** DAYAN ORLANDO ASELAS ACEVEDO \*\*

**KEYWORDS:** COMPLEX ORDER FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM, FREQUENCY DEPENDENT LOSSES, CHROMATIC DISPERSION.

**DESCRIPTION:**

This study focuses on the propagation of wave packets through dispersive media, where chromatic dispersion and frequency-dependent losses are taken into account. Understanding these phenomena is essential for a more complete description of the temporal evolution of the wave packet. Furthermore, it is shown that by including the losses, the propagation can be described by a complex variable Fresnel integral, and this expression can be written as a fractional Fourier transform of complex order. It is crucial to highlight that both chromatic dispersion and frequency-dependent losses act as limits, restricting the capacity of data transmission through the medium. Based on the theoretical results, in this work an algorithm is developed in Scilab that calculates this transform, providing a practical tool to analyze and understand how these factors influence the propagation of wave packets in lossy dispersive media. Likewise, the impact of including losses in the propagation is analyzed and it is verified that the algorithm complies with some properties of the fractional Fourier transform. Furthermore, a sweep of the imaginary part of the order is performed, keeping the real part constant, and the performance of the algorithm is contrasted with the analytical solution of a Gaussian function with real data. Finally, the relationship between transform order and wavepacket propagation is explored.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física.

## INTRODUCCIÓN

El estudio de la propagación de un paquete de ondas a través de un medio dispersivo ha sido objeto de amplia investigación, con diversas descripciones matemáticas del fenómeno y su impacto en los canales de comunicación. S. Ryu. "Change of field spectrum of signal light due to fibre nonlinearities and chromatic dispersion in long-haul coherent systems using in-line optical amplifiers". En: *Electronics Letters* 28.24 (1992), págs. 2212-2213. DOI: 10.1049/e1:19921421; Mark A Foster, Kevin D Moll y Alexander L Gaeta. "Optimal waveguide dimensions for nonlinear interactions". En: *Optics Express* 12.13 (2004), págs. 2880-2887; JC Knight et al. "Anomalous dispersion in photonic crystal fiber". En: *IEEE photonics technology letters* 12.7 (2000), págs. 807-809; D Mogilevtsev, Tim A Birks y P St J Russell. "Group-velocity dispersion in photonic crystal fibers". En: *Optics letters* 23.21 (1998), págs. 1662-1664; WH Reeves et al. "Transformation and control of ultra-short pulses in dispersion-engineered photonic crystal fibres". En: *Nature* 424.6948 (2003), pág. 511. Este conocimiento ha impulsado el desarrollo de dispositivos operativos en ventanas óptimas de dispersión casi despreciable y ha fomentado la creación de tecnologías para aprovechar los efectos ópticos no lineales en el régimen de dispersión anómala, como la generación de solitones y dispositivos nanofotónicos para aplicaciones en chips, junto con diversas técnicas como la compresión de pulsos y el mezclado de ondas. Linn F Mollenauer, Roger H Stolen y James P Gordon. "Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers". En: *Physical Review Letters* 45.13 (1980), pág. 1095; Amy C Turner et al. "Tailored anomalous group-velocity dispersion in silicon channel waveguides". En: *Optics express* 14.10 (2006), págs. 4357-4362; M Notomi et al. "Extremely Large Group-Velocity Dispersion of Line-Defect Waveguides in Photonic Crystal Slabs". En: 87 (ene. de 2001); Jinendra K. Ranka, Robert S. Windeler y Andrew J. Stentz. "Visible continuum ge-

neration in air–silica microstructure optical fibers with anomalous dispersion at 800 nm”. En: *Opt. Lett.* 25.1 (2000), págs. 25-27. DOI: 10.1364/OL.25.000025; Jay E Sharping et al. “Four-wave mixing in microstructure fiber”. En: *Optics letters* 26.14 (2001), págs. 1048-1050; Q Lin, Oskar J Painter y Govind P Agrawal. “Nonlinear optical phenomena in silicon waveguides: modeling and applications”. En: *Optics express* 15.25 (2007), págs. 16604-16644; Hiroki Nakatsuka, D Grischkowsky y AC Balant. “Nonlinear picosecond-pulse propagation through optical fibers with positive group velocity dispersion”. En: *Physical Review Letters* 47.13 (1981), pág. 910; Kazuro Kikuchi. “Enhancement of optical-amplifier noise by nonlinear refractive index and group-velocity dispersion of optical fibers”. En: *IEEE photonics technology letters* 5.2 (1993), págs. 221-223.

Sin embargo, cuando es necesario trabajar fuera de la ventana óptima para las telecomunicaciones, no basta con considerar únicamente la dispersión cromática Kurt E Oughstun y Constantinos M Balictsis. “Gaussian pulse propagation in a dispersive, absorbing dielectric”. En: *Physical review letters* 77.11 (1996), pág. 2210, en esta dinámica compleja, es esencial abordar las pérdidas que varían con la frecuencia, un aspecto fundamental derivado de las relaciones de Kramers-Kronig. Por tanto, resulta crucial disponer de herramientas que describan cómo evoluciona temporalmente una señal afectada tanto por la dispersión cromática como por las pérdidas que dependen de la frecuencia. Esta consideración adquiere gran importancia en trabajos donde las pérdidas son relevantes, como la geofísica acústica H. Zhou Y. Wang X. Ma e Y. Chen. “ $L_{1-2}$  minimization for exact and stable seismic attenuation compensation”. En: *Geophys. J. Int.* 213 (2018), págs. 1629-1646, los tejidos blandos T. Szabo K. J. Parker y S. Holm. “Towards a consensus on rheological models for elastography in soft tissues”. En: *IPEM. Phys. Med. Biol* (2019), sistemas acústicos Ankit Srivastava. “Causality and passivity: From electromagnetism and network theory to metamaterials”. En: *Elsevier* 154 (2021), entre otros.

Como es ampliamente conocido, para analizar la evolución temporal de un paquete de ondas en su propagación a través de un medio dispersivo, se emplea la analogía entre la dispersión cromática y la difracción de Fresnel P. Pellat-Finet, Z. Lizarazo y R. Torres. "On the analogy between Fresnel diffraction and dispersion in transmission lines and some of its applications". En; Z. Lizarazo et al. "Dispersión-Pérdidas en líneas de transmisión y la transformación de Fourier fraccionaria". En: *A someterse en 7th Ibero-American Conference on Optics (RIAO); 10th Latin-American Meeting on Optics, Lasers and Applications (OPTILAS)*. 2010; G. Bonnet. "Au-delà d'une vitesse de groupe: vitesse d'onde et vitesse de signal. Première partie: l'opérateur vitesse de groupe en l'absence d'affaiblissement". En: 38 (1983), págs. 345-366. De esta manera, es posible describir la propagación del paquete de ondas mediante una transformada de Fourier fraccionaria de orden real Bonnet, "Au-delà d'une vitesse de groupe: vitesse d'onde et vitesse de signal. Première partie: l'opérateur vitesse de groupe en l'absence d'affaiblissement"; G. Bonnet. "déformation de l'amplitude et influence de l'affaiblissement". En: 38 (1983), págs. 473-487; P. Pellat-Finet. "Transfert du champ électromagnétique par diffraction et transformation de Fourier fractionnaire". En: *C. R. Acad. Sci* 320 (1995), págs. 91-97; P. Pellat-Finet y G. Bonnet. "Fractional order Fourier transform and Fourier optics". En: *Opt. Comm* 111 (1994), págs. 141-154. DOI: 10.1016/0030-4018(94)90154-6; P. Pellat-Finet. *Optique de Fourier. Théorie métaxiale et fractionnaire*. Paris: Springer, 2009. Basándonos en los resultados teóricos presentados por Lizarazo et al., "Dispersión-Pérdidas en líneas de transmisión y la transformación de Fourier fraccionaria", donde se muestra que al incorporar las pérdidas dependientes de la frecuencia en el tratamiento, la propagación del paquete de ondas se expresa ahora a través de una integral de Fresnel de variable compleja, que puede ser escrita como una transformada de Fourier fraccionaria de orden complejo (*TFFC*). Esta formulación ha sido previamente emplea-

da en la descripción de sistemas ópticos complejos del tipo  $ABCD$ , en el análisis de lentes complejas, y en la investigación de resonadores ópticos Changtao Wang y Baida Lü. "Implementation of complex-order Fourier transforms in complex ABCD optical systems". En: *Optics communications* 203.1 (2002), págs. 61-66, L. M. Bernardo y O.D.D. Soares. "Optical fractional Fourier transform with complex orders". En: *Appl. Opt* 35 (1996), págs. 3163-3166, L. M. Bernardo. "Talbot self-imaging in Fractional Fourier plane of real and complex orders". En: *Opt. Comm.* 140 (1997), págs. 195-198, Aleksandr Aleksandrovich Maljutin. "Complex-order fractional Fourier transforms in optical schemes with Gaussian apertures". En: *Quantum Electronics* 34.10 (2004), págs. 960-964, Chun-Ching Shih. "Optical interpretation of a complex-order Fourier transform". En: *Optics letters* 20.10 (1995), págs. 1178-1180, P. Pellat-Finet y É. Fogret. "Complex order fractional Fourier transforms and their use in diffraction theory. Application to optical resonators". En: *Opt. Comm.* 258 (2006), págs. 103-113. DOI: 10.1016/j.optcom.2005.07.072. De esta manera, se logra la representación completa de la propagación del campo mediante el uso del operador  $TFFC$ .

Basándonos en esta perspectiva, hemos desarrollado un algoritmo en Scilab para calcular la transformada de Fourier fraccionaria de orden complejo. Para validar su funcionamiento, se prueba el cumplimiento de algunas propiedades de este operador. Además, se realiza un barrido de la parte imaginaria del orden manteniendo constante la parte real, y se analiza cómo varía la amplitud de la transformada con el aumento de la parte imaginaria del orden. También se verifica su desempeño con la solución analítica de una función gaussiana, utilizando diferentes valores de los parámetros físicos para un medio específico. Seguidamente, se analiza el efecto de variar el orden de la  $TFFC$  en distintas funciones, observando cómo la variación se relaciona con la propagación del campo en un medio dispersivo con pérdidas. En

última instancia, este algoritmo proporciona una herramienta práctica para analizar y comprender la evolución temporal de los paquetes de ondas en medios dispersivos afectados por fenómenos de dispersión cromática y pérdidas dependientes de la frecuencia.

## 1. Objetivos

### 1.1. Objetivo General

El objetivo general de esta investigación es estudiar el comportamiento de la dispersión cromática, incluyendo las pérdidas, en un medio dispersivo mediante la Transformada de Fourier Fraccionaria de Orden Complejo (*TFFC*). Para alcanzar este objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos:

### 1.2. Objetivos específicos

1. Desarrollar un algoritmo que calcule la transformada de Fourier fraccionaria de orden complejo (*TFFC*), proporcionando una herramienta práctica para analizar paquetes de ondas en entornos dispersivos con pérdidas.
2. Verificar que el algoritmo para la *TFFC* cumpla con las propiedades fundamentales de este operador.
3. Calcular la *TFFC* para una función Gaussiana mediante el algoritmo desarrollado y comparar los resultados con los cálculos analíticos existentes, validando así la precisión del algoritmo.
4. Observar el efecto de la variación en el orden de la *TFFC* sobre una función Gaussiana, analizando estos resultados respecto a la propagación del campo.

## 2. Marco teórico

### 2.1. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Aquí se tratarán medios isótropos, bajo condiciones tales que los efectos no lineales pueden ser despreciados, es decir, se tomarán intensidades de campo eléctrico por debajo del umbral no lineal, entonces se tiene:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, w) = \epsilon_o \chi_e(\mathbf{r}, w) \mathbf{E}(\mathbf{r}, w), \quad (1)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, w) = \chi_m(\mathbf{r}, w) \mathbf{H}(\mathbf{r}, w). \quad (2)$$

Se les denomina medios lineales porque la polarización  $\mathbf{P}$  y la magnetización  $\mathbf{M}$  son proporcionales al campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y a la intensidad del campo magnético  $\mathbf{H}$  respectivamente. Además, son isótropos porque la susceptibilidad eléctrica  $\chi_e$  y magnética  $\chi_m$  no son tensores, en este caso son campos escalares. De esto se obtiene:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}, \quad (4)$$

dónde  $\mathbf{D}$  es el desplazamiento eléctrico. Además, la permitividad eléctrica del medio esta dada por la relación  $\epsilon = \epsilon_o(1 + \chi_e)$  y la permeabilidad magnética es  $\mu = \mu_o(1 - \chi_m)$ .

Considerando medios homogéneos y un régimen estacionario, la permitividad del

medio ( $\epsilon$ ) es independiente del tiempo, las ecuaciones de Maxwell toman la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon}, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_{libre} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (8)$$

Finalmente, tomando el rotacional de la ecuación 7 se encuentra

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right), \quad (9)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu \mathbf{J}_{libre} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (10)$$

usando la ecuación 5 y la ley de Ohm

$$\mathbf{J}_{libre} = \sigma \mathbf{E}, \quad (11)$$

se obtiene:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla \left( \frac{\rho_{libre}}{\epsilon} \right) + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \left( \frac{\rho_{libre}}{\epsilon} \right). \quad (13)$$

De forma análoga se realiza para el campo magnético

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (14)$$

Estas dos ecuaciones constituyen las ecuaciones de onda electromagnéticas en los medios transparentes, lineales, isótropos y homogéneos; en condiciones de estacionariedad.

## 2.2. Dispersión cromática y pérdidas

En esta sección, se abordará el análisis de la propagación del campo en un medio dispersivo, con base en la teoría metaxial, donde se toma en cuenta tanto la dispersión cromática Pellat-Finet, *Optique de Fourier. Théorie métaxiale et fractionnaire*, que depende de  $\beta_2$ , como las pérdidas dependientes de la frecuencia. Estos resultados, que aún no han sido publicados, se exploran en detalle en Lizarazo et al., “Dispersión-Pérdidas en líneas de transmisión y la transformación de Fourier fraccionaria”.

La amplitud del campo eléctrico, luego que se ha propagado un tiempo  $t$  y una distancia  $z$  en una línea de transmisión, se escribe

$$E_z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e_z(\nu) e^{i(2\pi\nu t)} d\nu, \quad (15)$$

dónde  $\nu$  es la frecuencia de la onda,  $e_z$  es la componente espectral a la distancia  $z$ , la cuál se relaciona con la misma a una distancia  $z = 0$ , así

$$e_z(\nu) = e_0(\nu) e^{-ik(\nu)z}. \quad (16)$$

En este caso el número de onda  $k(\nu)$  es complejo,

$$k(\nu) = \beta(\nu) - \frac{1}{2}\gamma(\nu), \quad (17)$$

aquí  $\beta(\nu)$  es la constante de propagación y  $\gamma(\nu)$  corresponde a la constante de atenuación. Además, considerando que este tratamiento se va hacer para paquetes de ondas de espectro estrecho, se puede hacer un desarrollo en series de Taylor alrededor de una frecuencia arbitraria  $\tilde{\nu}$ :

$$\beta(\nu) = \beta_0 + \beta_1(\nu - \tilde{\nu}) + \frac{\beta_2}{2}(\nu - \tilde{\nu})^2 + \dots \quad (18)$$

$$\gamma(\nu) = \gamma_0 + \gamma_1(\nu - \tilde{\nu}) + \frac{\gamma_2}{2}(\nu - \tilde{\nu})^2 + \dots \quad (19)$$

dónde  $\gamma_0 = \gamma(\tilde{\nu})$ ,  $\gamma_1 = \frac{d\gamma}{d\nu}|_{\tilde{\nu}}$ ,  $\gamma_2 = \frac{d^2\gamma}{d\nu^2}|_{\tilde{\nu}}$ , de forma análoga es para  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Y donde  $\beta_2$  es el responsable de la dispersión cromática Pellat-Finet, *Optique de Fourier. Théorie métrixiale et fractionnaire*.

Reemplazando (18) y (19) en la amplitud del campo a la distancia  $z$

$$E_z(t) = \int_{\mathbb{R}} e_0(\nu) e^{i2\pi\nu t} e^{-i\beta(\nu)z} e^{-\gamma(\nu)z/2} d\nu, \quad (20)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} E_z(t) = & \int_{\mathbb{R}} e_0(\nu) \exp[2i\pi\nu t] \exp \left[ -iz \left( \beta_0 - \frac{i\gamma_0}{2} \right) \right] \exp[-i\beta_1(\nu - \tilde{\nu})z] \\ & \times \exp \left[ -\frac{i\beta_2 z}{2} (\nu - \tilde{\nu})^2 \right] \exp \left[ -\frac{\gamma_1 z}{2} (\nu - \tilde{\nu}) \right] \exp \left[ -\frac{\gamma_2 z}{4} (\nu - \tilde{\nu})^2 \right] d\nu, \end{aligned} \quad (21)$$

reescribiendo la expresión anterior

$$\begin{aligned}
E_z(t) = & \exp \left[ -iz \left( \beta_0 - \frac{i\gamma_0}{2} \right) \right] \exp \left[ -i\tilde{\nu}z \left( \beta_1 - i\frac{\gamma_1}{2} \right) \right] \int_{\mathbb{R}} E_0(t') \int_{\mathbb{R}} \exp \left[ -\frac{i}{2}(\nu - \tilde{\nu})^2 z \left( \beta_2 - \frac{i\gamma_2}{2} \right) \right] \\
& \times \exp \left[ -i2\pi\nu \left( \frac{\beta_1 z}{\pi} - \frac{i\gamma_1 z}{4\pi} + (t - t') \right) \right] d\nu dt'. \tag{22}
\end{aligned}$$

Se define la función  $I_z(t - t')$  a continuación

$$I_z(t - t') = \int_{\mathbb{R}} \exp \left[ -i2\pi\nu \left( t - t' - \frac{\beta_1 z}{2\pi} - \frac{i\gamma_1 z}{4\pi} \right) \right] \exp \left[ -\frac{iz}{2}(\nu - \tilde{\nu})^2 \left( \beta_2 - \frac{i\gamma_2}{2} \right) \right] d\nu, \tag{23}$$

así pues,

$$E_z(t) = \exp \left[ -iz \left( \beta_0 - \frac{i\gamma_0}{2} \right) \right] \int_{\mathbb{R}} E_0(t') I_z(t - t') dt'. \tag{24}$$

El campo a la distancia  $z$  se escribe como una convolución entre el campo inicial  $E_0(t)$  y la función  $I_z(t)$  como sigue

$$E_z(t) = \exp \left[ -iz \left( \beta_0 - \frac{i\gamma_0}{2} \right) \right] [E_0 * I_z](t). \tag{25}$$

Haciendo los cambios de variables para resolver la integral  $I$

$$u = t - t' - \frac{\beta_1 z}{2\pi} + i\frac{\gamma_1 z}{4\pi} \tag{26}$$

$$v = \nu - \tilde{\nu}, \tag{27}$$

la integral  $I$  queda

$$I(t - t') = \int \exp\left(-\frac{i}{2}mv^2z\right) \exp[i2\pi(v + \tilde{\nu})u] dv, \quad (28)$$

donde  $m = \beta_2 - i\frac{\gamma}{2}$ . Resolviendo la integral  $I_z$  Lizarazo et al., “Dispersión-Pérdidas en líneas de transmisión y la transformación de Fourier fraccionaria”, se obtiene

$$I(t - t') = e^{-i\pi/4} (Z - Z'^2)^{1/4} \exp\left[\frac{i}{2} \arctan\left(\frac{Z}{Z'}\right)\right] \\ \times \exp\left[\frac{i\left((t - t') + \frac{\beta_1 z}{2\pi} - \frac{i\gamma_1 z}{4\pi}\right)^2}{\frac{\beta_2 z}{2\pi} - \frac{i\gamma_2 z}{4\pi}}\right]. \quad (29)$$

Reemplazando la ecuación 29 en 24 se obtiene la propagación del campo a la distancia  $z$

$$E_z(t) = e^{-i\pi/4} (Z - Z'^2)^{1/4} \exp\left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{Z'}{Z}\right)\right] \exp\left[-iz\left(\beta_0 - \frac{i\gamma_0}{2}\right)\right] \\ \times \int_{\mathbb{R}} E_0(t') \exp\left[\frac{i2\pi^2\left((t - t') - \frac{\beta_1 z}{2\pi} - \frac{i\gamma_1 z}{4\pi}\right)^2}{\frac{\beta_2 z}{2\pi} - \frac{i\gamma_2 z}{4\pi}}\right] dt', \quad (30)$$

donde  $Z = \beta_2 z / 2\pi\Lambda$  y  $Z' = \gamma_2 z / 4\pi$ , además  $\Lambda = s(\beta_2) / \tilde{\nu}$  es la longitud de onda temporal,  $s(\beta_2)$  el signo de  $\beta_2$  y  $z$  la distancia de propagación.

Se define la envolvente compleja

$$B_z(t) = e^{-i\pi/4} (Z - Z'^2)^{1/4} \exp\left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{Z'}{Z}\right)\right] \times \int_{\mathbb{R}} E_0(t') \exp\left[\frac{i2\pi^2(t - t')^2}{\frac{\beta_2 z}{2\pi} - \frac{i\gamma_2 z}{4\pi}}\right] dt',$$

resultando

$$B_z(t) = e^{-i\pi/4}(Z - Z'^2)^{1/4} \exp \left[ \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{Z'}{Z} \right) \right] \exp \left[ -i\mathfrak{s}(Z - iZ') \frac{\pi}{4} \right] \exp \left[ \frac{i\pi t^2}{\Lambda(Z - iZ')} \right] \\ \times \int_{\mathbb{R}} E_0(t') \exp \left[ \frac{i\pi t'^2}{\Lambda(Z - iZ')} \right] \exp \left[ \frac{-i2\pi t t'}{\Lambda(Z - iZ')} \right] dt'. \quad (31)$$

La propagación del campo en términos de la envolvente compleja se expresa

$$E_z(t) = \exp \left[ -iz \left( \beta_0 - \frac{i\gamma_0}{2} \right) \right] B_z \left( t - \frac{\beta_1 z}{4\pi} - \frac{i\gamma_1 z}{4\pi} \right), \quad (32)$$

donde  $\gamma_1$  y  $\beta_1$  representan un retraso temporal. La expresión 31 guarda gran similitud con la integral de difracción de Fresnel, con la diferencia que en este caso las variables son complejas. Entonces, el estudio de la propagación del campo consiste en la evolución de su envolvente compleja  $B_z$ , como se nota en la ecuación 32.

### 2.3. Transformada de Fourier fraccionaria de orden complejo

Es evidente la analogía entre la ecuación (31) y la definición de Namias Victor Namias. "The Fractional Fourier Transform and its application to quantum mechanics". En: *J. Inst. Math. Appl.* 25 (1980), la cual permite definir una transformación de Fourier fraccionaria de orden  $\alpha$  complejo. Para que exista una apropiada correspondencia entre estas dos expresiones es necesario hacer lo siguiente: se define el parámetro adimensional  $\eta$  complejo, el cual está directamente relacionado con las variables físicas del problema, de la siguiente forma

$$\eta = \frac{Z - iZ'}{t_0}, \quad (33)$$

el orden fraccional  $\alpha$  se define como

$$\cot \alpha = \varepsilon \frac{1 - \eta}{\eta}, \quad (34)$$

con  $\varepsilon t_0 > 0$ . Otras relaciones importantes son:

$$\eta = \frac{\varepsilon \sin \alpha}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha}, \quad (35)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\eta^2}{\eta^2 + \varepsilon^2(1 - \eta)^2}. \quad (36)$$

Definiendo las variables reducidas de la siguiente forma:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \varepsilon t_0}} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) t, \quad (37)$$

$$\tau' = \frac{t'}{\sqrt{\Lambda \varepsilon t_0}}, \quad (38)$$

las amplitudes de los campos en términos de las variables reducidas se escriben

$$V_0(\tau') = U_z \left( \sqrt{\Lambda \varepsilon t_0} \right) \tau', \quad (39)$$

$$V_z(\tau) = U_0 \left( \frac{\sqrt{\Lambda \varepsilon t_0}}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \right) \tau. \quad (40)$$

Para poder escribir todo como una transformada de Fourier fraccionaria se debe cumplir que la curvatura de llegada  $t_z$  sea de la forma

$$t_z = \frac{\eta^2 t_0 [\eta^2 + \varepsilon^2 (1 - \eta)^2]}{\varepsilon^2 (1 - \eta) - [\eta^2 + \varepsilon^2 (1 - \eta)^2]}. \quad (41)$$

La propagación de la envolvente compleja a través de un medio dispersivo donde

se han incluido pérdidas se puede expresar como una transformada de Fourier fraccionaria cuyo orden  $\alpha$  es un número complejo, Lizarazo et al., “Dispersión-Pérdidas en líneas de transmisión y la transformación de Fourier fraccionaria”:

$$V_z(\tau) = e^{i\alpha/2} e^{-i\mathfrak{s}(t_0/\eta)} \sqrt{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \mathcal{F}_\alpha[V_0](\tau), \quad (42)$$

dónde  $\mathfrak{s}(t_0/\eta)$  es el signo de  $t_0/\eta$ .

#### 2.4. Dispersión y pérdidas de paquetes de ondas Gaussianos

Se presentará la influencia de las pérdidas al propagarse un paquete de ondas gaussiano en un medio con dispersión cromática. La forma de la envolvente gaussiana será expresada:

$$E_0(t) = \exp \left[ \frac{-\pi t^2}{(\Delta T)^2} \right]. \quad (43)$$

Para esta función, se calcula la envolvente compleja después de que el paquete de ondas se ha propagado una distancia  $z$ . Al introducir esta función en la expresión 31, se obtiene:

$$B_z(t) = e^{-i\pi/4} (Z - Z'^2)^{1/4} \exp \left[ \frac{i}{2} \arctan \left( \frac{Z'}{Z} \right) \right] \exp \left[ -i\mathfrak{s}(Z - iZ') \frac{\pi}{4} \right] \exp \left[ \frac{i\pi}{\Lambda} \frac{t^2}{(Z - iZ')} \right] \\ \times \int \exp \left[ -\frac{\pi t^2}{(\Delta T)^2} \right] \exp \left[ \frac{i\pi t^2}{\Lambda(Z - iZ')} \right] \exp \left[ \frac{-2i\pi t t'}{\Lambda(Z - iZ')} \right] dt', \quad (44)$$

definiendo

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -i\pi \left( \frac{1}{i(\Delta T)^2} - \frac{1}{\Lambda(Z - iZ')} \right) t^2 \right] \exp \left[ -\frac{i2\pi t t'^2}{\Lambda(Z - iZ')} \right], \quad (45)$$

Desarrollando la integral se obtiene

$$\begin{aligned} I = & e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2(Z^2 + Z'^2) + (\Delta T)^2}} (c^2 - d^2)^{1/4} \exp \left[ \frac{i}{2} \arctan \left( \frac{d}{c} \right) \right] \\ & \times \exp \left[ -\frac{\pi(\Delta T)^2[(Z^2 - Z'^2)\Lambda - Z'(\Delta T)^2]t^2}{\Lambda[(Z^2 - Z'^2)\Lambda - Z'(\Delta T)^2]^2 + \Lambda^2 Z^2 [2Z'\Lambda + (\Delta T)^2]^2} \right] \\ & \times \exp \left[ \frac{i\pi Z(\Delta T)^2 [2Z'\Lambda + (\Delta T)^2] t^2}{\Lambda[(Z^2 - Z'^2)\Lambda - Z'(\Delta T)^2]^2 + \Lambda^2 Z^2 [2Z'\Lambda + (\Delta T)^2]^2} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Luego de sustituir la expresión 46, la envolvente compleja se escribe

$$\begin{aligned} B_z(t) = & e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2(Z^2 + Z'^2) + (\Delta T)^2}} (c^2 - d^2)^{1/4} \exp \left[ \frac{i}{2} \arctan \left( \frac{d}{c} \right) \right] \\ & \times \exp \left[ -\frac{\pi(\Delta T)^2[(Z^2 - Z'^2)\Lambda - Z'(\Delta T)^2]t^2}{\Lambda[(Z^2 - Z'^2)\Lambda - Z'(\Delta T)^2]^2 + \Lambda Z^2 [2Z'\Lambda + (\Delta T)^2]^2} \right] \\ & \times \exp \left[ \frac{i\pi Z(\Delta T)^2 [2Z'\Lambda + (\Delta T)^2] t^2}{\Lambda[(Z^2 - Z'^2)\Lambda - Z'(\Delta T)^2]^2 + \Lambda Z^2 [2Z'\Lambda + (\Delta T)^2]^2} \right] \\ & \times \exp \left[ \frac{i\pi Z t^2}{\Lambda(Z^2 + Z'^2)} \right] \exp \left[ -\frac{\pi Z' t^2}{\Lambda(Z^2 + Z'^2)} \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Al incluir las pérdidas en el modelo, la función se modifica considerablemente Lizarazo et al., “Dispersión-Pérdidas en líneas de transmisión y la transformación de Fourier fraccionaria”. Cuando no se toman en cuenta las pérdidas ( $Z' = 0$ ), se vuelve al caso de sólo dispersión cromática.

## 2.5. Propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria

El operador de la transformación de Fourier fraccionaria aplicado a una función  $f(x)$ , se escribe:

$$\mathcal{F}^\alpha [f] (x') = \frac{e^{i\pi/4} e^{i\alpha/2}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} \exp [i\pi x'^2 \cot \alpha] \int_{\mathbb{R}} \exp [i\pi x^2 \cot \alpha] \exp \left[ \frac{-2i\pi x x'}{\sin \alpha} \right] f(x) dx. \quad (48)$$

Los principales teoremas conocidos para la transformación de Fourier estandar, fueron generalizados para la transformación de Fourier fraccionaria de orden real. Además, al igual que en el caso estándar, este operador también es unitario, P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. “Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional”. En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004).

- **Linealidad:** Establece que al calcular la transformada de Fourier fraccionaria de una combinación lineal de dos funciones de entrada,  $f(x)$  y  $g(x)$ , el resultado se comportará conforme a las reglas de los sistemas lineales. Aquí,  $a$  y  $b$  son constantes que multiplican a las funciones respectivas.

$$\mathcal{F}^\alpha [af(x) + bg(x)] (x') = a\mathcal{F}^\alpha [f(x)] (x') + b\mathcal{F}^\alpha [g(x)] (x') \quad (49)$$

- **Teorema de Parseval:** También conocido como la propiedad de la conservación de la energía, establece que la energía de una señal evaluada en el dominio del tiempo, es igual a la energía calculada en el dominio de la frecuencia.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g^*(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(x')g_\alpha^*(x')dx' \quad (50)$$

- **Teorema del corrimiento:** Establece que al trasladar una función  $f(x)$  en el dominio del tiempo, la única alteración ocurre en la distribución de fase respec-

to a la frecuencia. En este contexto,  $\zeta$  representa la variable de corrimiento.

$$\mathcal{F}^\alpha [f(x - \zeta)](x') = f_\alpha(x' - \zeta \cos \alpha) \exp [i\pi \sin \alpha (\zeta^2 \cos \alpha - 2x'\zeta)] \quad (51)$$

- **Teorema de la modulación:** Es esencial para el procesamiento de información en diversas magnitudes, ya que permite alterar la señal de entrada en términos de su frecuencia. Esta propiedad de modulación guarda similitudes con la de corrimiento en el tiempo. En la siguiente ecuación,  $\nu$  representa la variable de modulación.

$$\mathcal{F}^\alpha [f(xe^{i2\pi\nu x})](x') = f_\alpha(x' - \nu \sin \alpha) \exp [-i\pi \cos \alpha (\nu^2 \sin \alpha - 2x'\nu)] \quad (52)$$

- **Teorema del escalamiento:** Es crucial en la comprensión de la relación entre tiempo y frecuencia. Estipula que si se expande una función  $f(x)$  en el dominio del tiempo, es necesario comprimir obligatoriamente su frecuencia correspondiente. Esta idea tiene sentido intuitivo, ya que comprimir una señal en tiempo implica hacer sus cambios más bruscos, lo que resulta en la aparición de componentes de mayor frecuencia.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\alpha [f(cx)](x') &= \sqrt{\cos \beta / \cos \alpha} \times \exp \left[ \frac{1}{2}i(\alpha - \beta) \right] \\ &\times \exp \left[ i\pi x'^2 \cot \alpha \left( 1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \right) \right] f_\beta \left( x' - \frac{\sin \beta}{c \sin \alpha} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

- **Aditividad del orden:** Establece que si se aplica el operador de la transformación de Fourier fraccionaria de orden  $\alpha$  y luego se aplica el operador nuevamente con un orden  $\theta$  al resultado obtenido, esto es equivalente a aplicar una

sola vez el operador con un orden igual a  $\alpha + \theta$ .

$$\mathcal{F}^\alpha [\mathcal{F}^\theta [f(x)]] = \mathcal{F}^{\alpha+\theta} [f(x)] \quad (54)$$

dónde  $\tan(\beta) = c^2 \tan(\alpha)$ .

### 3. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en este estudio, los cuales se fundamentan en la implementación del algoritmo desarrollado a partir de los resultados teóricos discutidos en el capítulo anterior. Este último, abordó la propagación del campo en medios con comportamiento dispersivo, teniendo en cuenta la dispersión cromática y las pérdidas asociadas a la frecuencia, llegando a que dicha propagación se puede representar mediante una transformada de Fourier fraccionaria de orden complejo. El algoritmo implementado calcula este operador ( $TFFC$ ), es una herramienta que facilita el análisis de los efectos de la dispersión y las pérdidas en paquetes de ondas. Al momento de realizar este trabajo, no se cuenta con un algoritmo con los fundamentos teóricos presentados en este estudio.

#### 3.1. Descripción del algoritmo $TFFC$

A continuación, presentaremos el algoritmo implementado utilizando la herramienta Scilab. Esta herramienta se destaca por su eficiencia en operaciones matriciales y es especialmente útil para resolver problemas de matemática aplicada, física, ingeniería y procesamiento de señales. Exploraremos cómo el algoritmo  $TFFC$  se adapta a este entorno, aprovechando las capacidades de Scilab para desarrollar soluciones efectivas y eficientes. Este algoritmo se basa en el teorema del muestreo fraccionario y en la metodología del código descrito en M. Amaris y R. Torres. “Aplicación en Scilab para el tratamiento de señales digitales con la transformación de Fourier fraccionaria: Filtro de Wiener fraccionario”. En: *Universidad del Magdalena, facultad de ingeniería, programa de ingeniería de sistemas* (2009), el cual está diseñado para calcular la transformada de Fourier fraccionaria para órdenes reales.

**3.1.1. Función  $TFFC$**  La función  $TFFC(f, a, \tau)$  toma como entrada una función  $f$ , el orden fraccionario complejo  $a$  y un desfase temporal  $\tau$ . Esta función calcula la transformada de Fourier fraccionaria de orden  $a$  de la función  $f$  y produce como salida el resultado, denotado como  $out$ .

Primero, se calcula el tamaño de la señal de entrada,  $N1 = \max(\text{size}(f))$  y se crea un parámetro  $flag = 0$  que será utilizado más adelante. A continuación, se interpola la señal de entrada utilizando la función  $intergen(f)$ , y se extiende con ceros a ambos lados, generando la señal  $g = [\text{zeros}(1, N1), intergen(f), \text{zeros}(1, N1)]$ . Posteriormente, se separa la parte real e imaginaria del parámetro de orden fraccionario  $a$ :  $a\_real = \text{real}(a)$  y  $a\_imag = \text{imag}(a)$ .

Luego, se redefinen las funciones trigonométricas utilizando funciones hiperbólicas, teniendo en cuenta que el argumento es complejo,  $\alpha = (\text{mtlb\_double}(a\_real) \times \pi) / 2$  y  $\phi = (\text{mtlb\_double}(a\_imag) \times \pi) / 2$ .

Después, se lleva a cabo una serie de operaciones condicionales para manipular el parámetro de orden fraccionario  $a$  y establecer el valor de la variable de control  $flag$ . Si el valor  $\text{sign}(a) = -1$ , entonces  $flag$  se establece en 1 y se multiplica la señal  $g$  por una exponencial.

Posteriormente, se realizan una serie de comparaciones para mantener el valor de  $a$  dentro de ciertos intervalos con el propósito de aplicar el algoritmo correctamente, evitando discontinuidades. Dependiendo del intervalo en el que se encuentre  $a\_real$ , se asignan diferentes valores a la variable  $flag$ . Luego, se ajusta el valor de  $a$  según el caso correspondiente:

- Si  $a\_real$  está entre 0 y 0.5, entonces  $flag$  se establece en 2 y se reduce  $a$  en 1.
- Si  $a\_real$  está entre  $-0.5$  y 0, entonces  $flag$  se establece en 3 y se incrementa  $a$  en 1.

- Si  $a_{\text{real}}$  está entre 1.5 y 2, entonces  $flag$  se establece en 4 y se reduce  $a$  en 1.
- Si  $a_{\text{real}}$  está entre  $-2$  y  $-1.5$ , entonces  $flag$  se establece en 5 y se incrementa  $a$  en 1.

Una vez determinados los valores de  $flag$  y  $a$ , se procede a evaluar los casos especiales correspondientes para realizar la transformada de Fourier estándar ( $a = 1$ ), la inversa ( $a = -1$ ), el operador identidad ( $a = 0$ ), el operador de reflexión ( $a = 2$ ) o la transformada de Fourier fraccionaria para otros valores de  $a$ . Estas operaciones se realizan mediante la función  $TFFr_{gen\_complex}(g, a, \tau)$ , utilizando  $flag$  como condición para seleccionar la operación adecuada.

**3.1.2. Función  $TFFr_{gen\_complex}$**  La función  $TFFr_{gen\_complex}(g, a, \tau)$  calcula la transformada de Fourier fraccionaria de una señal de entrada  $g$ , considerando el orden complejo de la transformada  $a$  y el desfase temporal  $\tau$ . En primer lugar, se determina el tamaño de la señal  $g$ , se establecen los incrementos espaciales y se generan vectores para los dominios fraccionarios. Posteriormente:

- Se crea el parametro  $C = \exp(i((\pi \text{sign}(\sin 2))/4, (\alpha + i\phi)/2))/\text{sqrt}(\text{abs}(\sin 2))$ .
- Se calcula el factor  $ch = \exp(-i\pi(k^2)(Dy^2)\cot 2)$ .
- El parámetro de desplazamiento  $shift = \exp(i2\pi\tau(n - \tau/2)(Dx^2)\cot 2)$ .
- Se aplica una transformación a la señal de entrada  $g$ , multiplicándola por  $shift$  y aplicando una fase.
- Se calcula la transformada de Fourier utilizando la función  $TFd_{gen2}$  de la señal previamente transformada.
- Finalmente, se calcula la salida multiplicando los factores calculados  $C$ ,  $ch'$ ,  $t$  y una fase adicional.

**3.1.3. Función  $T\mathcal{F}dgen2(f, sin2)$**  La función  $T\mathcal{F}dgen2(f, sin2)$  toma como entrada la función  $f$  y el parámetro  $sin2$ . Primero, se determina el tamaño de la señal  $f$ , se convierte en un vector columna y se genera una matriz de índices  $M$  basada en el tamaño de la señal. Luego, se calcula una matriz de transformación  $M2$  utilizando la exponencial de la matriz de índices  $M$ , ajustada por el parámetro  $sin2$ . Posteriormente, se realiza la multiplicación de la matriz de transformación  $M2$  con la señal  $f$ , y se normaliza dividiendo el resultado por la raíz cuadrada del tamaño de la señal  $f$ . Finalmente, se devuelve la función transformada.

## 3.2. Validación del Algoritmo

La validación del algoritmo es un componente importante de la metodología, y se centrará en las siguientes acciones para garantizar la confiabilidad del mismo:

- Comprobar que el algoritmo cumple con las propiedades más importantes de la Transformada de Fourier fraccionaria.
- Pruebas con diferentes órdenes complejos de la transformada utilizando funciones conocidas.
- Comparación de los resultados obtenidos por el algoritmo con la solución analítica conocida de una función Gaussiana.

**3.2.1. Linealidad** En las figuras 1, 2 y 3 se aprecia la validación de la propiedad de la linealidad descrita anteriormente. Esta propiedad se confirma al aplicar el operador  $T\mathcal{F}FC$  tanto de manera combinada como de forma separada sobre las funciones en cada caso. Las figuras ilustran cómo la suma ponderada de dos funciones al ser transformadas  $\mathcal{F}^a[3f(x) + 5g(x)]$  (parte izquierda de las imágenes), produce resultados idénticos a la combinación lineal de las transformadas individuales de  $f(x)$  y  $g(x)$ , respectivamente  $3\mathcal{F}^a[f(x)] + 5\mathcal{F}^a[g(x)]$  (parte derecha de las

imágenes).

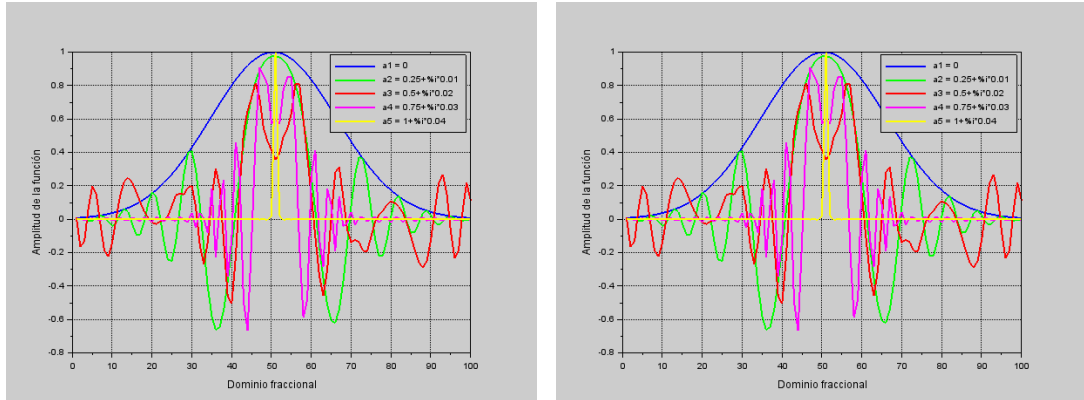


Figura 1. Las funciones utilizadas son  $g(x) = \exp[x^2/2]$  y  $r(x)$  es una función rectángulo que toma el valor de 1 cuando  $x$  está en el intervalo  $[1, 3]$ , y toma el valor de 0 en cualquier otro caso.

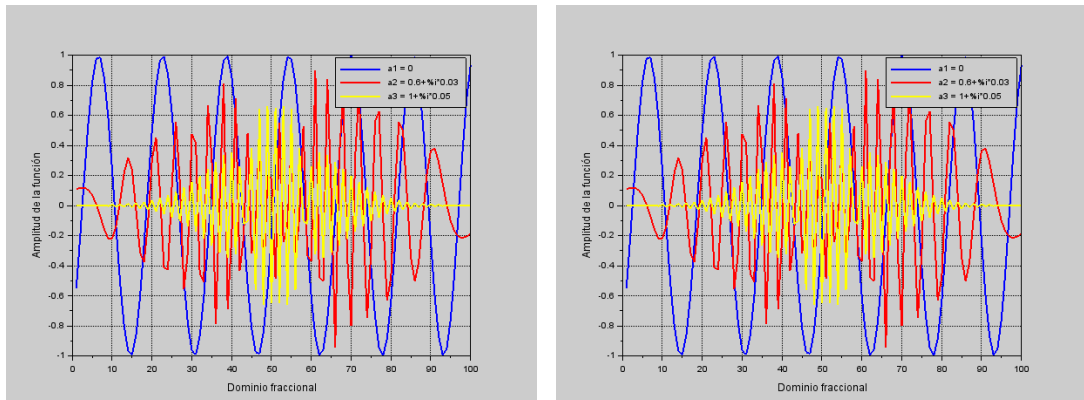


Figura 2. Las funciones utilizadas son  $c(x) = \sin [2\pi (f_0x + \frac{1}{2}kx^2)]$ , donde  $k = \frac{f_1-f_0}{T}$  y la misma función rectángulo  $r(x)$  mencionada en la figura anterior 1.

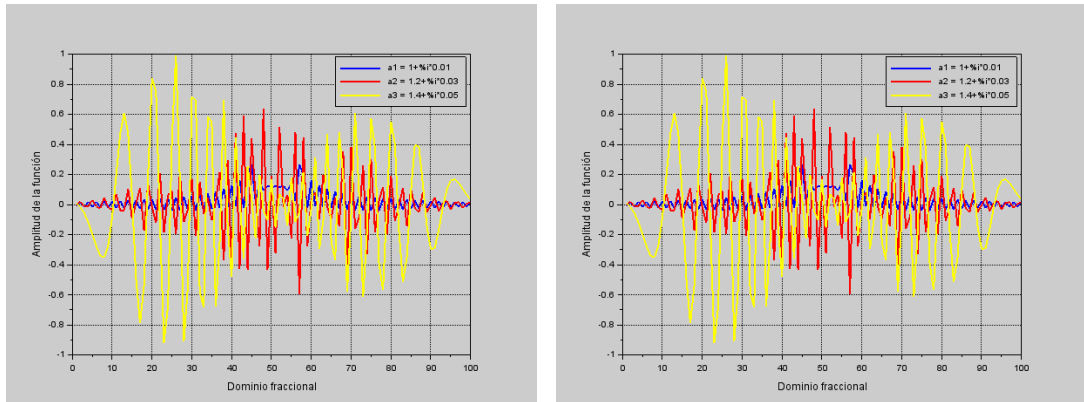


Figura 3. Las funciones utilizadas son  $f(x) = \sin(2\pi x)$ , y la misma función  $g(x)$  mencionada en 1.

Para evaluar la similitud entre las curvas, se calculó la desviación cuadrática media entre cada par de funciones correspondientes, como se detalla en la tabla 1. Los valores obtenidos en esta tabla son cero porque las curvas correspondientes son exactamente iguales. Esto indica que el algoritmo cumple eficazmente con esta propiedad.

Curva	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Azul	0	0	0
Roja	0	0	0
Amarilla	0	0	0
Verde	0	—	—
Rosada	0	—	—

Cuadro 1. Desviación cuadrática media con la propiedad de linealidad.

**3.2.2. Teorema de Parseval** El teorema de Parseval (ver ecuación 50) establece una relación de conservación de la energía entre las señales en el dominio temporal (Temp.) y el fraccionario (Frac.).

Orden $a$	$r(x)$ y $s(x)$		$r(x)$ y $g(x)$		$s(x)$ y $g(x)$	
	Temp.	Frac.	Temp.	Frac.	Temp.	Frac.
$0.1 + 0i$	0.9457	1.1337	1.7300	1.8140	1.4509	1.4510
$0.1 + 0.001i$	0.9457	1.1456	1.7300	1.8282	1.4509	1.5012
$0.1 + 0.01$	0.9457	1.2712	1.7300	1.9687	1.4509	2.1453

Cuadro 2. Valor de la integral para diversas funciones con distintos valores del orden de la transformada.

La tabla 2 muestra los valores de la integral tanto en el dominio temporal como en el dominio fraccionario para cada orden  $a$  correspondiente, considerando diferentes funciones (las funciones  $r(x)$  y  $g(x)$  fueron definidas en la figura 1 y  $s(x) = \sin(x)$ ).

**3.2.3. Teorema del corrimiento** Este teorema establece una relación entre una función  $f(x)$  y su versión desplazada  $f(x - \zeta)$ , donde  $\zeta$  representa el parámetro de desplazamiento. Este teorema, representado por la ecuación 51, muestra cómo la transformada de Fourier fraccionaria de una función desplazada está relacionada con la transformada de Fourier fraccionaria de la función original, desplazada por el término  $\zeta \cos \alpha$ , donde  $\alpha$  denota el orden de la transformada. Además, incluye un término exponencial que depende tanto del desplazamiento  $\zeta$  como del orden  $\alpha$ , proporcionando una mejor comprensión de cómo las señales responden a los desplazamientos en el dominio fraccional.

La parte izquierda y derecha de la ecuación 51 se presentan respectivamente en las figuras 4, 5 y 6. Se puede observar en estas figuras que la igualdad no es exacta; sin embargo, el comportamiento de las funciones al aplicar el algoritmo con distintos desplazamientos es similar, comparando la parte izquierda con la derecha en cada caso.

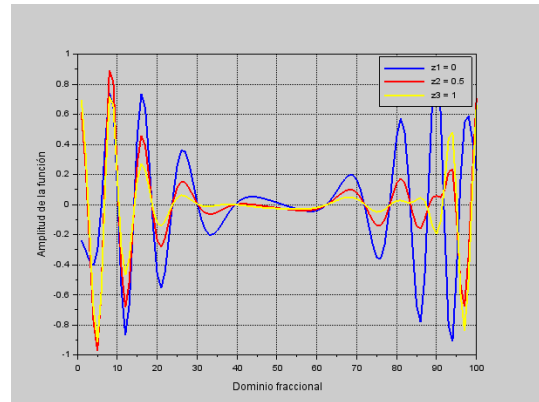
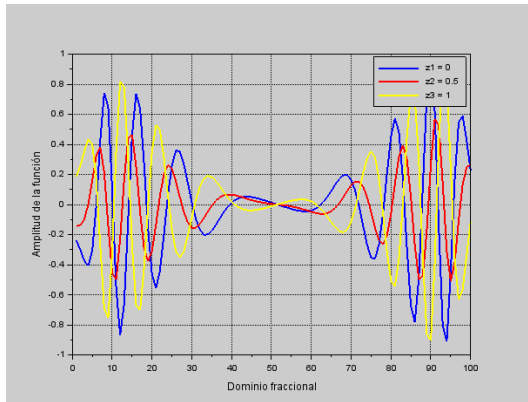


Figura 4. La función utilizada es  $s(x) = \sin(x)$  y los desplazamientos se muestran para cada curva. El orden complejo utilizado es  $a = 1.8 + 0.04i$ .

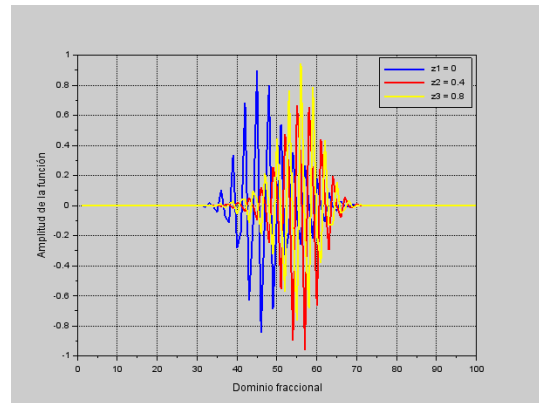
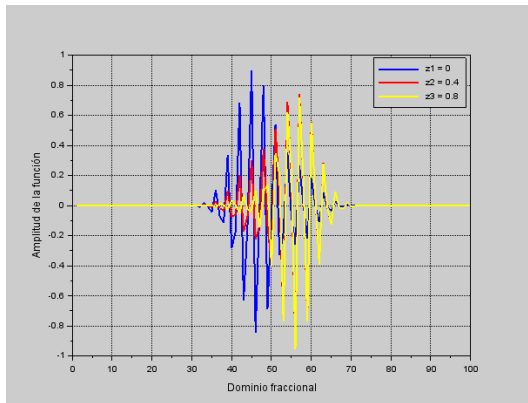


Figura 5. La función utilizada es  $g(x)$  mencionada en la figura 1. El orden complejo utilizado es  $a = 1.1 + 0.6i$ .

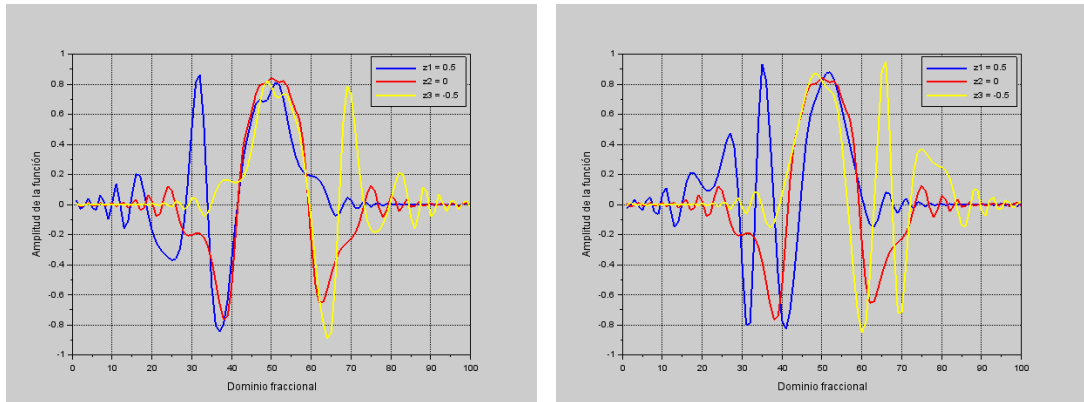


Figura 6. La función  $r(x)$  se define como 1 en el intervalo  $[-1, 1]$  y 0 fuera de este rango. Los desplazamientos se muestran para cada curva. El orden complejo utilizado es  $a = -1.3 - 0.025i$ .

La tabla 3 proporciona una descripción detallada de la desviación cuadrática media entre cada par de funciones correspondientes. Los valores registrados en esta tabla evidencian una similitud entre las curvas, lo que sugiere que el algoritmo satisface esta propiedad.

Desviación cuadrática media			
Curva	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Azul	0	0	0.2214
Roja	0.0547	0.1183	0
Amarilla	0.0091	0.1120	0.2284

Cuadro 3. Desviación cuadrática media con la propiedad de corrimiento.

**3.2.4. Teorema de la modulación** Al aplicar este teorema (ver ecuación 52) a distintas funciones con un factor de desfase  $\nu$ , se evidencia cómo la transformada de Fourier fraccionaria de la función modulada se relaciona con la transformada de Fourier fraccionaria de la función original. Aunque en las figuras 7, 8 y 9, que representan respectivamente la parte izquierda y derecha de la ecuación 52, no se

observa una coincidencia exacta entre ambas partes, sí se aprecia un comportamiento similar. Este fenómeno sugiere que el algoritmo proporciona una descripción útil del comportamiento de las señales moduladas en el dominio fraccional.

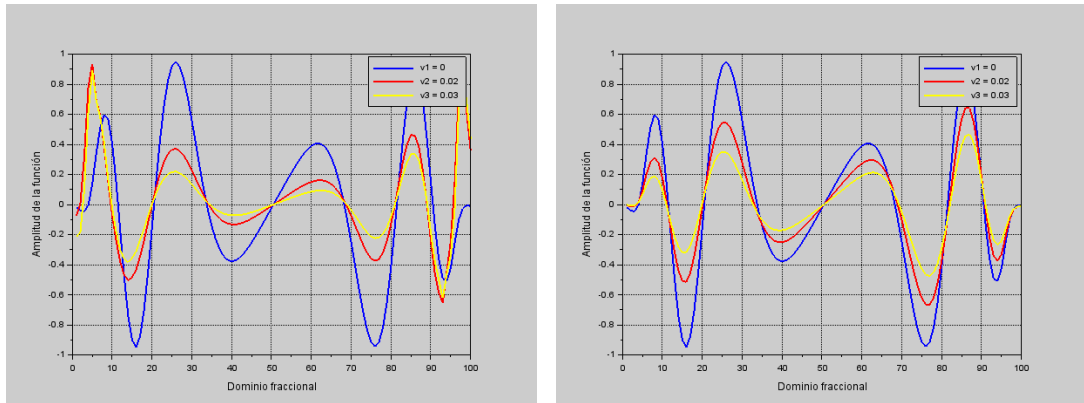


Figura 7. La función utilizada es  $s(x) = \sin(x)$  y los parámetros de modulación se muestran para cada curva. El orden complejo utilizado es  $a = 0.1 + 0.008i$ .

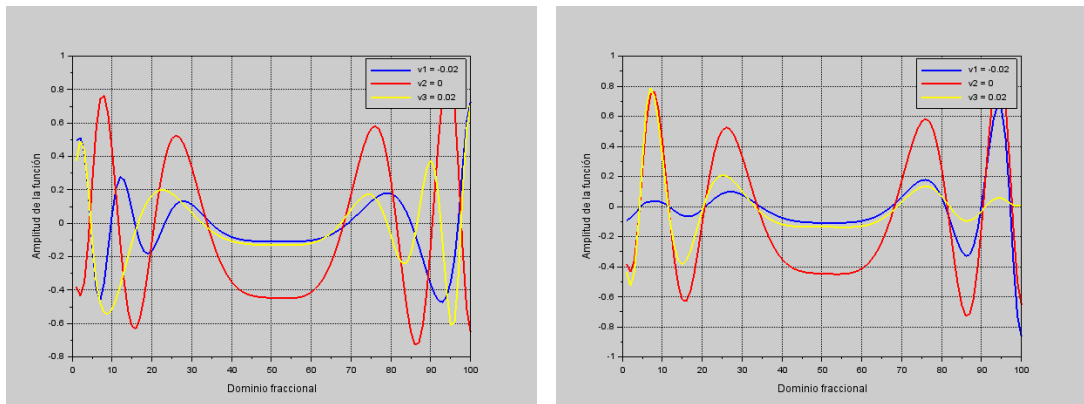


Figura 8. La función utilizada es  $g(x)$  definida en la figura 1, los parámetros de modulación se muestran para cada curva. El orden complejo utilizado es  $a = -1.9 - 0.05i$ .

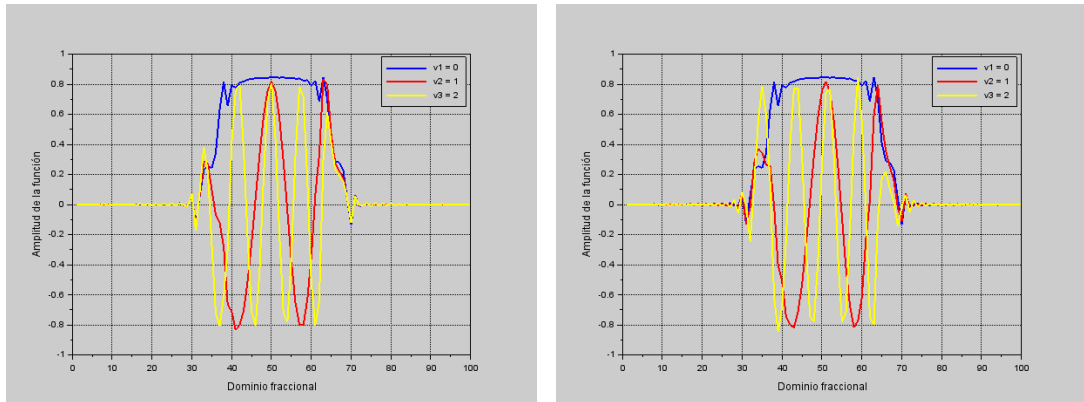


Figura 9. En este caso se usa la función  $r(x)$  definida en la figura 6 y los parámetros de modulación se muestran para cada curva. El orden complejo utilizado es  $a = 0.07 + 0.0025i$ .

La tabla 4 detalla la desviación cuadrática media entre cada par de funciones correspondientes. Los valores presentados en este cuadro reflejan una consistencia notable entre las curvas, lo que respalda la eficacia del algoritmo en cumplir con esta propiedad.

Desviación cuadrática media			
Curva	Figura 7	Figura 8	Figura 9
Azul	0	0.0055	0
Roja	0.0686	0	0.0431
Amarilla	0.0949	0.0044	0.1344

Cuadro 4. Desviación cuadrática media con la propiedad de modulación.

**3.2.5. Teorema del escalamiento** Para comprobar este teorema (ver ecuación 53), se aplica el operador a distintas funciones variando el factor de escalamiento  $c$ , observamos cómo la transformada de Fourier fraccionaria de la función escalada se relaciona con la transformada de Fourier fraccionaria de la función original. En las figuras 10, 11 y 12 se puede observar que el algoritmo *TFFC* cumple con esta

propiedad.

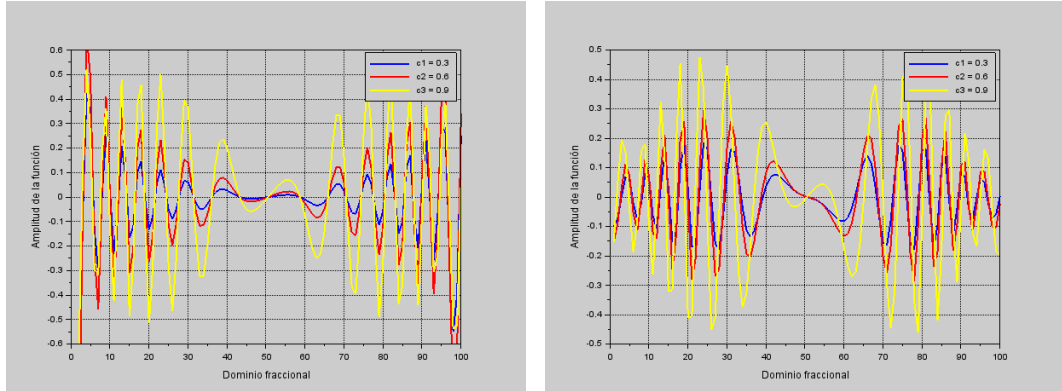


Figura 10. La figura muestra la función  $s(x)$  junto con los parámetros de escalamiento para cada curva. El orden complejo utilizado es  $a = 0.35 + 0.04i$ .

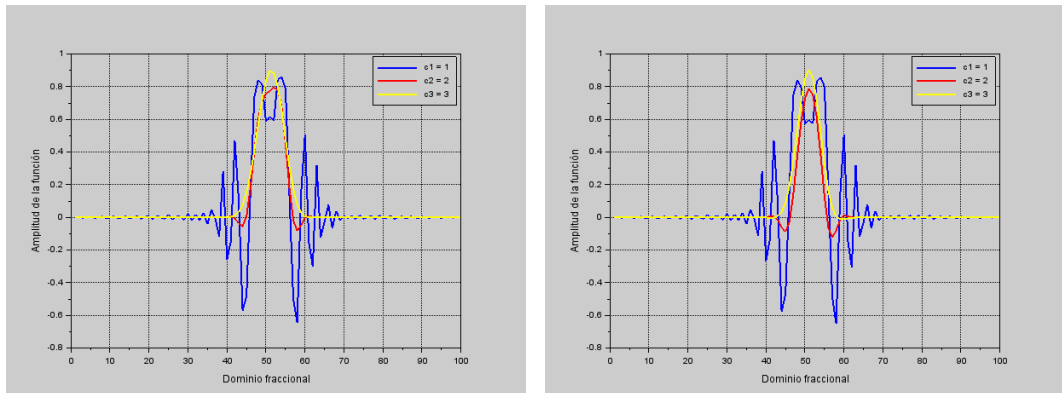


Figura 11. La figura muestra la función  $g(x)$  junto con los parámetros de escalamiento para cada curva. El orden complejo utilizado es  $a = -1.21 - 0.031i$ .

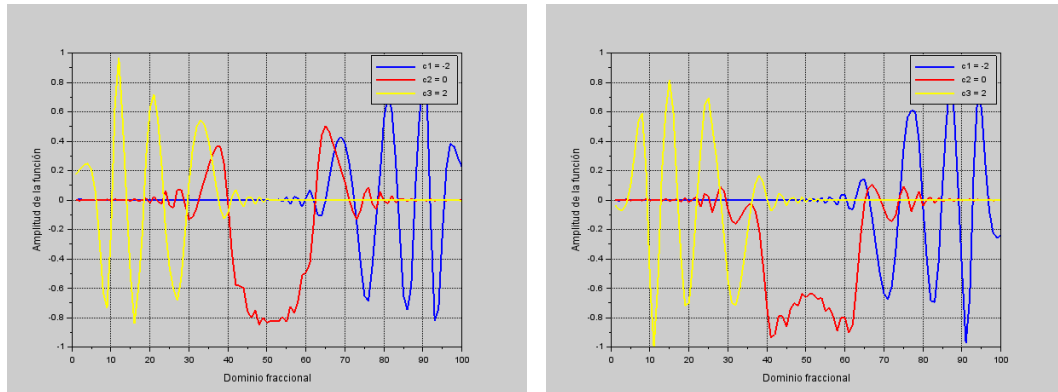


Figura 12. La figura muestra la función  $r(x)$  definida en la figura 6 junto con los parámetros de escalamiento para cada curva. El orden complejo utilizado es  $a = 1.8 - 0.007i$ .

La tabla 5 ofrece una descripción detallada de la desviación cuadrática media entre cada par de funciones correspondientes. Los valores consignados en este registro subrayan una coherencia notable entre las curvas, lo cual fortalece la validez del algoritmo en cuanto al cumplimiento de esta propiedad.

Desviación cuadrática media			
Curva	Figura 10	Figura 11	Figura 12
Azul	0.0524	0.0025	0.1466
Roja	0.0872	0.0024	0.0460
Amarilla	0.0431	0.0503	0.1579

Cuadro 5. Desviación cuadrática media con la propiedad de escalamiento.

**3.2.6. Aditividad del orden del operador** A continuación, en las figuras 13, 14 y 15 se evidencia la consistencia del algoritmo con la propiedad de la aditividad del orden. Se aplica el operador a diferentes funciones en cada caso, primero en dos partes separadas (parte superior) y luego en una sola instancia (parte inferior), lo que se expresa como  $\mathcal{F}^{a_2} [\mathcal{F}^{a_1} [f(x)]] = \mathcal{F}^{a_2+a_1} [f(x)]$ . Se observa una notoria

similitud entre los resultados obtenidos mediante el algoritmo.

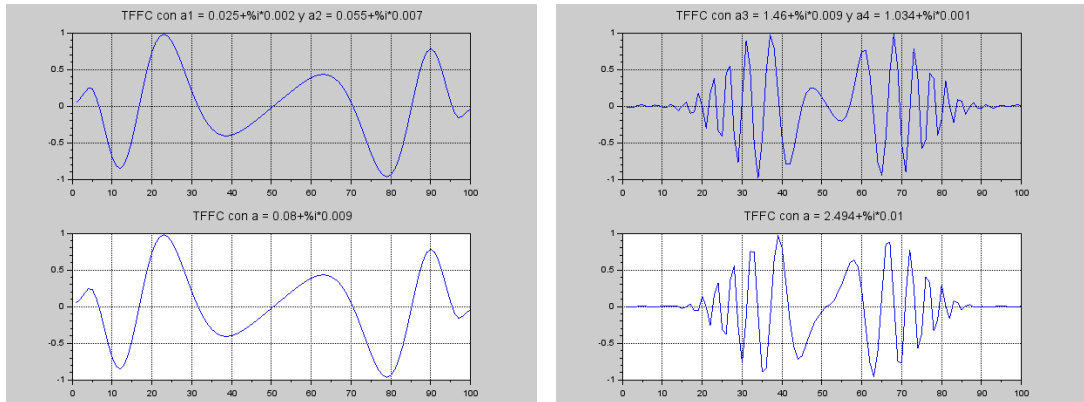


Figura 13. La función utilizada es  $s(x) = \sin(x)$ .

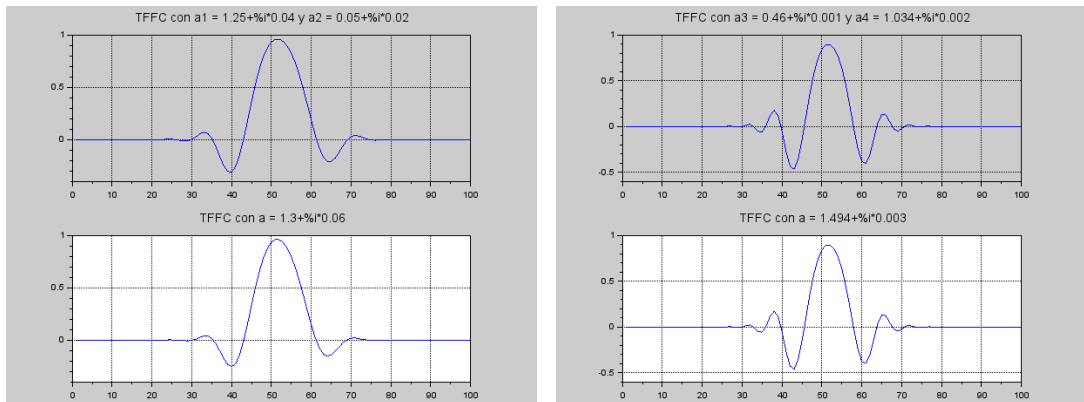


Figura 14. La función utilizada es  $g(x) = \exp[50x^2]$ .

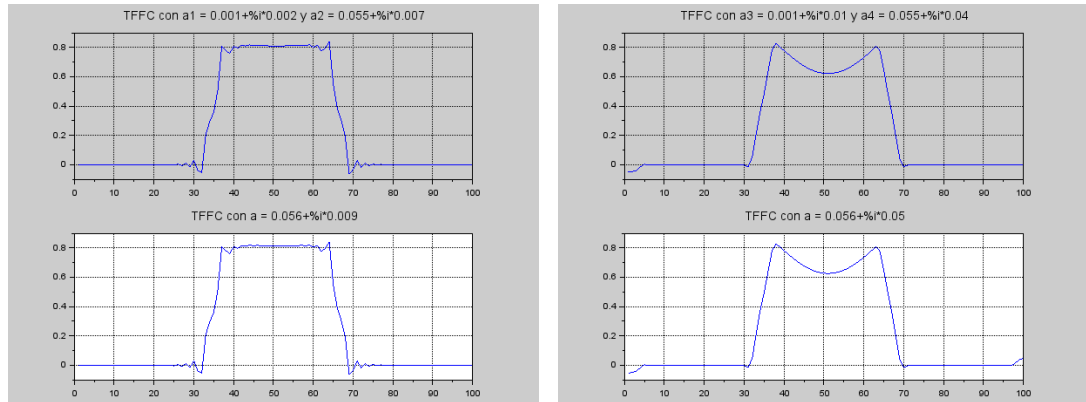


Figura 15. La función rectángulo utilizada es  $r(x)$ , toma el valor de 1 cuando  $x$  está en el intervalo  $[-1, 1]$ , y toma el valor de 0 en cualquier otro caso.

La tabla 6 presenta la desviación cuadrática media entre las curvas superiores e inferiores de las partes izquierda y derecha de cada figura. Los resultados obtenidos revelan un cumplimiento destacado del algoritmo respecto a la aditividad del orden.

Desviación cuadrática media			
Imagen	Figura 13	Figura 14	Figura 15
Izquierda	0.0961	0.1600	0.0034
Derecha	0.0422	0.1063	0.0035

Cuadro 6. Desviación cuadrática media con la propiedad de aditividad del orden.

**3.2.7. Inversa** Para obtener los resultados presentados a continuación, se emplea la propiedad de aditividad del orden. En este caso, se aplica un orden  $a$  seguido de su negativo  $-a$ , lo que resulta en la función original ( $a = 0$ ). Al igual que en la propiedad anterior, en la parte superior de cada imagen el operador se aplica dos veces de forma independiente, mientras que en la parte inferior se exhibe la función original. A pesar de que el algoritmo no logra una precisión del 100%, su eficacia en el cálculo de la transformada de Fourier fraccionaria de orden complejo es notable.

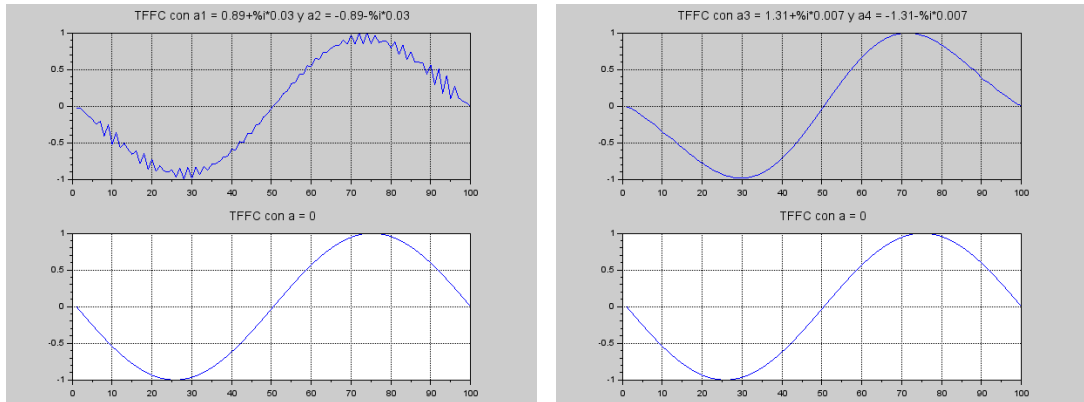


Figura 16. La función utilizada es  $s(x)$ .

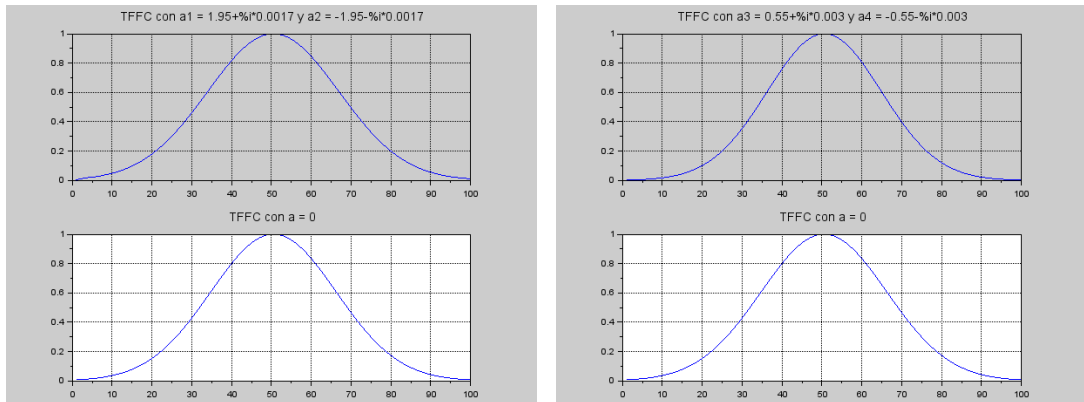


Figura 17. La función utilizada es  $g(x)$ .

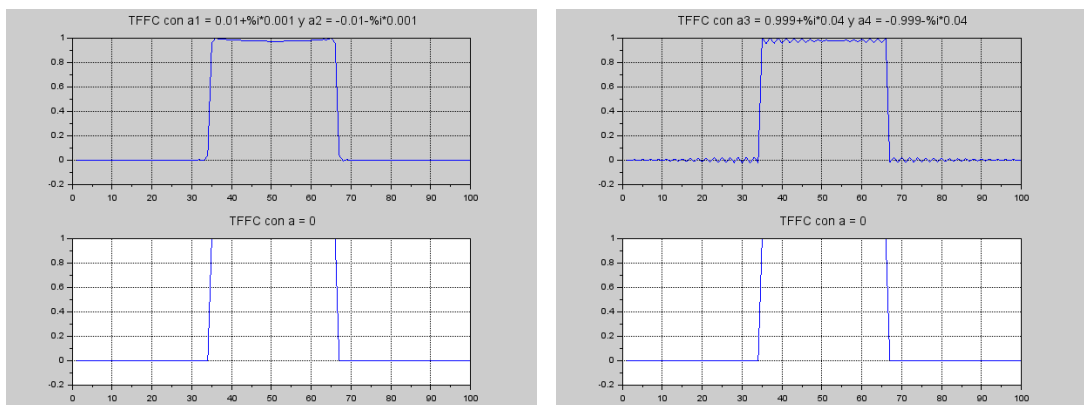


Figura 18. La función rectángulo utilizada es  $r(x)$ .

En la tabla 7 se detalla la desviación cuadrática media entre las curvas superior e inferior en las secciones izquierda y derecha de cada gráfica. Los resultados obtenidos evidencian un buen desempeño del algoritmo al aplicar el orden inverso del operador.

<b>Desviación cuadrática media</b>			
Imagen	Figura 16	Figura 17	Figura 18
Izquierda	0.0859	0.0200	0.0149
Derecha	0.1172	0.0434	0.0027

Cuadro 7. Desviación cuadrática media de aplicar el orden inverso del operador.

### **3.3. Comportamiento del algoritmo con diferentes órdenes complejos**

En las siguientes figuras, se hace un barrido de la parte imaginaria del orden desde 0 hasta 0.9, con distintos valores de la parte real del orden, para una función rectángulo  $r(x)$ . Estas representaciones gráficas muestran cómo varía la función obtenida en respuesta a estos cambios del orden. Se observa que para ciertos valores de la parte imaginaria del orden, la variación en la función se vuelve más evidente. Por lo tanto, en estos puntos, se procede a realizar pasos más finos entre un valor de orden y otro.

**3.3.1. Ejemplo 1** En la figura 19 se mantiene constante la parte real del orden en 0.1 y la diferencia más notable se aprecia entre los órdenes  $0.1 + 0i$  y  $0.1 + 0.1i$  donde el incremento se hace más pequeño.

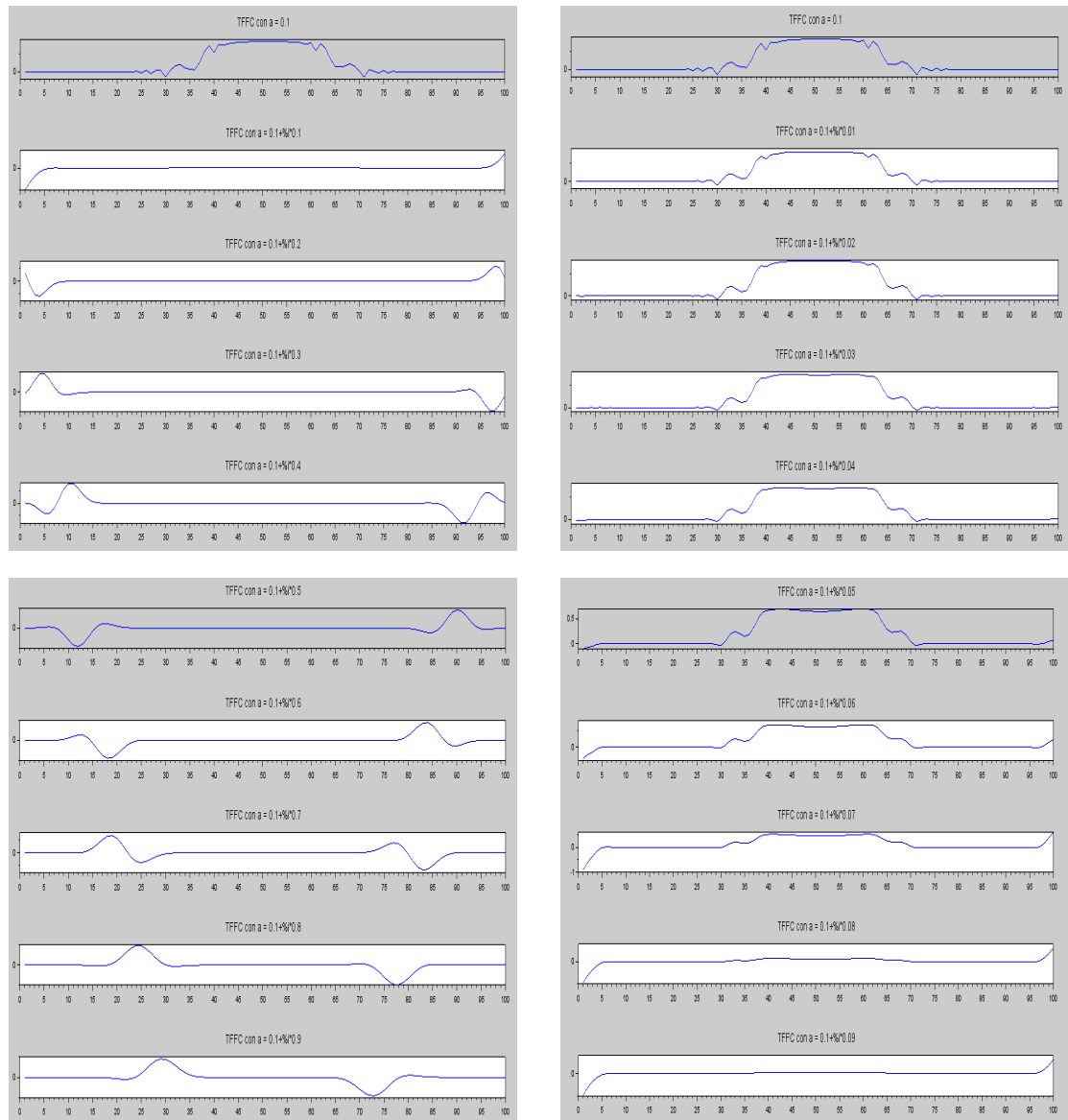


Figura 19. Las dos imágenes a la izquierda muestran la variación de la parte imaginaria del orden con un incremento de 0.1 mientras que en las dos imágenes de la derecha, el incremento es de 0.01.

**3.3.2. Ejemplo 2** En la figura 20 se mantiene constante la parte real del orden en 0.4 y la diferencia más notable se aprecia entre los órdenes  $0.4 + 0i$  y  $0.4 + 0.1i$  donde el incremento se hace más pequeño.

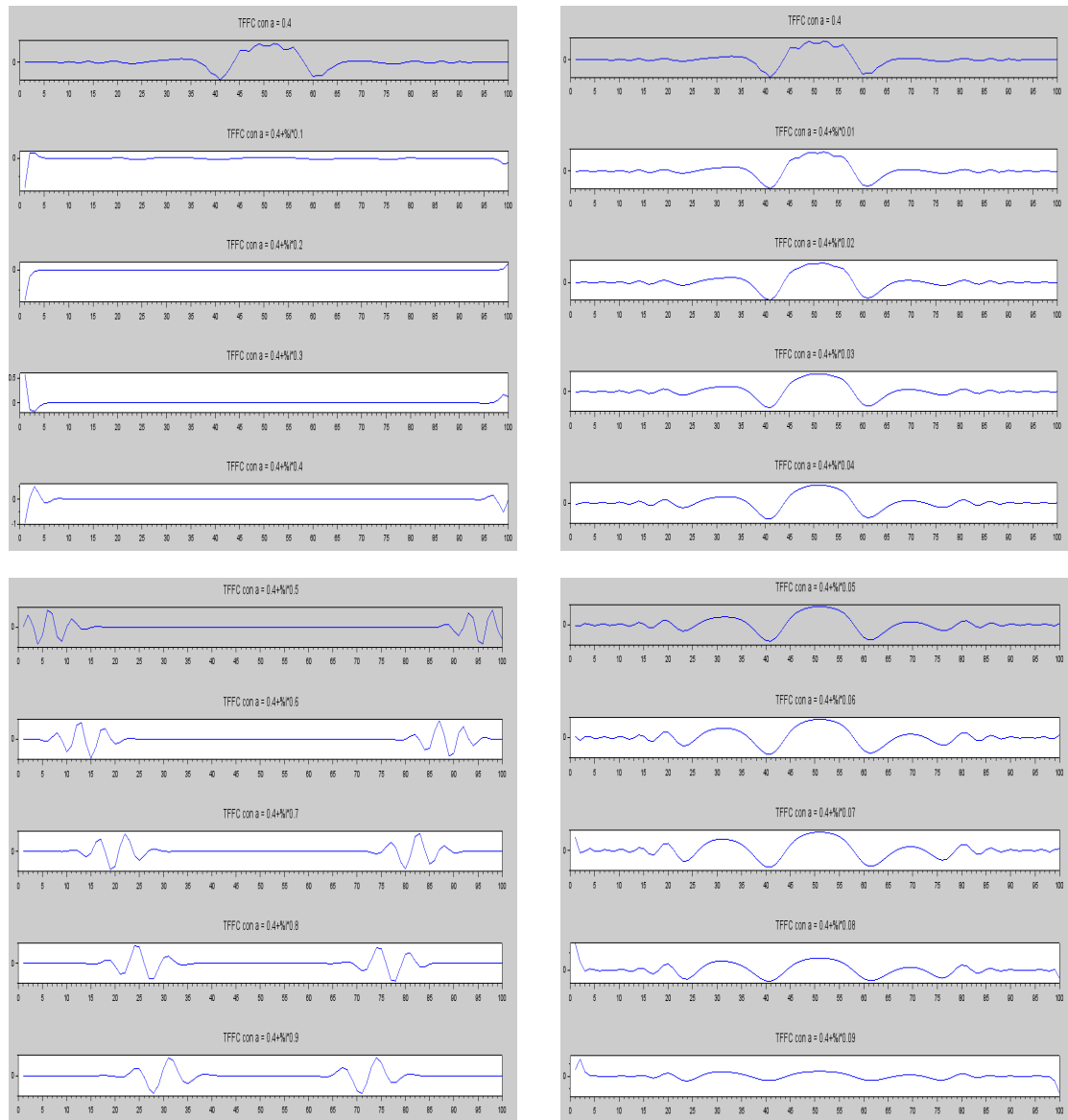


Figura 20. Las dos imágenes a la izquierda muestran la variación de la parte imaginaria del orden con un incremento de 0.1 mientras que en las dos imágenes de la derecha, el incremento es de 0.01.

**3.3.3. Ejemplo 3** En la figura 21 se mantiene constante la parte real del orden en 0.7 y la diferencia más notable se aprecia entre los órdenes  $0.7 + 0i$  y  $0.7 + 0.1i$  donde el incremento se hace más pequeño.

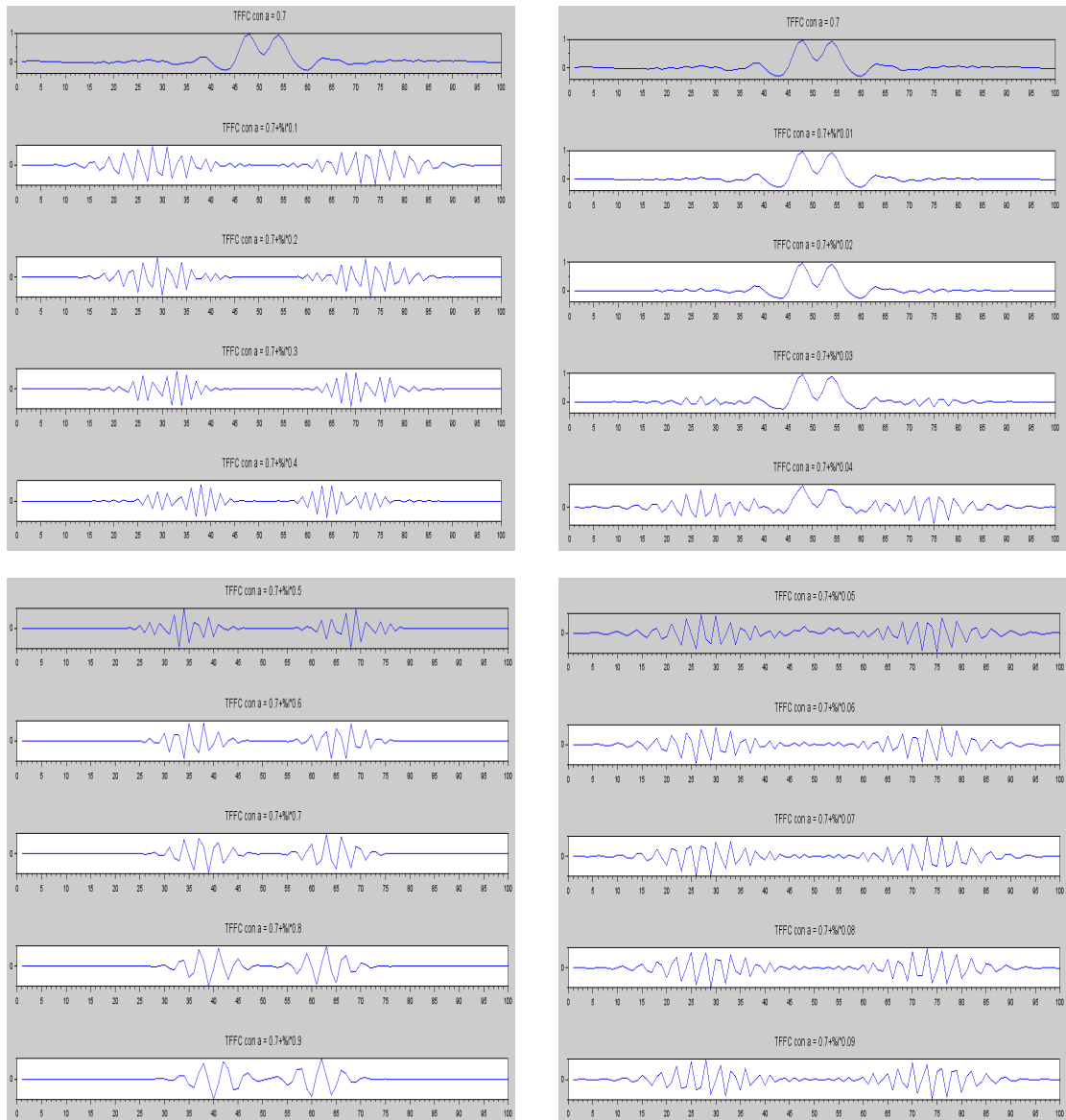


Figura 21. Las dos imágenes a la izquierda muestran la variación de la parte imaginaria del orden con un incremento de 0.1 mientras que en las dos imágenes de la derecha, el incremento es de 0.01.

**3.3.4. Ejemplo 4.** En la figura 22 se mantiene constante la parte real del orden en 1 y la diferencia más notable se aprecia entre los órdenes  $1 + 0.1i$  y  $1 + 0.2i$  donde el incremento se hace más pequeño.

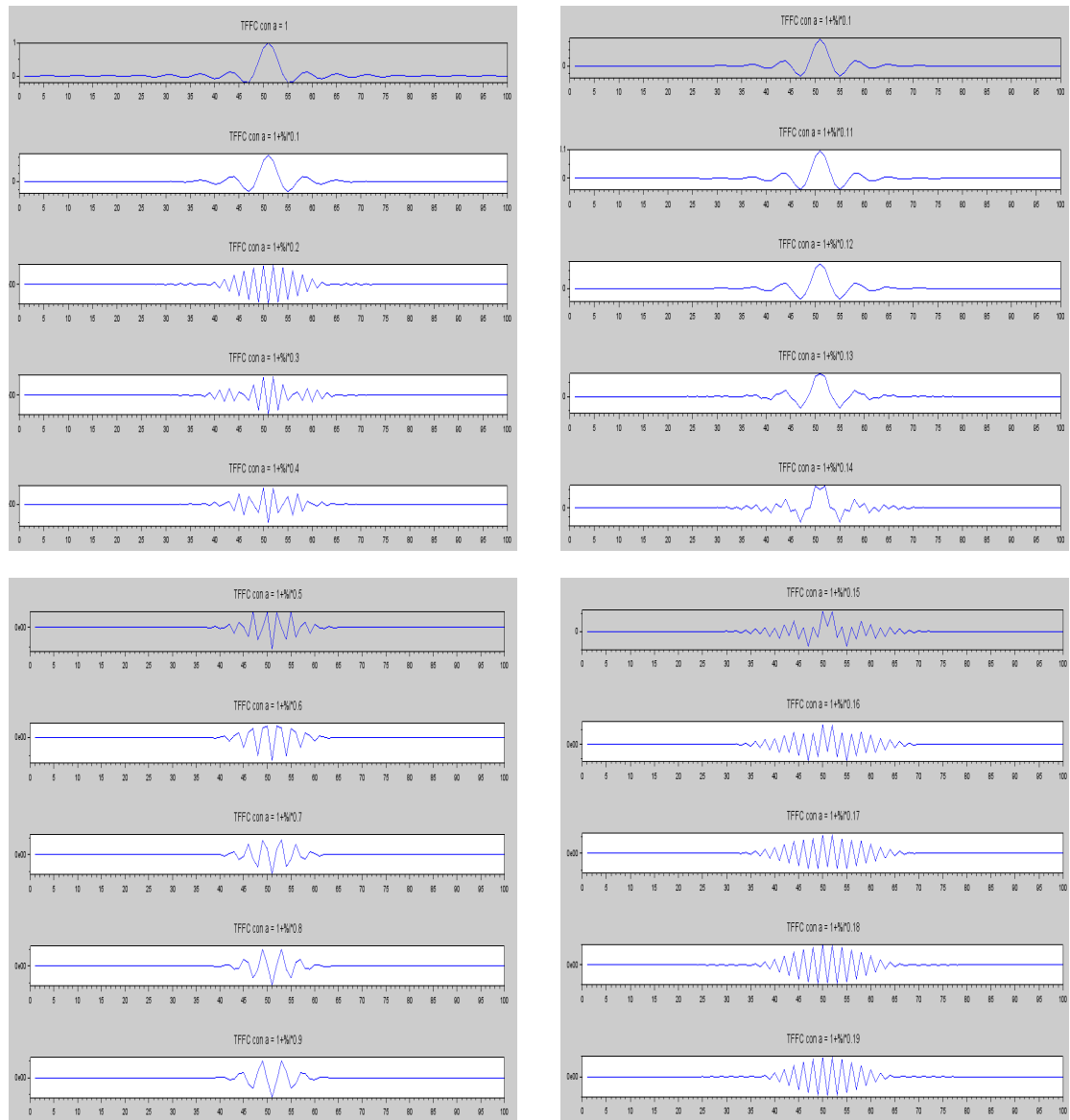


Figura 22. Las dos imágenes a la izquierda muestran la variación de la parte imaginaria del orden con un incremento de 0.1 mientras que en las dos imágenes de la derecha, el incremento es de 0.01.

### 3.4. Comportamiento de la amplitud para diferentes órdenes complejos

De la sección anterior, se aprecia que el algoritmo produce una respuesta al ser sometido a una función de entrada y variados valores del orden. Las primeras curvas

generadas, hasta que la amplitud de la función llega a cero, pueden relacionarse con el fenómeno físico de dispersión y pérdidas. Posteriormente, tras la eliminación de la función, surgen nuevas curvas que no están vinculadas (por el momento) con dicho fenómeno físico, o que podrían ser el resultado de posibles inconsistencias en el algoritmo. En la figura 23 se observa como varía la amplitud de la parte central de la función a medida que se aumenta la parte imaginaria del orden.

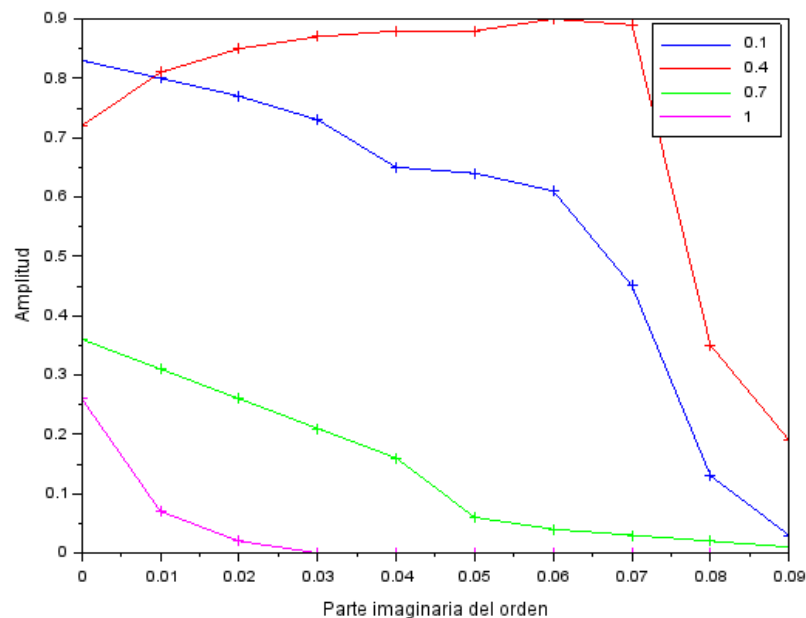


Figura 23. La variación de la parte imaginaria del orden es de 0.01, la amplitud se encuentra entre 0 y 1. Cada color equivale a distintos valores de la parte real del orden, como se muestra en la parte superior derecha.

### 3.5. Comparación del algoritmo con la solución analítica

En la figura 24 se puede apreciar la notable proximidad entre la transformada calculada de forma analítica y la arrojada por el algoritmo de una función gaussiana. La transformada analítica (curva azul) se grafica con los siguientes parámetros:

$z = 120[km]$ ,  $\Delta T = 200 \times 10^{-5}[s]$ ,  $\beta_2 = 20 \times 10^{-5}[s^2/km]$ ,  $\gamma_2 = 10 \times 10^{-12}[s^2/km]$  y  $\Lambda = 1.3[s]$ . Con estos parámetros se llega, a que el orden que se debe aplicar en la transformación calculada por el algoritmo *TFFC* es de  $a = 1.531 + 1.031 \times 10^{-10}i$ .

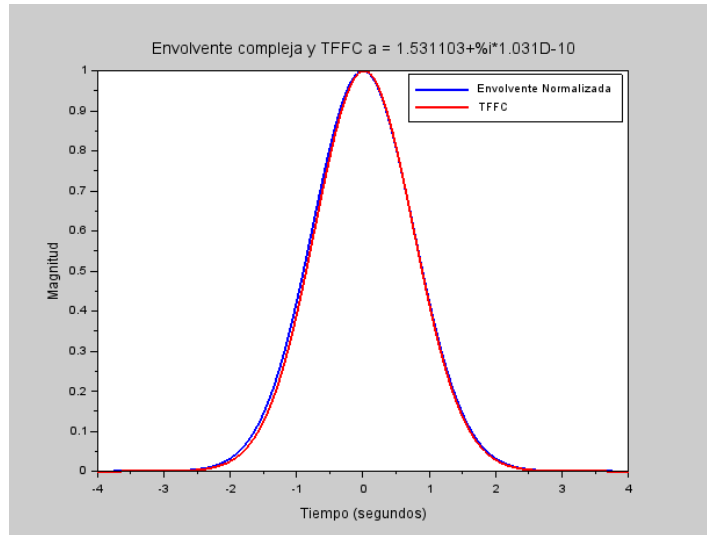


Figura 24. La curva azul es la transformada de Fourier fraccionaria de una función Gaussiana calculada de forma analítica 47. La curva roja es la misma transformada calculada por el algoritmo *TFFC*.

Al calcular la desviación cuadrática media entre el resultado del algoritmo y la solución analítica, se encuentra un valor de 0.0702, lo que indica un notable grado de aproximación entre las curvas. Además, el orden de esta transformación está estrechamente relacionado con parámetros físicos cruciales, como la dispersión cromática y las pérdidas dependientes de la frecuencia, lo que subraya la importancia de adaptar el orden de la *TFFC* según las características específicas del medio y la señal en cuestión para obtener una descripción precisa de la propagación de ondas en dichos entornos.

A continuación, se emplean tanto los resultados analíticos como los obtenidos mediante el algoritmo para un medio distinto, en este caso, la sangre M. N. Polyanskiy. “Refractiveindex.info database of optical constants”. En: *Sci. Data* 11 (2024),

pág. 94. DOI: 10.1038/s41597-023-02898-2. Esto permite establecer los parámetros:  $\Delta T = 200 \times 10^{-5} [s]$ ,  $\beta_2 = 0.24743 [s^2/km]$ ,  $\gamma_2 = 0.01 [s^2/km]$  y  $\Lambda = 2.84 [s]$ . Con esto, se obtiene que el orden que se debe aplicar en el algoritmo es de  $1.5121 + 0.0035i$ .

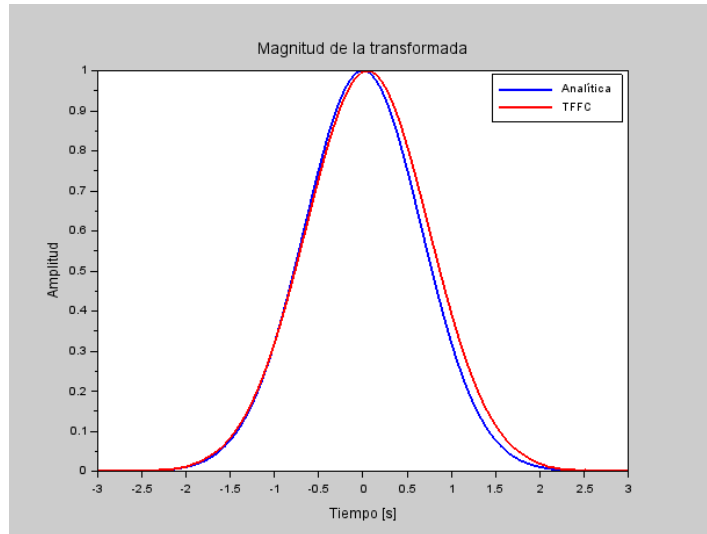


Figura 25. La curva azul es la transformada de Fourier fraccionaria de una función Gaussiana calculada de forma analítica 47. La curva roja es la misma transformada calculada por el algoritmo *TFFC*.

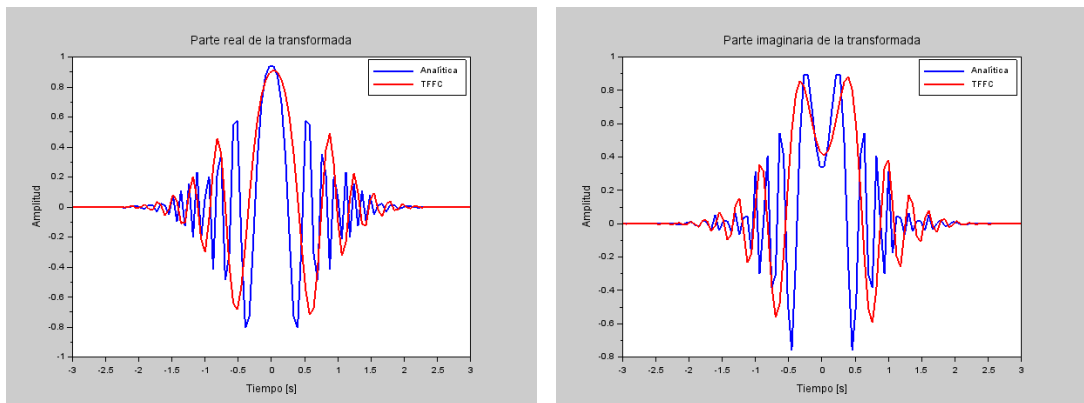


Figura 26. Parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) de la transformada.

### 3.6. Respuesta del algoritmo a diferentes parámetros físicos

Considerando la dispersión cromática del material BK7 Polyanskiy, “Refractiveindex.info database of optical constants” y asumiendo que las pérdidas son una cuarta parte de esta, se adopta este criterio porque si las pérdidas fueran considerablemente mayores, el sistema físico no permitiría la propagación del campo.

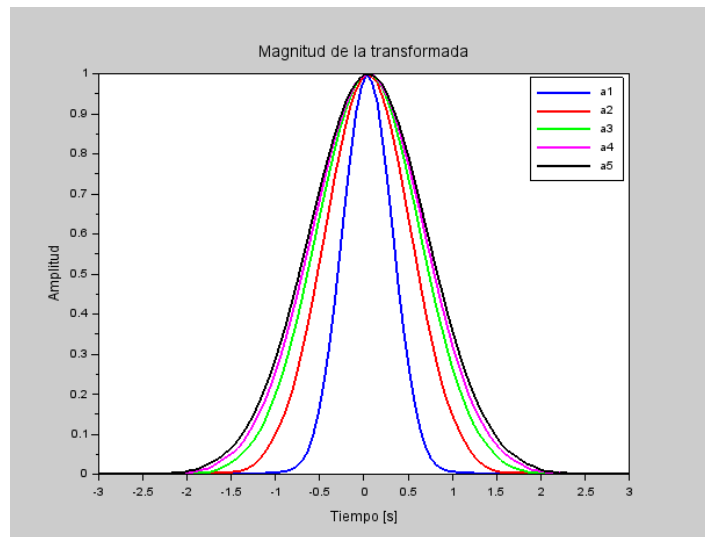


Figura 27. Cada curva se asocia a un orden distinto que está relacionado con los parámetros físicos, tal como se ilustra en la tabla 8.

En la figura 27 se calcula la  $TFFC$  para una función Gaussiana, donde cada curva corresponde con un orden asociado a ciertos parámetros de dispersión cromática y pérdidas, como sigue:

$\beta_2$ [ $\mu m^{-1}$ ]	$\gamma_2$ [ $\mu m^{-1}$ ]	Orden
-0.35575	-0.08893	$a1 = -1.4133 - 0.0048i$
-0.20721	-0.05180	$a2 = -1.4848 - 0.0034i$
-0.13316	-0.03319	$a3 = -1.5205 - 0.0023i$
-0.09166	-0.02291	$a4 = -1.5394 - 0.0017i$
-0.06648	-0.01662	$a5 = -1.5500 - 0.0012i$

Cuadro 8. Valores del orden complejo a partir de los parámetros físicos.

### 3.7. Relación entre el orden de la transformada y la propagación de la onda

En esta sección, se analiza la influencia del orden de la transformada sobre la evolución de diversas funciones, explorando las siguientes figuras (28, 29, 30). Estas figuras son generadas mediante la variación del orden del operador  $TFFC$  aplicado a diferentes funciones. A través de estas representaciones, se visualiza cómo las funciones experimentan modificaciones conforme varía la parte real e imaginaria del parámetro  $a$ , lo que proporciona información sobre su relación con la evolución de los campos en medios dispersivos con pérdidas. Es importante destacar que un aumento en la distancia de propagación conlleva a una mayor dispersión o ensanchamiento del campo, lo que puede ocasionar modificaciones significativas en la forma y el ancho de la envolvente.

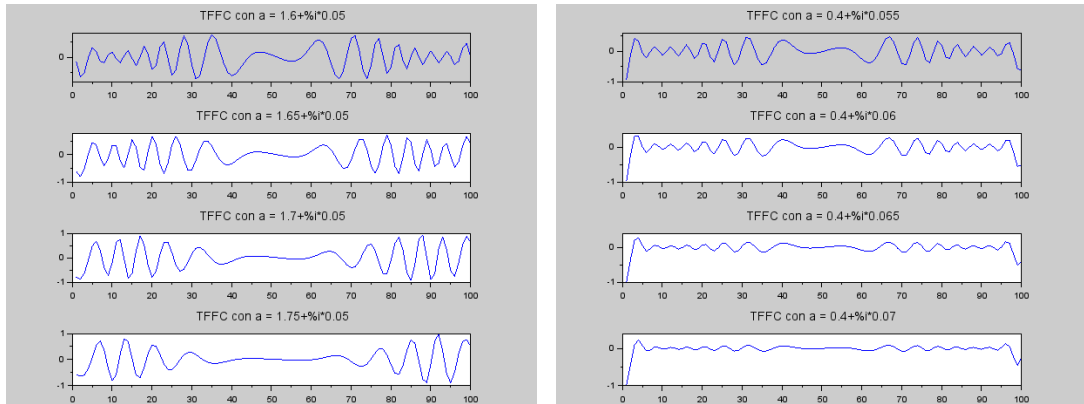


Figura 28. Variación de la parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) del orden ( $a$ ) y su influencia en el ensanchamiento y la amplitud de la función  $s(x)$ .

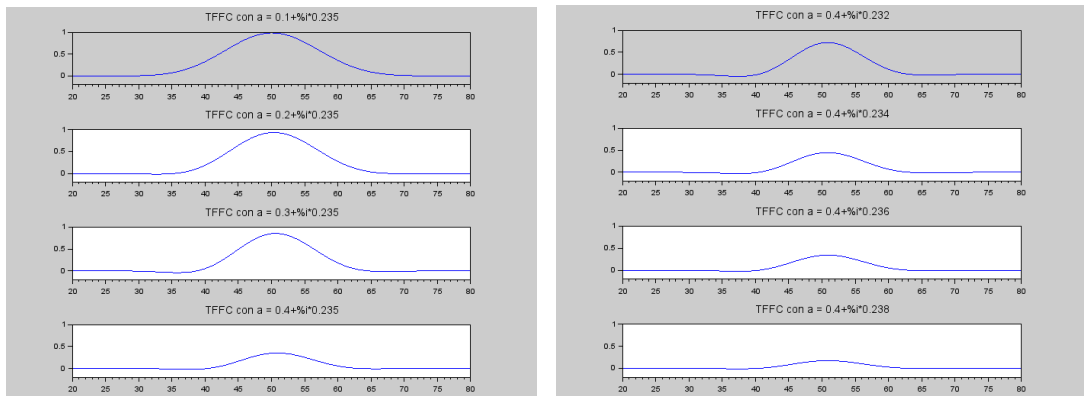


Figura 29. Variación de la parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) del orden ( $a$ ) y su influencia en el ensanchamiento y la amplitud de la función  $g(x)$ .

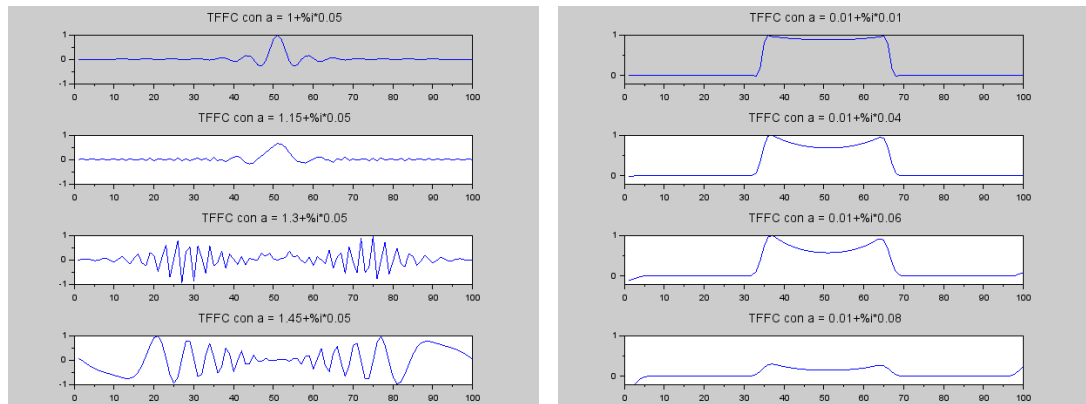


Figura 30. Variación de la parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) del orden ( $a$ ) y su influencia en el ensanchamiento y la amplitud de la función  $r(x)$ .

### 3.8. Discusión de Resultados

Los resultados presentados anteriormente revelan que el algoritmo satisface las propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria, dado que la desviación cuadrática media obtenida al comparar las curvas en distintas propiedades es menor a 0.2. Además, se observa que el teorema de Parseval no se cumple, ya que los valores de la tabla 2 no son completamente idénticos. Esto se atribuye al hecho de que el operador  $TFFC$  no es unitario. Es importante tener en cuenta el contexto físico subyacente, ya que el orden complejo del operador proviene de tener en cuenta las pérdidas durante la propagación del campo, lo que resulta en una no conservación de la energía.

Al realizar el barrido de la parte imaginaria del orden, se observa que existen ciertos valores para los cuales los cambios en la transformada son más notables. Para analizar en detalle estas variaciones, se utiliza un paso más fino entre estos órdenes. Se observa que la amplitud de la parte central de la transformada tiende a cero a medida que la parte imaginaria del orden aumenta. Además, la comparación con la solución analítica de una función gaussiana, para distintos valores de los parámetros

físicos, confirma la consistencia del algoritmo con los resultados teóricos. Al tomar diferentes valores de dispersión cromática y pérdidas dependientes de la frecuencia, se obtienen diversos órdenes complejos, que muestran una relación directa con la evolución del campo.

Se evidencia la relación entre el orden de la transformada de Fourier fraccionaria y el campo propagado en un medio dispersivo con pérdidas. La manipulación de la parte imaginaria del orden, directamente vinculada a las pérdidas dependientes de la frecuencia, resulta en un ensanchamiento adicional en el paquete de ondas. Para abordar las discontinuidades en la implementación del algoritmo, se emplea la propiedad de aditividad del orden del operador que estamos aplicando. Esta propiedad permite calcular la *TFFC* de orden  $\alpha$  donde no hay discontinuidades, para luego, mediante otro valor del orden calculable, llegar a la transformada en la cual se presenta la discontinuidad.

Sin embargo, es importante señalar que aunque esta propiedad ayuda a mitigar el impacto de las discontinuidades, pueden existir órdenes para los cuales el algoritmo no funcione del todo bien. Esto podría deberse a la naturaleza de las discontinuidades y a la forma en que interactúan con los valores de  $\alpha$  elegidos para calcular las transformadas intermedias. Por tanto, se requiere un análisis cuidadoso de las características específicas de la función y las discontinuidades presentes para determinar la efectividad del enfoque de aditividad del orden en la resolución de discontinuidades en la transformada de Fourier fraccionaria de orden complejo.

Cuando se emplean valores mayores que los presentados en este estudio para la parte imaginaria del orden, aunque se obtiene un resultado, su interpretación con el fenómeno físico puede volverse desafiante. Esto se puede asociar a posibles errores

en el algoritmo para valores grandes de la parte imaginaria u otros factores que no se han estudiado en este trabajo.

La aplicación específica de la *TFFC* y su algoritmo asociado puede requerir una consideración detallada en términos de su aplicabilidad en diferentes contextos y condiciones. Por ende, futuras investigaciones podrían profundizar aún más en las aplicaciones específicas y las implicaciones prácticas de la manipulación del orden de la transformada.

## 4. CONCLUSIONES

A partir de los resultados teóricos, se implementa un algoritmo en Scilab para calcular la transformada de Fourier fraccionaria de orden complejo. Las pruebas realizadas han demostrado una notable correspondencia con las propiedades teóricas del operador. Además, al variar la parte imaginaria del orden y mantener constante la parte real, el algoritmo sigue generando resultados coherentes. Se utilizan valores de un medio dispersivo real, la sangre, para realizar el cálculo tanto con el algoritmo como con la solución analítica, evidenciando una correspondencia entre ambos resultados.

Con el comportamiento del algoritmo, se establece una relación directa entre el orden de la transformada y el impacto de la dispersión cromática y las pérdidas dependientes de la frecuencia en el campo propagado. Este resultado cobra relevancia al observar cómo el ensanchamiento adicional del campo propagado está relacionado con el orden de la transformada de Fourier fraccionaria. Además, ajustar el orden permite tener una noción de la evolución del paquete de ondas durante su propagación, convirtiéndose en una herramienta poderosa para controlar, optimizar y analizar la propagación de ondas en diversos contextos y aplicaciones.

## BIBLIOGRAFÍA

- Amaris, M. y R. Torres. “Aplicacion en Scilab para el tratamiento de señales digitales con la transformación de Fourier fraccionaria: Filtro de Wiener fraccionario”. En: *Universidad del Magdalena, facultad de ingeniería, programa de ingeniería de sistemas* (2009) (vid. pág. 35).
- Bernardo, L. M. “Talbot self-imaging in Fractional Fourier plane of real and complex orders”. En: *Opt. Comm.* 140 (1997), págs. 195-198 (vid. pág. 19).
- Bernardo, L. M. y O.D.D. Soares. “Optical fractional Fourier transform with complex orders”. En: *Appl. Opt* 35 (1996), págs. 3163-3166 (vid. pág. 19).
- Bonnet, G. “Au-delá d’une vitesse de groupe: vitesse d’onde et vitesse de signal. Première partie: l’opérateur vitesse de groupe en l’absence d’affaiblissement”. En: 38 (1983), págs. 345-366 (vid. pág. 18).
- “déformation de l’amplitude et influence de l’affaiblissement”. En: 38 (1983), págs. 473-487 (vid. pág. 18).
- Foster, Mark A, Kevin D Moll y Alexander L Gaeta. “Optimal waveguide dimensions for nonlinear interactions”. En: *Optics Express* 12.13 (2004), págs. 2880-2887 (vid. pág. 16).
- K. J. Parker, T. Szabo y S. Holm. “Towards a consensus on rheological models for elastography in soft tissues”. En: *IPEM. Phys. Med. Biol* (2019) (vid. pág. 17).

- Kikuchi, Kazuro. "Enhancement of optical-amplifier noise by nonlinear refractive index and group-velocity dispersion of optical fibers". En: *IEEE photonics technology letters* 5.2 (1993), págs. 221-223 (vid. pág. 17).
- Knight, JC et al. "Anomalous dispersion in photonic crystal fiber". En: *IEEE photonics technology letters* 12.7 (2000), págs. 807-809 (vid. pág. 16).
- Lin, Q, Oskar J Painter y Govind P Agrawal. "Nonlinear optical phenomena in silicon waveguides: modeling and applications". En: *Optics express* 15.25 (2007), págs. 16604-16644 (vid. pág. 17).
- Lizarazo, Z. et al. "Dispersión-Pérdidas en líneas de transmisión y la transformación de Fourier fraccionaria". En: *A someterse en 7th Ibero-American Conference on Optics (RIAO); 10th Latin-American Meeting on Optics, Lasers and Applications (OPTILAS)*. 2010 (vid. págs. 18, 24, 27, 30, 31).
- Malyutin, Aleksandr Aleksandrovich. "Complex-order fractional Fourier transforms in optical schemes with Gaussian apertures". En: *Quantum Electronics* 34.10 (2004), págs. 960-964 (vid. pág. 19).
- Mogilevtsev, D, Tim A Birks y P St J Russell. "Group-velocity dispersion in photonic crystal fibers". En: *Optics letters* 23.21 (1998), págs. 1662-1664 (vid. pág. 16).
- Mollenauer, Linn F, Roger H Stolen y James P Gordon. "Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers". En: *Physical Review Letters* 45.13 (1980), pág. 1095 (vid. pág. 16).
- Nakatsuka, Hiroki, D Grischkowsky y AC Balant. "Nonlinear picosecond-pulse propagation through optical fibers with positive group velocity dispersion". En: *Physical Review Letters* 47.13 (1981), pág. 910 (vid. pág. 17).

- Namias, Victor. "The Fractional Fourier Transform and its application to quantum mechanics". En: *J. Inst. Math. Appl.* 25 (1980) (vid. pág. 28).
- Notomi, M et al. "Extremely Large Group-Velocity Dispersion of Line-Defect Waveguides in Photonic Crystal Slabs". En: 87 (ene. de 2001) (vid. pág. 16).
- Oughstun, Kurt E y Constantinos M Balitsis. "Gaussian pulse propagation in a dispersive, absorbing dielectric". En: *Physical review letters* 77.11 (1996), pág. 2210 (vid. pág. 17).
- Pellat-Finet, P. *Optique de Fourier. Théorie métaxiale et fractionnaire*. Paris: Springer, 2009 (vid. págs. 18, 24, 25).
- "Transfert du champ électromagnétique par diffraction et transformation de Fourier fractionnaire". En: *C. R. Acad. Sci* 320 (1995), págs. 91-97 (vid. pág. 18).
- Pellat-Finet, P. y G. Bonnet. "Fractional order Fourier transform and Fourier optics". En: *Opt. Comm* 111 (1994), págs. 141-154. DOI: 10.1016/0030-4018(94)90154-6 (vid. pág. 18).
- Pellat-Finet, P. y É. Fogret. "Complex order fractional Fourier transforms and their use in diffraction theory. Application to optical resonators". En: *Opt. Comm.* 258 (2006), págs. 103-113. DOI: 10.1016/j.optcom.2005.07.072 (vid. pág. 19).
- Pellat-Finet, P., Z. Lizarazo y R. Torres. "On the analogy between Fresnel diffraction and dispersion in transmission lines and some of its applications". En: (vid. pág. 18).
- Polyanskiy, M. N. "Refractiveindex.info database of optical constants". En: *Sci. Data* 11 (2024), pág. 94. DOI: 10.1038/s41597-023-02898-2 (vid. págs. 57, 59).

- R. Torres Y. Torres, P. Pellat-Finet. "Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional". En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004) (vid. págs. 32, 73-76).
- Ranka, Jinendra K., Robert S. Windeler y Andrew J. Stentz. "Visible continuum generation in air-silica microstructure optical fibers with anomalous dispersion at 800 nm". En: *Opt. Lett.* 25.1 (2000), págs. 25-27. DOI: 10.1364/OL.25.000025 (vid. pág. 16).
- Reeves, WH et al. "Transformation and control of ultra-short pulses in dispersion-engineered photonic crystal fibres". En: *Nature* 424.6948 (2003), pág. 511 (vid. pág. 16).
- Ryu, S. "Change of field spectrum of signal light due to fibre nonlinearities and chromatic dispersion in long-haul coherent systems using in-line optical amplifiers". En: *Electronics Letters* 28.24 (1992), págs. 2212-2213. DOI: 10.1049/e1:19921421 (vid. pág. 16).
- Sharping, Jay E et al. "Four-wave mixing in microstructure fiber". En: *Optics letters* 26.14 (2001), págs. 1048-1050 (vid. pág. 17).
- Shih, Chun-Ching. "Optical interpretation of a complex-order Fourier transform". En: *Optics letters* 20.10 (1995), págs. 1178-1180 (vid. pág. 19).
- Srivastava, Ankit. "Causality and passivity: From electromagnetism and network theory to metamaterials". En: *Elsevier* 154 (2021) (vid. pág. 17).
- Turner, Amy C et al. "Tailored anomalous group-velocity dispersion in silicon channel waveguides". En: *Optics express* 14.10 (2006), págs. 4357-4362 (vid. pág. 16).

Wang, Changtao y Baida Lü. "Implementation of complex-order Fourier transforms in complex ABCD optical systems". En: *Optics communications* 203.1 (2002), págs. 61-66 (vid. pág. 19).

Y. Wang X. Ma, H. Zhou e Y. Chen. " $L_{1-2}$  minimization for exact and stable seismic attenuation compensation". En: *Geophys. J. Int.* 213 (2018), págs. 1629-1646 (vid. pág. 17).

## ANEXOS

### Anexo A. Teorema del muestreo fraccionario.

**4.0.1. Compensación de un desplazamiento por modulación de fase**    Cómo se observa en la sección dónde se habla de las propiedades de la  $TFFr$ , se tiene que la transformada de Fourier fraccional de una función desplazada produce un corrimiento en su transformada que depende del orden fraccional (ver ecuación 51), pero a su vez una modulación de fase corresponde también a un corrimiento de la transformada de Fourier fraccional (ver ecuación 52). Esto conduce a que un corrimiento puede ser compensado con un factor de fase adecuado. Si se tiene un corrimiento  $\xi$ , y una modulación de fase  $e^{-i2\pi(\nu x - \phi)}$ , entonces:

$$\mathcal{F}^\alpha \left[ f(x - \xi) e^{-i2\pi(\nu x - \phi)} \right] (x') = e^{i2\pi\phi} e^{i\pi x'^2 \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}} f(x - \xi) e^{-i2\pi\nu x} e^{i\pi x^2 \cot \alpha} e^{\frac{-i2\pi x x'}{\sin \alpha}} dx. \quad (55)$$

Con el cambio de variables  $x - \xi = z$ ,  $dx = dz$ , para  $\nu = \xi \cot \alpha$  y definiendo  $\phi = \nu \zeta / 2$  se obtiene:

$$\mathcal{F}^\alpha \left[ f(x - \xi) e^{-i2\pi\xi(x - \frac{\xi}{2}) \cot \alpha} \right] (x') = f_\alpha(x') e^{-i\frac{2\pi}{\sin \alpha} \xi x'}. \quad (56)$$

Lo anterior se puede escribir convenientemente como:

$$\mathcal{F}^{-\alpha} \left[ f_\alpha(x' - \zeta) e^{i2\pi(\nu x' - \phi)} \right] (x) = f(x) e^{i\frac{2\pi}{\sin \alpha} \zeta x}, \quad (57)$$

dónde  $\nu = \zeta \cot \alpha$ ,  $\phi = \frac{\zeta^2 \cot \alpha}{2}$  y  $f_\alpha(x')$  es la transformada de Fourier fraccional de orden  $\alpha$  de  $f(x)$ .

Replicando la función  $f_\alpha$ , y a cada replica se le compensa su desplazamiento con un factor de fase adecuado tal que:

$$g_\alpha(x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_\alpha(x' - n\zeta) e^{i2\pi(\nu_n x' - \phi_n)}, \quad (58)$$

dónde  $\nu_n = n\zeta \cot \alpha$  y  $\phi_n = \frac{n^2 \zeta^2 \cot \alpha}{2}$ . Además, las réplicas son hechas de modo que  $\zeta$  es a su vez el soporte de  $f_\alpha(x')$ .

La transformada de Fourier fraccional de orden  $-\alpha$  de esta función es:

$$\mathcal{F}^{-\alpha} [g_\alpha(x')] (x) = f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{nx}{(\sin \alpha)/\zeta}}. \quad (59)$$

La sumatoria que multiplica a esta función corresponde a una peinilla de Dirac de la forma:

$$P(x) = \frac{\sin \alpha}{\zeta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left( x - n \frac{\sin \alpha}{\zeta} \right). \quad (60)$$

El paso de la peinilla está dado por  $(\sin \alpha)/\zeta$ , de esta manera:

$$\mathcal{F}^\alpha \left[ f(x) \frac{\sin \alpha}{\zeta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left( x - n \frac{\sin \alpha}{\zeta} \right) \right] (x') = g_\alpha(x'). \quad (61)$$

**Teorema:** Sea  $f(x)$  una función tal que su transformada de Fourier fraccional de orden  $\alpha$ ,  $f_\alpha$  tiene soporte finito  $\zeta$ , esta señal  $f(x)$  puede ser muestreada y reconstruida perfectamente si las muestras se toman a una tasa  $\Delta_x \leq (\sin \alpha)/\zeta$ .

Ciertas funciones que no son de banda limitada, pero que en algún dominio fraccional su soporte es finito, pueden ser muestreadas y reconstruidas con exactitud según los criterios antes mencionados.

**4.0.2. Interpolación** La función  $g_\alpha(x')$  se puede ver cómo una suma de funciones Chirp, las cuales al orden fraccional  $-\alpha$  son un conjunto de distribuciones de Dirac

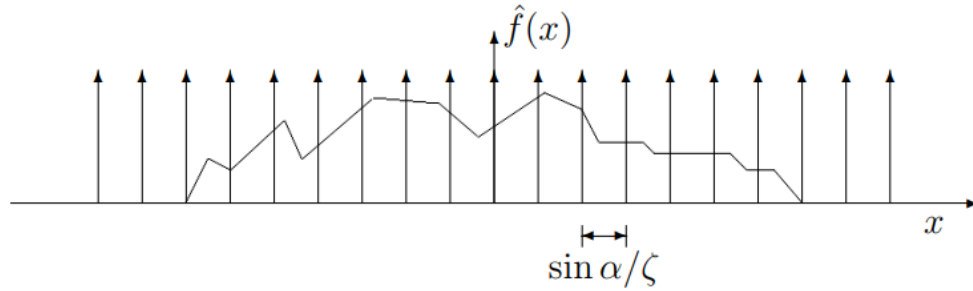


Figura 31. Función muestreada a una tasa adecuada. Tomado de P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. “Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional”. En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004).

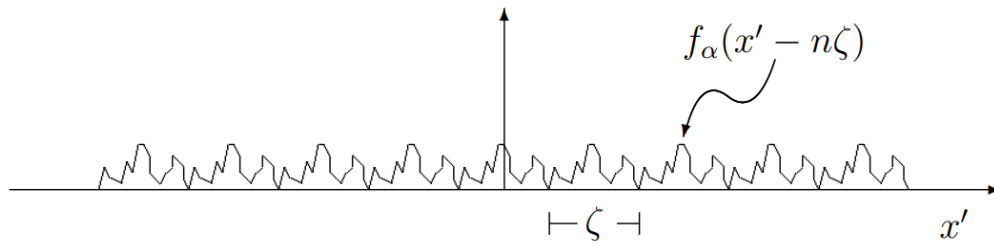


Figura 32. Colección de “espectros fraccionales” para el caso  $\Delta_x = \frac{\sin \alpha}{\zeta}$ . Tomado de P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. “Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional”. En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004).

correspondientes a la función  $\hat{f}(x)$

$$\hat{f}(x) = f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left( x - n \frac{\sin \alpha}{\zeta} \right) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f \left( n \frac{\sin \alpha}{\zeta} \right) \delta \left( x - n \frac{\sin \alpha}{\zeta} \right), \quad (62)$$

tal que:

$$g_\alpha(x') = \mathcal{F}^\alpha[\hat{f}](x'). \quad (63)$$

Al final se llega a lo esperado ya que  $g_\alpha(x')$  es una suma de funciones Chirp ponderadas apropiadamente, las cuales convergen cada una a las distribuciones de Dirac

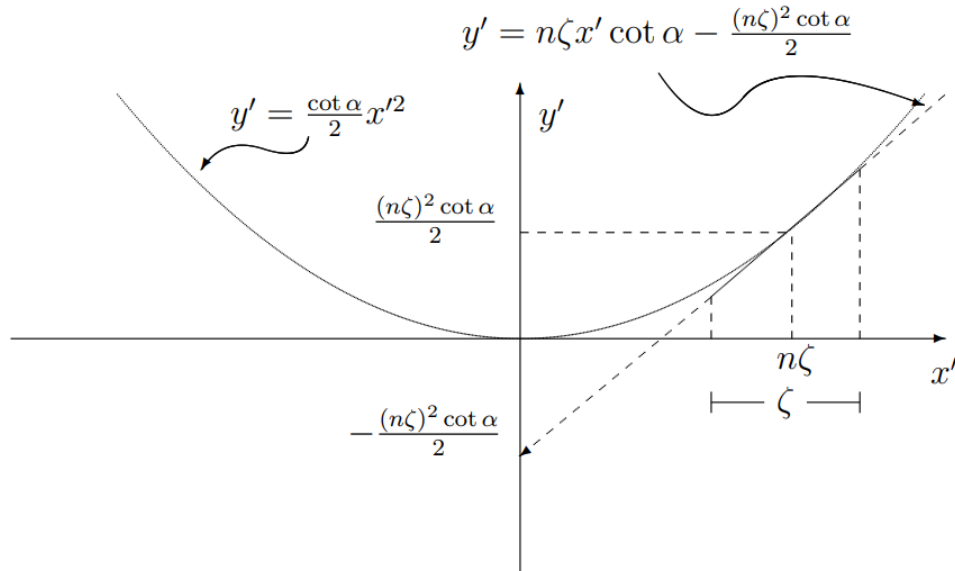


Figura 33. Función de fase que compensa los desplazamientos. Tomado de P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. “Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional”. En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004).

que conforman la función  $\hat{f}(x)$ .

Para separar cualquiera de las replicas que conforman la función  $g_\alpha(x')$  se usa una función rectángulo desplazado a la posición  $m\zeta$ , siendo  $m$  un entero y  $\zeta$  el ancho de banda fraccional, obteniendo:

$$f(x) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(n\Delta_x) \text{sinc} \left( \pi\zeta \frac{x - n\Delta_x}{\sin \alpha} \right). \quad (64)$$

La función de interpolación para funciones de “espectros fraccionales limitados” está dada por la función *sinc* escalada adecuadamente y ubicada en las posiciones correspondientes a las distribuciones deltas de Dirac que conforman la función  $\hat{f}$ .

**4.0.3. Transformada discreta de Fourier fraccional** Sin pérdida de información y periodizando a  $\hat{f}(x)$ , siendo  $\hat{f}$  la versión discreta de  $f$ , se tiene que:

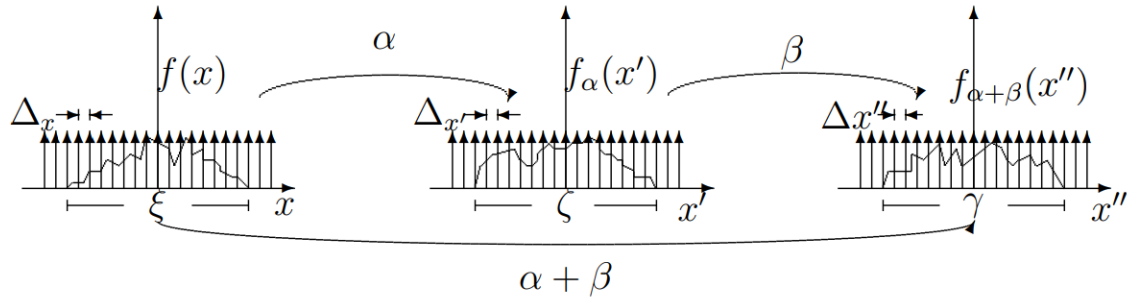


Figura 34. Aditividad de los ordenes fraccionales. Tomado de P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. “Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional”. En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004).

$$\hat{g}_\alpha(x') = \mathcal{F}^\alpha[h(x)](x') = g_\alpha(x') \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\xi} \delta \left( x' - k \frac{\sin \alpha}{\xi} \right), \quad (65)$$

escribiendola en función de los términos conocidos, como lo son el número de muestras  $N$  y el soporte de  $f$  que es  $\xi$ , tenemos:

$$f_\alpha \left( k \frac{\sin \alpha}{\xi} \right) = \exp \left[ i\pi \left( \frac{k}{\xi} \right)^2 \frac{\sin 2\alpha}{2} \right] \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f \left( n \frac{\xi}{N} \right) \exp \left[ i\pi \left( \frac{n\xi}{N} \right)^2 \cot \alpha \right] \exp \left[ -\frac{2i\pi kn}{N} \right]. \quad (66)$$

Esta definición asocia  $N$  muestras en el dominio directo con  $N$  muestras en el dominio fraccional, pero además con la condición que se cumpla la tasa de muestreo óptimo en los dos dominios, dada por el teorema del muestreo, lo cual quiere decir que no hay pérdida de información bajo esta transformación discreta. Lo anterior repercute en el hecho que bajo dos transformaciones sucesivas se debe cumplir la propiedad de la aditividad de los ordenes fraccionales (ver figura 34).

Si la tasa de muestreo en el dominio fraccional no es la adecuada; es decir, no está dada según el criterio antes mencionado, por ejemplo  $\Delta'_{x'} < \Delta_{x'}$  se tendrán  $N$  muestras en el dominio fraccional pero que corresponden sólo a una parte del espectro

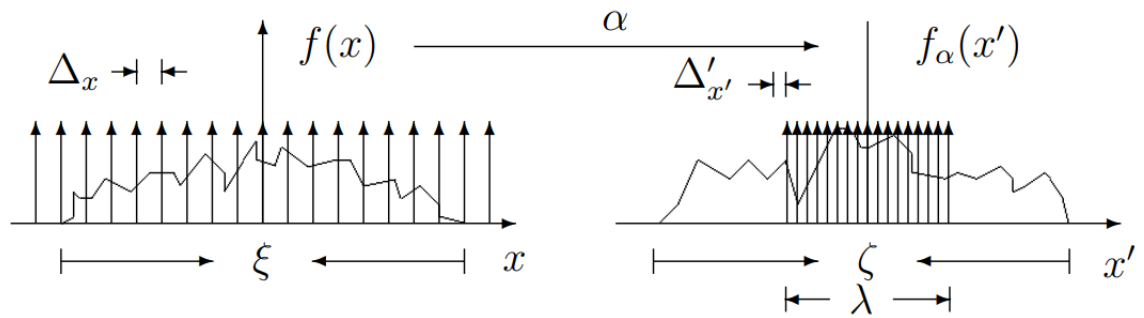


Figura 35. Espectro no reconstruido completamente (muy alta tasa de muestreo). Tomado de P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. "Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional". En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004).

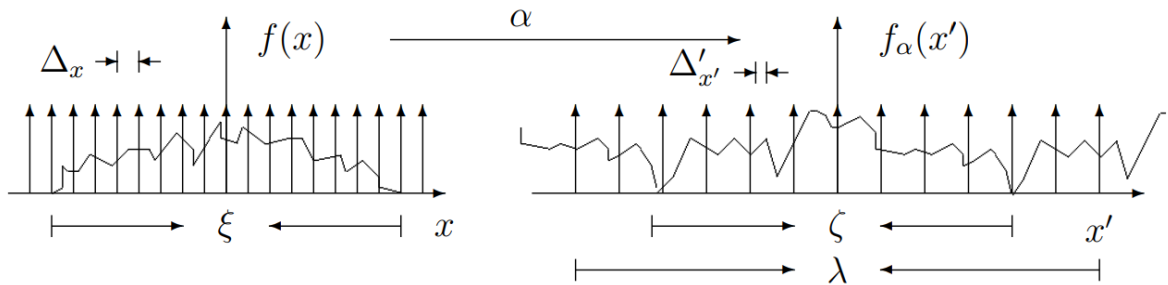


Figura 36. Espectro no reconstruido completamente (rata de muestreo deficiente). Tomado de P. Pellat-Finet R. Torres Y. Torres. "Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional". En: *Universidad Industrial de Santander, escuela de física* (2004).

fraccional (ver figura 35), ya que  $\lambda < \zeta$ , dónde  $\lambda = N\Delta'_{x'}$ .

Otro caso, es si la tasa de muestreo en el espectro es tal que el número de muestras es deficiente; es decir,  $\Delta'_{x'} > \Delta_{x'}$  (ver figura 36). Luego del cálculo se tendrán también  $N$  muestras, pero separadas entre si de manera que  $\lambda > \zeta$ , donde  $\lambda = N\Delta'_{x'}$ .

Si luego se hace otra transformación de Fourier fraccional de orden  $\beta$  no se llega a una transformada de Fourier fraccional del orden  $\alpha + \beta$ , lo cual se traduce como

una violación a la propiedad de composición que debe cumplir la transformación de Fourier fraccional discreta.

## Anexo B. Algoritmo en Scilab.

```
1: function TFFC(f, a,  $\tau$ )
2:   flag  $\leftarrow$  0
3:   s  $\leftarrow$  sign(a)
4:   N1  $\leftarrow$  max(size(f))
5:   N  $\leftarrow$  4  $\times$  N1
6:   g  $\leftarrow$  [zeros(1, N1), intergen(f), zeros(1, N1)]
7:    $\tau$   $\leftarrow$   $\tau$   $\times$  2
8:   a_real  $\leftarrow$  real(a)
9:   a_imag  $\leftarrow$  imag(a)
10:  a_real  $\leftarrow$  a_real - fix ( $\frac{a\_real}{4}$ )  $\times$  4
11:   $\alpha$   $\leftarrow$   $\frac{\text{mtlb\_double}(a\_real) \times \pi}{2}$ 
12:   $\phi$   $\leftarrow$   $\frac{\text{mtlb\_double}(a\_imag) \times \pi}{2}$ 
13:  cos2  $\leftarrow$  cos( $\alpha$ )  $\times$  cosh( $\phi$ ) - i  $\times$  sin( $\alpha$ )  $\times$  sinh( $\phi$ )
14:  sin2  $\leftarrow$  sin( $\alpha$ )  $\times$  cosh( $\phi$ ) + i  $\times$  cos( $\alpha$ )  $\times$  sinh( $\phi$ )
15:  cot2  $\leftarrow$   $\frac{\text{cos2}}{\text{sin2}}$ 
16:  if mtlb_logic(s, "==" , -1) then
17:     $\xi$   $\leftarrow$   $\sqrt{N}$ 
18:    Dx  $\leftarrow$   $\frac{\xi}{N}$ 
19:    n  $\leftarrow$  linspace( $-\frac{N}{2}$ ,  $\frac{N}{2} - 1$ , N)'
20:    g  $\leftarrow$  g  $\times$  exp(i  $\times$  2  $\times$   $\pi$   $\times$   $\tau$   $\times$  (n +  $\tau$   $\times$   $\frac{\text{cos2}}{2}$ )  $\times$  (Dx2)  $\times$  sin2)
21:     $\tau$   $\leftarrow$  - $\tau$   $\times$  cos2
22:    flag  $\leftarrow$  1
23:  end if
24:  if (a_imag < 0) and (a_imag  $\geq$  -1) then
25:    a  $\leftarrow$  -a
26:  end if
```

```

27:  if ( $a_{real} > 0$ ) and ( $a_{real} < 0.5$ ) then
28:       $flag \leftarrow 2$ 
29:       $a \leftarrow a - 1$ 
30:  else if ( $a_{real} > -0.5$ ) and ( $a_{real} < 0$ ) then
31:       $flag \leftarrow 3$ 
32:       $a \leftarrow a + 1$ 
33:  else if ( $a_{real} > 1.5$ ) and ( $a_{real} < 2$ ) then
34:       $flag \leftarrow 4$ 
35:       $a \leftarrow a - 1$ 
36:  else if ( $a_{real} > -2$ ) and ( $a_{real} < -1.5$ ) then
37:       $flag \leftarrow 5$ 
38:       $a \leftarrow a + 1$ 
39:  end if
40:  if ( $a_{real} == 0$ ) and ( $a_{imag} \leq 1$ ) and ( $a_{imag} > 0$ ) then
41:       $flag \leftarrow 6$ 
42:       $a \leftarrow a + 1 \times i$ 
43:  end if
44:  if ( $a == 0$ ) then
45:       $tf \leftarrow g$ 
46:  else if ( $a == 2$ ) or ( $a == -2$ ) then
47:       $tf \leftarrow g(:, \$ : -1 : 1)$ 
48:  else
49:       $tf \leftarrow \text{TFFrgen\_complex}(g, a, \tau)$ 
50:  end if
51:  if  $flag == 0$  then
52:       $tf \leftarrow tf(N1 + 1 : 3 * N1);$ 
53:  else if  $flag == 1$  then

```

```

54:      $tf \leftarrow tf(N1 + 1 : 3 * N1);$ 
55:     else if flag == 2 then
56:          $tf \leftarrow TFFrgen\_complex(tf', -1, 0)';$ 
57:          $tf \leftarrow tf(N1 + 1 : 3 * N1);$ 
58:     else if flag == 3 then
59:          $tf \leftarrow TFFrgen\_complex(tf', 1, 0)';$ 
60:          $tf \leftarrow tf(N1 + 1 : 3 * N1);$ 
61:     else if flag == 4 then
62:          $tf \leftarrow TFFrgen\_complex(tf', -1, 0)';$ 
63:          $tf \leftarrow tf(N1 + 1 : 3 * N1);$ 
64:     else if flag == 5 then
65:          $tf \leftarrow TFFrgen\_complex(tf', 1, 0)';$ 
66:          $tf \leftarrow tf(N1 + 1 : 3 * N1);$ 
67:     else if flag == 6 then
68:          $tf \leftarrow TFFrgen\_complex(tf', 1, 0)';$ 
69:          $tf \leftarrow tf(N1 + 1 : 3 * N1);$ 
70:     else if flag == 7 then
71:          $tf \leftarrow TFFrgen\_complex(tf', -1, 0)';$ 
72:          $tf \leftarrow tf(:, \$ : -1 : 1);$ 
73:          $tf \leftarrow tf(N1 + 1 : 3 * N1);$ 
74:     end if
75:      $m \leftarrow 1 : 2 : \text{máx}(\text{size}(\text{mtlb\_double}(tf)));$ 
76:      $out \leftarrow tf(m);$ 
77: end function

```

---

```

1: function TFFRGEN_COMPLEX( $g, a, \tau$ )

```

```

2:      $a\_real \leftarrow \text{real}(a)$ 

```

```

3:   $a\_imag \leftarrow \text{imag}(a)$ 
4:   $a\_real \leftarrow a\_real - \text{fix}\left(\frac{a\_real}{4}\right) \times 4$ 
5:   $\alpha \leftarrow \frac{\text{mtlb\_double}(a\_real) \times \pi}{2}$ 
6:   $\phi \leftarrow \frac{\text{mtlb\_double}(a\_imag) \times \pi}{2}$ 
7:   $\text{cos2} \leftarrow \cos(\alpha) \times \cosh(\phi) - i \times \sin(\alpha) \times \sinh(\phi)$ 
8:   $\text{sin2} \leftarrow \sin(\alpha) \times \cosh(\phi) + i \times \cos(\alpha) \times \sinh(\phi)$ 
9:   $\text{cot2} \leftarrow \frac{\text{cos2}}{\text{sin2}}$ 
10:  $N \leftarrow \max(\text{size}(\text{mtlb\_double}(g)))$ 
11:  $\xi \leftarrow \sqrt{N}$ 
12:  $\zeta \leftarrow \sqrt{N}$ 
13:  $Dy \leftarrow \frac{\zeta}{N}$ 
14:  $Dx \leftarrow \frac{\xi}{N}$ 
15:  $k \leftarrow \text{linspace}\left(-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, N\right)$ 
16:  $n \leftarrow \text{linspace}\left(-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, N\right)$ 
17:  $C \leftarrow \frac{\exp\left(i \times \text{mtlb\_s}\left(\frac{\pi \times \text{sign}(\text{sin2})}{4}, \frac{\alpha + i \times \phi}{2}\right)\right)}{\sqrt{|\text{sin2}|}}$ 
18:  $ch \leftarrow \exp\left(-i \times \pi \times (k.^2) \times (Dy^2) \times \text{cot2}\right)$ 
19:  $shift \leftarrow \exp\left(i \times 2 \times \pi \times \tau \times (n - \frac{\tau}{2}) \times (Dx^2) \times \text{cot2}\right)$ 
20:  $t \leftarrow \text{TFdgen2}(g \times \text{shift} \times \exp(i \times \pi \times n.^2 \times Dx^2 \times \text{cot2}), \text{sin2})$ 
21:  $\text{out} \leftarrow C \times ch' \times t \times \exp\left(i \times 2 \times \pi \times \tau \times k \times \frac{(Dy^2)}{\text{sin2}}\right)'$ 
22:  return out
23: end function

```

---

```

1: function TFDGEN2( $f, \text{sin2}$ )
2:   $N \leftarrow \max(\text{size}(\text{mtlb\_double}(f)))$ 
3:   $f2 \leftarrow f(:)$ 
4:   $V \leftarrow \text{linspace}\left(-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, N\right)'$ 
5:   $M \leftarrow \text{zeros}(N, N)$ 

```

```

6:   for  $k \leftarrow 1$  to  $N$  do
7:        $M(:, k) \leftarrow (k - \frac{N}{2} - 1) \times V$ 
8:   end for
9:    $M2 \leftarrow \exp\left(\frac{-i2\pi M}{N\sin 2}\right)$ 
10:   $tf \leftarrow M2 \times \text{mtlb\_double}(f2)$ 
11:   $\text{disc} \leftarrow \frac{tf}{\sqrt{N}}$ 
12:  return  $\text{disc}$ 
13: end function

```

---

```

1: function INTERGEN( $x$ )
2:    $N \leftarrow \text{max}(\text{size}(x))$ 
3:    $\text{im} \leftarrow 0$ 
4:   if  $\text{mtlb\_logic}(\text{mtlb\_sum}(\text{abs}(\text{imag}(x))), '>', 0)$  then
5:        $\text{im} \leftarrow 1$ 
6:        $\text{imx} \leftarrow \text{imag}(x)$ 
7:        $x \leftarrow \text{real}(x)$ 
8:   end if
9:    $x2 \leftarrow x(:)$ 
10:   $x2 \leftarrow [x2.^'; \text{zeros}(1, N)]$ 
11:   $x2 \leftarrow x2(:)$ 
12:   $xf \leftarrow \text{mtlb\_fft}(x2)$ 
13:  if  $(N - \text{fix}(N./2) .* 2) == 1$  then ▷ N es impar
14:       $N1 \leftarrow \text{fix}(N/2 + 1)$ 
15:       $N2 \leftarrow 2N - \text{fix}(N/2) + 1$ 
16:       $xint \leftarrow 2\text{real}(\text{mtlb\_ifft}([xf(1 : N1); \text{zeros}(N, 1); xf(N2 : 2N)].'))$ 
17:  else
18:       $xint \leftarrow 2\text{real}(\text{mtlb\_ifft}([xf(1 : N/2); \text{zeros}(N, 1); xf(2N - N/2 + 1 : 2N)].'))$ 

```

```

19:  end if
20:  if  $im == 1$  then
21:       $x2 \leftarrow imx(:)$ 
22:       $x2 \leftarrow [x2.'; zeros(1, N)]$ 
23:       $x2 \leftarrow x2(:)$ 
24:       $xf \leftarrow mtlb\_fft(x2)$ 
25:      if  $(N - \text{fix}(N./2) * 2) == 1$  then                                ▷ N es impar
26:           $N1 \leftarrow \text{fix}(N/2 + 1)$ 
27:           $N2 \leftarrow 2N - \text{fix}(N/2) + 1$ 
28:           $xmint \leftarrow 2\text{real}(mtlb\_ifft([xf(1 : N1); zeros(N, 1); xf(N2 : 2N)].'))$ 
29:      else
30:           $xmint \leftarrow 2\text{real}(mtlb\_ifft([xf(1 : N/2); zeros(N, 1); xf(2N - N/2 + 1 :$ 
           $2N)].'))$ 
31:      end if
32:       $xint \leftarrow mtlb\_a(xint, \%i \times xmint)$ 
33:  end if
34:  return  $xint$ 
35: end function

```