Simulación Numérica de la Hidrodinámica y Transporte de Sedimentos de las Aguas Superficiales Mediante la Aplicación del Método de Volúmenes Finitos

Diego Fernando Bautista Parada

Tesis presentada para Optar al Título de Doctor en Ingeniería Química

Director

David Alfredo Fuentes Díaz

Ph.D.

Codirector

Arlex Chaves Guerrero

Ph.D.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Fisicoquímicas

Escuela de Ingeniería Química

Doctorado en Ingeniería Química

Bucaramanga

2022

Dedicatoria

A la memoria de mis muertos

Agradecimientos

A mi familia por siempre apoyarme en todo.

Al profesor David Fuentes por haber sido una guía constante durante el desarrollo de la Tesis y por haberme dado la oportunidad de realizar este trabajo.

A los profesores Arlex Chaves y Ramiro Martínez por su acompañamiento durante el transcurso del doctorado.

A la Universidad Industrial de Santander por el apoyo económico recibido durante el doctorado a través de su programa de créditos condonables.

Tabla de Contenido

Lista de Tablas

Pág.

Lista de Figuras

Resumen

Título: Simulación Numérica de la Hidrodinámica y Transporte de Sedimentos de las Aguas Superficiales Mediante la Aplicación del Método de Volúmenes Finitos*

Autor: Diego Fernando Bautista Parada**

Palabras Clave: Ecuaciones de aguas someras, CFD, Frente Seco-Mojado, Topografías Variables, Transporte de Sedimentos, Transporte del lecho, Solución Desacoplada.

Descripción:

El manejo adecuado del frente seco-mojado en el flujo de aguas someras es una tarea computacionalmente demandante dada la dificultad que se tiene para localizar la posición exacta de dicha interface y es todavía más desafiante cuando las topografías son irregulares como sucede en el ambiente natural. En esta tesis, se resuelven las ecuaciones de aguas someras y se propone un algoritmo que permite compensar el desbalance de masa generado cuando se implementa un algoritmo de película delgada. Dichas compensaciones se realizan sobre las celdas que lo requieren, distribuyendo dicho desbalance sobre aquellas que cambian su altura en cada instante de tiempo garantizando la positividad del esquema y el balance de masa en todo momento. El algoritmo propuesto se validó a partir de la solución de problemas de referencia junto con problemas experimentales que incluyen condiciones de frontera reflexivas o cerradas y fronteras de flujo abierto con distintos regímenes de flujo. El esquema implementado mostró ser balanceado, con un correcto manejo del frente seco-mojado sobre lechos planos y lechos con pendientes pronunciadas, y, además, provee una buena predicción de los patrones de flujo sobre distintos regímenes de flujo. Por otra parte, se implementó exitosamente una solución numérica del transporte de sedimento y las ecuaciones de aguas someras usando la aproximación desacoplada. Se utilizaron diferentes fórmulas para aproximar la descarga sólida de sedimento. El transporte de sedimento se modeló con la ecuación de Exner y se discretizó utilizando el esquema de Roe junto el método de los volúmenes finitos. Además, se propuso un algoritmo que garantiza el balance de masa en todo el dominio para el agua y el sedimento en todos los instantes de tiempo. Los resultados obtenidos fueron comparados con datos experimentales reportados por otros autores los cuales permitieron validar la solución obtenida.

---

* Tesis Doctoral

** Facultad de Ingenierías Fisicoquímicas, Escuela de Ingeniería Química. Director: David Alfredo Fuentes Díaz. Ph.D. Codirector: Arlex Chaves Guerrero. Ph.D.

Abstract

Title: Numerical Solution of the Shallow Water Equations and Sediment Transport Using the Finite Volume Method*

Author: Diego Fernando Bautista Parada**

Key Words: Shallow Water Equations, CFD, Dry-Wet Front, Variable Topographies, Sediment Transport, Bedload Transport, Decoupled Solution.

Description:

The proper management of the dry-wet front in shallow water flow is a computationally demanding task given the difficulty in locating the exact position of such interface and it is even more challenging when the topographies are irregular as in the natural environment. In this thesis, the shallow water equations were solved and an algorithm to compensate the mass imbalance generated when a thin film algorithm is implemented is proposed. The compensation are performed only on the cells that require it, distributing such imbalance on those that change their depth at each instant of time, guaranteeing the positivity of the scheme and the mass balance at all times. The proposed algorithm was validated solving benchmark problems along with problems with experimental data including reflexive and closed boundary conditions and open flow boundaries with different flow regimes. The implemented scheme was shown to be balanced, with a correct handling of the dry-wet front over flat beds and steep slope beds, and, in addition, provides a good prediction of flow patterns over different flow regimes. It was also successfully implemented a numerical solution of the sediment transport and 2D shallow water equations using the decoupled approach. Different discharge formulas to approximate the solid discharge of the sediment were used. The flow field was calculated by solving the shallow water equations which were discretized using the finite volume method; the Godunov's method with Roe's Riemann solver were used to approximate the numerical fluxes. The sediment transport was modeled with the Exner equation which was discretized using the Roe's scheme and the finite volume method. In addition, it was proposed an algorithm to guarantee the mass balance in the whole domain for water and sediment at all time steps. The results were compared with experimental measurements reported by other authors to validate the implemented solution.

---

* Doctoral Thesis

**Physicochemical Engineering Faculty. Chemical Engineering School. Director: David Alfredo Fuentes Díaz. Ph.D. Codirector: Arlex Chaves Guerrero. Ph.D.

Introducción

Las ecuaciones de aguas someras unidimensionales fueron introducidas por primera vez por Saint-Venant en el siglo XIX con el fin de modelar el flujo en canales. En la actualidad, su aplicación ha sido extendida al modelamiento de distintos fenómenos naturales o aquellos ocasionados por el hombre como son: el transporte de contaminantes (S. Li y Duffy, 2012), el flujo en ríos (Zhang y Wu, 2011) (Wu y Wang, 2007), el pronóstico y prevención de inundaciones (Unami *et al*., 2009) (Seyoum *et al*., 2012) (Guerra *et al*., 2014), la rotura de presas (Valiani *et al*., 2002) (Begnudelli y Sanders 2007) y el transporte de sedimentos (X. Liu *et al*., 2010) entre otros. Las ecuaciones de aguas someras se basan en la suposición de que la escala de longitud horizontal es mayor que la escala de longitud vertical. Estas ecuaciones se pueden derivar promediando la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes en la coordenada z. Un método numérico ampliamente utilizado para resolver dicho sistema de ecuaciones es el método de los volúmenes finitos (Leveque, 2004).

Es de suma importancia resaltar el hecho de que las ecuaciones de aguas someras constituyen un sistema ecuaciones de tipo hiperbólico no lineal y por consiguiente la primera dificultad para aproximar su solución surge con la escogencia del esquema numérico. Se debe tener en cuenta que la aproximación será peor o mejor dependiendo de la técnica adoptada para su discretización o de las herramientas computacionales que se usen.

La naturaleza de los sistemas (hiperbólico, parabólico o elíptico) conllevan directamente a la interpretación física del fenómeno y la manera de tratarlo numéricamente. Un sistema de ecuaciones diferenciales parciales es de tipo hiperbólico si su parte homogénea admite soluciones discontinuas. Esto implica que el conjunto de ecuaciones hiperbólicas estará asociado a ondas de propagación y que el comportamiento y propiedades del sistema físico descrito por dichas ecuaciones será dominado por los fenómenos ondulatorios. En otras palabras, un sistema hiperbólico describe los fenómenos de convección y de la misma manera, los fenómenos de convección se describen mediante ecuaciones hiperbólicas. Por otro lado, si las ecuaciones admiten soluciones correspondientes a ondas amortiguadas, el sistema se denominará parabólico y si no admite soluciones ondulatorias, se dice que las ecuaciones son elípticas y por consiguiente, el comportamiento del sistema físico considerado está dominado por fenómenos de difusión.

Entender las diferencias entre la difusión y la convección es crucial para entender la física del flujo y además, la discretización y esquemas numéricos que estos deben seguir. Se debe mencionar una regla fundamental de discretización: ***Las propiedades de un esquema de discretización numérica NUNCA pueden estar en contradicción con la física que pretende describir*** (Hirsch, 2007). Por lo tanto, es de suma importancia comprender claramente la naturaleza del problema y las propiedades físicas de las ecuaciones que se van a discretizar y la interpretación matemática de estas. Por ejemplo, un esquema numérico ajustado para manejar una ecuación de difusión, como la ecuación de Laplace o la de Poisson, no funcionará cuando se aplique a una ecuación dominada por la convección. En consecuencia, durante el proceso de discretización numérica es imprescindible tener en cuenta estas diferencias, ya que no se puede esperar que una discretización compatible con la física de la difusión sea válida para la física asociada a la convección, ya que las propiedades físicas de estos dos fenómenos son fundamentalmente diferentes.

Una ecuación de convección pura admite soluciones discontinuas a partir de un campo inicial continuo. Por ejemplo, la solución de la ecuación lineal de convección unidimensional también puede interpretarse como una ecuación de onda. Esta relación equivalente entre la convección pura y la propagación de onda es crítica para entender la física de la convección y por lo tanto de los problemas de tipo hiperbólico. De esta manera, los dos fenómenos, la convección y la propagación de las ondas son dos facetas de las mismas propiedades físicas. La propiedad de propagación de los problemas hiperbólicos tiene consecuencias importantes con respecto a la forma en que se transmite la información a través de la región de flujo como se verá en el capítulo 2.

Los métodos numéricos utilizados para resolver este sistema de ecuaciones deben cumplir ciertas condiciones que permitan que el esquema numérico sea estable. El esquema debe preservar la positividad, es decir, que los niveles de altura no deben ser negativos en ningún punto en el espacio ni en el tiempo. También debe ser capaz de manejar la interface seco-mojado garantizando siempre la conservación de la masa. Cuando se trata de simular inundaciones en largos periodos de tiempo, es fundamental que el esquema no produzca oscilaciones espurias en la velocidad, cuando el fluido está cerca de bancos de arena. El esquema también debe estar bien balanceado, es decir, debe balancear los términos fuente y los fluxes numéricos cuando se tienen soluciones en estado estacionario como cuando el fluido está en reposo.

El manejo adecuado de los frentes seco-mojado en el flujo de aguas someras es una tarea computacionalmente demandante dada la dificultad que se tiene para localizar la posición exacta de dicha interface. Con este fin, se han desarrollado diversas estrategias numéricas como lo resumen Medeiros y Hagen (2013) y Martins *et al* (2018) dentro de las cuales se destacan: (1) Película delgada: el tratamiento se hace a través de la adición o sustracción de pequeñas películas delgadas de fluido dentro del dominio conservando la positividad completamente, sin embargo, esta estrategia produce oscilaciones e inestabilidades numéricas cuando no se garantiza la conservación de masa (Kärnä *et al*., 2011). Además, esta aproximación implica que el cálculo debe realizarse en todo el dominio y durante todo el intervalo de tiempo, lo cual incrementa el costo computacional. (2) Remoción de elementos: se basa en la implementación de un algoritmo que revisa cuáles elementos se activan o desactivan dentro del dominio computacional dependiendo si se definen como secos o mojados (Nikolos y Delis 2009). Este manejo es atractivo computacionalmente dado que se reduce el número de celdas del dominio, sin embargo, es muy sensible a errores de redondeo especialmente en zonas planas, lo cual dificulta la definición de celda seca o mojada. (3) Extrapolación de la profundidad: estos algoritmos se basan en extrapolar la altura de los elementos mojados a los elementos secos y calculan la velocidad en el elemento recién mojado (Aureli *et al*., 2008) haciendo que se produzcan soluciones suavizadas en el frente de onda. (4) Alturas negativas: esta estrategia permite que el modelo tolere alturas de agua negativas o por debajo del nivel del suelo mediante la introducción de una porosidad artificial (van’t Hof y Vollebregt 2005), no obstante, su uso se restringe únicamente a los elementos finitos. (5) Limitadores de preservación de la positividad: se incluyen funciones limitadoras del flux numérico que garantizan la preservación de la positividad (Xing y Shu 2011) y (6) correctores de fluxes.

Cuando se obtienen valores de altura muy pequeños, la solución puede conducir a inestabilidades, como profundidades de agua negativas o velocidades incorrectas. Además, en problemas que incluyen fricción, la forma de la ecuación de Manning es tal, que cuando la altura del fluido tiende a cero, la resistencia del lecho tiende a infinito. Por lo tanto, para evitar estas dificultades lo más común es fijar una tolerancia por debajo de la cual la altura del fluido no puede estar. No obstante, este procedimiento conduce a una pérdida de masa cuando la altura del agua actualizada es positiva pero menor que la tolerancia, y a una ganancia cuando es negativa.

En esta tesis se implementó exitosamente un algoritmo que compensa el desbalance de masa generado cuando se implementa un algoritmo de película delgada asegurando que dichas compensaciones se realizan estricta y únicamente sobre las celdas que lo requieren y distribuyendo dicho desbalance sobre aquellas que cambian su altura en cada instante de tiempo garantizando la positividad del esquema y el balance de masa en todo momento. En definitiva, se trata de una combinación entre la estrategia de película delgada, mediante la distribución de masa y ajuste del desbalance, junto con la remoción de elementos garantizando que la compensación se lleva a cabo únicamente sobre las celdas que requieren dicho ajuste.

Realizar el ajuste únicamente sobre aquellas celdas que pierden o ganan masa permite que el desbalance de masa se disminuya drásticamente, reduciendo el esfuerzo computacional, debido a que las celdas involucradas en el algoritmo son siempre un pequeño porcentaje del número total de elementos en las interfaces seco/mojado y aquellas que en la iteración anterior han ganado o perdido masa. Es importante resaltar que esta estrategia numérica no ha sido reportada en trabajos anteriores y constituye un mecanismo práctico y novedoso de solución.

Otro aspecto que se debe tener en cuenta a la hora de resolver numéricamente un sistema hiperbólico es la aparición de oscilaciones espurias en la vecindad de las discontinuidades y en presencia de grandes gradientes, sin embargo, estas pueden evitarse mediante la adición de un término de viscosidad artificial en las ecuaciones o mediante la utilización de esquemas de variación total decreciente (TVD). El término adicional de viscosidad artificial puede mejorar la estabilidad de los esquemas numéricos, no obstante, esta viscosidad debe ajustarse manualmente lo cual puede llevar a la obtención de resultados incoherentes o soluciones suaves. Por el contrario, los esquemas TVD preservan el segundo orden de precisión, reducen estas oscilaciones alrededor de las discontinuidades e introducen menos difusión numérica que cuando se introduce viscosidad artificial directamente.

Los esquemas TVD se pueden obtener directamente a partir de esquemas de segundo orden imponiendo restricciones que aseguren que se cumpla el teorema de Harten (Toro 2009) o promediando un esquema de primer orden con otro de segundo orden y dándole más peso a uno u otro esquema mediante el uso de funciones limitadoras que aseguren que el esquema resultante sea TVD tal y como se presenta en este estudio. Diferentes esquemas de alta resolución TVD han sido propuestos para la solución de leyes de conservación hiperbólicas y han sido adaptados para resolver las ecuaciones de aguas someras: Alcrudo y Garcia-Navarro (1993) desarrollaron un esquema de alta resolución de tipo Godunov basado en MUSCL utilizando el solucionador de Roe para evaluar los fluxes y alcanzaron el segundo orden de precisión en la solución, Louaked y Hanich (1998) implementaron un esquema TVD Lax-Wendroff y aplicaron el método de compresión artificial para tratar los cambios abruptos en flujos sobre canales abiertos, Wang et al., (2000) utilizaron un esquema TVD combinando el esquema de primer orden de Roe junto con el esquema Lax-Wendroff de segundo orden mediante el método de las diferencias finitas, Tseng y Chu (2000) propusieron una modificación del esquema TVD-MacCormack que evita la aparición de oscilaciones espurias en presencia de fuertes gradientes mediante los volúmenes finitos, Lin *et al* (2003) propusieron la solución a través de volúmenes finitos usando la técnica de flux-splitting y un esquema TVD modificando el esquema MacCormack para preservar el segundo orden de precisión en el espacio y en el tiempo, Ouyang *et al* (2015) implementaron un esquema TVD-MacCormack de segundo orden en diferencias finitas y lo aplicó sobre problemas de rotura de presas con lechos de sedimento erosionables, Bai *et al* (2018) utilizaron un esquema TVD a partir del esquema de segundo orden MUSCL-Hancock y el solucionador HLLC (Harten-Lax-van Leer-Contact) para evaluar los fluxes numéricos.

Por otra parte, al implementar los esquemas TVD se deben tener en cuenta las funciones limitadoras, las cuales presentan diferentes características, algunas son más disipativas, como la función mimod la cual tiende a suavizar las discontinuidades; y otras son más compresivas, como la función superbee la cual comprime las soluciones suaves y las convierte en discontinuidades (Jeng y Payne, 1995). Por lo tanto, es fundamental seleccionar la función limitadora que mejor se adapte al problema en estudio y a las soluciones que se estén buscando cuando se trabaja con esquemas TVD.

Además de los esquemas TVD, la discretización del término temporal juega un rol fundamental en la convergencia de la solución. Los esquemas explícitos actualizan directamente la solución en cada celda a partir de los valores conocidos del sistema en el tiempo actual, mientras que los esquemas implícitos generan un sistema de ecuaciones que debe resolverse en cada instante de tiempo. Los esquemas implícitos tienen la ventaja de ser, en teoría, incondicionalmente estables, aunque la convergencia a veces pueda ser difícil de alcanzar dependiendo de las condiciones iniciales, además, pueden ser menos precisos que los esquemas explícitos cuando se trabaja con flujos inestables y se utilizan pasos de tiempo grandes. Por lo tanto, se requiere un balance entre la ganancia de estabilidad y la posible pérdida de precisión en los resultados especialmente en el cálculo de problemas que alcanzan el estado estacionario. En estos problemas, la pérdida de precisión durante el estado transitorio no es tan importante y en cambio hay una gran posibilidad de utilizar un paso de tiempo más grande que permite un cálculo más rápido hacia el estado estable.

Tradicionalmente los problemas hiperbólicos y especialmente la solución de las ecuaciones de aguas someras se ha llevado a cabo utilizando esquemas explícitos debido a la misma naturaleza hiperbólica del sistema ya que la velocidad de propagación de la información tiene que cumplir siempre con el criterio de estabilidad CFL<1 el cual está limitado por el uso de pequeños pasos de tiempo y pequeños tamaños de celda. No obstante, se han desarrollado soluciones implícitas tales como: Fernández-Pato *et al.* (2018) implementaron un esquema numérico implícito sobre mallas flexibles utilizando el solucionador de Riemann de Roe de primer orden para el cálculo de los fluxes numéricos. Valiani *et al.* (2002) implementaron una solución a partir de la aproximación clásica de Godunov en conjunto con los solucionadores de Riemann Lax y van Leer e incluyeron una técnica semi-implícita para la discretización del término de fricción de las ecuaciones. Seyoum *et al*. (2012) desarrollaron un solucionador implícito para evaluar inundaciones sobre áreas urbanas y Kärnä *et al*. (2011) utilizaron el método de Galerkin discontinuo de los elementos finitos con una discretización temporal completamente implícita sobre las SWE y la solución implementada la aplicó para evaluar la hidrodinámica del estuario de Scheld localizado entre Bélgica y Holanda.

En esta tesis se implementó exitosamente un esquema WAF-TVD el cual incluyó el esquema de Godunov y el solucionador de Roe para el primer orden y el esquema Lax-Wendrof para el segundo orden de precisión. Además, la discretización temporal se llevó a cabo de forma implícita y explícita y se alcanzaron soluciones con valores de CFL superiores a 1. Por otra parte, la solución implementada incluyó los términos fuente de fricción y de topografía variable, así como el manejo del frente seco-mojado mediante la implementación del mencionado algoritmo de película delgada-remoción de elementos. La validación de los esquemas implementados se realizó mediante la solución de problemas de referencia comparando las soluciones numéricas obtenidas con las soluciones analíticas y además se incluyeron problemas que incluyen datos experimentales reportados por otros autores.

Por otra parte, una vez resuelto el movimiento del fluido es posible resolver el transporte de sedimento. El modelamiento del transporte de sedimento es esencial para simular y predecir cambios morfológicos a gran escala y largo plazo en distintas áreas del ambiente natural. La complejidad propia de la hidrodinámica junto con la dinámica del sedimento ha hecho que se hayan desarrollado distintas estrategias para abordar la interacción que existe entre el fluido y el sedimento. Diferentes enfoques se han usado para aproximar la ecuación que gobierna el transporte de sedimento, y dentro de estos se destacan dos: el enfoque estable y el enfoque inestable. El enfoque estable se basa en asumir que el flujo de agua es estable y que los cambios que tiene el lecho en el tiempo se pueden despreciar y no tienen ningún efecto sobre el flujo. Por consiguiente, se asume que la velocidad de onda de la ecuación para el transporte de sedimento es mucho menor en magnitud que las velocidades de onda de las ecuaciones de aguas someras y por lo tanto el sistema se puede desacoplar. Este enfoque ha sido utilizado entre otros por (J. Hudson, 2001) (Tingsanchali y Chinnarasri, 2001) (Soares Frazão *et al.*, 2003) (A. Valiani y Caleffi, 2017). Por otra parte, en el enfoque inestable no hay ninguna suposición de modo que el campo de flujo y el transporte de sedimento se calculan simultáneamente y se aplicado con éxito por (Justin Hudson y Sweby, 2003) (Castro Díaz *et al.*, 2008), (Iervolino *et al.*, 2010), (Murillo y García-Navarro, 2010), (Duran *et al*., 2013), (Soares-Frazão y Zech, 2011).

Acoplar el transporte del lecho al campo de flujo es una tarea más desafiante debido a que el sistema presenta una eigenestructura más compleja que la que tiene el sistema de ecuaciones de las aguas someras. Si bien el enfoque acoplado y conservativo del sistema evita la presencia de oscilaciones espurias y favorece la obtención de soluciones suaves (Justin Hudson y Sweby 2003), el manejo del acople de la descarga de sedimento junto con la hiperbolicidad del sistema se dificulta debido a que no existe una dependencia explícita entre las fórmulas para el transporte sólido que describen la variación de la altura del sedimento y el jacobiano que se obtendría al acoplar todo el sistema (Juez *et al*, 2014).

Por otra parte, el enfoque desacoplado se ha usado con éxito en casos donde la interacción sedimento-fluido es débil y la evolución del sedimento es lenta, sin embargo, esta estrategia puede crear oscilaciones espurias cuando la erosión del sedimento es rápida debido a flujos de alta energía. No obstante, se ha visto que el campo de flujo se puede aproximar iterativamente hasta un estado de equilibrio y posteriormente actualizar el cambio de altura del lecho y así resolver el sistema de ecuaciones de manera desacoplada y evitar la aparición de dichas oscilaciones. Además, de acuerdo con Cunge *et al*. (1980) en la mayoría situaciones reales, el lecho se mueve a una velocidad considerablemente menor que el flujo del agua, tanto que, en un canal de 100km el flujo de agua usualmente tarda uno o dos días en propagarse por todo el canal mientras que al lecho le puede tomar años para hacerlo. Por lo tanto, en la mayoría de los casos es posible utilizar el enfoque desacoplado y discretizar las ecuaciones que describen el campo de flujo y el transporte de sedimento de manera desacoplada haciendo que las ecuaciones sean mucho más fáciles de aproximar numéricamente.

En esta tesis se resolvió con éxito el transporte de sedimento y el campo de flujo mediante el enfoque desacoplado utilizando distintas fórmulas de descarga para aproximar la descarga sólida del sedimento. El campo de flujo se calculó mediante la solución de las ecuaciones de aguas someras y el método de Godunov junto con el solucionador de Riemann de Roe. Y el transporte de sedimento se modeló a través de la ecuación de Exner la cual se discretizó mediante el esquema de Roe y se adaptó al método de los volúmenes finitos. Además, el mismo balance propuesto para tratar la conservación de la masa en el fluido, se adaptó para el sedimento garantizando así el balance de masa en todo el dominio espacial y temporal. También cabe destacar la versatilidad de la estrategia numérica implementada ya que esta se logró adaptar a los dos problemas.

En síntesis, en esta tesis se implementó una solución numérica del transporte de sedimento mediante el método de los volúmenes finitos. La hidrodinámica del agua fue modelada por medio de las ecuaciones de aguas someras y la morfodinámica del lecho se modeló con la ecuación de Exner. Esta tesis se organiza de la siguiente manera: En el capítulo 2 se resuelven las ecuaciones de aguas someras y se propone un algoritmo para compensar el desbalance de masa generado cuando se implementa un algoritmo de película delgada. Estas compensaciones se realizan únicamente sobre las celdas que lo requieren, distribuyendo dicho desbalance sobre aquellas que cambian su altura en cada instante de tiempo garantizando la positividad del esquema y el balance de masa en todo momento. El algoritmo propuesto se validó a partir de la solución de problemas de referencia junto con problemas con datos experimentales que incluyen condiciones de frontera reflexivas o cerradas y fronteras de flujo abierto con distintos regímenes de flujo.

En el capítulo 3 se presenta nuevamente la solución de las ecuaciones de aguas someras y en esta se incluyen los esquemas de variación total decreciente para reducir el comportamiento oscilatorio de las soluciones en presencia de grandes gradientes. La implementación se enfocó en la evaluación del efecto que tienen las funciones limitadoras de flujo de los esquemas TVD y los esquemas de discretización temporal sobre sobre la supresión de las oscilaciones espurias, así como el tiempo de cálculo en la solución de las ecuaciones de aguas someras. El esquema implementado fue de tipo WAF-TVD el cual incluyó el esquema de Godunov y el solucionador de Roe para el primer orden y el esquema Lax-Wendrof para el segundo orden de precisión. Además, se incluyó la discretización temporal de forma implícita y explícita.

Finalmente, en el capítulo 4 se presenta la implementación de la solución del transporte de sedimento y el campo de flujo mediante el enfoque desacoplado utilizando distintas fórmulas de descarga para aproximar la descarga sólida del sedimento. El campo de flujo se calculó mediante la solución de las ecuaciones de aguas someras y el transporte de sedimento se modela a través de la ecuación de Exner. Además, se propone una forma de tratar el balance de masa en todo el dominio que garantiza que este se cumpla en todo el dominio para el agua y para el sedimento en todos los pasos de tiempo. Al igual que en los capítulos anteriores la solución se comparó con datos experimentales reportados por otros autores que incluyen condiciones de frontera reflexivas o cerradas y fronteras de flujo abierto.

1. Ecuaciones de Aguas Someras

1.1 Introducción

El agua sobre la superficie de la tierra incluye escorrentías sobre causes naturales y artificiales los cuales dependen de la aceleración gravitacional por lo que su movimiento se conoce como “flujo gravitatorio sobre superficie libre” y su física se representa mediante la ecuación de continuidad y cantidad de movimiento. El conjunto de estas ecuaciones se conoce como como ecuaciones de aguas someras y el término “someras” hace referencia a que la escala de profundidad del fluido es mucho menor a la escala horizontal de la longitud del flujo.

1.2 Derivación de las Ecuaciones de Aguas Someras

La obtención de estas ecuaciones supone que el fluido es incompresible y no viscoso, además, la aceleración vertical del fluido es despreciable y por lo tanto la presión hidrostática es únicamente horizontal. También se incluyen variaciones en la topografía como términos fuente en el balance de cantidad de movimiento.

Considerando un fluido incompresible con profundidad $h(x, y)$ sobre una superficie $z = b(x, y)$ y con un campo de velocidad $\mathbf{u} = [u, v, w]$ como se presenta en la *Figura 1*.

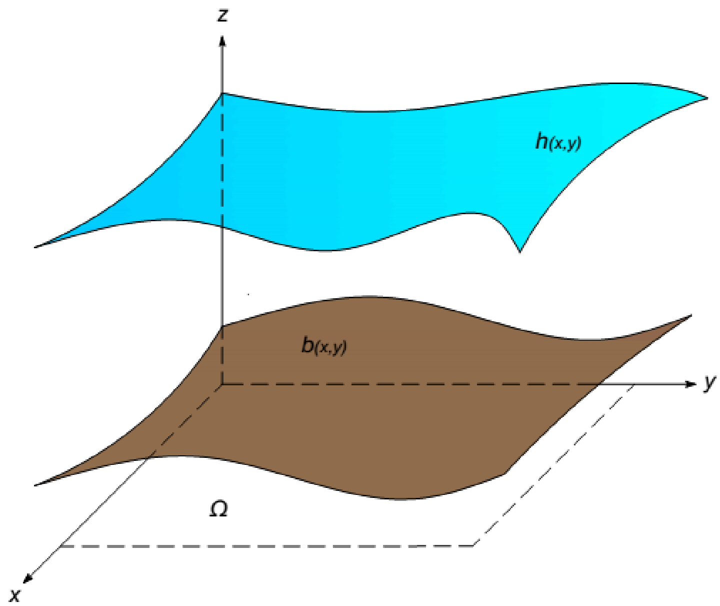


Figura 1. Representación de superficie del suelo $b(x,y)$ y la profundidad del fluido $h(x,y)$.

Sin embargo, de acuerdo con las suposiciones iniciales, **u** es independiente de z dado que el gradiente de presión es independiente de z. Si se considera una región arbitraria Ω^3, en tres dimensiones, definiendo la superficie del fondo $b(x,y)$ y la superficie libre $h(x,y)$ como las fronteras de abajo y arriba respectivamente, el balance de cantidad de movimiento sobre dicha región está dado por:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega^3} \mathbf{u}\, dxdydz + \iint_{\partial\Omega^3} [\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})]\, ds + \iint_{\partial\Omega^3} [\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{n}]\, ds - \iiint_{\Omega^3} \mathbf{G}\, dxdydz = 0 \tag{1}$$

Donde el segundo término corresponde al flux de cantidad de movimiento debido a la convección a través de las fronteras, **Π** es el tensor de esfuerzos y **G** es la fuerza de cuerpo, $-g\hat{\mathbf{k}}$**.** Dado que se asume que el fluido es no viscoso el tensor de esfuerzos incluye únicamente los correspondientes a la presión hidrostática, $p(x,y,z) = g(h + b - z)$, es decir aquellos de la diagonal, $\mathbf{\Pi} = p\mathbf{I}$. Teniendo en cuenta la aproximación de presión hidrostática considerada, las componentes verticales de las dos últimas integrales se cancelan. Además, la ecuación correspondiente a w puede despreciarse ya que $Dw/Dt = 0$ y por lo tanto no se tiene en cuenta dentro del balance. Integrando la presión arriba ($p(x, y, h) = 0$) y abajo ($p(x, y, b) = gh$) sobre la coordenada vertical se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\iint_{\Omega} h\mathbf{u}\, dxdy + \int_{\partial\Omega} [(h\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})]\, ds + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{2} gh^2\mathbf{n}\right] ds = -\iint_{\Omega} gh\nabla b\, dxdy \tag{2}$$

El término de la derecha corresponde al término fuente debido a los cambios del suelo y resulta de integrar la presión sobre el fondo. En cuanto al balance de masa se considera la misma región arbitraria Ω y un campo de velocidad del fluido $\mathbf{u} = [u, v]$ y se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\iint_{\Omega} h\, dxdy + \int_{\partial\Omega} [h(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})]\, ds \tag{3}$$

El balance de masa, ecuación (3), y el balance de cantidad de movimiento, ecuación (2), se pueden escribir de forma compacta como:

$$\frac{d}{dt}\iint_{\Omega} \mathbf{U} dxdy + \int_{\partial\Omega} [F(\mathbf{U})\cdot\mathbf{n}]\, ds = \iint_{\Omega} \mathbf{S} dxdy \tag{4}$$

En donde:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix};\ F = \begin{bmatrix} hu & hv \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 & huv \\ huv & hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix};\ \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ ghb_x - S_{fx} \\ ghb_y - S_{fy} \end{bmatrix} \tag{5}$$

En la ecuación (5) se observa que el término fuente, **S,** además de las variaciones en el suelo también incluye las perdidas asociadas a la fricción, S_f, las cuales se pueden aproximar mediante la ecuación de Manning.

La ecuación (4) corresponde a la forma integral de las leyes de conservación, para obtener la forma diferencial basta con aplicar el teorema de la divergencia sobre la segunda integral de la ecuación (4) y asumir que la solución es continua y diferenciable en todo el dominio:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dxdy + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{U})}{\partial y}\right] dxdy = \iint_{\Omega} \mathbf{S} dxdy \tag{6}$$

Donde los componentes $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son la primera y segunda columna de F y teniendo en cuenta que se trata de una región arbitraria Ω se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \tag{7}$$

De esta manera se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico que gobierna el flujo en superficie libre también denominado ecuaciones de aguas someras. En capítulos posteriores se presentará la técnica utilizada en esta tesis para llevar a cabo su solución.

2. Solución de las Ecuaciones de Aguas Someras Mediante el Método de los Volúmenes Finitos con Presencia de Frentes Seco-Mojado Sobre Topografías Variables

2.1 Introducción

El manejo adecuado del frente seco-mojado en el flujo de aguas someras es una tarea computacionalmente demandante dada la dificultad que se tiene para localizar la posición exacta de dicha interface y es todavía más desafiante cuando las topografías son irregulares como sucede en el ambiente natural. En esta tesis, se resuelven las ecuaciones de aguas someras y se propone un algoritmo que permite compensar el desbalance de masa generado cuando se implementa un algoritmo de película delgada. Dichas compensaciones se realizan únicamente sobre las celdas que lo requieren, distribuyendo dicho desbalance sobre aquellas que cambian su altura en cada instante de tiempo garantizando la positividad del esquema y el balance de masa en todo momento. El algoritmo propuesto se validó a partir de la solución de problemas de referencia junto con problemas con datos experimentales que incluyen condiciones de frontera reflexivas o cerradas y fronteras de flujo abierto con distintos regímenes de flujo. El esquema implementado mostró ser balanceado, con un correcto manejo del frente seco-mojado sobre lechos planos y lechos con pendientes pronunciadas, y, además, provee una buena predicción de los patrones de flujo sobre distintos regímenes de flujo.

2.2 Modelo Numérico y Métodos

En esta sección se resumen las ecuaciones de aguas someras y la discretización en volúmenes finitos para resolver este sistema. Las ecuaciones de aguas someras conforman un sistema de ecuaciones no lineal hiperbólico que puede escribirse de forma conservativa como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{U})}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{U})}{\partial y}=\mathbf{S}(\mathbf{U}) \tag{8}$$

Donde $\mathbf{U}$ es el vector de variables conservativas, $\mathbf{C}(\mathbf{U})$ y $\mathbf{D}(\mathbf{U})$ son los vectores de flux y $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ es el vector de términos fuente; los cuales se definen así:

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h\\hu\\hv\end{bmatrix};\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}hu\\hu^2+\frac{1}{2}gh^2\\huv\end{bmatrix};\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}hv\\huv\\hv^2+\frac{1}{2}gh^2\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\gh(S_{0x}-S_{fx})\\gh(S_{0y}-S_{fy})\end{bmatrix}$$

$h(x,y,t)$ representa la altura del fluido, $u(x,y,t)$ es la velocidad promediada en la profundidad en la dirección x y $v(x,y,t)$ es la velocidad promediada en la coordenada y; mientras que g es la aceleración gravitacional. Las pendientes del fondo en las direcciones x y y están dadas por:

$$S_{0x}=-\frac{\partial z_b}{\partial x},\qquad S_{0y}=-\frac{\partial z_b}{\partial y} \tag{10}$$

Donde $z_b(x,y)$ es la elevación del suelo. También se incluyen los términos de fricción asociados a la ley de resistencia de Manning:

$$S_{fx} = \frac{n^2 u\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}}, \qquad S_{fy} = \frac{n^2 v\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}} \tag{11}$$

En los cuales n denota el coeficiente de fricción de Manning. Un esquema de las variables consideradas en las ecuaciones de aguas someras se presenta en la *Figura 2*.

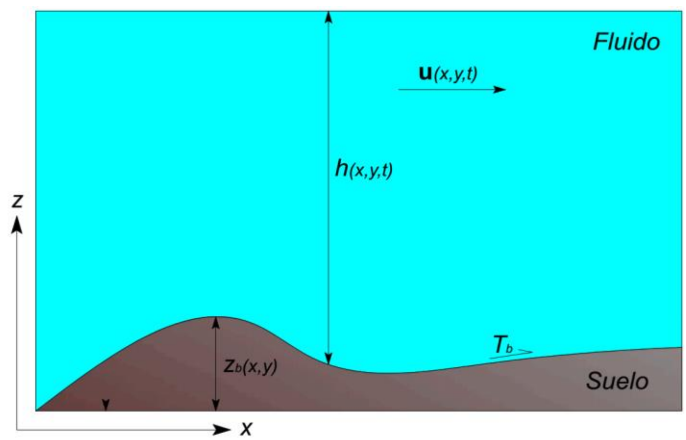


Figura 2. Esquema de las variables de las ecuaciones de aguas someras

2.2.1 Integración y Discretización de las Ecuaciones

Los fluxes $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ se pueden agrupar en un único flux $\mathbf{F} = (\mathbf{C}, \mathbf{D})$ y el sistema original se puede expresar de forma más compacta como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathrm{t}} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \tag{12}$$

Integrando la ecuación (12) sobre un dominio de estudio de volumen Ω:

$$\int \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega + \int \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) d\Omega = \int \mathbf{S}(\mathbf{U}) d\Omega \tag{13}$$

Aplicando el teorema de Gauss sobre el segundo término de la ecuación (13) se obtiene:

$$\int \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega + \oint (\mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}) d\vec{\mathbf{S}} = \int \mathbf{S}(\mathbf{U}) d\Omega \tag{14}$$

Donde $\vec{\mathbf{S}}$ es la superficie del volumen Ω y $\mathbf{n}$ es el vector normal a dicha superficie. Este sistema se puede resolver mediante el método de los volúmenes finitos dividiendo el dominio de estudio en múltiples volúmenes de control Ω_i sobre los cuales se debe integrar la ecuación (14). Si se considera un volumen de control con b_i caras, de área superficial a_i cada una las cuales tienen un vector normal $\mathbf{n}_i$, como se esquematiza en la *Figura 3* para una celda de cuatro lados, la ecuación (14) se puede expresar como:

$$\frac{\mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{n+1}} - \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{n}}}{\Delta t} * \Omega_i + \sum_{i=1}^{b_i} \left(\mathbf{F}_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right) a_i = \sum_{i=1}^{b_i} \mathbf{S}(\mathbf{U}) a_i \tag{15}$$

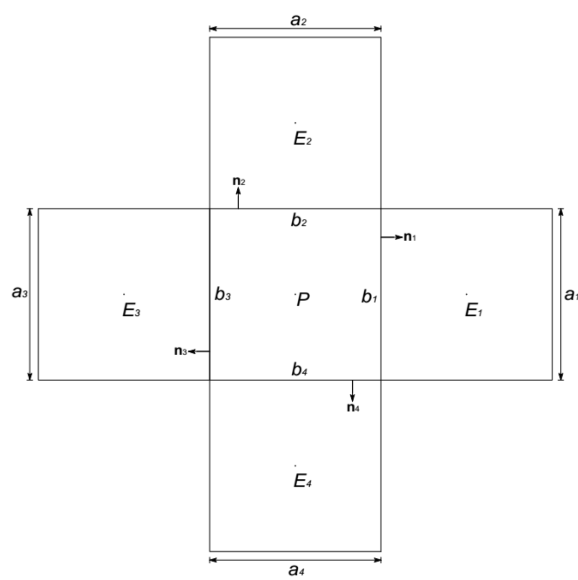


Figura 3. Esquema de conectividad de una celda estructurada de cuatro lados.

Donde $\mathbf{F}_{b_i}$ es el flux numérico evaluado sobre la cara b_i del volumen de control. Este flux numérico se calcula basado en el problema de Riemann definido por las condiciones a cada lado de las caras del volumen de control (P y E_i). Una expresión para $\mathbf{F}_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i$ usando el método de

Godunov y el solucionador de Riemann de Roe (Toro, 2009) para el caso bidimensional para la cara b_i del elemento P es:

$$\mathbf{F}_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_P + \mathbf{F}_{E_i}\right)\mathbf{n}_i - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{3} \tilde{\alpha}_n \left|\tilde{\lambda}_n\right| \tilde{\mathbf{e}}_n\right)_{P,E} \tag{16}$$

Donde P y E indican los elementos que están conectados a través de las caras b_i, $\tilde{\alpha}_n$ son las fuerzas de onda, $\tilde{\lambda}_n$ son los eigenvalores del sistema y $\tilde{\mathbf{e}}_n$ son los eigenvectores del mismo. La corrección de Harten y Hyman permite asegurar un correcto tratamiento de las ondas de depresión transcríticas y consiste en sustituir $\left|\tilde{\lambda}_n\right|$ por φ_n, donde φ_n es:

$$\varphi_n = \begin{cases} \left|\tilde{\lambda}_n\right| \; si \; \left|\tilde{\lambda}_n\right| \geq \varepsilon_n \\ \varepsilon_n \; si \; \left|\tilde{\lambda}_n\right| < \varepsilon_n \end{cases} \tag{17}$$

y:

$$(\varepsilon_n)_{i,j} = \max\left\{0, \left[\left(\tilde{\lambda}_n\right)_{i,j} - (\lambda_n)_i\right], \left[(\lambda_n)_i - \left(\tilde{\lambda}_n\right)_{i,j}\right]\right\} \tag{18}$$

Finalmente, el flux numérico evaluado en la cara b_i del volumen de control P queda definido como:

$$\mathbf{F}_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_P + \mathbf{F}_{E_i}\right)\mathbf{n}_i - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{3} \tilde{\alpha}_n \varphi_n \tilde{\mathbf{e}}_n\right)_{P,E} \tag{19}$$

2.2.2 Definición del Flux Numérico

El carácter hiperbólico y no lineal del sistema hace que se obtengan soluciones discontinuas que requieren de un tratamiento especial. A continuación, se muestra el procedimiento para calcular cada uno de los términos que se incluyen en el cálculo del flux numérico $\mathbf{F}_{b_i}$.

Mediante la aplicación de la regla de la cadena, el sistema (9) se puede expresar como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathrm{t}} + \mathbf{A}(\mathbf{U})\nabla \cdot \mathbf{U} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \tag{20}$$

En donde $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ es la matriz jacobiana del sistema que se define en la dirección normal como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{U}} n_x + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{U}} n_y \tag{21}$$

Donde:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (q_x)}{\partial h} & \frac{\partial (q_x)}{\partial q_x} & \frac{\partial (q_x)}{\partial q_y} \\ \frac{\partial \left(\frac{{q_x}^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2\right)}{\partial h} & \frac{\partial \left(\frac{{q_x}^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2\right)}{\partial q_x} & \frac{\partial \left(\frac{{q_x}^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2\right)}{\partial q_y} \\ \frac{\partial \left(\frac{q_x q_y}{h}\right)}{\partial h} & \frac{\partial \left(\frac{q_x q_y}{h}\right)}{\partial q_x} & \frac{\partial \left(\frac{q_x q_y}{h}\right)}{\partial q_y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (q_y)}{\partial h} & \frac{\partial (q_y)}{\partial q_x} & \frac{\partial (q_y)}{\partial q_y} \\ \frac{\partial (\frac{q_x q_y}{h})}{\partial h} & \frac{\partial (\frac{q_x q_y}{h})}{\partial q_x} & \frac{\partial (\frac{q_x q_y}{h})}{\partial q_y} \\ \frac{\partial (\frac{{q_y}^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2)}{\partial h} & \frac{\partial (\frac{{q_y}^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2)}{\partial q_x} & \frac{\partial (\frac{{q_y}^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2)}{\partial q_y} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Desarrollando las derivadas se tienen las matrices que describen $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{U}}$ y $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{U}}$ como:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}; \ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{bmatrix} \tag{23}$$

Si se tiene en cuenta que la velocidad de la onda es $c = \sqrt{gh}$ y agrupando todos los términos del Jacobiano teniendo en cuenta los vectores unitarios n_x y n_y se obtiene:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ -u(\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n}) + c^2 n_x & (\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n}) + u n_x & u n_y \\ -v(\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n}) + c^2 n_y & v n_x & (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}) + v n_y \end{bmatrix} \tag{24}$$

Los eigenvalores de la matriz **J** se pueden calcular mediante la solución del polinomio característico que resulta de igualar a cero la diferencia entre el Jacobiano y la matriz identidad multiplicada por la matriz diagonal λ así:

$$\det(\boldsymbol{J} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \tag{25}$$

Físicamente estos eigenvalores λ_i representan la velocidad de propagación de la información y para este sistema están dados por:

$$\lambda_1 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} - c; \;\; \lambda_2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}; \;\;\; \lambda_3 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} + c \tag{26}$$

Y los eigenvectores correspondientes a cada eigenvalor de la matriz **J** se calculan como los vectores $\mathbf{K^i}$ que satisfacen $\mathbf{JK^i} = \lambda_i \mathbf{K^i}$ y estos son:

$$\mathbf{K^1} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c\boldsymbol{n_x} \\ v - c\boldsymbol{n_y} \end{bmatrix}; \;\; \mathbf{K^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c\boldsymbol{n_y} \\ c\boldsymbol{n_x} \end{bmatrix}; \;\; \mathbf{K^3} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c\boldsymbol{n_x} \\ v + c\boldsymbol{n_y} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Por otro lado, el solucionador de Riemann de Roe reemplaza la matriz Jacobiana **J** por una matriz aproximada que depende de **U** a cada lado de los contornos de los volúmenes de control $\mathbf{U_L}$ y $\mathbf{U_R}$. De esta forma el sistema (20) se puede aproximar como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathrm{t}} + \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U})\nabla\cdot\mathbf{U} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \tag{28}$$

Esta nueva matriz Jacobiana debe cumplir las siguientes condiciones: i) Conservar el carácter hiperbólico del sistema, los eigenvalores $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_3$ deben ser reales y el conjunto de eigenvectores $\widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{1}}, \widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{2}}, \widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{3}}$ debe ser linealmente independientes. ii) el sistema debe ser consistente con el sistema original, es decir, con la matriz jacobiana original $\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U_L},\mathbf{U_R}) = \mathbf{A}(\mathbf{U})$ y iii) La matriz $\widetilde{\mathbf{A}}$ debe asegurar la conservatividad, es decir, la conservación a través de las discontinuidades $\mathbf{F}(\mathbf{U_L}) - \mathbf{F}(\mathbf{U_R}) = \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U_L} - \mathbf{U_R})$

Definiendo el vector paramétrico

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \equiv \frac{\mathbf{U}}{\sqrt{h}} = \begin{bmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{h}u \\ \sqrt{h}v \end{bmatrix} \quad (29)$$

Y expresando $\mathbf{U}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ en términos de las componentes q_1, q_2 y q_3 de $\mathbf{Q}$ se obtiene:

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \equiv q_1\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} q_1^2 \\ q_1 q_2 \\ q_1 q_3 \end{bmatrix};\ \mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} q_1 q_2 \\ q_2^2 + c^2 q_1^2 \\ q_2 q_3 \end{bmatrix};\ \mathbf{D} \equiv \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} q_1 q_3 \\ q_2 q_3 \\ q_3^2 + c^2 q_1^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Ahora el valor promedio del vector $\widetilde{\mathbf{Q}}$ se determina mediante un simple promedio aritmético a cada lado de las celdas:

$$\widetilde{\mathbf{Q}} \equiv \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\mathbf{Q}}_{\boldsymbol{L}} + \widetilde{\mathbf{Q}}_{\boldsymbol{R}}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{h_L} + \sqrt{h_R} \\ \sqrt{h_L}u_L + \sqrt{h_R}u_R \\ \sqrt{h_L}v_L + \sqrt{h_R}v_R \end{bmatrix} \quad (31)$$

Ahora se definen tres matrices $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{B}}(\widetilde{\mathbf{Q}})$, $\widetilde{\mathbf{C}} = \widetilde{\mathbf{C}}(\widetilde{\mathbf{Q}})$ y $\widetilde{\mathbf{D}} = \widetilde{\mathbf{D}}(\widetilde{\mathbf{Q}})$ para expresar $\Delta\mathbf{U}, \Delta\mathbf{C}$ y $\Delta\mathbf{D}$ en términos de $\Delta\mathbf{Q}$:

$$\Delta\mathbf{U} = \widetilde{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{Q};\quad \Delta\mathbf{C} = \widetilde{\mathbf{C}}\Delta\mathbf{Q};\quad \Delta\mathbf{D} = \widetilde{\mathbf{D}}\Delta\mathbf{Q} \quad (32)$$

A partir de los cuales se obtienen $\Delta\mathbf{C}$ y $\Delta\mathbf{D}$ como función de $\Delta\mathbf{U}$:

$$\Delta\mathbf{C} = \left(\widetilde{\mathbf{C}}\widetilde{\mathbf{B}}^{-\mathbf{1}}\right)\Delta\mathbf{U};\quad \Delta\mathbf{D} = \left(\widetilde{\mathbf{D}}\widetilde{\mathbf{B}}^{-\mathbf{1}}\right)\Delta\mathbf{U} \quad (33)$$

Las matrices $\widetilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ y $\widetilde{\mathbf{D}}$ que satisfacen $\Delta\mathbf{U}$, $\Delta\mathbf{C}$ y $\Delta\mathbf{D}$ son:

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{q}_2}{2} & \frac{\tilde{q}_1}{2} & 0 \\ \frac{\tilde{q}_3}{2} & 0 & \frac{\tilde{q}_1}{2} \end{bmatrix}; \ \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_2}{2} & \frac{\tilde{q}_1}{2} & 0 \\ c^2\tilde{q}_1 & \tilde{q}_2 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{q}_3}{2} & \frac{\tilde{q}_2}{2} \end{bmatrix}; \ \widetilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_3}{2} & 0 & \frac{\tilde{q}_1}{2} \\ 0 & \frac{\tilde{q}_3}{2} & \frac{\tilde{q}_2}{2} \\ c^2\tilde{q}_1 & 0 & q_3 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Y por lo tanto, se puede verificar que la matriz jacobiana $\tilde{\mathbf{J}}$ ahora se puede expresar como:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \widetilde{\mathbf{A}} = \left(\tilde{\mathbf{C}}\widetilde{\mathbf{B}}^{-\mathbf{1}}\right)n_x + \left(\widetilde{\mathbf{D}}\widetilde{\mathbf{B}}^{-\mathbf{1}}\right)n_y \tag{35}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - \frac{\tilde{q}_2^2}{\tilde{q}_1^2} & \frac{2\tilde{q}_2}{q_1} & 0 \\ -\frac{\tilde{q}_2\tilde{q}_3}{\tilde{q}_1^2} & \frac{\tilde{q}_3}{\tilde{q}_1} & \frac{\tilde{q}_2}{\tilde{q}_1} \end{bmatrix} n_x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\tilde{q}_2\tilde{q}_3}{\tilde{q}_1^2} & \frac{\tilde{q}_3}{\tilde{q}_1} & \frac{\tilde{q}_2}{\tilde{q}_1} \\ c^2 - \frac{\tilde{q}_3^2}{\tilde{q}_1^2} & 0 & \frac{2\tilde{q}_3}{\tilde{q}_1} \end{bmatrix} n_y \tag{36}$$

Expresando $\widetilde{\mathbf{A}}$ en términos de los coeficientes originales:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{n_x} & \boldsymbol{n_y} \\ (\tilde{c}^2 - \tilde{u}^2)\boldsymbol{n_x} - \tilde{u}\tilde{v}\boldsymbol{n_y} & \tilde{v}\boldsymbol{n_y} + 2\tilde{u}\boldsymbol{n_x} & \tilde{u}\boldsymbol{n_y} \\ (\tilde{c}^2 - \tilde{v}^2)\boldsymbol{n_y} - \tilde{u}\tilde{v}\boldsymbol{n_x} & \tilde{v}\boldsymbol{n_x} & \tilde{u}\boldsymbol{n_x} + 2\tilde{v}\boldsymbol{n_y} \end{bmatrix} \tag{37}$$

Donde $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ y $\tilde{c}$ se calculan como:

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_L}u_L + \sqrt{h_R}u_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}}; \ \tilde{v} = \frac{\sqrt{h_L}v_L + \sqrt{h_R}v_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}}; \ \tilde{c} = \sqrt{g\frac{h_L + h_R}{2}} \tag{38}$$

Los eigenvalores y eigenvectores de $\widetilde{\mathbf{A}}$ son:

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y - \tilde{c}; \ \lambda_2 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y; \ \ \lambda_3 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + \tilde{c} \tag{39}$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}\boldsymbol{n_x} \\ \tilde{v} - \tilde{c}\boldsymbol{n_y} \end{bmatrix}; \ \widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{c}\boldsymbol{n_y} \\ \tilde{c}\boldsymbol{n_x} \end{bmatrix}; \ \widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{3}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}\boldsymbol{n_x} \\ \tilde{v} + \tilde{c}\boldsymbol{n_y} \end{bmatrix} \tag{40}$$

Una vez se define la matriz $\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U_L}, \mathbf{U_R})$, sus eigenvalores $\tilde{\lambda}_i(\mathbf{U_L}, \mathbf{U_R})$ y sus eigenvectores $\widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{i}}(\mathbf{U_L}, \mathbf{U_R})$ por medio de la aplicación directa del método del solucionador de Riemann de Roe se pueden obtener las fuerzas de onda a partir de variables promediadas en la frontera del volumen de control $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ y $\tilde{c}$. Las fuerzas de onda $\tilde{\alpha}_i$ se obtienen resolviendo el sistema lineal de 3x3:

$$\Delta\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{bmatrix} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\mathbf{3}} \tilde{\alpha}_i \widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{i}} \qquad (41)$$

La solución se puede verificar como:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\Delta h_{P,E}}{2} + \frac{\Delta(hu)_{P,E} n_x + \Delta(hv)_{P,E} n_y - \left(\tilde{u} n_x + \tilde{v} n_y\right)\Delta h_{P,E}}{2\tilde{c}}$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{\left(\Delta(hv)_{P,E} - \tilde{v}\Delta h_{P,E}\right)n_x - \left(\Delta(hu)_{P,E} - \tilde{u}\Delta h_{P,E}\right)n_y}{\tilde{c}} \qquad (42)$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \frac{\Delta h_{P,E}}{2} - \frac{\Delta(hu)_{P,E} n_x + \Delta(hv)_{P,E} n_y - \left(\tilde{u} n_x + \tilde{v} n_y\right)\Delta h_{P,E}}{2\tilde{c}}$$

2.2.3 Integración del Término Fuente

El tratamiento del término fuente debe garantizar un correcto balance con el flux numérico $\mathbf{F}_{b_i}$. Por lo tanto, cuando el fondo del dominio no es plano y el fluido está en reposo, la altura del fluido debe permanecer constante independientemente de las variaciones que pueda haber en el suelo. Este balance debe asegurarse para el término correspondiente a la pendiente del suelo y no así para los términos de fricción, en consecuencia, el término fuente puede dividirse como:

$$\mathbf{S_{z,f}} = \mathbf{S_z} + \mathbf{S}_{\boldsymbol{f}} \qquad (43)$$

$$\mathbf{S_z} = \begin{bmatrix} 0 \\ ghS_{ox} \\ ghS_{oy} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{bmatrix} \qquad (44)$$

La componente asociada a la fricción $\mathbf{S}_{\boldsymbol{f}}$ se calculó de manera directa a través de la ecuación de Manning. Para la componente $\mathbf{S}_{\mathbf{z}}$ se realiza un desarrollo similar al descrito anteriormente en donde se deben considerar la integral de este término sobre cada una de las caras del VC:

$$\int \mathbf{S}_{\mathbf{z}} d\Omega = a_i \left(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} \tilde{\beta}_i \widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{i}} \right)_{L,R} \tag{45}$$

Si se iguala el término de la derecha con los valores del término fuente $\mathbf{S}_{\mathbf{z}}$ se pueden obtener los factores $\tilde{\beta}_i$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -g\tilde{h}(\Delta z)n_x \\ -g\tilde{h}(\Delta z)n_y \end{bmatrix} = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} \tilde{\beta}_i \widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{i}} \tag{46}$$

Resolviendo el sistema se obtienen los coeficientes del término asociado a la pendiente del suelo como:

$$\tilde{\beta}_1 = -\frac{\tilde{c}}{2}(\Delta z);\;\; \tilde{\beta}_2 = 0;\;\; \tilde{\beta}_3 = \frac{\tilde{c}}{2}(\Delta z) \tag{47}$$

Por lo tanto, el flux asociado a la pendiente del suelo puede expresarse como:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{z}b_i} = \frac{1}{2} a_{b_i} \left(\sum_{n=1}^{3} \tilde{\beta}_n (1 - \text{signo}(\check{\lambda}_n)\, \tilde{\mathbf{e}}_n \right)_{P,E} \tag{48}$$

Finalmente, la expresión completa del método de Godunov con el solucionador de Riemann de Roe incluyendo el término fuente se puede expresar como:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} = \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{n}} - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \left(\sum_{l=1}^{3} \left(\mathbf{F}_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i \right) + \mathbf{S}_{\mathbf{z}b_i} \right)_{P,E} + \frac{\Delta t}{\Omega_i} \mathbf{S}_{\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{i}} \tag{49}$$

2.2.4 Condiciones de Frontera

El régimen de flujo que se obtenga al interior del dominio de estudio dependerá de las condiciones de frontera que se fijen. Todas las condiciones de frontera se imponen como función de h, y las velocidades u y v para lo cual se tiene en cuenta que u_n y u_t son las componentes de la velocidad en la dirección normal y transversal a la cara de la celda de frontera.

$$\begin{aligned} u &= u_n n_n - u_t n_t = u_x n_x \\ v &= u_t n_n + u_n n_t = v_y n_y \end{aligned} \tag{50}$$

Cuando las fronteras son paredes sólidas que bloquean por completo el flujo, se considera la velocidad normal al contorno igual a cero $u_n = 0$ y se permite únicamente la velocidad tangencial. En el caso de la altura, esta se fija en el contorno igual al del centroide de la celda $h_C = h_P$.

Dependiendo de si la salida o la entrada son condiciones de régimen lento o rápido será preciso utilizar la ecuación de compatibilidad entre los puntos entrada o salida y los puntos interiores del dominio correspondiente a la línea bicaracterística entre estos. Esta ecuación se define como:

$$(u_n + 2c)_C = (u_n + 2c)_P \tag{51}$$

El subíndice C indica el punto sobre el contorno del dominio, mientras que P, hace referencia al punto exterior en caso de una entrada o interior en caso de una salida; mientras que c es la velocidad de la onda, es decir, $c = \sqrt{gh}$. Las diferentes condiciones de frontera abierta se resumen en la Tabla 1

Tabla 1.

Condiciones de frontera abierta.

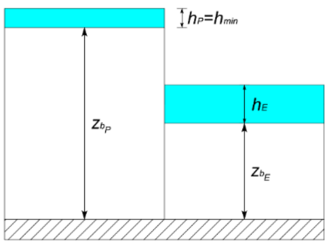
Entrada	Salida
Flujo subcrítico	
Se impone: $\boldsymbol{hu_{in}}, \boldsymbol{hv_{in}}$ Se calcula: $\boldsymbol{h_{in} = h_i}$ $\boldsymbol{u_{in} = hu_{in}/h_{in}}$ $\boldsymbol{v_{in} = hv_{in}/h_{in}}$	Se impone: h_{out} Se calcula: $u_{out} = (u + 2c)_i - 2c_{out}$ $v_{out} = (v + 2c)_i - 2c_{out}$
Flujo supercrítico	
Se imponen: $\boldsymbol{h_{in}}, \boldsymbol{hu_{in}}, \boldsymbol{hv_{in}}$ Se calcula: $\boldsymbol{u_{in} = hu_{in}/h_{in}}$ $\boldsymbol{v_{in} = hv_{in}/h_{in}}$	Se permite el flujo libre: $h_{out} = h_i$ Se calcula: $u_{out} = (u + 2c)_i - 2c_{out}$ $v_{out} = (v + 2c)_i - 2c_{out}$
Flujo Transcrítico	
Se imponen: $\boldsymbol{hu_{in}}, \boldsymbol{hv_{in}}$ Se calcula: $\boldsymbol{h_{in} = h_i}$ $\boldsymbol{u_{in} = hu_{in}/h_{in}}$ $\boldsymbol{v_{in} = hv_{in}/h_{in}}$	Se impone: h_{out} Se calcula: $u_{out} = (u + 2c)_i - 2c_{out}$ $v_{out} = (v + 2c)_i - 2c_{out}$

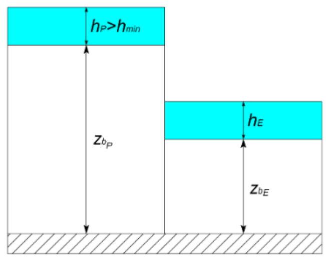
2.2.5 Manejo del Frente Seco-Mojado

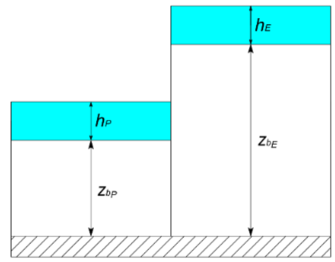
En casos cuando se consideran aplicaciones sobre lechos secos o que se secan y se mojan en el tiempo, es fundamental la identificación y el manejo de estas interfaces con el fin de evitar la aparición de áreas con alturas negativas o permitir o restringir el avance del fluido dentro del dominio de estudio dependiendo de las condiciones del terreno y de los niveles de agua en cada instante. El avance del flujo se verifica en cada instante de tiempo, en cada cara del volumen de control, y este depende de los niveles de altura del agua y del suelo del elemento P y su vecino E como se esquematiza en la Tabla 2.

Tabla 2.

Configuraciones de flujo y frontera interna para el frente seco-mojado.

<table>
<tr><td colspan="2">Elevación del fluido mayor que la del vecino
$\boldsymbol{h_P + z_{b_P} > h_E + z_{b_E}}$</td><td>Elevación del fluido menor que la del vecino
$\boldsymbol{h_P + z_{b_P} < h_E + z_{b_E}}$</td></tr>
<tr><td>Frontera interna</td><td>Condición de flujo</td><td>Frontera interna reflexiva</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{h_P = h_{min}}$


a)</td><td>$h_P > h_{min}$


b)</td><td>$\boldsymbol{z_{b_P} < z_{b_E}}$


c)</td></tr>
<tr><td>Como $\boldsymbol{h_P = h_{min}}$ no puede fluir liquido de la celda P a la del vecino, por lo tanto, se considera una frontera interna.</td><td>Como $h_P > h_{min}$ hay líquido disponible para seguir a la siguiente celda.</td><td>Como $h_P + z_{b_P} < h_E + z_{b_E}$ y $z_{b_P} < z_{b_E}$ el fluido no puede escalar a la siguiente celda y por lo tanto no fluye.</td></tr>
</table>

De acuerdo con el tratamiento de película delgada, a todas las celdas que se consideran secas se les impone un pequeño valor de altura mínimo igual a $h_{min}=1x10^{-5}$ (por ejemplo) con el fin de evitar divisiones por cero en cada uno de los cálculos del flux numérico. El avance del frente está dado por el cálculo del flux en cada una de las caras del volumen de control y este depende de cómo se trate dicha cara. Siempre que $h_P + z_{b_P} > h_E + z_{b_E}$ y que $h_P > h_{min}$ se permitirá el avance del frente, no obstante, si $h_P = h_{min}$ la cara se considera como una frontera interna reflexiva dentro del dominio. En caso de que $h_P + z_{b_P} < h_E + z_{b_E}$ y que $z_{b_P} < z_{b_E}$ también se impone la frontera reflexiva. Para el caso cuando $h_P + z_{b_P} = h_E + z_{b_E}$ se permite el avance del frente.

2.2.5 Compensación Desbalance de Masa

Cuando en la solución numérica se obtienen elementos con valores de altura negativos estos se deben "corregir" y fijar con el valor de h_{min} y los valores de hu y hv como cero. Sin embargo, realizar dicho cambio genera una alteración en el balance masa del sistema debido a que este ajuste introduce masa en el sistema. En este trabajo se propone compensar dicha alteración mediante la distribución de dicho desbalance en las celdas que cambian de altura en el tiempo anterior conservando en todo momento el balance de masa.

Las alturas de agua "corregidas" en cada celda dh_{min} se calculan como:

$$dh_{min} = (h - h_{min}) \tag{52}$$

Y el volumen total a compensar es:

$$dh_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{nne} \left| dh_{\min\, i} \right| * Area_i \tag{53}$$

Como la compensación se realiza únicamente con los elementos que cambiaron de altura en el paso de tiempo actual, se calculan los incrementos Δh_{pos} y disminuciones Δh_{neg} totales así:

$$\Delta h_i = h_i^i - h_i^{i-1} \tag{54}$$

$$\begin{gathered} si\ \Delta h_i > 0\ \ \Delta h_{pos} = \sum_{i=1}^{nne} |\Delta h_i| * Area_i \\ si\ \Delta h_i < 0\ \ \Delta h_{neg} = \sum_{i=1}^{nne} |\Delta h_i| * Area_i \end{gathered} \tag{55}$$

Adicionalmente, se define un factor que establece la proporción de volumen aumentado respecto a las variaciones totales del paso de tiempo actual:

$$f = \frac{\Delta h_{pos}}{\Delta h_{pos} + \Delta h_{neg}} \tag{56}$$

Seguidamente se verifica cuánto debe ser el ajuste en cada celda dependiendo de si esta aumenta o disminuye su volumen respecto al tiempo anterior. Si aumenta $\Delta h_i > 0$ entonces dh_i se calcula como:

$$si\ \Delta h_i > 0\ \ dh_i = \Delta h_i * \left[1 + (f)\frac{dh_{TOTAL}}{\Delta h_{pos}}\right] \tag{57}$$

Pero si disminuye $(\Delta h_i < 0)$, dh_i se calcula como:

$$si\ \Delta h_i > 0\ \ dh_i = \Delta h_i * \left[1 + (1 - f)\frac{dh_{TOTAL}}{\Delta h_{neg}}\right] \tag{58}$$

Y en cualquier caso el nuevo h_i^i se calcula como:

$$h_i^i = h_i^{i-1} + dh_i \tag{59}$$

2.3 Resultados

Con el fin de validar el esquema de solución para las ecuaciones de aguas someras descrito anteriormente, se aplicó el algoritmo a la solución a 10 problemas los cuales han sido bien definidos en la literatura: rotura de presa, flujo sobre un montículo, rotura de presa circular, rotura parcial de presa asimétrica, fluido en reposo con frente seco-mojado, tazón parabólico con frente móvil, inundación por rotura de presa sobre tres montículos en un canal cerrado, rotura de presa en un canal de lecho seco con ancho variable, rotura de presa en un canal con un montículo triangular y el caso de una ola de tsunami en el valle de Monai.

Los errores obtenidos en las simulaciones se calcularon mediante la raíz cuadrada de la sumatoria de la diferencia de cuadrados del valor de la altura h dividido sobre el número de elementos como se presenta en la siguiente expresión:

$$\epsilon rror = \epsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{nne} \left(h_{i_{calculado}}^2 - h_{i_{analítica}}^2\right) /nne} \tag{60}$$

Donde nne es el número de volúmenes utilizados en la solución, $h_{i_{calculado}}$ es el valor que se obtiene de la simulación para el volumen i mientras que $h_{i_{analítica}}$ es el valor del volumen i obtenido de la solución analítica o la solución con la cual se compara el resultado obtenido. Cabe mencionar que estos errores calculados son absolutos y el impacto sobre cada cálculo dependerá de la escala de cada problema estudiado.

2.3.1 Rotura de Presa

Este problema se realiza con el fin de mostrar la capacidad del modelo para simular el avance de un frente de onda. El problema parte de un fluido en reposo con dos calados separados por una compuerta imaginaria. En el ínstate t=0 se retira la compuerta y se deja evolucionar al fluido libremente y se observa el avance del frente de onda que se produce. El dominio de estudio es un canal de 4m de ancho por 200m de largo con fondo plano y la compuerta imaginaria se ubica en la mitad del canal. Se llevaron a cabo simulaciones considerando el fondo seco y el fondo mojado con el fin de evaluar la capacidad del modelo de representar los frentes seco/mojado. Las condiciones iniciales son:

- Fondo mojado
    - Elevación del fluido aguas arriba de la presa h_1=1m.
    - Elevación del fluido aguas abajo de la presa h_0=0.1m.

- Fondo seco
  - Elevación del fluido aguas arriba de la presa h_1=1m.
  - Elevación del fluido aguas abajo de la presa h_0=h_{min}=0.0001.

Para el fondo mojado se llevó a cabo la simulación hasta t=25s mientras que para el fondo seco la solución se llevó a cabo hasta t=15s. Se utilizaron mallas estructuradas de 432 y 2592 elementos y los resultados se presentan en la *Figura 4*a y *Figura 4*b y se comparan con las soluciones analíticas reportadas por (Delestre *et al*., 2013).

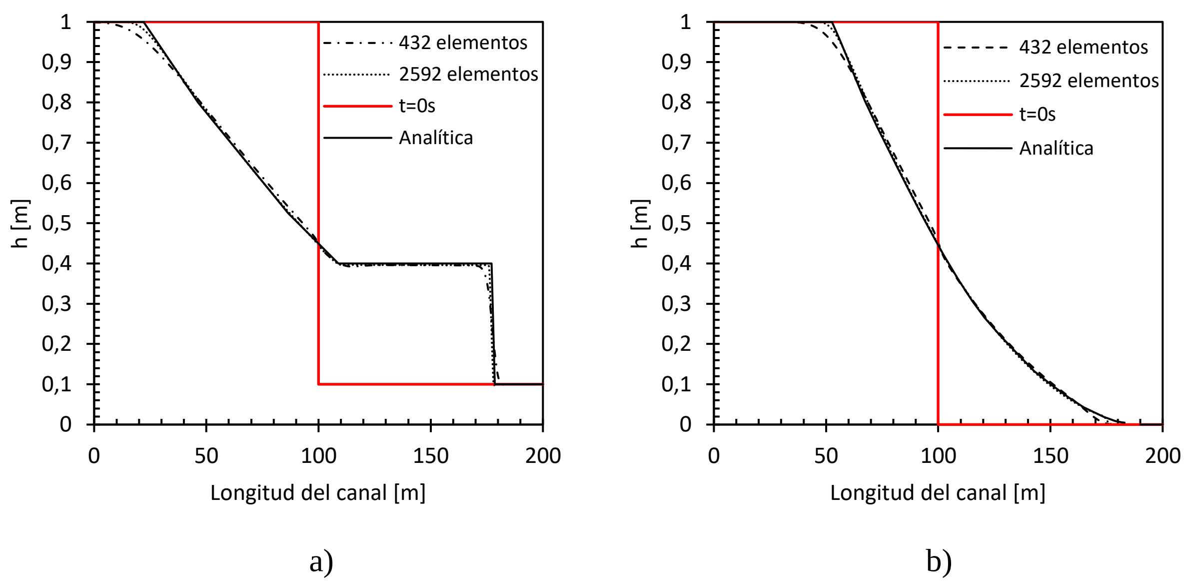


Figura 4. Rotura de presa con a) fondo mojado hasta 25s y b) fondo seco hasta 15s.

Los resultados dan cuenta de que la solución se aproxima muy bien a las soluciones analíticas. Así mismo, se llevaron a cabo simulaciones incrementando el número de elementos y se calcularon los errores obtenidos y se presentan en la Tabla 3. En esta se observa como en los dos casos estudiados el error se reduce a medida que se aumenta el número de elementos, como era esperado. Para el fondo mojado el error disminuye desde 0.00760 cuando se utilizaron 432 elementos hasta 0.00557 cuando se utilizaron 2592 elementos. En el caso del fondo seco el error se redujo de 0.05259 hasta 0.02245 cuando los elementos en la solución se incrementan de 432 hasta 2592.

Tabla 3.
Errores absolutos calculados con las distintas mallas utilizadas en el problema de rotura de presa con fondo mojado y seco.

No. Elementos	ϵ Fondo mojado [m]	ϵ Fondo seco [m]
432	0.00760	0.05259
864	0.00664	0.03906
1296	0.00615	0.03250
1728	0.00586	0.02649
2160	0.00569	0.02525
2592	0.00557	0.02245

Así mismo, se hizo una simulación con fondo seco considerando un canal de 50m de longitud y localizando la compuerta en 25m; el intervalo de tiempo usado fue el necesario (11.5s) para alcanzar la reflexión de la onda. Se utilizó una malla de 244x3 elementos y los resultados se compararon con la solución analítica (Delestre *et al*., 2013) que se presentan en la *Figura 5*. Los errores en cada uno de los tiempos se presentan en la

Tabla 4. El resultado evidencia que en cada uno de los tiempos el modelo implementado sigue correctamente la solución analítica con un error máximo de 0.034116 para el tiempo t=11.5s y un error mínimo de 0.005327 para el tiempo t=4s. Lo anterior muestra cómo el esquema implementado presenta un adecuado manejo del frente seco-mojado preservando en todo instante la positividad de la solución, así como una correcta implementación de la condición de frontera reflexiva.

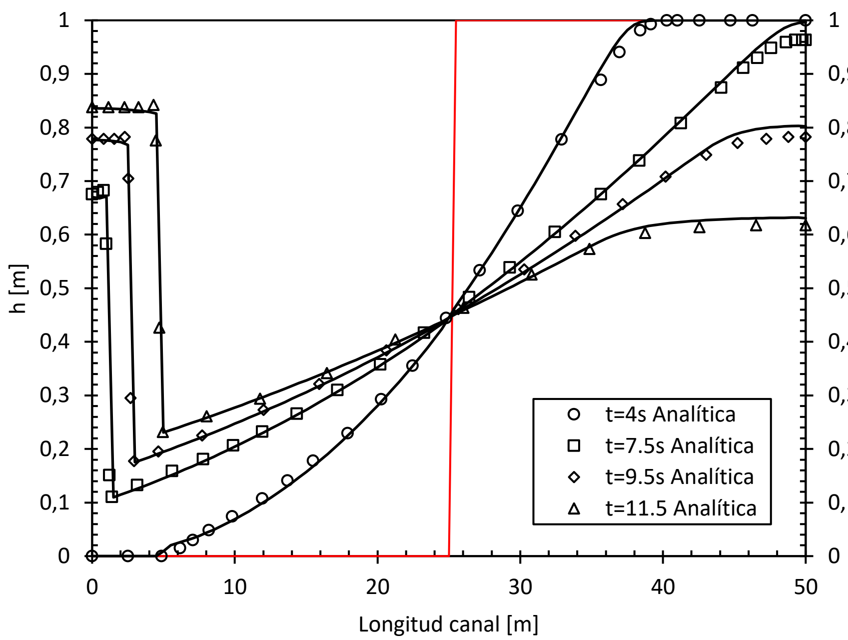


Figura 5. Rotura de presa con fondo seco y frontera reflexiva.

Tabla 4.

Errores absolutos calculados en distintos tiempos en el problema de rotura de presa con fondo seco.

ϵ [m]	
t=4	0.005327
t=7.5s	0.026649
t=9.5s	0.031902
t=11.5s	0.034116

2.3.2 Flujo Sobre un Montículo

Tres simulaciones numéricas sobre un montículo con tres diferentes regímenes de flujo se llevan a cabo con el fin de evaluar la correcta implementación de las condiciones de frontera abierta. Los resultados de las simulaciones se compararon con la solución analítica reportada por (Delestre *et al*., 2013). En todos los casos se consideró un canal rectangular de 25m de longitud y 1m de ancho sin fricción. La topografía del canal viene dada por la siguiente expresión:

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.005(x-10)^2, & 8 \le x \le 12 \\ 0, & otras\ partes \end{cases} \tag{61}$$

2.3.2.1 Caso Subcrítico. Para el caso subcrítico, el fluido está inicialmente en reposo dentro del canal con una altura $h(x,0) = 0.5m$. Se fija un flujo a la entrada del canal de $0.18\ m^2/s$ y una altura $h = 0.5m$ a la salida, lo cual permite que se obtenga una condición de flujo subcrítico a través del canal. En la *Figura 6* se muestran los perfiles de h y hu con respecto a la longitud del canal cuando se alcanza el estado estacionario. De esta figura se puede observar que la solución numérica se aproxima perfectamente con la solución reportada por (Delestre *et al*., 2013) con un error de 6.4e-5 en h y 2.5e-6 en hu.

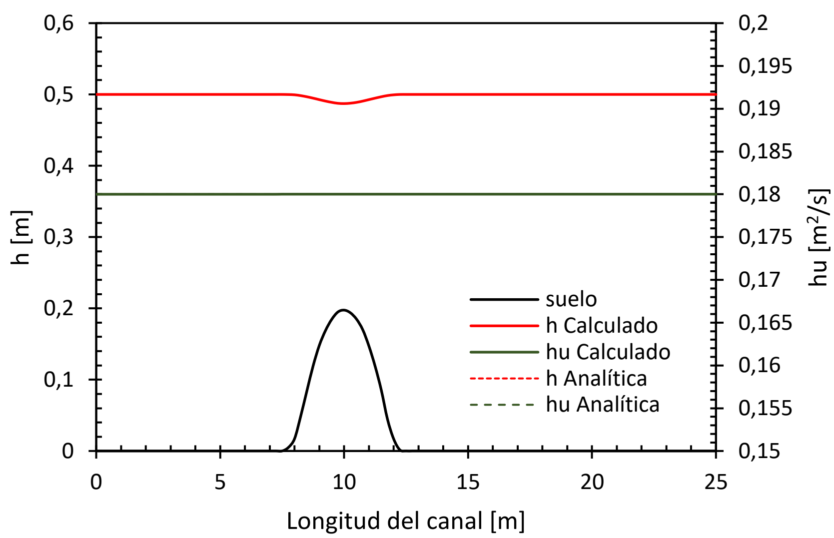


Figura 6. Comparación de los perfiles de h y hu para el caso subcrítico.

2.3.2.2 Caso Supercrítico. En el caso supercrítico la altura inicial del fluido se fija en $h(x,0) = 2m$, y se considera un flujo a la entrada del canal de 25.0567 m^2/s y una altura $h = 2m$; a la salida se permite el flujo libre lo cual resulta en una condición de flujo supercrítico a lo largo del canal. En la *Figura 7* se presentan los perfiles h y hu con respecto a la longitud del canal cuando se alcanza el estado estacionario y se observa que la solución numérica se ajusta a la solución analítica reportada por (Delestre *et al*., 2013) y tiene un error de 7.4e-4 en h y 1.5.e-2 en hu.

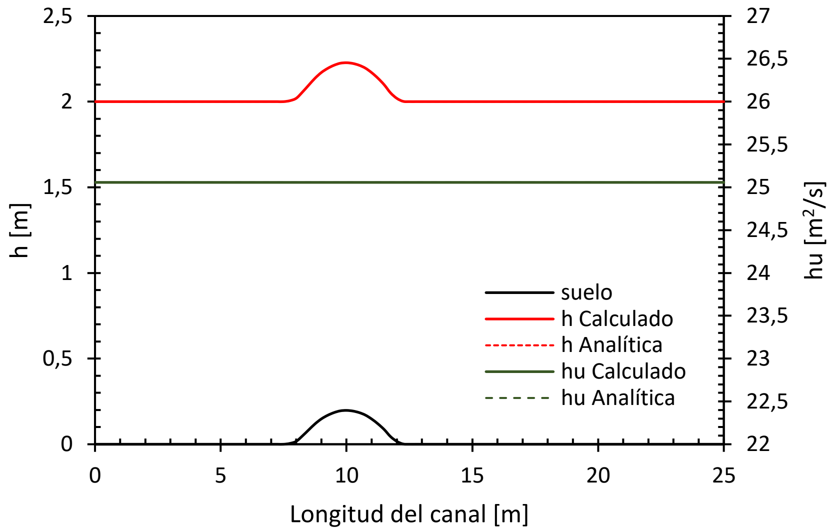


Figura 7. Comparación de los perfiles de h y hu para el caso supercrítico.

2.3.2.3 Caso Transcrítico. La condición inicial en el caso transcrítico se fija en $h(x,0) = 0.33m$, además, se establece una velocidad de flujo a la entrada del canal de $0.18\ m^2/s$ y se fija una altura $h = 0.33m$ a la salida. El flujo cambia de subcrítico a supercrítico a través de la formación de un resalto hidráulico. En la *Figura 8*, se muestran los perfiles de h y hu con respecto a la longitud del canal, y se observa, que el resalto hidráulico está localizado en el mismo lugar reportado por (Delestre et al. 2013) y que el flujo hu se mantiene constante con una pequeña variación justo al final del resalto. Los errores obtenidos en la solución fueron para el caso de h de 5.1e-4 y para hu fue de 3.4e-5.

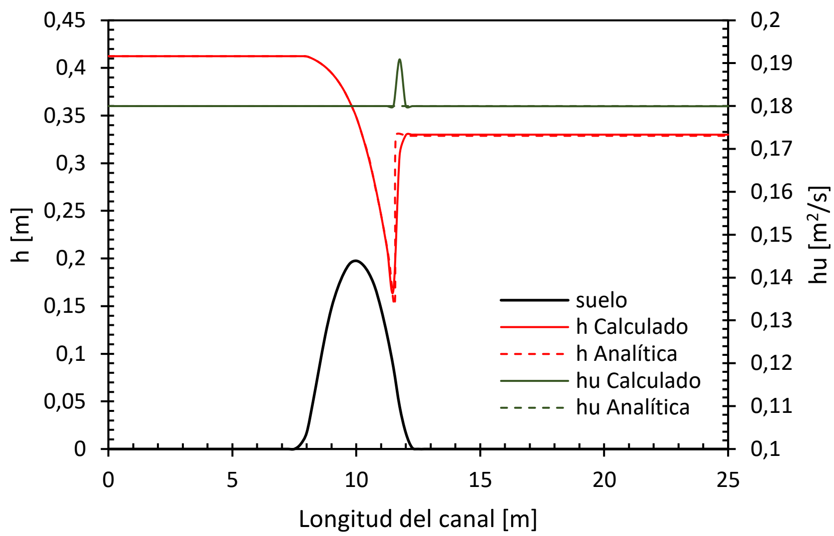


Figura 8. Comparación de los perfiles de h y hu para el caso transcrítico

2.3.2.4 Caso Transcrítico 2. En este problema la condición inicial se fija en $h(x, 0) = 0.5m$, y se considera un flujo a la entrada del canal de $1.53\ m^2/s$ y se establece una condición de flujo libre a la salida. La simulación se deja avanzar en el tiempo hasta alcanzar el estado estacionario y los resultados se muestran en la *Figura 9*. En esta se muestra qué la solución numérica coincide plenamente con la solución reportada por (Delestre *et al*., 2013) y además se muestra un correcto balance en el flujo de hu así como en la altura del fluido h a lo largo de todo el canal. El error obtenido para el caso de h fue de 6e-8 mientras que para hu fue de 0. En la *Figura 10* se muestra el avance en el tiempo de la altura del fluido dentro del canal en los instantes 10s, 30s, 60 y 130s. Allí se exhibe que cuando se alcanza el estado estacionario, la altura h del fluido después del montículo es completamente constante e igual a 0.4m como se reporta en *(Delestre et al*., 2013).

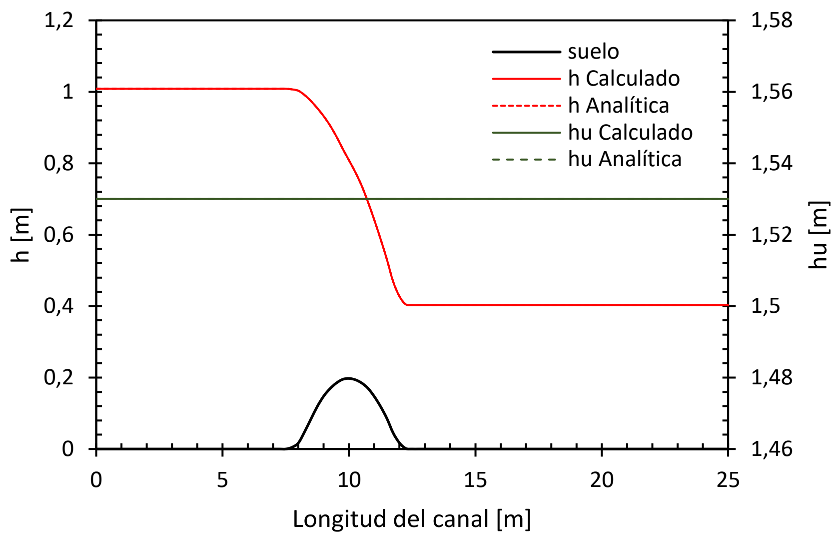


Figura 9. Comparación de los perfiles de h y hu para el caso transcrítico 2

Los errores obtenidos en cada uno de los casos del problema flujo sobre un montículo se resumen en la

. El error máximo para h se obtuvo en el caso de régimen supercrítico y fue de 0.002708m mientras que el error mínimo fue de 0.000024m y se obtuvo con el caso transcritico2. En el caso de hu el error máximo fue 0.012201m^{2}s^{-1} en el caso supercrítico y el mínimo fue de 0 para el caso transcrítico 2. El orden de magnitud de estos estos errores y las gráficas presentadas anteriormente dan cuenta de la correcta implementación de las condiciones de frontera para todos los casos estudiados con distintos regímenes de flujo.

Tabla 5.

Errores absolutos calculados en los distintos regímenes de flujo.

	h [m]	hu [m^{2}s^{-1}]
Subcrítico	0.000797	0.000158
Supercrítico	0.002708	0.012201
Transcrítico	0.002248	0.00058
Transcrítico 2	0.000024	0

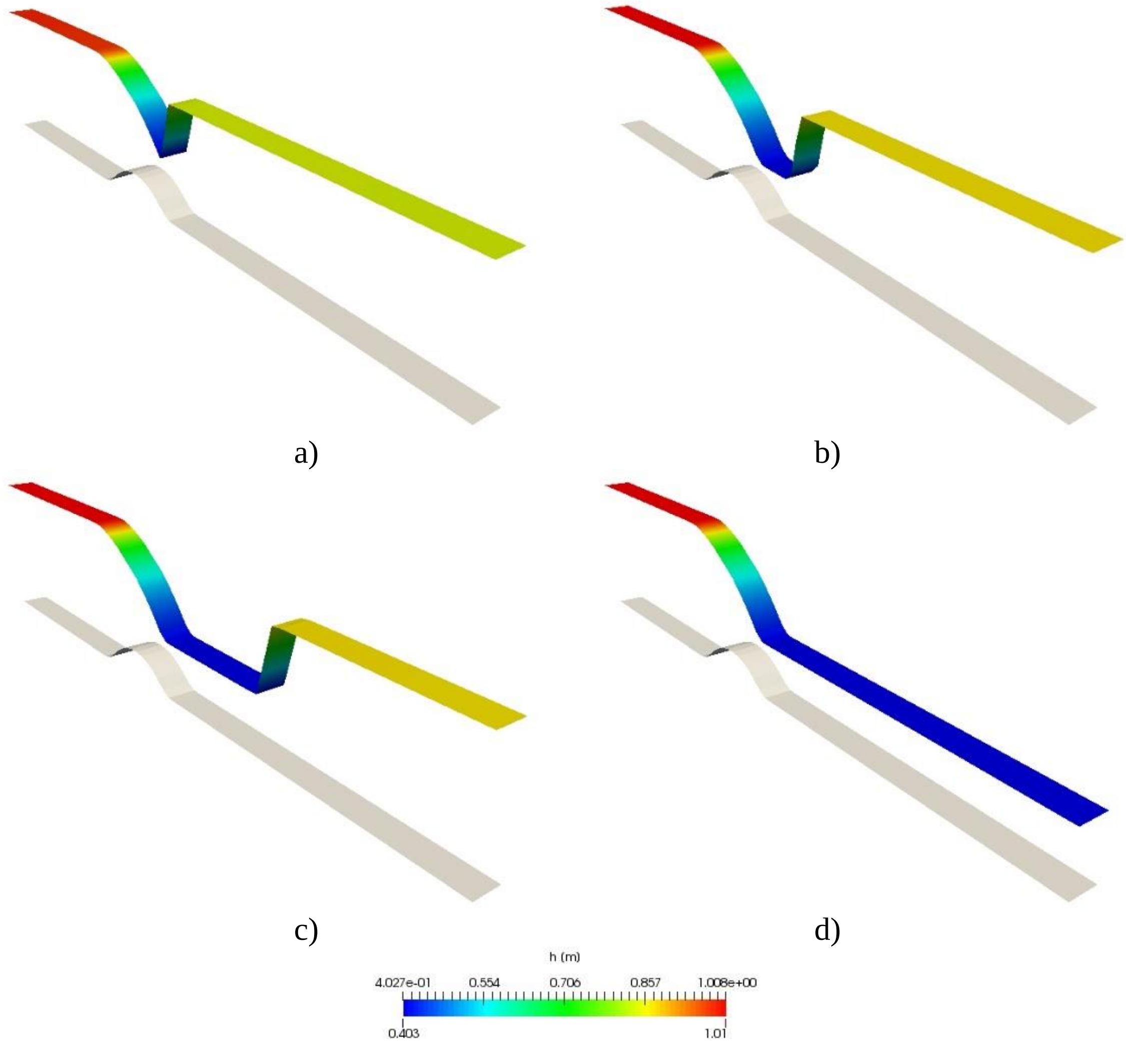
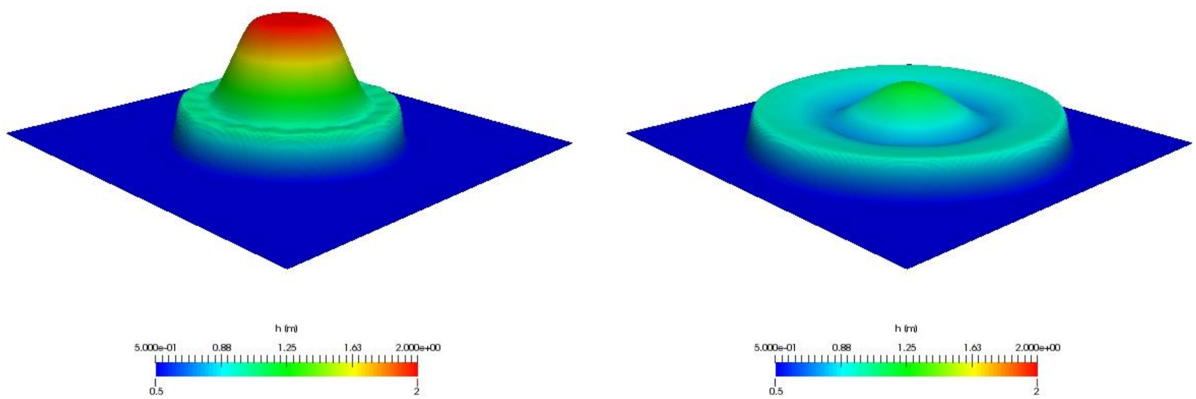


Figura 10. Evolución de la altura del fluido para el caso transcrítico 2 en los tiempos a) t=10s, b) t=30s, c) t=60s y d) t=130s.

2.3.3 Rotura de Presa Circular

Este problema permite verificar la capacidad del esquema numérico para capturar choques en un dominio bidimensional. En este problema un cilindro de 20m de diámetro y 2m de altura lleno de agua se deja caer libremente sobre una superficie mojada con un nivel de altura de 0.5m y un dominio cuadrado de 50m por 50m. La *Figura 11* muestra la propagación de la onda después de 1s y 2.5s de simulación utilizando una malla de 20736 elementos. La *Figura 12* muestra los resultados comparados con la solución analítica (Leveque, 2004) teniendo en cuenta que dicha solución se obtiene de resolver la ecuación unidimensional en coordenadas radiales. Para t=1s se obtuvo un error absoluto de 0.015758m mientras que para t=2.5 el error fue de 0.008199m. Se observa que la solución numérica sigue muy de cerca la solución analítica unidimensional y los frentes de onda se encuentran localizados en las mismas posiciones que dicha solución.



a) b)

Figura 11. Perfil rotura de presa circular a) t=1s y b) t=2.5s.

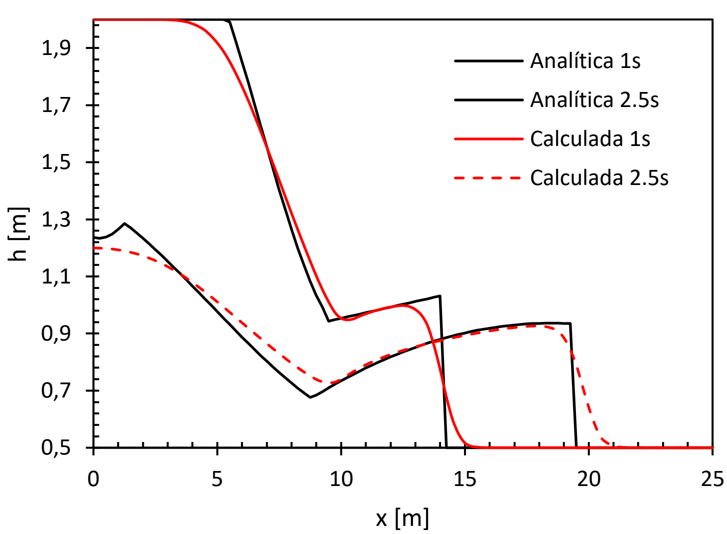


Figura 12. Perfil rotura de presa circular a) t=1s y b) t=2.5s.

2.3.4 Rotura Parcial de Presa Asimétrica

Esta vez se considera nuevamente la rotura de presa acentuadamente bidimensional y la ubicación de la compuerta es asimétrica y parcial. El dominio es un cuadrado 200m por 200m y se esquematiza en la *Figura 13*. También se consideran dos casos con las siguientes condiciones iniciales:

- Fondo mojado
    - Elevación del fluido aguas arriba de la presa=10m
    - Elevación del fluido aguas abajo de la presa=5
- Fondo seco
    - Elevación del fluido aguas arriba de la presa=5m
    - Elevación del fluido aguas abajo de la presa=h_{min}=0.0001.

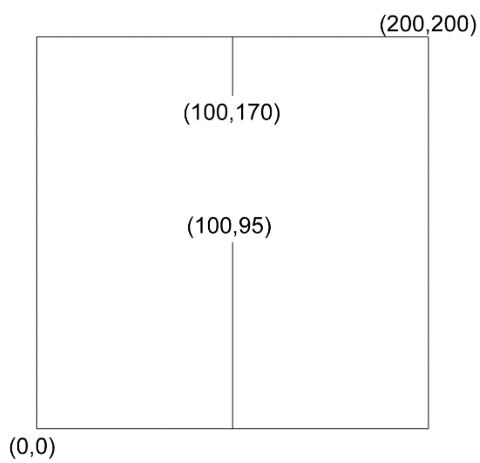
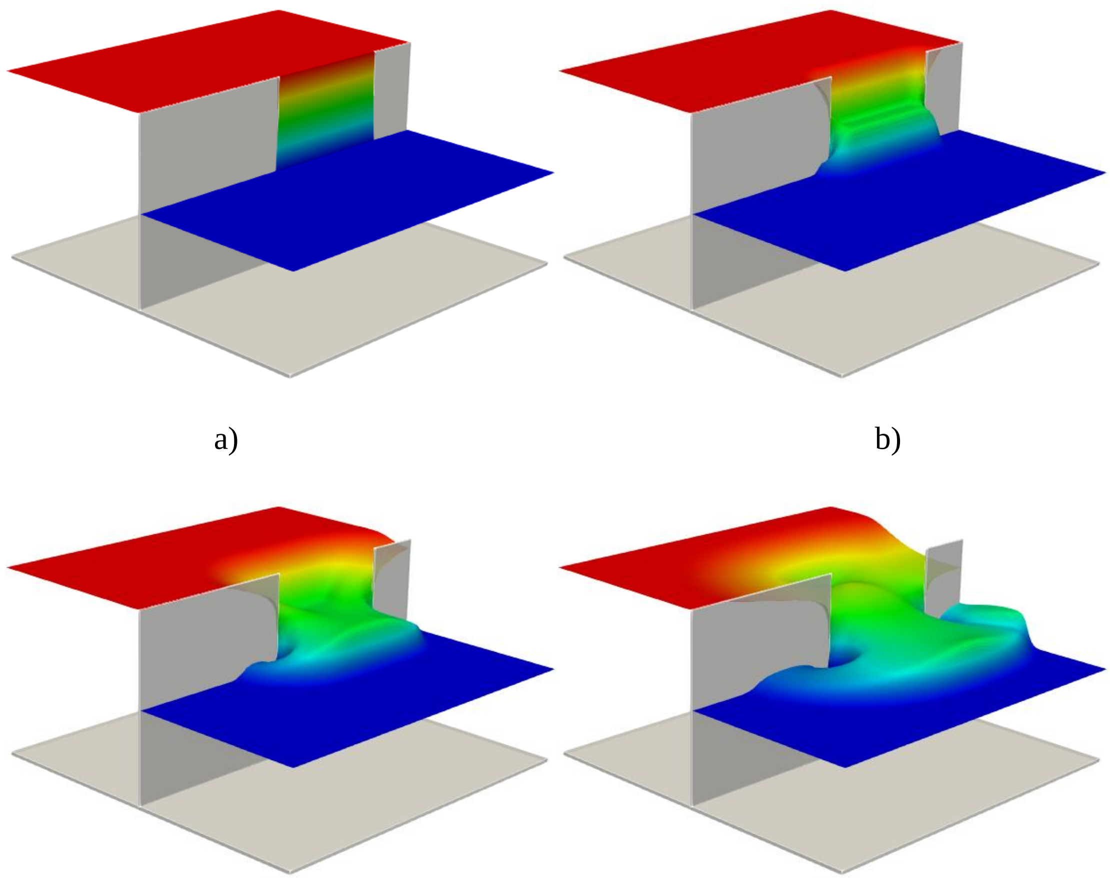


Figura 13. Dominio de estudio problema rotura de presa parcial de presa asimétrica.

De acuerdo con el esquema implementado para el fondo seco se utilizó un valor de h_{min} igual a 0.0001 en todas las celdas que se consideraron secas, además, se utilizó un mallado de 67680 elementos. Los resultados en los instantes de tiempo 0s, 1.2s, 3.6s y 7.2s para el fondo mojado se presentan en la *Figura 14*; y los resultados del fondo seco en los instantes de tiempo 0s, 1s, 3s y 5s se presentan en la *Figura 15*. Cuando el fondo es mojado se observa la formación del frente de onda y el avance de este en el tiempo mientras que para el fondo seco se muestra el avance de fluido sobre la superficie sin la formación de dicho frente.



a) b)

c) d)

Figura 14. Rotura de presa parcial asimétrica con fondo mojado en los instantes a) t=0 b) t=1.2s c) t=3.6s y d) t=7.2s.

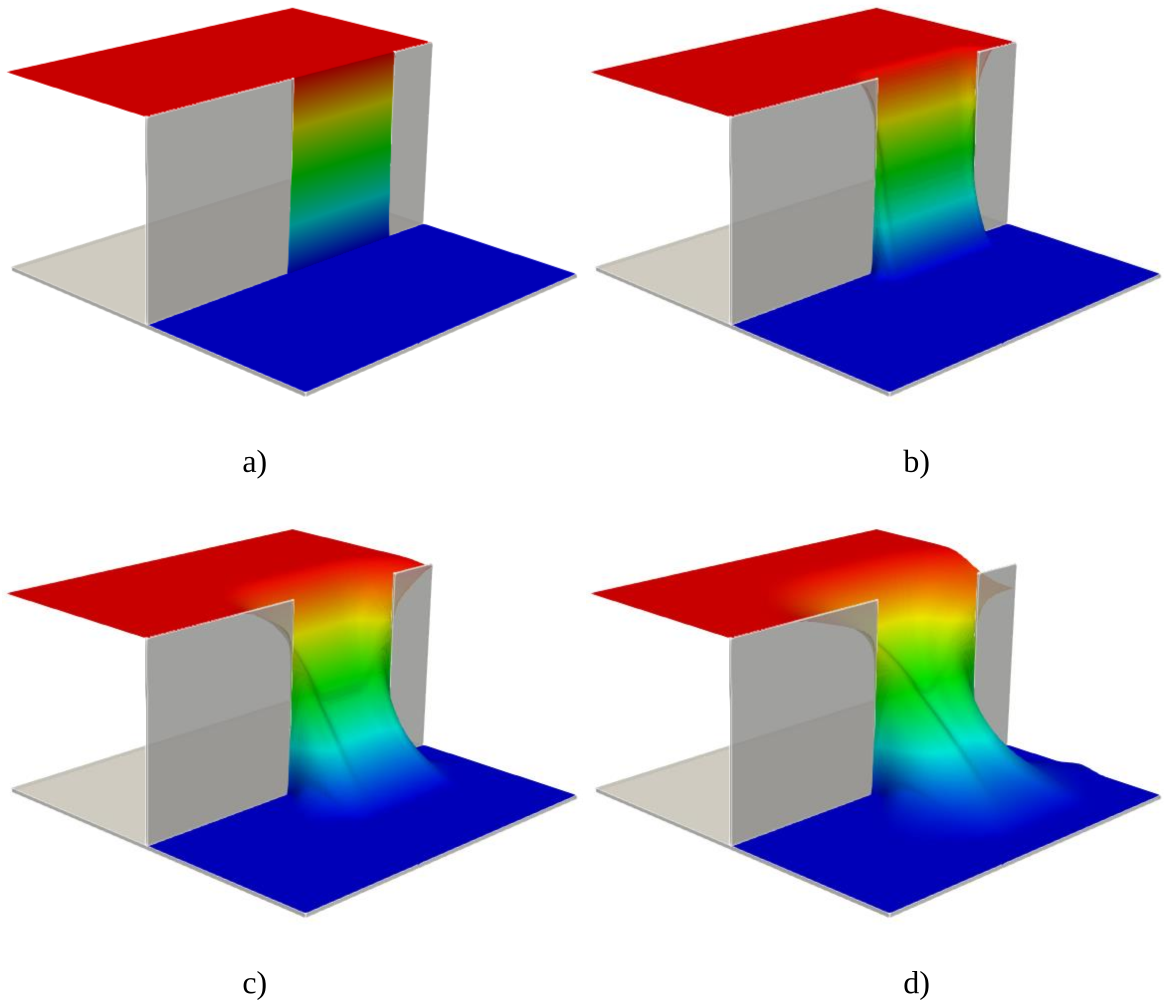
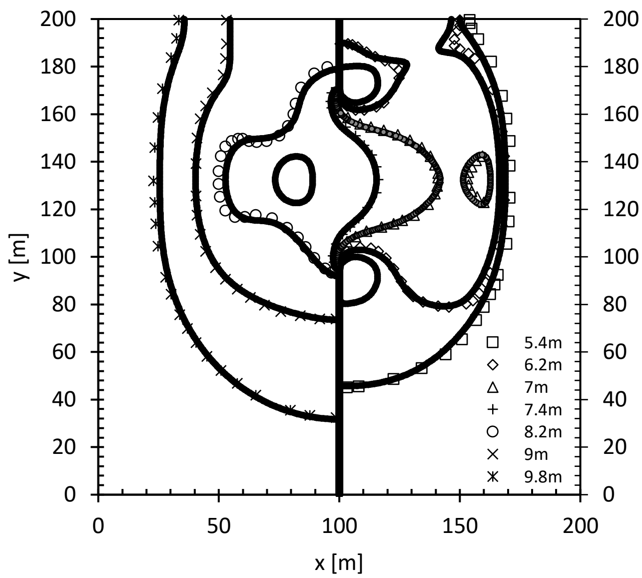
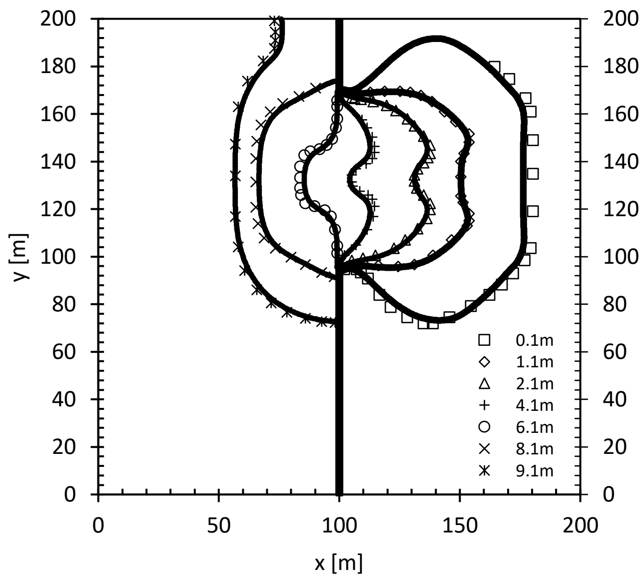


Figura 15. Esquema rotura de presa parcial asimétrica con fondo seco en los instantes a) t=0 b) t=1s c) t=3s y d) t=5s.

En la *Figura 16*a se presentan las curvas de nivel para el instante t=7.2s para el fondo mojado. En esta se observan los perfiles en los niveles de altura de 5.4m, 6.2m, 7m, 7.4m 8.2m, 9m y 9.8m. Estos perfiles se comparan con los reportados por (Q. Liang *et al*., 2004) y se observa una correcta correspondencia con estos. En la *Figura 16*b se muestran las curvas de nivel para el instante t=5s para el fondo seco en las alturas 0.1m,1.1m, 2.1m, 4.1m, 6.1m, 8.1m y 9.1m y se comparan con los reportados por (Q. Liang *et al.*, 2004). Al igual que en el caso mojado los resultados obtenidos exhiben una buena correspondencia con los de (Q. Liang *et al.*, 2004) y evidencian un buen manejo del frente seco-mojado en un dominio ampliamente bidimensional.



a)



b)

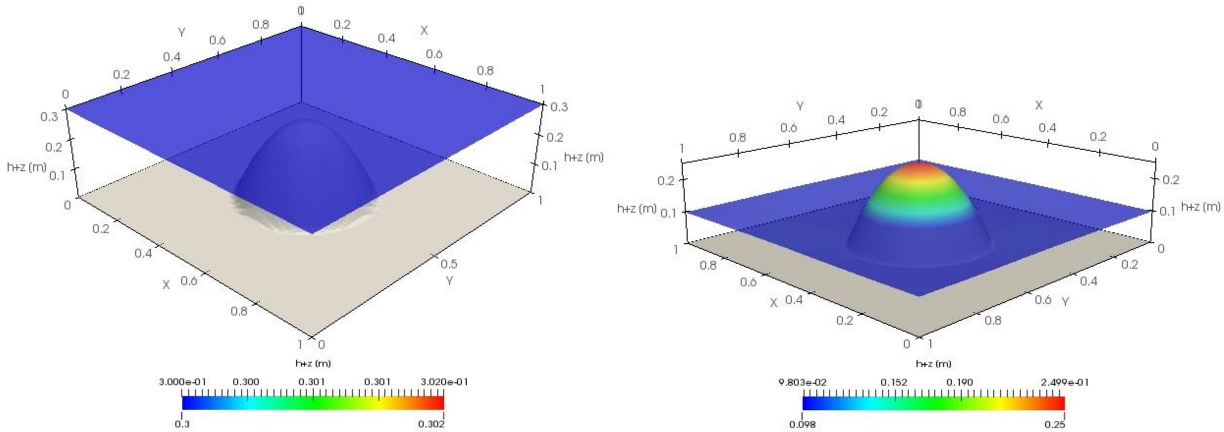
Figura 16. Curvas de nivel para la rotura parcial de presa asimétrica para los casos con fondo a) mojado en el instante t=7.2s y b) seco en el instante t=5s.

2.3.5 Fluido en Reposo con Frente Seco-Mojado

Este problema permite verificar si el modelo implementado preserva el flujo en estado estacionario con frente seco-mojado sobre un fondo irregular y un fluido en reposo. La simulación tiene lugar en un dominio cuadrado de 1m por 1m y la elevación del suelo $z(x, y)$ se describe por la siguiente ecuación:

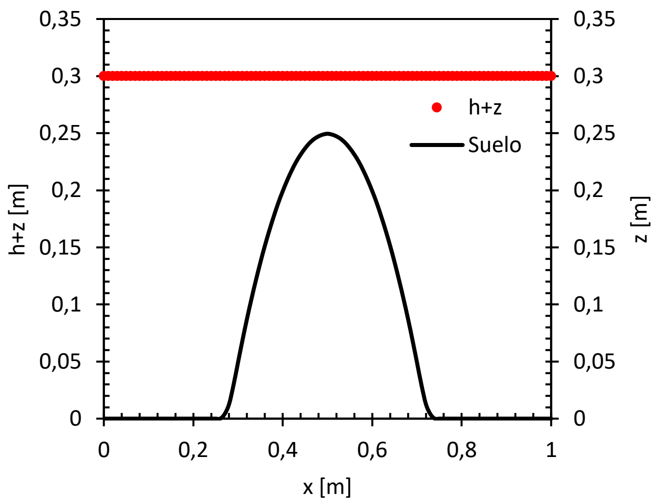
$$z(x, y) = \max\{0{,}0.25 - 5[(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2]\} \tag{62}$$

El dominio es cerrado y sin fricción y se estudian dos casos: i) uno en el cual la elevación del agua es 0.1m y parte del suelo no es cubierta por el fluido y ii) con 0.3m donde todo el dominio queda cubierto por el fluido como se muestra en la *Figura 17*. La simulación se llevó hasta 200s y se utilizó un mallado regular de 11664 elementos y los resultados se compararon con la solución analítica reportada por (Delestre *et al*., 2013). En la *Figura 18*, se muestran los perfiles de $h + z$ sobre el eje y=0.5 para los dos casos descritos anteriormente. Para el caso donde el montículo está completamente cubierto por el agua se obtuvo un error igual a cero mientras que para el caso donde h=0.1 se obtuvo un error igual a 7.845e-5. Los resultados muestran que la solución obtenida está bien balanceada, es decir el término que describe la pendiente de suelo está bien acoplado en la solución implementada permitiendo que no se observen perturbaciones en el fluido cuando este está en reposo. Lo anterior evidencia que el esquema numérico es capaz de preservar el reposo del fluido cuando se involucra una interfase seco-mojado.

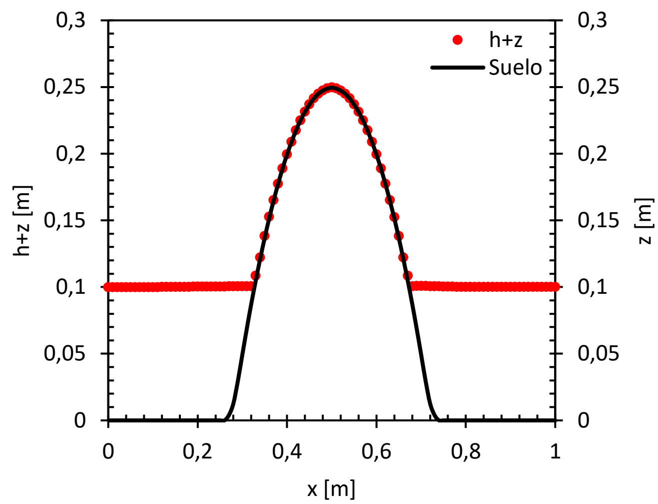


a) b)

Figura 17. Fluido en reposo con frente seco-mojado con altura de a) 0.3m y b) 0.1m después de 200s.



a)



b)

Figura 18. Perfiles $h + z$ sobre el eje $y = 0.5$ para los casos de h igual a a) 0.3m y b) 0.1m después de 200s.

2.3.6 Tazón Parabólico con un Frente Móvil

El flujo en un tazón parabólico con una superficie libre con oscilación axisimétrica permite ver la capacidad del modelo implementado para tratar con el frente seco/mojado cuando el fluido está en movimiento, así como la conservación de la masa y la cantidad de movimiento de este. El perfil del suelo del tazón parabólico, que para el problema implementado se considera de 1m de ancho, está definido por:

$$z(x) = h_0\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) + b \tag{63}$$

Donde h_0=10m, $a = 600$ y $b = 10$ para el caso de estudio. La solución analítica y las condiciones iniciales vienen dadas por la ecuación (64).

$$h(x,t) = \frac{-B^2\cos(2\omega t) - B^2 - 4B\omega\cos(\omega t)\,x}{4g} + 10; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$u(x,t) = Bsin(\omega t) \tag{64}$$

Donde $B = 5\ m/s$ y el periodo de oscilación $T = 269s$. El dominio de estudio y la condición inicial se esquematiza en la *Figura 19*.

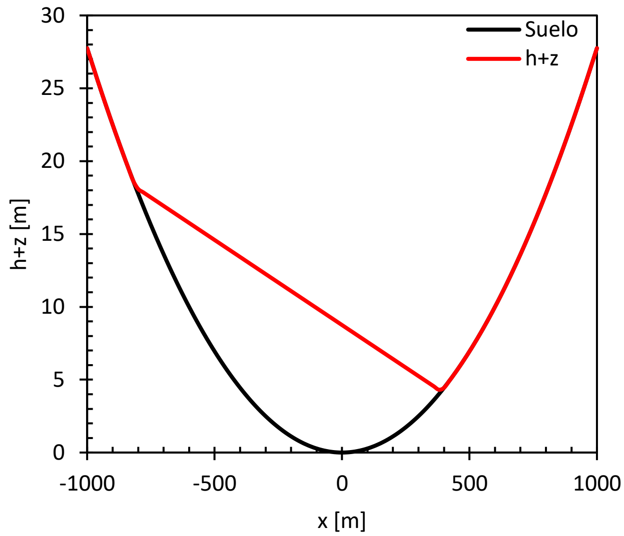


Figura 19. Perfil $h + z$ sobre el eje $y = 0.5$ cuando t=0s para el problema parabólico con frente móvil.

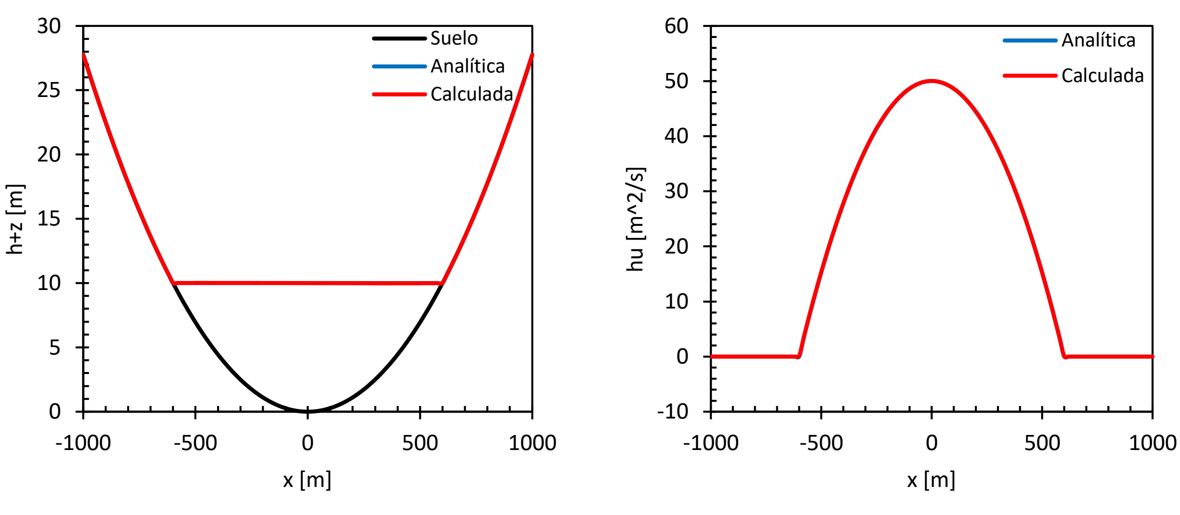
Tabla 6.

Errores calculados en distintos instantes en el problema tazón parabólico con frente móvil.

	Errores	
Periodo	$\boldsymbol{h}$ **[m]**	$\boldsymbol{hu}$ **[m²s⁻¹]**
T/4	0.006369	0.08053
T/2	0.081036	0.010538
3T/4	0.010036	0.036796
T	0.019698	0.014534

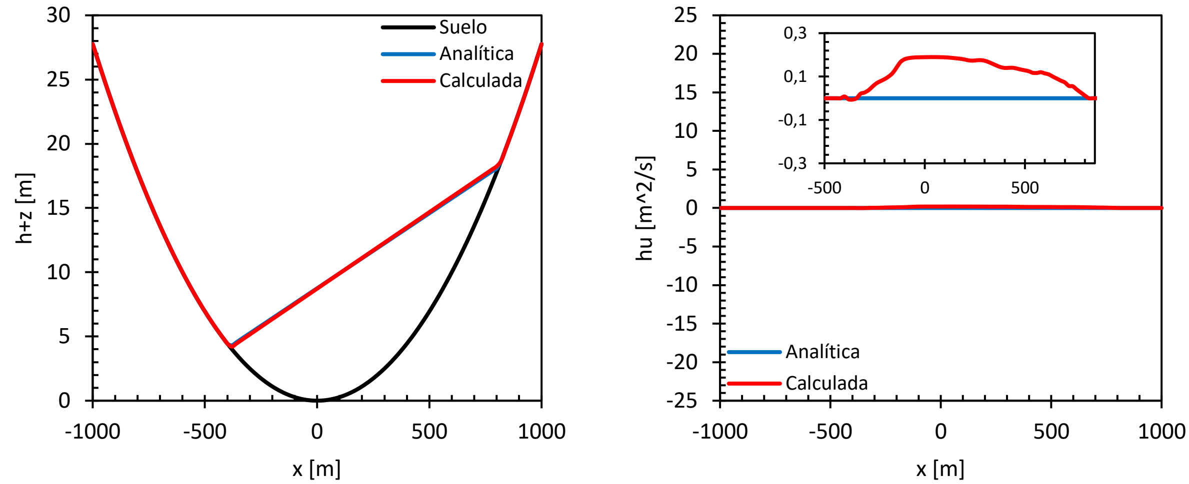
En las *Figura 20*, *Figura 21*, *Figura 22* y *Figura 23* se presentan los perfiles de $h + z$ y hu sobre el eje y=0.5 en los instantes t=T/4, t=T/2, t=3T/4 y t=T respectivamente y los resultados se comparan con la solución analítica. Los errores de cada uno de los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 6. En todos los instantes de tiempo se observa una perfecta superposición entre los perfiles calculados y la solución analítica para los perfiles de $h + z$ como se muestra en las figuras *Figura 20*a, *Figura 21*a, *Figura 22*a y *Figura 23*a. El error máximo en dichos perfiles fue de 0.081m mientras que el error mínimo fue de 0.006m.

Una comparación de los perfiles de hu calculados y analíticos muestran un excelente acuerdo en los instantes t=T/4 y t=3T/4 (*Figura 20*b y *Figura 22*b), no obstante, en los instantes t=T/2 y t=T se perciben unas pequeñas diferencias (*Figura 21*b y *Figura 23*b) cuyos valores de error fueron 0.0112 y 0.0213 respectivamente. Las diferencias se dan cuando el fluido se detiene en la parte más alta del tazón (en t=T/2); sin embargo, el esquema implementado permite que estas alteraciones sean balanceadas a través de la compensación del balance de masa una vez el fluido se desplaza nuevamente en dirección opuesta como se observa en el instante t=3T/4 cuando los perfiles de hu se superponen como se observa en la *Figura 22*b (ϵ =0.1368). Lo anterior muestra la capacidad del modelo para tratar con los frentes seco-mojado cuando el fluido está en movimiento.



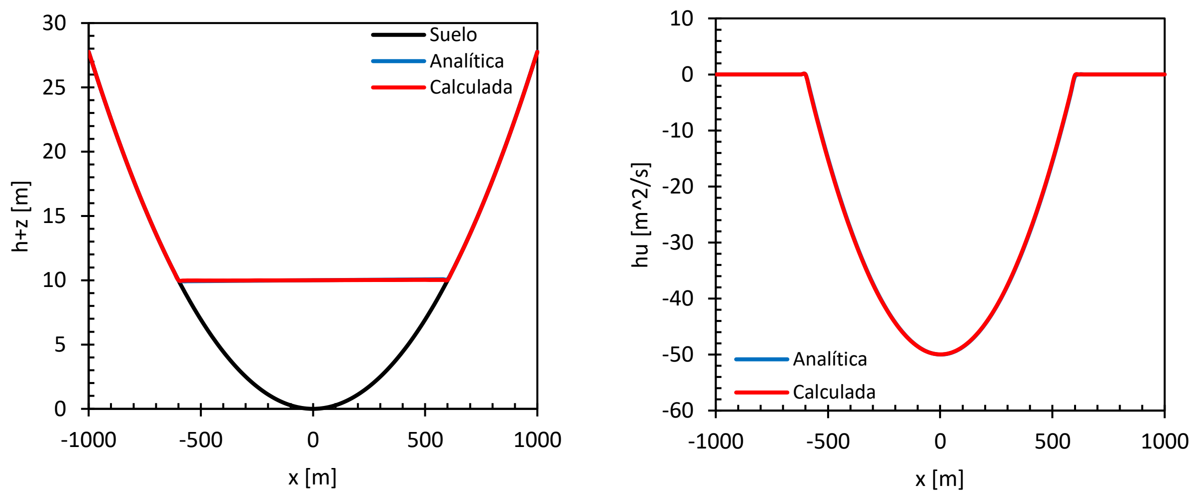
a) b)

Figura 20. Perfiles a) $h + z$ y b) hu sobre el eje $y = 0.5$ cuando t=T/4.



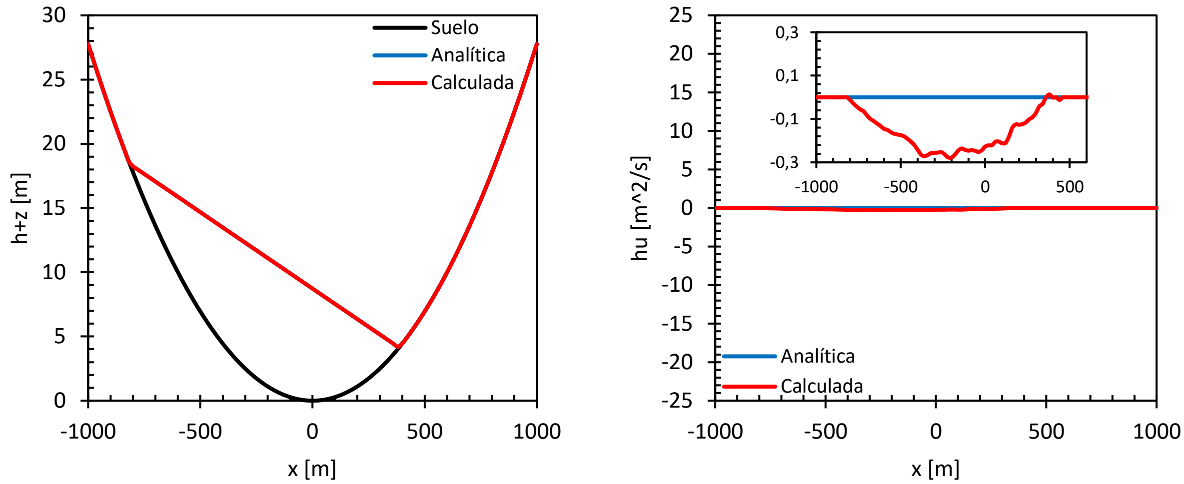
a) b)

Figura 21. Perfiles a) $h+z$ y hu sobre el eje $y=0.5$ cuando t=T/2.



a) b)

Figura 22. Perfiles a) $h+z$ y b) hu sobre el eje $y=0.5$ cuando t=3T/4.



a) b)

Figura 23. Perfiles a) $h + z$ y b) hu sobre el eje $y = 0.5$ cuando t=T.

2.3.7 Inundación por Rotura de Presa Sobre Tres Montículos en un Canal Cerrado

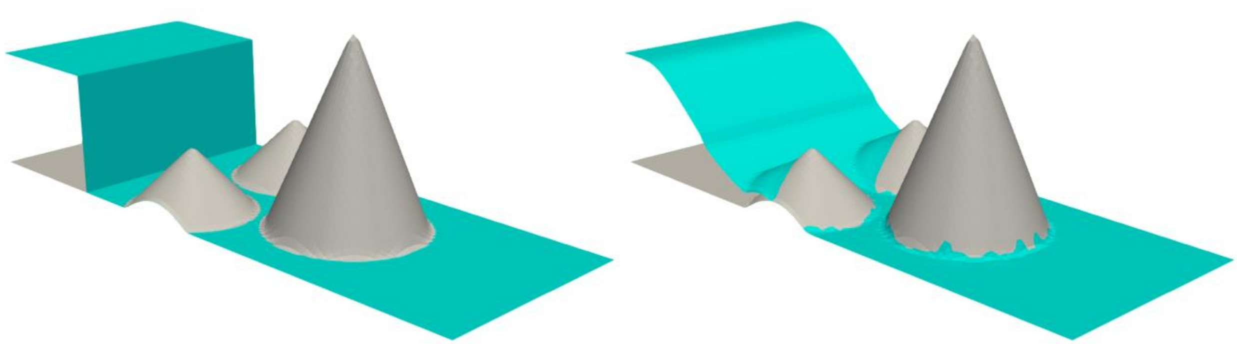
Este es un problema de rotura de presa en dos dimensiones con fondo seco considerando el término de fricción. Este problema evalúa la evolución de la onda de rotura de presa a través de un dominio seco con tres obstáculos, permitiendo determinar la capacidad del esquema numérico para adaptarse a situaciones reales de inundación. La simulación tiene lugar en un canal de 75m de largo por 30m de ancho con una topografía definida por la siguiente expresión:

$$z(x,y) = \max\left[0, 1 - \frac{1}{8}\sqrt{(x-30)^2 + (y-6)^2}, 1 - \frac{1}{8}\sqrt{(x-30)^2 + (y-24)^2}, 3 - \frac{3}{10}\sqrt{(x-47.5)^2 + (y-15)^2}\right] \quad (65)$$

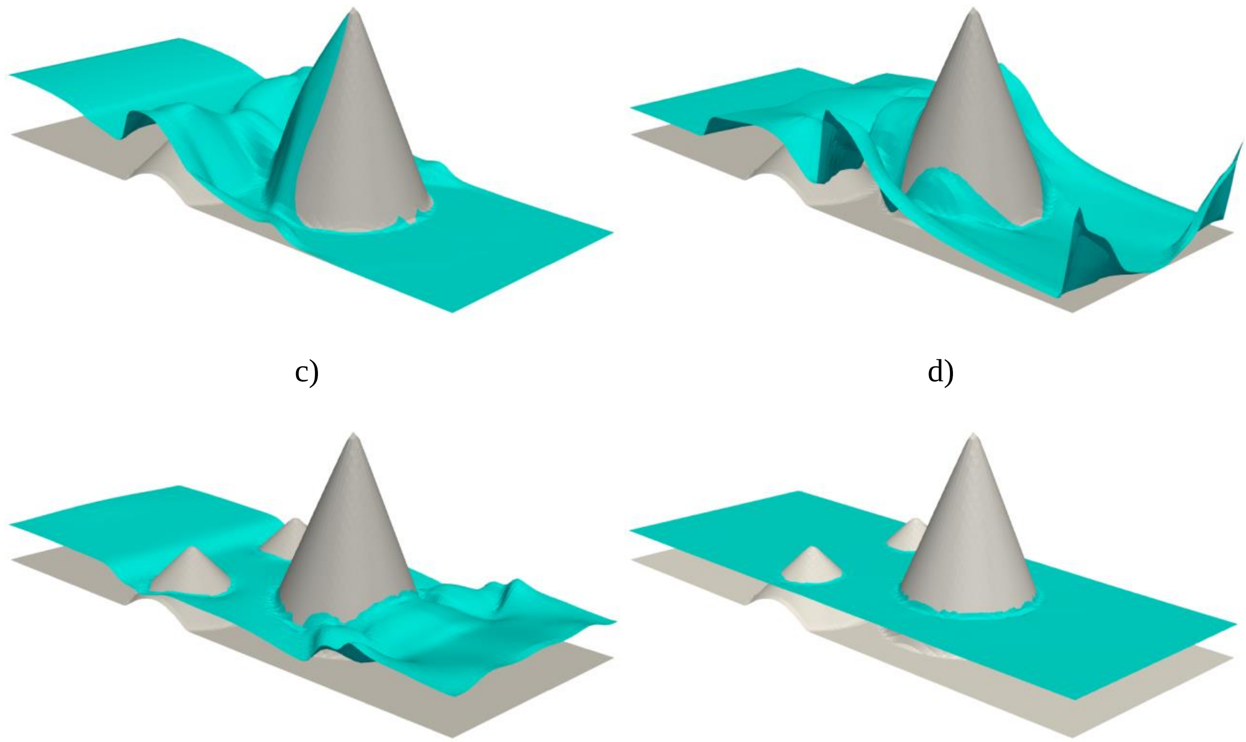
La compuerta imaginaria de la presa se ubica inicialmente en x=16m y tiene una elevación de 1.875m. El resto del dominio es seco y tiene un coeficiente global de fricción $n = 0.018$. La simulación se llevó a cabo por $300s$ cuando el fluido alcanza el reposo y se utilizó un mallado de 7776 elementos.

La Figura 24 muestra los resultados de la superficie libre en los instantes t=0, t=2s, t=6s, t=12s, t=30s y t=300s. Como se ilustra en la *Figura 21*c, una vez la presa se rompe el fluido se mueve aguas abajo e interactúa con los tres montículos provocando un choque reflexivo sobre estos. En el instante t=12s, el agua sigue inundando el dominio fluyendo alrededor del montículo más grande como se muestra en la *Figura 24*d. En t=30s, las ondas reflejadas sobre los primeros montículos se funden en una sola y comienzan su desplazamiento en dirección opuesta al de la presa. En t=300s el fluido alcanza el estado estacionario quedando en reposo con parte de los montículos quedan cubiertas por el agua.

Resultados similares a los descritos anteriormente fueron obtenidos por (Qiuhua Liang y Borthwick 2009; Huang *et al*, 2013; Marras *et al*., 2016; Lu *et al*., 2020) lo cual muestra que la onda de inundación se propaga correctamente a través del dominio seco con obstáculos y que el esquema numérico implementado describe adecuadamente el frente seco-mojado en situaciones con fondos más irregulares.



a) b)



c) d)

e) f)

Figura 24. Propagación de la rotura de presa sobre tres montículos en los instantes de tiempo a) t=0s b) t=2s c) t=6s d) t=12s e) t=30s y f) t=300s.

2.3.8 Rotura de Presa en un Canal de Lecho Seco con Ancho Variable

En este problema se modela el flujo a través de un canal convergente-divergente con un lecho seco y plano. Este problema se utilizó para verificar la capacidad del esquema para describir flujos reales en situaciones donde se presentan zonas con contracción-expansión agudas. La configuración y las dimensiones del canal en estudio se presenta en la *Figura 25*, se utilizó un mallado estructurado con 3456 elementos y todas fronteras se asumieron cerradas. Los resultados obtenidos se compararon con los datos experimentales reportados por (Alias *et al.*, 2011) y se presentan en la *Figura 26*. Los resultados fueron medidos en cuatro puntos localizados en G1(5.34, 0.25), G2(12.67, 0.25), G3(14.2, 0.25) y G4(16.17, 0.25). Dado que el problema considera zonas secas estas se marcaron con un valor de h_{min} igual a 0.0001.

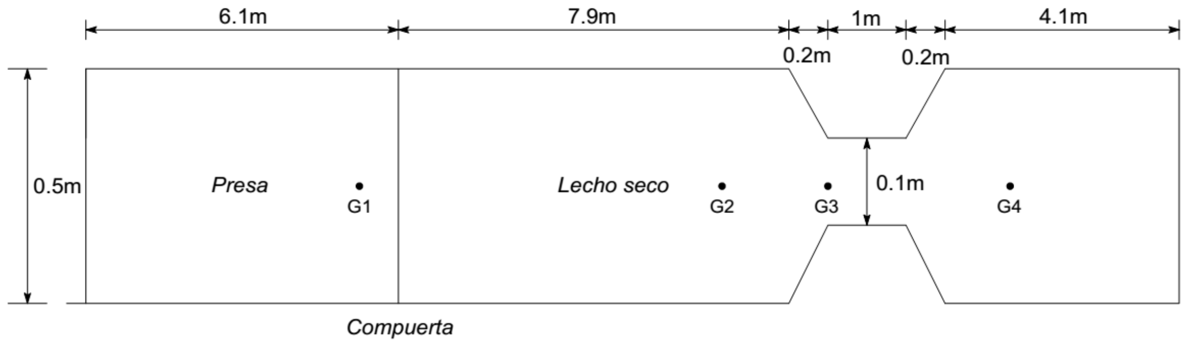


Figura 25. Dominio de estudio del problema rotura de presa en un canal de lecho seco con ancho variable.

En la *Figura 26*a se observa un correcto descenso de la presa a medida que avanza el tiempo. En las *Figura 26*b y *Figura 26*c se muestra cómo la onda de inundación llega en los tiempos correctos a los puntos de medición G2 y G3 respectivamente. En el punto G2 se exhibe cómo la ola inicialmente moja la zona de medición y posteriormente esta choca con la pared que permite la reducción del canal haciendo que la altura del agua ascienda súbitamente como se muestra en la *Figura 26*b. En el punto G3, que se encuentra dentro de la reducción del canal, se observa cómo el frente llega a tiempo e inunda constantemente esta zona. Finalmente, en el punto G4, el más alejado de la presa, se muestra que nuevamente el fluido llega a tiempo, pero esta vez la altura presenta discrepancias con los valores experimentales.

Estas discrepancias podrían atribuirse a la suposición de la presión hidrostática, lo cual puede ser insuficiente para este problema el cual tiene características altamente tridimensionales, y por tal motivo, se genera el problema después de la reducción del canal. A pesar de estas discrepancias los resultados evidencian que el modelo numérico representa de buena manera los resultados experimentales y por lo tanto el buen manejo del frente seco-mojado implementado.

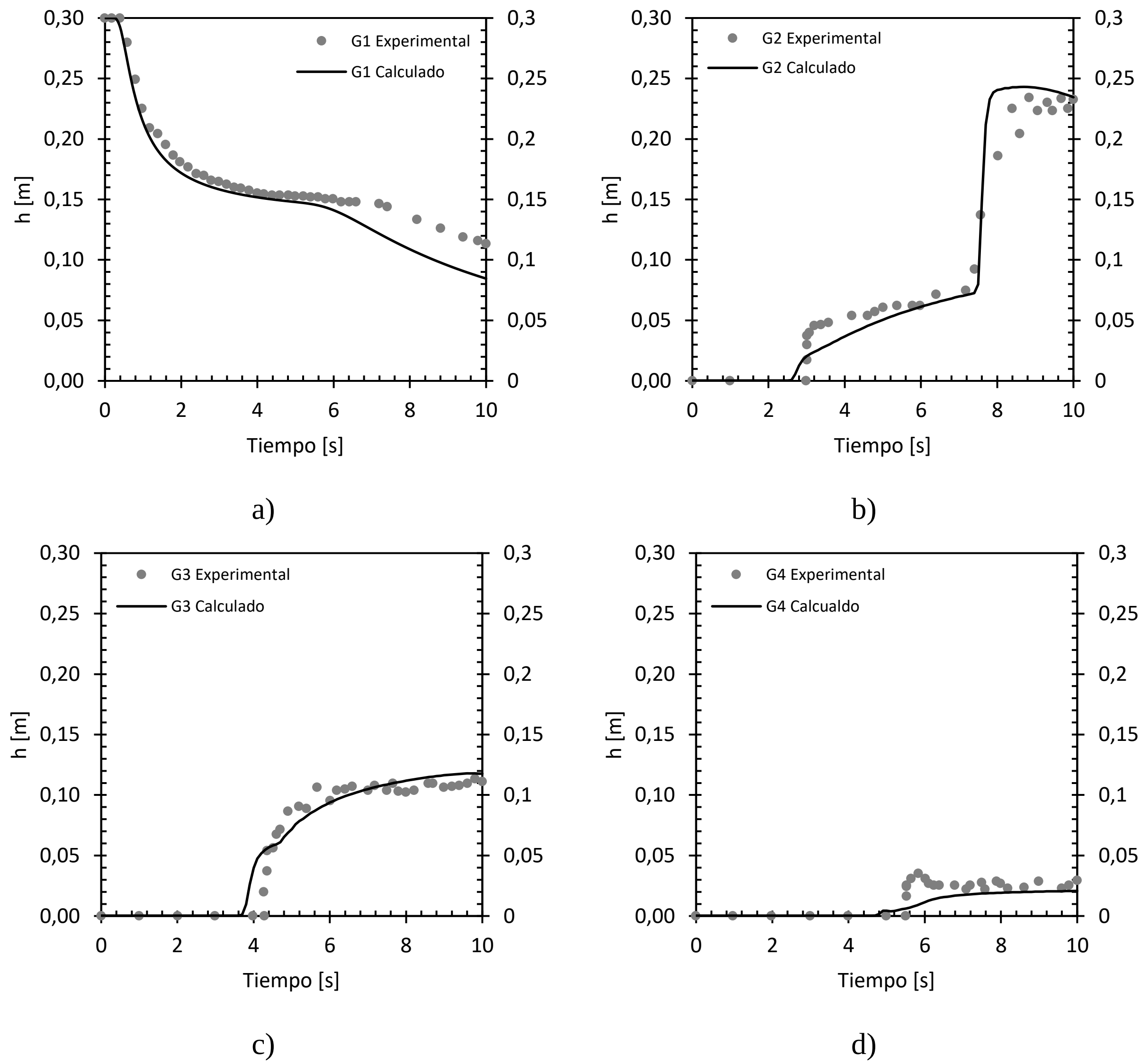


Figura 26. Hidrogramas simulados y medidos en los puntos a) G1, b) G2, c) G3 y d) G4 para el problema rotura de presa en un canal de lecho seco con ancho variable.

2.3.9 Rotura de Presa en un Canal con un Montículo Triangular

En este problema se considera un canal rectangular de 38m de largo y 0.75m ancho. La compuerta de la presa se localiza a los 15.5m y la altura de esta es de 0.75m y el resto del dominio se asume seco. En el canal se localiza un montículo triangular simétrico 13m abajo de la compuerta como se esquematiza en la *Figura 27*. Se considera la rugosidad del suelo de 0.011. A la salida del canal se considera una condición de frontera abierta. Los resultados obtenidos se compararon con los datos experimentales reportados por (Khan y Wencong, 2017) en distintos puntos localizados aguas abajo de la compuerta y se presentan en la Tabla 7.

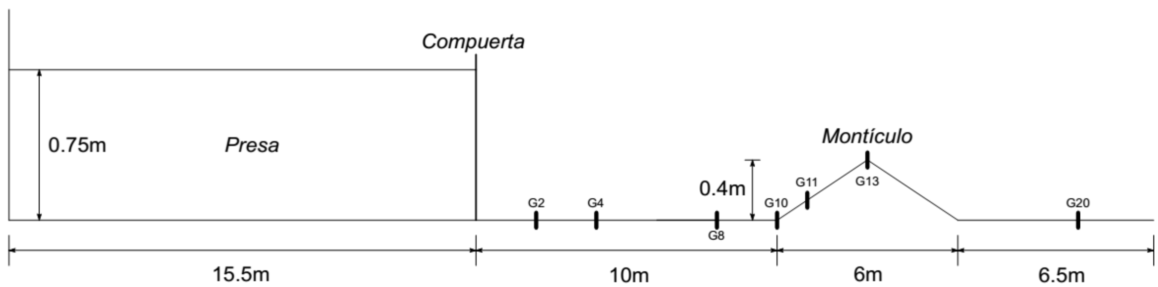


Figura 27. Geometría y esquema del problema rotura de presa en un canal con un montículo triangular.

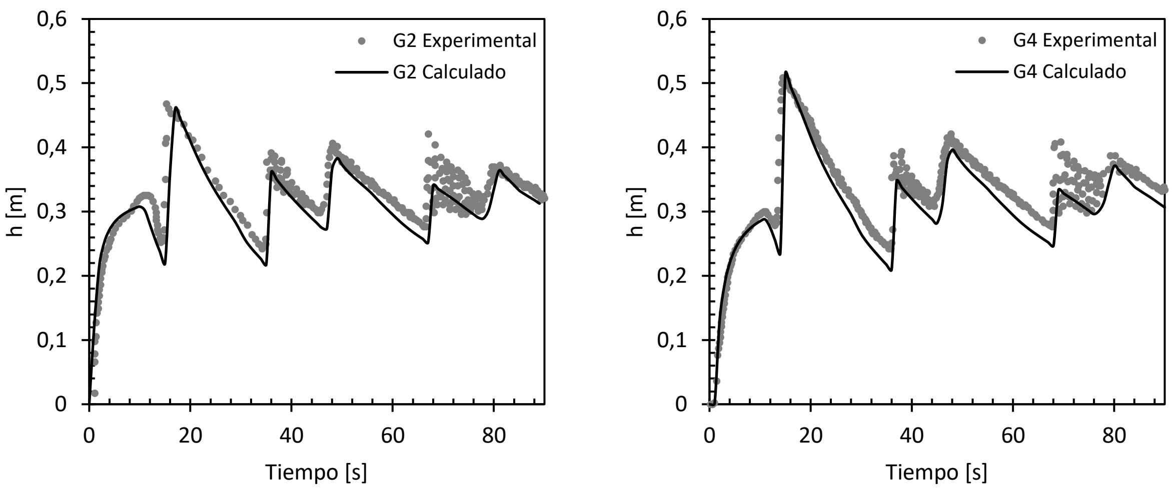
Tabla 7.

Coordenadas de los puntos donde se midieron los datos experimentales del problema rotura de presa en un canal con montículo triangular.

	G2	**G4**	**G8**	**G10**	**G11**	**G13**	**G20**
x(m)	17.5	19.5	23.5	25.5	26.5	28.5	35.5
y(m)	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375

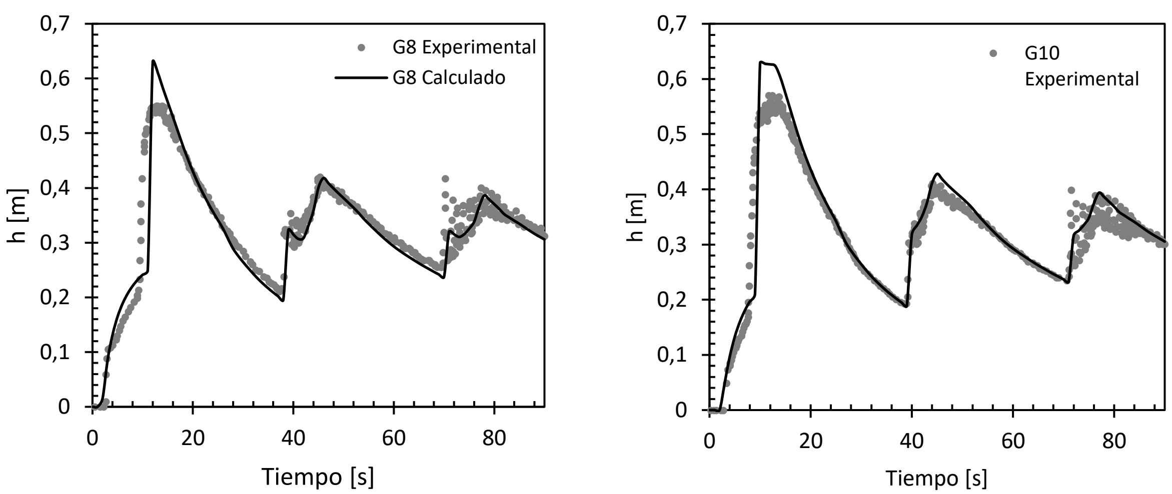
Los resultados obtenidos se presentan en la *Figura 28*, *Figura 29*, *Figura 30* y *Figura 31* donde se observa que estos están en concordancia con los datos experimentales. La onda de inundación llega a tiempo y a la altura precisa en la mayoría de los puntos donde se comparan los resultados. En la *Figura 30*b se muestra que el frente seco mojado en el punto crítico G13 ubicado en el vértice del montículo se modela correctamente mediante el esquema numérico implementado.

El anterior resultado muestra que el esquema implementado permite modelar correctamente el avance del frente seco mojado en zonas con variaciones de nivel del suelo.



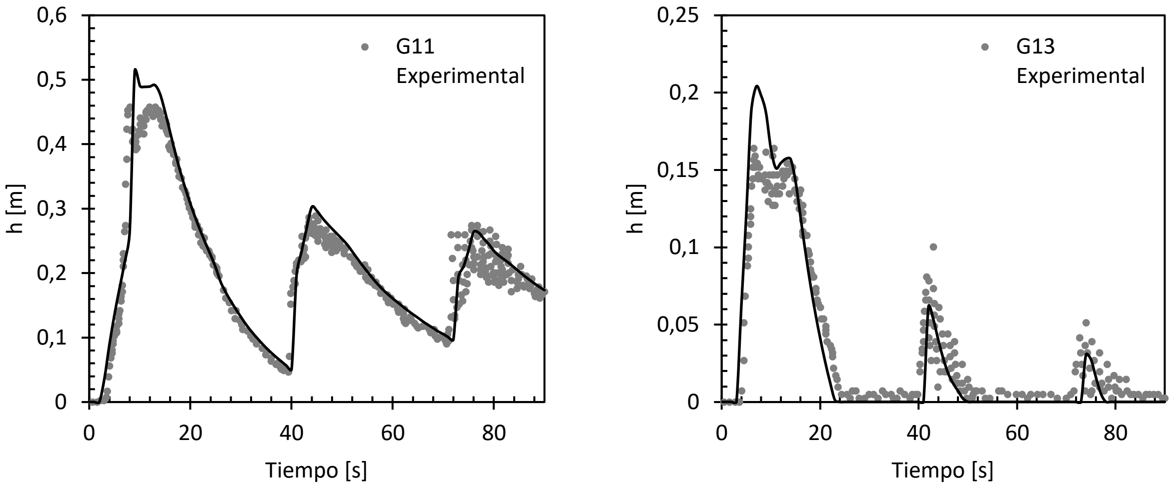
a) b)

Figura 28. Hidrogramas simulados y medidos en los puntos a) G2 y b) G4 para el problema rotura de presa en un canal con montículo triangular.



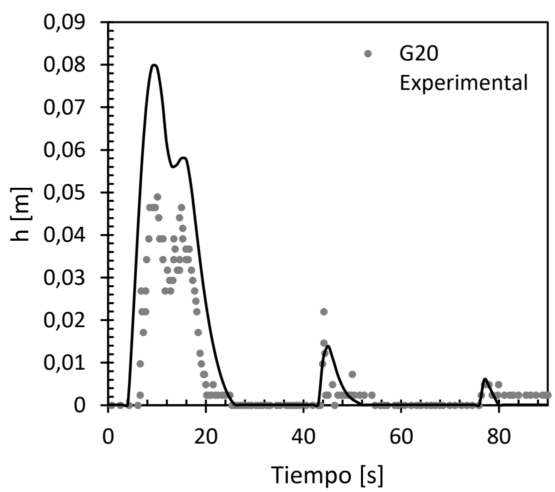
a) b)

Figura 29. Hidrogramas simulados y medidos en los puntos a) G8 y b) G10 para el problema rotura de presa en un canal con montículo triangular.



a) b)

Figura 30. Hidrogramas simulados y medidos en los puntos a) G11 y b) G13 para el problema rotura de presa en un canal con montículo triangular.



a)

Figura 31. Hidrogramas simulados y medidos en el punto G20 para el problema rotura de presa en un canal con montículo triangular.

2.3.10 Caso de una Ola de Tsunami en el valle de Monai

El esquema numérico implementado se comparó con el caso experimental de un tsunami a escala 1/400 (Liu *et al.*, 2008). Este caso también ha sido resuelto por diferentes autores y otros detalles se pueden encontrar en (LeVeque y George, 2008; Nikolos y Delis, 2009) . El dominio de estudio es un rectángulo de 5.478m por 3.392m y en la *Figura 32* se muestra la elevación del suelo. La condición inicial corresponde a una altura de agua igual a 0m y todas las fronteras se asumen cerradas excepto aquella por donde proviene la ola, y por lo tanto, allí se considera una variación del nivel de altura del fluido en el tiempo como se presenta en la *Figura 33*. El dominio se dividió en 18792 elementos y se utilizó un mallado estructurado.

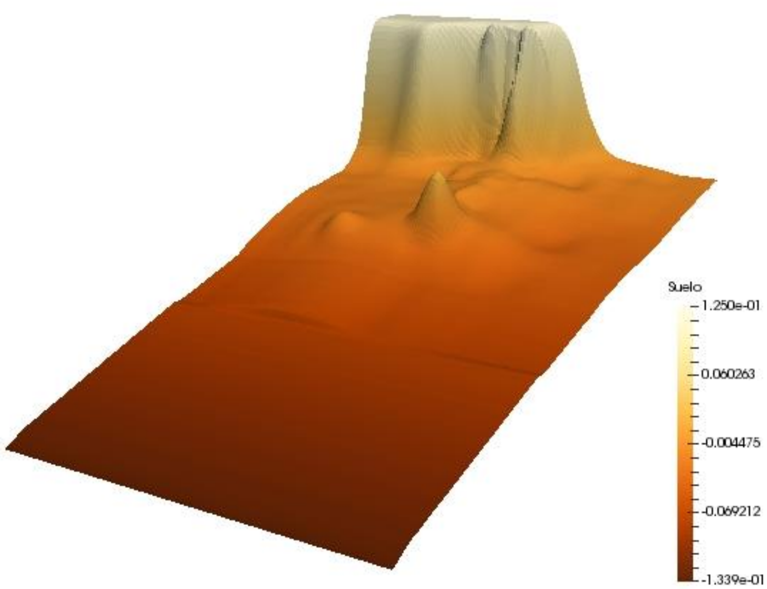


Figura 32. Topografía del problema caso tsunami.

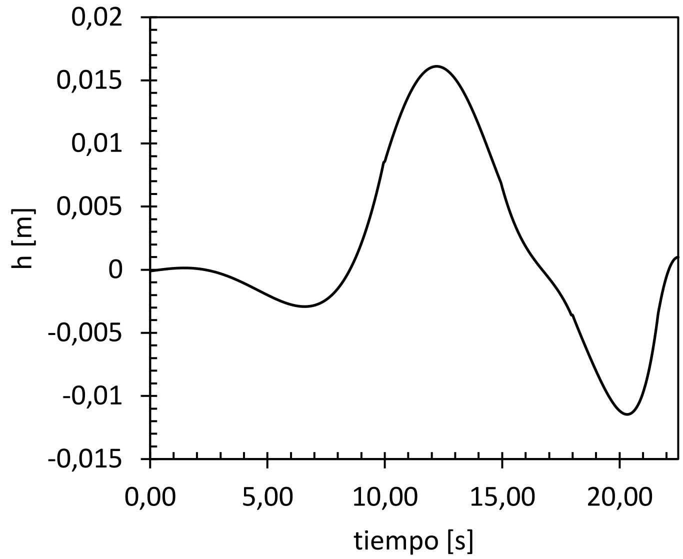
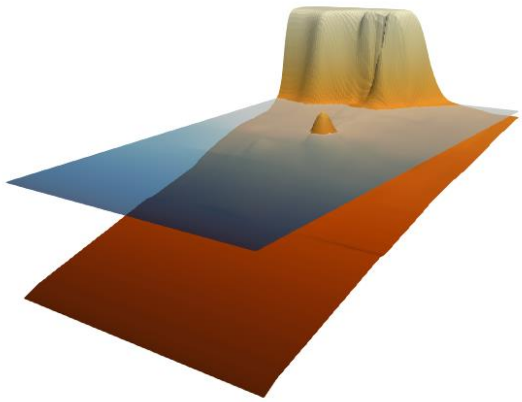
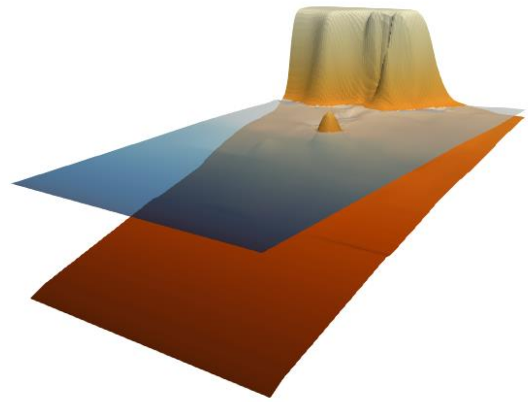


Figura 33. Condición de frontera problema caso tsunami.

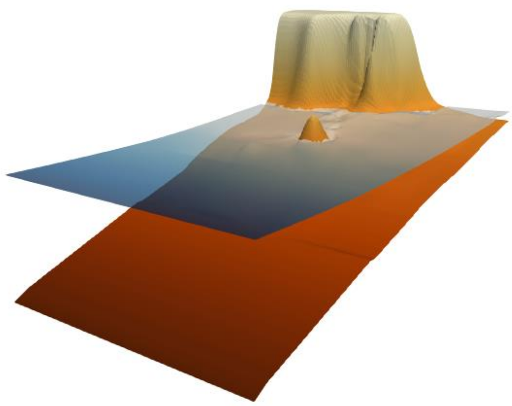
La representación en 3D de la propagación de la ola en diferentes instantes de tiempo se presenta en la *Figura 34*. En la *Figura 34*b se observa cómo después de una caída inicial en la altura del agua en la frontera, el tsunami viaja hacia la costa y posteriormente se forma una difracción de ondas detrás de la pequeña isla ubicada en el centro del dominio de estudio como se observa en la *Figura 34*d. Seguidamente la ola tsunámica alcanza tierra y en la *Figura 34*e se muestra la ola reflejada sobre la costa. En el regreso se genera una ola rompiente y las distintas olas se superponen formando una única onda cómo se observa en la *Figura 34*f.



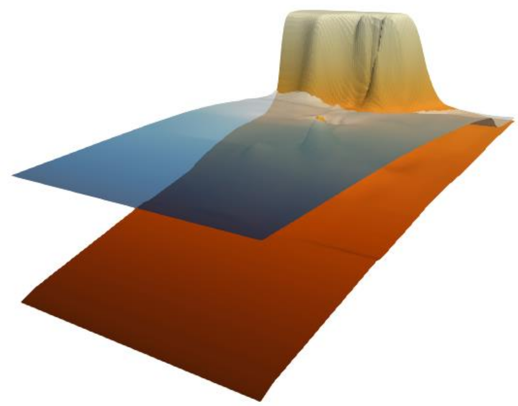
a)



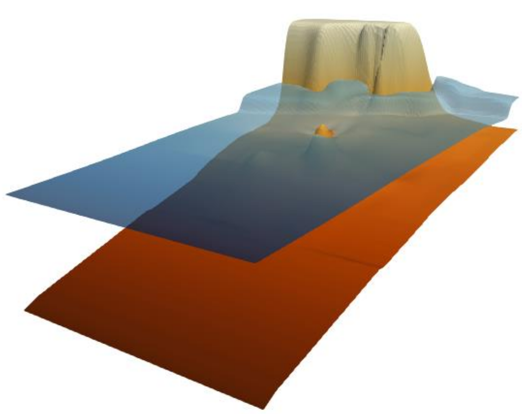
b)



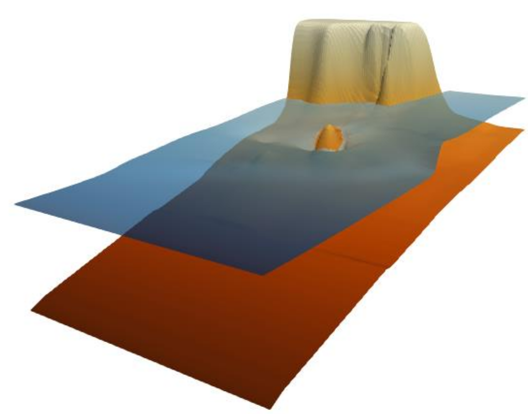
c)



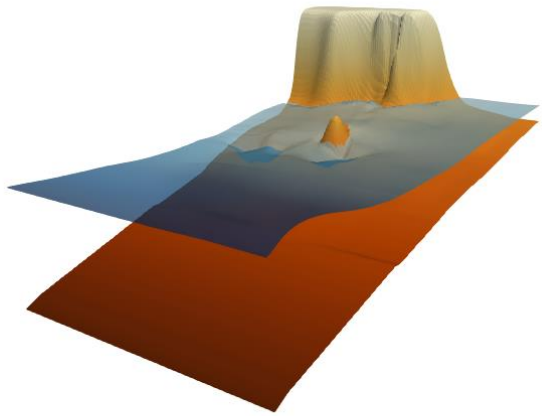
d)



e)



f)



g)

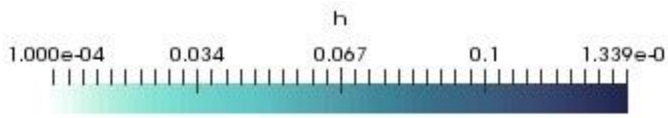
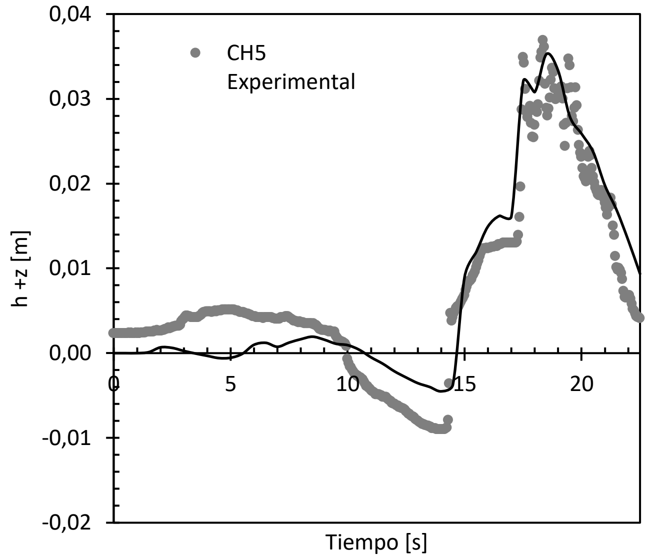
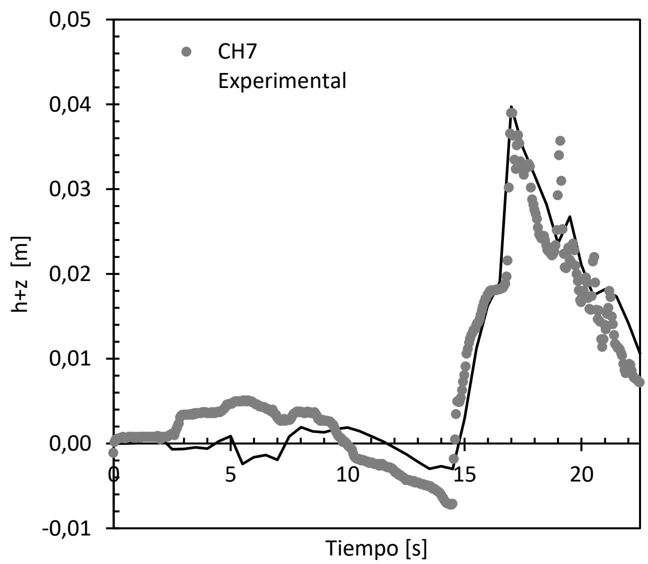


Figura 34. Propagación de la ola de tsunami en los instantes de tiempo a) t=0s b) t=5s c) t=10s d) t=15s e) t=17s e) t=20s y f) t=22.5s.

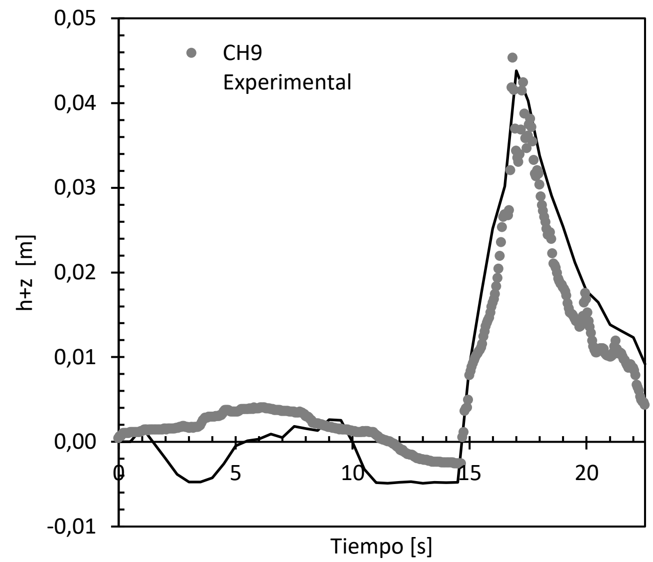
Los resultados obtenidos se compararon con los reportados por (Liu *et al.*, 2008) los cuales fueron medidos en las coordenadas CH5 = (4.52, 1.196), CH7 = (4.52, 1.696) y CH9 = (4.52, 2.196) y se presentan en la *Figura 35*. Se observa que el esquema de solución implementado describe adecuadamente los datos experimentales en los tres puntos de medición. La *Figura 35* evidencia el mismo comportamiento de la ola descrito anteriormente donde inicialmente se observa un pequeño descenso de la altura del agua y posteriormente un gran ascenso cuando la ola del tsunami alcanza los puntos de medición. Si bien se observan ciertas discrepancias en los primeros segundos es evidente que el resultado obtenido coincide plenamente con los experimentales en cuanto al tiempo de arribo de la ola sobre los tres medidores y en los tres casos se da alrededor de los 15s. Este resultado permite verificar que el manejo del frente seco mojado implementado en este trabajo también permite calcular satisfactoriamente un evento de ola de tsunami, al menos para este caso de estudio.



a)



b)



c)

Figura 35. Hidrogramas simulados y medidos en los puntos a) CH5, b) CH7 y c) CH9.

2.4 Conclusiones

En este capítulo se validó la solución de las ecuaciones de aguas someras y se formuló una nueva manera de tratar el frente seco mojado mediante la compensación del desbalance generado por la utilización de la aproximación de película fina. La aproximación se implementó sobre los elementos secos que resultan con alturas negativas a través de la distribución del desbalance sobre las celdas que cambian de altura con respecto del instante de tiempo anterior conservando en todo momento el balance de masa dentro del sistema. La validación se hizo mediante la solución de problemas de referencia junto con problemas experimentales que incluyen condiciones de frontera reflexivas o cerradas, fronteras de flujo abierto con distintos regímenes de flujo. El esquema implementado mostró ser balanceado y además presentó un correcto manejo del frente seco-mojado sobre lechos planos y lechos con pendientes pronunciadas como se evidenció en la solución de los problemas de rotura de presa con distintos cambios de suelo. El esquema también provee una buena predicción de los patrones de flujo sobre distintos regímenes de flujo, por supuesto, limitados a las condiciones sobre las cuales el modelo se deriva. Finalmente se logró reproducir satisfactoriamente una situación experimental donde una ola de tsunami llega a la costa, en esta se pudo evidenciar el manejo del frente seco mojado propuesto también permite reproducir un evento de ola de tsunami, al menos, para este caso experimental estudiado.

3. Estudio Comparativo del Impacto de las Funciones Limitadoras y de la Discretización Temporal Sobre la Solución de las Ecuaciones de Aguas Someras con Topografías Variables Mediante el Método de los Volúmenes Finitos

3.1 Introducción

Los esquemas de variación total decreciente o TVD (por su sigla en inglés *Total Variation Diminishing*) permiten reducir el comportamiento oscilatorio de las soluciones de los sistemas de ecuaciones en presencia de grandes gradientes mediante la adición de difusión numérica en el sistema. Esta adición se realiza mediante el uso de diferentes esquemas numéricos en conjunto con distintas funciones limitadores. Este capítulo se enfocó en la evaluación del efecto que tienen dichas funciones limitadoras de flujo de los esquemas TVD y los esquemas de discretización temporal sobre la supresión de las oscilaciones espurias, así como el tiempo de cálculo en la solución de las ecuaciones de aguas someras. El esquema implementado fue de tipo WAF-TVD el cual incluyó el esquema de Godunov y el solucionador de Roe para el primer orden y el esquema Lax-Wendrof para el segundo orden de precisión. Además, la discretización temporal se llevó a cabo de forma implícita y explícita.

3.2 Esquemas Numéricos

La teoría sobre las técnicas numéricas desarrolladas alrededor de la dinámica de gases han sido adaptadas y aprovechadas para resolver las ecuaciones de aguas someras y la obtención de soluciones discontinuas, en especial los solucionadores de Riemann (Toro, 2009). A diferencia de la dinámica de gases donde las soluciones se obtienen únicamente alrededor de las discontinuidades, el flujo de lámina libre incluye zonas suaves las cuales requieren un tratamiento especial. La naturaleza del problema hiperbólico ha permitido obtener soluciones analíticas para el caso unidimensional, lineal y homogéneo, como sucede en los problemas de dinámica de gases unidimensionales. Sin embargo, solo existen soluciones aproximadas para aquellos problemas no lineales con término fuente como es el caso de las ecuaciones de aguas someras con topografías complejas.

Los esquemas conservativos de primer orden son el punto de partida para el desarrollo de los esquemas de segundo orden y los esquemas de variación total decreciente (TVD). Dentro de los esquemas que tienen en cuenta la dirección de propagación de la información, o upwind, sobresale el esquema conservativo de Godunov del cual se desprende toda la familia de esquemas numéricos conocidos como *Flux Difference Splitting* (Separación de la diferencia de flujo). Por otra parte, también existen los esquemas *Flux Vector Splitting* (Separación del vector de flujo) los cuales son útiles principalmente en sistemas homogéneos como es el caso de la dinámica de gases.

El esquema conservativo de Godunov para un sistema de ecuaciones lineal hiperbólico:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \qquad (66)$$

Se define por:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{F}^*_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^*_{i-\frac{1}{2}}\right) \qquad (67)$$

Donde $\mathbf{F}^*_{i+\frac{1}{2}}$ es el flux numérico entre las celdas i e $i+1$. El método de Godunov se caracteriza porque este flux numérico se obtiene a partir de la solución del problema e Riemann local, es decir en el contorno de cada volumen de control. Por lo tanto, una vez se resuelve el problema de Riemann se debe encontrar la solución en $x_{i+\frac{1}{2}}$ y finalmente evaluar el flux con dicha solución. Cuando el sistema es hiperbólico y no lineal el problema de Riemann tiene una estructura compleja y por lo tanto su solución es difícil. Por tal motivo, diferentes autores han desarrollados soluciones aproximadas para este problema las cuales se conocen como *Aproximate Riemann Solvers.* En este trabajo se utilizó el solucionador de Riemann de Roe (también conocido directamente como esquema de Roe) el cual fue introducido por primera vez en 1981 y se describe con más detalle en las secciones subsiguientes.

3.3 Modelo Numérico y Métodos

En esta sección se resumen las ecuaciones de aguas someras y la discretización en volúmenes finitos utilizada para resolver este sistema.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{U})}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{U})}{\partial y}=\mathbf{S}(\mathbf{U}) \tag{68}$$

Donde:

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix};\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix} hu \\ hu^2+\frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix};\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2+\frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix};\ \mathbf{S}=\begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0x}-S_{fx}) \\ gh(S_{0y}-S_{fy}) \end{bmatrix} \tag{69}$$

Integrando la ecuación (12) sobre un dominio de estudio de volumen Ω y realizando el mismo procedimiento descrito en el capítulo anterior se obtiene la discretización de esta ecuación:

$$\frac{\mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{n+1}} - \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{n}}}{\Delta t} * \Omega_i + \sum_{i=1}^{b_i} \left(\mathbf{F}_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right) a_i = \sum_{i=1}^{b_i} \mathbf{S}(\mathbf{U}) a_i \tag{70}$$

Y el flux numérico $\mathbf{F}_{b_i}$ evaluado sobre la cara b_i de un volumen de control P se puede calcular mediante el método de Godunov y el solucionador de Riemann de Roe (Toro 2009) para el caso bidimensional considerando la aproximación de Harten y Hyman como:

$$\mathbf{F}_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_P + \mathbf{F}_{E_i}\right)\mathbf{n}_i - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{3} \tilde{\alpha}_n \varphi_n \tilde{\mathbf{e}}_n\right)_{P,E} \tag{71}$$

3.3.1 Definición del Flux Numérico de Primer Orden

El flux numérico definido en el capítulo anterior corresponde al flux numérico de primer orden $\mathbf{F}_{b_i}$ el cual se puede definir mediante los eigenvalores $\tilde{\lambda}_i$ que para este sistema están dados por:

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y - \tilde{c};\;\; \lambda_2 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y;\;\;\; \lambda_3 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + \tilde{c} \tag{72}$$

$$\lambda_1 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} - c;\;\; \lambda_2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n};\;\;\; \lambda_3 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} + c \tag{73}$$

Los eigenvectores correspondientes a cada eigenvalor son:

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}\boldsymbol{n_x} \\ \tilde{v} - \tilde{c}\boldsymbol{n_y} \end{bmatrix};\;\; \widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{c}\boldsymbol{n_y} \\ \tilde{c}\boldsymbol{n_x} \end{bmatrix};\;\; \widetilde{\mathbf{K}}^{\mathbf{3}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}\boldsymbol{n_x} \\ \tilde{v} + \tilde{c}\boldsymbol{n_y} \end{bmatrix} \tag{74}$$

Las velocidades $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ y $\tilde{c}$ se calculan como:

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_L}u_L + \sqrt{h_R}u_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}};\;\; \tilde{v} = \frac{\sqrt{h_L}v_L + \sqrt{h_R}v_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}};\;\; \tilde{c} = \sqrt{g\frac{h_L + h_R}{2}} \tag{75}$$

Y finalmente las fuerzas de onda $\tilde{\alpha}_i$ del sistema son:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\Delta h_{P,E}}{2} + \frac{\Delta(hu)_{P,E} n_x + \Delta(hv)_{P,E} n_y - \left(\tilde{u} n_x + \tilde{v} n_y\right)\Delta h_{P,E}}{2\tilde{c}}$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{\left(\Delta(hv)_{P,E} - \tilde{v}\Delta h_{P,E}\right) n_x - \left(\Delta(hu)_{P,E} - \tilde{u}\Delta h_{P,E}\right) n_y}{\tilde{c}} \tag{76}$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \frac{\Delta h_{P,E}}{2} - \frac{\Delta(hu)_{P,E} n_x + \Delta(hv)_{P,E} n_y - \left(\tilde{u} n_x + \tilde{v} n_y\right)\Delta h_{P,E}}{2\tilde{c}}$$

3.3.2 Integración del Término Fuente de Primer Orden

El tratamiento del término fuente se realiza de la misma manera como se describió en el capítulo anterior donde este se puede expresar como la suma del componente de fricción y otro asociado a las pendientes del suelo así:

$$\mathbf{S_{z,f}} = \mathbf{S_z} + \mathbf{S}_{\boldsymbol{f}} \tag{77}$$

$$\mathbf{S_z} = \begin{bmatrix} 0 \\ ghS_{ox} \\ ghS_{oy} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{bmatrix} \tag{78}$$

La integración del término $\mathbf{S_z}$ permite obtener el flux numérico asociado a la pendiente del suelo como:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{z}_{b_i}} = \frac{1}{2} a_{b_i} \left(\sum_{n=1}^{3} \tilde{\beta}_n \left(1 - \text{signo}(\check{\lambda}_n)\right) \tilde{\mathbf{e}}_n \right)_{P,E} \tag{79}$$

Donde los coeficientes $\tilde{\beta}_n$ corresponden a:

$$\tilde{\beta}_1 = -\frac{\tilde{c}}{2}(\Delta z); \;\; \tilde{\beta}_2 = 0; \;\; \tilde{\beta}_3 = \frac{\tilde{c}}{2}(\Delta z) \tag{80}$$

3.3.3 Esquemas TVD

Los esquemas de segundo orden en sí mismos no pueden evitar la aparición de oscilaciones espurias alrededor de las discontinuidades, no obstante, es posible evitar esta dispersión mediante la adición de esquemas de alta resolución o TVD (*Total Variation Diminishing)* preservando el segundo orden de precisión en todo el dominio de solución. A partir del método de Godunov se deprenden dos tipos de esquemas de segundo orden: 1) Los esquemas WAF (Weight Averaged Flux) y 2) los esquemas MUSCL (*Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws*).

Los esquemas TVD se pueden obtener directamente a partir de esquemas de segundo orden imponiendo restricciones que aseguren que se cumpla el teorema de Harten (Toro 2009) o promediando un esquema de primer orden con otro de segundo orden y dándole más peso a uno u otro esquema mediante funciones limitadoras que aseguren que el esquema resultante sea TVD como se hace en este trabajo a partir de los esquemas WAF. Por lo anterior, el flux numérico de un esquema TVD se puede escribir como:

$$f^*_{i+\frac{1}{2}} = f^{1er}_{i+\frac{1}{2}} + \Psi(r)_{i+\frac{1}{2}}\left(f^{2do}_{i+\frac{1}{2}} - f^{1er}_{i+\frac{1}{2}}\right) \quad (81)$$

Donde $f^{1er}_{i+\frac{1}{2}}$ es el flux numérico de primer orden, $f^{2do}_{i+\frac{1}{2}}$ es el flux numérico de segundo orden y $\Psi(r)_{i+\frac{1}{2}}$ es la función limitadora. De acuerdo con la ecuación (81) cuando $\Psi_{i+\frac{1}{2}} = 1$ el esquema resultante es el de segundo orden y cuando $\Psi_{i+\frac{1}{2}} = 0$ es directamente el de primer orden. El parámetro r de la función limitadora es una medida de la suavidad de los datos en la vecindad de $i + \frac{1}{2}$, cuando los datos son suaves $\Psi_{i+\frac{1}{2}} \approx 1$, cerca de la discontinuidad este valor se aleja de 1. Este parámetro r se define como:

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta u_{I+1/2}}{\Delta u_{i+1/2}} \quad (82)$$

Donde el índice I representa la interface del lado upwind de $i + 1/2$. La función limitadora $\Psi(r)$ debe cumplir las siguientes consideraciones: i) $\Psi(r) \geq 0$ dado que es una función que limita la corrección y no tiene sentido que sea negativa. ii) $\Psi(r)$=1 para $r = 1$ para que el esquema sea de segundo orden en las zonas suaves. iii) $\Psi(r)$=0 para $r < 0$ para que el esquema de segundo orden no produzca oscilaciones espurias. Estas consideraciones han permitido la definición de diferentes funciones limitadoras las cuales fueron implementadas en este trabajo y se resumen en la Tabla 8.

Tabla 8.

Funciones limitadoras utilizadas en este trabajo.

Función Limitadora	**Ecuación**
van Albada (1982)	$\Psi(r) = \begin{cases} 0 \; si \; r \leq 0 \\ \dfrac{2r}{1+r} \; si \; r > 0 \end{cases}$
Min mod Roe (1986)	$\Psi(r) = \max[0, \min(r, 1)]$
SUPERBEE Roe (1986)	$\Psi(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$
Sweby (1984)	$\Psi(r) = \max[0, \min(1.5r, 1), \min(r, 1.5)]$
QUICK Leonard (1988)	$\max\,[0, min(2r, (3+r)\,/4{,}2)]$
UMIST Lien *et al.* (1993)	$\Psi(r) = \max\left[0, \min\left(2r, \dfrac{1+3r}{4}, \dfrac{3+r}{4}, 2\right)\right]$
MUSCL	$\Psi(r) = \max\left[0, \left(2r, \dfrac{r+1}{2}, 2\right)\right]$

En este trabajo también se consideraron 7 formas de calcular el parámetro r de la función limitadora y estos se resumen en la Tabla 9.

Tabla 9.

Formas de calcular el parámetro r utilizadas en este trabajo

R	Ecuación r
1 (Leveque, 2004)	$r = \dfrac{\Delta u_{I+1/2}}{\Delta u_{i+1/2}}$
2 (Alcrudo y Garcia-Navarro, 1993)	$r = \dfrac{(\tilde{\alpha}_n \varphi_n (1 - \lvert\nu_n\rvert)_I}{(\tilde{\alpha}_n \varphi_n (1 - \lvert\nu_n\rvert)_{P,E}}$
3	$r = \sum_{n=1}^{3} \tilde{\alpha}_n \varphi_n \tilde{\mathbf{e}}_n$
4	$r = \dfrac{\Delta u_{I+1/2}}{\Delta u_{i+1/2}}$
5	$r = \dfrac{\nabla u_P \cdot \mathbf{d}_{PE}}{u_D - u_P}$
6 (Darwish y Moukalled, 2003)	$r = \dfrac{2\nabla u_P \cdot \mathbf{d}_{PE}}{u_D - u_P} - 1$
8 (Li *et al.*, 2008)	$r = \dfrac{u_p - (u_{U_r} + (\nabla u_P)_{U_r} \cdot \mathbf{d}_{UU_r}}{u_D - u_P}$

El índice I corresponde a la frontera upwind, D al elemento aguas abajo, U al elemento aguas arriba, U_r es un elemento aguas arriba que no siempre coincide con el elemento adyacente.

3.3.1.1 Flux WAF TVD. La aplicación del esquema TVD a partir del esquema de segundo orden de tipo WAF para las ecuaciones de aguas someras se puede escribir a partir de la ecuación (71) adicionando el término asociado al esquema TVD como:

$$\mathbf{F}_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i^{\boldsymbol{TVD}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_P + \mathbf{F}_{E_i}\right)\mathbf{n}_i - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{3} \tilde{\alpha}_n \varphi_n \tilde{\mathbf{e}}_n\right)_{P,E} + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{3} \Psi(r)_n \tilde{\alpha}_n \varphi_n (1 - |\nu_n|) \tilde{\mathbf{e}}_n\right)_{P,E} \tag{83}$$

Donde el segundo término de la ecuación (83) corresponde al esquema de primer orden, el cual se detalló anteriormente, y el tercer término de esta es la contribución de segundo orden. $\Psi(r)_n$ es la función limitadora y $\nu_n = \tilde{\lambda}_n \Delta t / \Delta x$. Si se suman todos los términos de la ecuación (83) el flux numérico TVD puede escribirse como:

$$\mathbf{F}_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i^{\boldsymbol{TVD}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_P + \mathbf{F}_{E_i}\right)\mathbf{n}_i - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{3} \tilde{\alpha}_n \varphi_n \left(1 - \Psi(r)_n (1 - |\nu_n|)\right) \tilde{\boldsymbol{e}}_n\right)_{P,E} \tag{84}$$

3.3.1.2 Término Fuente WAF TVD. De manera análoga a lo realizado anteriormente, se puede incluir la variación total decreciente en el término fuente asociado a la pendiente del suelo adicionando un segundo término que incluye la función limitadora así:

$$\mathbf{S_z}_{b_i}^{\boldsymbol{TVD}} = \frac{1}{2} a_{b_i} \left(\sum_{n=1}^{3} \tilde{\beta}_n (1 - \operatorname{signo}(\check{\lambda}_n)\, \tilde{\mathbf{e}}_n\right)_{P,E} - \frac{1}{2} a_{b_i} \left(\sum_{n=1}^{3} \Psi(r)_n \tilde{\beta}_n (1 - \operatorname{signo}(\check{\lambda}_n)(1 - |\nu_n|)\, \tilde{\mathbf{e}}_n\right)_{P,E} \tag{85}$$

La ecuación (85) puede sintetizarse y la expresión del término fuente TVD queda:

$$\mathbf{S_z}_{b_i}^{\boldsymbol{TVD}} = \frac{1}{2} a_{b_i} \left(\sum_{n=1}^{3} \tilde{\beta}_n (1 - \operatorname{signo}(\check{\lambda}_n)(1 - \Psi(r)_n (1 - |\nu_n|))\, \tilde{\mathbf{e}}_n\right)_{P,E} \tag{86}$$

Finalmente, la expresión completa del método de Godunov con el solucionador de Riemann de Roe incluyendo el término fuente con esquema TVD desarrollado a partir de un esquema WAF se puede expresar como:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{n+1}} = \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{n}} - \frac{\Delta t}{\Omega_i}\left(\sum_{l=1}^{3}\left(\mathbf{F}_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i{}^{\boldsymbol{TVD}}\right) + \mathbf{S}_{\mathbf{z}_{b_i}}{}^{\boldsymbol{TVD}}\right)_{P,E} + \frac{\Delta t}{\Omega_i}\mathbf{S}_{\boldsymbol{f_i}} \tag{87}$$

3.3.4 Discretización Temporal

La discretización temporal presentada en la ecuación (70) también puede realizarse en términos de una variable de peso θ así:

$$\begin{aligned} &\frac{(\mathbf{U}_P^{n+1} - \mathbf{U}_P^{n})\Delta\Omega_i}{\Delta t} + (1-\theta)\sum_{i=1}^{b_i}\left(\mathbf{F}_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right)^{n} a_i + \theta\sum_{i=1}^{b_i}\left(\mathbf{F}_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right)^{n+1} a_i \\ &\qquad = (1-\theta)\mathbf{S}(\mathbf{U})^{n} + \theta\mathbf{S}(\mathbf{U})^{n+1} \end{aligned} \tag{88}$$

En la cual cuando $\theta = 1$ el esquema es totalmente explícito, cuando $\theta = 0$ es totalmente implícito y cuando $\theta = 0.5$ es Crank-Nicolson. En este trabajo se implementaron estos tres esquemas de discretización temporal y los problemas se resolvieron teniendo en cuenta las implicaciones que estos tienen sobre los problemas desarrollados. Los fluxes numéricos en $n+1$ se pueden aproximar aplicando series de Taylor en el tiempo en una cara del volumen de control así:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U})_{b_i}^{n+1} \cong \mathbf{F}(\mathbf{U})_{b_i}^{n} + \mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n}\Delta\mathbf{U}_{E_i} - \mathbf{A}(\mathbf{U})_{P}^{n}\Delta\mathbf{U}_{P} \tag{89}$$

Donde $\Delta\mathbf{U}_P = \Delta\mathbf{U}_P^{n+1} - \Delta\mathbf{U}_P^{n}$ y $\Delta\mathbf{U}_{E_i} = \Delta\mathbf{U}_{E_i}^{n+1} - \Delta\mathbf{U}_{E_i}^{n}$ Es importante recalcar que las matrices Jacobianas $\mathbf{A}(\mathbf{U})_P^{n}$ y $\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n}$ se deben evaluar en el centro de cada celda de acuerdo con la definición de la serie de Taylor antes mencionada.

Por lo tanto, haciendo la proyección en la dirección a una cara del volumen de control se tiene:

$$\left(\mathbf{F}(\mathbf{U})_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right)^{n+1} \cong \left(\mathbf{F}(\mathbf{U})_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right)^{n} + \left(\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n} \cdot \mathbf{n}_i\right)\Delta\mathbf{U}_{E_i} - (\mathbf{A}(\mathbf{U})_P^n \cdot \mathbf{n}_i)\Delta\mathbf{U}_P \tag{90}$$

Reemplazando la ecuación (90) en la (88) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{(\mathbf{U}_P^{n+1} - \mathbf{U}_P^{n})\Delta\Omega_i}{\Delta t} &+ (1-\theta)\sum_{i=1}^{b_i}\left(\mathbf{F}(\mathbf{U})_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right)^{n} a_i \\ &+ \theta\sum_{i=1}^{b_i}\Big[\left(\mathbf{F}(\mathbf{U})_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right)^{n} a_i + \left(\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n} \cdot \mathbf{n}_i\right)\Delta\mathbf{U}_{E_i} a_i \\ &- (\mathbf{A}(\mathbf{U})_P^n \cdot \mathbf{n}_i)\Delta\mathbf{U}_P a_i\Big] = (1-\theta)\mathbf{S}(\mathbf{U})^n + \theta\mathbf{S}(\mathbf{U})^{n+1}\end{aligned} \tag{91}$$

Expandiendo el tercer término de la ecuación (91):

$$\begin{aligned}\frac{(\mathbf{U}_P^{n+1} - \mathbf{U}_P^{n})\Delta\Omega_i}{\Delta t} &+ (1-\theta)\sum_{i=1}^{b_i}\left(\mathbf{F}(\mathbf{U})_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right)^{n} a_i + \theta\sum_{i=1}^{b_i}\left[\left(\mathbf{F}(\mathbf{U})_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right)^{n} a_i\right] \\ &+ \theta\sum_{i=1}^{b_i}\left[\left(\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n} \cdot \mathbf{n}_i\right)\Delta\mathbf{U}_{E_i} a_i\right] - \theta\sum_{i=1}^{b_i}\left[(\mathbf{A}(\mathbf{U})_P^n \cdot \mathbf{n}_i)\Delta\mathbf{U}_P a_i\right] \\ &= (1-\theta)\mathbf{S}(\mathbf{U})^n + \theta\mathbf{S}(\mathbf{U})^{n+1}\end{aligned} \tag{92}$$

Reemplazando las definiciones de $\Delta\mathbf{U}_P$ y $\Delta\mathbf{U}_{E_i}$ en la ecuación (92) y simplificando términos se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{(\mathbf{U}_P^{n+1} - \mathbf{U}_P^{n})\Delta\Omega_i}{\Delta t} &+ \sum_{i=1}^{b_i}\left(\mathbf{F}(\mathbf{U})_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right)^{n} a_i \\ &+ \theta\sum_{i=1}^{b_i}\left[\left(\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n} \cdot \mathbf{n}_i\right)(\Delta\mathbf{U}_{E_i}^{n+1} - \Delta\mathbf{U}_{E_i}^{n}) a_i\right] \\ &- \theta\sum_{i=1}^{b_i}\left[(\mathbf{A}(\mathbf{U})_P^n \cdot \mathbf{n}_i)(\Delta\mathbf{U}_P^{n+1} - \Delta\mathbf{U}_P^{n}) a_i\right] \\ &= (1-\theta)\mathbf{S}(\mathbf{U})^n + \theta\mathbf{S}(\mathbf{U})^{n+1}\end{aligned} \tag{93}$$

Agrupando los términos en n y $n+1$ se tiene:

$$\left[\frac{\Delta\Omega_i}{\Delta t} - \theta \sum_{i=1}^{b_i} \left(\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n} \cdot \mathbf{n}_i\right) a_i\right] \mathbf{U}_P^{n+1} + \theta \sum_{i=1}^{b_i} \left(\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n} \cdot \mathbf{n}_i\right) a_i) \mathbf{U}_{E_i}^{n+1}$$

$$= \frac{\Delta\Omega_i}{\Delta t} \mathbf{U}_P^n - \sum_{i=1}^{b_i} \left(\mathbf{F}(\mathbf{U})_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right)^n a_i + \theta \sum_{i=1}^{b_i} \left(\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n} \cdot \mathbf{n}_i\right) a_i) \mathbf{U}_P^n \quad (94)$$

$$- \theta \sum_{i=1}^{b_i} \left(\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n} \cdot \mathbf{n}_i\right) a_i) \mathbf{U}_{E_i}^{n} + (1-\theta)\mathbf{S}(\mathbf{U})^n + \theta \mathbf{S}(\mathbf{U})^{n+1}$$

La ecuación (94) se puede agrupar de la forma clásica del método de los volúmenes finitos así:

$$a_p \mathbf{U}_P = \sum_{i=1}^{nb} a_{nb} \mathbf{U}_{nb} + S_u \quad (95)$$

Donde:

$$a_p = \frac{\Delta\Omega_i}{\Delta t} - \theta \sum_{i=1}^{b_i} \left(\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n} \cdot \mathbf{n}_i\right) a_i \quad (96)$$

$$a_{nb} = \theta \left(\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n} \cdot \mathbf{n}_i\right) a_i \quad (97)$$

$$S_u = \frac{\Delta\Omega_i}{\Delta t} \mathbf{U}_P^n - \sum_{i=1}^{b_i} \left(\mathbf{F}(\mathbf{U})_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right)^n a_i + \theta \sum_{i=1}^{b_i} \left(\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n} \cdot \mathbf{n}_i\right) a_i) \mathbf{U}_P^n$$

$$- \theta \sum_{i=1}^{b_i} \left(\mathbf{A}(\mathbf{U})_{E_i}^{n} \cdot \mathbf{n}_i\right) a_i) \mathbf{U}_{E_i}^{n} + (1-\theta)\mathbf{S}(\mathbf{U})^n + \theta \mathbf{S}(\mathbf{U})^{n+1} \quad (98)$$

Las condiciones de frontera, el manejo del frente seco-mojado y la compensación del desbalance de masa se trataron de la misma manera como se describieron en el capítulo anterior.

3.4 Resultados

La solución implementada se validó mediante la solución de problemas de referencia en los cuales se evaluaron los esquemas: implícito, explícito y Crank-Nicolson; así como los esquemas TVD con 7 diferentes funciones limitadoras y las 7 distintas formas de calcular el factor r descritos anteriormente. Los errores se calcularon utilizando la ecuación (60) la cual fue presentada y descrita en el capítulo anterior.

3.4.1 Rotura de Presa

Este problema se realizó para determinar la capacidad del modelo para representar el avance de un frente de onda. El problema inicia con el fluido en reposo con dos calados separados por una compuerta imaginaria. En el ínstate t=0 se retira la compuerta y se deja evolucionar al fluido libremente y se observa el avance del frente de onda que se produce. El dominio de estudio es un canal de 4m de ancho por 200m de largo con fondo plano y la compuerta imaginaria se ubica en la mitad del canal. Se llevaron a cabo simulaciones considerando el fondo seco y el fondo mojado con el fin de evaluar la capacidad del modelo de representar los frentes seco/mojado. Las condiciones iniciales son:

- Fondo mojado
    - Elevación del fluido aguas arriba de la presa h1=1m.
    - Elevación del fluido aguas abajo de la presa h0=0.1m.
- Fondo seco
    - Elevación del fluido aguas arriba de la presa h1=1m.
    - Elevación del fluido aguas abajo de la presa $h0=h_{min}=0.0001$.

El dominio del problema se dividió 432 volúmenes de control y se llevaron a cabo simulaciones considerando valores de CFL (número de Courant-Friedrichs-Lewy) de 0.5 y 1 para los casos con fondo seco y fondo mojado. Para cada CFL se consideraron los esquemas de discretización temporal: explícito, implícito y Crank-Nicolson y dentro de estos se utilizaron los 7 esquemas TVD descritos anteriormente: van Albada, min mod, SUPERBEE, Sweby, QUICK, UMIST y MUSCL. Además, para cada esquema TVD se utilizaron las 7 formas de calcular el factor r también descritas previamente. Los errores se calcularon con respecto a las soluciones analíticas reportadas por (Delestre et al. 2013) y se presentan en la Tabla 10 y Tabla 11. También, se presenta el error que se obtiene en cada caso cuando se utiliza una discretización explícita y no se utilizan esquemas TVD. Los errores calculados se compararon con el caso sin esquema TVD y se resaltan en gris en cada una de las tablas cuando el error es inferior a este.

La Tabla 10 se puede dividir en tres grandes zonas en las cuales se presentan los errores obtenidos cuando se utilizaron los esquemas: explícito, implícito y CN; para el caso con fondo mojado. En la primera zona cuando la discretización temporal fue explícita y se utilizó un CFL=0.5 se observó una reducción del error en todos los casos estudiados excepto en aquellos donde se utilizó el factor R=5; en cuyo caso únicamente se obtuvo un error inferior al caso sin esquema TVD cuando se utilizó la función de van Albada, en todos los demás el error fue mayor. En el caso explícito con CFL=1 se observan reducciones en el error cuando se utilizaron los factores R=1, R=4, R=6 y R=8 con casi todas las funciones limitadoras y, por el contrario, cuando se utilizaron los factores R=2 y R=5 no se evidencian mejoras en los errores obtenidos con ninguna función limitadora excepto cuando se usó van Albada y R=5.

En la segunda zona en la cual la discretización temporal fue implícita no se obtuvo ninguna mejora en el error con ningún factor r ni ninguna función limitadora cuando se utilizó un CFL=0.5. Caso contrario se observa cuando se utilizó el esquema implícito con CFL=1 en donde con todos los factores r y todas funciones limitadoras el error disminuyó.

Tabla 10.

Errores calculados en cada una de las simulaciones para el problema de rotura de pera con fondo mojado.

		WET CFL=0.5							**WET CFL=1.0**						
	Error sin TVD	0.0058							0.0044						
	Esquema	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R8	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R8
Explícito	van Albada	0.0050	0.0048	0.0046	0.0040	0.0044	0.0040	0.0040	0.0034	0.0049	0.0066	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039
	Min Mod	0.0050	0.0055	0.0045	0.0039	0.0059	0.0039	0.0039	0.0048	0.0055	0.0048	0.0041	0.0044	0.0041	0.0041
	SUPERBEE	0.0044	0.0048	0.0039	0.0034	0.0061	0.0034	0.0034	0.0035	0.0048	0.0033	0.0035	0.0044	0.0035	0.0035
	Sweby	0.0046	0.0046	0.0040	0.0037	0.0060	0.0037	0.0037	0.0035	0.0069	0.0032	0.0037	0.0044	0.0037	0.0037
	QUICK	0.0044	0.0050	0.0041	0.0042	0.0061	0.0042	0.0042	0.0041	0.0049	0.0036	0.0037	0.0044	0.0037	0.0037
	UMIST	0.0045	0.0047	0.0042	0.0041	0.0061	0.0041	0.0041	0.0039	0.0044	0.0067	0.0040	0.0044	0.0040	0.0040
	MUSCL	0.0049	0.0050	0.0039	0.0038	0.0061	0.0038	0.0038	0.0045	0.0044	0.0061	0.0037	0.0044	0.0037	0.0037
Implícito	van Albada	0.0100	0.0111	0.0099	0.0090	0.0099	0.0090	0.0090	0.0036	0.0030	0.0037	0.0015	0.0023	0.0015	0.0015
	Min Mod	0.0109	0.0107	0.0101	0.0093	0.0111	0.0093	0.0093	0.0039	0.0037	0.0026	0.0017	0.0034	0.0017	0.0017
	SUPERBEE	0.0105	0.0111	0.0106	0.0076	0.0113	0.0076	0.0076	0.0031	0.0041	0.0039	0.0011	0.0023	0.0011	0.0011
	Sweby	0.0105	0.0116	0.0103	0.0087	0.0111	0.0087	0.0087	0.0031	0.0030	0.0032	0.0013	0.0034	0.0013	0.0013
	QUICK	0.0104	0.0109	0.0103	0.0086	0.0113	0.0086	0.0086	0.0031	0.0029	0.0031	0.0013	0.0034	0.0013	0.0013
	UMIST	0.0103	0.0108	0.0099	0.0089	0.0111	0.0089	0.0089	0.0030	0.0030	0.0035	0.0014	0.0034	0.0014	0.0014
	MUSCL	0.0101	0.0106	0.0103	0.0086	0.0113	0.0086	0.0086	0.0026	0.0028	0.0030	0.0013	0.0034	0.0013	0.0013
C-N	van Albada	0.0053	0.0056	0.0048	0.0042	0.0046	0.0042	0.0042	0.0096	0.0126	0.0116	0.0087	0.0106	0.0087	0.0087
	Min Mod	0.0054	0.0053	0.0046	0.0037	0.0064	0.0037	0.0037	0.0104	0.0119	0.0119	0.0090	0.0107	0.0090	0.0090
	SUPERBEE	0.0050	0.0052	0.0049	0.0030	0.0065	0.0030	0.0030	0.0110	0.0117	0.0116	0.0076	0.0111	0.0076	0.0076
	Sweby	0.0048	0.0053	0.0045	0.0036	0.0064	0.0036	0.0036	0.0095	0.0111	0.0127	0.0081	0.0108	0.0081	0.0081
	QUICK	0.0046	0.0053	0.0045	0.0038	0.0064	0.0038	0.0038	0.0097	0.0116	0.0125	0.0085	0.0111	0.0085	0.0085
	UMIST	0.0050	0.0055	0.0049	0.0037	0.0064	0.0037	0.0037	0.0095	0.0124	0.0126	0.0074	0.0111	0.0074	0.0074
	MUSCL	0.0054	0.0055	0.0046	0.0035	0.0065	0.0035	0.0035	0.0102	0.0122	0.0122	0.0084	0.0111	0.0084	0.0084

Nota. Las casillas sombreadas corresponden a los casos en los cuales el error disminuyó

La tercera zona corresponde al esquema de discretización temporal CN. Cuando se utilizó un CFL=0.5 se evidencia que los errores disminuyeron en todos los casos estudiados excepto en aquellos en los cuales se utilizó un factor R=5; caso en el cual el error solamente se redujo cuando se utilizó la función de van Albada. Por el contrario, cuando el CFL=1 no se presentó ninguna reducción en los errores en todos los casos.

La Tabla 11 al igual que la Tabla 10 se puede dividir en tres grandes zonas en las cuales se presentan los errores obtenidos cuando se utilizaron los esquemas: explícito, implícito y CN; pero esta vez para el caso con fondo seco. En la zona correspondiente a la discretización explícita y CFL=0.5 se muestra que los errores disminuyen con todos los factores r utilizados para todas las funciones limitadoras excepto cuando R=5 en cuyo caso la reducción del error se da únicamente con las funciones de van Albada, min mod, y Sweby. Caso similar se observa cuando el CFL=1 en el cual la disminución del error se obtuvo en todos los casos excepto cuando R=5, caso en el cual únicamente la función limitadora de van Albada presenta un error inferior al caso sin esquema TVD.

En la segunda zona en la cual se utilizó la discretización temporal implícita, no se evidencia ninguna disminución en el error calculado ni para el caso con CFL=0,5 ni CFL=1.

Finalmente, en la tercera zona con discretización temporal CN, se presenta que el error se redujo cuando se utilizaron los factores R=1, R=4, R=6 y R=8 con todas las funciones limitadoras cuando se utilizó un CFL=0.5; también se observan disminuciones del error puntuales con los factores R=2 y R=3 cuando se utilizaron las funciones superbee y Sweby respectivamente. No obstante, cuando CFL=1 no se presentó ninguna reducción en el error calculado en ninguno de los casos.

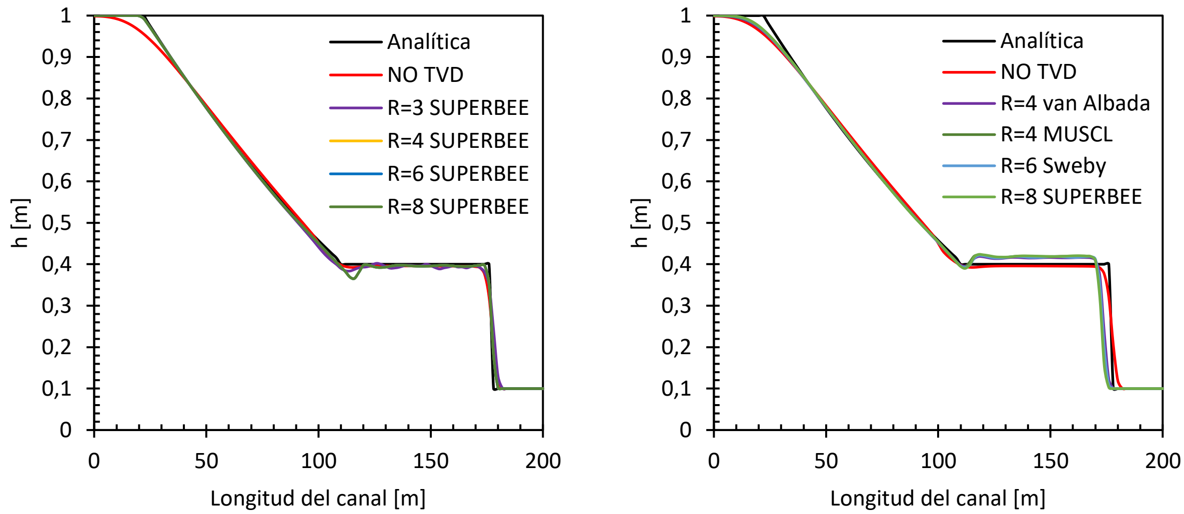
Tabla 11.

Errores calculados en cada una de las simulaciones para el problema de rotura de presa con fondo seco.

		DRY CFL=0.5							DRY CFL=1.0						
	Error sin TVD	0.0028							0.0009						
	Esquema	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R8	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R8
Explícito	van Albada	0.0009	0.0016	0.0013	0.0011	0.0018	0.0011	0.0011	0.0001	0.0005	0.0001	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004
	Min Mod	0.0011	0.0022	0.0016	0.0010	0.0026	0.0010	0.0010	0.0002	0.0009	0.0006	0.0007	0.0021	0.0007	0.0004
	SUPERBEE	-	0.0013	0.0011	0.0001	0.0030	0.0001	0.0002	-	0.0006	0.0006	0.0008	0.0019	0.0001	0.0006
	Sweby	0.0008	0.0015	0.0010	0.0005	0.0023	0.0005	0.0002	0.0004	0.0001	0.0005	0.0000	0.0020	0.0003	0.0005
	QUICK	0.0034	0.0014	0.0013	0.0003	0.0029	0.0003	0.0005	0.0027	0.0003	0.0002	0.0001	0.0019	0.0002	0.0001
	UMIST	-	0.0017	0.0010	0.0006	0.0029	0.0006	0.0009	-	0.0000	0.0003	0.0005	0.0019	0.0007	0.0003
	MUSCL	-	0.0010	0.0009	0.0003	0.0030	0.0003	0.0003	0.0027	0.0006	0.0002	0.0006	0.0019	0.0002	0.0005
Implícito	van Albada	0.0090	0.0079	0.0076	0.0087	0.0068	0.0087	0.0087	0.0034	0.0043	0.0041	0.0037	0.0044	0.0037	0.0037
	Min Mod	0.0098	0.0081	0.0081	0.0083	0.0080	0.0083	0.0083	0.0041	0.0046	0.0041	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038
	SUPERBEE	0.0096	0.0087	0.0067	0.0075	0.0074	0.0075	0.0075	0.0032	0.0038	0.0036	0.0034	0.0038	0.0034	0.0034
	Sweby	0.0121	0.0085	0.0075	0.0077	0.0074	0.0077	0.0077	0.0037	0.0040	0.0038	0.0035	0.0038	0.0035	0.0035
	QUICK	0.0099	0.0086	0.0074	0.0076	0.0075	0.0076	0.0076	0.0034	0.0039	0.0038	0.0035	0.0038	0.0035	0.0035
	UMIST	0.0096	0.0075	0.0071	0.0081	0.0074	0.0081	0.0081	0.0037	0.0041	0.0039	0.0035	0.0038	0.0036	0.0036
	MUSCL	0.0095	0.0080	0.0068	0.0072	0.0074	0.0072	0.0072	0.0034	0.0040	0.0038	0.0036	0.0038	0.0035	0.0035
C-N	van Albada	0.0024	0.0034	0.0029	0.0024	0.0028	0.0024	0.0024	0.0187	0.0187	0.0158	0.0163	0.0167	0.0163	0.0163
	Min Mod	0.0025	0.0030	0.0029	0.0021	0.0037	0.0021	0.0021	0.0201	0.0189	0.0170	0.0177	0.0191	0.0177	0.0177
	SUPERBEE	0.0010	0.0028	0.0027	0.0020	0.0037	0.0020	0.0020	0.0212	0.0185	0.0149	0.0149	0.0188	0.0149	0.0149
	Sweby	0.0022	0.0028	0.0024	0.0025	0.0037	0.0025	0.0025	0.0207	0.0206	0.0163	0.0160	0.0211	0.0160	0.0160
	QUICK	0.0020	0.0033	0.0028	0.0027	0.0038	0.0027	0.0027	0.0215	0.0193	0.0162	0.0167	0.0515	0.0167	0.0167
	UMIST	0.0023	0.0034	0.0030	0.0022	0.0038	0.0022	0.0022	0.0206	0.0192	0.0151	0.0161	0.0179	0.0161	0.0161
	MUSCL	0.0022	0.0031	0.0031	0.0023	0.0037	0.0023	0.0023	0.0205	0.0170	0.0159	0.0156	0.0189	0.0156	0.0156

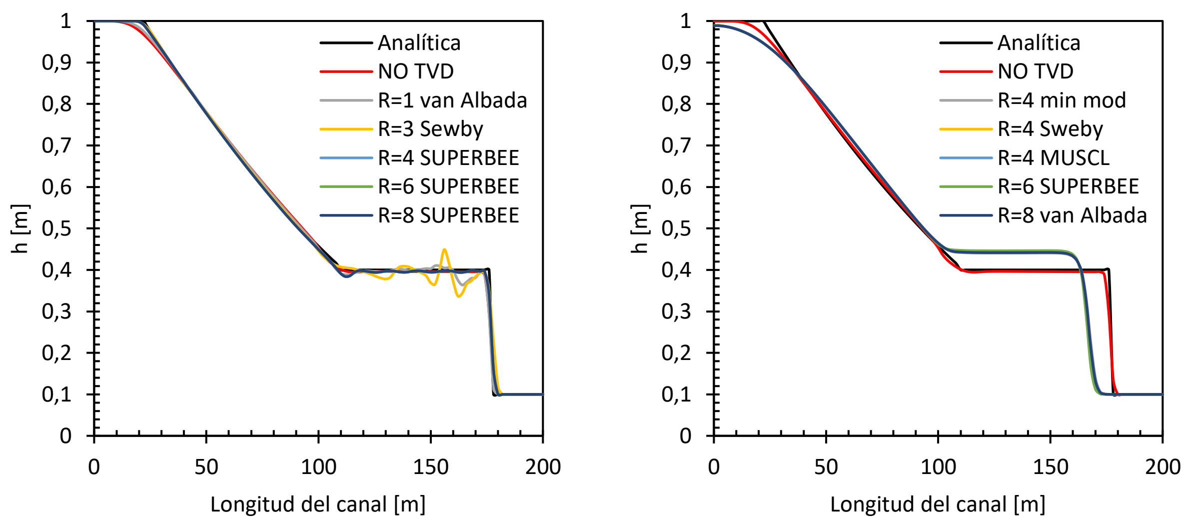
Nota. Las casillas sombreadas corresponden a los casos en los cuales el error disminuyó

Si bien se observan casos en los cuales el error calculado disminuye con el uso de los esquemas TVD es importante ver gráficamente el comportamiento que dichas soluciones presentan. En la *Figura 36*a se muestran algunos resultados que presentaron errores menores al error sin esquema TVD cuando el fondo es mojado, CFL=0.5 y se usa un esquema explícito. En esta se evidencia que la soluciones con esquemas TVD y diferentes factores R se aproximan más a la solución analítica especialmente en la parte alta de la presa, sin embargo, se observa que las soluciones son dispersas sobre la región donde ocurre el rompimiento de la presa. En la *Figura 36*b también se comparan los mejores resultados cuando se usa un esquema de discretización temporal CN y diferentes esquemas TVD. En esta a diferencia del caso anterior, se observa una mejor aproximación de la solución en la parte alta de la presa, pero una gran diferencia en la zona donde ocurre la rotura y se crea el frente de onda cuando se compara con la solución sin esquemas TVD.



a) b)

Figura 36. Rotura de presa con fondo mojado CFL=0.5 con esquemas TVD y discretización temporal a) explícita y b) CN.

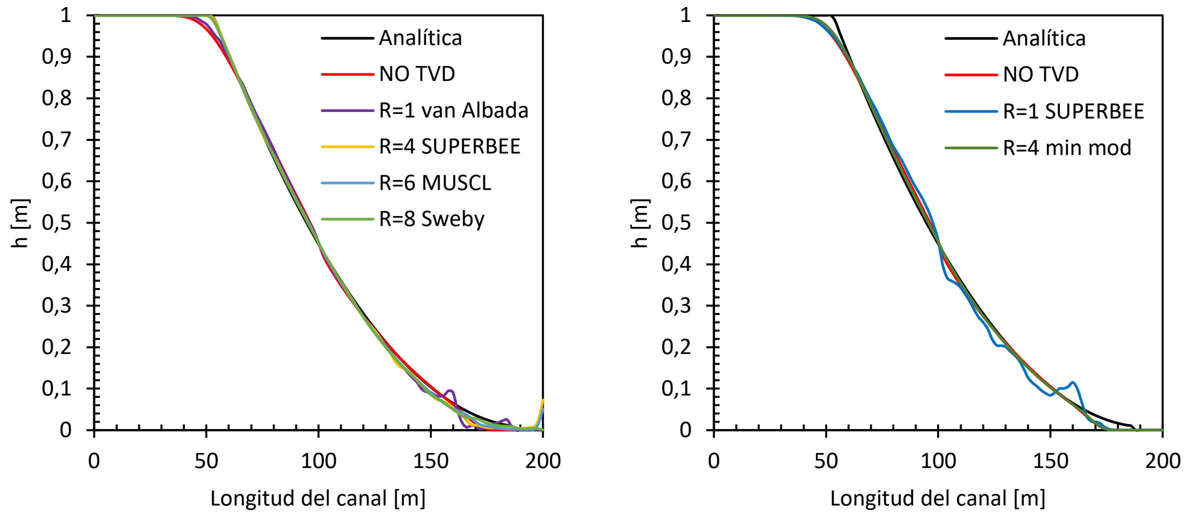


a) b)

Figura 37. Rotura de presa con fondo mojado CFL=1 con esquemas TVD y discretización temporal a) explícita e b) implícita.

Algunos de los mejores resultados para el caso cuando el fondo es mojado, el CFL=1 y el esquema es explícito se presentan en la *Figura 37*a. En esta también se muestra una mejora en la aproximación de la solución en la parte alta de la presa y dispersión donde ocurre el rompimiento de esta comparada con la solución sin esquema TVD, esta dispersión es más alta con el esquema Sweby y el factor R=3. El caso con el esquema temporal implícito se presenta en la *Figura 37*b y en esta se observa que todas curvas se alejan de la solución sin esquemas y de la solución analítica en todas las zonas del canal.

Los mejores resultados para el caso con fondo seco CFL=0.5 y discretización temporal explícita se presenta en la *Figura 38*a. En esta se muestra que el mejor resultado se obtiene cuando no se usa el esquema TVD excepto para el caso del esquema van Albada y R=1 el cual presenta dispersión en la parte baja de la presa. En la *Figura 38*b se observa el caso con esquema temporal CN. Allí se observa que el mejor ajuste a la solución analítica se obtiene sin esquema TVD; mientras que la mayor diferencia en relación con la solución analítica fue obtenida cuando se implementó el esquema SUPERBEE y R=1 que presenta dispersión en la parte baja de la presa. En la *Figura 39* se presentan los mejores resultados para el caso con fondo seco CFL=1 y discretización temporal explícita. En esta se observa que únicamente las soluciones con los esquemas van Albada, Sweby y SUPERBEE con factor R=3, R=4 y R=6 respectivamente presentan una mejor aproximación en la parte alta de la presa comparadas con la solución sin esquemas TVD, no obstante, todas las curvas son dispersas en la parte baja de la presa, pero se acercan más a la solución analítica comparadas con la solución sin esquemas TVD.



a) b)

Figura 38 Rotura de presa con fondo seco CFL=0.5 con esquemas TVD y discretización temporal a) explícita y b) CN

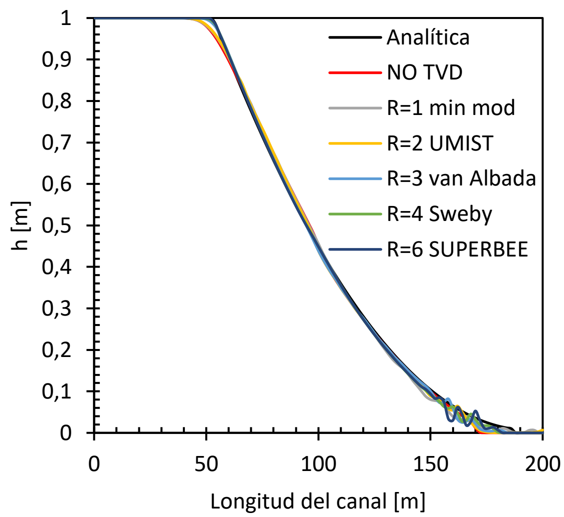


Figura 39. Rotura de presa con fondo seco CFL=1 con esquemas TVD y discretización temporal explícita

También se compararon gráficamente los resultados considerando un factor R constante, en este caso se utilizó R=4. Los resultados obtenidos se graficaron y se utilizaron todos los esquemas TVD implementados. Además, se consideró el esquema de discretización temporal explícito teniendo en cuenta que siempre los errores disminuyeron cuando se utilizó este esquema y no así con el esquema implícito o CN. En la *Figura 40*a se presentan los resultados para el caso con fondo mojado, R=4 y CLF=0.5 y en la *Figura 40*b se presenta el mismo caso pero con CFL=1.0. Los resultados muestran en ambos casos como la soluciones utilizando esquemas TVD se acercan más a la solución analítica, especialmente en la parte alta de la presa, comparados con el resultado sin esquema TVD. No obstante, se observa que todas las soluciones con esquemas TVD presentan dispersión donde sucede el rompimiento de la presa, siendo esta más alta cuando el CFL=0.5 y más baja cuando el CFL=1.0.

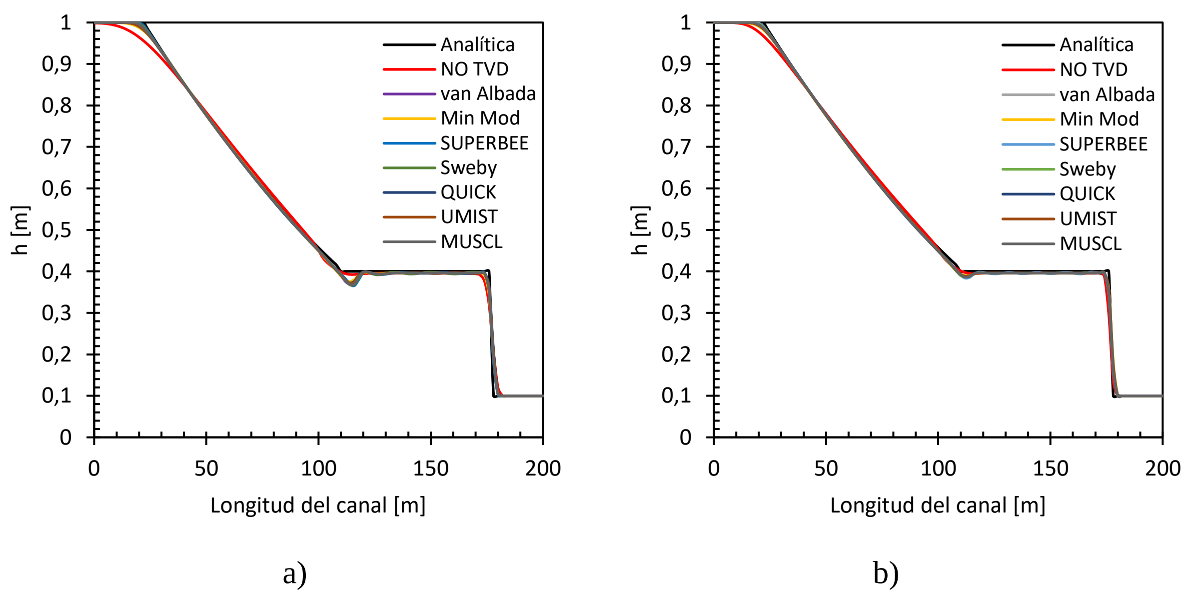
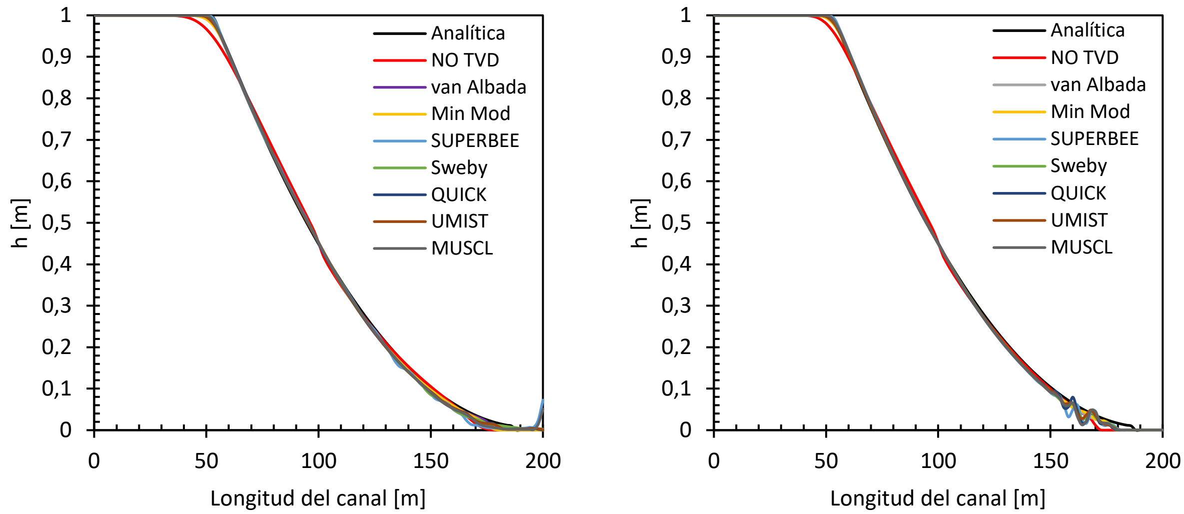


Figura 40. Rotura de presa con fondo mojado con R=4 a) CFL=0.5 y b) CFL=1 con esquemas TVD y discretización temporal explícita

En la *Figura 41*a se presentan los resultados para el caso con fondo seco, R=4 y CLF=0.5 y en la *Figura 41*b se presenta el mismo caso, pero considerando un CFL=1.0. En estas se observa como en todos los casos cuando se utilizó esquema TVD los resultados presentan una mejor aproximación en la parte alta de la presa comparados con la solución sin esquemas TVD, sin embargo, todas estas soluciones son dispersas en la parte baja de la presa. Esta dispersión se observa más alta cuando el CFL=1 y más baja cuando CFL=0.5.



a) b)

Figura 41. Rotura de presa con fondo seco con R=4 a) CFL=0.5 y b) CFL=1 con esquemas TVD y discretización temporal explícita.

De manera general se observa que las soluciones con esquemas TVD mejoran en ciertas zonas del dominio (especialmente en la parte alta de la presa) comparadas con la solución sin esquemas cuando se utiliza la discretización temporal explícita, sin embargo, en todos los casos se evidencia que dichas soluciones son dispersivas en la parte baja de la presa cuando el fondo es seco y en la región donde ocurre la rotura de la presa cuando el fondo es mojado. Por otra parte, cuando se utilizan los otros esquemas de discretización temporal se observa que ninguna solución mejora con respecto a la solución sin esquema TVD.

3.4.2 Flujo Sobre un Montículo

Cuatro simulaciones numéricas del flujo sobre un montículo con tres diferentes regímenes de flujo se llevaron a cabo con el fin de evaluar la correcta implementación de las condiciones de frontera abierta y los resultados se compararon con la solución analítica reportada por (Delestre et al. 2013). En todos los casos se consideró un canal rectangular de 25m de longitud y 1m de ancho sin fricción. La topografía del canal viene dada por la siguiente expresión:

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.005(x-10)^2, & 8 \leq x \leq 12 \\ 0, & otras\ partes \end{cases} \tag{99}$$

Tabla 12.

Esquema, CFL, tiempo CPU y errores calculados en cada una de las simulaciones del problema flujo sobre un montículo.

	Esquema	CFL	tiempo CPU [s]	Error h [m]	Error hu [m^2s^{-1}]	TVD
Subcrítico	Explícito	0.5	31.37	0.00080	0.00016	-
	Implícito	1	23.44	0.00174	0.00137	-
	Implícito	2	13.93	0.00165	0.00137	-
	Implícito	3	11.74	0.00209	0.00130	-
Supercrítico	Explícito	0.5	31.4	0.00000	0.01220	-
	Implícito	1	28.81	0.00047	0.00923	R5 van Albada
	Implícito	1	29.2	0.00015	0.01070	R5 min mod
	Implícito	1	30.8	0.00022	0.00808	R5 Sweby
	Implícito	1	29.23	0.00023	0.00711	R5 QUICK
Transcrítico	Explícito	0.5	37.85	0.00225	0.00058	-
	Implícito	1	34.65	0.00350	0.00133	-
	Implícito	2	25.88	0.00345	0.00143	-
	Implícito	3	18.21	0.00342	0.00149	-
Transcrítico 2	Explícito	0.5	86.82	0.00000	0.00000	-
	Implícito	1	70.34	0.00000	0.00000	-
	Implícito	2	43.02	0.00007	0.00000	-

Se consideraron los esquemas de discretización temporal implícito y explícito, así como distintos valores de CFL en cada uno de los regímenes de flujo estudiados. Además, se calcularon los errores en todos los casos y estos se resumen en la Tabla 12.

3.4.2.1 Caso Subcrítico. Para el caso subcrítico el fluido está inicialmente en reposo dentro del canal con una altura $h(x,0) = 0.5m$. Se fija un flujo a la entrada del canal de $0.18\ m^2/s$ y una altura $h = 0.5m$ a la salida de este lo cual permite que se obtenga una condición de flujo subcrítico a través del canal. Todas las soluciones se compararon con la solución analítica reportada por (Delestre et al. 2013). En la *Figura 42* se muestran los perfiles de h y hu con respecto a la longitud del canal cuando se alcanza el estado estacionario. En esta se observa como todas las soluciones de h se superponen con la solución analítica, no obstante, la solución de hu únicamente se superpone con la solución analítica cuando el CFL=0.5 y se utiliza el esquema explícito, en todas las demás se presenta una ligera desviación.

Los errores mínimos se obtuvieron cuando se utilizó el CFL=0.5 y un esquema explícito con valores de 0.0008 y 0.00016 para *h* y *hu* respectivamente, mientras que los errores más altos se obtuvieron cuando se utilizó un CFL=3 y esquema implícito con valores de 0.00209 para h y 0.0013 para hu como se presenta en la Tabla 12. Lo anterior se esperaba teniendo en cuenta la pérdida de información que sufre la solución al dar pasos más grandes en el tiempo cuando se utilizan valores más altos de CFL. Aunque los errores son más altos cuando el CFL es mayor es importante notar que el tiempo de cálculo se reduce a medida este aumenta, siendo este 31.37s cuando se usa un esquema explícito y CFL=0.5 y 11.74s cuando se utiliza un esquema implícito y un CFL=3.

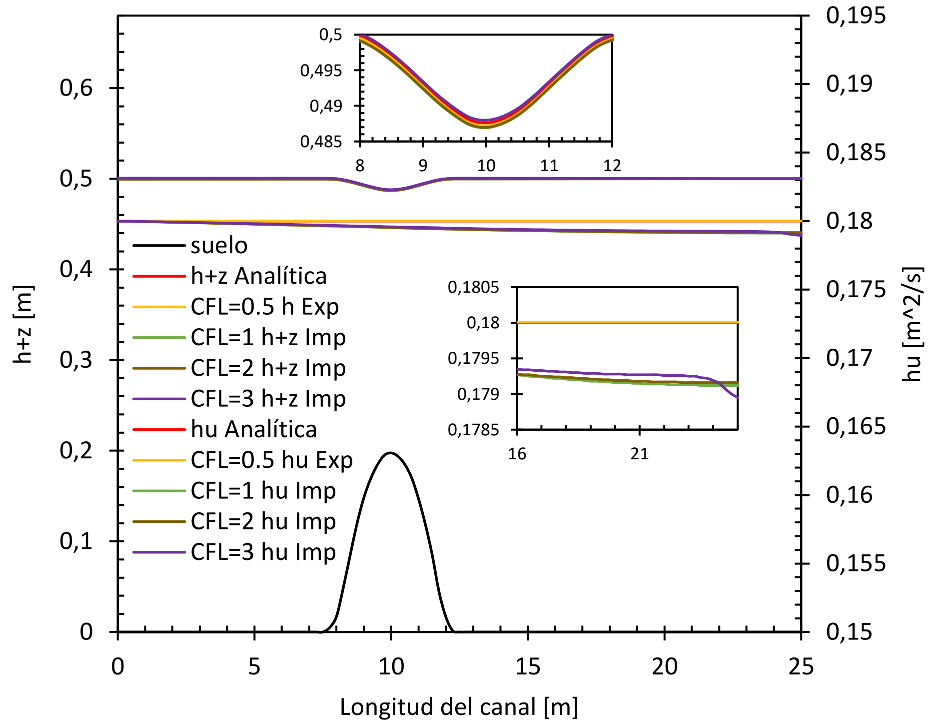


Figura 42. Perfiles de h y hu calculados para el caso subcrítico.

3.4.2.2 Caso Supercrítico. En el caso supercrítico la altura inicial del fluido se fija en $h(x,0) = 2m$, y se considera un flujo a la entrada del canal de 25.0567 m^2/s y una altura $h = 2m$ y a la salida se permite el flujo libre lo cual resulta en una condición de flujo supercrítico a lo largo del canal. Se consideró un esquema de discretización temporal implícito, CFL=1, R=5 y los esquemas TVD de van Albada, min mod, Sweby y QUICK, además se presentan los resultados obtenidos con un esquema de discretización temporal explícito y CFL=0.5 y los resultados se compararon con la solución analítica reportada por (Delestre *et al*., 2013).

En la *Figura 43* se presentan los perfiles h y hu con respecto a la longitud del canal cuando se alcanza el estado estacionario. Allí se muestra como todos los casos estudiados siguen la solución analítica y las curvas se superponen unas con otras para las dos variables h y hu. También se muestra un detalle de las soluciones de hu sobre el montículo donde se observan mínimas dispersiones de orden 0.01 siendo la mayor aquella con el esquema van Albada, no obstante, en el resto del dominio no se aprecian diferencias con la solución analítica. De acuerdo con la Tabla 12 todos los errores obtenidos para la variable h son del orden de 1e^-4 mientras que para la variable hu se obtuvo un error más alto para el esquema explícito con CFL=0.5 igual a 0.012 y menor para el caso implícito con CFL=1 y esquema QUICK igual a 0.007. Los tiempos de cálculo en todos los casos fueron similares y no se obtuvo una mejora significativa cuando se utilizó el esquema implícito y los esquemas TVD como se presenta en la Tabla 12.

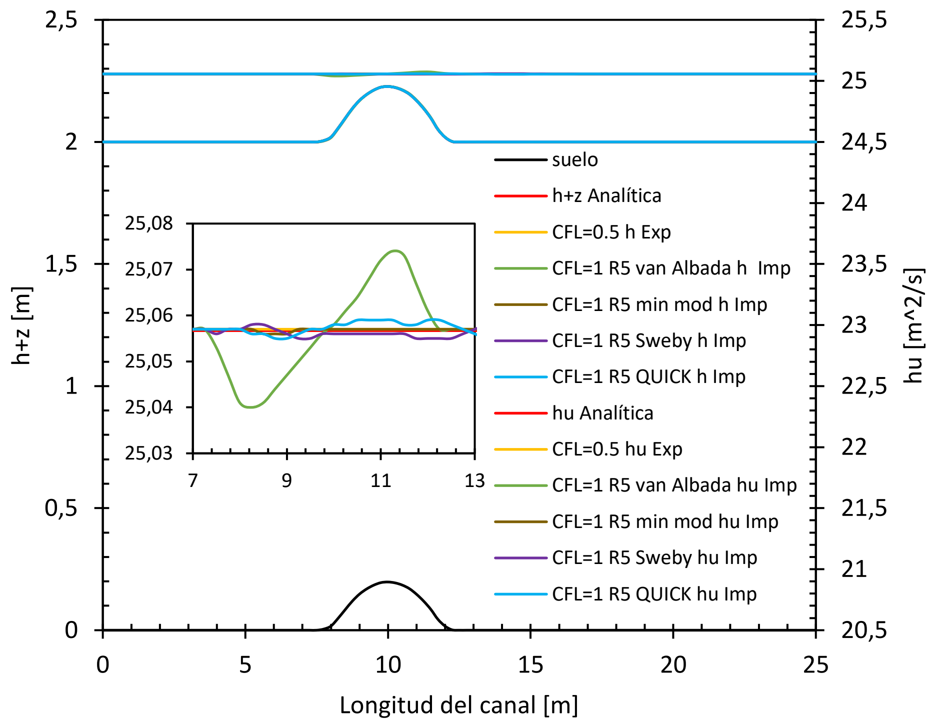


Figura 43. Perfiles de h y hu calculados para el caso supercrítico.

3.4.2.3 Caso Supercrítico. La condición inicial en el caso transcrítico se fija en $h(x,0) = 0.33m$, además, se establece una velocidad de flujo a la entrada del canal de $0.18\ m^2/s$ y se fija una altura $h = 0.33m$ a la salida. El flujo cambia de subcrítico a supercrítico a través de la formación de un resalto hidráulico. Se consideró un esquema de discretización temporal implícito con tres CFL diferentes sin esquemas TVD, además, se presentan los resultados obtenidos con esquema de discretización temporal explícito y CFL=0.5 y los resultados se compararon con la solución analítica reportada por (Delestre *et al.*, 2013).

En la *Figura 44* se muestran los perfiles de h y hu con respecto a la longitud del canal. En esta se observa cómo en todos los casos el resalto hidráulico se localiza en la misma posición en el canal, sin embargo, solamente cuando el CFL=0.5 y el esquema es explícito la altura de este sigue la solución analítica; en los demás casos este se encuentra más arriba. El flujo hu se mantiene constante a lo largo del canal excepto alrededor del resalto donde en todos los casos se observan variaciones. Esta variación es menor cuando el CFL=0.5 y el esquema es explícito y mucho mayores cuando los esquemas son implícitos y los CFL mayores o iguales a uno. Los errores más bajos se obtuvieron con el esquema explícito y el CFL=0.5 siendo estos 0.00225 y 0.00058 para las variables h y hu respectivamente, mientras que los errores más altos se obtuvieron cuando se usó un esquema implícito y un CFL=3 con 0.00342 para h y 0.00149 para hu. Lo anterior se esperaba teniendo en cuenta la pérdida de información que se da al utilizar CFL más altos, no obstante, el tiempo de cálculo se redujo en más de un 50% cuando se utilizó un CFL=3 comparado con el caso cuando se utilizó un CFL=0.5 como se muestra en la Tabla 12. Lo anterior también era esperado dado que el avance en el tiempo es mayor cuando se utilizan CFL más altos.

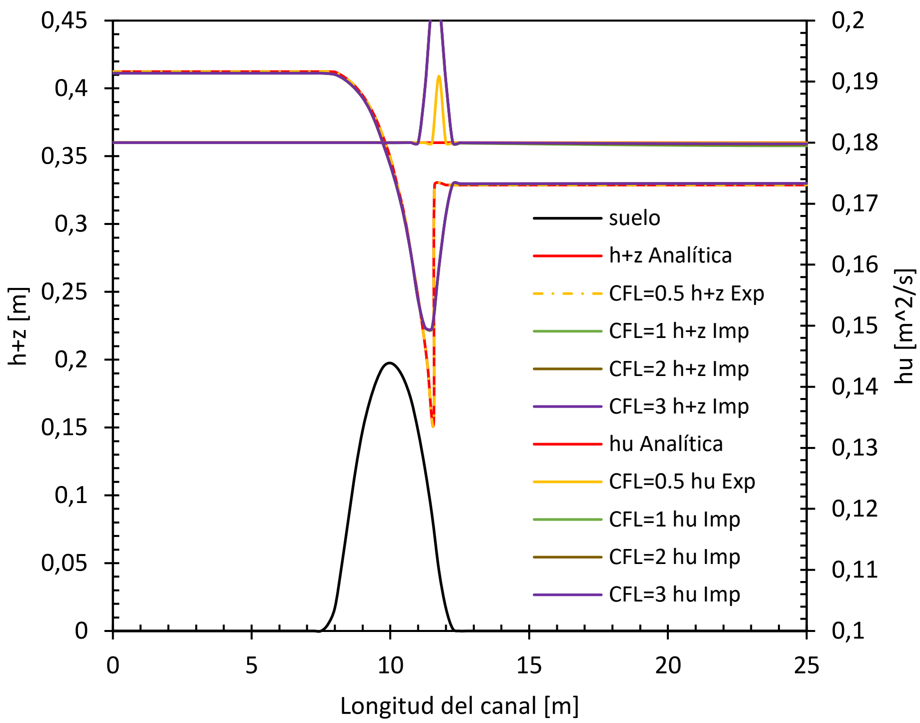


Figura 44. Perfiles de h y hu calculados para el caso transcrítico.

3.4.2.4 Caso Supercrítico. En este problema la condición inicial se fija en $h(x,0) = 0.5m$, y se considera un flujo a la entrada del canal de $1.53\ m^2/s$ y se establece una condición de flujo libre a la salida. La simulación se deja avanzar en el tiempo hasta alcanzar el estado estacionario momento en el cual se aplana el resalto formado sobre el montículo. En este problema se consideraron tres casos: dos con esquema implícito con CFL=1 y CFL=2 y otro con esquema explícito y CFL=0.5. Los resultados obtenidos se compararon con la solución analítica reportada por (Delestre et al. 2013) y se presentan en la *Figura 45*. Allí se exhibe cómo las tres soluciones se superponen entre sí para las dos variables h y hu y siguen fielmente la solución analítica. Los errores calculados para todos los casos fue cero excepto para el caso implícito con CLF=2 donde la variable h presentó un error de 0.00007. En la Tabla 12 observa como el tiempo de cálculo disminuye a medida que el CFL aumenta tal y como se esperaba.

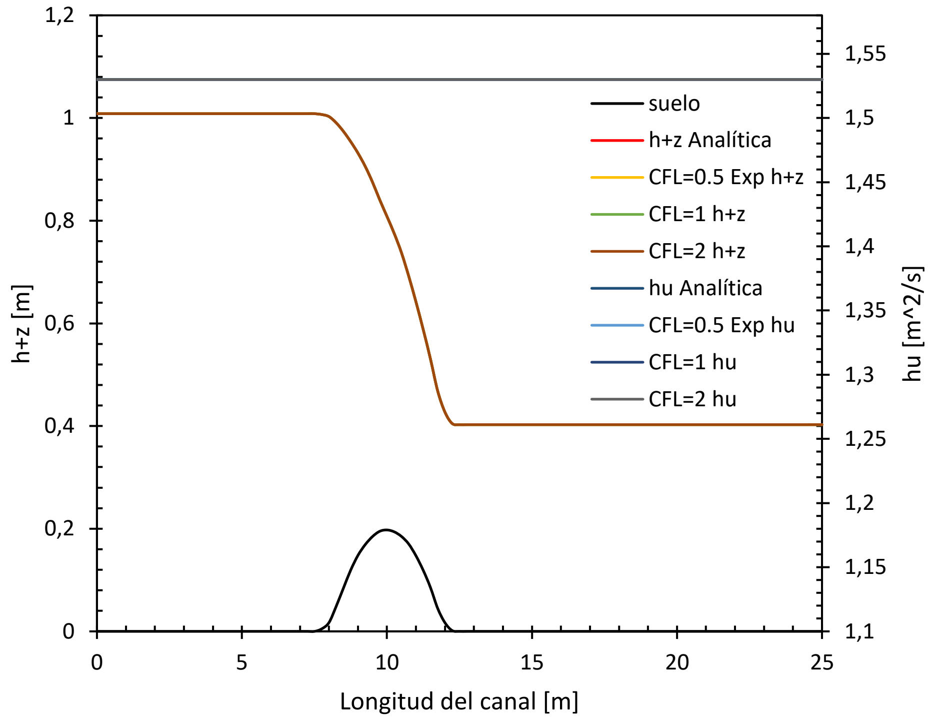


Figura 45. Perfiles de h y hu calculados para el caso transcrítico 2.

El orden de magnitud de los errores obtenidos y las gráficas presentadas anteriormente dan cuenta de la correcta implementación de los esquemas de discretización temporal implícito y explícito para la solución de las ecuaciones de aguas someras para todos los casos estudiados con distintos regímenes de flujo. Además, se evidenció cómo dicha implementación es consistente con los resultados esperados dado que los tiempos de cálculo en todos los casos se redujeron cuando se utilizaron valores de CFL más altos, lo cual solo es posible cuando se utilizan esquemas implícitos debido a la naturaleza misma del problema de estudio. Si bien el tiempo de cálculo se reduce, se debe tener en cuenta que los errores obtenidos también lo hacen debido a la pérdida de información que se da al utilizar Δt más altos.

3.4.3 Rotura de Presa en un Canal de Lecho Seco con Ancho Variable

En este problema se modela el flujo a través de un canal convergente-divergente con un lecho seco y plano. Este problema se utiliza para verificar la capacidad del modelo para tratar flujos reales en situaciones donde se presentan zonas con contracción-expansión agudas. Se llevaron a cabo 7 simulaciones considerando los esquemas de discretización temporal implícito y explícito, 4 valores distintos de CFL (0.5, 0.9, 1 y 2) y dos casos con esquemas TVD min mod y factor R=4. Los casos se presentan en la Tabla 13. La configuración y las dimensiones del canal en estudio se presenta en la *Figura 46*, en todas las simulaciones se utilizó un mallado con 3456 elementos y todas las fronteras se asumieron cerradas. Los resultados obtenidos se compararon con los datos experimentales reportados por (Alias *et al.*, 2011) y se presentan en la Figura 47. Estos fueron medidos en cuatro puntos localizados en G1(5.34, 0.25), G2(12.67, 0.25), G3(14.2, 0.25) y G4(16.17, 0.25). Dado que el problema considera zonas secas estas se marcaron con un valor de h_{min} igual a 0.0001.

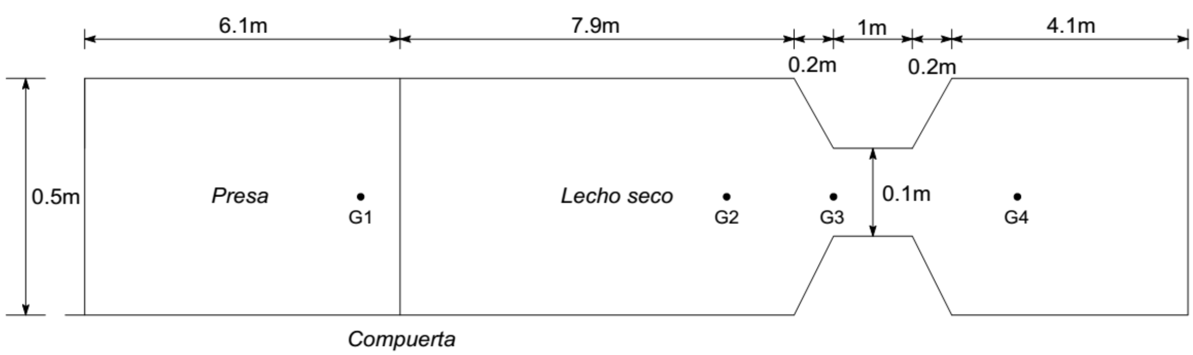
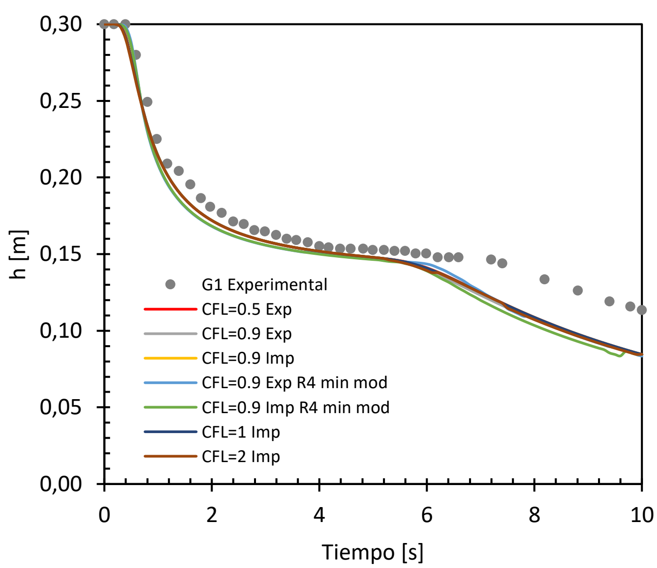


Figura 46. Dominio de estudio problema rotura de presa en un canal de lecho seco con ancho variable.

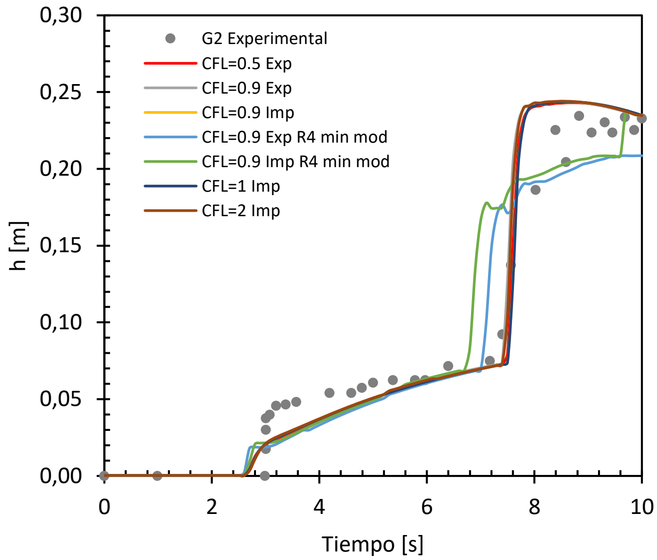
Tabla 13.

CFL, Esquema, tiempo CPU y esquema TVD utilizados en cada una de las simulaciones del problema rotura de presa en un canal de lecho seco con ancho variable.

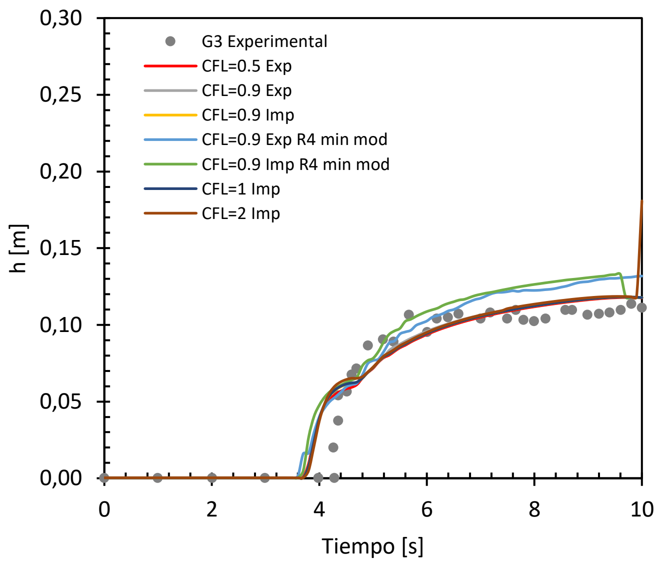
CFL	Esquema	tiempo CPU [s]	TVD
0.5	Explícito	2131	-
0.9	Explícito	1946	-
0.9	Implícito	2217	-
0.9	Explícito	1809	R4 min mod
0.9	Implícito	3175	R4 min mod
1	Implícito	2039	-
2	Implícito	994	-



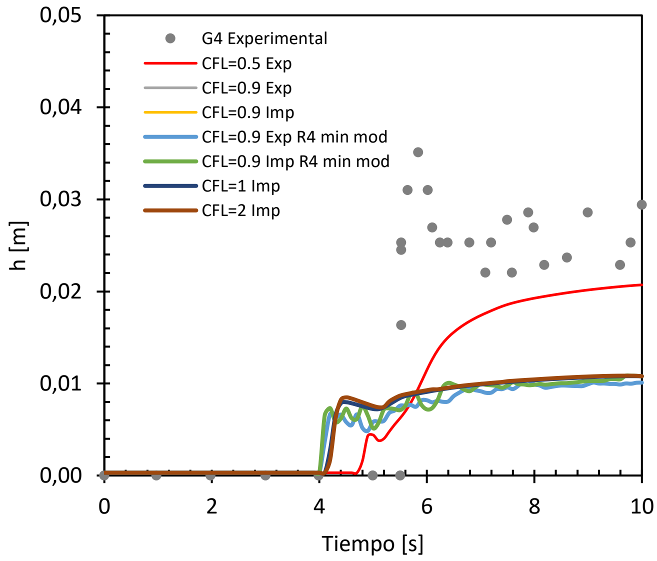
a)


G2 Experimental
CFL=0.5 Exp
CFL=0.9 Exp
CFL=0.9 Imp
CFL=0.9 Exp R4 min mod
CFL=0.9 Imp R4 min mod
CFL=1 Imp
CFL=2 Imp
h [m]
Tiempo [s]
0,00
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30
0
2
4
6
8
10

b)


G3 Experimental
CFL=0.5 Exp
CFL=0.9 Exp
CFL=0.9 Imp
CFL=0.9 Exp R4 min mod
CFL=0.9 Imp R4 min mod
CFL=1 Imp
CFL=2 Imp
h [m]
Tiempo [s]
0,00
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30
0
2
4
6
8
10

c)



d)

Figura 47. Hidrogramas simulados y medidos en los puntos a) G1, b) G2, c) G3 y d) G4 para el problema rotura de presa en un canal de lecho seco con ancho variable.

En la *Figura 47*a se observa el descenso de la presa a medida que avanza el tiempo en el punto G1. En este punto todas las soluciones siguen la misma trayectoria siguen de manera general los datos experimentales. La *Figura 47*b y *Figura 47*c muestran cómo la onda de inundación llega en los tiempos correctos a los puntos de medición G2 y G3 en todos los casos estudiados. No obstante, los dos casos con esquemas TVD implícito y explícito se desvían del resto de soluciones y se alejan de los datos experimentales siendo más notorio el caso implícito. En el punto G2 se exhibe cómo la ola inicialmente moja la zona de medición y posteriormente esta choca con la pared que permite la reducción del canal haciendo que la altura del agua ascienda súbitamente como se muestra en la *Figura 47*b. Allí se observa cómo la onda llega más rápido para los casos con esquema TVD pero las soluciones se alejan de los datos experimentales. En el punto G3, que se encuentra dentro de la reducción del canal, se muestra cómo el frente llega a tiempo e inunda constantemente esta zona en todos los casos, pero para tiempos mayores a 5s las soluciones con esquemas TVD presentan una ligera dispersión y se alejan de los datos experimentales. Finalmente, el punto G4 que se presenta en la *Figura 47*d, el más alejado de la presa, se muestra que únicamente el fluido llega a tiempo cuando el CFL=0.5 y el esquema es explícito; y en los demás casos lo hace anticipadamente. En todos los casos se observan discrepancias con los valores experimentales. Se puede ver cómo las soluciones con esquemas TVD presentan dispersión inmediatamente después de que el fluido alcanza el punto G4.

Cuando se comparan los tiempos de cálculo con CFL=0.9 presentados en la Tabla 13 se observa que los esquemas implícitos requieren más tiempo de cálculo en relación con los explícitos tal y como se esperaba. Si bien la inclusión del esquema TVD no mejoró la solución de este problema se observa cómo el tiempo de cálculo se redujo para el caso explícito pasando de 1946s a 1809s y aumentó para el caso implícito pasando de 2217s a 3175s. Así mismo, en la Tabla 13 se evidencia que el tiempo de cálculo se reduce cuando se utilizan valores de CFL más altos, en este caso mayores a 1, lo cual solo es posible mediante el uso de esquemas implícitos. En este problema el tiempo se redujo de 2217s cuando se utilizó un CFL=0.9 a 994s cuando se utilizó un CFL=2.

Es posible que las discrepancias observadas con respecto a los datos experimentales después de la reducción del canal se puedan atribuir a causas como la suposición de la presión hidrostática en las ecuaciones lo cual puede ser insuficiente para este problema con características altamente tridimensionales. No obstante, es claro que en este problema los esquemas TVD no mejoran la solución y por el contrario aleja las predicciones de los valores experimentales. Por otra parte, se evidenció que es posible reducir significativamente el tiempo de cálculo de este problema utilizando un CFL=2 sin generar grandes diferencias con los resultados excepto en el punto G4 donde se presentó la diferencia más grande. A pesar de estas discrepancias, los resultados evidencian que en este problema es posible reducir el tiempo de cálculo utilizando un esquema de discretización temporal implícita y valores de CFL mayores que uno sin sacrificar precisión en los resultados excepto en el punto G4.

3.4.4 Rotura de Presa en un Canal con un Montículo Triangular

En este problema se considera un canal rectangular de 38m de largo y 0.75m ancho. La compuerta de la presa se localiza a los 15.5m y la altura de esta es de 0.75m y el resto del dominio se asume seco. En el canal se localiza un montículo triangular simétrico 13m abajo de la compuerta como se esquematiza en la *Figura 48*. La rugosidad del suelo es de 0.011. A la salida del canal se considera una condición de frontera abierta. Al igual que en el problema anterior, se llevaron a cabo 7 simulaciones considerando los esquemas de discretización temporal implícito y explícito, 4 valores distintos de CFL (0.5, 0.9, 1 y 2) y dos casos con esquemas TVD min mod y factor R=4. Los casos se presentan en la Tabla 15. Los resultados obtenidos se compararon con los datos experimentales reportados por (Khan y Wencong 2017) en distintos puntos localizados aguas abajo de la compuerta y se presentan en la Tabla 14. Teniendo en cuenta que el problema considera zonas secas estas se marcaron con un valor de h_{min} igual a 0.0001.

Tabla 14.

Coordenadas de los puntos donde se midieron los datos experimentales del problema rotura de presa en un canal con montículo triangular.

	G2	**G4**	**G8**	**G10**	**G11**	**G13**	**G20**
x(m)	17.5	19.5	23.5	25.5	26.5	28.5	35.5
y(m)	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375

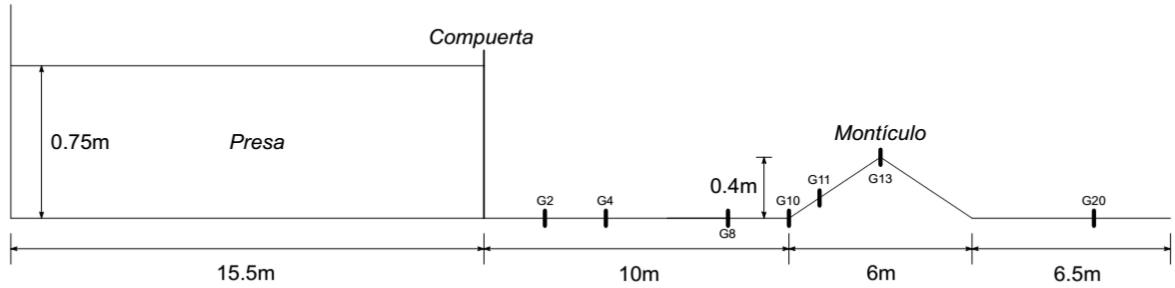


Figura 48. Geometría y esquema del problema rotura de presa en un canal con un montículo triangular.

Los resultados obtenidos se presentan en la *Figura 49, Figura 50, Figura 51* y *Figura 52* y en todas estas se observan resultados consistentes tales como: en todos los puntos de medición la mejor respuesta se obtuvo con los casos explícitos con CFL=0.5, CFL=0.9 y CFL=0.9 con esquema TVD, en estos casos la onda de inundación siempre llegó a tiempo y altura precisa y además las reflexiones de la onda siguen más de cerca los resultados experimentales en todos los puntos de medición. Caso distinto se presenta con los esquemas implícitos donde todos tiene un desfase con respecto a los datos experimentales y las diferencias en las alturas son más pronunciadas cuando el CFL es más alto, lo cual se esperaba debido a la pérdida de información que se sufre al utilizar pasos de tiempo más altos.

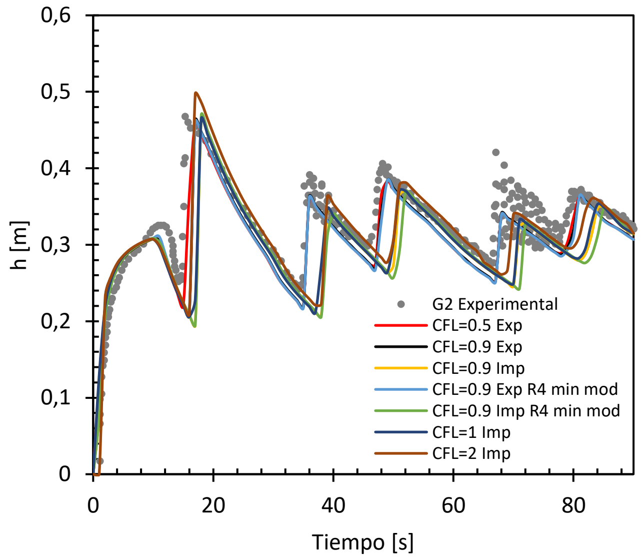
En la Tabla 15 se muestran los tiempos de cálculo de todos los casos estudiados, allí se puede ver como este se reduce a medida que se incrementa el CFL siendo menores aquellos donde se utilizó un CFL=2 para el caso implícito y un CFL=0,9 para el caso explícito. Por otra parte, se observa que el uso de los esquemas TVD incrementa el tiempo de cálculo independientemente de si el esquema de discretización temporal es implícito o explícito. Para el caso explícito con CFL=0.9 el tiempo de cálculo pasó de 209s a 399s con el esquema TVD y para el caso implícito con CFL=0.9 el tiempo pasó de 540s a 698s cuando se utilizó el esquema TVD. De acuerdo con los resultados obtenidos, en este problema el uso de los esquemas TVD incrementa el tiempo de cálculo y no aproxima mejor la solución y por el contrario el desfase que se observa es mayor que cuando no se utilizaron.

Tabla 15.

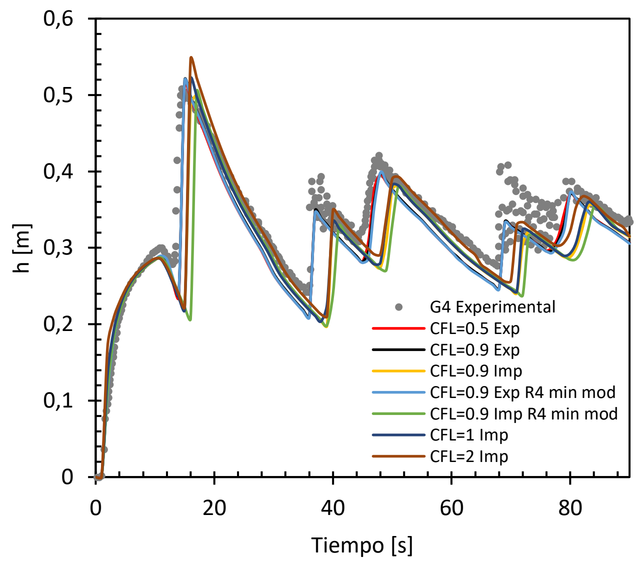
CFL, Esquema, tiempo CPU y esquema TVD utilizados en cada una de las simulaciones del problema rotura de presa en un canal con un montículo triangular.

CFL	Esquema	tiempo CPU [s]	TVD
0.5	Explícito	336	-
0.9	Explícito	209	-
0.9	Implícito	540	-
0.9	Explícito	399	R4 min mod
0.9	Implícito	698	R4 min mod
1	Implícito	449	-
2	Implícito	262	-

Evidentemente la mejor se obtuvo con un esquema explícito y CFL=0.5 como se esperaba dado que el paso de tiempo es menor, sin embargo, se pudo mostrar que los esquemas implementados permiten llevar a cabo el cálculo utilizando CFL más altos sacrificando precisión en el resultado lo cual podría ser útil como una primera aproximación en casos donde se requiera obtener datos de manera expresa.

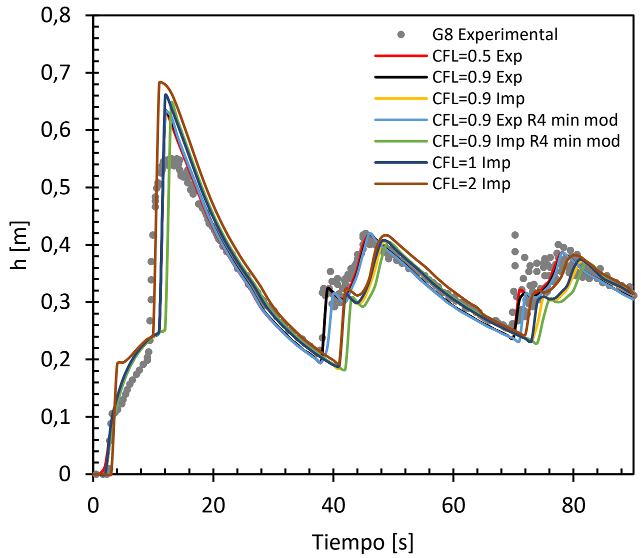


a)

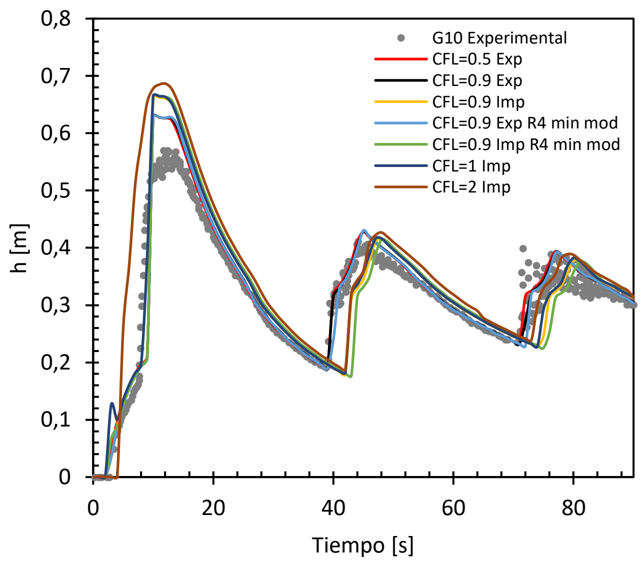


b)

Figura 49. Hidrogramas simulados y medidos en los puntos a) G2 y b) G4 para el problema rotura de presa en un canal con montículo triangular.

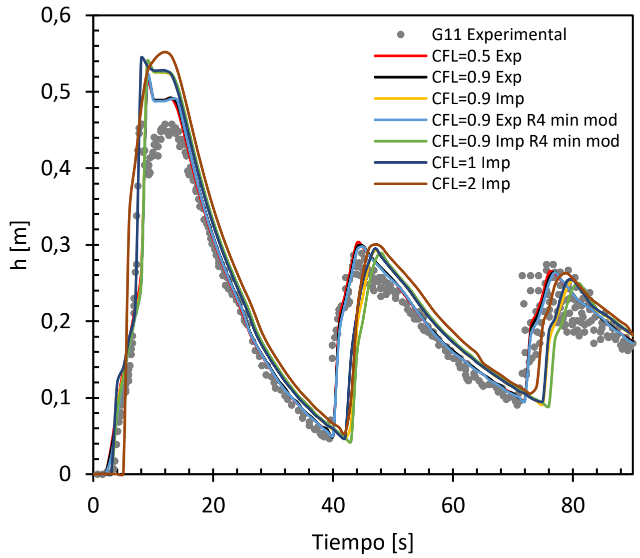


a)

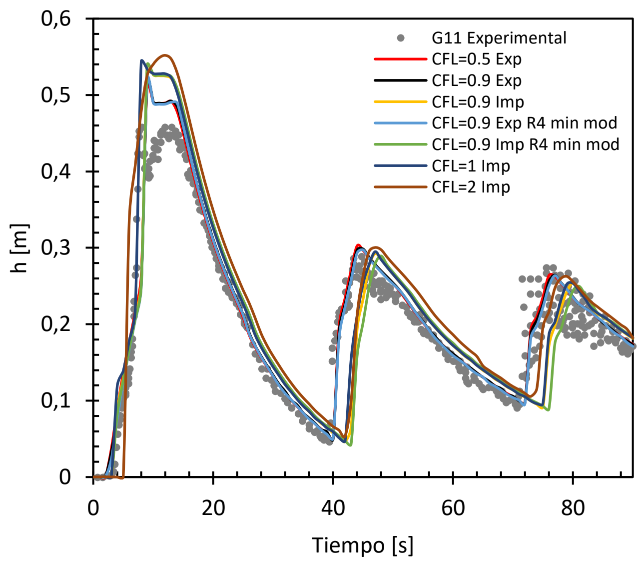


b)

Figura 50. Hidrogramas simulados y medidos en los puntos a) G8 y b) G10 para el problema rotura de presa en un canal con montículo triangular.



a)



b)

Figura 51. Hidrogramas simulados y medidos en los puntos a) G11 y b) G13 para el problema rotura de presa en un canal con montículo triangular.

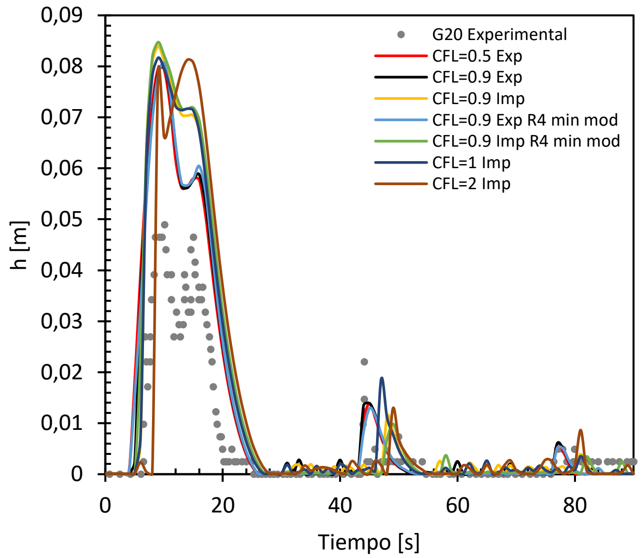


Figura 52. Hidrogramas simulados y medidos en el punto G20 para el problema rotura de presa en un canal con montículo triangular.

3.4.5 Caso de una Ola de Tsunami en el Valle de Monai

Este caso de estudio fue presentado y descrito en el capítulo anterior. La topografía y la condición de frontera se pueden ver en la *Figura 32* y *Figura 33* respectivamente. En este capítulo se llevaron a cabo 7 simulaciones considerando los esquemas de discretización temporal implícito y explícito, 4 valores distintos de CFL (0.5, 1, 2 y 3) y dos casos con esquemas TVD min mod y factor R=4. Todos los casos se resumen en la Tabla 16. Los resultados obtenidos se compararon con los datos experimentales reportados por (Liu *et al.*, 2008) los cuales fueron medidos en las coordenadas CH5 = (4.52, 1.196), CH7 = (4.52, 1.696) y CH9 = (4.52, 2.196) y se presentan en la *Figura 53*. Teniendo en cuenta que el problema considera zonas secas estas se marcaron con un valor de h_{min} igual a 0.0001.

Tabla 16.

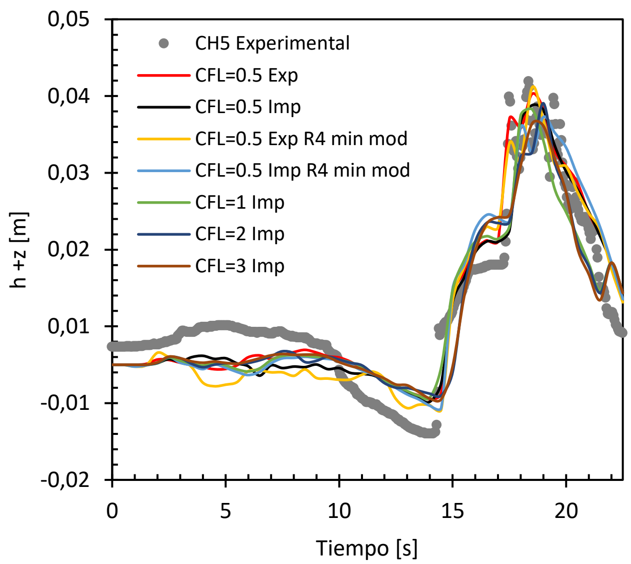
CFL, Esquema, tiempo CPU y esquema TVD utilizados en cada una de las simulaciones del problema caso de una ola de tsunami en el Valle de Monai.

CFL	Esquema	tiempo CPU [s]	TVD
0.5	Explícito	1320	-
0.5	Implícito	3195	-
0.5	Explícito	2134	R4 min mod
0.5	Implícito	4286	R4 min mod
1	Implícito	1473	-
2	Implícito	966	-
3	Implícito	752	

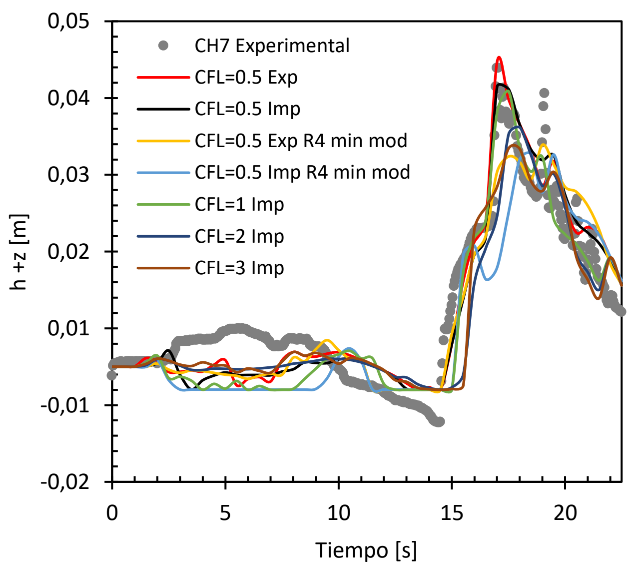
En la *Figura 53* se observa cómo en los tres puntos de medición la mejor aproximación se obtuvo cuando se utilizó el esquema explícito y un CFL=0.5. El caso implícito con CFL=0.5 no alcanza los mismos valores máximos del caso explícito en los tres puntos a pesar de usar el mismo valor de CFL que en el caso explícito. Si se observan los casos donde se incluyen los esquemas TVD se tiene que estos restan precisión en comparación con los casos explícito e implícito sin TVD, retrasando la solución y alejándose de los valores máximos experimentales. Los casos implícitos con CFL iguales o mayores que 1 muestran resultados más apartados de los datos experimentales y estos se hacen más alejados conforme aumenta el CFL tal y como se esperaba puesto que el paso de tiempo se aumenta y en consecuencia estos saltos de tiempo altos hacen que se pierda información de la verdadera solución.

En la Tabla 16 se presentan los tiempos de cálculo de todos los casos estudiados, allí se observa como este se reduce a medida que se incrementa el CFL que para el caso implícito fue de 3195s con CFL=0.5 y 752s cuando el CFL=3. También se puede ver como el uso de los esquemas TVD incrementa el tiempo de cálculo independientemente de si el esquema de discretización temporal es implícito o explícito. Para el caso explícito con CFL=0.5 el tiempo de cálculo pasó de

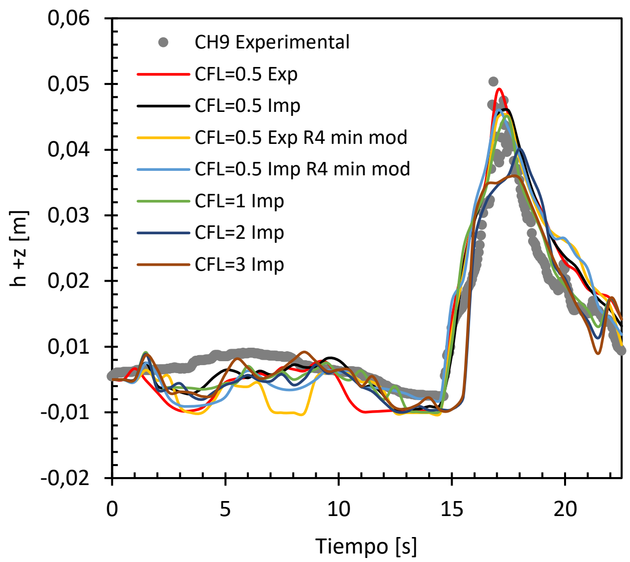
1320s a 2134s con el esquema TVD y para el caso implícito con CFL=0.5 el tiempo pasó de 3195s a 4286s cuando se utilizó el esquema TVD. De acuerdo con los resultados obtenidos, en este problema, el uso de los esquemas TVD incrementa el tiempo de cálculo y no aproxima mejor la solución, por el contrario, el desfase con respecto a la solución explícita y CFL=0.5 es mayor que cuando estos no se utilizaron.



a)



b)



c)

Figura 53. Hidrogramas simulados y medidos en los puntos a) CH5, b) CH7 y c) CH9.

3.5 Conclusiones

El problema de rotura de presa mostró que las soluciones con esquemas TVD acercaron las predicciones de flujo a la solución analítica solamente en ciertas zonas del dominio (especialmente en la parte alta de la presa) comparadas con los resultados obtenidos sin esquemas TVD cuando se utilizó la discretización temporal explícita. No obstante, en todos los casos se evidenció que dichas soluciones son dispersivas en la parte baja de la presa cuando el fondo estaba seco y en la región donde ocurre la rotura de la presa cuando el fondo está mojado. Por otra parte, cuando se utilizaron los esquemas de discretización temporal implícito y CN no se obtuvo ninguna mejora con respecto a la solución sin esquema TVD. Por otra parte, se mostró que en los casos con distintos regímenes de flujo estudiados fue posible reducir el tiempo de cálculo en todos los casos mediante el uso de valores de CFL más altos a través del uso del esquema de discretización temporal implícito sacrificando muy poca precisión en los resultados obtenidos.

También se encontró que en los problemas que incluyeron datos experimentales las mejores soluciones se obtuvieron cuando se utilizaron valores de CFL más pequeños y esquemas explícitos tal y como se esperaba, debido a que el paso de tiempo se limita y con este, cualquier pérdida de información de la solución. Sin embargo, se puede ver que los esquemas implementados permiten llevar a cabo el cálculo utilizando valores de CFL más altos sacrificando precisión en el resultado lo cual podría ser útil como una primera aproximación en casos donde se requiera obtener datos de manera expresa. Es importante remarcar que la misma naturaleza hiperbólica del problema hace que los mejores resultados se obtengan utilizando esquemas explícitos, no obstante, en este trabajo se lograron implementar adecuadamente los esquemas de discretización temporal implícito y Crank-Nikolson así como los esquemas TVD con las funciones limitadoras de van Albada, min mod, SUPERBEE, Sweby, QUICK, UMIST y MUSCL; y además, se incluyeron 7 formas distintas de evaluar el factor R para estos esquemas.

4. Solución Desacoplada del Transporte de Sedimento y las Ecuaciones de Aguas Someras en 2D Usando el Método de los Volúmenes Finitos

4.1 Introducción

En este capítulo se resuelve el conjunto de ecuaciones que describen el transporte de sedimento y el campo de flujo mediante el enfoque desacoplado utilizando distintas fórmulas de descarga para aproximar la descarga sólida del sedimento. El campo de flujo se calculó mediante la solución de las ecuaciones de aguas someras las cuales se discretizaron mediante el método de los volúmenes finitos, el método de Godunov y el solucionador de Riemann de Roe. Y el transporte de sedimento se modeló a través de la ecuación de Exner la cual se discretizó mediante el esquema de Roe y se utilizó el método de los volúmenes finitos. Además, se utilizó el mismo algoritmo descrito en el capítulo 2 para garantizar el balance de masa en todo el dominio para el agua y para el sedimento en todos los pasos de tiempo.

4.2 Modelo Numérico y Métodos

El modelo implementado en este trabajo contempla la solución desacoplada de las ecuaciones de aguas someras junto con la ecuación de Exner despreciando los términos de suspensión. Las ecuaciones de aguas someras conforman un sistema de ecuaciones no lineal hiperbólico que puede escribirse de forma conservativa como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \tag{100}$$

Donde $\mathbf{U}$ es el vector de variables conservativas, $\mathbf{C}(\mathbf{U})$ y $\mathbf{D}(\mathbf{U})$ son los vectores de flux y $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ es el vector de términos fuente; los cuales se definen así:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}; \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \\ huv \end{bmatrix}; \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2} gh^2 \end{bmatrix} \tag{101}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix}$$

$h(x, y, t)$ representa la altura del fluido, $u(x, y, t)$ es la velocidad promediada en la profundidad en la dirección x y $v(x, y, t)$ es la velocidad promediada en la coordenada y; mientras que g es la aceleración gravitacional. Las pendientes del fondo en las direcciones x y y están dadas por:

$$S_{0x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, \qquad S_{0y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y} \tag{102}$$

Donde $z_b(x, y, t)$ es la elevación del lecho de sedimento. En la *Figura 54* se presenta un esquema con todas las variables del sistema de ecuaciones.

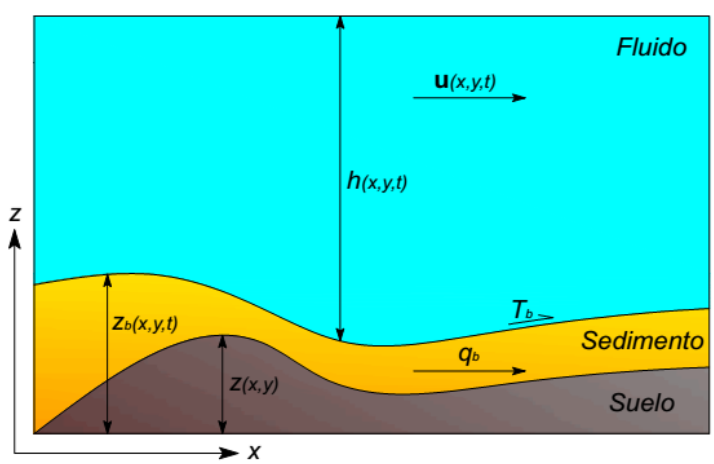


Figura 54. Esquema de variables del sistema de ecuaciones.

Se observa que, debido al movimiento del sedimento, la altura de este es función del tiempo y representa el espesor de la capa de sedimento sobre el lecho. También se incluyen los términos de fricción asociados a la ley de resistencia de Manning:

$$S_{fx} = \frac{n^2 u\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}}, \qquad S_{fy} = \frac{n^2 v\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}} \tag{103}$$

En los cuales n denota el coeficiente de fricción de Manning. El movimiento del sedimento se describe mediante la ecuación de Exner y está dada por:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \xi\frac{\partial q_x}{\partial x} + \xi\frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \tag{104}$$

Donde $\xi = \frac{1}{1-p}$ y p es la porosidad del sedimento. $q_x(u,v,h)$ y $q_y(u,v,h)$ son las descargas volumétricas de sedimento en la dirección x y y respectivamente. Como se observa en la ecuación (104) q_x y q_y no son funciones directas de z_b y por tal motivo existen diversas formulaciones para describir esta descarga q_b basadas en leyes determinísticas o en métodos probabilísticos los cuales se soportan en trabajos experimentales. En este trabajo se utilizó formulación de Grass para representar la descarga sólida la cual ha sido bien utilizada para modelar sólidos granulares no cohesivos y puede escribirse como:

$$\|\mathbf{q}_b\| = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = A_g\|\mathbf{u}\|^3 \tag{105}$$

Donde:

$$q_x = A_g u(u^2+v^2) \quad q_y = A_g u(u^2+v^2) \tag{106}$$

A_g es el parámetro que describe la interacción entre el sedimento y el fluido y que varía entre 0 y 1. La característica principal de este modelo es que el sedimento siempre se mueve con el movimiento del agua y por lo tanto el parámetro A_g debe calibrarse, además, no tiene en cuenta ningún efecto asociado al tamaño del grano ni viscosidades cinemáticas de este. Sin embargo, existen formulaciones empíricas que permiten aproximar dicha interacción y que se basan en el esfuerzo que el fluido ejerce sobre el lecho y por lo tanto el movimiento del sedimento se da una vez se alcanza un esfuerzo crítico θ_c. Juez *et al.* (2014) propusieron una manera de expresar estas otras formulaciones como casos particulares del modelo de Grass y de esta manera aproximar el parámetro A_g para cada caso particular.

Con el fin de realizar dicha deducción se parte del esfuerzo sobre el lecho es su forma adimensional, θ, conocido como parámetro de Shields el cual se define como la razón entre las fuerzas de arrastre y el peso del sedimento sumergido y se utiliza para determinar el inicio del movimiento del sedimento:

$$\theta = \frac{\|T_b\|}{g(\rho_s - \rho)d_s} \tag{107}$$

Donde ρ_s es la densidad del sedimento, ρ la densidad del agua, d_s el diámetro medio del sedimento y $\|T_b\|$ es la magnitud del esfuerzo sobre el lecho:

$$\|T_b\| = \sqrt{\tau_{bx}^2 + \tau_{by}^2} = \sqrt{\left(\rho g h S_{fx}\right)^2 + \left(\rho g h S_{fy}\right)^2} \tag{108}$$

Si se incluyen las ecuaciones (103) y (108) en la ecuación (107) se obtiene la expresión definitiva del parámetro de Shields en función del término de fricción así:

$$\theta = \frac{n^2}{h^{1/3}(\rho_s - \rho)d_s}\|\mathbf{u}\|^2 \tag{109}$$

Ahora, la carga de sedimento usualmente se representa como una función θ y θ_c mediante el parámetro adimensional Φ el cual está definido para cada modelo como se presenta en la Tabla 17 y que se define de manera general como:

$$\Phi = \frac{\|\mathbf{q}_b\|}{\sqrt{g\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right)d_s^3}} \tag{110}$$

Entonces, combinando las ecuaciones (105) (109) y (110) se puede obtener una expresión general para el transporte de sedimento así:

$$\|\mathbf{q}_b\| = K_0 K_1 (u^2 + v^2)^{3/2} = \tilde{A}_g \|\mathbf{u}\|^3 \tag{111}$$

Por lo tanto, la descarga de sedimento se puede expresar como el producto de un factor de interacción sedimento-fluido, $\tilde{A}_g$, y la velocidad del fluido así:

$$\mathbf{q}_b = \tilde{A}_g (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \|\mathbf{u}\|^2 \tag{112}$$

Donde $\tilde{A}_g = K_0 K_1$, $K_0 = \frac{g^{1/2} n^3}{\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right) h^{1/2}}$ y K_1 varía de acuerdo con las diferentes fórmulas que existen para la descarga de sedimento los cuales se resumen en la Tabla 17 y además se incluyen los intervalos de aplicación para el diámetro del sedimento D y la pendiente del canal.

Tabla 17.

Coeficientes de las fórmulas empíricas para la descarga de sedimento expresadas como el modelo de Grass.

				Intervalos de aplicación	
Modelo	$\boldsymbol{\Phi}$	$\boldsymbol{K_1}$	$\boldsymbol{\theta_c}$	$\boldsymbol{D}$**[mm]**	**Pendiente [%]**
MPM (Meyer-Peter y Müller, 1948)	$8(\theta-\theta_c)^{3/2}$	$8(1-\theta_c/\theta)^{3/2}$	0.0470	0.4-29	0.04-2
Engelund (Engelund y Fredsee, 1976)	$18.74(\theta-\theta_c)\left(\sqrt{\theta}-0.7\sqrt{\theta_c}\right)$	$18.74(1-\theta_c/\theta)\left(1-0.7\sqrt{\theta_c/\theta}\right)$	0.0500	0.19-0.93	<1.9
Nielsen (Nielsen, 1992)	$12\theta^{1/2}(\theta-\theta_c)$	$12(1-\theta_c/\theta)$	0.0470	0.69-28.7	1.25-4.22
Wong (Wong y Parker, 2006)	$3.97(\theta-\theta_c)^{3/2}$	$3.97(1-\theta_c/\theta)^{3/2}$	0.0495	0.4-29	0.04-2
Smart (Smart, 1984)	$4(d_{90}/d_{30})^{0.2}S^{0.6}C\theta^{1/2}(\theta-\theta_c)$	$4(d_{90}/d_{30})^{0.2}S^{0.6}C\theta^{1/2}(1-\theta_c/\theta)$	0.0470	0.4-29	0.04-20

En la Tabla 17 se puede ver que el modelo Smart incluye los parámetros S y C, los cuales representan la pendiente del canal y un factor de resistencia al flujo que se calcula como $C = \|u\|/(ghS)^{0.5}$ respectivamente. Generalmente cuando se utiliza el modelo Smart para realizar modelamientos se suele aproximar a través de la pendiente de fricción con el fin de evitar problemas numéricos cuando se tienen pendientes iguales a cero. Sin embargo, en este trabajo este modelo solo fue utilizado en combinación con los demás, es decir, todas las pendientes se calcularon localmente y cuando estas se encontraron en el intervalo de aplicación del modelo este fue calculado, en los demás casos, se utilizaron las demás fórmulas.

4.2.1 Discretización de las Ecuaciones Hidrodinámicas

Las ecuaciones se discretizaron mediante el método de los volúmenes finitos y se utilizó el método de Godunov junto con el solucionador de Riemann de Roe para resolver las ecuaciones de las aguas someras y para la ecuación de Exner se utilizó el esquema de Roe. Teniendo en cuenta que este trabajo se enfoca en el transporte de sedimento, la discretización de la parte hidrodinámica únicamente se resume y se detalla lo correspondiente a la ecuación de transporte de sedimento. La discretización general de la Ec. (8) está dada por:

$$\mathbf{U_i^{\boldsymbol{n}+1}} = \mathbf{U_i^{\boldsymbol{n}}} - \frac{\Delta t}{\Omega_i}\left(\sum_{l=1}^{3}\left(\mathbf{F}_{b_i}\cdot\mathbf{n}_i\right) + \mathbf{S}_{\mathbf{z}_{b_i}}\right)_{P,E} + \frac{\Delta t}{\Omega_i}\mathbf{S}_{\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{i}}} \tag{113}$$

donde el flux numérico a través de la cara $\mathbf{F}_{b_i}\cdot\mathbf{n}_i$ se expresa como:

$$\mathbf{F}_{b_i}\cdot\mathbf{n}_i = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_P + \mathbf{F}_{E_i}\right)\mathbf{n}_i - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{3}\tilde{\alpha}_n\varphi_n\tilde{\mathbf{e}}_n\right)_{P,E} \tag{114}$$

Donde $\tilde{\alpha}_n$ y $\tilde{\mathbf{e}}_n$ son los eigenvalores y eigenvectores del sistema. El término fuente asociado a la pendiente del suelo se expresa como:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{z}_{b_i}} = \frac{1}{2} a_{b_i} \left(\sum_{n=1}^{3} \tilde{\beta}_n (1 - \text{signo}(\check{\lambda}_n)\, \tilde{\mathbf{e}}_n \right)_{P,E} \tag{115}$$

4.2.2 Discretización de la Ecuación de Exner

En este trabajo se considera la aproximación estable, en la cual se asume que el flujo del agua es estable y que los cambios que sufre el lecho tienen un efecto despreciable sobre este. Es decir, la velocidad de onda de la ecuación del lecho es considerablemente menor en magnitud que las velocidades de onda del flujo de agua. De esta manera el sistema se puede desacoplar mediante iteraciones internas del campo de flujo hasta un estado de equilibrio seguido de la actualización del lecho. Por lo tanto, la ecuación de Exner se puede desacoplar y discretizarse individualmente mediante el esquema de Roe. La ecuación (104) se puede expresar de manera simplificada como:

$$\frac{\partial z_b}{\partial \mathrm{t}} + \xi \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \tag{116}$$

Integrando la Ec. (116) sobre un dominio de volumen Ω:

$$\int \frac{\partial z_b}{\partial \mathrm{t}} d\Omega + \xi \int \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega = 0 \tag{117}$$

Y aplicando el teorema de Gauss sobre el segundo término de la ecuación (117) se obtiene:

$$\int \frac{\partial z_b}{\partial \mathrm{t}} d\Omega + \xi \oint \nabla \cdot \mathbf{q} d\vec{\mathbf{S}} = 0 \tag{118}$$

Donde $\vec{\mathbf{S}}$ es la superficie del volumen Ω y $\mathbf{n}$ es el vector normal a dicha superficie. La ecuación (118) se puede discretizar mediante el método de los volúmenes finitos dividiendo el dominio de estudio en múltiples volúmenes de control Ω_i. Considerando un volumen de control con b_i caras, de área superficial a_i cada una las cuales tienen un vector normal $\mathbf{n}_i$ la ecuación (118) se puede expresar como:

$$\frac{z_{b_i}^{n+1} - z_{b_i}^{n}}{\Delta t} * \Omega_i + \xi \sum_{i=1}^{b_i} \left(q_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right) a_i = 0 \tag{119}$$

Donde q_{b_i} es el flux numérico evaluado sobre la cara b_i del volumen de control y que utilizando el esquema de Roe se puede expresar como:

$$q_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i = \xi \frac{1}{2}\left(q_P + q_{E_i}\right)\mathbf{n}_i - \frac{1}{2}\left|\lambda_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right| \left(z_{b_{E_i}} - z_{b_P}\right) \tag{120}$$

q_P y q_{E_i} son las descargas sólidas de sedimento evaluadas en el elemento P y los elementos vecinos E_i, y de igual manera las elevaciones del sedimento $z_{b_{E_i}}$ y z_{b_P}. λ_{b_i} es el eigenvalor o velocidad de onda de la ecuación (104) el cual se puede calcular como:

$$\lambda_{b_i} = \xi \left[\frac{\partial q_b}{\partial z_b}\right]_{b_i} \tag{121}$$

Como se observa en la ecuación (121), λ_{b_i} solo puede calcularse cuando la carga de sedimento q es una función directa de z_b, no obstante, no es posible ya que todas las fórmulas son función de las propiedades físicas del sedimento y de velocidad y la profundidad del fluido. Por tal motivo se han propuesto diversas alternativas que permiten aproximar esta velocidad de onda, una de ellas fue la que propusieron (Chesher *et al*., 1993). Esta aproximación considera que la altura del fluido es considerablemente mayor que la altura del lecho y en consecuencia se puede suponer que la elevación del fluido es constante $h + z_b \approx D$ y además como $Q \approx hu$ entonces la velocidad u se puede escribir en términos de z_b así:

$$u = \frac{Q}{h} \approx Q(D - z_b)^{-1} \tag{122}$$

De esta manera la descarga de sedimento se puede expresar como una función de z_b:

$$\mathbf{q}_b = \tilde{A}_g(\mathbf{u} * \mathbf{n})\|\mathbf{u}\|^2 = A|\mathbf{u}|^m \approx AQ^m(D - z_b)^{-m} \tag{123}$$

La descarga de sedimento se puede derivar con respecto a z_b:

$$\frac{\partial q}{\partial z_b} \approx AmQ^m(D - z_b)^{-m-1}$$

Finalmente simplificando términos se puede obtener una expresión que permite calcular la velocidad de onda para la ecuación del transporte de sedimento:

$$\lambda = \xi \frac{Am}{h} u^m \tag{124}$$

Según la formulación de Grass general la velocidad de onda se puede expresar como:

$$\lambda = \xi \frac{Am}{h} (\mathbf{u} * \mathbf{n})\|\mathbf{u}\|^2 \tag{125}$$

En síntesis, la discretización de la ecuación para el transporte de sedimento se puede expresar como:

$$z_{b_i}^{n+1} = z_{b_i}^{n} - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{i=1}^{b_i} \left(q_{b_i} \cdot \mathbf{n}_i\right) a_i \tag{126}$$

Teniendo en cuenta que en este trabajo se resuelve el transporte de sedimento de manera desacoplada siguiendo la aproximación estable, se debe fijar una tolerancia en la cual el flujo de agua alcance el estado de equilibrio antes de actualizar la elevación del sedimento. Numéricamente un estado de equilibrio se obtiene cuando:

$$\left|\mathbf{w}_\mathbf{i}^{\boldsymbol{n+1}} - \mathbf{w}_\mathbf{i}^{\boldsymbol{n}}\right| \leq tol \qquad \forall i \tag{127}$$

Donde tol corresponde a un nivel de tolerancia deseado, en este trabajo el valor de tolerancia fijado fue de $1\text{x}10^{-9}$.

4.2.3 Condiciones de Frontera

El régimen de flujo que se obtenga al interior del dominio de estudio dependerá de las condiciones de frontera que se fijen. Todas las condiciones de frontera se imponen como función de h, y las velocidades u y v para lo cual se tiene en cuenta que u_n y u_t son las componentes de la velocidad en la dirección normal y transversal a la cara de la celda de frontera.

$$\begin{aligned} u &= u_n n_n - u_t n_t = u_x n_x \\ v &= u_t n_n + u_n n_t = v_y n_y \end{aligned} \tag{128}$$

Cuando las fronteras son paredes sólidas que bloquean por completo el flujo, se considera la velocidad normal al contorno igual a cero $u_n = 0$ y se permite únicamente la velocidad tangencial. En el caso de la altura, esta se fija en el contorno igual al del centroide de la celda $h_C = h_P$.

Dependiendo de si la salida o la entrada presentan condiciones de régimen lento o rápido será preciso utilizar la ecuación de compatibilidad entre los puntos entrada o salida y los puntos interiores del dominio correspondiente a la línea bicaracterística entre estos. Esta ecuación se define como:

$$(u_n + 2c)_C = (u_n + 2c)_P \tag{129}$$

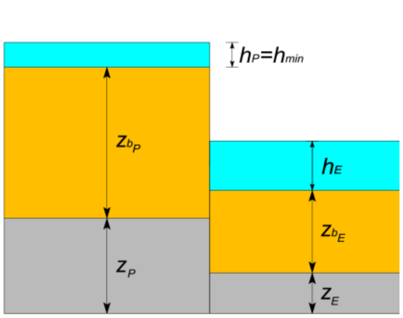
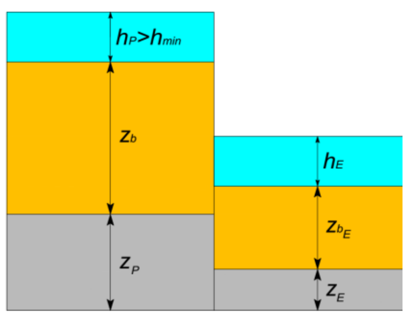
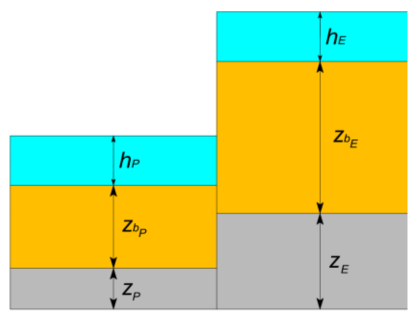
El subíndice C indica el punto sobre el contorno del dominio, mientras que P, hace referencia al punto exterior en caso de una entrada o interior en caso de una salida; mientras que c es la velocidad de la onda, es decir, $c = \sqrt{gh}$.

4.2.4 Manejo del Frente Seco-Mojado

En casos cuando se consideran aplicaciones sobre lechos secos o que se secan y se mojan en el tiempo, es fundamental la identificación y el manejo de estas interfaces con el fin de evitar la aparición de áreas con alturas negativas o permitir o restringir el avance del fluido dentro del dominio de estudio dependiendo de las condiciones del terreno y de los niveles de agua en cada instante. El avance del flujo se verifica en cada instante de tiempo, en cada cara del volumen de control, y este depende de los niveles de altura del agua y del suelo del elemento P y su vecino E como se esquematiza en la Tabla 18.

Tabla 18.

Configuraciones de flujo y frontera interna para el frente seco-mojado.

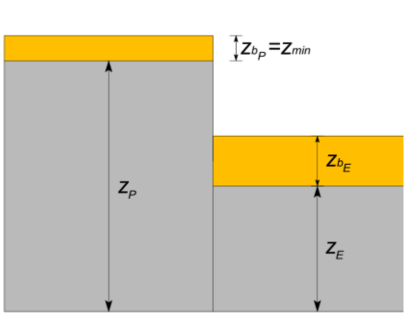
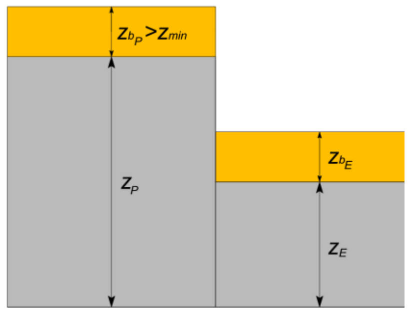
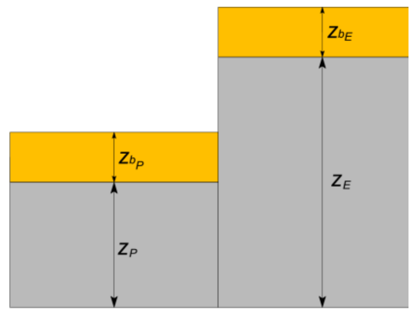
Elevación del fluido mayor que la del vecino $\boldsymbol{h_P + z_{b_P} + z_P > h_E + z_{b_E} + z_E}$		Elevación del fluido menor que la del vecino $\boldsymbol{h_P + z_{b_P} + z_P < h_E + z_{b_E} + z_E}$
Frontera interna	**Condición de flujo**	**Frontera interna reflexiva**
$\boldsymbol{h_P = h_{min}}$	$h_P > h_{min}$	$z_{b_P} + z_P < z_{b_E} + z_E$
 a)	 b)	 c)
Como $\boldsymbol{h_P = h_{min}}$ no puede fluir liquido de la celda P a la del vecino, por lo tanto, se considera una frontera interna.	Como $h_P > h_{min}$ hay líquido disponible para seguir a la siguiente celda.	Como $h_P + z_{b_P} + z_P < h_E + z_{b_E} + z_E$ y $z_{b_P} + z_P < z_{b_E} + + z_E$ el fluido no puede escalar a la siguiente celda y por lo tanto no fluye.

De acuerdo con el tratamiento de película delgada, a todas las celdas que se consideran secas se les impone un pequeño valor de altura mínimo igual a $h_{min}=1x10^{-5}$ con el fin de evitar divisiones por cero en cada uno de los cálculos del flux numérico. El avance del frente está dado por el cálculo del flux en cada una de las caras del volumen de control y este depende de cómo se trate dicha cara. Siempre que $h_P + z_{b_P} + z_P > h_E + z_{b_E} + z_E$ y que $h_P > h_{min}$ se permitirá el avance del frente, no obstante, si $h_P = h_{min}$ la cara se considera como una frontera interna reflexiva dentro del dominio. En caso de que $h_P + z_{b_P} + z_P < h_E + z_{b_E} + z_E$ y que $z_{b_P} + z_P < z_{b_E} + z_E$ también se impone la frontera reflexiva. Para el caso cuando $h_P + z_{b_P} + z_P = h_E + z_{b_E} + z_E$ se permite el avance del frente.

La evolución morfológica del lecho se trató de manera semejante al fluido, adaptando la aproximación de película delgada al sedimento. Al igual que con el fluido, es vital identificar y manejar la interface entre el sedimento y el lecho no erosionable y de esta manera permitir o restringir el avance del sedimento dentro del dominio de estudio. Es importante recordar que el sedimento se moverá junto con el fluido o cuando se alcanza un esfuerzo crítico sobre el lecho que permite que el sedimento se desplace. El avance del sedimento se verifica en cada instante de tiempo y en cada cara del volumen de control inmediatamente después de resolver la hidrodinámica en el mismo paso de tiempo. El desplazamiento del sedimento dependerá de la elevación de este y de la elevación del suelo no removible del elemento P y su vecino E como se esquematiza en la Tabla 19.

Tabla 19.

Configuraciones de avance y frontera interna para el frente de sedimento.

Elevación del sedimento mayor que la del vecino $\boldsymbol{z_{b_P} + z_P > z_{b_E} + z_E}$		Elevación del sedimento menor que la del vecino $\boldsymbol{z_{b_P} + z_P < z_{b_E} + z_E}$
Frontera interna	**Condición de avance**	**Frontera interna**
$\boldsymbol{z_{b\,P} = z_{b\,min}}$	$z_{b\,P} > z_{b\,min}$	$z_{b\,P} + z_P < z_E$
		
a)	b)	c)
Como $\boldsymbol{z_{b\,P} = z_{b\,min}}$ se entiende que no hay sedimento que pueda ser removido, por lo tanto, se asume una frontera interna.	Como $z_{b\,P} > z_{b\,min}$ hay sedimento disponible para remover y desplazar hacia la celda vecina.	Como $z_{b_P} + z_P < z_{b_E} + z_E$ y $z_{b\,P} + z_P < z_E$ el sedimento no puede avanzar a la siguiente celda y por lo tanto se acumula en dicha celda.

Al igual que con el fluido, las celdas que no contienen sedimento se les impone un valor mínimo de elevación igual a $z_{b_{min}} = 1\text{x}10^{-5}$ con el fin de evitar la aparición de zonas con elevaciones de sedimento negativas. El sedimento se desplaza cuando $z_{b_P} + z_P > z_{b_E} + z_E$ y que $z_{b\,P} = z_{b\,min}$, no obstante, si $z_{b\,P} > z_{b\,min}$ la cara se considera como una frontera interna dentro del dominio y el sedimento se acumula dentro de la celda. En caso de que $z_{b_P} + z_P < z_{b_E} + z_E$ y que $z_{b\,P} + z_P < z_E$ también se impone la frontera interna. Para el caso cuando $z_{b_P} + z_P = z_{b_E} + z_E$ se permite el avance del sedimento.

4.2.5 Compensación Desbalance de Masa

Cuando en la solución numérica se obtienen elementos con valores de altura de fluido o de sedimento negativos estos se deben "corregir" y fijar con el valor de h_{min} y los valores de hu y hv como cero para el caso del fluido y $z_{b_{min}}$ para el caso del sedimento. Sin embargo, realizar dicho cambio genera una alteración en los balances de masa del sistema debido a que estos ajustes introducen masa en el sistema. En este trabajo se propone compensar dicha alteración mediante la distribución de dicho desbalance en las celdas que cambian de altura de fluido y/o sedimento en el tiempo anterior conservando en todo momento el balance de masa.

A continuación, se describe el ajuste del balance de masa para el fluido. Las alturas de agua "corregidas" en cada celda dh_{min} se calculan como:

$$dh_{min} = (h - h_{min}) \tag{130}$$

Y el volumen total a compensar es:

$$dh_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{nne} \left| dh_{\text{min }i} \right| * Area_i \tag{131}$$

Como la compensación se realiza únicamente con los elementos que cambiaron de altura en el paso de tiempo actual, se calculan los incrementos Δh_{pos} y disminuciones Δh_{neg} totales así:

$$\Delta h_i = h_i^i - h_i^{i-1} \tag{132}$$

$$\begin{aligned} si\ \Delta h_i > 0\ \ \Delta h_{pos} &= \sum_{i=1}^{nne} |\Delta h_i| * Area_i \\ si\ \Delta h_i < 0\ \ \Delta h_{neg} &= \sum_{i=1}^{nne} |\Delta h_i| * Area_i \end{aligned} \tag{133}$$

Adicionalmente, se define un factor que establece la proporción de volumen aumentado respecto a las variaciones totales del paso de tiempo actual:

$$f = \frac{\Delta h_{pos}}{\Delta h_{pos} + \Delta h_{neg}} \tag{134}$$

Seguidamente se verifica cuánto debe ser el ajuste en cada celda dependiendo de si esta aumenta o disminuye su volumen respecto al tiempo anterior. Si aumenta $\Delta h_i > 0$ entonces dh_i se calcula como:

$$si\ \Delta h_i > 0\ \ dh_i = \Delta h_i * \left[1 + (f)\frac{dh_{TOTAL}}{\Delta h_{pos}}\right] \tag{135}$$

Pero si disminuye ($\Delta h_i < 0$), dh_i se calcula como:

$$si\ \Delta h_i > 0\ \ dh_i = \Delta h_i * \left[1 + (1 - f)\frac{dh_{TOTAL}}{\Delta h_{neg}}\right] \tag{136}$$

Y en cualquier caso el nuevo h_i^i se calcula como:

$$h_i^i = h_i^{i-1} + dh_i \tag{137}$$

El mismo procedimiento descrito anteriormente fue aplicado para la elevación del sedimento con el fin de garantizar el balance de masa de este. Para ello únicamente se cambió la altura del fluido h por la elevación del sedimento z_b.

4.3 Resultados

A continuación, se presentan los resultados que permitieron validar el método de solución descrito anteriormente. Todos los resultados obtenidos se comparan con mediciones experimentales reportadas por otros autores teniendo en cuenta que ningún problema presenta solución analítica.

4.3.1 Rotura de Presa en un Canal con Suelo Móvil

Estos experimentos fueron llevados a cabo por (Spinewine y Zech, 2007) y permiten observar la propagación de las ondas provenientes de roturas de presas sobre distintas configuraciones de lechos granulares. La onda de inundación genera un esfuerzo intenso sobre el lecho de sedimento provocando la erosión de este y su movimiento junto al del fluido. Las dimensiones del canal utilizado fueron de 6m de largo por 0.25m de ancho y la compuerta de la presa se localizó a los 3m. El sedimento utilizado como lecho del canal fue arena gruesa uniforme con las siguientes características: diámetro medio $d_{50} = 1.82mm$, densidad $\rho_s = 2683kg\ m^{-3}$, porosidad $p = 0.47$ y coeficiente de Manning $n = 0.0165s\ m^{-1/3}$.

Las alturas aguas arriba (h_L) y aguas abajo (h_R) de la compuerta, así como la altura del sedimento (z) se configuraron de distintas maneras, sin embargo, en este trabajo solamente se simulan y comparan dos configuraciones con el fin de evaluar el comportamiento de la onda de inundación cuando esta se propaga sobre un lecho seco y otro mojado y estas se presentan en la Tabla 20 y se esquematizan en la *Figura 55*.

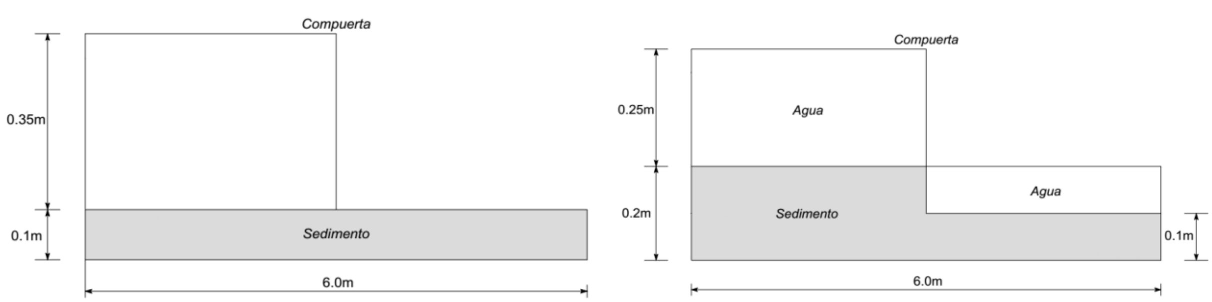


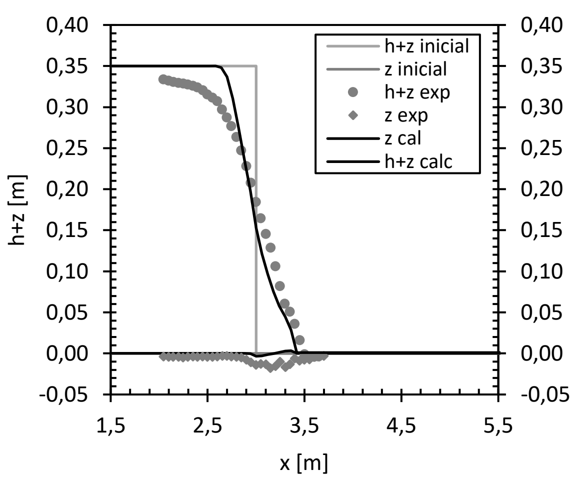
Figura 55. Esquema de los casos A y B del problema rotura de presa en un canal con suelo móvil.

Tabla 20.

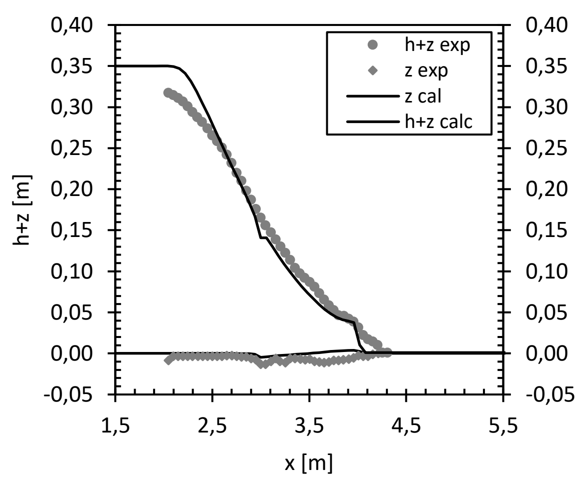
Configuraciones utilizadas para el problema rotura de presa en un canal con suelo móvil

Caso	h_L	h_R	z_L	z_R
A	0.35	0.0	0.0	0.0
B	0.35	0.1	0.1	0.0

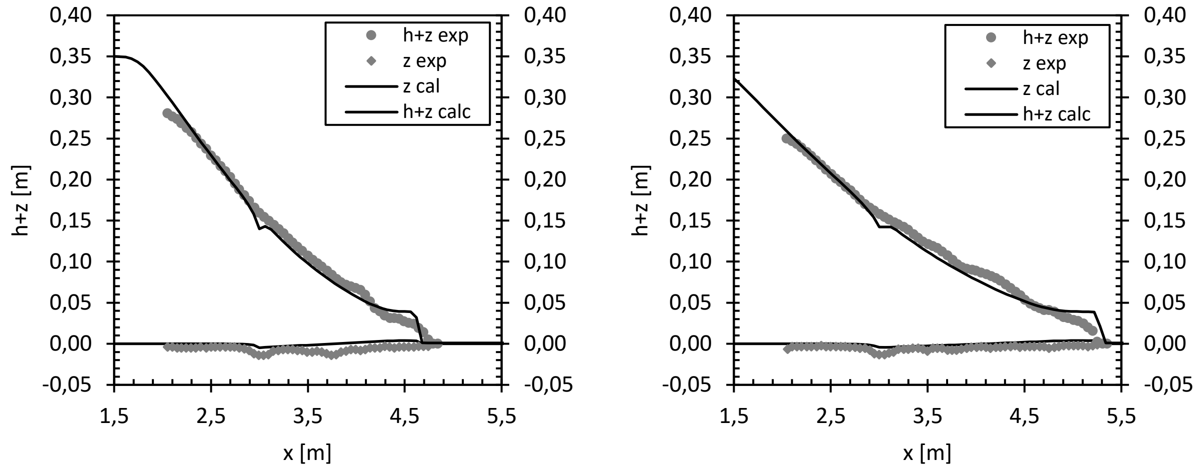
El dominio de estudio en los dos casos se dividió en 1719 elementos y la simulación se llevó a cabo hasta el segundo 1.5. En la *Figura 56* se presentan los resultados del caso A para los tiempos 0.25s, 0.5s, 0.75s, 1s, 1.25s y 1.5s cuando se utilizó el modelo MPM como fórmula para la descarga de sedimento. En ese caso la rotura de presa ocurre directamente sobre el lecho de sedimento y se permite el avance del fluido a lo largo del canal mientras este socava el sedimento. Los resultados muestran como el frente de inundación generado por la rotura de la presa es dominado por la fricción. También, se observa una buena correspondencia entre los datos experimentales y los calculados para todos los tiempos graficados especialmente los que corresponden a la profundidad del fluido (h). La socavación calculada sobre el sedimento se observa ligeramente menor durante los primeros instantes, sin embargo, en el segundo 1.5 se muestra un mejor ajuste con los datos experimentales.



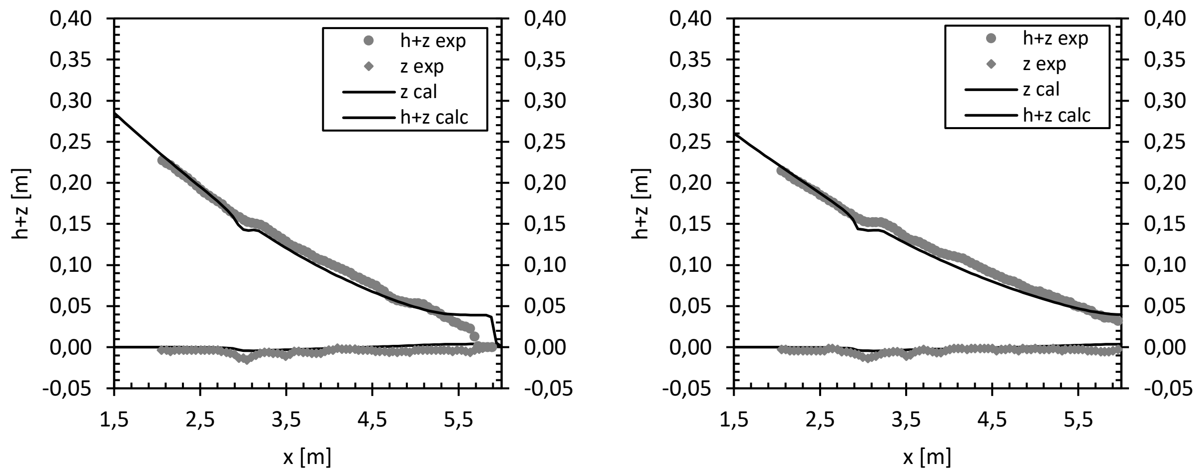
a)



b)



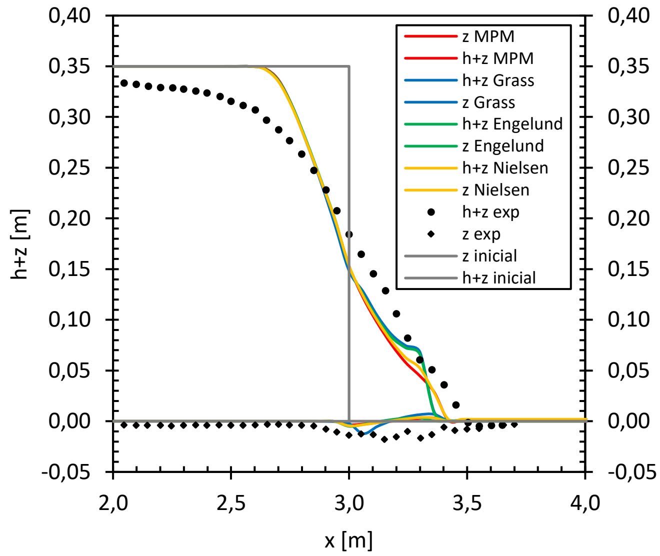
c) d)



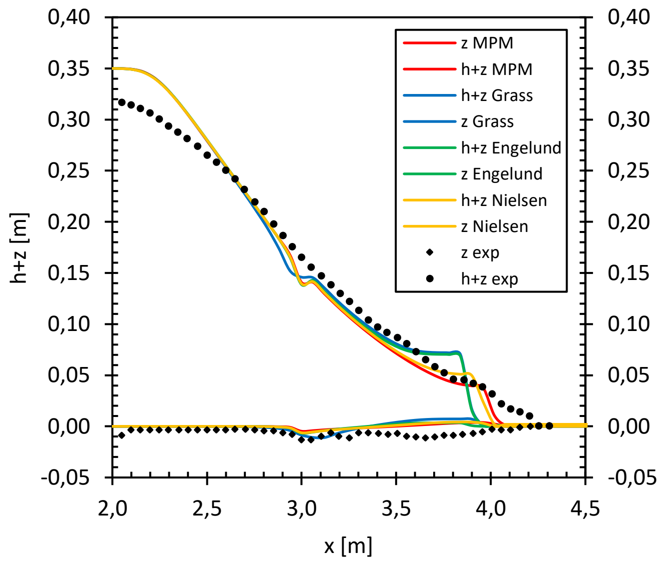
c) d)

Figura 56. Resultados del caso A del problema rotura de presa en los instantes de tiempo a) 0.25s, b) 0.5s, c) 0.75, d) 1s, e) 1.25s y f) 1.5s utilizando el modelo MPM para la descarga de sedimento.

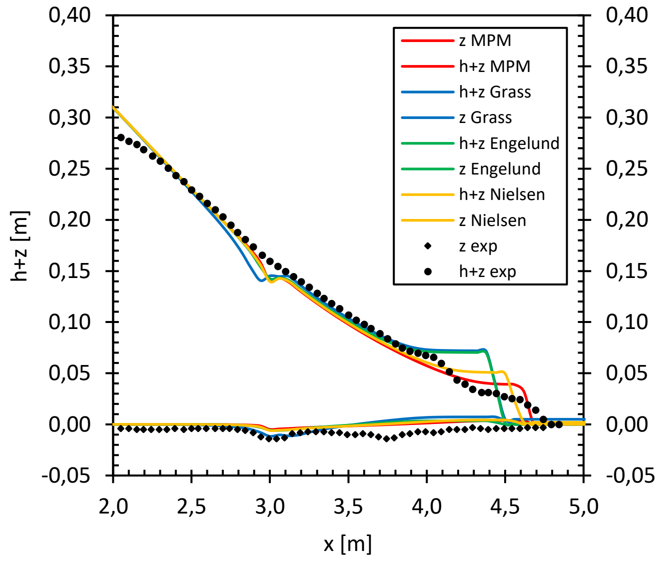
Se llevaron a cabo simulaciones utilizando otras fórmulas para el transporte de sedimento con el fin de compararlas, para este caso se usaron el modelo de Grass con valor constante de Ag=0.001 y los modelos de Engelund y Nielsen y los resultados se reportan en *Figura 57*. Estos resultados evidencian que el modelo MPM es el que mejor se ajusta a los resultados experimentales debido a que las demás fórmulas presentan un pequeño retraso en el frente de inundación y además este es más vertical lo cual podría deberse a que en este caso la fricción del sedimento podría estar sobrestimada. No obstante, en general la correspondencia de todos los modelos con los resultados experimentales es adecuada.



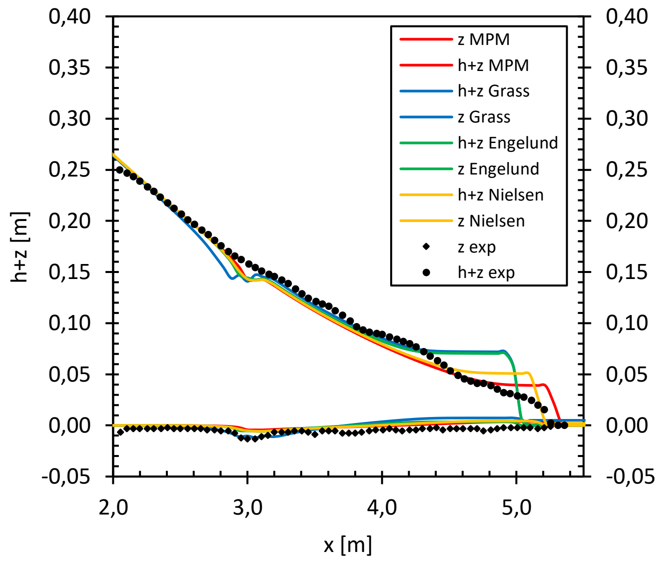
a)



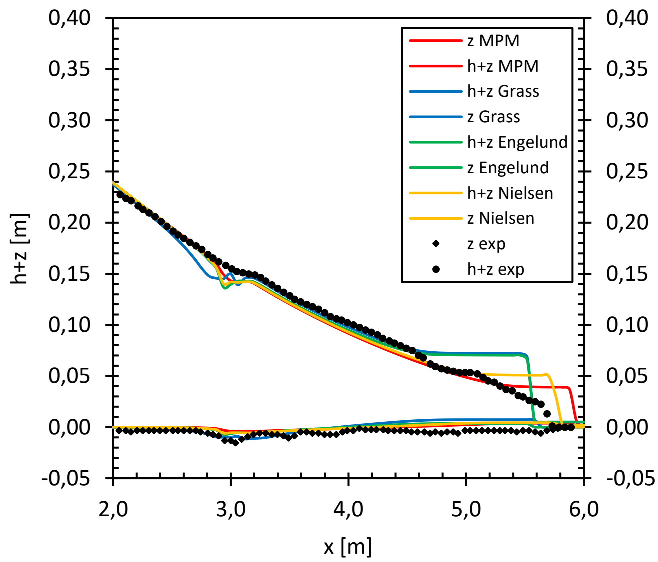
b)


z MPM
h+z MPM
h+z Grass
z Grass
h+z Engelund
z Engelund
h+z Nielsen
z Nielsen
z exp
h+z exp
h+z [m]
x [m]

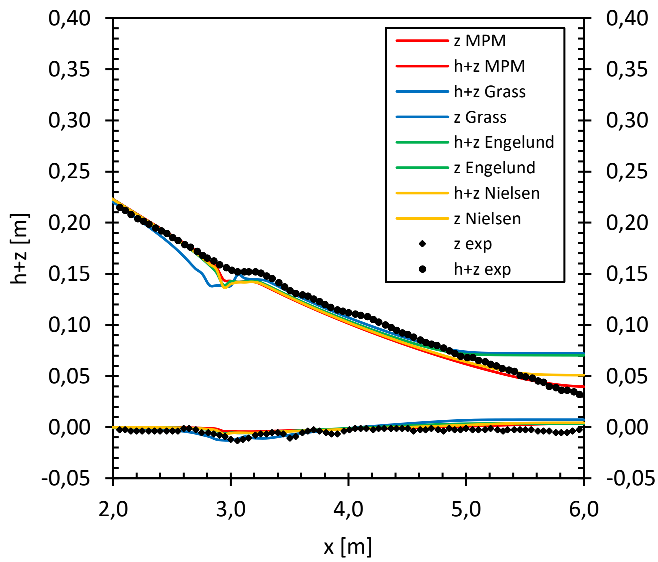
c)


z MPM
h+z MPM
h+z Grass
z Grass
h+z Engelund
z Engelund
h+z Nielsen
z Nielsen
z exp
h+z exp
h+z [m]
x [m]

d)



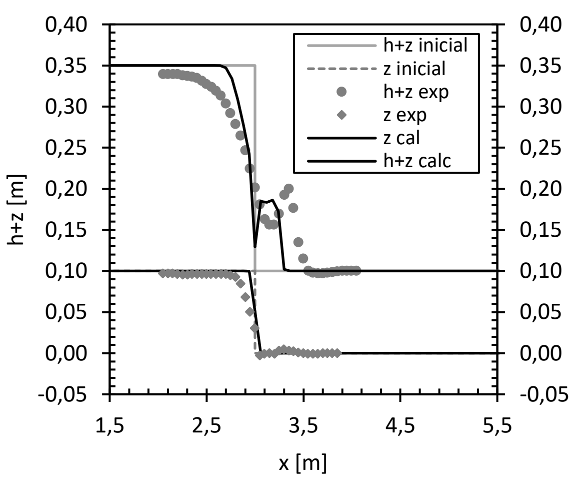
e)



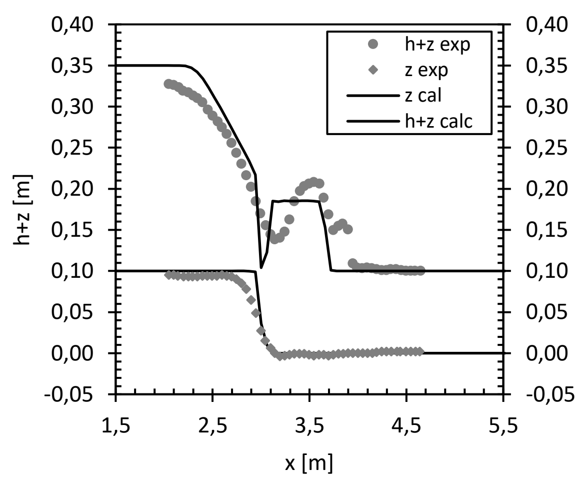
f)

Figura 57. Resultados del caso A del problema rotura de presa en los instantes de tiempo a) 0.25s, b) 0.5s, c) 0.75, d) 1s, e) 1.25s y f) 1.5s utilizando los modelos MPM, Grass, Engelund y Nielsen para la descarga de sedimento.

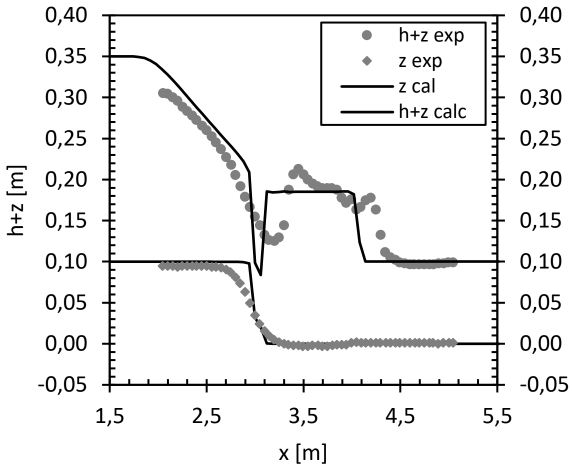
Los resultados del caso B se presentan en la *Figura 58* la cual incluye los tiempos 0.25s, 0.5s, 0.75s, 1s, 1.25s y 1.5s cuando se utilizó el modelo MPM como fórmula para la descarga de sedimento. En este caso la rotura de la presa se da sobre un fondo mojado y se permite el avance del frente de onda y el sedimento se desplaza debido al movimiento del fluido. Los resultados muestran como la presa se rompe y se genera un salto hidráulico y posteriormente un frente de inundación sobre el fluido el cual avanza y va desplazando sedimento del lecho. También, se observa que en todos los tiempos la simulación sigue los datos experimentales para el caso de la profundidad del fluido y la elevación del sedimento. Las diferencias que se observan en el frente de onda podrían atribuirse a las rápidas variaciones de energía que se dan como consecuencia de la presencia del salto hidráulico generado en el punto donde rompe la presa.



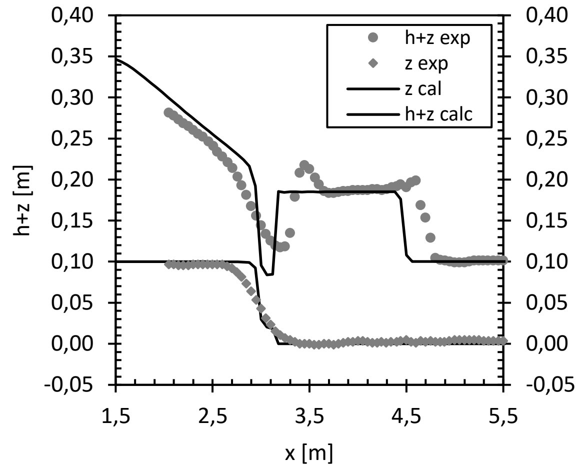
a)



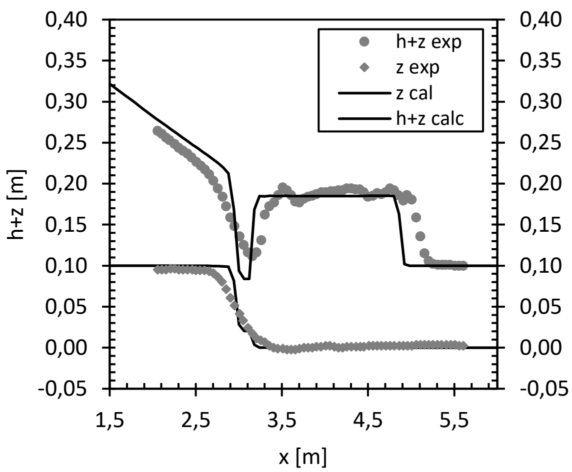
b)



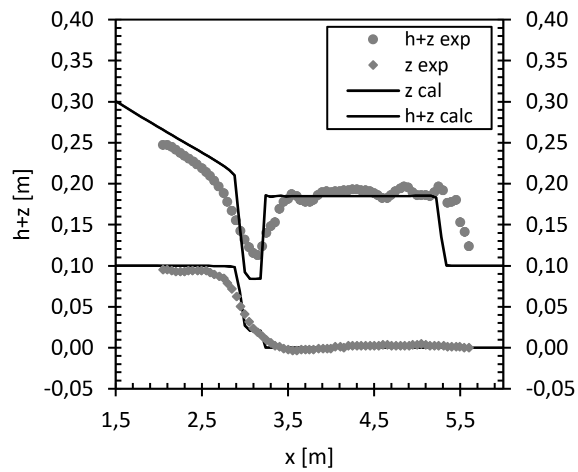
c)



d)



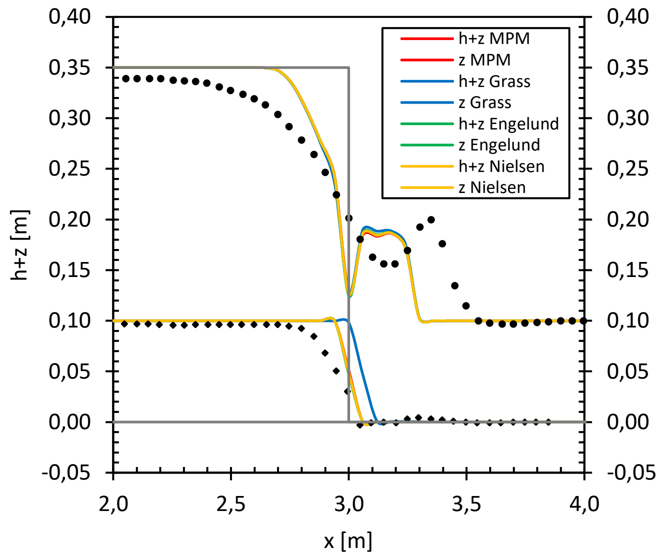
e)



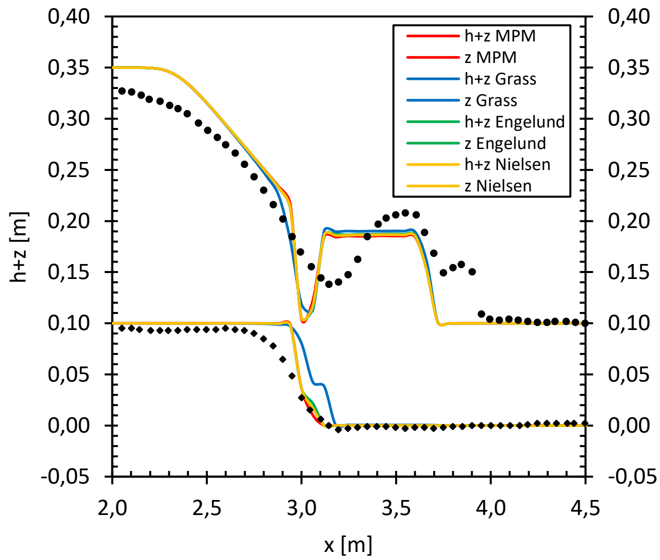
f)

Figura 58. Resultados del caso B del problema rotura de presa en los instantes de tiempo a) 0.25s, b) 0.5s, c) 0.75, d) 1s, e) 1.25s y f) 1.5s utilizando el modelo MPM para la descarga de sedimento.

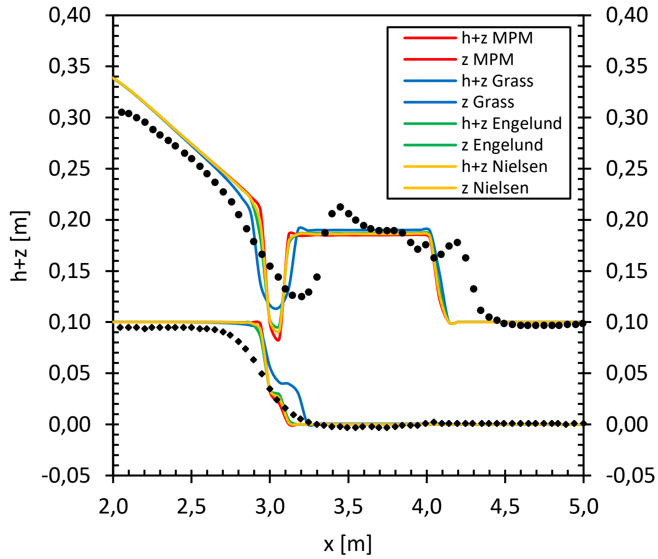
Similar al caso A, se hicieron simulaciones utilizando otras fórmulas para el transporte de sedimento con el fin de compararlas, una vez más usaron: el modelo de Grass con valor constante de Ag=0.001, el modelo de Engelund y el modelo de Nielsen y los resultados se reportan en *Figura 59*. En estos resultados se observa una gran similitud entre todos los modelos y no se presentan desfases entre los frentes de inundación calculados. De manera general, todos los modelos presentan una buena correspondencia con los resultados experimentales.


h+z MPM
z MPM
h+z Grass
z Grass
h+z Engelund
z Engelund
h+z Nielsen
z Nielsen
h+z [m]
x [m]

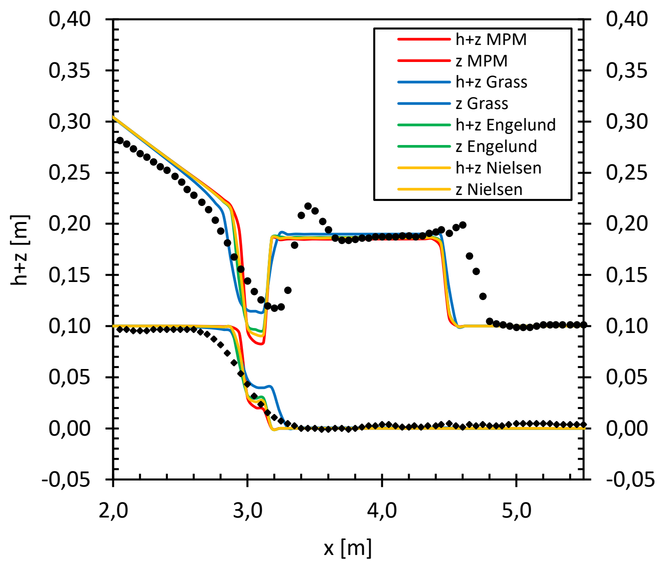
a)


h+z MPM
z MPM
h+z Grass
z Grass
h+z Engelund
z Engelund
h+z Nielsen
z Nielsen
h+z [m]
x [m]

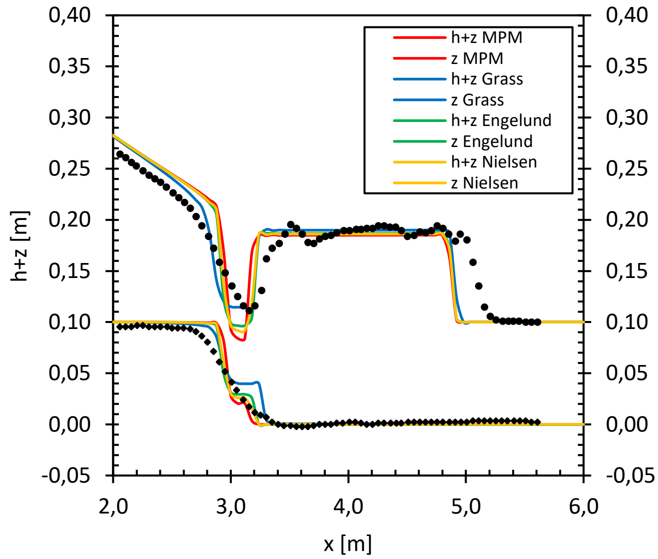
b)


h+z MPM
z MPM
h+z Grass
z Grass
h+z Engelund
z Engelund
h+z Nielsen
z Nielsen
h+z [m]
x [m]
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
-0,05
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
4,5
5,0

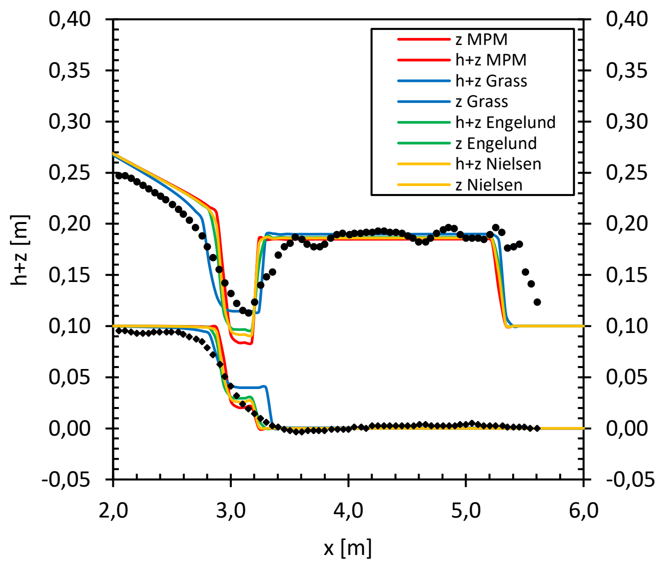
c)


h+z MPM
z MPM
h+z Grass
z Grass
h+z Engelund
z Engelund
h+z Nielsen
z Nielsen
h+z [m]
x [m]
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
-0,05
2,0
3,0
4,0
5,0

d)



e)



f)

Figura 59. Resultados del caso B del problema rotura de presa en los instantes de tiempo a) 0.25s, b) 0.5s, c) 0.75, d) 1s, e) 1.25s y f) 1.5s utilizando los modelos MPM, Grass, Engelund y Nielsen para la descarga de sedimento.

4.3.2 Rotura de Presa 2D con expansión

Este problema se realizó con el fin de evaluar la respuesta del modelo implementado ante una situación de expansión abrupta de la geometría del dominio de estudio y el comportamiento del sedimento y del fluido asociado a este evento. Este experimento fue desarrollado en el laboratorio del departamento de ingeniería civil y medioambiente de la Universidad Católica de Louvain y fue reportado por Iervolino *et al.* (2010) y Goutiere *et al.* (2011), y además, ha sido numéricamente reproducido por Juez *et al.* (2013) y Juez *et al.* (2014). El esquema del dominio de estudio y las condiciones iniciales del problema se presentan en la *Figura 60*. En la experimentación se utilizó como sedimento una arena uniforme con las siguientes propiedades: diámetro medio $d_{50} = 1.65mm$, densidad $\rho_s = 2630\ kg\ m^{-3}$, porosidad $p = 0.42$ y factor de Manning $n = 0.0185\ sm^{-1/3}$. En el experimento realizado se reportaron alturas del agua en 7 puntos del dominio y elevaciones del sedimento en distintas secciones transversales del canal y estos se presentan en la Tabla 21 y Tabla 22. La simulación se llevó a cabo hasta el segundo 10 y se utilizó un mallado estructurado de 6912 elementos.

Tabla 21.

Puntos de medición de la altura del agua para el problema rotura de presa con expansión

Punto	Coordenada x [m]	Coordenada y [m]
U1	3.75	0.125
U2	4.20	0.375
U3	4.20	0.125
U4	4.45	0.375
U5	4.45	0.125
U6	4.95	0.375
U7	4.95	0.125

Tabla 22.

Secciones de medición de la altura del sedimento para el problema rotura de presa con expansión

Sección	**Coordenada x [m]**
S1	4.1
S2	4.2
S3	4.3
S4	4.4
S5	4.5

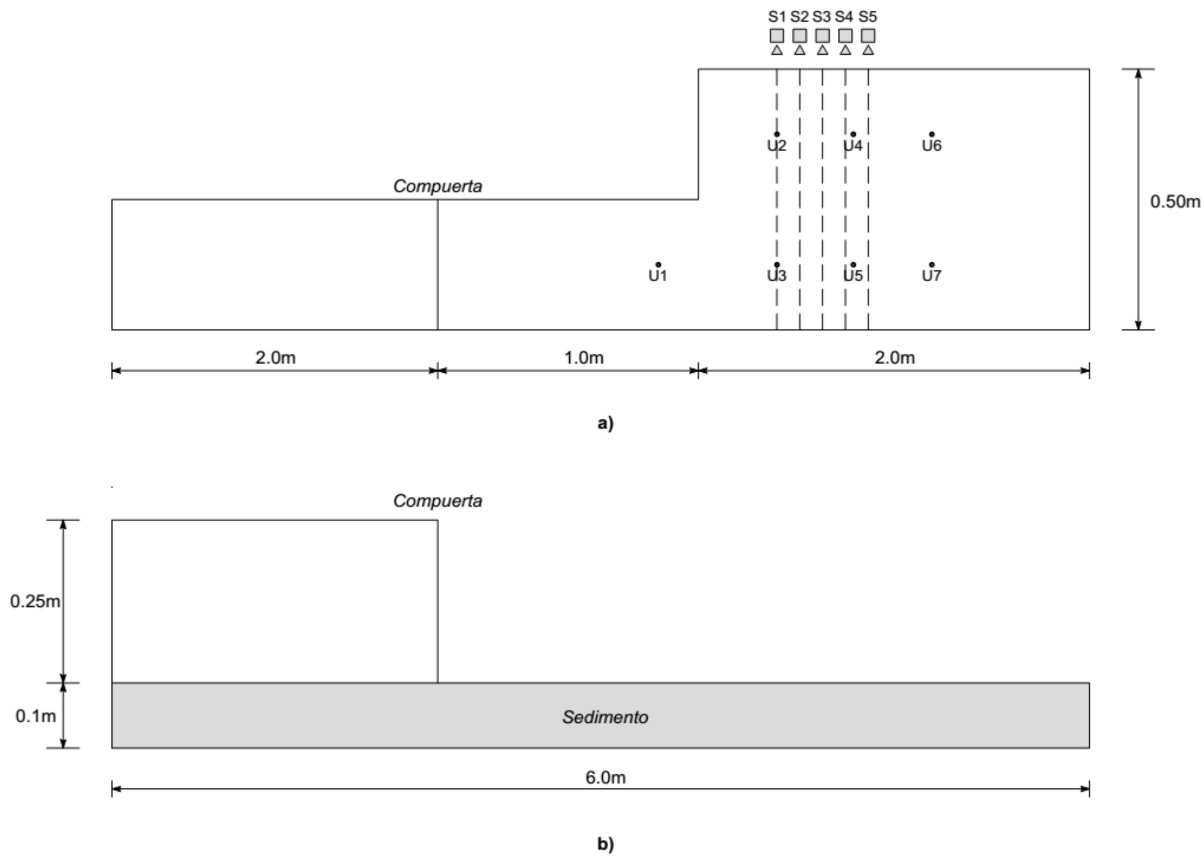
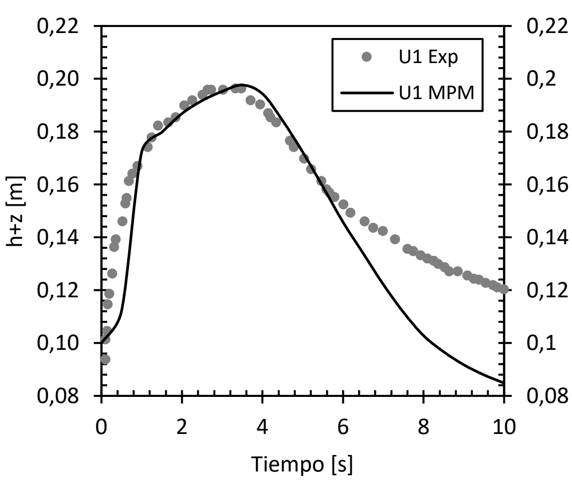
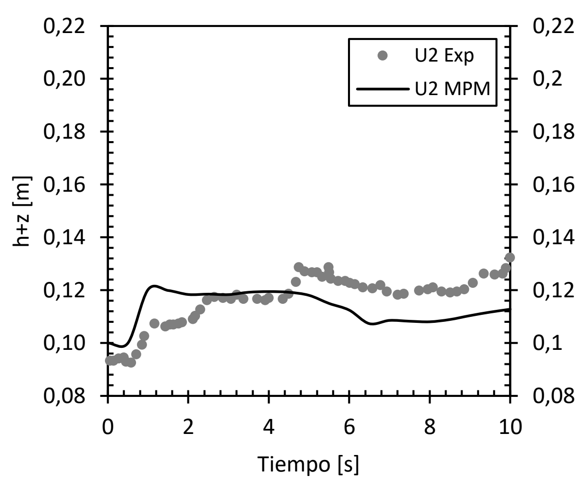


Figura 60. Esquema del problema rotura de presa en un canal con suelo móvil a) vista superior y b) vista lateral.

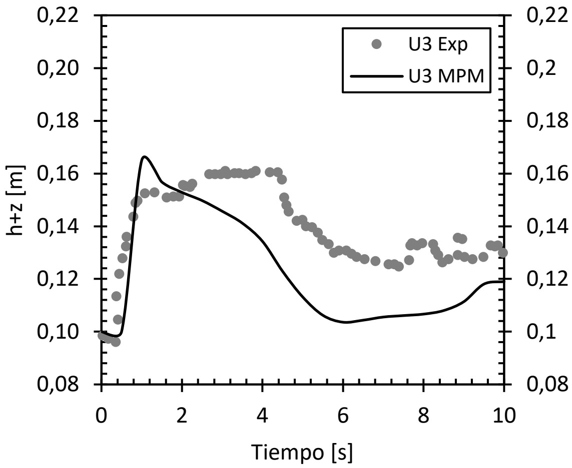
En la *Figura 61* se presentan los resultados obtenidos en los siete puntos de medición de la elevación de la superficie libre del fluido calculados utilizando el modelo MPM para la descarga de sedimento. En todos los puntos se observa una buena correspondencia con los resultados experimentales, principalmente durante los primeros segundos de la simulación. Una vez el suelo es erosionado se observa que las diferencias se hacen más notorias, pero aun así siguen la tendencia de los datos experimentales. En la *Figura 62* se presentan los perfiles de altura de sedimento medidos en las 5 secciones transversales del canal y estos se comparan con los resultados experimentales. Los resultados muestran que el modelo MPM es capaz de describir la erosión de sedimento en el lado derecho del canal (cuando es visto aguas arriba) en la mayoría de las secciones medidas; sin embargo, del lado izquierdo se presenta una mayor remoción del sedimento comparado con los resultados experimentales y por consiguiente se observan las diferencias más significativas. También se puede observar que la simulación a pesar de no presentar un ajuste a lo largo de todas las secciones, esta sigue las mismas tendencias que los resultados experimentales.



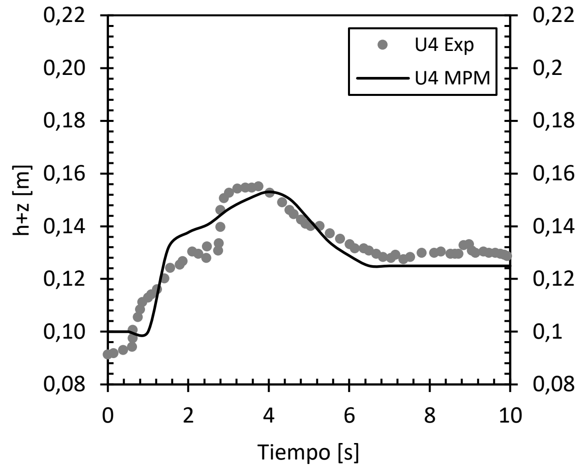
a)



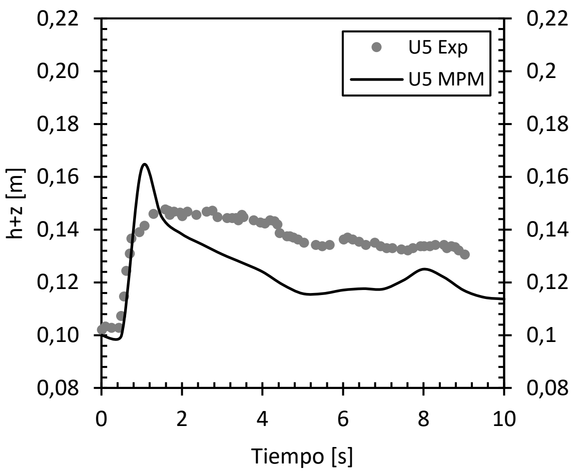
b)


U3 Exp
U3 MPM
h+z [m]
Tiempo [s]

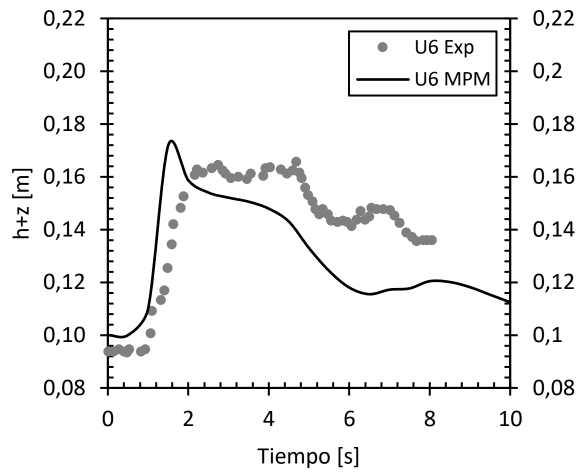
c)


U4 Exp
U4 MPM
h+z [m]
Tiempo [s]

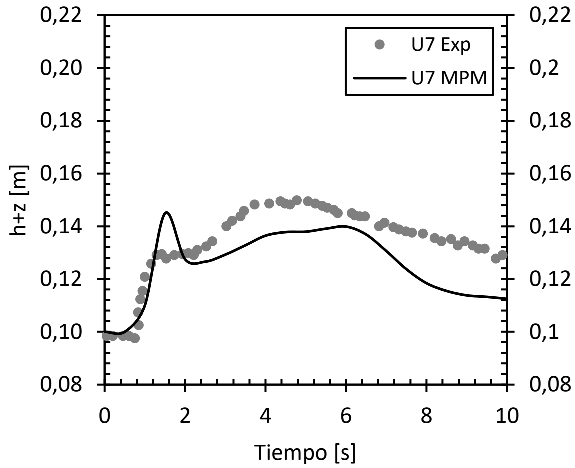
d)


U5 Exp
U5 MPM
h+z [m]
Tiempo [s]

e)

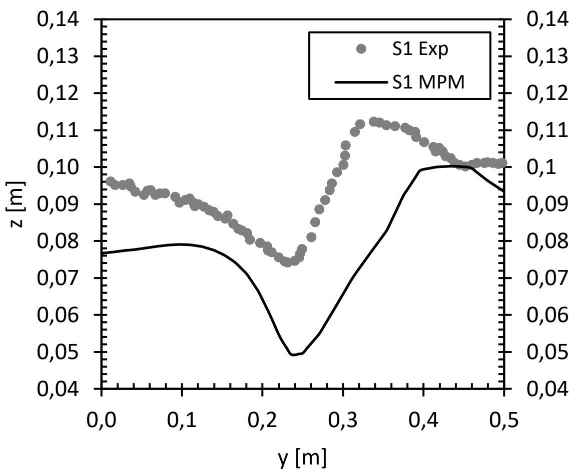

U6 Exp
U6 MPM
h+z [m]
Tiempo [s]

f)

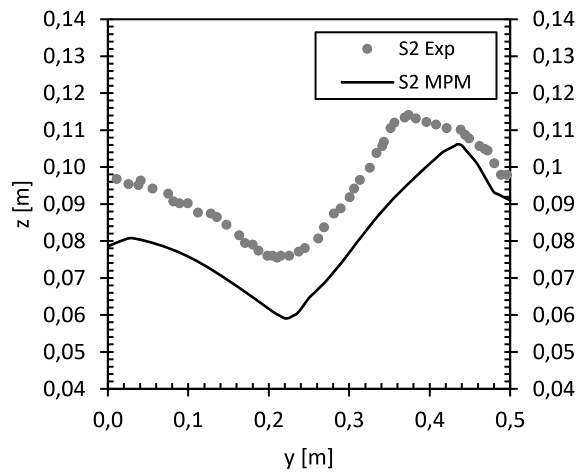


g)

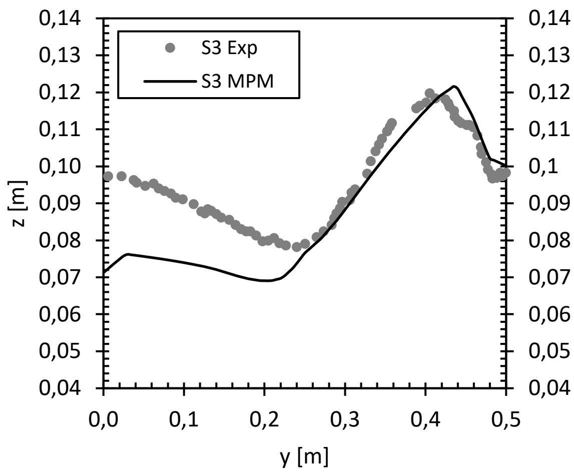
Figura 61. Elevaciones de la superficie del fluido medidas en las estaciones a) U1, b) U2, c) U3, d) U4, e) U5, f) U6 y g) U7 para el problema rotura de presa 2D con expansión utilizando el modelo MPM para la descarga del sedimento.



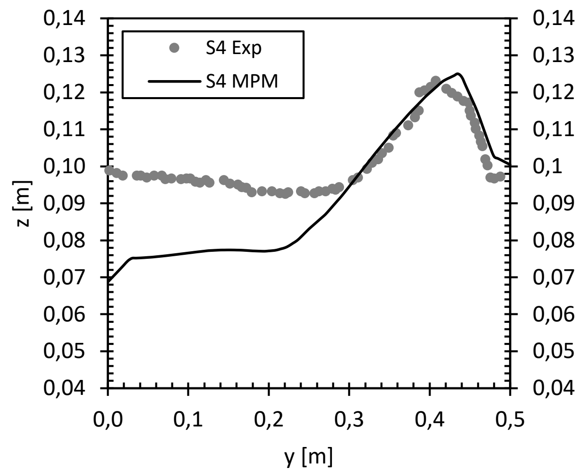
a)



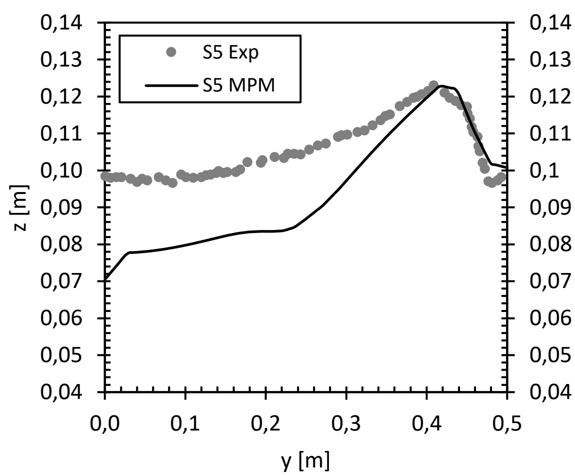
b)



c)



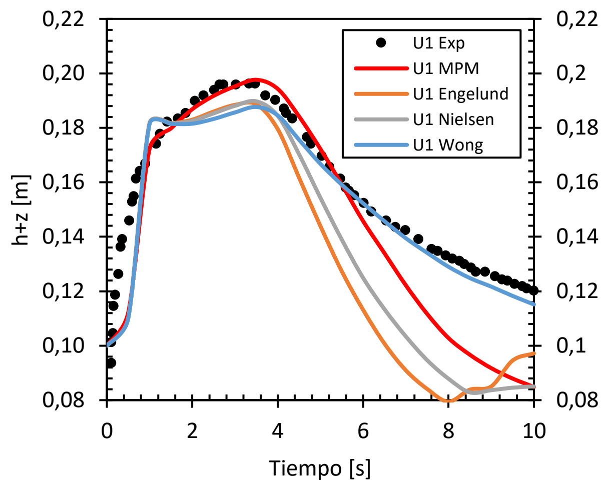
d)



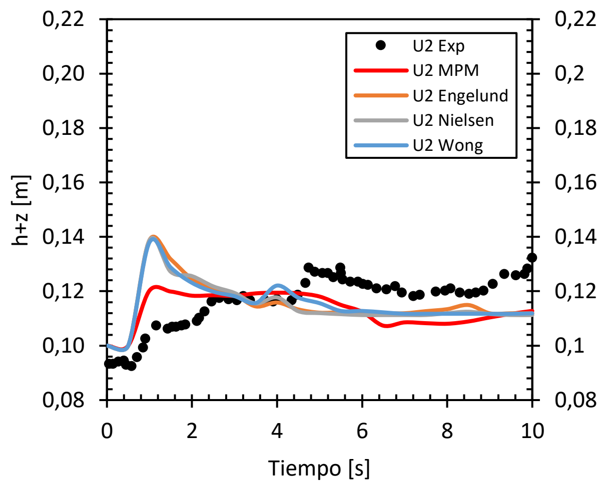
e)

Figura 62. Perfiles de la elevación del sedimento medidos en las secciones a) S1, b) S2, c) S3, d) S4, e) S5 para el problema rotura de presa 2D con expansión utilizando el modelo MPM para la descarga del sedimento.

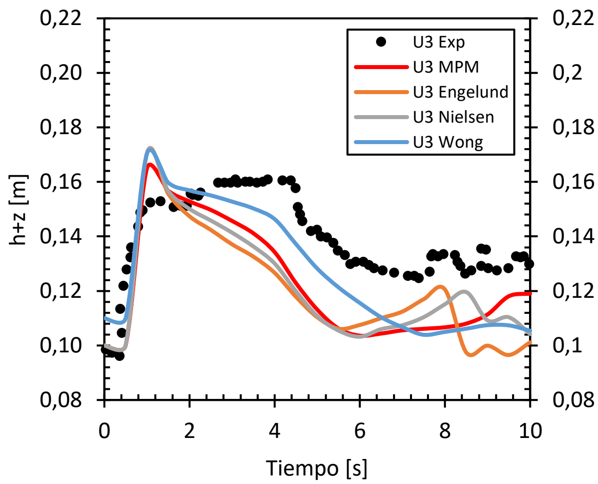
Se llevaron a cabo simulaciones utilizando las diferentes fórmulas para la descarga de sedimento implementadas con el fin de observar el ajuste de estos modelos con los resultados experimentales. En la *Figura 63* se muestran los resultados obtenidos en los siete puntos de medición de la elevación de la superficie libre del fluido calculados utilizando los modelos MPM, Engelund, Nielsen y Wong. Estos resultados permiten ver cómo los diferentes modelos ajustan la solución de distintas maneras y conllevan a la obtención de distintos perfiles. Si bien, todos los resultados son diferentes, todos siguen la tendencia de los datos experimentales y algunos se ajustan más y otros menos dependiendo de la localización del punto de medición.



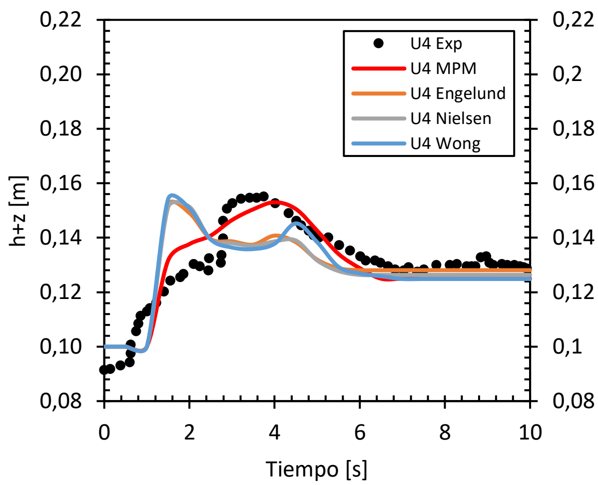
a)



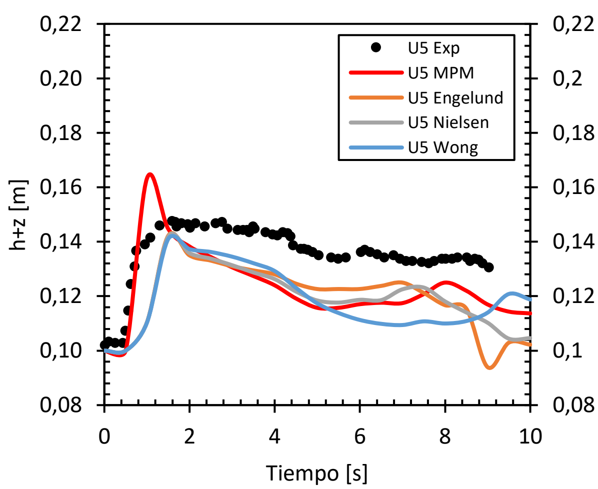
b)


U3 Exp
U3 MPM
U3 Engelund
U3 Nielsen
U3 Wong
h+z [m]
Tiempo [s]

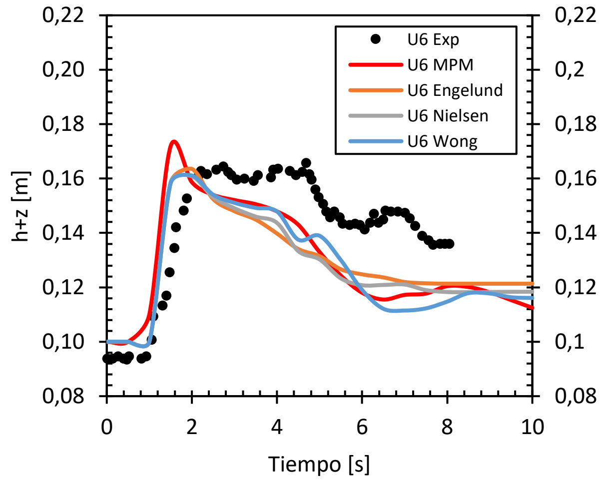
c)


U4 Exp
U4 MPM
U4 Engelund
U4 Nielsen
U4 Wong
h+z [m]
Tiempo [s]

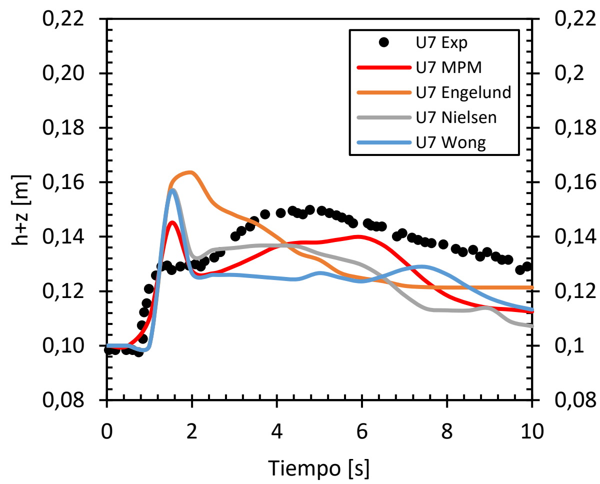
d)


U5 Exp
U5 MPM
U5 Engelund
U5 Nielsen
U5 Wong
h+z [m]
Tiempo [s]

e)



f)

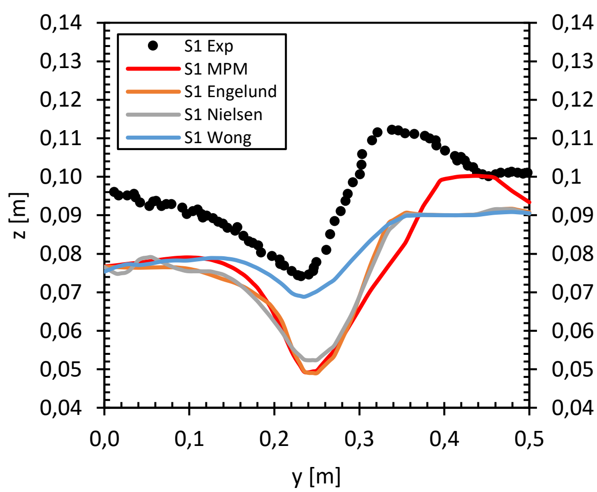


g)

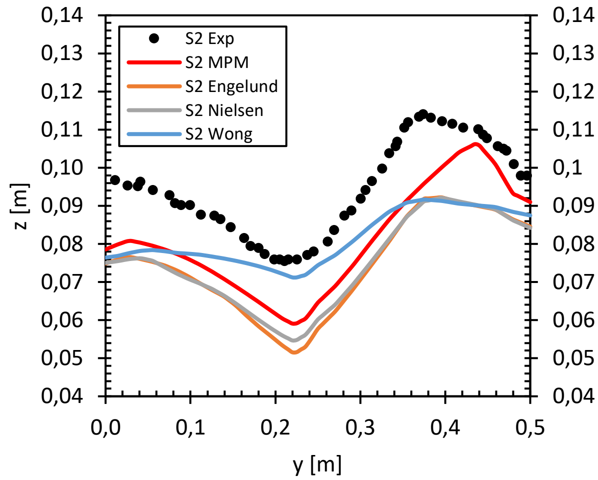
Figura 63. Elevación de la superficie del fluido medida en las estaciones a) U1, b) U2, c) U3, d) U4, e) U5, f) U6 y g) U7 para el problema rotura de presa 2D con expansión utilizando los modelos MPM, Engelund, Nielsen y Wong para la descarga del sedimento.

En la *Figura 64* se presentan los perfiles de altura de sedimento medidos en las 5 secciones transversales del canal utilizando los modelos MPM, Engelund, Nielsen y Wong para aproximar la descarga del sedimento. Al igual que con el modelo MPM, todos los modelos se ajustan más en la parte derecha del canal (cuando es visto aguas arriba) y menos en la parte izquierda donde se observa una mayor erosión del sedimento. Sin embargo, en todos los casos los perfiles calculados siguen la misma tendencia de los resultados experimentales.

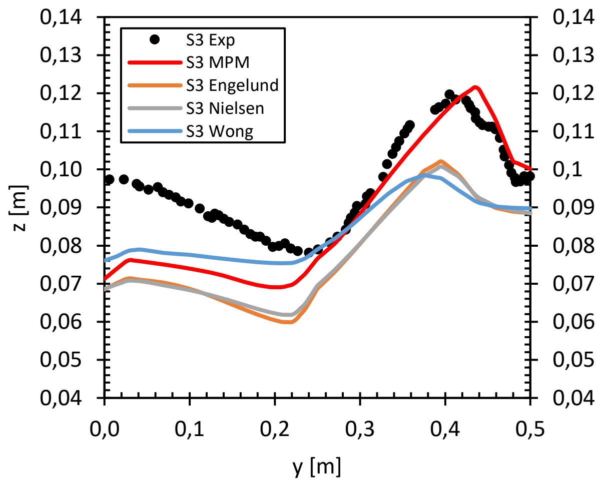
En la *Figura 63* y *Figura 64* se puede observar la clara dependencia que tiene la fórmula que se utilice para aproximar la descarga sólida del sedimento sobre los resultados obtenidos tal y como era esperado. Cada modelo está definido con distintos esfuerzos críticos para diferentes características de sedimento, por lo tanto, es fundamental la elección de esta fórmula con el fin de obtener un buen ajuste del modelo. Para este caso, el mejor ajuste en las elevaciones del fluido y los perfiles de elevación de sedimento se obtuvo con el modelo MPM.



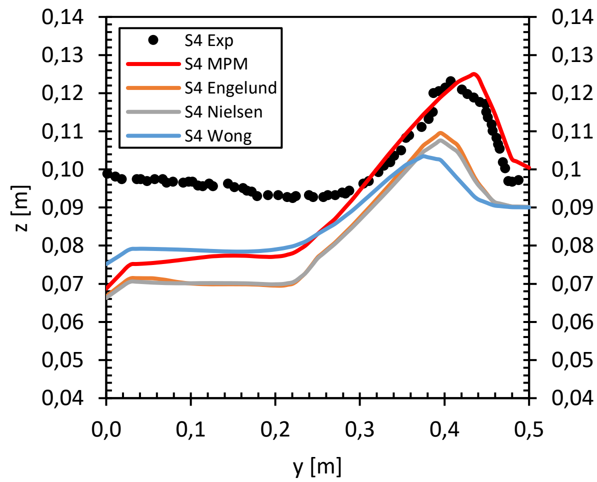
a)


S2 Exp
S2 MPM
S2 Engelund
S2 Nielsen
S2 Wong
z [m]
y [m]

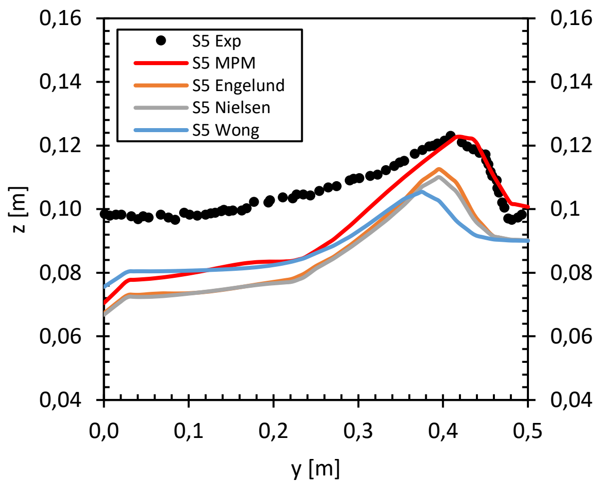
b)


S3 Exp
S3 MPM
S3 Engelund
S3 Nielsen
S3 Wong
z [m]
y [m]

c)


S4 Exp
S4 MPM
S4 Engelund
S4 Nielsen
S4 Wong
z [m]
y [m]

d)



e)

Figura 64. Perfiles de la elevación del sedimento medidos en las secciones a) S1, b) S2, c) S3, d) S4, e) S5 para el problema rotura de presa 2D con expansión utilizando los modelos MPM, Engelund, Nielsen y Wong para la descarga del sedimento.

4.3.3 Rotura de Presa Simétrica 2D Sobre un Suelo Erosionable

Este experimento fue diseñado y realizado en la Universidad Católica de Louvain en el marco del proyecto NSF-PIRE *(Modelling of Flood Hazards and Geomorphic Impacts of Levee Breach and Dam Failure)* Soares-Frazão *et al*. (2012) con el fin de obtener resultados experimentales que permitieran formular un problema de referencia para que la comunidad científica realizara simulaciones numéricas que les permitiera validar sus resultados. Este problema consiste en una rotura de presa que tiene lugar en un canal de 36m de largo y 3.6m de ancho. La compuerta ubicada a los 12m se conecta a un depósito aguas arriba que tiene 1m de ancho. Sobre el suelo del canal se dispuso un banco de arena que se extendió 9m a lo largo del canal, 8 metros aguas debajo de la compuerta y 1m aguas arriba de la misma con un espesor de 0.085m. Un esquema del experimento se presenta en la *Figura 65*. La arena utilizada presentaba las siguientes propiedades: diámetro medio $d_{50} = 1.61mm$, $d_{90} = 3.8mm$, $d_{30} = 0.52mm$, densidad $\rho_s = 2630\ kg\ m^{-3}$, porosidad $p = 0.42$ y factor de Manning $n = 0.0165\ sm^{-1/3}$. La altura de la presa aguas arriba fue 0.47m y aguas abajo se consideró el fondo seco. La compuerta se abre en el tiempo cero y se cierra a los 20s. En la experimentación se midieron las alturas del agua en puntos definidos y además se midieron los perfiles del lecho de arena en tres secciones y estos se resumen en la Tabla 23 y Tabla 24.

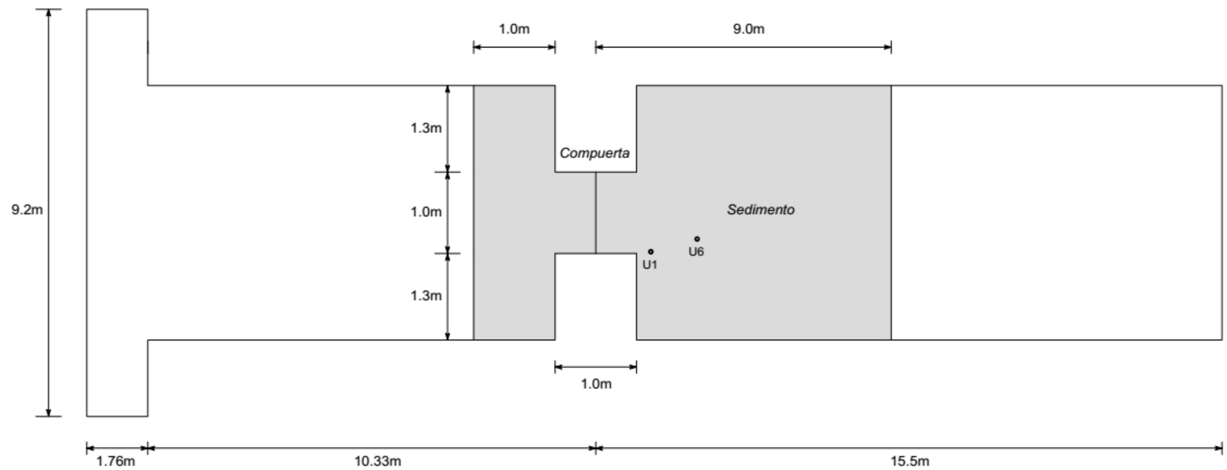


Figura 65. Esquema del problema rotura de presa simétrica 2D sobre un suelo erosionable.

Tabla 23.

Puntos de medición de la altura del agua para el problema rotura de presa simétrica 2D sobre un suelo erosionable.

Punto	Coordenada x [m]	Coordenada y [m]
U1	12.640	1.3
U6	13.94	1.47

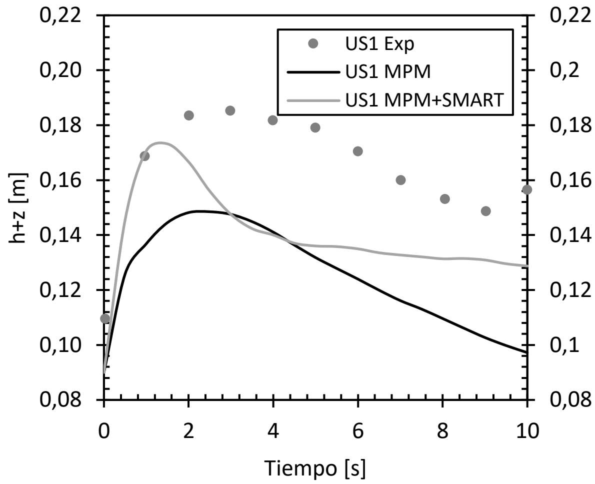
Tabla 24.

Secciones de medición de la altura del sedimento para el problema rotura de presa simétrica 2D sobre un suelo erosionable.

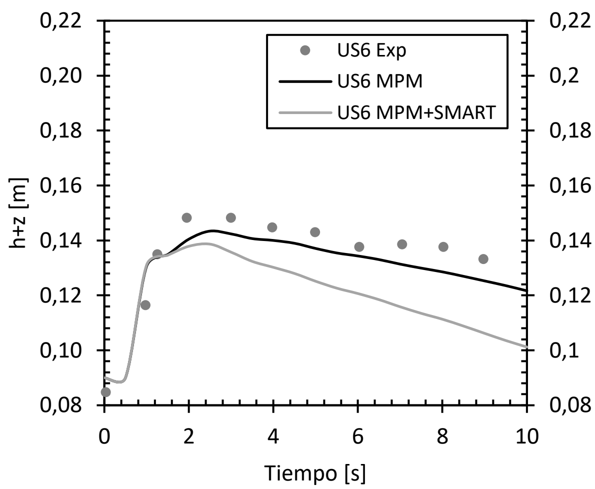
Sección	Coordenada y [m]
S1	2
S2	2.5
S3	3.25

La simulación se llevó a cabo utilizando un mallado estructurado de 4704 elementos y se realizaron diferentes simulaciones utilizando las fórmulas para la descarga de sedimento implementadas y estas se combinaron junto con el modelo Smart con el fin de observar el efecto que tiene el hecho de considerar la pendiente del sedimento (en el intervalo del 0.04% y 20%) sobre el sedimento y el fluido. Los resultados obtenidos de las elevaciones de la superficie del fluido en los dos puntos de medición cuando se utilizaron los modelos MPM y MPM-Smart se presentan en la *Figura 66.* Elevación de la superficie del fluido medida en las estaciones a) U1 y b) U6 para el problema rotura de presa simétrica 2D sobre un suelo erosionable utilizando los modelos MPM y MPM-Smart. y las elevaciones del sedimento en las tres secciones se presentan en la *Figura 67.* Perfiles de la elevación del sedimento medidos en las secciones a) S1, b) S2 y c) S3 para el problema rotura de presa simétrica 2D sobre un suelo erosionable utilizando los modelos MPM y MPM-Smart para la descarga de sedimento.. Se debe notar que los datos experimentales de las elevaciones del sedimento fueron obtenidos a partir de 4 experimentos y estos presentan una alta variabilidad entre ellos.

Los resultados obtenidos muestran que los perfiles de elevación del sedimento se ajustan mejor a los datos experimentales en las secciones S2 y S3 y además el modelo MPM da mejores resultados en las secciones S1 y S2 mientras que la combinación MPM-Smart es mucho mejor en la sección S3. Además, debe notarse que la combinación MPM-Smart los perfiles obtenidos no son suaves como los que se obtienen cuando se utiliza el modelo MPM por sí solo, lo cual refleja el hecho de que la combinación MPM-Smart tiene en cuenta las pendientes locales sobre el lecho de sedimento.

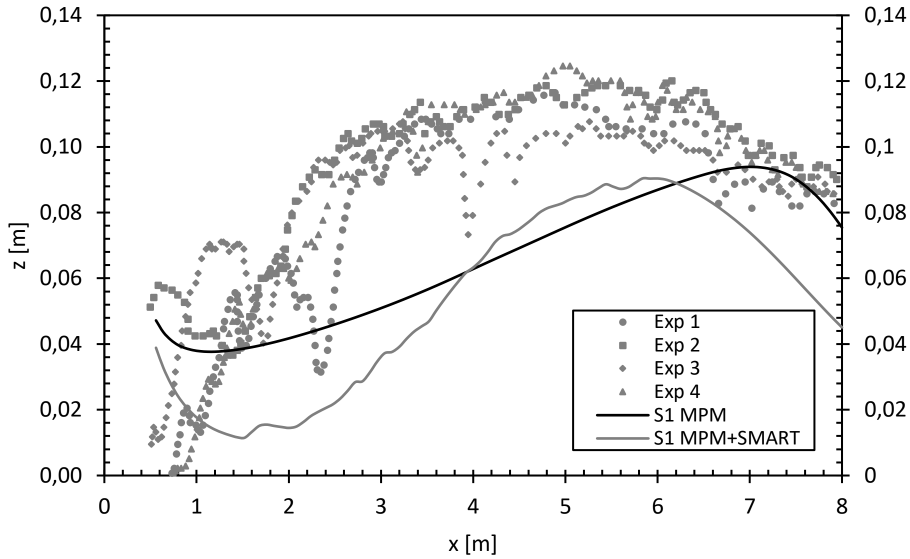


a)

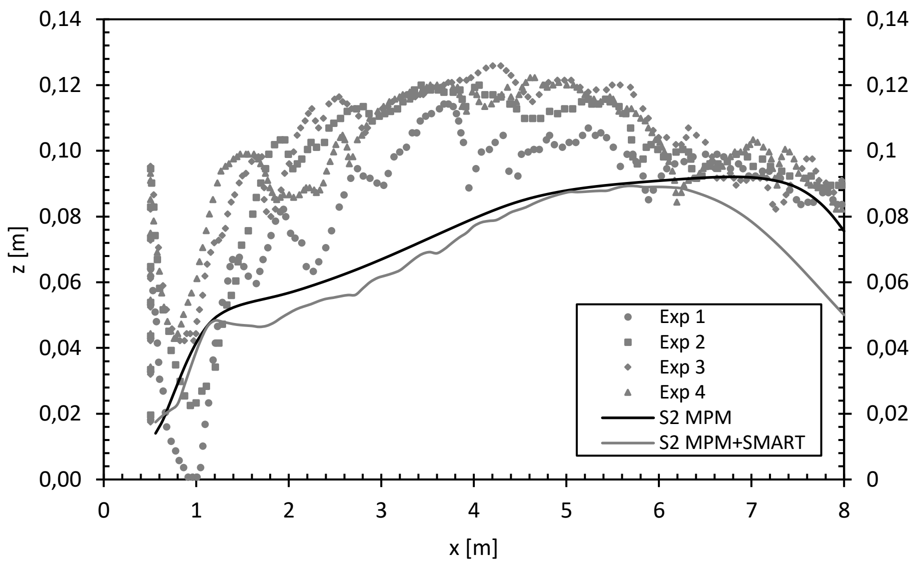


b)

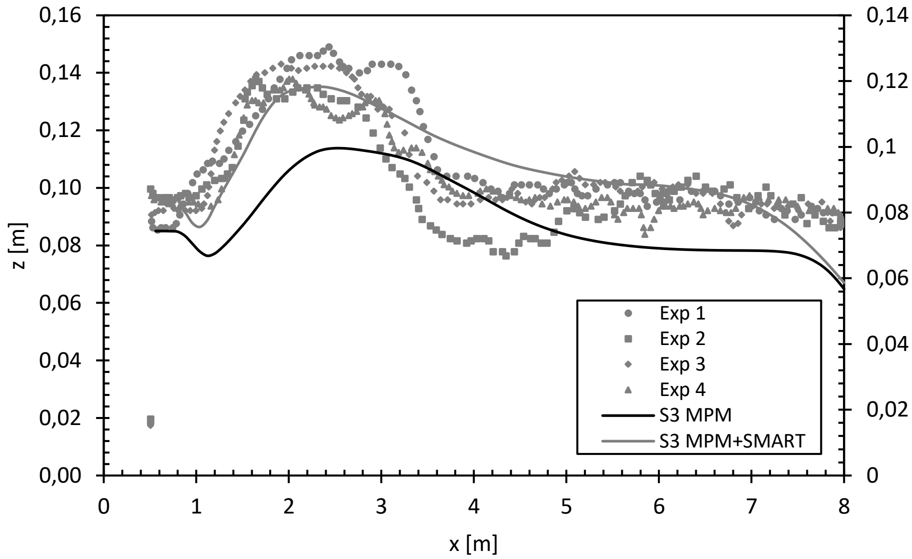
Figura 66. Elevación de la superficie del fluido medida en las estaciones a) U1 y b) U6 para el problema rotura de presa simétrica 2D sobre un suelo erosionable utilizando los modelos MPM y MPM-Smart.


z [m]
x [m]
Exp 1
Exp 2
Exp 3
Exp 4
S1 MPM
S1 MPM+SMART

a)


z [m]
x [m]
Exp 1
Exp 2
Exp 3
Exp 4
S2 MPM
S2 MPM+SMART

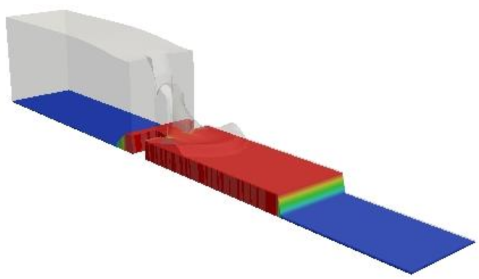
b)



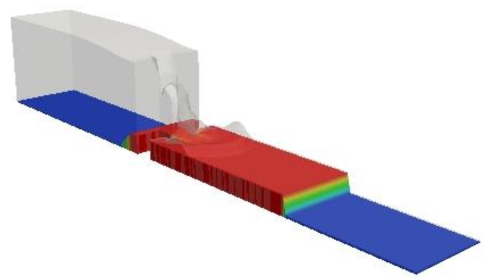
c)

Figura 67. Perfiles de la elevación del sedimento medidos en las secciones a) S1, b) S2 y c) S3 para el problema rotura de presa simétrica 2D sobre un suelo erosionable utilizando los modelos MPM y MPM-Smart para la descarga de sedimento.

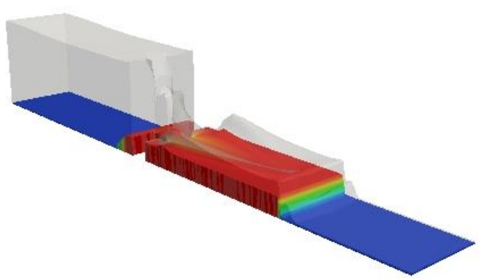
En la *Figura 68.* Evolución del fluido y del sedimento en los instantes a)2s, b) 5s, c)10s, d)15s y e)20s para los modelos 1) MPM y 2) MPM-Smart se observa un esquema en 3D de la evolución del fluido y del sedimento y en la *Figura 69.* Evolución del sedimento en los instantes a)2s, b) 5s, c)10s, d)15s y e)20s para los modelos 1) MPM y 2) MPM-Smart una secuencia de las elevaciones del sedimento calculadas; vista desde un plano superior en los instantes 2s, 5s, 10s 15s y 20s para los modelos MPM y MPM-Smart. En estas se muestran como los cambios morfodinámicos son más drásticos con el modelo MPM-Smart y se observa que con este modelo el fluido remueve más sedimento producto del frente de onda que avanza sobre el lecho. Se evidencia como con los dos modelos el sedimento se desplaza de manera simétrica hacia los costados del canal generándose bancos de arena que crecen con el tiempo. También se puede ver que la erosión más grande se da una vez la presa se rompe y el frente de onda allí generado desplaza una gran cantidad de sedimento haciendo que el lecho sufra un hundimiento durante los primeros instantes del experimento.



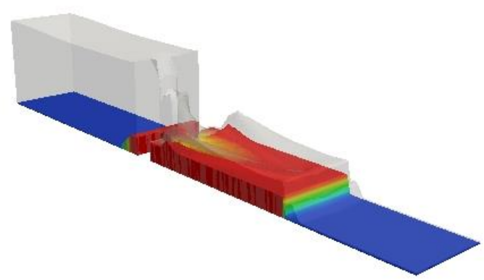
a1)



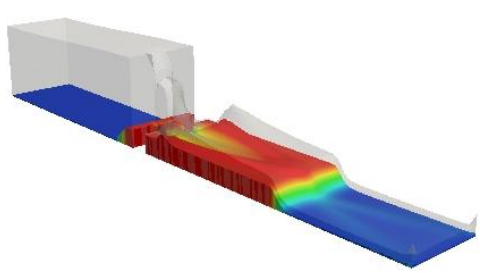
a2)



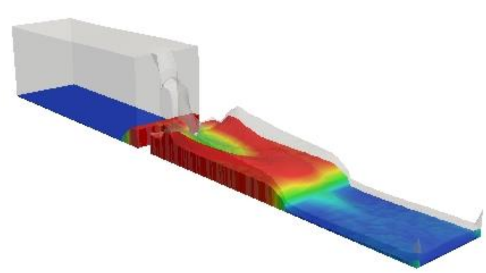
b1)



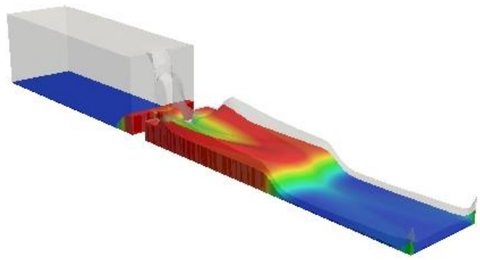
b2)



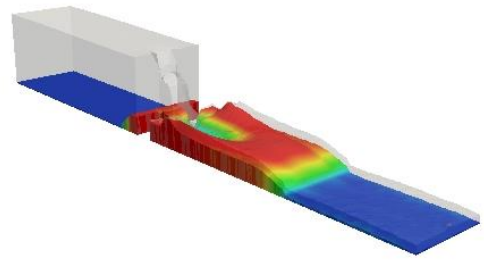
c1)



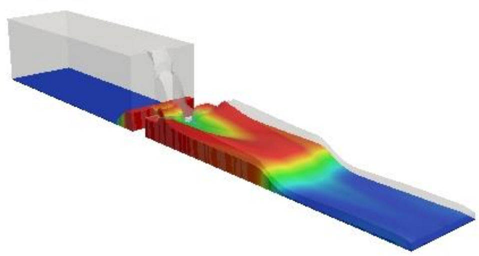
c2)



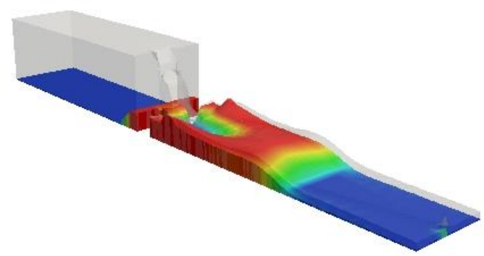
d1)



d2)



e1)



e2)

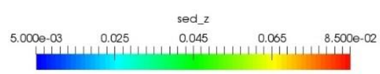
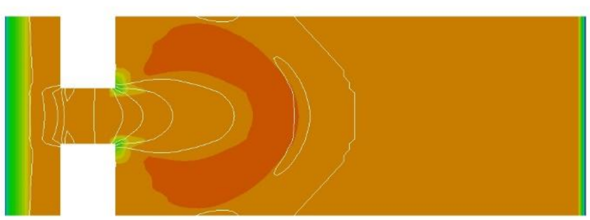
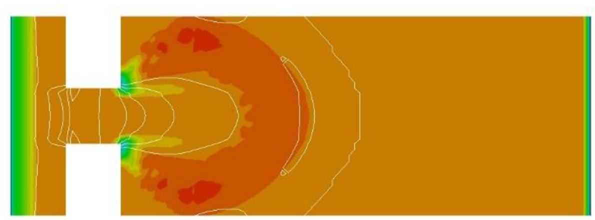


Figura 68. Evolución del fluido y del sedimento en los instantes a)2s, b) 5s, c)10s, d)15s y e)20s para los modelos 1) MPM y 2) MPM-Smart



a1)



a2)

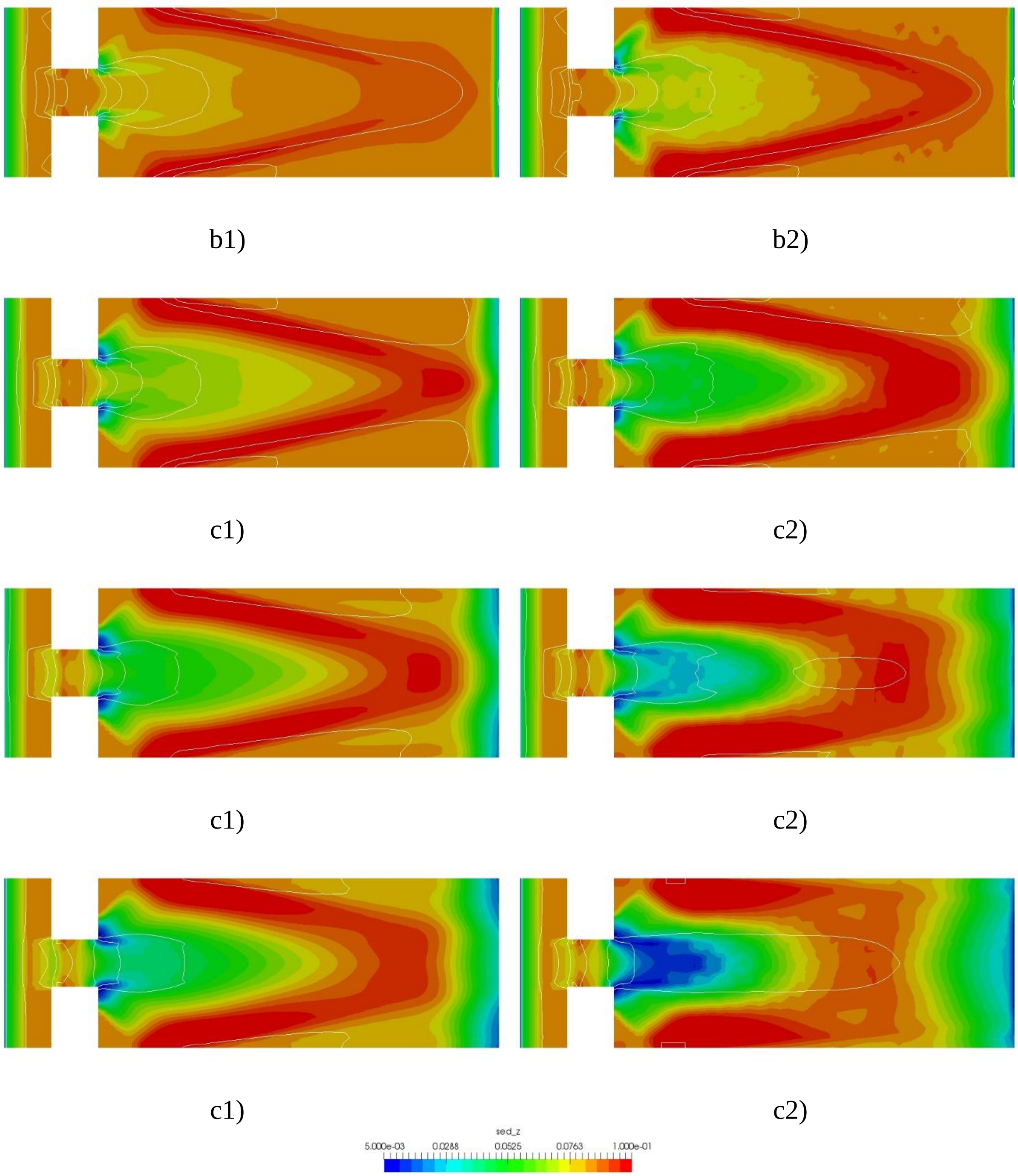
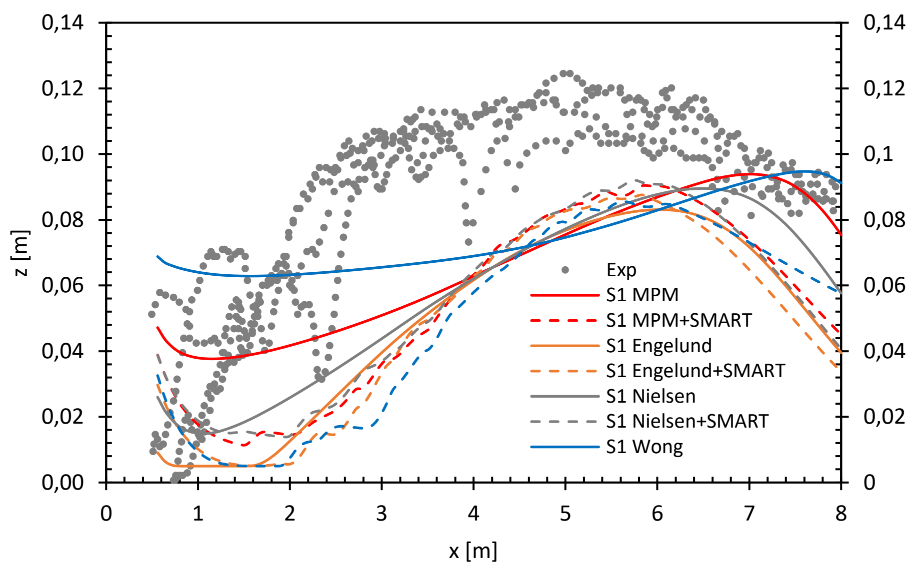
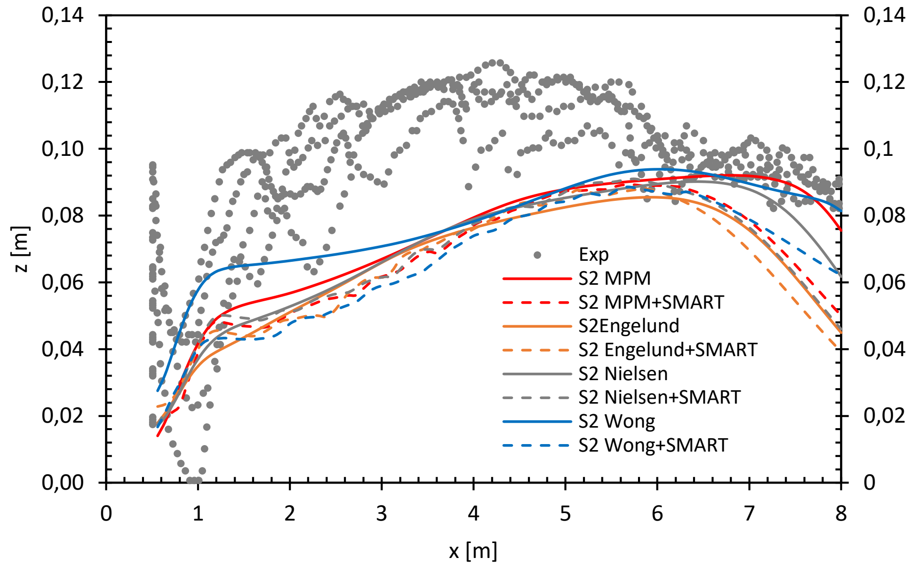


Figura 69. Evolución del sedimento en los instantes a)2s, b) 5s, c)10s, d)15s y e)20s para los modelos 1) MPM y 2) MPM-Smart

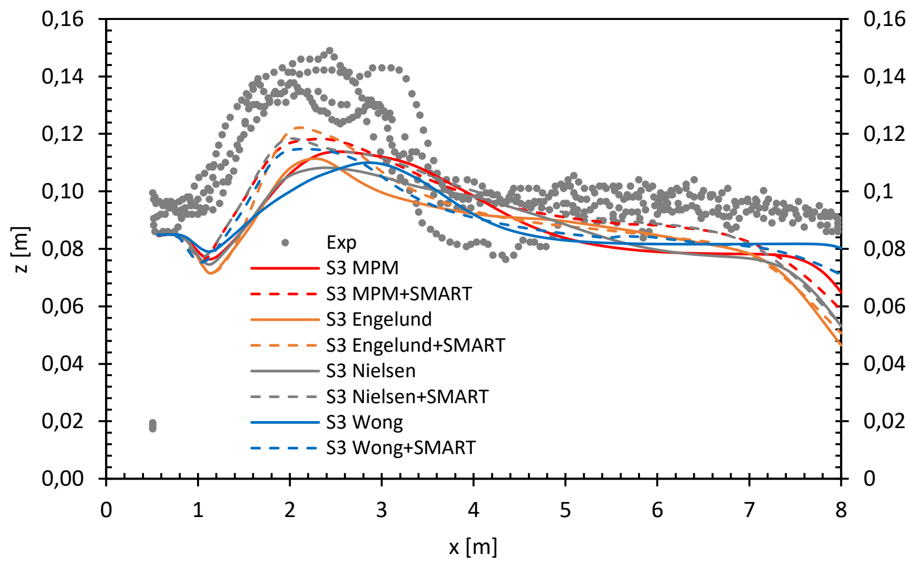
Por otra parte, se realizaron simulaciones considerando las fórmulas para la descarga de sedimento de Engelund, Nielsen y Wong, estas se combinaron con el modelo Smart con el fin de observar el efecto que este tiene sobre los perfiles de elevación de sedimento y los resultados se presentan en la *Figura 70.* Perfiles de la elevación del sedimento medidos en las secciones a) S1, b) S2 y c) S3 para el problema rotura de presa simétrica 2D sobre un suelo erosionable utilizando los modelos MPM, Engelund, Nielsen y Wong para la descarga de sedimento.. Estos resultados refuerzan el hecho observado con el modelo MPM que cuando no se tienen en cuenta las pendientes locales del sedimento los perfiles obtenidos son más suaves y por lo tanto el transporte de sedimento observado es menor. En general todos los modelos siguen la trayectoria de los datos experimentales, especialmente en las secciones S2 y S3 y en una menor medida en la sección S1 específicamente en los puntos más cercanos a la ubicación de la compuerta de la presa donde la erosión es marcada por la alta energía que tiene el flujo en esta zona.



a)



b)



c)

Figura 70. Perfiles de la elevación del sedimento medidos en las secciones a) S1, b) S2 y c) S3 para el problema rotura de presa simétrica 2D sobre un suelo erosionable utilizando los modelos MPM, Engelund, Nielsen y Wong para la descarga de sedimento.

4.3.4 Rotura de Presa Sobre un Terraplén Erosionable

Este problema se presenta con el fin de validar la solución implementada sobre ondas de inundación que impactan sobre obstáculos erosionables. Este experimento fue diseñado y llevado a cabo en el laboratorio de la ingeniería del agua LIA (*Laboratory of Water Engineering*) de la Universidad de Cassino y del Lazio Meridional (*University of Cassino and Southern Lazio*) y fue reportado por (Di Cristo *et al*., 2017). El experimento se desarrolló en un canal rectangular de 0.4m de ancho y 6.03m de largo. La compuerta de la presa se localizó a los 3m del canal (L_u=3m) y esta sección se utilizó como depósito del fluido, mientras que aguas abajo de la compuerta (L_d=3.03m) se dejó completamente seca y al final se ubicó una pared vertical. La presa rompe sobre un suelo de madera inclinado y posteriormente este se aplana antes de que la onda alcance el terraplén de arena que se localizó al final del canal. Un esquema del experimento se presenta en la *Figura 71*. Esquema del problema rotura de presa sobre un terraplén erosionable.. El suelo de madera tiene una pendiente del 5% y una longitud L_1=1m. El experimento consideró distintos ángulos de inclinación del banco de arena los cuales variaron entre 30º y 60º. El terraplén se construyó a partir de arena con las siguientes características: diámetro medio $d_{50} = 1.6mm$, densidad $\rho_s = 2560\, kg\, m^{-3}$ y porosidad $p = 0.47$. Dentro de la experimentación, además de considerar diferentes ángulos de inclinación del terraplén también se consideraron diferentes alturas de este (H_s) así como diferentes alturas de la presa (H_0). Las configuraciones de los experimentos simulados se resumen en la Tabla 25.

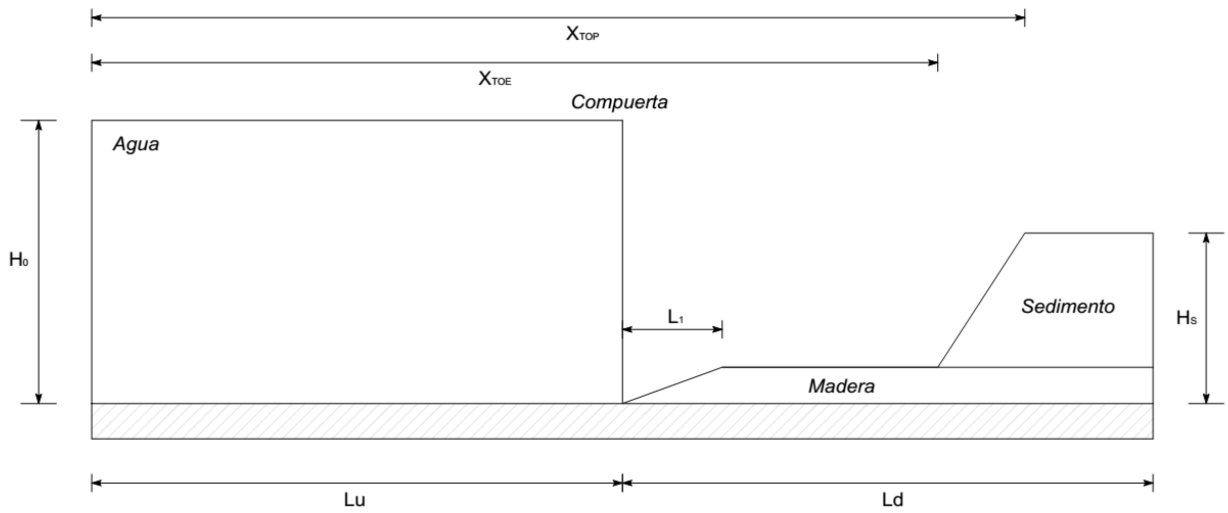


Figura 71. Esquema del problema rotura de presa sobre un terraplén erosionable.

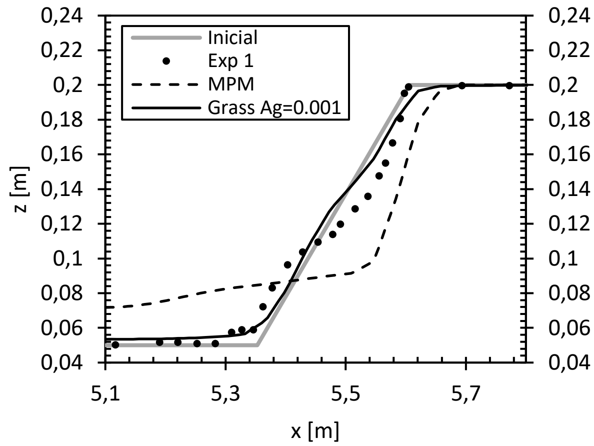
Tabla 25.

Configuraciones de los experimentos para el problema de rotura de presa sobre un terraplén erosionable.

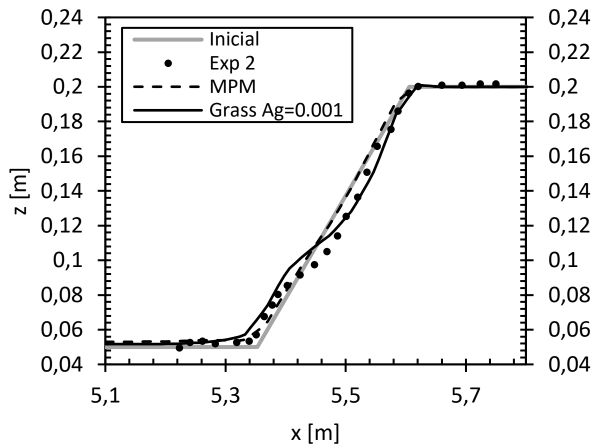
Test	ϕ[°]	H_s[m]	H_0[m]	X_{TOE}[m]	X_{TOP}[m]
1	30	0.20	0.20	5.353	5.606
2	30	0.20	0.15	5.353	5.608
3	30	0.15	0.25	5.347	5.520
4	60	0.20	0.20	5.353	5.446
5	60	0.20	0.15	5.347	5.439
6	60	0.15	0.25	5.347	5.411

Todas las simulaciones se llevaron a cabo hasta t=60s utilizando un mallado estructurado de 2016 elementos y además, en cada caso se utilizó el modelo MPM y el modelo de Grass con un Ag constante igual a 0.001. Resultados obtenidos y estado inicial del terraplén en cada caso se presentan la *Figura 72*. Como se observa, los mejores resultados se obtuvieron cuando se consideró un parámetro de interacción sedimento-fluido constante y por el contrario el modelo

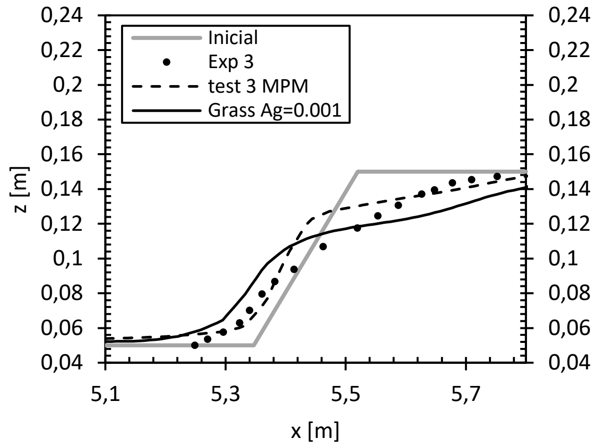
MPM sobrestima la erosión del terraplén en el caso 1 como se observa en la *Figura 72*a; y lo subestima en el caso 4, como se muestra en la *Figura 72*d.



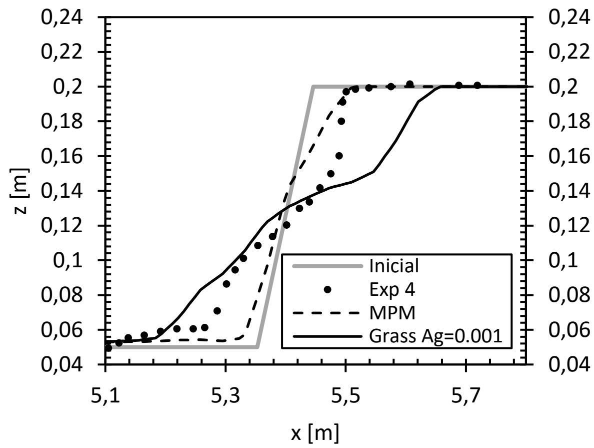
a)



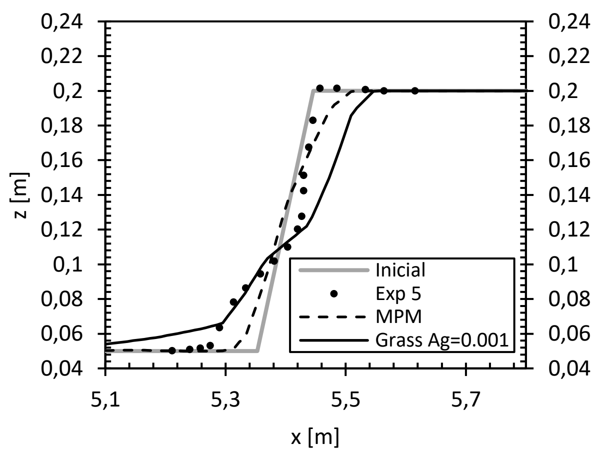
b)


Inicial
Exp 3
test 3 MPM
Grass Ag=0.001
z [m]
x [m]

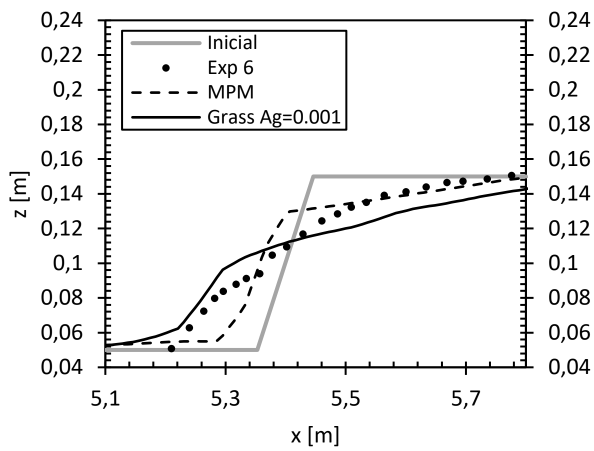
c)


Inicial
Exp 4
MPM
Grass Ag=0.001
z [m]
x [m]

d)


Inicial
Exp 5
MPM
Grass Ag=0.001
z [m]
x [m]

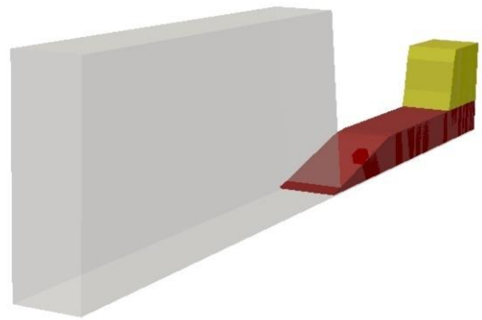
e)



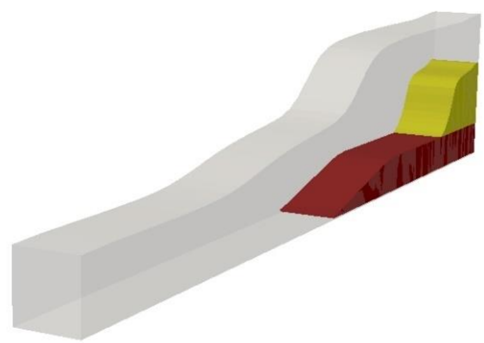
f)

Figura 72. Perfiles de la elevación del terraplén en el instante t=60s para los casos a)1, b)2, c)3, d)4, e)5 y f)6 utilizando los modelos MPM y Grass con Ag=0.001 para la descarga de sedimento.

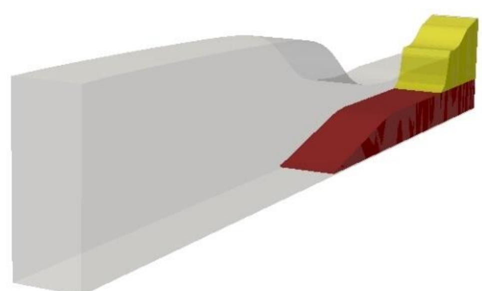
En la *Figura 73* se presenta un esquema de la evolución del fluido y del terraplén en los tiempos 0, 5, 10, 15 y 20s cuando se utilizó la formulación de Grass con un Ag constante igual a 0.001. En esta se pueden observar los principales mecanismos que definen la evolución de perfil del terraplén. En primer lugar ocurre el transporte de sedimento asociado al ascenso de la ola que golpea el terraplén cómo se observa en la *Figura 73*b. Posteriormente el fluido se refleja en la pared del canal y este se desplaza en dirección contraria provocando que el sedimento colapse en la misma dirección del fluido, cómo se muestra en la *Figura 73*c. Seguidamente el fluido sigue reflejándose en las paredes del canal y golpeando el sedimento provocando erosiones sucesivas hasta que alcanza el reposo. La magnitud del colapso y la evolución que presente el terraplén en el tiempo depende de la altura inicial del fluido y de la geometría del terraplén como se observa en los perfiles de sedimento obtenidos.



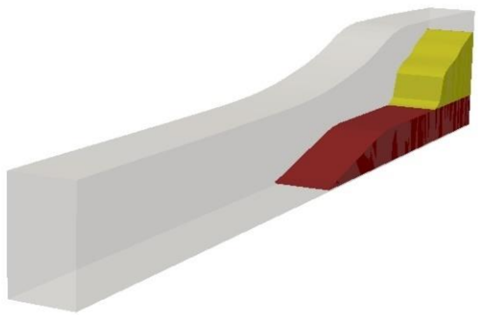
a)



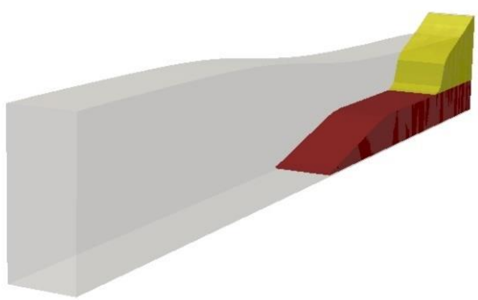
b)



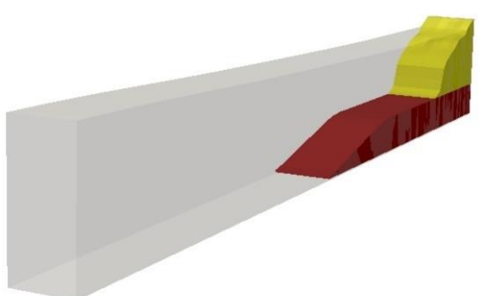
c)



d)



e)



f)

Figura 73. Evolución del fluido y del terraplén en los instantes a) 0s, b) 5s, c) 10s, d) 15s, e) 30s, f) 60s utilizando los modelos MPM y Grass con Ag=0.001 para la descarga de sedimento.

4.4 Conclusiones

En este capítulo se implementó con éxito una solución bidimensional desacoplada de la ecuación de Exner y las ecuaciones de aguas someras sobre lechos erosionables mediante el uso del esquema de Godunov y el solucionador de Riemman de Roe usando el método de los volúmenes finitos. Los resultados obtenidos muestran la importancia y la dependencia que tiene la fórmula utilizada para aproximar la descarga sólida del sedimento para ajustar el modelo implementado sobre cada caso de estudio. Lo anterior se debe a que cada modelo fue formulado a partir de distintos tipos de sedimento y por lo tanto cada uno tiene distintos esfuerzos críticos para diferentes características de sedimento. También, se evidenció que la solución implementada permitió un manejo adecuado del frente seco-mojado sobre lechos erosionables. Finalmente, todos los resultados obtenidos mostraron un buen ajuste con los datos experimentales mostrando así que fue posible utilizar el enfoque estable mediante la solución desacoplada de la hidrodinámica del fluido y la morfodinámica del lecho.

5. Conclusiones

En esta tesis se logró implementar exitosamente la solución numérica de las ecuaciones de aguas someras y el transporte de sedimento. La discretización se realizó mediante el método de los volúmenes finitos y todos fluxes numéricos se calcularon utilizando el método de Godunov y el solucionador de Riemann de Roe. Es importante remarcar la naturaleza hiperbólica del sistema estudiado y por lo tanto se debe tener siempre presente que las propiedades de un esquema de discretización numérica NUNCA pueden estar en contradicción con la física que pretende describir. Por lo tanto, es vital comprender la naturaleza del problema y las propiedades físicas de las ecuaciones que se van a discretizar y la interpretación matemática de estas para de esta manera aproximar adecuadamente cada uno de los fluxes numéricos que atraviesan cada una de las caras de los volúmenes de control.

En el capítulo 2 se resolvió y se validó la solución de las ecuaciones de aguas someras y además se formuló un algoritmo nuevo para tratar el frente seco mojado y compensar el desbalance generado por la utilización de la aproximación de película delgada. En resumen, se trata de una estrategia que permite realizar la compensación del desbalance únicamente sobre los elementos secos que resultan con alturas negativas y distribuyéndolo sobre las celdas que cambian de altura en el instante de tiempo anterior garantizando la positividad del esquema y el balance de masa en todo momento. En este apartado se debe subrayar que esta estrategia numérica no ha sido reportada en trabajos anteriores y resultó ser versátil y eficiente ya que la misma fue implementada de manera similar en problema del transporte de sedimento.

La solución implementada mostró ser balanceada y además presentó un correcto manejo del frente seco-mojado sobre lechos planos y con pendientes pronunciadas como se evidenció en la solución de los problemas de rotura de presa con distintos cambios de altura del suelo. Los resultados mostraron que el esquema también provee una buena predicción de los patrones de flujo sobre distintos regímenes de flujo, por supuesto, limitados a las condiciones sobre las cuales el modelo se deriva. Finalmente se logró reproducir satisfactoriamente una situación experimental donde una ola de tsunami llega a la costa, en esta se pudo evidenciar el manejo del frente seco mojado propuesto también permite reproducir un evento de ola de tsunami, al menos, para este caso experimental estudiado.

En el capítulo 3 se incluyeron los esquemas de variación total decreciente en la solución hidrodinámica. El esquema implementado fue de tipo WAF-TVD el cual incluyó el esquema de Godunov y el solucionador de Roe para el primer orden y el esquema Lax-Wendrof para el segundo orden de precisión. Se esperaba que los esquemas TVD redujeran el comportamiento oscilatorio de las soluciones en presencia de grandes gradientes en todo el dominio espacial. Sin embargo, en problemas de rotura de presa se encontró que esta reducción únicamente se dio en algunas zonas del dominio (especialmente en la parte alta de la presa) comparadas con la solución sin esquemas cuando se utilizó la discretización temporal explícita. Además, cuando se consideraron problemas con fondo seco la solución se hizo más dispersiva en la zona baja de la presa mientras que dicha dispersión se trasladó hacia la región donde ocurre la rotura en los casos cuando el fondo estaba mojado. Por lo tanto, la reducción de la dispersión no está garantizada únicamente por el uso de los esquemas TVD. Por otra parte, también se estudió el efecto de los esquemas de discretización temporal implícito y Crank-Nicolson sobre los esquemas de variación total creciente y se encontró que en estos no mejoran la solución sin esquema TVD.

Así mismo, se implementó la solución de las ecuaciones de aguas someras utilizando un esquema de discretización temporal implícito, lo cual permitió utilizar valores de CFL superiores a 1 reduciendo de esta manera el tiempo de cálculo de la solución sacrificando muy poca precisión en los resultados en todos los casos estudiados que incluyeron distintos regímenes de flujo y condiciones de frontera. Utilizar CFL superiores a 1 permitiría aproximar rápidamente cualquier problema y obtener una solución de manera expresa en casos donde el costo computacional sea muy alto. En este aspecto se debe remarcar que la naturaleza hiperbólica inherente al problema hace que los mejores resultados siempre se obtengan utilizando esquemas explícitos, no obstante, en esta tesis le logró implementar una solución implícita.

Finalmente, en el capítulo 4 se logró implementar con éxito una solución bidimensional desacoplada del transporte de sedimento y el campo de flujo. El transporte de sedimento se aproximó con la ecuación de Exner mientras que el campo de flujo se calculó con las ecuaciones de aguas someras y en ambos casos se utilizó el esquema de Godunov y el solucionador de Riemann de Roe. Además, se implementaron distintas formulaciones para aproximar la descarga sólida del sedimento y estas se adaptaron al modelo de Grass. Los resultados obtenidos evidenciaron la importancia y la dependencia que tienen dichas fórmulas en el ajuste de cada modelo implementado en cada uno de los casos estudiados. Lo anterior se debe a que cada modelo fue formulado a partir de distintos tipos de sedimento y por lo tanto cada uno presenta distintos esfuerzos críticos. Por otra parte, se puedo ver que la solución implementada permitió un manejo adecuado del frente seco-mojado sobre lechos erosionables dado que todos los resultados obtenidos mostraron un buen ajuste con los datos experimentales mostrando así que fue posible utilizar el enfoque estable mediante la solución desacoplada de la hidrodinámica del fluido y la morfodinámica del lecho.

En definitiva, se consiguió implementar un solucionador para resuelve numéricamente la hidrodinámica y el transporte de sedimentos de las aguas someras. Este solucionador incluye la discretización temporal explícita e implícita y esquemas TVD con 7 funciones limitadoras del flux numérico-diferentes. Además, tiene en cuenta condiciones de frontera cerradas y abiertas que se adaptan a distintos regímenes de flujo. Por otra parte, la morfodinámica se modela a través de la ecuación de Exner y cinco diferentes modelos para aproximar la descarga sólida los cuales se adaptan al modelo de Grass.

Dadas las limitaciones físicas que se tienen al realizar mediciones en los eventos de inundación reales los cuales en ocasiones desencadenan el transporte de sedimento y la gran variabilidad espacial y temporal de la hidrodinámica y la morfología del lecho; un solucionador con múltiples alternativas y versatilidad, como el implementado en este trabajo, permite adaptar la solución a las dichas complejidades, incluidas las propias del ambiente natural, y evaluar la evolución morfológica del lecho de sedimentos asociada a la hidrodinámica del fluido.

6. Trabajo Futuro

Como se mencionó a lo largo de esta tesis, el transporte de sedimento se resolvió a través de una aproximación desacoplada con la hidrodinámica del flujo. Por lo tanto, se podría evaluar el efecto que tendría el acople de los dos problemas y su solución simultánea y ver si es posible ajustar aún más la respuesta de los problemas experimentales simulados en este trabajo.

Referencias bibliográficas

Alcrudo, Francisco, and Pilar Garcia-Navarro. 1993. "A High-Resolution Godunov-Type Scheme in Finite Volumes for the 2D Shallow-Water Equations." *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 16:489–505.

Alias, Nor Azlina, Qiuhua Liang, and Georges Kesserwani. 2011. "A Godunov-Type Scheme for Modelling 1D Channel Flow with Varying Width and Topography." *Computers and Fluids* 46 (1). Elsevier Ltd:88–93. https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.12.009.

Aureli, F., A. Maranzoni, P. Mignosa, and C. Ziveri. 2008. "A Weighted Surface-Depth Gradient Method for the Numerical Integration of the 2D Shallow Water Equations with Topography." *Advances in Water Resources* 31 (7):962–74. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2008.03.005.

Bai, Feng-peng, Zhong-hua Yang, and Wu-gang Zhou. 2018. "Study of Total Variation Diminishing (TVD) Slope Limiters in Dam-Break Flow Simulation." *Water Science and Engineering* 11 (1):68–74. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.wse.2017.09.004.

Begnudelli, L, and B F Sanders. 2007. "Simulation of the St. Francis Dam-Break Flood." *Journal of Engineering Mechanics* 133 (7):1200.1212. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133.

Castro Díaz, M. J., E. D. Fernández-Nieto, and A. M. Ferreiro. 2008. "Sediment Transport Models in Shallow Water Equations and Numerical Approach by High Order Finite Volume Methods." *Computers and Fluids* 37 (3):299–316. https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2007.07.017.

Chesher, T.J., H.M. Wallace, I.C Meadowcroft, and H.N. Southgate. 1993. “PISCES: A Morphodynamic Coastal Area Model First Annual Report.”

Cristo, Cristiana Di, Stefania Evangelista, Massimo Greco, Michele Iervolino, Angelo Leopardi, Andrea Vacca, Cristiana Di, et al. 2017. “Dam-Break Waves over an Erodible Embankment : Experiments and Simulations.” *Journal of Hydraulic Research*, 1–14. https://doi.org/10.1080/00221686.2017.1313322.

Cunge, J.A., F.M. Holly, and A. Verway. 1980. *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Pitman.

Darwish, M. S., and F. Moukalled. 2003. “TVD Schemes for Unstructured Grids.” *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46 (4):599–611. https://doi.org/10.1016/S0017-9310(02)00330-7.

Delestre, Olivier, Carine Lucas, Pierre-Antoine Ksinant, Frédéric Darboux, Christian Laguerre, T Tuoi Vo, François James, and Stéphane Cordier. 2013. “SWASHES: A Compilation of Shallow Water Analytic Solutions for Hydraulic and Environmental Studies.” *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 72 (September 2012):269–98. https://doi.org/10.1002/fld.

Duran, A., Q. Liang, and F. Marche. 2013. “On the Well-Balanced Numerical Discretization of Shallow Water Equations on Unstructured Meshes.” *Journal of Computational Physics* 235. Elsevier Inc.:565–86. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.10.033.

Engelund, Frank., and Jergen. Fredsee. 1976. “A Sediment Transport Model for Straight Alluvial Channels.” *Nordic Hydrology* 7 (5):293–306.

Fernández-Pato, J., M. Morales-Hernández, and P. García-Navarro. 2018. “Implicit Finite Volume Simulation of 2D Shallow Water Flows in Flexible Meshes.” *Computer Methods in Applied*

Mechanics and Engineering 328:1–25. https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.08.050.

Goutiere, Laurent, Sandra Soares-Frazão, and Yves Zech. 2011. "Dam-Break Flow on Mobile Bed in Abruptly Widening Channel : Experimental Data." *Journal of Hydraulic Research* 3:367–71. https://doi.org/10.1080/00221686.2010.548969.

Guerra, Maricarmen, Rodrigo Cienfuegos, Cristian Escauriaza, Fabien Marche, and José Galaz. 2014. "Modeling Rapid Flood Propagation Over Natural Terrains Using a Well-Balanced Scheme." *Journal of Hydraulic Engineering* 140 (7):1–11. https://doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000881.

Hirsch, C. 2007. *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. Elsevier Science.

Huang, Yuxin, Ningchuan Zhang, and Yuguo Pei. 2013. "Well-Balanced Finite Volume Scheme for Shallow Water Flooding and Drying over Arbitrary Topography." *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics* 7 (1):40–54. https://doi.org/10.1080/19942060.2013.11015452.

Hudson, J. 2001. "Numerical Techniques for Morphodynamic Modelling." University of Reading.

Hudson, Justin, and Peter K Sweby. 2003. "Formulations for Numerically Approximating Hyperbolic Systems Governing Sediment Transport" 19 (December):225–52.

Iervolino, M, A Leopardi, S Soares Frazão, and Y Zech. 2010. "2D-H Numerical Simulation of Dam-Break Flow on Mobile Bed with Sudden Enlargement." In *2D-H Numerical Simulation of Dam-Break Flow on Mobile Bed with Sudden Enlargement*. River Flow 2010.

Jeng, Yih Nen, and Uon Jan Payne. 1995. "An Adaptive TVD Limiter." *Journal of Computational Physics* 118:229–41.

Juez, C., J. Murillo, and P. García-Navarro. 2013. "Numerical Assessment of Bed-Load Discharge

Formulations for Transient Fl Ow in 1D and 2D Situations.” *Journal of Hydroinformatics* 15.4:1234–57. https://doi.org/10.2166/hydro.2013.153.

———. 2014. “A 2D Weakly-Coupled and Efficient Numerical Model for Transient Shallow Flow and Movable Bed.” *Advances in Water Resources* 71. Elsevier Ltd:93–109. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2014.05.014.

Kärnä, Tuomas, Benjamin de Brye, Olivier Gourgue, Jonathan Lambrechts, Richard Comblen, Vincent Legat, and Eric Deleersnijder. 2011. “A Fully Implicit Wetting-Drying Method for DG-FEM Shallow Water Models, with an Application to the Scheldt Estuary.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (5–8):509–24. https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.07.001.

Khan, Abdul A, and Lai Wencong. 2017. *Modeling Shallow Water Flows Using the Discontinuous Galerkin Method*.

Leveque, Randall J. 2004. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

LeVeque, Randall J., and David L. George. 2008. “High-Resolution Finite Volume Methods for the Shallow Water Equations With Bathymetry and Dry States” M:43–73. https://doi.org/10.1142/9789812790910_0002.

Li, Lian xia, Hua sheng Liao, and Li jian Qi. 2008. “An Improved R-Factor Algorithm for TVD Schemes.” *International Journal of Heat and Mass Transfer* 51 (3–4):610–17. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.04.051.

Li, Shuangcai, and Christopher J. Duffy. 2012. “Fully-Coupled Modeling of Shallow Water Flow and Pollutant Transport on Unstructured Grids.” *Procedia Environmental Sciences* 13 (2011):2098–2121. https://doi.org/10.1016/j.proenv.2012.01.200.

Liang, Q., A. G.L. Borthwick, and G. Stelling. 2004. "Simulation of Dam- and Dyke-Break Hydrodynamics on Dynamically Adaptive Quadtree Grids." *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 46 (2):127–62. https://doi.org/10.1002/fld.748.

Liang, Qiuhua, and Alistair G.L. Borthwick. 2009. "Adaptive Quadtree Simulation of Shallow Flows with Wet-Dry Fronts over Complex Topography." *Computers and Fluids* 38 (2). Elsevier Ltd:221–34. https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2008.02.008.

Lin, Gwo-Fong, Jihn-Sung Lai, and Wen-Dar Guo. 2003. "Finite-Volume Component-Wise TVD Schemes for 2D Shallow Water Equations." *Advances in Water Resources* 26:861–73. https://doi.org/10.1016/S0309-1708(03)00075-7.

Liu, Philip L-F, Harry Yeh, and Costas Synolakis. 2008. *Advanced Numerical Models for Simulating Tsunami Waves and Runup*. WORLD SCIENTIFIC. https://doi.org/10.1142/6226.

Liu, Xiaofeng, Gary Parker, and Marcelo H. Garcia. 2010. "Numerical Modeling of the St. Clair River and Sediment Mobility Analysis." *World Environmental and Water Resources Congress 2010: Challenges of Change - Proceedings of the World Environmental and Water Resources Congress 2010*, 1412–20. https://doi.org/10.1061/41114(371)149.

Louaked, M, and L Hanich. 1998. "TVD Scheme for the Shallow Water Equations." *Journal of Hydraulic Research* 36:3:363–78. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/00221689809498624.

Lu, Xinhua, Bing Mao, Xiaofeng Zhang, and Shi Ren. 2020. "Well-Balanced and Shock-Capturing Solving of 3D Shallow-Water Equations Involving Rapid Wetting and Drying with a Local 2D Transition Approach." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 364. Elsevier B.V.:112897. https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112897.

Marras, Simone, Michal A. Kopera, Emil M. Constantinescu, Jenny Suckale, and Francis X. Giraldo. 2016. "A Continuous/discontinuous Galerkin Solution of the Shallow Water Equations with Dynamic Viscosity, High-Order Wetting and Drying, and Implicit Time Integration," 1476–93. http://arxiv.org/abs/1607.04547.

Martins, Ricardo, Jorge Leandro, and Slobodan Djordjević. 2018. "Wetting and Drying Numerical Treatments for the Roe Riemann Scheme." *Journal of Hydraulic Research* 56 (2):256–67. https://doi.org/10.1080/00221686.2017.1289256.

Medeiros, Stephen C, and Scott C Hagen. 2013. "Review of Wetting and Drying Algorithms for Numerical Tidal Flow Models." *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 71 (4):473–87. https://doi.org/10.1002/fld.3668.

Meyer-Peter, E., and R. Müller. 1948. "Report on the 2nd Meeting International Association Hydraulic Structure Research." In *Formulas for Bed-Load Transport*. Stockholm, Sweden.

Murillo, J, and P. García-Navarro. 2010. "An Exner-Based Coupled Model for Two-Dimensional Transient Flow over Erodible Bed." *Journal of Computational Physics* 229 (23). Elsevier Inc.:8704–32. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.08.006.

Nielsen, P. 1992. *Coastal Bottom, Boundary Layers and Sediment Transport*. Singapore: Advanced Series on Ocean Engineering 4. World Scientific Publishing.

Nikolos, I. K., and A. I. Delis. 2009. "An Unstructured Node-Centered Finite Volume Scheme for Shallow Water Flows with Wet/dry Fronts over Complex Topography." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (47–48). Elsevier B.V.:3723–50. https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.08.006.

Ouyang, Chaojun, Siming He, and Qiang Xu. 2015. "MacCormack-TVD Finite Difference Solution for Dam Break Hydraulics over Erodible Sediment Beds." *Journal of Hydraulic*

Engineering 141 (2014):1–9. https://doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000986.

Seyoum, Solomon Dagnachew, Zoran Vojinovic, Roland K. Price, and Sutat Weesakul. 2012. "Coupled 1D and Noninertia 2D Flood Inundation Model for Simulation of Urban Flooding." *Journal of Hydraulic Engineering* 138 (1):23–34. https://doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000485.

Smart, G.M. 1984. "Sediment Transport Formula for Steep Channels." *Journal of Hydraulic Engineering* 110 (3):267–76.

Soares-Frazão, Sandra, Ricardo Canelas, Zhixian Cao, Luis Cea, Chaudhry Hanif. M., Andres Die Moran, Kamal El Kadi, et al. 2012. "Dam-Break Flows over Mobile Beds : Experiments and Benchmark Tests for Numerical Models." *Journal of Hydraulic Research* 50:4 (September 2014):364–75. https://doi.org/10.1080/00221686.2012.689682.

Soares-Frazão, Sandra, and Yves Zech. 2011. "HLLC Scheme with Novelwave-Speed Estimators Appropriate for Two-Dimensional Shallow-Water Flowon Erodible Bed." *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 66:1019–36. https://doi.org/10.1002/fld.2300.

Soares Frazão, S, D Lories, S Taminiau, and Y Zech. 2003. "Dam-Break Flow in a Channel with a Sudden Enlargement." In *Dam-Break Flow in a Channel with a Sudden Enlargement*, 221–28. Thessaloniki, Greece: XXX IAHR Congress.

Spinewine, B., and Y. Zech. 2007. "Small-Scale Laboratory Dam-Break Waves on Movable Beds." *Journal of Hydraulic Research* 45:73–86. https://doi.org/10.1080/00221686.2007.9521834.

Tingsanchali, Tawatchai, and Chaiyuth Chinnarasri. 2001. "Numerical Modelling of Dam Failure due to Flow Overtopping." *Hydrological Sciences-Journal* 46:113–30. https://doi.org/10.1080/02626660109492804.

Toro, Eleuterio F. 2009. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. 3rded. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/b79761.

Tseng, Ming Hseng, and Chia R Chu. 2000. "Two-Dimensional Shallow Water Flows Simulation Using TVD-MacCormack Scheme." *Journal of Hydraulic Research* 38:2:123–31.

Unami, Koichi, Toshihiko Kawachi, Gordana Kranjac-Berisavljevic, Felix Kofi Abagale, Shigeya Maeda, and Junichiro Takeuchi. 2009. "Case Study: Hydraulic Modeling of Runoff Processes in Ghanaian Inland Valleys." *Journal of Hydraulic Engineering* 135 (7):539–53. https://doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000041.

Valiani, A., and V. Caleffi. 2017. "Momentum Balance in the Shallow Water Equations on Bottom Discontinuities." *Advances in Water Resources* 100. Elsevier Ltd:1–13. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2016.12.002.

Valiani, Alessandro, Valerio Caleffi, and Andrea Zanni. 2002. "Case Study: Malpasset Dam-Break Simulation Using a Two-Dimensional Finite Volume Method." *Journal of Hydraulic Engineering* 128 (5):460–72. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2002)128:5(460).

van't Hof, Bas, and Edwin A.H. Vollebregt. 2005. "Modelling of Wetting and Drying of Shallow Water Using Artificial Porosity." *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 48 (11):1199–1217. https://doi.org/10.1002/fld.959.

Wang, J. S, H. G Ni, and Y. S He. 2000. "Finite-Difference TVD Scheme for Computation of Dam-Break Problems." *Journal of Hydraulic Engineering* 126 (April):253–62.

Wong, Miguel, and Gary Parker. 2006. "Reanalysis and Correction of Bed-Load Relation of Meyer-Peter and Müller Using Their Own Database." *Journal of Hydraulic Engineering* 132:1159–68.

Wu, Weiming, and Sam S.Y. Wang. 2007. "Application of a Depth-Averaged 2-DModel in River

Restoration.” *Examining the Confluence of Environmental and Water Concerns - Proceedings of the World Environmental and Water Resources Congress 2006*, 1–10. https://doi.org/10.1061/40856(200)327.

Xing, Yulong, and Chi Wang Shu. 2011. “High-Order Finite Volume WENO Schemes for the Shallow Water Equations with Dry States.” *Advances in Water Resources* 34 (8). Elsevier Ltd:1026–38. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.05.008.

Zhang, Mingliang, and W. M. Wu. 2011. “A Two Dimensional Hydrodynamic and Sediment Transport Model for Dam Break Based on Finite Volume Method with Quadtree Grid.” *Applied Ocean Research* 33 (4):297–308. https://doi.org/10.1016/j.apor.2011.07.004.