

ALGUNAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

ALEXÁNDER MARTÍNEZ SUÁREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2004

ALGUNAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

ALEXÁNDER MARTÍNEZ SUÁREZ

Monografía presenta como requisito para optar al
título de Licenciado en matemáticas

Director

RAFAEL ANTONIO CASTRO TRIANA

Doctor en matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2004

AGRADECIMIENTOS

Gracias doy:

A Dios por las bendiciones, virtudes y oportunidades dadas en todos los momentos de mi vida, en especial por esta meta alcanzada.

A mi padre Alvaro Martínez, mi madre Gloria Suárez y mis hermanas por su confianza, por sus esfuerzos, sus consejos y todos momentos felices.

A todas las demás personas que quiero y estimo de corazón por su amistad, compañía y alientos inculcados.

OBJETIVOS

- Hacer un análisis detallado de algunas transformaciones geométricas mostrando ejemplos que ilustren la aplicación de dichos conceptos.
- Plantear de forma práctica y útil las definiciones de dichas transformaciones en diferentes campos.
- Seleccionar una gama de problemas de interés en diversas áreas donde las transformaciones sean base fundamental para su resolución.

JUSTIFICACIÓN

La intención del trabajo realizado es formar una cultura matemática donde se fundamente la aplicación a problemas cotidianos relacionados con el tema.

Las transformaciones están presente en casi todas las ramas de las matemáticas y sus aplicaciones son numerosas, es por eso que pretendo dar a conocer problemas con sentido práctico, los cuales involucren los conceptos de transformaciones y además mostrar a las tranformaciones como una herramienta eficaz para transformar un problema en otro cuya solución ya es conocida.

TABLA DE CONTENIDO

Introducción	1
1. Preliminares	2
1.1 Transformación	2
1.2 Grupos de Transformaciones	5
2. Translaciones y rotaciones	7
2.1 Translaciones	7
2.1 Translaciones	10
2.3 Condiciones para que una transformación lineal sea una Rotación	14
2.4 Producto de rotaciones y translaciones	19
2.5 Aplicaciones de translaciones y rotaciones a la ecuación general de segundo grado	26
3. Simetrías	35
3.1 Simetría respecto a un punto	35
3.2 Simetría respecto a un eje	37
3.3 Producto de simetrías	44
3.4 Producto de simetrías respecto a un eje y una translación paralela a este	46
3.5 Aplicaciones de las simetrías	51
3.5.1 Aplicaciones de las simetrías a la geometría	51
3.5.2 Aplicaciones de las simetrías a la química	54
4. Congruencias	55
5. Homotecias	64
5.1 Transformación inversa de una homotecia	66
5.2 Condiciones para ser una homotecia	67
5.3 Producto de homotecias	68

5.4	Circunferencias homotéticas	70
5.5	Aplicaciones de las homotecias	71
5.5.1	Aplicaciones en la astronomía	72
5.5.2	Aplicaciones a la ingeniería	73
5.5.3	Aplicaciones a la matemática	75
6.	Afinidades	77
6.1	Clasificación de las afinidades	79
6.1.1	Propiedades de las afinidades centrales	81
6.1.2	Propiedades de las afinidades homológicas	81
	Bibliografía	83

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Rotación directa con centro A y ángulo μ .	11
Figura 2: Rotación que transforma al punto P en el punto P' .	12
Figura 3: Rotación que transforma el segmento \overline{PQ} en el segmento $\overline{P'Q'}$.	13
Figura 4: Gráfica y construcción del toro.	18
Figura 5: Rotación producto entre R y \mathcal{T} .	20
Figura 6: Rotación producto de centro A y ángulo $(\mu_1 + \mu_2)$ entre R_1 y R_2 .	22
Figura 7: Traslación y rotación de los ejes XY .	27
Figura 8: Representa las coordenadas y el ángulo que forma P con el eje X .	28
Figura 9: Gráfica de la elipse $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0$.	32
Figura 10: Gráfica de la elipse $6x''^2 + y''^2 = 1$.	34
Figura 11: Transformada de P mediante una simetría respecto a A .	36
Figura 12: Transformada de P mediante una simetría respecto a \overleftarrow{r} .	38
Figura 13: Gráfica de la curva $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 - 3 = 0$.	43
Figura 14: Gráfica de la función $f(x) = ax$, donde $\theta = \arctan a$.	43
Figura 15: Representación de $f(x) = ax + b$, cuando $a > 0$ y $a < 0$.	44
Figura 16: Ilustración de la transformación producto.	45
Figura 17: Correspondencia de P mediante la transformación \mathcal{TS} .	47
Figura 18: Ilustra la ubicación de las casas y el río.	51
Figura 19: Ilustra la ubicación de C en r .	52
Figura 20: Ilustra el ΔUVW inscrito en ΔABC .	53
Figura 21: Ilustra la forma de encontrar ΔUVW .	54
Figura 22: Dos segmentos congruentes.	56
Figura 23: Ilustración del ejemplo 5.1.	65
Figura 24: Correspondencia de P_1 y P_2 mediante H	65

Figura 25: Relación entre P y P' .	66
Figura 26: Dos homotecias que relacionan dos circunferencias.	71
Figura 27: Tubo negro orientado al sol.	72
Figura 28: Triángulo isósceles del tubo negro.	73
Figura 29: Puntos estratégicos para construcción del tunel.	74
Figura 30: Monte Castro bordeado por segmentos.	75
Figura 31: Deposito cónico.	75
Figura 32: Transformaciones aplicadas a un triángulo.	76

RESUMEN

TITULO: ALGUNAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS*

AUTOR: ALEXANDER MARTÍNEZ SUÁREZ **

PALABRAS CLAVES: Transformaciones, traslaciones, rotaciones, simetrías, congruencias y homotecias.

RESUMEN:

Ciertas correspondencias son fundamentales para la matemática y la solución de problemas. Esto conlleva a decir que las matemáticas además de ser una ciencia abstracta son una herramienta muy potente en la solución o verificación de diversos problemas.

Este trabajo busca ampliar la concepción de las transformaciones en el plano, haciendo énfasis no solo en la parte geométrica, sino también en otras ramas de las ciencias, mostrando la utilidad, la importancia y la prioridad a la hora de resolver un ejercicio o problema.

El proyecto tiene como propósito dar a conocer ciertas transformaciones geométricas exponiendo sus diversas características, propiedades, aplicaciones y relaciones existentes entre ellas, de tal manera que sean vistas desde otro ángulo u inculquen un sentido de interés por la matemática que requiera recopilar y analizar datos importantes.

* Trabajo de Grado.

** Facultad de Ciencias, Licenciatura en Matemáticas, Rafael Castro.

SUMMARY

TITLE: SOME GEOMETRIC TRANSFORMATIONS*

AUTHOR: ALEXANDER MARTÍNEZ SUÁREZ **

KEY WORDS: Transformations, adjournments, rotations, symmetries, consistencies and homotecias.

SUMMARY:

Certain correspondences are fundamental for the mathematics and the solution of problems. This bears to say that the mathematics besides being an abstract science are a very potent tool in the solution or verification of diverse problems.

This work looks for to enlarge the conception of the transformations in the plane, making non-alone emphasis in the geometric part, but also in other branches of the sciences, showing the utility, the importance and the priority when solving an exercise or problem.

The project has as purpose to give to know certain geometric transformations exposing its diverse ones characteristic, properties, applications and existent relationships among them, in such a way that it is views from another angle or inculcate a sense of interest for the mathematics that requires to gather and to analyze important data.

*Work of Grade.

** Ability of Sciences, Degree in Mathematics, Rafael Castro.

INTRODUCCIÓN

Debido a que las transformaciones son parte esencial de la matemática y sus aplicaciones numerosas, se ha realizado este trabajo sobre algunas transformaciones geométricas que muestran la importancia que tienen en la resolución de ciertos problemas en diversas ciencias. Por otro lado mi aporte a este tema es la recopilación de ejemplos y aplicaciones de dichas transformaciones geométricas, con el fin de inculcar un sentido de interés e importancia a esta parte de la matemática que es trabajada en otras ciencias como la química, la ingeniería, etc. Además en el proyecto se hace un análisis a algunas transformaciones geométricas en base a sus definiciones, mostrando las relaciones entre ellas de una forma estructurada.

Capítulo 1

Preliminares

Las definiciones dadas en este capítulo, son fundamentales y muy tenidas en cuenta en la solución de problemas y propiedades características de las transformaciones. Todas las definiciones mostradas sobre las transformaciones en este trabajo están dadas en el plano \mathbb{R}^2 .

1.1. Transformación

Definición 1.1 *Una transformación puntual en \mathbb{R}^2 , es función que a cada punto P que pertenece a \mathbb{R}^2 , le hace corresponder un punto P' que pertenece a \mathbb{R}^2 .*

Si \mathcal{T} representa una transformación puntual, para indicar que P' es el transformado de P , se escribe $P' = \mathcal{T}(P)$.

Ejemplo 1.1 *Sea \mathcal{T} la transformación definida por $\mathcal{T}(x, y) = (2x + 3y, x + 2y)$, entonces*

$\mathcal{T}(1, 0) = (2, 1)$, es decir, el correspondiente de $(1, 0)$ es $(2, 1)$,

$\mathcal{T}(1, 1) = (5, 3)$, es decir, el correspondiente de $(1, 1)$ es $(5, 3)$.

Existen otras transformaciones que no son puntuales, es decir que no siempre a un punto le hace corresponder otro punto, sino otro elemento, por ejemplo una recta. El trabajo se inclina por las transformaciones puntuales o de correspondencia punto a punto.

Conviene tener presente ciertas transformaciones.

Definición 1.2 (Transformación inversa) Sea $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación puntual, P' el correspondiente de P mediante \mathcal{T} . Si P' es el transformado de un solo punto P , la transformación que hace corresponder al punto P' el punto P , se llama transformación inversa de \mathcal{T} , y se denota por \mathcal{T}^{-1} .

Ejemplo 1.2 Dada la transformación $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\mathcal{T}(x, y) = (2x + 3y, x + 2y - 1)$$

hallar la transformación inversa.

Solución: Sea $\mathcal{T}(x, y) = (x', y')$, esto es:

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 3y, \\ y' &= x + 2y - 1. \end{aligned}$$

Al despejar x e y se obtiene

$$\begin{aligned} x &= 2x' - 3y' - 3, \\ y &= 2y' - x' + 2. \end{aligned}$$

Es decir, la transformación inversa es

$$\mathcal{T}^{-1}(x', y') = (2x' - 3y' - 3, 2y' - x' + 2).$$

Definición 1.3 (Elementos unidos de una transformación) Sea \mathcal{T} una transformación puntual, los elementos unidos o puntos unidos de \mathcal{T} , son los puntos fijos de la transformación.

Ejemplo 1.3 Sea \mathcal{T} la transformación definida por $\mathcal{T}(x, y) = (4x + 6y, 2x + 3y - 1) = (x', y')$. Para determinar los puntos unidos, se resuelve la ecuación $\mathcal{T}(P) = P$, es decir el sistema:

$$\begin{aligned} x &= 4x + 6y, \\ y &= 2x + 3y - 1. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} -3x &= 6y, \\ -2y &= 2x - 1, \end{aligned}$$

de lo anterior

$$x = -2y \quad e \quad y = \frac{1 - 2x}{2}$$

de donde

$$x = 1 \quad e \quad y = \frac{-1}{2}$$

por consiguiente, el punto $(1, \frac{-1}{2})$ es un punto unido o fijo de \mathcal{T} .

Definición 1.4 Si todos los puntos de la transformación son puntos unidos, la transformación se llama identidad y esta definida por:

$$\begin{aligned} I &: A \rightarrow A \\ (x, y) &\rightarrow I(x, y) = (x, y). \end{aligned}$$

Esto significa que a cada punto le hace corresponder el mismo punto.

Definición 1.5 (Producto de transformaciones) Sean $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos transformaciones puntuales, la transformación producto $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ es la transformación compuesta, es decir el resultado de aplicar primero \mathcal{T}_1 y luego a este resultado aplicar \mathcal{T}_2

Ejemplo 1.4 Sean $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos transformaciones puntuales, tales que $\mathcal{T}_2(x, y) = (x + y, x)$ y $\mathcal{T}_1(x, y) = (2x + y, y - 1)$, hallar $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$.

Solución: Sea (x, y) un punto de \mathbb{R}^2 , su correspondiente mediante $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ es:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1(x, y) &= \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1(x, y)) \\ &= \mathcal{T}_2(2x + y, y - 1) \\ &= (2x + 2y - 1, 2x + y). \end{aligned}$$

Respecto a la notación $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ significa que primero se aplica \mathcal{T}_1 y luego \mathcal{T}_2 .

1.2. Grupos de transformaciones

Definición 1.6 Dado un conjunto \mathcal{T} no vacío de transformaciones puntuales, se dice que \mathcal{T} forma un grupo de transformaciones:

- i.) Si \mathcal{T}_i y $\mathcal{T}_j \in \mathcal{T}$ entonces $\mathcal{T}_i \mathcal{T}_j \in \mathcal{T}$
- ii.) Si $\mathcal{T} \in \mathcal{T}$ entonces $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{T}$.

Estas dos condiciones traen consigo ciertas características al conjunto, por ejemplo si \mathcal{T} es un grupo, la transformación identidad va a pertenecer a \mathcal{T} . En efecto, por ii.) \mathcal{T}^{-1} pertenece a \mathcal{T} y por i.) $\mathcal{T} \mathcal{T}^{-1} = I$ pertenece a \mathcal{T} .

Ejemplo 1.5 Sea \mathcal{T} el siguiente conjunto de transformaciones

$$\mathcal{T} = \{ \mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \mathcal{T}(x, y) = (x + a, y + b) / a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Pruebe que \mathcal{T} es un grupo de transformaciones.

Solución: Sean $\mathcal{T}_1(x, y) = (x + a_1, y + b_1)$ y $\mathcal{T}_2(x, y) = (x + a_2, y + b_2)$ dos transformaciones que pertenecen a \mathcal{T} , entonces

Para i.)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1(x, y) &= \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1(x, y)) \\ &= \mathcal{T}_2(x + a_1, y + b_1) \\ &= (x + a_1 + a_2, y + b_1 + b_2). \end{aligned}$$

Como $(a_1 + a_2)$ y $(b_1 + b_2)$ pertenecen a \mathbb{R} , entonces $\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \in \mathcal{T}$.

Para ii.) La transformación inversa de \mathcal{T}_1 es de la forma $\mathcal{T}_1^{-1}(x, y) = (x - a_1, y - b_1)$, como $-a_1$ y $-b_1$ son Reales, la transformación inversa pertenece a \mathcal{T} .

Ejemplo 1.6 Dado el conjunto

$$\mathcal{T} = \left\{ \mathcal{T}(x, y) = (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, y) / \theta = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \Lambda, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

de n transformaciones puntuales, Compruebe que no satisface las condiciones para ser grupo.

Solucion:

Para i.) Sean $\mathcal{T}_2(x, y) = (x \cos \theta_2 - y \operatorname{sen} \theta_2, y)$ y $\mathcal{T}_1(x, y) = (x \cos \theta_1 - y \operatorname{sen} \theta_1, y)$ dos transformaciones de \mathcal{T} , la transformación producto $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ esta dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1(x, y) &= \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1(x, y)) \\ &= \mathcal{T}_2(x \cos \theta_1 - y \operatorname{sen} \theta_1, y) \\ &= ((x \cos \theta_1 - y \operatorname{sen} \theta_1) \cos \theta_2 - y \operatorname{sen} \theta_2, y) \\ &= (x \cos \theta_1 \cos \theta_2 - y (\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2), y). \end{aligned}$$

Se tiene que $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ no tiene la forma de los elementos del conjunto \mathcal{T} , por consiguiente no pertenece a él.

Para ii.) Sea $\mathcal{T}(x, y) = (x', y')$ una transformación en \mathcal{T} , entonces

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, \\ y' &= y. \end{aligned} \tag{1.1}$$

\mathcal{T}_1^{-1} se encuentra al despejar las incognitas x, y en el sistema (1,1), resultando

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\cos \theta} x' + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} y', \\ y &= y'. \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{T}_1^{-1} no pertenece a \mathcal{T} , es decir no cumple ninguna de las condiciones para ser grupo.

Capítulo 2

Traslaciones y rotaciones

2.1. Traslaciones

Definición 2.1 Una transformación puntual se llama *traslación* si a cada punto P le hace corresponder un punto P' , tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ tiene siempre una longitud y orientación constante. La longitud del vector $\overrightarrow{PP'}$ se llama *amplitud de la traslación*.

La amplitud se puede determinar hallando el transformado de $(0, 0)$. Supongamos que (a, b) es su imagen, entonces la amplitud es igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ahora, considerando un punto (x, y) y sea (x', y') su transformado, se debe cumplir que $x' - x = a$ y $y' - y = b$, por tanto

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b.$$

Si la traslación se representa por \mathcal{T} , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x, y) &= (x', y') \\ &= (x + a, y + b), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde las constantes a, b son los parámetros de la traslación, así: si $a = b = 0$ se tiene la traslación idéntica o transformación idéntica. La transformación inversa de \mathcal{T} es

$$\mathcal{T}^{-1}(x', y') = (x' - a, y' - b).$$

Teorema 2.1 *El conjunto de todas las traslaciones forma un grupo.*

Demostración. La demostración de este teorema puede seguirse del ejemplo 1.5.

El siguiente ejercicio es una aplicación de la traslación a la resolución de ecuaciones diferenciales. Esta aplicación se suele ubicar erróneamente dentro de los llamados trucos matemáticos.

Ejemplo 2.1 *Considerese la ecuación diferencial con coeficientes lineales, es decir una ecuación de la forma.*

$$(a_1x + b_1y + c_1) dx + (a_2x + b_2y + c_2) dy = 0, \quad (2.2)$$

donde a_i, b_i y c_i son constantes y $a_1 \cdot b_2 \neq a_2 \cdot b_1$; este tipo de ecuaciones se puede resolver mediante cierta traslación transformándola en una ecuación diferencial homogénea.

Antes de considerar el caso general se analizará un caso específico, cuando $c_1 = c_2 = 0$, entonces la ecuación

$$(a_1x + b_1y) dx + (a_2x + b_2y) dy = 0 \quad (2.3)$$

se puede escribir como una ecuación homogénea que se resuelve mediante un método conocido.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(a_1x + b_1y)}{(a_2x + b_2y)} = -\frac{(a_1 + b_1(y/x))}{(a_2 + b_2(y/x))}.$$

Esto sugiere buscar un procedimiento para reducir la ecuación (2.2) a la ecuación (2.3) y es deducir una traslación de ejes de tal forma que se pueda escribir de la forma (2.3).

Si $x = u + h$ y $y = v + k$, donde h y k son constantes, es la traslación que cambia $a_1x + b_1y + c_1$ por $a_1u + b_1v$ y $a_2x + b_2y + c_2$ por $a_2u + b_2v$; entonces las constantes h, k deben satisfacer

$$\begin{aligned} a_1h + b_1k + c_1 &= 0, \\ a_2h + b_2k + c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como $a_1b_2 \neq a_2b_1$, el sistema anterior tiene solución. Sea (h, k) la solución de (2.4) y considerando la traslación $x = u + h$ y $y = v + k$, se tiene que $dx = du$ y $dy = dv$, entonces la ecuación (2.2) se transforma en

$$(a_1u + b_1v) du + (a_2u + b_2v) dv = 0,$$

que puede expresarse como

$$\frac{dv}{du} = \frac{-(a_1 + b_1(v/u))}{a_2 + b_2(v/u)}.$$

Un caso particular es el siguiente

$$(-3x + y - 1) dx + (x + y + 3) dy = 0,$$

donde $a_1 = -3$, $a_2 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $c_1 = -1$ y $c_2 = 3$. Como $a_1b_2 = -3 \cdot (1) \neq 1 \cdot (1) = a_2b_1$, las constantes h y k de la traslación de ejes $x = u + h$, $y = v + k$, deben satisfacer el sistema

$$\begin{aligned} -3h + k - 1 &= 0, \\ h + k + 3 &= 0. \end{aligned}$$

De donde $h = -1$ y $k = -2$; entonces la ecuación es transformada en:

$$(-3u + v) du + (u + v) dv = 0,$$

que se puede expresar como

$$\frac{dv}{du} = \frac{3u - v}{u + v} = \frac{3 - (v/u)}{1 + (v/u)},$$

una ecuación homogénea. La sustitución $z = v/u$ facilita la solución de esta última ecuación diferencial, entonces

$$\frac{dz}{du} = \frac{\frac{dv}{du} \cdot u - v}{u^2},$$

de aquí

$$u \cdot \frac{dz}{du} + z = \frac{dv}{du}.$$

Como $\frac{dv}{du} = \frac{-3+z}{1+z}$, reemplazando

$$\begin{aligned}\frac{udz}{du} &= \frac{-3+z}{1+z} - \frac{z}{1} \\ \frac{udz}{du} &= \frac{3-2z-z^2}{(1+z)} \\ \frac{du}{u} &= -\frac{(1+z)}{z^2+2z-3} dz \\ \ln|u| &= \frac{-1}{2} \text{Ln}|z^2+2z-3| + c.\end{aligned}$$

Operando

$$\begin{aligned}cu^{-2} &= z^2 + 2z - 3 \\ c &= v^2 + 2vu - 3u^2 \\ c &= (y+2)^2 + 2(y+2) \cdot (x+1) - 3(x+1)^2.\end{aligned}$$

Esta ecuación proporciona una solución implícita.

2.2. Rotaciones

Definición 2.2 Sea $A(a, b)$ un punto de \mathbb{R}^2 , la transformación puntual que hace corresponder al punto P el punto P' , tal que la longitud del segmento $\overline{AP'}$ es igual a la longitud del segmento \overline{AP} y el ángulo entre P, A y P' ($\angle PAP' = \mu$) es constante, se llama rotación de centro A y ángulo μ (Ver figura 1).

Este tipo de correspondencia “Rotación” se puede hacer en sentido contrario de las manecillas del reloj “ μ positivo” o en sentido de las manecillas “ μ negativo”. Cuando se hacen en sentido positivo se habla de rotación directa y en caso contrario se tiene una rotación inversa.

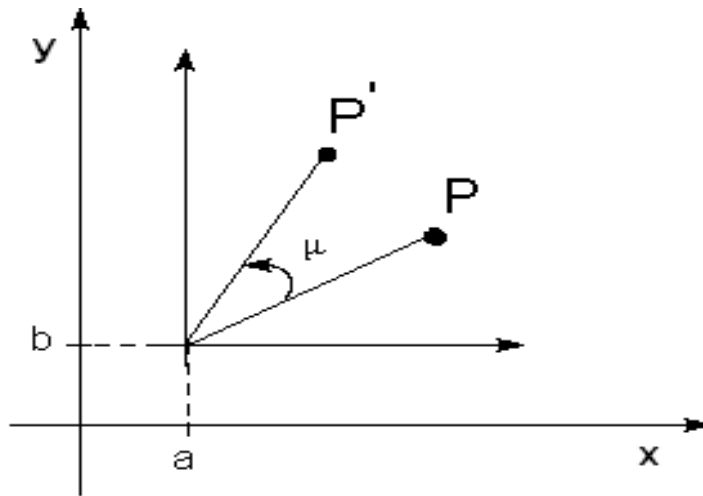


Figura 1 : Rotación directa con centro A y ángulo μ .

Toda rotación de cualquier punto $P(x, y)$ queda determinada en función de las coordenadas originales (x, y) , de las coordenadas del centro (a, b) y del ángulo μ ; como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *Sea R una rotación con punto fijo $A(a, b)$ y ángulo μ , la cual al punto $P(x, y)$ le hace corresponder el punto $P'(x', y')$, entonces*

$$x' = (x - a) \cos \mu - (y - b) \operatorname{sen} \mu + a$$

$$y' = (x - a) \operatorname{sen} \mu + (y - b) \cos \mu + b.$$

Demostración. Sean X_1 y Y_1 los ejes coordenados que tienen como origen el punto fijo (a, b) , entonces

$$X = X_1 + a$$

$$Y = Y_1 + b$$

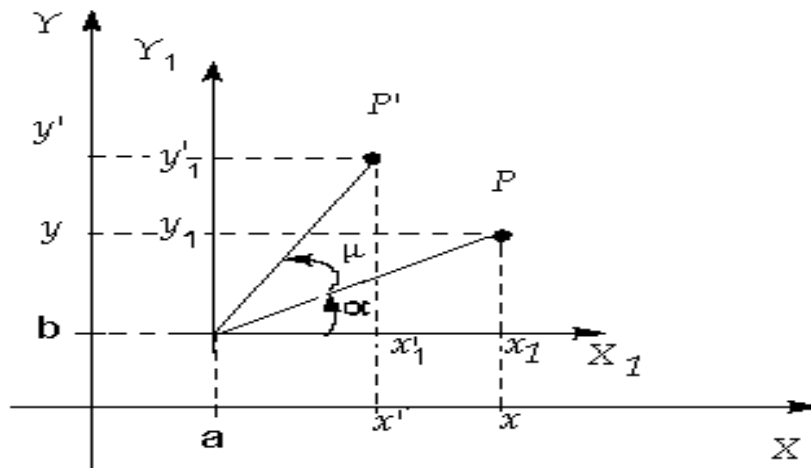


Figura 2 : Rotación que transforma al punto P en el punto P' .

las nuevas coordenadas del punto (x, y) son (x_1, y_1) . De la figura 2, se tiene

$$\cos(\mu + \alpha) = \frac{x'_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen}(\mu + \alpha) = \frac{y'_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

ademas

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen} \alpha = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}.$$

Teniendo en cuenta que $\cos(\mu + \alpha) = \cos \mu \cos \alpha - \text{sen} \mu \text{sen} \alpha$, se obtiene:

$$\frac{x'_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cos \mu - \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \text{sen} \mu$$

al multiplicar a cada lado de la igualdad por $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$$x'_1 = x_1 \cos \mu - y_1 \text{sen} \mu.$$

Volviendo al sistema de referencia XY

$$x' - a = (x - a) \cos \mu - (y - b) \text{sen} \mu,$$

que resulta

$$x' = (x - a) \cos \mu - (y - b) \text{sen} \mu + a.$$

Por otro lado, usando la identidad $\sin(\mu + \alpha) = \sin \mu \cos \alpha + \sin \alpha \cos \mu$, se tiene

$$y'_1 = x_1 \sin \mu + y_1 \cos \mu.$$

Que en el sistema inicial XY es

$$y' = (x - a) \sin \mu + (y - b) \cos \mu + b,$$

por lo tanto

$$x' = (x - a) \cos \mu - (y - b) \sin \mu + a,$$

$$y' = (x - a) \sin \mu + (y - b) \cos \mu + b.$$

Como consecuencia del sistema anterior podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 2.3 *Dados dos segmentos no paralelos de igual longitud, existe una rotación que hace corresponder a un segmento el otro segmento.*

Demostración. Sean \overline{PQ} y $\overline{P'Q'}$ dos segmentos de igual longitud, es decir $PQ = P'Q'$ y A el punto de encuentro de las dos mediatrices de los segmentos $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$. Tomando $AP = b$, $AP' = b'$, $PQ = c$, $P'Q' = c'$, $AQ = a$ y $AQ' = a'$, se tiene

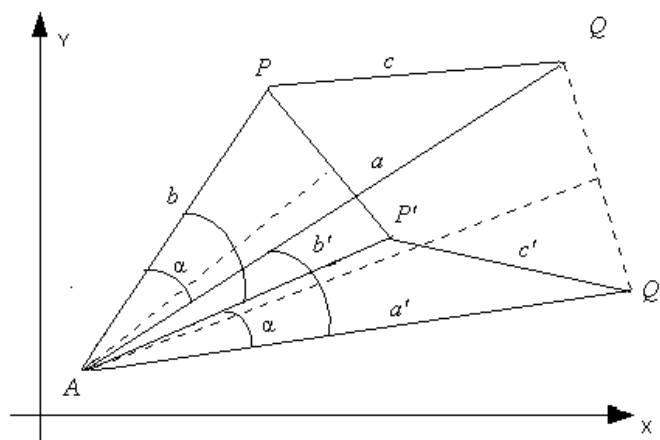


Figura 3 : Rotación que transforma el segmento \overline{PQ} en el segmento $\overline{P'Q'}$.

por lo tanto $c' = c$, $b' = b$ y $a' = a$ (ver figura 3); como los triángulos $\triangle APQ$ y $\triangle AP'Q'$ son equivalentes, entonces los ángulos $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle P'AQ' = \alpha$, que conlleva a que $\sphericalangle PAP' = \sphericalangle QAQ'$, notando por β al ángulo $\sphericalangle PAP'$ se tiene una rotación de centro A y ángulo β , que hace corresponder al segmento \overline{PQ} el segmento $\overline{P'Q'}$.

2.3. Condiciones para que una transformación sea una rotación

Es interesante destacar las características que tiene una rotación, observece el siguiente problema.

Dada la transformación $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\mathcal{T}(x, y) = \begin{bmatrix} A & B \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ R \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

con A, B, C, P, Q y R constantes dadas. Surge la pregunta ¿cuando esta transformación representa una traslación o una rotación?

Sea (x', y') el transformado de (x, y) , es decir

$$\begin{aligned} x' &= Ax + By + C, \\ y' &= Px + Qy + R. \end{aligned} \quad (2.6)$$

- Para que la transformación \mathcal{T} represente una traslación, las condiciones necesarias y suficientes son

$$\begin{aligned} i) \quad A &= Q = 1, \\ ii) \quad B &= P = 0. \end{aligned}$$

Si se satisfacen las condiciones anteriores la traslación transforma el origen en el punto de coordenadas (C, R) .

- Para que \mathcal{T} represente una rotación, las ecuaciones (2.6) deben escribirse de la forma

$$\begin{aligned}x' &= (x - a) \cos \mu - (y - b) \operatorname{sen} \mu + a \\y' &= (x - a) \operatorname{sen} \mu + (y - b) \cos \mu + b,\end{aligned}$$

siendo estas equivalentes a

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \mu - y \operatorname{sen} \mu + b(1 - \cos \mu) + b \operatorname{sen} \mu, \\y' &= x \operatorname{sen} \mu + y \cos \mu + a(1 - \cos \mu) - a \operatorname{sen} \mu.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Comparando las ecuaciones (2.6) y (2.7)

$$\begin{aligned}A &= Q, \\B &= -P, \\A^2 + B^2 &= 1.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Si estas condiciones se cumplen el ángulo de rotación μ está determinada por cualquiera de las ecuaciones $A = \cos \mu$, $B = -\operatorname{sen} \mu$. Igualando los términos independientes de las ecuaciones (2.6) y (2.7), y teniendo en cuenta las últimas relaciones entre $\operatorname{sen} \mu$, $\cos \mu$, y A , B , resulta

$$\begin{aligned}C &= (1 - A)a - Bb, \\R &= Ba + (1 - A)b.\end{aligned}$$

El sistema anterior de ecuaciones, permite encontrar las coordenadas del centro de rotación (a, b) . Escribiendo en forma matricial el anterior sistema, se tiene:

$$\begin{pmatrix} (1 - A) & -B \\ B & (1 - A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ R \end{pmatrix},\tag{2.9}$$

este sistema tiene solución siempre y cuando el determinante de la matriz sea diferente

de cero, es decir $(1 - A)^2 + B^2 \neq 0$, como

$$\begin{aligned} (1 - A)^2 + B^2 &= 1^2 - 2A + A^2 + B^2 \\ &= 1 - 2A + 1 \\ &= 2 - 2A \\ &= 2(1 - A). \end{aligned}$$

Se tiene que $(1 - A)^2 + B^2 = 2(1 - A) \neq 0$, si $A \neq 1$. Así, las condiciones necesarias y suficientes para que la transformación represente una rotación, es que cumplan las relaciones (2.8) y que $A \neq 1$.

Si en una transformación lineal se cumplen las relaciones (2.8) y $A = 1$, resulta $C = 1, B = P = 0$ y la transformación se reduce a una traslación.

Ejemplo 2.2 Dada la transformación

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow \mathcal{T}(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1, \frac{-\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 5 \right), \end{aligned}$$

pruebe que es una rotación.

Solución: Si (x', y') es el transformado de (x, y) , entonces

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1, \\ y' &= -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 5. \end{aligned}$$

Para que \mathcal{T} sea una rotación debe cumplirse las condiciones (2.8) y $A \neq 1$, es decir se debe cumplir

$$\begin{aligned} A &= Q = \frac{1}{2}, \\ B &= -P = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ A^2 + B^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1m. \end{aligned}$$

Como cumplen las condiciones y $A \neq 1$, entonces T es una rotación. El ángulo de rotación se halla mediante la ecuación $\cos \mu = \frac{1}{2}$, es decir $\mu = 60^\circ$ y las coordenadas del centro de rotación por medio del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{2}) & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & (1 - \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b \\ 5 &= \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b \end{aligned}$$

de donde

$$a = \frac{1}{2}(5\sqrt{3} - 1) \quad y \quad b = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 5).$$

En resumen, se tiene una rotación de centro $(\frac{1}{2}(\sqrt{35} - 1), \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 5))$ y ángulo 60° .

Ejemplo 2.3 El cuerpo geométrico que se forma al hacer girar una circunferencia alrededor de un punto situado fuera de la circunferencia es conocido como toro. Los neumáticos de las ruedas, las donas son ejemplos de un toro.

Para determinar las coordenadas del toro, se parte de la circunferencia

$$C = \{(R+r \cos \alpha, 0, r \operatorname{sen} \alpha) / 0 \leq \alpha \leq 2\pi\},$$

una parametrización de la circunferencia con centro en el punto $(R, 0, 0)$, de radio r en el plano XZ . Rotando un ángulo μ a todo punto P de C alrededor del origen como muestra la figura

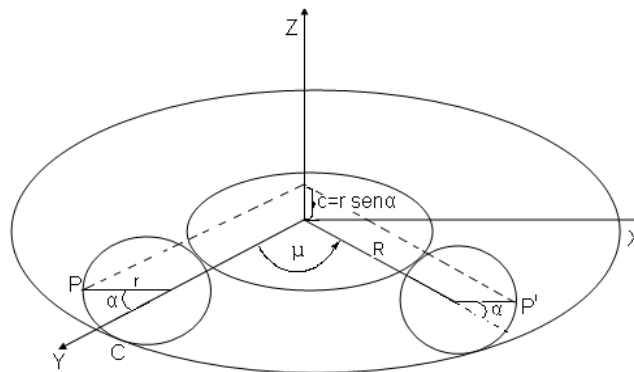
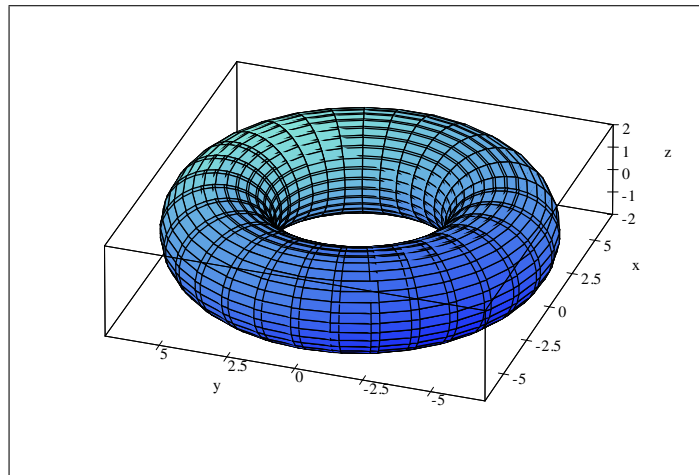


Figura 4: Gráfica y construcción del toro.

Se tiene que la coordenada $z = r \operatorname{sen} \alpha$ permanece fija, por lo tanto se puede usar el teorema 2.2 y se obtiene las coordenadas del punto imagen $P'(x', y', z')$.

$$x' = (R + r \cos \alpha) \cos \mu,$$

$$y' = (R + r \cos \alpha) \operatorname{sen} \mu,$$

$$z' = r \operatorname{sen} \alpha.$$

Si $0 \leq \mu \leq 2\pi$, entonces las imágenes de P denotan una circunferencia en el plano $z = r \operatorname{sen} \alpha$, al variar P en la circunferencia C se obtiene el toro.

2.4. Producto de rotaciones y traslaciones

Una pregunta por responder es: ¿qué tipo de transformación se encontrará al hacer el producto entre rotaciones y traslaciones?

Los siguientes teoremas dan la respuesta.

Teorema 2.4 *El producto de una traslación y una rotación es otra rotación del mismo ángulo.*

Demostración. Sean $\mathcal{T}(x, y) = (x', y') = (x + m, y + n)$ una traslación y $R(x', y') = (x'', y'')$ la Rotación con centro en (a, b) y ángulo μ . La transformación producto $R\mathcal{T}$, esta dada por.

$$\begin{aligned} R\mathcal{T}(x, y) &= R(\mathcal{T}(x, y)) \\ &= R(x', y') \\ &= (x'', y''). \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} x'' &= (x' - a) \cos \mu - (y' - b) \operatorname{sen} \mu + a, \\ &= (x + m - a) \cos \mu - (y + n - b) \operatorname{sen} \mu + a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= (x' - a) \operatorname{sen} \mu + (y' - b) \cos \mu + b, \\ &= (x + m - a) \operatorname{sen} \mu + (y + n - b) \cos \mu + b. \end{aligned}$$

Se observa que es otra rotación con igual ángulo de giro μ . El centro (p, q) de la rotación producto se puede hallar resolviendo el sistema (2.2) aplicado a este caso, pero se encontrara por la siguiente construcción geométrica. Sean L el centro de la rotación, \mathcal{T} la traslación que transforma a L en el punto L_1 , es decir $L_1 = \mathcal{T}(L)$, $L_2 = \mathcal{T}(L)$ el punto que por la traslación \mathcal{T} pasa a ser L y $L' = R(L_1)$ el resultado de aplicar a L_1 la rotación R de centro L y ángulo μ . La transformación producto $R\mathcal{T}$ hace corresponder

al punto L_2 el punto L , puesto que:

$$\begin{aligned} RT(L_2) &= R(\mathcal{T}(L_2)) \\ &= R(L) \\ &= L. \end{aligned}$$

Por ser L el centro de la rotación. El punto L pasa a L' , debido a que

$RT(L) = R(\mathcal{T}(L)) = R(L_1) = L'$, por tanto el segmento $\overline{L_2L}$ es transformado en $\overline{LL'}$ por la rotación RT . El centro $A(p, q)$ de la rotación producto se halla según la construcción mencionada en el teorema 2.3, como intersección de las mediatrices de los segmentos $\overline{L_2L}$ y $\overline{LL'}$.

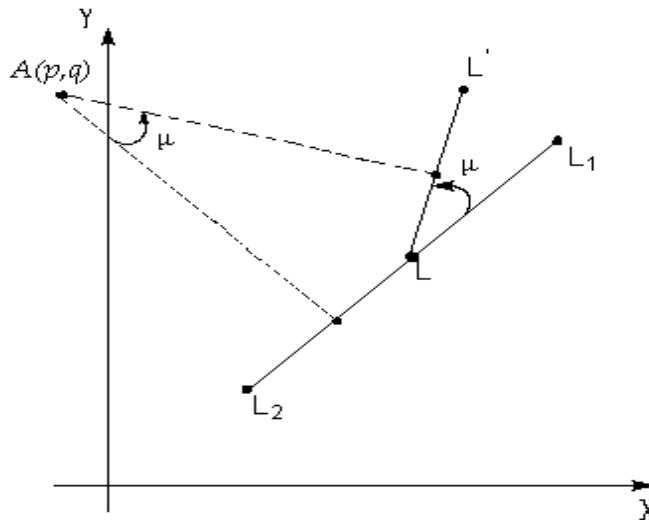


Figura 5 : Rotación producto entre R y T .

Teorema 2.5 *El producto de rotaciones cuyos ángulos de rotación no son opuestos aditivos es una rotación de ángulo igual a la suma algebraica de los ángulos de los factores.*

Demostración. Sean R_1 y R_2 dos rotaciones con centro $L_1(p_1, q_1)$, $L_2(p_2, q_2)$ y ángulos μ_1 , μ_2 respectivamente tal que $R_1(x, y) = (x', y')$ y $R_2(x', y') = (x'', y'')$.

Por teorema 2.2, se tiene.

$$\begin{aligned} R_1(x, y) &= \begin{bmatrix} \cos \mu_1 & -\operatorname{sen} \mu_1 \\ \operatorname{sen} \mu_1 & \cos \mu_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ y} \\ R_2(x', y') &= \begin{bmatrix} \cos \mu_2 & -\operatorname{sen} \mu_2 \\ \operatorname{sen} \mu_2 & \cos \mu_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde R_1, C_1, R_2 y C_2 son los términos independientes de x, y, x' e y' . Aplicando R_2R_1 a (x, y) , se obtiene:

$$\begin{aligned} R_2R_1(x, y) &= R_2(R_1(x, y)) \\ &= R_2(x', y') \\ &= \begin{bmatrix} \cos \mu_2 & -\operatorname{sen} \mu_2 \\ \operatorname{sen} \mu_2 & \cos \mu_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_2 \\ C_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Reemplazando (x', y')

$$\begin{aligned} R_2R_1(x, y) &= \begin{bmatrix} \cos \mu_2 & -\operatorname{sen} \mu_2 \\ \operatorname{sen} \mu_2 & \cos \mu_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \cos \mu_1 & -\operatorname{sen} \mu_1 \\ \operatorname{sen} \mu_1 & \cos \mu_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ C_1 \end{pmatrix} \right\} + \\ &\quad \begin{pmatrix} R_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \mu_2 \cos \mu_1 - \operatorname{sen} \mu_2 \operatorname{sen} \mu_1 & -\cos \mu_2 \operatorname{sen} \mu_1 - \operatorname{sen} \mu_2 \cos \mu_1 \\ \operatorname{sen} \mu_2 \cos \mu_1 + \cos \mu_2 \operatorname{sen} \mu_1 & -\operatorname{sen} \mu_2 \operatorname{sen} \mu_1 + \cos \mu_1 \cos \mu_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \cos \mu_2 & -\operatorname{sen} \mu_2 \\ \operatorname{sen} \mu_2 & \cos \mu_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ C_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_2 \\ C_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por identidad de ángulos dobles

$$\begin{aligned} R_2R_1(x, y) &= \begin{bmatrix} \cos(\mu_2 + \mu_1) & -\operatorname{sen}(\mu_2 + \mu_1) \\ \operatorname{sen}(\mu_2 + \mu_1) & \cos(\mu_2 + \mu_1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \\ &\quad \begin{pmatrix} R_1 \cos \mu_2 - C_1 \operatorname{sen} \mu_2 + R_2 \\ R_1 \operatorname{sen} \mu_2 + C_1 \cos \mu_2 + C_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sustituyendo por R y C a los términos independientes de x, y .

$$R_2 R_1(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(\mu_2 + \mu_1) & -\operatorname{sen}(\mu_2 + \mu_1) \\ \operatorname{sen}(\mu_2 + \mu_1) & \cos(\mu_2 + \mu_1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ C \end{pmatrix}.$$

Se demuestra que la transformación producto $R_2 R_1$ cumple las condiciones de la ecuación (2.8), por lo tanto $R_2 R_1$ es una rotación de ángulo igual a la suma algebraica de los ángulos de rotación.

Para hallar el centro de la rotación producto, los siguientes puntos facilitan la forma de calcularlos (*ver figura*)

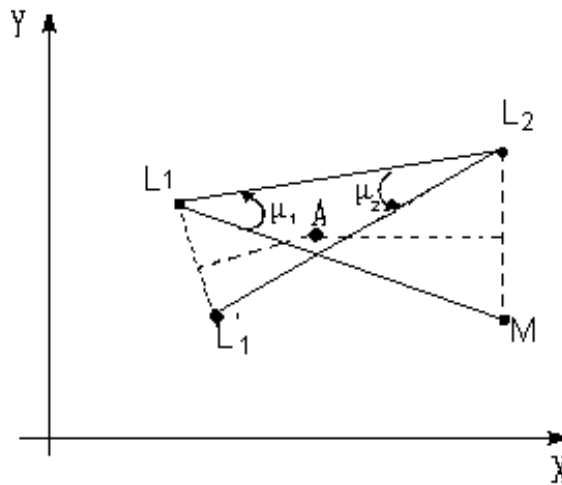


Figura 6 : Rotación producto de centro A y ángulo $(\mu_1 + \mu_2)$ entre R_1 y R_2 .

Teniendo en cuenta que L_1 y L_2 son los centros de las rotaciones R_1 y R_2 ; sea $M = R_1^{-1}(L_2)$ el punto que por la rotación R_1 es transformado en L_2 y $L'_1 = R_2(L_1)$ el punto que resulta de hacer girar L_1 por la rotación R_2 , la rotación producto $R_2 R_1$ hace corresponder al punto L_1 el punto L'_1 , debido a que $R_2 R_1(L_1) = R_2(R_1(L_1)) = R_2(L_1) = L'_1$ y el punto M pasa a L_2 , puesto que $R_2 R_1(M) = R_2(L_2) = L_2$. Por lo tanto $R_2 R_1$ actuando sobre el segmento $\overline{L_1 M}$ le hace corresponder el segmento $\overline{L'_1 L_2}$. El centro de la rotación producto será el punto donde se encuentran las mediatrices de los segmentos $\overline{L_1 L'_1}$ y $\overline{M L_2}$, denotado por A .

El teorema 2.5 hace una excepción al caso en el cual los ángulos son opuestos aditivos, el siguiente corolario expone lo que pasa en este caso.

Corolario 2.1 *El producto de dos rotaciones de igual ángulo pero sentidos opuestos es una traslación.*

Demostración. Del teorema 2.5 se tiene que si R_1 y R_2 son dos rotaciones de centro L_1, L_2 y ángulo μ_1, μ_2 respectivamente, entonces

$$R_2R_1(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(\mu_1 + \mu_2) & -\operatorname{sen}(\mu_1 + \mu_2) \\ \operatorname{sen}(\mu_1 + \mu_2) & \cos(\mu_1 + \mu_2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ C \end{pmatrix},$$

como $\mu_2 = -\mu_1$, al reemplazar en R_2R_1 , se tiene

$$R_2R_1(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(-\mu_1 + \mu_1) & -\operatorname{sen}(-\mu_1 + \mu_1) \\ \operatorname{sen}(-\mu_1 + \mu_1) & \cos(-\mu_1 + \mu_1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ C \end{pmatrix},$$

entonces

$$R_2R_1(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ C \end{pmatrix},$$

una traslación. Obsérvese que en la *figura 6*, si μ_1 y μ_2 son iguales y de sentidos opuestos los segmentos $\overline{L_1M}$ y $\overline{L'_1L_2}$ resultan paralelos y por lo tanto la rotación producto es una traslación de acuerdo al enunciado.

Se pueden destacar ciertas particularidades tanto de rotaciones como de traslaciones en los siguientes lemas.

Lema 2.1 *El producto de dos traslaciones es conmutativo.*

Demostración. Sean $\mathcal{T}_1(x, y) = (x + a_1, y + b_1)$ y $\mathcal{T}_2(x, y) = (x + a_2, y + b_2) = (x', y')$ dos traslaciones, la transformación producto $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$, esta definida por:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2(x, y) &= \mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2(x, y)) \\ &= \mathcal{T}_1(x', y') \\ &= (x' + a_1, y' + b_1) \\ &= ((x + a_2) + a_1, (y + b_2) + b_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2(x, y) &= (x + (a_2 + a_1), y + (b_2 + b_1)) \\
&= (x + a_1) + a_2, (y + b_1) + b_2 \\
&= \mathcal{T}_2(x + a_1, y + b_1) \\
&= \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1(x, y)) \\
&= \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1(x, y).
\end{aligned}$$

Esto es: $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1(x, y) = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1(x, y)$.

Se puede observar que el producto de una traslación y una rotación no es en general conmutativa. Por ejemplo

Sean \mathcal{T} y R una traslación y una rotación respectivamente, tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(x, y) &= (x + 2, y + 1) \text{ y} \\
R(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 5 \right).
\end{aligned}$$

Al aplicar $\mathcal{T}R$ y $R\mathcal{T}$ al punto $(0, 0)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}R(0, 0) &= \mathcal{T}(-1, 5) = (1, 6) \text{ y} \\
\mathcal{T}R(0, 0) &= R(2, 1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} + \frac{11}{2} \right),
\end{aligned}$$

por tanto $R\mathcal{T} \neq \mathcal{T}R$.

Se puede ver también que el producto de dos Rotaciones no es conmutativo. Por ejemplo, si se toman a las rotaciones R_1 y R_2 tales que:

$$\begin{aligned}
R_1(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 5 \right) \text{ y} \\
R_2(x, y) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right).
\end{aligned}$$

Tomando el punto $(0, 0)$, el transformado respecto a R_1R_2 y R_2R_1 , es:

$$\begin{aligned}
R_2R_1(0, 0) &= R_2(R_1(0, 0)) = R_2(-1, 5) = \left(\frac{-\sqrt{3} - 5}{2}, \frac{-1 + 5\sqrt{3}}{2} \right), \\
R_1R_2(0, 0) &= R_1(R_2(0, 0)) = R_1(0, 0) = (-1, 5).
\end{aligned}$$

Por tanto, $R_2R_1 \neq R_1R_2$.

Lema 2.2 *El conjunto de todas las rotaciones alrededor de un punto fijo, forma un grupo.*

Demostración.

- i.) Sean R_1 y R_2 dos rotaciones de centro L y ángulos μ_1 y μ_2 respectivamente, por teorema (2,5) el producto de dos rotaciones es otra rotación cuyo ángulo es la suma algebraica de μ_1 y μ_2 ; el centro de la rotación producto es L , por lo tanto R_2R_1 pertenece al conjunto.
- ii.) Toda rotación R de centro L y ángulo μ , tiene una rotación inversa R^{-1} , cuyo centro es el mismo L y ángulo $-\mu$, tal que si, $R(x, y) = (x', y')$, R^{-1} hace corresponder al punto (x', y') el punto (x, y) , se cumplen las dos condiciones para ser grupo.

Lema 2.3 *El conjunto de todas las rotaciones del plano, no forma grupo.*

Demostración. El corolario 2.1, afirma que el producto de rotaciones de igual ángulo pero sentidos contrarios, es una traslación, por lo tanto no siempre el producto es una rotación, no cumple la condición. i), es decir no forma grupo.

Lema 2.4 *El conjunto de todas las rotaciones más las traslaciones forma un grupo.*

Demostración.

- i.) Por el teorema 2.5 y el corolario 2.1, el producto de dos rotaciones es una rotación o una traslación, lo que comprueba la primera condición para ser grupo.
- ii.) Toda rotación R con centro (a, b) y ángulo μ , tiene una rotación inversa R^{-1} con centro (a, b) y ángulo $-\mu$ y toda traslación \mathcal{T} por ejemplo 1.5 posee una inversa \mathcal{T}^{-1} , por tanto se cumplen las dos condiciones para ser grupo.

2.5. Aplicaciones de las rotaciones y traslaciones a la ecuación general de segundo grado

El objetivo de esta sección es determinar la ecuación más simple de una cónica usando traslaciones y rotaciones de los ejes coordenados; es decir: dada la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2.10)$$

encontrar una transformación donde la ecuación resultante sea de ejes paralelos a los ejes coordenados, es decir se puede escribir de la forma

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0. \quad (2.11)$$

El coeficiente del término que contiene xy en la ecuación (2.10) se puede eliminar haciendo una rotación de ejes, se trata de hacer girar los ejes X e Y , hasta conseguir que sean paralelos a los ejes de la cónica. Denotando estos nuevos ejes por X' e Y' , la ecuación de la cónica es la dada en (2.11).

Se observa que por una traslación o una rotación de los ejes coordenados, es posible transformar muchas ecuaciones en forma más simple, es entonces lógico inferir que se pueda efectuar una simplificación mayor aún aplicando ambas operaciones a la vez.

El siguiente análisis de la simplificación a la ecuación de una cónica asevera lo mencionado anteriormente, considerese el caso de la traslación de ejes coordenados seguida de una rotación de ejes trasladados en torno de O' y ángulo θ , ver *figura 7*.

Si P es un punto cualquiera del plano, sean (x, y) , (x', y') y (x'', y'') sus coordenadas referidas respectivamente a los ejes originales XY , a los ejes trasladados $X'Y'$ y a los ejes girados $X''Y''$, entonces

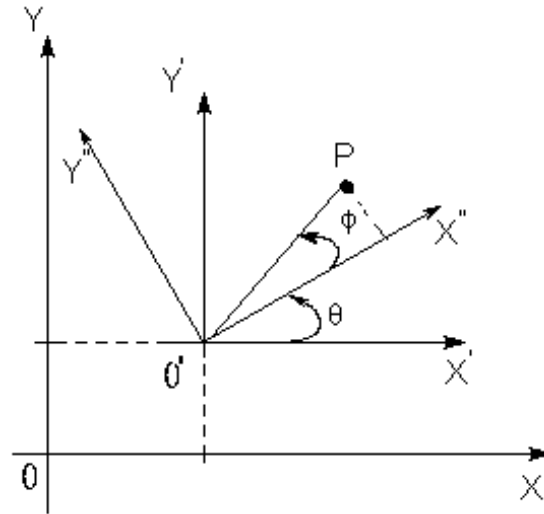


Figura 7 : Traslación y rotación de los ejes XY .

$$X = Y' + h,$$

$$Y = Y' + k.$$

El siguiente teorema establece la rotación mencionada.

Teorema 2.6 *La ecuación general de la forma*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde $B \neq 0$, puede escribirse como $A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$.

Efectuando una rotación de ejes con ángulo θ , donde θ esta dada por

$$\tan \theta = \frac{B}{A - C}, \text{ si } A \neq C,$$

$$\theta = 45^\circ, \text{ si } A = C.$$

Los coeficientes de la nueva ecuación se obtienen haciendo las sustituciones

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta,$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta.$$

Demostración. De la siguiente figura 8 se puede deducir

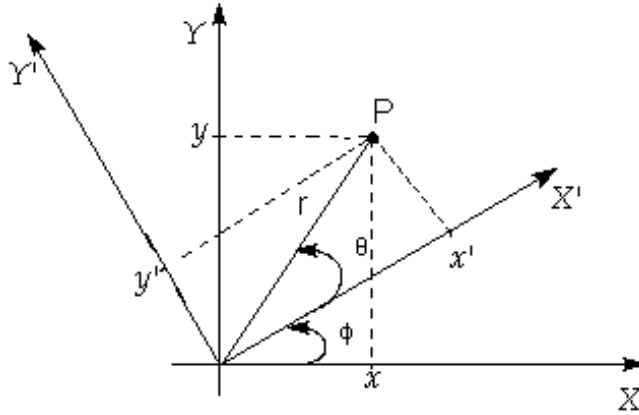


Figura 8 : Representa las coordenadas y el ángulo que forma P con el eje X.

$x = r \cos(\theta + \phi)$, $y = r \sin(\theta + \phi)$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces

$$x = r \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi,$$

$$y = r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi.$$

Además $x' = r \cos \phi$ e $y' = r \sin \phi$, al reemplazar en el sistema anterior

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \tag{2.12}$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta.$$

Al rotar los ejes XY , se obtiene $X'Y'$. Sustituyendo la ecuación (2.12) en la ecuación general (2.10), se tiene:

$$A(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + B(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + \\ C(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 + D(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + E(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + F = 0,$$

operando y agrupando términos

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

donde

$$A' = A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta \quad (2.13)$$

$$B' = 2(C - A) \sin \theta \cos \theta + B (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (2.14)$$

$$C' = A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta \quad (2.15)$$

$$D' = D \cos \theta + E \sin \theta \quad (2.16)$$

$$E' = E \cos \theta - D \sin \theta \quad (2.17)$$

$$F' = F. \quad (2.18)$$

Como la ecuación transformada debe carecer del término xy , el coeficiente B' debe ser igual a cero, es decir:

$$2(C - A) \sin \theta \cos \theta + B (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0.$$

Por medio de identidades trigonométricas de ángulo doble, esta ecuación puede escribirse como:

$$(C - A) \sin 2\theta + B \cos 2\theta = 0.$$

Si $A \neq C$, la ecuación es equivalente

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}. \quad (2.19)$$

Si $A = C$, se reduce a

$$B \cos 2\theta = 0.$$

Es decir

$$\theta = 45^\circ. \quad (2.20)$$

Así, al girar los ejes coordenadas un ángulo θ dado por las ecuaciones (2.19) o (2.20) según el caso, la ecuación general se transforma en la ecuación (2.11).

El siguiente teorema muestra algunas invariantes al hacer la rotación.

Teorema 2.7 *La rotación de ángulo θ de los ejes coordenados que transforma la ecuación (2.10) en (2.11) tiene los siguientes invariantes.*

$$F' = F \quad (2.21)$$

$$A + C = A' + C' \quad (2.22)$$

$$B^2 - 4AC = -4A'C'. \quad (2.23)$$

Demostración. De las ecuaciones (2.13) y (2.15), se tiene $A' = A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta$ y $C' = A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta$, sumando estas igualdades se tiene:

$$A' + C' = A + C.$$

Usando las relaciones (2.13), (2.14) y (2.15) y la identidad trigonométrica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ se obtiene

$$(B')^2 - 4A'C' = (B)^2 - 4AC.$$

Como $B' = 0$, el invariante se reduce a

$$B^2 - 4AC = -4A'C'.$$

Debido a que F' es el término independiente, se tiene que $F' = F$.

La expresión $B^2 - 4AC$ se llama discriminante de la ecuación y el signo de $B^2 - 4AC$ determina el tipo de gráfica de la ecuación.

Teorema 2.8 *La gráfica de la ecuación (2.10), viene determinada excepto en los casos degenerados por el discriminante, como sigue*

$$\text{Elipse} \quad B^2 - 4AC < 0. \quad (2.24)$$

$$\text{Parábola} \quad B^2 - 4AC = 0. \quad (2.25)$$

$$\text{Hipérbola} \quad B^2 - 4AC > 0. \quad (2.26)$$

Demostración. Cuando la ecuación (2.10) se transforma en la ecuación (2.11), $B' = 0$ y la relación se reduce a:

$$B^2 - 4AC = -4A'C'.$$

- Si A' y C' son del mismo signo, la ecuación (2.11) y en consecuencia la (2.10) es del género elipse, en este caso

$$B^2 - 4AC < 0.$$

- Si cualquiera de los coeficientes A' o C' es igual a cero, la ecuación (2.11) y por tanto la (2.10) es del género parábola, en este caso

$$B^2 - 4AC = 0.$$

- Si A' y C' difieren de signo, la ecuación (2.11) y en consecuencia la (2.10) es del género hipérbola, en este caso

$$B^2 - 4AC > 0.$$

Ejemplo 2.4 *Determinar la naturaleza de la cónica que representa la ecuación $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0$ y reducirla a su forma canónica por transformación de coordenadas.*

Solución:

- i.) Como $B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -24$ es menor que cero, entonces es del género de una elipse. Al rotar los ejes XY de tal forma que los resultantes $X'Y'$ sean paralelos a los ejes de la cónica, es decir al eliminar el término $4xy$, el ángulo θ esta dado por (2.6), es decir

$$\tan 2\theta = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3}.$$

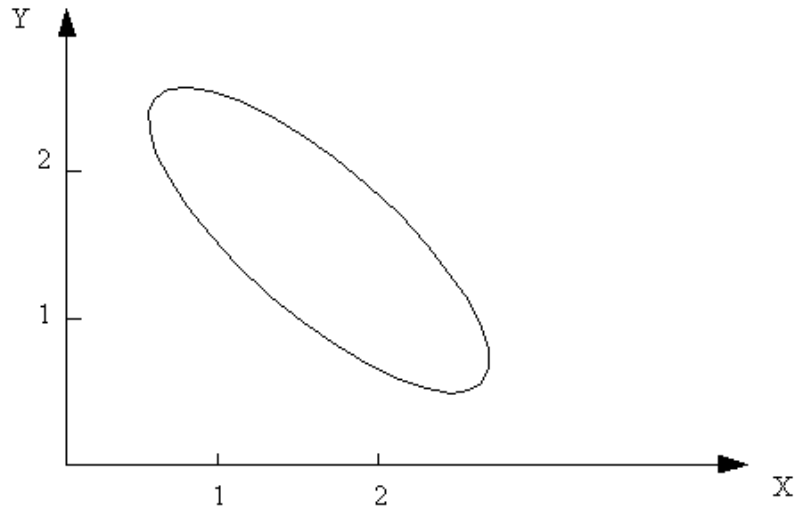


Figura 9 : Gráfica de la elipse
 $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0$.

De esta expresión, se puede obtener $\cos 2\theta$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \frac{1}{\sec 2\theta} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 2\theta + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{3}{5},\end{aligned}$$

y mediante la identidad trigonométrica

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ y} \\ \cos \theta &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{3}{5}\right)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}A' &= A \cos^2 \theta + B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= 5 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= 6.\end{aligned}$$

Por teorema 2.7, $A' + C' = A + C$, reemplazando

$$6 + C' = 5 + 2$$

$$C' = 1.$$

Ahora como $F' = F$, entonces $F' = 29$. Para calcular D' y E' se reemplaza en las ecuaciones (2.16) y (2.17), respectivamente, obteniendo

$$\begin{aligned} D' &= D \cos \theta + E \sin \theta = -24 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -12\sqrt{5}, \\ E' &= E \cos \theta - D \sin \theta = -12 \frac{2}{\sqrt{5}} + 24 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0. \end{aligned}$$

Entonces los coeficientes de la cónica transformada son:

$$A' = 6 \quad D' = -12\sqrt{5}$$

$$B' = 0 \quad E' = 0$$

$$C' = 1 \quad F' = 29,$$

En consecuencia, la ecuación toma la forma

$$6(x')^2 + (y')^2 - 12\sqrt{5}x' + 29 = 0.$$

ii.) La siguiente traslación hace corresponder a los ejes $X'Y'$ los ejes XY , tal que estos tengan como origen de coordenadas el centro de la cónica

$$X' = X'' + h,$$

$$Y' = Y'' + k.$$

Al reemplazar en la ecuación (2.27) se tiene

$$6(x'' + h)^2 + (y'' + k)^2 - 12\sqrt{5}(x'' + h) + 29 = 0,$$

operando

$$6x'' + y''^2 + 12x''h + h^2 + 2y''k + k^2 - 12\sqrt{5}x'' - 12\sqrt{5}h + 29 = 0,$$

exigiéndole a esta traslación que:

$$\begin{aligned}2y''k &= 0, \\12x''h - 12\sqrt{5}x'' &= 0,\end{aligned}$$

se obtiene $k = 0$ y $h = \sqrt{5}$ y la ecuación se transforma en

$$6x''^2 + y''^2 = 1.$$

una elipse como se muestra la figura 10.

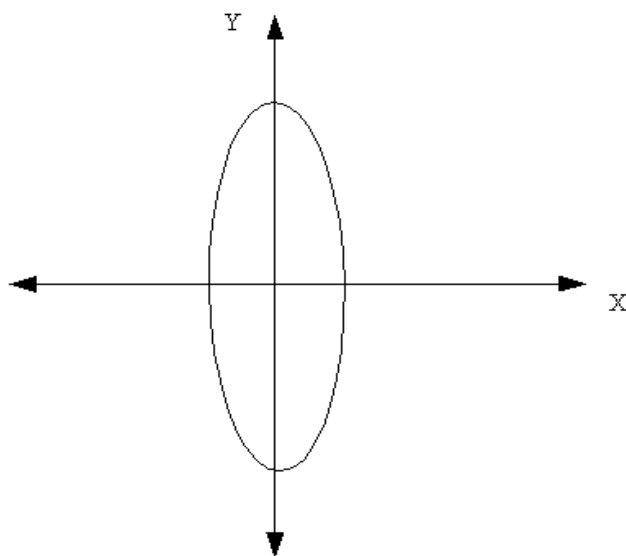


Figura 10 : Gráfica de la elipse $6x''^2 + y''^2 = 1$.

De esta manera se podrá estudiar la elipse de una forma más sencilla.

Capítulo 3

Simetrías

En este capítulo se analiza las simetrías respecto a un punto, a un eje, y al producto con transformaciones ya analizadas.

3.1. Simetría respecto a un punto

Definición 3.1 *Dado un punto fijo A , se llama simetría respecto del mismo, a la transformación puntual que a todo punto P le hace corresponder un punto P' , tal que P' pertenece al vector dirigido \overrightarrow{PA} y la longitud del segmento $\overline{P'A}$ es igual a la longitud del segmento \overline{AP} , es decir*

$$i.) \quad P' \in \overrightarrow{PA}$$

$$ii.) \quad AP' = AP$$

Analizando la definición anterior se tiene que toda simetría respecto a un punto es una rotación de centro A y ángulo 180° ver *figura 11*.

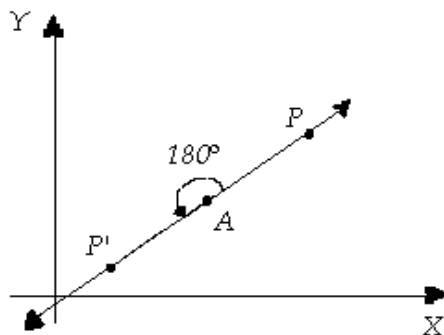


Figura 11 : Transformada de P mediante una simetría respecto a A .

Teorema 3.1 Sea S una simetría respecto a un punto fijo $A(a,b)$, entonces S tiene por ecuaciones

$$\begin{aligned} S(x, y) &= (x', y') \\ &= (2a - x, 2b - y). \end{aligned}$$

Demostración. Como S una simetría respecto a un punto; entonces S es una rotación con centro igual al punto fijo y ángulo 180° . De la ecuación (2.7) se tiene

$$\begin{aligned} S(x, y) &= (x - a) \cos 180^\circ - (y - b) \sin 180^\circ + a, (x - a) \sin 180^\circ + \\ &\quad (y - b) \cos 180^\circ + b) \\ &= ((x - a)(-1) - (y - b)0 + a, (x - a)0 + (y - b)1 + b) \\ &= ((-x + a) + a, (-y + b) + b) \\ &= (2a - x, 2b - y). \end{aligned}$$

Si la simetría fuese respecto al origen de coordenadas, la transformación tendría por ecuación $S(x, y) = (-x, -y)$.

Teorema 3.2 *El producto de una traslación por una simetría respecto a un punto, es otra simetría respecto de un punto.*

Demostración. Como S una simetría respecto a $A(a_1, b_1)$ y \mathcal{T} la traslación definida por $\mathcal{T}(x, y) = (x + a_2, y + b_2)$, la transformación $S\mathcal{T}$ esta dada por

$$\begin{aligned} S \mathcal{T} (x, y) &= S (\mathcal{T} (x, y)) \\ &= S(x + a_2, y + b_2) \\ &= (2a_1 - (x + a_2), 2b_1 - (y + b_2)) \\ &= (2a_1 - a_2 - x, 2b_1 - b_2 - y) \\ &= \left(2 \left(a_1 - \frac{a_2}{2} \right) - x, 2 \left(b_1 - \frac{b_2}{2} \right) - y \right), \end{aligned}$$

por tanto $S\mathcal{T}$ es una simetría respecto al punto $(a_1 - \frac{a_2}{2}, b_1 - \frac{b_2}{2})$.

Teorema 3.3 *El producto de dos simetrías, cada una respecto a un punto es una traslación.*

Demostración. Dadas S_1 y S_2 dos simetrías con puntos fijos $A_1(a_1, b_1)$ y $A_2(a_2, b_2)$ respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} S_2 S_1(x, y) &= S_2(S_1(x, y)) \\ &= S_2(2a_1 - x, 2b_1 - y) \\ &= (2a_2 - (2a_1 - x), 2b_2 - (2b_1 - y)) \\ &= (x + 2(a_2 - a_1), y + 2(b_2 - b_1)). \end{aligned}$$

lo anterior demuestra que la transformación producto $S_2 S_1$ es una traslación.

3.2. Simetría respecto a un eje

Dada una recta \overleftrightarrow{r} , se llama simetría respecto a ella, a la transformación puntual que a cada punto P le hace corresponder el punto P' , tal que la recta \overleftrightarrow{r} resulta ser

perpendicular en el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, ver figura.

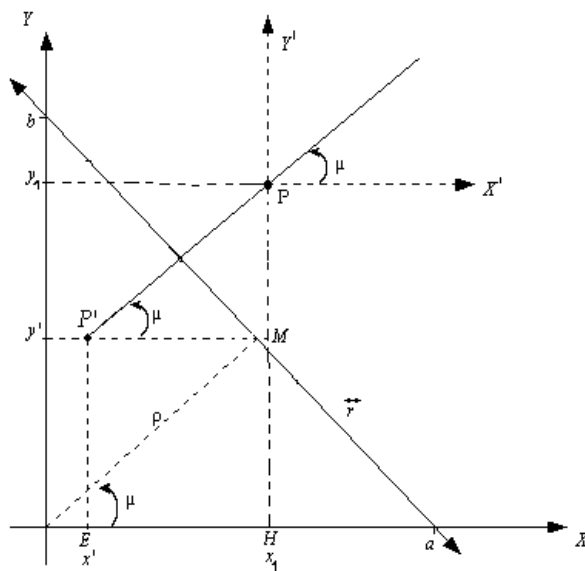


Figura 12 : Transformación de P mediante una simetría respecto a \overleftrightarrow{r} .

El siguiente teorema muestra la ecuación definida por una simetría respecto a un eje; pero antes de ser enunciado será necesario para su demostración hacer un análisis a la recta \overleftrightarrow{r} .

Sea \overleftrightarrow{r} la recta que pasa por los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$, entonces \overleftrightarrow{r} tiene una pendiente igual $\frac{-b}{a}$ y una ecuación de la forma

$$(y - b) = \frac{-b}{a} (x - 0),$$

es decir, $ay + bx = ba$, operando se obtiene la ecuación segmentaria de \overleftrightarrow{r}

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1.$$

Según la figura (12), el segmento perpendicular a \overleftrightarrow{r} que pasa por $(0, 0)$ y cuya longitud es ρ , forma un ángulo μ con el eje X , por lo tanto se tiene que $a = \frac{\rho}{\sin \mu}$ y $b = \frac{\rho}{\cos \mu}$, que

al ser reemplazados en la ecuación segmentaria, se obtiene

$$\frac{y}{\frac{\rho}{\operatorname{sen} \mu}} + \frac{x}{\frac{\rho}{\operatorname{cos} \mu}} = 1,$$

entonces

$$y \operatorname{sen} \mu + x \operatorname{cos} \mu = \rho. \quad (3.1)$$

Teorema 3.4 *Sea S una simetría respecto a un eje \overleftrightarrow{r} , ρ la distancia de la recta \overleftrightarrow{r} al origen y μ el ángulo que forma la recta normal a \overleftrightarrow{r} con el eje X , entonces S tiene por ecuaciones*

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} -\operatorname{cos} 2\mu & -\operatorname{sen} 2\mu \\ -\operatorname{sen} 2\mu & \operatorname{cos} 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\rho \operatorname{cos} \mu \\ 2\rho \operatorname{sen} \mu \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sea $S(x, y) = (x', y')$, de la figura 12 se puede observar que

$$x' = x_1 - EH,$$

$$y' = y_1 - MP.$$

Conociendo la distancia del punto (x, y) a la recta \overleftrightarrow{r} se halla x' e y' en función de x e y . Así: Haciendo un traslado de los ejes paralelamente, es decir un cambio de coordenadas, de tal forma que el punto $P(x, y)$ sea el origen del nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$, se tiene

$$X' = X + x,$$

$$Y' = Y + y.$$

Entonces, al reemplazar en (3.1) la recta \overleftrightarrow{r} toma la siguiente ecuación en el plano $X'Y'$

$$(x' + x) \operatorname{cos}(\mu) + (y' + y) \operatorname{sen}(\mu) = \rho,$$

operando

$$x' \operatorname{cos} \mu + y' \operatorname{sen} \mu + x \operatorname{cos} \mu + y \operatorname{sen} \mu - \rho = 0.$$

La constante $x \cos \mu + y \operatorname{sen} \mu - \rho$ determina la distancia de la recta al punto $P(x, y)$ que es la misma distancia del punto $P'(x', y')$ a la recta, entonces la longitud de los segmentos \overline{EH} y \overline{MP} son *ver figura 12*.

$$EH = 2(x \cos \mu + y \operatorname{sen} \mu - \rho) \cos \mu,$$

$$MP = 2(x \cos \mu + y \operatorname{sen} \mu - \rho) \operatorname{sen} \mu,$$

reemplazando en x' y y'

$$x' = x - EH = x - 2(x \cos \mu + y \operatorname{sen} \mu - \rho) \cos \mu,$$

$$y' = y - MP = y - 2(x \cos \mu + y \operatorname{sen} \mu - \rho) \operatorname{sen} \mu.$$

Entonces

$$x' = x(1 - 2 \cos^2 \mu) - 2y \operatorname{sen} \mu \cos \mu + 2\rho \cos \mu \text{ y}$$

$$y' = -2x \cos \mu \operatorname{sen} \mu + y(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \mu) + 2\rho \operatorname{sen} \mu,$$

ordenando términos y recordando que $2 \cos^2 \mu - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \mu = \cos 2\mu$ y $2 \operatorname{sen} \mu \cos \mu = \operatorname{sen} 2\mu$; las ecuaciones generales de una simetría respecto a un eje, resultan ser:

$$x' = -x \cos 2\mu - y \operatorname{sen} 2\mu + 2\rho \cos \mu \tag{3.2}$$

$$y' = -x \operatorname{sen} 2\mu + y \cos 2\mu + 2\rho \operatorname{sen} \mu.$$

Es decir

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} -\cos 2\mu & -\operatorname{sen} 2\mu \\ -\operatorname{sen} 2\mu & \cos 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\rho \cos \mu \\ 2\rho \operatorname{sen} \mu \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Para ver en que casos una transformación lineal es una simetría respecto de un eje, basta comparar sus coeficientes. Así:

$$\mathcal{T}(x, y) = \begin{bmatrix} A & B \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ R \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

donde A, B, P, Q, C y R son constantes dadas; \mathcal{T} representa una simetría respecto a un eje, si

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= 1, \\ A &= -Q, \\ B &= P. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si estas condiciones se cumplen, el ángulo μ está determinado por $A = -Q = -\cos 2\mu$; además se debe cumplir que

$$C = 2\rho \cos \mu \text{ y } R = 2\rho \sin \mu. \tag{3.6}$$

Al elevar cada lado de la igualdad al cuadrado, se obtiene

$$\begin{aligned} C^2 &= 4\rho^2 \cos^2 \mu = 2\rho^2 2 \cos^2 \mu = 2\rho^2 (1 + \cos 2\mu), \\ R^2 &= 4\rho^2 \sin^2 \mu = 2\rho^2 2 \sin^2 \mu = 2\rho^2 (1 - \cos 2\mu), \end{aligned}$$

dado que $A = -\cos 2\mu$

$$C^2 = 2\rho^2 (1 - A) \text{ y } R^2 = 2\rho^2 (1 + A), \tag{3.7}$$

por lo tanto

$$\frac{C^2}{1 - A} = \frac{R^2}{1 + A}. \tag{3.8}$$

Si estas condiciones se cumplen, cualquiera de las ecuaciones (3.6) permite calcular ρ , lo que determina el eje de simetría y por tanto la simetría. Para que la transformación (3.4) represente una simetría respecto a un eje, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones (3.5) y (3.8).

Los siguientes casos encierran situaciones en la ecuación que determina una simetría, así:

- I.** Si el eje de la simetría es la abscisa del plano cartesiano, se tiene $\rho = 0$ y $\mu = \frac{\pi}{2}$, entonces sus ecuaciones son

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -y. \end{aligned} \tag{3.9}$$

II. Analogamente, si el eje de simetría es la ordenada del plano cartesiano, se tiene $\rho = 0$ y $\mu = 0$, entonces

$$\begin{aligned}x' &= -x, \\y' &= y.\end{aligned}\tag{3.10}$$

III. Si el eje de la simetría es la bisectriz del primer cuadrante, es decir la recta $y = x$, se tiene $\rho = 0$ y $\mu = \frac{3\pi}{4}$, por tanto

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= x.\end{aligned}\tag{3.11}$$

IIII. Si el eje de la simetría es la bisectriz del segundo cuadrante, es decir la recta $y = -x$, se tiene $\rho = 0$ y $\mu = \frac{\pi}{4}$, por tanto

$$\begin{aligned}x' &= -y, \\y' &= -x.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Ejemplo 3.1 Probar que la curva $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 - 3 = 0$ tiene por eje de simetría la bisectriz del primer cuadrante.

Solución: Sea (x, y) un punto que pertenece a la curva, si se prueba que el punto (y, x) también pertenece; por (3.11) se deduce que está tiene por eje de simetría la bisectriz del primer cuadrante; por (x, y) pertenecer a la curva $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 - 3 = 0$, que se puede escribir como $y^3 + x^3 - y^2x - yx^2 - 3 = 0$, esto es (y, x) pertenece a la curva. Ver figura 13.

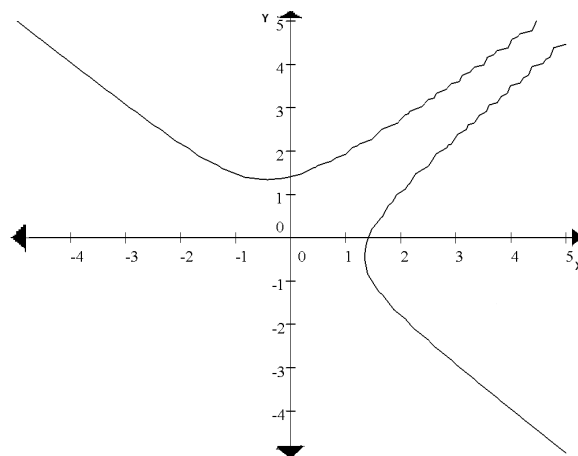


Figura 13 : Gráfica de la curva

$$x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 - 3 = 0.$$

Ejemplo 3.2 Hallar las ecuaciones de una simetría respecto de la recta $f(x) = ax$, donde a es un número diferente de cero.

Solución: Teniendo en cuenta que a es la pendiente de la recta y $\arctan(a)$ determina el grado de inclinación, se tiene ver figura 14.

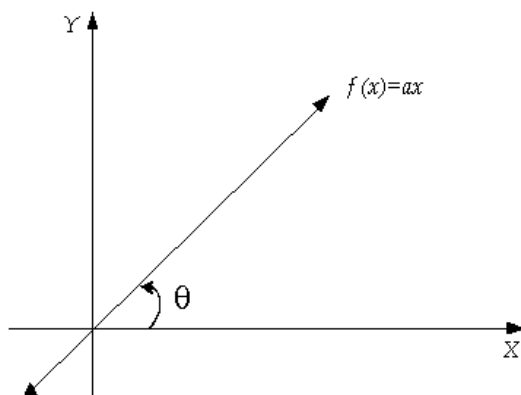


Figura 14 : Gráfica de la función $f(x) = ax$,
donde $\theta = \arctan(a)$.

Para el análisis de las ecuaciones se utiliza la recta $f(x) = ax + b$ donde $b \neq 0$, con

el fin de observar mejor el ángulo que forma la recta normal a $f(x)$ con el eje X ver figura.

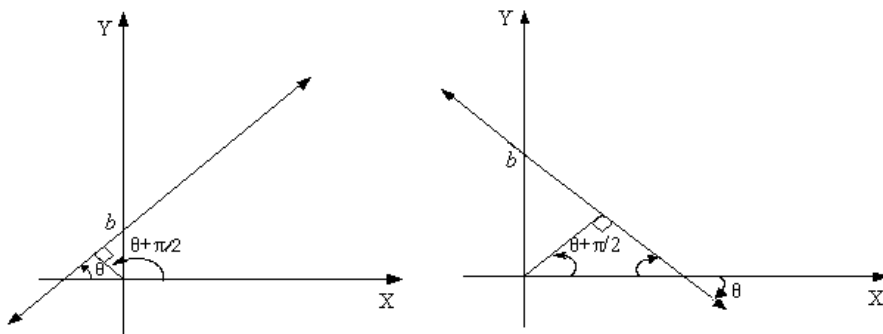


Figura 15 : Representación de $f(x) = ax + b$, cuando $a > 0$ y $a < 0$.

Entonces, si a es diferentes de cero, el ángulo que forma la recta normal a $f(x)$ con el eje X es $\frac{\pi}{2} + \theta$, entonces la simetría respecto al eje $f(x) = ax$ que transforma al punto (x, y) en (x', y') , donde $\rho = 0$, tiene por ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= -x \cos \left(2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right) - y \sin \left(2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right) + 20 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right), \\ y' &= -x \sin \left(2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right) + y \cos \left(2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right) + 20 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right). \end{aligned}$$

Operando y teniendo en cuenta que $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$ y $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$, se obtiene

$$\begin{aligned} x' &= x \cos 2\theta + y \sin 2\theta, \\ y' &= x \sin 2\theta - y \cos 2\theta. \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.3. Producto de simetrías

Se quiere establecer el producto de dos simetrías de ejes r_1 y r_2 no paralelos. Para simplificar cálculos se toma un eje de coordenada de tal manera que la recta r_1 sea el eje X y el punto de intersección de los ejes r_1 y r_2 sea el origen de coordenadas; si α es el ángulo entre r_1 y r_2 se tiene ver figura16.

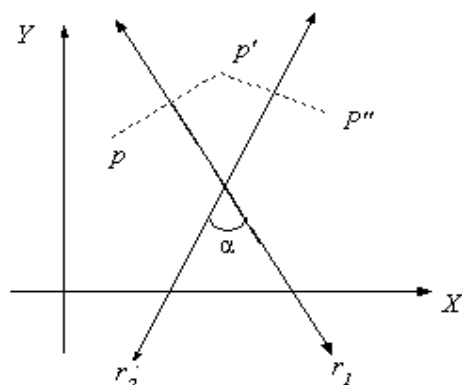


Figura 16 : Ilustración de la transformación producto.

Dado $P(x, y)$ un punto respecto al nuevo sistema de coordenadas, mediante la simetría de eje $\overleftrightarrow{r_1}$ es transformado en $P'(x', y')$, donde $x' = x$ e $y' = -y$; la segunda simetría respecto a $\overleftrightarrow{r_2}$ que transforma el punto $P'(x', y')$ en el punto $P''(x'', y'')$ con $\rho = 0$ y $\mu = \frac{\pi}{2} + \alpha$. De (3.13) la segunda simetría tiene por ecuaciones

$$\begin{aligned}x'' &= x' \cos 2\alpha + y' \sin 2\alpha \\y'' &= x' \sin 2\alpha - y' \cos 2\alpha,\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $x' = x$ e $y' = -y$, las ecuaciones de la transformación producto que hacen corresponder al punto $P(x, y)$ el punto $P''(x'', y'')$ son

$$\begin{aligned}x'' &= x \cos 2\alpha - y \sin 2\alpha \\y'' &= x \sin 2\alpha + y \cos 2\alpha,\end{aligned}$$

está transformación resulta de la forma (2.7), donde $\mu = 2\alpha$, por tanto el producto de dos simetrías respecto de dos ejes equivale a una rotación alrededor de su punto de intersección cuyo ángulo de giro es igual al doble del ángulo entre las dos rectas.

3.4. Producto de una simetría respecto a un eje y una traslación paralela a este

Son interesante las transformaciones que se obtienen por la aplicación sucesiva de transformaciones, es el caso de la transformación que se obtiene por la aplicación de una simetría respecto a un eje y una traslación paralela a este, transformación llamada antitranslación

Para hallar las ecuaciones que determinan este tipo de transformaciones se hará el siguiente procedimiento:

Sea el eje de simetría la recta perpendicular al segmento que forma un ángulo μ con el eje X y cuya longitud es ρ , es decir el eje de la simetría forma un ángulo de $\frac{\pi}{2} + \mu$ con el eje X . Si $P_1(x_1, y_1)$ el transformado del punto $P(x, y)$ mediante la simetría S , de (3.3) se tiene

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} -\cos 2\mu & -\operatorname{sen} 2\mu \\ -\operatorname{sen} 2\mu & \cos 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\rho \cos \mu \\ 2\rho \operatorname{sen} \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Sea \mathcal{T} la traslación de amplitud h paralela al eje de la simetría, que hace corresponder al punto $P_1(x_1, y_1)$ el punto $P'(x', y')$, entonces

$$\mathcal{T}(x_1, y_1) = (x', y'),$$

donde

$$\begin{aligned} x' &= x_1 - h \cos \theta \\ y' &= y_1 + h \operatorname{sen} \theta, \end{aligned}$$

siendo $\theta = \frac{\pi}{2} - \mu$, ver figura

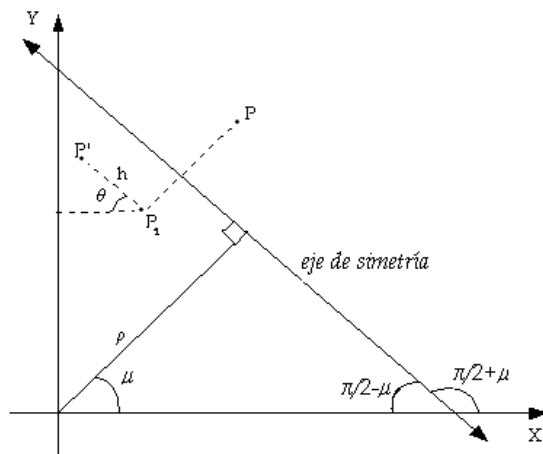


Figura 17 : Correspondiente de P mediante la transformación TS .

Reemplazando en el sistema anterior y teniendo en cuenta que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = \sin \mu$ y $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = \cos \mu$, se tiene

$$\begin{aligned} x' &= x_1 - h \cos \theta = x_1 - h \cos\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = x_1 - h \sin \mu, \\ y' &= y_1 + h \sin \theta = y_1 + h \sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = y_1 + h \cos \mu. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} x' &= x_1 - h \sin \mu, \\ y' &= y_1 + h \cos \mu. \end{aligned}$$

La transformación producto $\mathcal{T}S$, está dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}S(x, y) &= \mathcal{T}(S(x, y)) \\
 &= \mathcal{T}(x_1, y_1) \\
 &= (x', y') \\
 &= (x_1 - h \operatorname{sen} \mu, y_1 + h \operatorname{cos} \mu) \\
 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h \operatorname{sen} \mu \\ h \operatorname{cos} \mu \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\operatorname{cos} 2\mu & -\operatorname{sen} 2\mu \\ -\operatorname{sen} 2\mu & \operatorname{cos} 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\rho \operatorname{cos} \mu \\ 2\rho \operatorname{sen} \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h \operatorname{sen} \mu \\ h \operatorname{cos} \mu \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{T}S(x, y) = \begin{bmatrix} -\operatorname{cos} 2\mu & -\operatorname{sen} 2\mu \\ -\operatorname{sen} 2\mu & \operatorname{cos} 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\rho \operatorname{cos} \mu - h \operatorname{sen} \mu \\ 2\rho \operatorname{sen} \mu + h \operatorname{cos} \mu \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Las condiciones para que una transformación lineal de la forma (3.4), represente una simetría respecto a un eje por una traslación paralela al mismo, surgen de comparar (3.4) y (3.14), estas son

$$\begin{aligned}
 A^2 + B^2 &= 1, \\
 B &= P, \\
 A &= -Q.
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ademas, las constantes C y R son equivalentes a

$$\begin{aligned}
 C &= 2\rho \operatorname{cos} \mu - h \operatorname{sen} \mu, \\
 R &= 2\rho \operatorname{sen} \mu + h \operatorname{cos} \mu.
 \end{aligned}$$

Sistema que dado μ , permite encontrar las incognitas p y h , por tanto, para que una transformación lineal del tipo (3.4), represente el producto de una simetría respecto de un eje por una traslación paralela al mismo, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones (3.15); el producto de este tipo de transformaciones tiene ciertas propiedades o características particulares, esto se refleja en la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *Una simetría respecto de un eje por una traslación paralela al mismo es conmutativa.*

Demostración. Sea S la simetría respecto a un eje y \mathcal{T} la traslación paralela a este eje; si (x_2, y_2) es el transformado de (x, y) mediante la traslación \mathcal{T} , la transformación producto $S\mathcal{T}$ es dada por:

$$\begin{aligned} S\mathcal{T}(x, y) &= S(\mathcal{T}(x, y)) \\ &= S(x_2, y_2) \\ &= \begin{bmatrix} -\cos 2\mu & -\sen 2\mu \\ -\sen 2\mu & \cos 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\rho \cos \mu \\ 2\rho \sen \mu \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

como (x_2, y_2) es el transformado de (x, y) mediante la simetría \mathcal{T} , entonces $(x_2, y_2) = (x - h \sen \mu, y + h \cos \mu)$, al reemplazar en forma matricial

$$\begin{aligned} S\mathcal{T}(x, y) &= \begin{bmatrix} -\cos 2\mu & -\sen 2\mu \\ -\sen 2\mu & \cos 2\mu \end{bmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h \sen \mu \\ h \cos \mu \end{pmatrix} \right\rangle + \begin{pmatrix} 2\rho \cos \mu \\ 2\rho \sen \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos 2\mu & -\sen 2\mu \\ -\sen 2\mu & \cos 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos 2\mu & -\sen 2\mu \\ -\sen 2\mu & \cos 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -h \sen \mu \\ h \cos \mu \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 2\rho \cos \mu \\ 2\rho \sen \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos 2\mu & -\sen 2\mu \\ -\sen 2\mu & \cos 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} h(\cos 2\mu \sen \mu - \sen 2\mu \cos \mu) \\ h(\sen 2\mu \sen \mu + \cos 2\mu \cos \mu) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{pmatrix} 2\rho \cos \mu \\ 2\rho \sen \mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\cos 2\mu \sen \mu - \sen 2\mu \cos \mu = \sen(\mu - 2\mu) = \sen(-\mu) = -\sen \mu$ y $\sen 2\mu \sen \mu + \cos 2\mu \cos \mu = \cos(\mu - 2\mu) = \cos(-\mu) = \cos \mu$, se tiene

$$\begin{aligned} S\mathcal{T}(x, y) &= \begin{bmatrix} -\cos 2\mu & -\sen 2\mu \\ -\sen 2\mu & \cos 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -h \sen \mu \\ h \cos \mu \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 2\rho \cos \mu \\ 2\rho \sen \mu \end{pmatrix} \\ S\mathcal{T}(x, y) &= \begin{bmatrix} -\cos 2\mu & -\sen 2\mu \\ -\sen 2\mu & \cos 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h \sen \mu + 2\rho \cos \mu \\ h \cos \mu + 2\rho \sen \mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comparando con (3.14), se tiene $\mathcal{T}S(x, y) = ST(x, y)$, lo que demuestra la conmutatividad.

Ahora se estudiará el producto cuando el eje de la simetría es el eje X , el eje Y o la bisectriz del primer cuadrante, es decir la recta $f(x) = x$.

1. Cuando el eje de la simetría es el eje X y la traslación es paralela a este mismo, es decir, la simetría S transforma al punto (x, y) en el punto (x_1, y_1) , donde $x_1 = x$ y $y_1 = -y$, como \mathcal{T} es una traslación de amplitud h paralela al eje X , al punto (x_1, y_1) le hace corresponder (x', y') , donde $x' = x_1 - h$ e $y' = y_1$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{T}S(x, y) &= \mathcal{T}(S(x, y)) \\ &= \mathcal{T}(x_1, y_1) \\ &= (x_1 - h, y_1) \\ \mathcal{T}S(x, y) &= (x - h, -y).\end{aligned}$$

2. Cuando el eje de la simetría es el eje Y , está transforma el punto (x, y) en (x_1, y_1) , donde $x_1 = -x$ e $y_1 = y$, además debido a que la traslación \mathcal{T} es paralela al eje y el correspondiente de (x_1, y_1) es $(x_1, y_1 + h)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{T}S(x, y) &= \mathcal{T}(S(x, y)) \\ &= \mathcal{T}(x_1, y_1) \\ &= (x_1, y_1 + h) \\ \mathcal{T}S(x, y) &= (-x, y + h).\end{aligned}$$

3. Cuando el eje de la simetría es la bisectriz del primer cuadrante, el punto (x, y) es transformado en (x_1, y_1) , donde $x_1 = y$ e $y_1 = x$; la traslación está dada mediante la ecuación, siendo $\mu = \frac{3\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x_1, y_1) &= (x_1 - h \operatorname{sen} \mu, y_1 + h \operatorname{cos} \mu) \\ &= \left(x_1 - h \frac{\sqrt{2}}{2}, y_1 - h \frac{\sqrt{2}}{2} \right),\end{aligned}$$

la transformación producto $\mathcal{T}S$ tiene por ecuaciones

$$\begin{aligned}\mathcal{T}S(x, y) &= \mathcal{T}(S(x, y)) \\ &= \mathcal{T}(x_1, y_1) \\ &= \left(y - h\frac{\sqrt{2}}{2}, x - h\frac{\sqrt{2}}{2} \right),\end{aligned}$$

el punto (x, y) es transformado mediante $\mathcal{T}S$ en $\left(y - h\frac{\sqrt{2}}{2}, x - h\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

3.5. Aplicaciones de las simetrías

La simetría resulta ser una herramienta muy potente en muchos campos de la matemática y otras ciencias, como se ilustrara en los siguientes ejemplos y comentarios.

3.5.1. Aplicaciones de las simetrías a la geometría

Se tienen los siguiente problemas:

1. En los puntos denotados por A y B hay casa, se quiere hallar el punto del río “ r ”, en que debe ubicarse una bomba que extraiga agua y la impulse hacia las casas de modo que la longitud total de las cañerías sea mínima. Una ilustración del problema puede verse en *figura 18*.

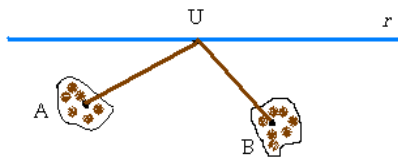


Figura 18 : Ilustra la ubicación de las casas y el río.

Solución: Se tiene que encontrar un punto C sobre r , tal que $AC + BC$ sea mínima; considerese un punto U cualquiera sobre r (como se ilustra en la figura 18), al aplicar una simetría respecto a r al segmento \overline{AU} , se obtiene un segmento $\overline{A'U}$, entonces la longitud del segmento $\overline{A'U}$ es igual a la longitud de \overline{AU} , es decir $A'U = AU$, por lo tanto $AU + BU = A'U + UB$, para que esta distancia sea mínima el punto U debe ubicarse sobre la recta $\overleftrightarrow{A'B}$ es decir $U = C$, debido a que el segmento $\overline{A'B}$ representa la longitud más corta entre las casas al pasar por el río, esto demuestra que el punto buscado es la intersección de r con $\overline{A'B}$. Una ilustración de lo anterior se hace en la figura 19.

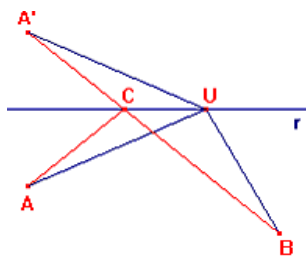
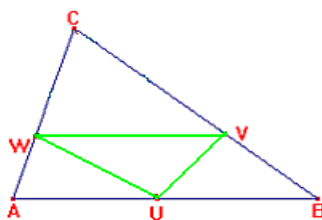


Figura 19 : Ilustra la ubicación de C en r .

2. Dado un triángulo acutángulo inscribir en él, el triángulo de perímetro mínimo.

Solución: Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y $\triangle UVW$ un triángulo arbitrario

inscrito en él ver *figura 20*.



*Figura 20 : Ilustra
el $\triangle UVW$ inscrito
en $\triangle ABC$.*

Simetrizando U con respecto \overline{AC} y \overline{BC} se obtiene U' y U'' , entonces $U'W = UW$ y $U''V = UV$, se tiene

$$U'W + WV + VU' = UW + WV + VU.$$

La parte izquierda de la igualdad es el perímetro del triángulo inscrito con un vértice dado, entonces está será mínima si los vértices W y V pasan a ser S y T respectivamente, intersección de $\overline{V'U''}$ con \overline{AC} y \overline{BC} , por lo tanto el triángulo de menor perímetro teniendo un punto U como vértice dado será $\triangle SUT$; solo resta averiguar donde debe ubicarse U en \overline{BC} para que el triángulo resultante sea de perímetro menor entre todos los inscritos, para esto se observa que $\triangle U'CU''$ es isósceles (*sus lados $U'C$ y CU'' son simétricos de CU*) y el ángulo $\sphericalangle U'CU''$ es constante, independiente de la posición de U en \overline{BC} e igual a 2 veces el ángulo $\sphericalangle ACB$ (*U se encuentra en \overline{AB} por ser $\sphericalangle ABC$ acutángulo*), debido a que $\sphericalangle U'CA = \sphericalangle ACU$ y $\sphericalangle BCU'' = \sphericalangle UCB$. Se quiere minimizar la base del triángulo $\triangle U'CU''$ por ser esta igual al perímetro del triángulo inscrito, en estas condiciones será mínimo cuando \overline{CU} sea perpendicular a \overline{AB} (*aquí la importancia de*

ser $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo). Lo anterior se ilustra en la siguiente figura.

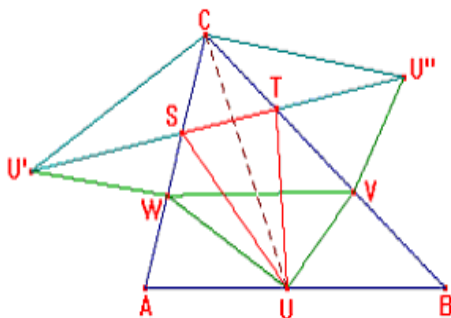


Figura 21 : Ilustra la forma de encontrar el $\triangle UVW$.

3.5.2. Aplicaciones de las simetrías a la Química

¿Que tiene que ver la simetría con la química?

El que no este familiarizado con la química puede sorprenderle que la simetría sea un tema de interés para el químico; existen muchas aplicaciones de los conceptos de simetría a la química; un área donde se aplican estos conceptos con gran frecuencia es en la espectroscopía que estudia las interacciones de la luz con las moléculas. El espectroscopista puede sacar muchas conclusiones acerca de como una molécula interactúa con la luz, unicamente conociendo las propiedades simétricas de la molécula, aun sin saber cuales son los átomos que la componen, en otras palabras, se puede decir: *La molecula tiene tales y cuales elementos simétricos y eso bastará para conocer algunas propiedades espectroscopicas.* Al área de la química teórica, donde se aplican propiedades y estructuras de moléculas a través de los cálculos, las propiedades de simetría son fundamentales para reducir enormemente el tiempo de cálculo requerido, esfuerzo y dinero.

Capítulo 4

Congruencias

Definición 4.1 Se llama congruencia a toda transformación puntual C representada por

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow \mathbf{C}(x, y) = (x', y'), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} x' &= Ax + By + C \\ y' &= Px + Qy + R, \end{aligned} \tag{4.1}$$

tal que, si (x, y) y (x', y') pertenecen a \mathbb{R}^2 , se cumple $\|(x, y) - (x', y')\| = \|\mathbf{C}(x, y) - \mathbf{C}(x', y')\|$.

Los coeficientes de las ecuaciones (4.1) deben cumplir ciertas condiciones para que al transformar un segmento se conserve la longitud del mismo, condiciones que se deducen al igualar la longitud del segmento $\overline{P_1P_2}$ con la del segmento $\overline{P'_1P'_2}$, es decir, si $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P'_1(x'_1, y'_1)$ y $P'_2(x'_2, y'_2)$ se tiene

$$\left(x'_1 - x'_2\right)^2 + \left(y'_1 - y'_2\right)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \tag{4.2}$$

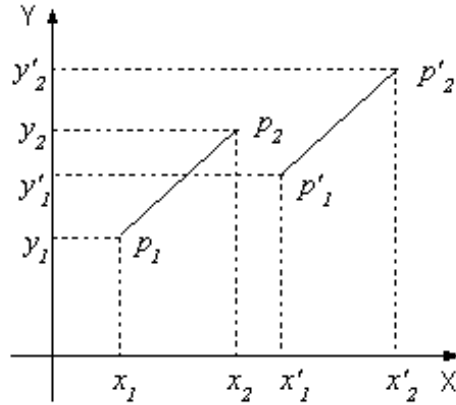


Figura 22 : Dos segmentos
congruentes.

Expresando x'_1 , x'_2 y y'_1 , y'_2 en función de x_1 , y_1 y x_2 , y_2 , se tiene

$$\begin{aligned}x'_1 &= Ax_1 + By_1 + C & y'_1 &= Px_1 + Qy_1 + R, \\x'_2 &= Ax_2 + By_2 + C & y'_2 &= Px_2 + Qy_2 + R.\end{aligned}$$

Entonces

$$(x'_1 - x'_2) = \langle (Ax_1 + By_1 + C) - (Ax_2 + By_2 + C) \rangle = \langle A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) \rangle,$$

$$(y'_1 - y'_2) = \langle (Px_1 + Qy_1 + R) - (Px_2 + Qy_2 + R) \rangle = \langle P(x_1 - x_2) + Q(y_1 - y_2) \rangle.$$

Al sustituir en la ecuación (4.2)

$$[A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2)]^2 + [P(x_1 - x_2) + Q(y_1 - y_2)]^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

al aplicar trinomio cuadrado perfecto, resulta

$$\begin{aligned}A^2(x_1 - x_2)^2 &+ 2AB(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) &+ B^2(y_1 - y_2)^2 &+ P^2(x_1 - x_2)^2 &+ \\2PQ(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) &+ Q^2(y_1 - y_2)^2 &= (x_1 - x_2)^2 &+ (y_1 - y_2)^2.\end{aligned}$$

Al agrupar términos semejantes, se tiene

$$\begin{aligned}(A^2 + P^2)(x_1 - x_2)^2 &+ (B^2 + Q^2)(y_1 - y_2)^2 &+ (AB + PQ)2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) &= \\(x_1 - x_2)^2 &+ (y_1 - y_2)^2.\end{aligned}$$

Por tanto se debe cumplir

$$A^2 + P^2 = 1, \quad (4.3)$$

$$B^2 + Q^2 = 1, \quad (4.4)$$

$$AB + PQ = 0. \quad (4.5)$$

Estas condiciones son necesarias y suficientes para que las ecuaciones (4.1) representen una congruencia.

El siguiente análisis muestra una forma de clasificar las congruencias según los coeficientes de sus ecuaciones, así: si la igualdad (4.3) es multiplicada por B^2 y la igualdad (4.4) por P^2 , se obtiene

$$A^2B^2 + P^2B^2 = B^2, \quad (4.6)$$

$$B^2P^2 + Q^2P^2 = P^2, \quad (4.7)$$

al restar las igualdades anteriores, se tiene

$$A^2B^2 - Q^2P^2 = B^2 - P^2. \quad (4.8)$$

De (4.5) $AB = -PQ$, elevando al cuadrado cada lado de la igualdad, resulta $A^2B^2 = P^2Q^2$, y al reemplazar en (4.8)

$$B^2 - P^2 = 0.$$

Entonces $P = \pm B$, esta igualdad determina cuando una congruencia es una traslación, una rotación o una simetría; como lo indica el siguiente estudio:

i.) Cuando $P = -B \neq 0$. Al reemplazar $P = -B$ en $AB + PQ = 0$, se obtiene $AB - BQ = 0$, al dividir por B resulta $A = Q$, entonces

$$A^2 + B^2 = 1,$$

$$A = Q \text{ y}$$

$$B = -P.$$

Por cumplirse las condiciones (2.8) la congruencia es una rotación si $A \neq 1$ o una traslación si $A = 1$.

ii.) Cuando $P = B \neq 0$. Al reemplazar $P = B \neq 0$ en $AB + PQ = 0$, se obtiene $AP + PQ = 0$, al dividir por P resulta $A = -Q$, entonces

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= 1, \\ A &= -Q \text{ y} \\ B &= P. \end{aligned}$$

Por cumplirse las condiciones (3.5) la congruencia es una simetría respecto de un eje seguida de una traslación paralela al mismo (*traslación que puede ser de amplitud cero y reducirse solo a una simetría*).

iii.) Cuando $P = B = 0$. Al reemplazarse $P = B = 0$ en las ecuaciones (4.3) y (4.4), se obtiene $A^2 = 1$ y $Q^2 = 1$, es decir

- Si A y Q son de igual signo, se tiene

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= 1, \\ A &= Q \text{ y} \\ B &= -P, \end{aligned}$$

las cuales cumplen las condiciones en (2.8), por lo tanto la congruencia es una rotación.

- Si A y Q son de signos diferentes

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= 1, \\ A &= -Q \text{ y} \\ B &= P, \end{aligned}$$

cumplen con las condiciones (3.15), por tanto la congruencia es una simetría respecto de un eje seguida de una traslación.

Una manera de diferenciar una congruencia de una forma más sencilla, es calculando el determinante de la transformación

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix} = AQ - PB.$$

Con lo que se presentan dos casos:

1. Cuando $\Delta = 1$, la congruencia es una traslación o una rotación

- Una traslación porque $A = Q = 1$ y $B = P = 0$, entonces

$$\Delta = AQ - PB = 1 - 0 = 1.$$

- Una rotación porque $A = Q \neq 1$ y $B = -P$, entonces

$$\Delta = AQ - BP = A^2 + B^2 = 1.$$

2. Cuando $\Delta = -1$, la congruencia es una simetría seguida de una traslación, debido a que $A = -Q$, $B = P$ y $A^2 + B^2 = 1$, entonces

$$\Delta = AQ - PB = A(-A) - BB = -A^2 - B^2 = -1.$$

Por tanto: *Toda congruencia es una traslación, una rotación o bien una simetría respecto de un eje seguida de una traslación paralela al mismo. En los dos primeros el determinante Δ es 1 y en el tercero $\Delta = -1$.*

Definición 4.2 *Las congruencias cuyo determinante $\Delta = 1$ se llama acordes y aquellas con determinante $\Delta = -1$, discordes.*

Teorema 4.1 *El producto de dos congruencias acordes es una congruencia acorde.*

Demostración. Por el teorema 2.1 el producto de dos traslaciones es una traslación y por el teorema 2.4 y 2.5 y el corolario 2.1, el producto entre rotaciones o entre traslaciones y rotaciones es otra rotación. Por tanto el producto de congruencias acordes es otra congruencia acorde. Al hacer la demostración mediante el determinante de las congruencias, se tiene:

Sean \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_2 dos congruencias acordes

$$\mathbf{C}_1(x, y) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ P_1 & Q_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ R_1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{C}_2(x, y) = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ P_2 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 \\ R_2 \end{pmatrix},$$

siendo Δ_1 y Δ_2 los determinantes de \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_2 respectivamente, entonces

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ P_1 & Q_1 \end{vmatrix} = 1$$

y

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} = 1.$$

La transformación producto $\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1$ está dada por

$$\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1(x, y) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ P_1 & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ P_2 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ P_2 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ R_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 \\ R_2 \end{pmatrix},$$

el determinante Δ de la transformación producto $\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1$ es igual al producto de los determinantes de las congruencias \mathbf{C}_2 y \mathbf{C}_1 , por tanto

$$\Delta = \Delta_2 * \Delta_1 = 1 * 1 = 1.$$

es decir, $\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1$ es una congruencia acorde.

Los siguientes teoremas se demuestran mediante el determinante de la congruencia.

Teorema 4.2 *El producto de una congruencia acorde por otra discorda es una congruencia discorda.*

Demostración. Sean \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_2 dos congruencias, una congruencia acorde y la otra discorda respectivamente, entonces $\Delta_1 = 1$ y $\Delta_2 = -1$ determinantes de \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_2

respectivamente. Dado que el determinante de la transformación producto es el producto de los determinantes, se tiene

$$\Delta = \Delta_2 * \Delta_1 = 1 * -1 = -1.$$

es decir, $\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1$ es una congruencia discorda.

Teorema 4.3 *El producto de dos congruencias discordas es una congruencia acorde.*

Demostración. Dadas \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_2 dos congruencias en este caso discordas, se tiene que $\Delta_1 = -1$ y $\Delta_2 = -1$, por tanto el determinante Δ de la transformación producto $\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1$, es igual

$$\Delta = \Delta_2 * \Delta_1 = -1 * -1 = 1.$$

es decir, una congruencia acorde.

Teorema 4.4 *El conjunto de todas las congruencias forma un grupo.*

Demostración. Teniendo en cuenta que toda congruencia es acorde o discorda, se probará las dos condiciones para ser un grupo de transformaciones: *i.*) El producto de dos congruencias según los tres teoremas anteriores es una congruencia acorde o discorda, por lo tanto se cumple la primera condición. *ii.*) Para que una transformación tenga inversa debe cumplirse que el determinante " Δ " sea diferente de cero, como $\Delta = 1$ o $\Delta = -1$ significa que toda congruencia tiene inversa, para las congruencias acordes se tiene que \mathbf{C}^{-1} es una congruencia acorde; si \mathbf{C} es discorda por definición 4.2, \mathbf{C} es de la forma

$$\mathbf{C} = S\mathcal{T},$$

donde \mathcal{T} es una traslación y S una simetría respecto a un eje, entonces

$$\mathbf{C}^{-1} = (\mathcal{T}S)^{-1} = S^{-1}\mathcal{T}^{-1}.$$

Por ser S^{-1} una simetría respecto a un eje y \mathcal{T}^{-1} una traslación, se tiene que \mathbf{C}^{-1} es una congruencia discorda, se cumplen la segunda condición, lo que demuestra el teorema.

Teorema 4.5 *El conjunto de todas las congruencias acordes forma un grupo.*

Demostración. La primera condición se cumple por el teorema 4.1, respecto a la segunda condición se tiene que la transformación inversa de una congruencia acorde es otra congruencia acorde, con lo que se demuestra el teorema.

Respecto al producto de congruencias discordes por el teorema 4.3, es una congruencia acorde, es decir, el conjunto de todas las congruencias discordes no forma grupo.

El siguiente ejemplo muestra la forma de clasificar las congruencias, según los análisis hechos.

Ejemplo 4.1 *Dada la siguiente transformación*

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (x', y'),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2}{3}y + 2 \\ y' &= \frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{5}}{3}y + 1.\end{aligned}$$

Pruebe que es una congruencia y clasifíquela.

Solución: *Para probar que \mathcal{T} es una congruencia, se debe cumplir las condiciones dadas en las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.5). Como $A = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $P = \frac{2}{3}$ y $Q = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, se tiene*

$$\begin{aligned}A^2 + P^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1, \\ B^2 + Q^2 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \text{ y} \\ AB + PQ &= \frac{\sqrt{5}}{3} * \frac{2}{3} + \frac{2}{3} * \frac{-\sqrt{5}}{3} = 0,\end{aligned}$$

es decir, \mathcal{T} es una congruencia. Para determinar que tipo de congruencia es, se halla el determinante de la transformación, así

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-\sqrt{5}}{3} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{3} * \frac{-\sqrt{5}}{3} - \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = -1.$$

Entonces, \mathcal{T} es una congruencia discorde.

Capítulo 5

Homotecias

Definición 5.1 Dado L un punto fijo y h una constante diferente de cero, se llama homotecia de centro L y razón h a la transformación puntual que al punto $P(x, y)$ le hace corresponder el punto $P'(x', y')$ situado sobre la recta determinada por los puntos L y P , tal que el cociente entre la longitud del segmento $\overline{LP'}$ y la longitud de \overline{LP} es igual al valor absoluto de h

$$\frac{LP'}{LP} = |h|.$$

Cuando $h > 0$, se entiende que el vector con punto inicial L y final, P' , es decir $\overrightarrow{LP'}$, tiene la misma dirección y sentido que el vector \overrightarrow{LP} , en caso contrario cuando $h < 0$, el vector $\overrightarrow{LP'}$ tiene dirección y sentido opuesto al vector \overrightarrow{LP} . Si $P = L$ se conviene que su imagen P' es igual a L .

El siguiente ejemplo hace énfasis en la definición de homotecia.

Ejemplo 5.1 Dada la homotecia de centro $(1, 1)$ y razón 3, pruebe que al punto $(3, 2)$ le hace corresponder el punto $(7, 4)$.

Solución: Debido a que $h = 3 > 0$ y $L = (1, 1)$, se tiene que el correspondiente de $(3, 2)$, tiene igual sentido que \overrightarrow{LP} y además, se debe cumplir que $LP' = |h| * LP$. Como $LP = \sqrt{5}$, entonces $LP' = 3\sqrt{5}$, es decir $P' = (7, 4)$, por que $\|(7, 4) - (1, 1)\| = 3\sqrt{5}$,

como se ilustra en la figura 23.

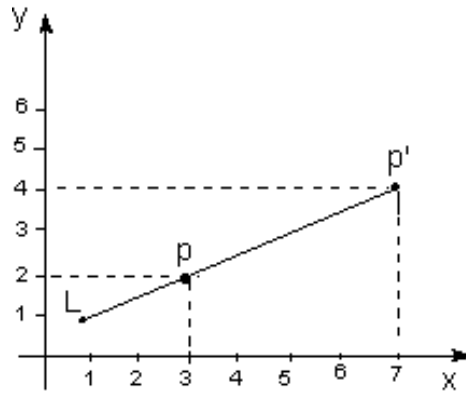


Figura 23 : Ilustración del ejemplo 5.1

Definición 5.2 Una homotecia H en la cual la razón h es mayor que cero, se llama homotecia directa. En el caso cuando $h < 0$ se habla de homotecia inversa.

En la figura 24 se hace referencia al análisis entre dos puntos P_1, P_2 y sus transformados P'_1 y P'_2 respectivamente mediante una homotecia.

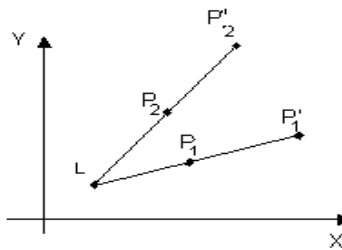


Figura 24 : Correspondiente de P_1 y P_2 mediante H .

Entonces

$$\frac{LP'_1}{LP_1} = \frac{LP'_2}{LP_2} = \frac{P'_1P'_2}{P_1P_2} = h, \tag{4.1}$$

por tanto, en una homotecia un segmento y su transformado son paralelos y la razón entre sus longitudes es igual al valor absoluto de la razón de la homotecia.

A continuación se deducen las ecuaciones que definen una homotecia:

Si las coordenadas del centro son $L(a, b)$ y el transformado de $P(x, y)$ es $P'(x', y')$, se tiene

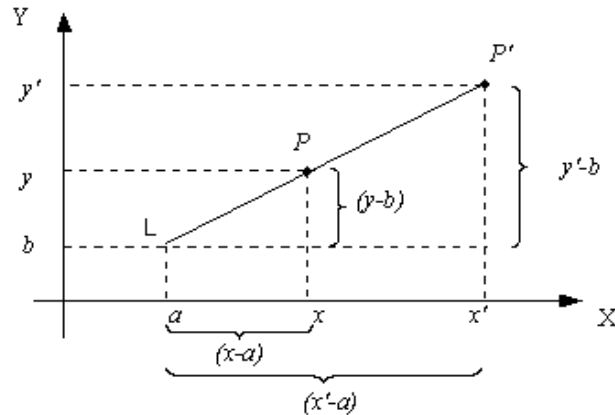


Figura 25 : Relación entre P y P' .

De la figura 25

$$\frac{x' - a}{x - a} = \frac{y' - b}{y - b} = h.$$

Entonces

$$\frac{x' - a}{x - a} = h \quad \text{y} \quad \frac{y' - b}{y - b} = h,$$

por lo tanto, las ecuaciones de una homotecia son

$$\begin{aligned} x' &= h(x - a) + a, \\ y' &= h(y - b) + b. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Cuando $h = 1$, resulta $x' = x$, $y' = y$, es decir, la transformación idéntica.

5.1. Transformación inversa de una homotecia

Sea H la homotecia que transforma el punto $P(x, y)$ en el punto $P'(x', y')$, la transformación inversa de H notada por H^{-1} , hace corresponder al punto $P'(x', y')$ el punto

$P(x, y)$ el cual se halla despejando x, y en función de x', y' en la ecuación (4.2), es decir

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{h}(x' - a) + a, \\y &= \frac{1}{h}(y' - b) + b.\end{aligned}\tag{4.3}$$

La inversa de una homotecia es otra homotecia de igual centro y cuya razón es el inverso multiplicativo de la homotecia dada.

5.2. Condiciones para ser una homotecia

Una transformación lineal de la forma

$$\mathcal{T}(x, y) = (x', y'),$$

donde

$$\begin{aligned}x' &= Ax + By + C, \\y' &= Px + Qy + R.\end{aligned}$$

Representa una homotecia si cumple las siguientes condiciones que se originan de comparar sus coeficientes con los de la ecuación (4.2), de donde

$$P = B = 0 \text{ y } A = Q,\tag{4.4}$$

donde $A = h$, al reemplazar los términos independientes de la ecuación (4.2), se obtiene

$$(1 - A)a = C \text{ y } (1 - A)b = R\tag{4.5}$$

Este sistema permite encontrar las coordenadas del centro (a, b) siempre y cuando A sea diferente de 1; si $A = 1$ la transformación es una traslación.

Ejemplo 5.2 Dada la siguiente transformación pruebe que es una homotecia, halle la razón y el centro

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x, y) &= (x', y') \\ &= (3x - 3, 3y - 1)\end{aligned}$$

entonces, por cumplir las condiciones (4.4) es una homotecia donde $h = 3$ y cuyo centro se halla resolviendo el sistema (4.5) aplicado a este caso

$$(1 - 3)a = -3y$$

$$(1 - 3)b = -1,$$

resolviendo $a = \frac{3}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$, es decir, una homotecia de razón 3 y centro $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

5.3. Producto de homotecias

Teorema 5.1 *El producto de dos homotecias es otra homotecia de razón igual al producto de las razones y cuyo centro está alineado con los centros de las dos homotecias dadas.*

Demostración. Sean H_1 y H_2 dos homotecias con centro $L_1(a_1, b_1)$ y $L_2(a_2, b_2)$ y razón h_1 y h_2 respectivamente, entonces

$$H_1(x, y) = (x', y'),$$

donde

$$x' = h_1(x - a_1) + a_1,$$

$$y' = h_1(y - b_1) + b_1.$$

y

$$H_2(x', y') = (x'', y''),$$

donde

$$x'' = h_2(x' - a_2) + a_2,$$

$$y'' = h_2(y' - b_2) + b_2.$$

La transformación producto H_2H_1 esta dada por

$$\begin{aligned}
 H_2H_1(x, y) &= H_2(H_1(x, y)) \\
 &= H_2(x', y') \\
 &= (h_2(x' - a_2) + a_2, h_2(y' - b_2) + b_2) \\
 &= (h_2(h_1(x - a_1) + a_1 - a_2) + a_2, h_2(h_1(y - b_1) + b_1 - b_2) + b_2) \\
 &= (h_2h_1x - h_2h_1a_1 + h_2a_1 - h_2a_2 + a_2, h_2h_1y - h_2h_1b_1 + h_2b_1 - \\
 &\quad h_2b_2 + b_2).
 \end{aligned}$$

Se observa que la transformación H_2H_1 es otra homotecia de razón h_2h_1 ; al tomar a (a, b) como el centro de la homotecia producto, por la ecuación (4.5) se tiene

$$\begin{aligned}
 (1 - h_2h_1)a &= a_1h_2(1 - h_1) + a_2(1 - h_2), \\
 (1 - h_2h_1)b &= b_1h_2(1 - h_1) + b_2(1 - h_2).
 \end{aligned}$$

Si las razones de las homotecias son inversa, es decir $h_2h_1 = 1$, la homotecia producto es una traslación.

Ejemplo 5.3 Dadas dos homotecia $H_1(x, y) = (2x - 3, 2y + 2)$ y

$H_2(x, y) = (-3x - 1, -3y + 4)$, encuentre la razón y el centro de la homotecia producto.

Solución: Se tiene

$$\begin{aligned}
 H_2H_1(x, y) &= H_2(H_1(x, y)) \\
 &= H_2(2x - 3, 2y + 2) \\
 &= (-3(2x - 3) - 1, -3(2y + 2) + 4) \\
 &= (-6x + 8, -6y - 2).
 \end{aligned}$$

La razón de la homotecia producto es -6 y el centro se halla despejando a y b en el sistema (4.5)

$$(1 + 6)a = 8 \text{ y } (1 + 6)b = -2,$$

entonces $a = \frac{8}{7}$ y $b = -\frac{2}{7}$, es decir una homotecia de centro $(\frac{8}{7}, -\frac{1}{7})$ y razón -6 .

5.4. Circunferencias homotéticas

En esta sección se quiere estudiar la transformada de una circunferencia mediante una homotecia y algunas de sus propiedades.

Sea

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \quad (4.6)$$

una circunferencia de centro (α, β) y radio r , para hallar su transformada mediante la homotecia

$$H(x, y) = (x', y'),$$

donde

$$x' = hx + m,$$

$$y' = hy + n,$$

basta sustituir x, y en el sistema anterior y reemplazarlo en la ecuación (4.6), para obtener

$$\left[\frac{x' - (h\alpha + m)}{h} \right]^2 + \left[\frac{y' - (h\beta + n)}{h} \right]^2 = r^2.$$

Al multiplicar a ambos lados de la igualdad por h^2 para eliminar denominadores, resulta

$$[x' - (m + h\alpha)]^2 + [y' - (n + h\beta)]^2 = r^2 h^2,$$

otra circunferencia de centro (α', β') y radio r' , donde $\alpha' = m + h\alpha, \beta' = n + h\beta$ y $r'^2 = r^2 h^2$.

Recíprocamente, dadas dos circunferencias una de centro (α, β) y radio r y otra de centro (α', β') y radio r' , las igualdades anteriores permiten determinar la homotecia que hace corresponder a una circunferencia la otra. Así; debido a que $r'^2 = r^2 h^2$, permite determinar dos razones de la homotecia y para cada una de ellas los valores $m = \alpha' - h\alpha$ y $n = \beta' - h\beta$, con los que se puede hallar las coordenadas del centro (a, b) de la homotecia. De la ecuación (4.5)

$$(1 - h)a = \alpha' - h\alpha \quad \text{y} \quad (1 - h)b = \beta' - h\beta.$$

Es decir, dadas dos circunferencias no concéntricas, existen dos homotecias que hacen corresponder a una circunferencia la otra. La razón de estas homotecias son iguales a las razones entre los radios con signo negativo y positivo respectivamente, y los centros de las homotecias O y O' son los puntos que dividen al segmento determinado por los centros de las circunferencias en la misma razón $\pm r'/r$. La figura 26 muestra la construcción geométrica de los centros de las homotecias, basta tomar un segmento \overline{OP} en una circunferencia y otro $\overline{O'P''}$ paralelo a este, los centros de las homotecias son L_1 y L_2 puntos en que las rectas $\overleftrightarrow{PP'}$ y $\overleftrightarrow{PP''}$ cortan a la recta de los centros, puesto que estos son los puntos que dividen al segmento $\overleftrightarrow{OO'}$ en la razón.

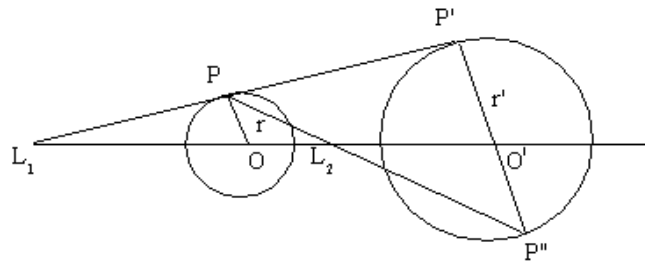


Figura 26 : Dos homotecias que relacionan dos circunferencias.

Se puede observar que

$$\frac{L_1O'}{L_1O} = \left| \frac{r'}{r} \right| \quad y \quad \frac{L_2O'}{L_2O} = \left| -\frac{r'}{r} \right|.$$

5.5. Aplicaciones de las homotecias

Las homotecias tiene un sin número de aplicaciones desde hace siglos y su importancia se fundamenta en la resolución de ciertos problemas y en la ratificación de algunos en las diferentes ramas de la ciencia como son la astronomía, la ingeniería y la matemática entre otras.

5.5.1. Aplicaciones en la astronomía

Se conoce que la distancia de la tierra al sol es 149,600.000 Km, ¿Cómo estimar el diámetro solar?

Para este interrogante los estudiantes de Astronomía utilizan un instrumento llamado tubo negro, con el que se realizan experimentos; para construirlo se puede utilizar un tubo PVC de 180 cm largo por 17 cm de diámetro, al que se coloca en uno de sus extremos un círculo de aluminio con un agujero central de 1mm de diámetro, y en el otro extremo se cierra con papel cebolla, como se ilustra en la figura 27.

Se coloca el tubo sobre un trípode y se orienta al sol.

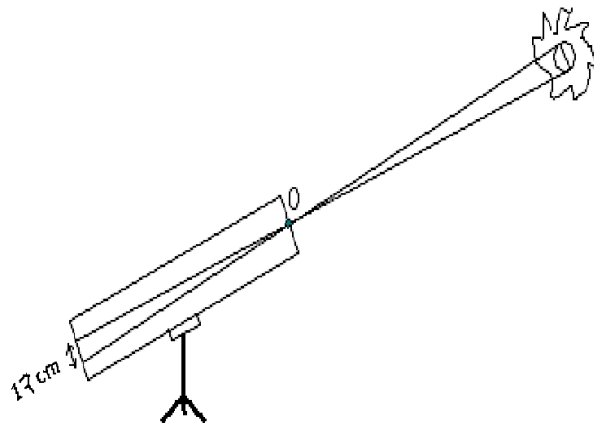


Figura 27 : Tubo negro orientado al sol.

En la figura 27 se observan dos triángulos isósceles relacionados mediante una homotecia

de razón negativa como lo muestra la figura 28.

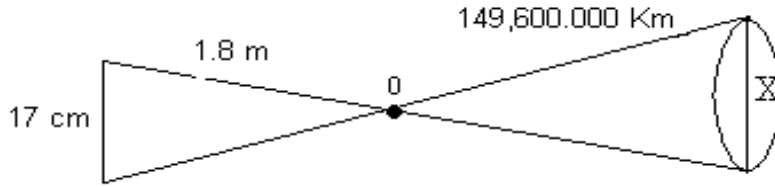


Figura 28 : Triángulo isósceles del tubo negro.

Se puede establecer el diametro solar mediante la proporción

$$\frac{x}{0,17m} = \frac{1,49 * 10^8}{1,8m}$$

de lo cual se tiene $x \cong 1412889$ km, el diametro verdadero es 1,391.000 Km, lo que indica la asombrosa precisión del aparato.

5.5.2. Aplicaciones a la ingeniería

Del siglo VI a.C en la época del tirano Polícrates, éste ordenó a Eupalinos la construcción de un tunel “de este aun se conserva una parte” para llevar agua atravezando el monte Castro, la longitud del túnel era de 1 Km, debiendose perforar las dos laderas del monte sin establecer una trayectoria que aseguraré un punto de encuentro, debido a esto el error cometido refiriendose al punto de encuentro fue de 10m horizontal y 3m en vertical.

Se desea construir un túnel que une los puntos T y L : Para ello se bordea el monte a

través de los puntos T, U, N, E, L como se indica en la figura 29.

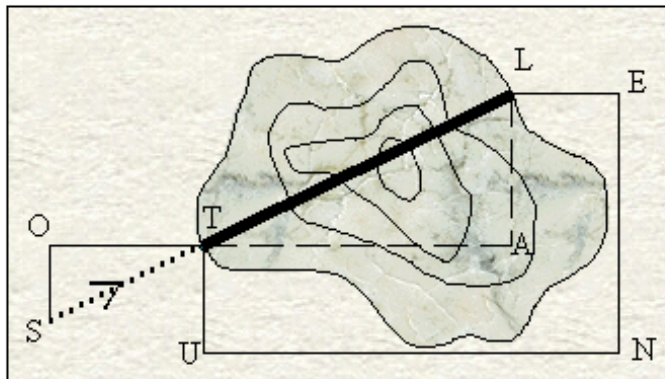


Figura 29 : Puntos estratégicos para construcción del túnel.

Conocidos estos, se construye el triángulo TOS , de manera que sea homotético a TAL . Al dibujar los lados TO y SO paralelos y proporcionales a TA y LA respectivamente, solo habrá que prolongar la línea ST para salir por el lugar señalado con L .

Ahora se tiene el problema en una forma más concreta: un ingeniero traza una línea AC paralela a la línea base de $15m$ de largo ¿con qué longitud ha de trazar CD para

que prolongando DA se llegue a B ?

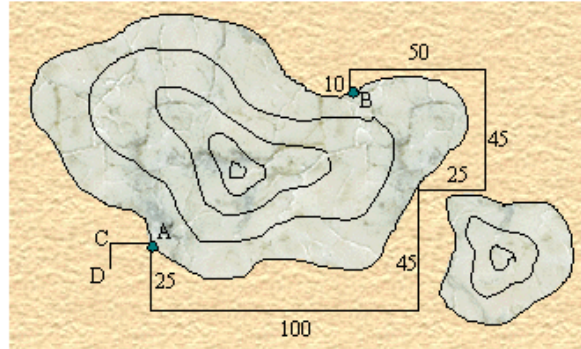


Figura 30 : Monte Castro bordeado por segmentos.

De la figura 30 se puede establecer la siguiente proporción $\frac{55}{x} = \frac{75}{15}$, despejando x , se tiene $x = 11$ m.

5.5.3. Aplicaciones a la matemática

Las aplicaciones de las homotecias a este campo se presentan en gran parte al cálculo de longitudes fundamentales para la solución de problemas, un ejemplo de esto es el siguiente: en la figura 31 (a) se presentan algunos datos sobre un deposito cónico. Hallar la profundidad del deposito

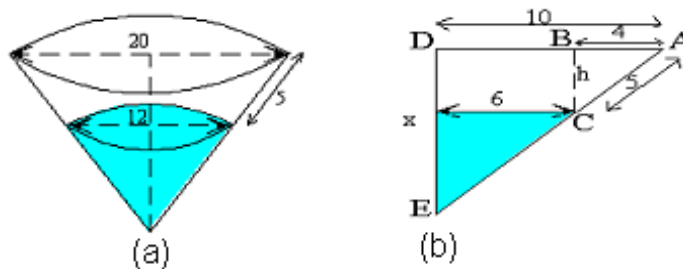


Figura 31 : Deposito cónico.

Hallar la profundidad del deposito.

Solución: Por medio de la figura 31(b). Al aplicar el teorema de pitagoras en el triángulo $\triangle ABC$ se obtiene $h = 3$, como $\triangle ABC$ es homotético a $\triangle ADE$, sus lados son proporcionales, es decir $\frac{x}{h} = \frac{10}{4}$, al sustituir $h = 3$ y despejar x , se obtiene $x = 7,5$. En el siguiente ejemplo se aplica a un triángulo todas las transformaciones ya estudiadas.

Ejemplo 5.4 La figura 23 muestra el resultado de aplicar al triángulo $\triangle ABC$ una homotecia y a su correspondiente el $\triangle A'B'C'$

- 1) una traslación,
- 2) una simetría y
- 3) una rotación

Solución: Se obtiene de manera respectiva, los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ y $\triangle A_3B_3C_3$ (Ver figura 33); en cualquiera de los casos los lados correspondientes son proporcionales y ángulos no han variado, la razón de proporcionalidad es el de la homotecia.

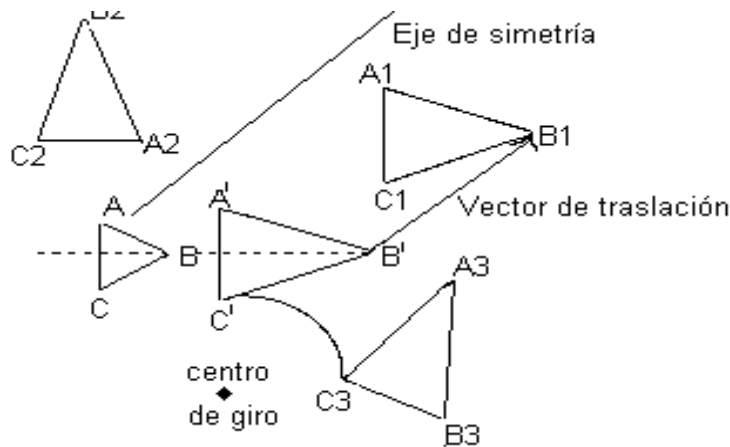


Figura 32 : Transformaciones aplicadas a un triángulo.

Capítulo 6

Afinidades

Después de estudiar ciertas transformaciones especiales, se pasara a la transformación más general, de la forma

$$A(x, y) = (x', y'),$$

donde

$$\begin{aligned}x' &= Ax + By + C \\y' &= Px + Qy + R\end{aligned}\tag{5.1}$$

con la condición de

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix} \neq 0,\tag{5.2}$$

es decir, una correspondencia biunivoca, esto es, dado x, y es posible mediante (5.1) hallar x', y' .

Definición 6.1 *Se llama afinidad en el plano, a toda transformación de la forma (5.1) con la condición la ecuación (5.2).*

El valor Δ se llama constante de afinidad.

Se puede observar que todas las transformaciones anteriores (traslaciones, rotaciones, simetrías, congruencias y homotecias) son casos particulares de las afinidades, de las cuales se pueden tener en cuenta ciertas propiedades:

1. Conservan el grado las curvas algebraicas, es decir, si $f(x', y') = 0$ es de grado n , su transformado $f(Ax + By + C, Px + Qy + R) = 0$ será también de grado n , puesto que el grado de un polinomio no cambia al sustituir las variables.
2. Conservan la razón simple de tres puntos alineados, es decir, si $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ son tres puntos que se encuentran sobre una misma recta, su razón simple simbolizada por $(P_1P_2P_3)$ es:

$$(P_1P_2P_3) = \frac{P_1P_3}{P_1P_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

Teniendo en cuenta que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$, aplicado a este caso

$$(P_1P_2P_3) = \frac{A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1)}{A(x_3 - x_2) + B(y_3 - y_2)}.$$

Ahora, si P'_1 , P'_2 y P'_3 son los transformados de P_1 , P_2 y P_3 respectivamente, su razón simple esta dada por

$$\begin{aligned} (P'_1P'_2P'_3) &= \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} \\ &= \frac{(Ax_3 + By_3 + C) - (Ax_1 + By_1 + C)}{(Ax_3 + By_3 + C) - (Ax_2 + By_2 + C)} \\ &= \frac{A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1)}{A(x_3 - x_2) + B(y_3 - y_2)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(P'_1P'_2P'_3) = (P_1P_2P_3)$.

El siguiente teorema es una característica muy importante que cumplen las afinidades.

Teorema 6.1 *Sea F una una región y F' su transformada mediante una afinidad, denotando por T y T' sus áreas respectivamente, se cumple que*

$$T' = \Delta T.$$

Demostración. Por ser T' el área de F' , se tiene

$$T' = \iint_{F'} dx' dy'.$$

Al desarrollar la integral doble mediante esta transformación, se tiene

$$\iint_{F'} dx' dy' = \iint_F \mathbf{J}\left(\frac{x', y'}{x, y}\right) dx dy,$$

donde $\mathbf{J}\left(\frac{x', y'}{x, y}\right)$ es el jacobiano, es decir

$$\mathbf{J}\left(\frac{x', y'}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial x} \\ \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

De la ecuación (5.1) $\frac{\partial x'}{\partial x} = A$, $\frac{\partial y'}{\partial x} = P$, $\frac{\partial x'}{\partial y} = B$ y $\frac{\partial y'}{\partial y} = Q$. Reemplazando

$$\iint_{F'} dx' dy' = \iint_F \begin{vmatrix} A & P \\ B & Q \end{vmatrix} dx dy,$$

equivalente a

$$\iint_{F'} dx' dy' = \begin{vmatrix} A & P \\ B & Q \end{vmatrix} \iint_F dx dy. \quad (5.3)$$

Como las integrales de la igualdad (5.3) son las áreas de F' y F , entonces $T' = \Delta T$.

Si $\Delta = 1$, $A' = A$, es decir, las áreas no cambian.

Definición 6.2 Una afinidad es una equiafinidad o afinidad uniforme si $\Delta = 1$.

6.1. Clasificación de las afinidades

Se clasifican según sus puntos unidos, para esto se establece el sistema de ecuaciones

$x' = x$, $y' = y$, es decir

$$\begin{aligned} x &= Ax + By + C, \\ y &= Px + Qy + R. \end{aligned}$$

Lo anterior es equivalente a escribir

$$\begin{aligned} (A - 1)x + By + C &= 0, \\ Px + (Q - 1)y + R &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Solución que se define según su determinante.

El siguiente estudio muestra tres casos que determinan la clasificación de las afinidades según el determinante del sistema, así:

- Si

$$\begin{vmatrix} (A-1) & B \\ P & (Q-1) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.5)$$

tiene una única solución y la afinidad se llama central.

Si el determinante es nulo, se tiene $\frac{A-1}{P} = \frac{B}{Q-1}$; y como cada ecuación del sistema (5.4) se puede representar de la forma

$$\begin{aligned} y &= \frac{-C}{B} - \frac{(A-1)}{B}x \\ y &= \frac{-R}{(Q-1)} - \frac{P}{(Q-1)}x \end{aligned}$$

es decir, dos rectas paralelas. De lo cual se tienen los siguientes dos casos:

- Si las rectas son paralelas pero diferentes, se tiene

$$\frac{A-1}{P} = \frac{B}{Q-1} \neq \frac{C}{R}.$$

Entonces, el sistema es incompatible y la afinidad carece de puntos unidos.

- Si las rectas son iguales, se tiene

$$\frac{A-1}{P} = \frac{B}{Q-1} = \frac{C}{R}.$$

En tal caso el sistema (5.4) se reduce a una sola ecuación y la afinidad carece de puntos unidos, llamado eje de la afinidad y se dice que se trata de una afinidad homológica.

Ejemplo 6.1 *Dada la siguiente afinidad clasifíquela según sus puntos unidos*

$$A(x, y) = (x', y'),$$

donde

$$x' = -x + 2y + 3,$$

$$y' = 2x - 2y - 3.$$

Solución: Para este caso $A = -1, B = 2, P = 2$ y $Q = -2$, entonces al reemplazar en la ecuación (5.6), se tiene

$$\Delta = \begin{vmatrix} (-1 - 1) & 2 \\ 2 & (-2 - 1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2.$$

como el determinante es diferente de cero, la afinidad es central.

6.1.1. Propiedades de las afinidades centrales

Al estudiar una afinidad central es comodo tomar el origen de coordenadas el punto unido de la misma, entonces el sistema (5.3) tiene solución en $x = y = 0$ y por tanto $R = C = 0$, es decir la ecuación de la afinidad es

$$\begin{aligned} x &= Ax + By, \\ y &= Px + Qy. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Al transformar la recta $y = mx$, que se halla despejando x, y en la ecuación (5.6) y sustituyendo en $y = mx$, resulta $y' = m'x'$, donde

$$m' = \frac{P + mQ}{A + mB}.$$

Al hacer $m' = m$, se tiene una ecuación de segundo grado. Para que todas las rectas que pasan por el punto unido resulten también rectas unidas, es decir, $m' = m$ se debe tener que $A = Q$ y $P = B = 0$, de esta forma la afinidad resulta una homotecia.

6.1.2. Propiedades de las afinidades homológicas

Analogamente a las afinidades centrales, el eje de la afinidad para este caso será el eje X , es entonces lógico inferir que en las ecuaciones (5.4) la variable y debe ser igual a

cero, por lo tanto se debe cumplir que $A = 1$, $P = 0$ y $C = R = 0$, al reemplazar en la ecuación (5.1), se tiene

$$\begin{aligned}x' &= x + By, \\y' &= Qy.\end{aligned}\tag{5.7}$$

de donde

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{Q - 1}{B}.$$

Esta igualdad permite afirmar que en una afinidad homológica las rectas que unen puntos homólogos son todos paralelos a una misma dirección, llamada dirección de la afinidad.

BIBLIOGRAFÍA

CASTRO, Rafael. V Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Cinco enfoques del toro. Universidad Nacional, Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Distrital. Bogotá, 1998.

KENE, R. SAFF, Eduard B y SNIDER, Arthur David. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Editorial Addison Wesley. Tercera Edición. México, 2001.

REY, Pastor y M. BALANZA. Geometría analítica. Editorial Kapeluz S.A. Cuarta edición. Buenos Aires, 1959.

www.diadelasimetria.com