

EL MULTIPLICADOR PARCIAL DE SCHUR

NATALIA ISABEL PÉREZ NIÑO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

EL MULTIPLICADOR PARCIAL DE SCHUR

NATALIA ISABEL PÉREZ NIÑO

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Matemáticas

Director
Héctor Edonis Pinedo Tapia
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

DEDICATORIA

A mis padres, Edgar e Isabel, quienes con su ejemplo y esfuerzo me han enseñado que todo lo que me proponga puedo lograrlo.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a Dios por guiarme en cada paso. A mis padres y mis hermanas, por su apoyo incondicional y por creer siempre en mis capacidades. Al profesor Héctor Pinedo, quien durante todo este proceso me orientó con dedicación, siempre dispuesto a compartir sus conocimientos, impulsándome a seguir en este hermoso camino de la investigación en matemáticas.

A mis amigos: Andrés, Julián, Emiliana, Pilar y Natalí, quienes me acompañaron a lo largo de estos años compartiendo risas y alegrías. Por último, pero no menos importante, a Juan, quien ha sido un compañero incondicional, gracias por enseñarme a ver la vida con calma, a dejar de temer a lo incierto y a confiar en que todo encuentra su camino.

CONTENIDO

	pág.
Introducción	9
1. Preliminares	12
1.1. El multiplicador de Schur	12
1.2. Representaciones proyectivas de grupos	13
1.3. Teoría de Semigrupos	17
1.4. El semigrupo de Exel	23
1.5. Representaciones proyectivas de semigrupos	29
2. El multiplicador parcial de Schur	37
2.1. Representaciones parciales proyectivas de grupos	37
2.2. Conjuntos factores parciales	42
2.3. Conjuntos factores de E_3	55
2.4. Caracterización de los conjuntos factores parciales	61
3. Sobre las componentes de $pM(G)$ vistas como grupos topológicos compactos divisibles	74
3.1. Grupos divisibles	74
3.2. Grupos topológicos	83
3.3. Una caracterización algebraica de los grupos divisibles que admiten topologías compactas	86
3.4. Una topología compacta para $pM_X(G)$	96
Bibliografía	97

LISTA DE FIGURAS

	pág.
2.1. El multiplicador parcial de Schur de C_2	72
2.2. El multiplicador parcial de Schur de C_3	73

RESUMEN

TÍTULO: EL MULTIPLICADOR PARCIAL DE SCHUR *

AUTOR: NATALIA ISABEL PÉREZ NIÑO **

PALABRAS CLAVE: REPRESENTACIONES PARCIALES PROYECTIVAS, CONJUNTOS FACTORES, GRUPOS DIVISIBLES, GRUPOS TOPOLÓGICOS COMPACTOS.

DESCRIPCIÓN: En la teoría de representaciones de grupos, es bien conocido que el segundo grupo de cohomología $H^2(G, \mathbb{K}^*)$, llamado el multiplicador de Schur de un grupo G sobre un cuerpo \mathbb{K} , permite caracterizar las representaciones proyectivas de G . En 2010, los matemáticos M. Dokuchaev y B. Novikov introdujeron el concepto de representación parcial proyectiva, lo que llevó a la definición del multiplicador parcial de Schur, denotado por $pM(G)$, que es una generalización del multiplicador de Schur.

En la primera parte de este trabajo de grado se presenta un análisis detallado de las propiedades estructurales de $pM(G)$. En particular, se estudia su descomposición como una unión disjunta de grupos abelianos, llamados componentes. También se muestra que, cuando el cuerpo \mathbb{K} es algebraicamente cerrado, cada componente es una imagen homomorfa de la componente $pM_{G \times G}(G)$, conocida como la componente total. Posteriormente, bajo la hipótesis de que $|\mathbb{K}| = 2^m$ con $m \geq \aleph_0$, se dota de una topología a cada componente de tal forma que sea un grupo topológico compacto divisible, lo cual permite obtener una descripción más detallada de estos grupos abelianos.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: THE PARTIAL SCHUR MULTIPLIER *

AUTHOR: NATALIA ISABEL PÉREZ NIÑO **

KEYWORDS: PARTIAL PROJECTIVE REPRESENTATION, FACTOR SETS, DIVISIBLE GROUPS, COMPACT TOPOLOGICAL GROUPS.

DESCRIPTION: In the theory of group representations, it is well known that the second cohomology group $H^2(G, \mathbb{K}^*)$, known as the Schur multiplier of a group G over a field \mathbb{K} , is used to characterize the projective representations of G . In 2010, the mathematicians M. Dokuchaev and B. Novikov introduced the concept of partial projective representation, which led to the definition of the partial Schur multiplier, denoted by $pM(G)$, which is a generalization of the Schur multiplier.

In the first part of this thesis, we present a detailed analysis of the structural properties of $pM(G)$. In particular, we study its decomposition as a disjoint union of abelian groups, called components. We also show that, when the field \mathbb{K} is algebraically closed, each component is a epimorphic image of the component $pM_{G \times G}(G)$, known as the total component. In the second part of this work, under the hypothesis that $|\mathbb{K}| = 2^m$ with $m \geq \aleph_0$, each component is equipped with a topology that makes it a divisible compact topological group, which allows for a more detailed description of these abelian groups.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Matemáticas.

Introducción

En la teoría de representaciones de grupos, uno de los objetos más estudiados es el segundo grupo de cohomología $H^2(G, \mathbb{K}^*)$, llamado el multiplicador de Schur de un grupo G sobre un cuerpo \mathbb{K} , el cual se denota por $M(G)$. Este grupo fue introducido por el matemático I. Schur mientras caracterizaba las representaciones proyectivas de grupos y ha sido de gran utilidad en distintas áreas de las matemáticas, como por ejemplo, en la teoría de grupos finitos.

En 2010, los matemáticos M. Dokuchaev y B. Novikov en ¹ introducen el concepto de representación parcial proyectiva de un grupo G sobre un cuerpo \mathbb{K} . En dicha investigación, aparece naturalmente el concepto de conjunto factor parcial, lo que permite definir el multiplicador parcial de Schur, denotado por $pM(G)$, el cual generaliza al multiplicador de Schur. Adicionalmente, hacia el final del artículo, los autores establecen una relación entre las representaciones parciales proyectivas y las acciones parciales torcidas. Dichas acciones permiten definir los productos cruzados parciales, y esta conexión ha tenido un impacto significativo en el desarrollo de esta teoría, siendo retomada en investigaciones posteriores, como en ².

En ¹ se probó que a diferencia de $M(G)$, $pM(G)$ no es un grupo, pero si es un semigrupo inverso conmutativo y por lo tanto, se puede descomponer como una unión disyunta de grupos abelianos, llamados componentes (Ver Teorema 2.2.15). La primera parte de este trabajo está dedicada al estudio de las propiedades estructurales del multiplicador parcial de Schur. Con este propósito, se realizó una revisión detallada de los artículos ¹, ³ y ⁴, en los que se desarrollaron los primeros resultados acerca de este

¹ M. DOKUCHAEV y B. NOVIKOV. "Partial projective representations and partial actions". En: *Journal of Pure and Applied Algebra* 214.3 (2010), págs. 251-268.

² M. DOKUCHAEV y E. JEREZ. "The Twisted Partial Group Algebra and (Co)homology of Partial Crossed Products". En: *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series* 55.33 (2024).

³ M. DOKUCHAEV y B. NOVIKOV. "Partial projective representations and partial actions". En: *Journal of Pure and Applied Algebra* 216.2 (2012), págs. 438-455.

⁴ M. DOKUCHAEV, B. NOVIKOV y H. PINEDO. "The partial Schur multiplier of a group". En: *Journal of Algebra* 392 (2013), págs. 199-225.

semigrupo. Avances posteriores, así como ejemplos concretos de este multiplicador para ciertas familias de grupos, tales como los grupos dihedrales y cíclicos, se encuentran en ⁵, ⁶ y ⁷.

Por otro lado, los grupos divisibles poseen una estructura algebraica muy particular, que permite demostrar que ciertos grupos son isomorfos, sin necesidad de construir explícitamente el isomorfismo entre ellos (Ver Teorema 3.1.11 y Corolario 3.1.15). Además, dotar a estos grupos de una topología compatible con su operación, es decir, considerarlos como grupos topológicos, es una gran herramienta para su análisis. En la segunda parte de esta investigación, combinamos propiedades de los grupos divisibles y grupos topológicos con el objetivo de estudiar resultados sobre las componentes de $pM(G)$ (Ver Sección 3.4).

Este documento está dividido en 3 capítulos. En el Capítulo 1 se presentan los preliminares. En las Secciones 1.1 y 1.2 se abordan los resultados relacionados con el multiplicador usual de Schur, mientras que el estudio de semigrupos inversos conmutativos, y en especial del semigrupo de Exel, denotado por $E(G)$, se desarrolla en las tres últimas secciones de este capítulo.

En el Capítulo 2 se encuentra una recopilación de las propiedades estructurales de $pM(G)$. Se inicia generalizando el concepto de representación proyectiva, lo que permite introducir el semigrupo de los conjuntos factores parciales, que es denotado por $pm(G)$. En la Sección 2.2, usando las propiedades de los conjuntos factores de $E(G)$, demostramos que tanto $pm(G)$ como $pM(G)$ son semigrupos inversos conmutativos. La sección concluye con la definición de $E_3(G)$, un semigrupo cociente de $E(G)$. A partir de la Sección 2.3, asumiremos que el cuerpo \mathbb{K} es algebraicamente cerrado. Bajo esta hipótesis, mediante el estudio de los conjuntos factores de $E_3(G)$, caracterizaremos los conjuntos factores parciales de G . Esto nos permite probar que toda componente de

⁵ H. DE LIMA y H. PINEDO. "On the total component of the partial Schur multiplier". En: *Journal of the Australian Mathematical Society* 100 (2016), págs. 374-402.

⁶ M. DOKUCHAEV y N. SAMBONET. "Schur's theory for partial projective representations". En: *Israel Journal of Mathematics* 232 (2019), págs. 373-399.

⁷ H. PINEDO. "On the total component and the torsion part of the partial Schur multiplier". En: *Communications in Algebra* 45.3 (2017), págs. 954-966.

$pM(G)$ es una imagen homomorfa de la componente $pM_{G \times G}(G)$, llamada la componente total (Ver Teorema 2.4.4 y Corolario 2.4.5).

Este trabajo finaliza con el Capítulo 3, cuyo objetivo es dotar a cada componente de una topología compacta. Para ello, las Secciones 3.1 y 3.2 están dedicadas a los preliminares necesarios sobre grupos divisibles y topológicos. En la Sección 3.3, realizamos un análisis detallado de la caracterización algebraica de los grupos divisibles que admiten topologías compactas presentada en ⁸, en el cual se completan los detalles omitidos por el autor. A partir del teorema principal allí presentado, se concluye que es adecuado trabajar con cuerpos algebraicamente cerrados de cardinal 2^m con $m \geq \aleph_0$. En la Sección 3.4, se muestran los avances de esta investigación. Dotamos de una topología compacta a \mathbb{K}^* y de esta forma, a cada componente $pM_X(G)$. Al ser este un grupo divisible, posee una descomposición de la forma

$$\bigoplus_{\kappa} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{\lambda_p} C_{p^\infty}.$$

Probamos que si cardinalidad de las S_3 -órbitas efectivas de X es finita, entonces cada λ_p es finito (Ver Teorema 3.4.2).

⁸ A. HULANICKI. "Algebraic characterization of abelian divisible groups which admit compact topologies". En: *Fundamenta Mathematicae* 44.2 (1957), págs. 192-197.

1. Preliminares

Dado que este es un trabajo autocontenido, el objetivo de este capítulo es establecer las definiciones y resultados previamente conocidos, junto con sus respectivas referencias, necesarios para abordar el estudio del multiplicador parcial de Schur.

1.1. El multiplicador de Schur

A lo largo de esta sección, G denotará un grupo multiplicativo, A un grupo abeliano multiplicativo y 1_A el elemento identidad de A . En esta sección recordaremos la definición del multiplicador de Schur de G . Comenzaremos con algunas nociones fundamentales de cohomología de grupos. Aunque existe un enfoque más general donde G actúa en A , en nuestro contexto solo necesitaremos la acción trivial de G en A .

Definición 1.1.1. Sea n un entero positivo. Una n -cocadena de G en A es una función $f : G^n \rightarrow A$. Denotamos por $C^n(G, A)$ al conjunto de las n -cocadenas de G en A . En el caso $n = 0$, definimos $C^0(G, A) = A$.

El conjunto $C^n(G, A)$ es un grupo abeliano con la multiplicación punto a punto donde el elemento identidad es la n -cocadena $(g_1, \dots, g_n) \mapsto 1_A$ y el inverso de $f \in C^n(G, A)$, es $f^{-1}(g_1, \dots, g_n) = f(g_1, \dots, g_n)^{-1}$, donde $f(g_1, \dots, g_n)^{-1}$ es el inverso de $f(g_1, \dots, g_n)$ en A , para todo $g_1, \dots, g_n \in G$.

Proposición 1.1.2. Sea $n \in \mathbb{N}$. La función $\delta^n : C^n(G, A) \rightarrow C^{n+1}(G, A)$ dada por

$$(\delta^n f)(g_1, \dots, g_{n+1}) = f(g_2, \dots, g_{n+1}) \prod_{i=1}^n f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1})^{(-1)^i} f(g_1, \dots, g_n)^{(-1)^{n+1}}$$

con $f \in C^n(G, A)$, es un homomorfismo de grupos. Además, se vale que $\text{Im } \delta^n \subseteq \text{Ker } \delta^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Ver ⁹, Lema 1.1.4. □

Definición 1.1.3. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos los grupos $Z^n(G, A) = \text{Ker } \delta^n$ y $B^n(G, A) = \text{Im } \delta^{n-1}$. Los elementos de $Z^n(G, A)$ y $B^n(G, A)$ son llamados n -cociclos y n -cobordos,

⁹ E. MONTEIRO. *Projective representations of groups*. 2017. URL: https://alistairsavage.ca/pubs/Mendonca-Projective_Representation_of_Groups.pdf.

respectivamente. El n -ésimo grupo de cohomología de G con valores en A es el grupo cociente

$$H^n(G, A) = \frac{Z^n(G, A)}{B^n(G, A)},$$

y sus elementos son llamados **clases de cohomología**.

Dos n -cociclos son llamados **cohomólogos** si pertenecen a la misma clase de cohomología.

Ejemplo 1.1.4. (El segundo grupo de cohomología). Usemos la Proposición 1.1.2 para obtener una forma explícita de los 2-cociclos y los 2-cobordos.

Sea $f \in C^2(G, A)$. Entonces $f \in Z^2(G, A)$ si, y solo si,

$$f(h, k)f(gh, k)^{-1}f(g, hk)f(g, h)^{-1} = 1_A, \quad \forall g, h, k \in G.$$

Esto es,

$$f(gh, k)f(g, h) = f(h, k)f(g, hk), \quad \forall g, h, k \in G.$$

Asimismo, $f \in B^2(G, A)$ si, y solo si, existe $t \in C(G, A)$ tal que

$$f(g, h) = t(h)t(gh)^{-1}t(g), \quad \forall g, h \in G.$$

De esta forma, dos 2-cociclos f y f' son cohomólogos si existe $t \in C(G, A)$ tal que

$$f(g, h) = t(h)t(gh)^{-1}t(g)f'(g, h), \quad \forall g, h \in G.$$

Definición 1.1.5. Sean \mathbb{K} un cuerpo con su grupo multiplicativo $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$. El **multiplicador de Schur** de un grupo G sobre \mathbb{K} es $H^2(G, \mathbb{K}^*)$.

En adelante, fijaremos un cuerpo \mathbb{K} y denotaremos por $M(G)$ al multiplicador de Schur de G sobre \mathbb{K} .

1.2. Representaciones proyectivas de grupos

En esta sección presentaremos una relación entre el multiplicador de Schur y las representaciones proyectivas de grupos.

Definición 1.2.1. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial. El grupo de los automorfismos de V es llamado el **grupo lineal general** de V y es denotado por $GL(V)$. Definimos el **grupo**

lineal general proyectivo como el grupo cociente $\text{PGL}(V) = \frac{\text{GL}(V)}{Z(\text{GL}(V))}$, donde $Z(\text{GL}(V))$ es el centro de $\text{GL}(V)$.

Definición 1.2.2. Una **representación proyectiva** de un grupo G en un \mathbb{K} -espacio vectorial V es un homomorfismo de grupos $P : G \rightarrow \text{PGL}(V)$.

Denotamos a la proyección canónica por $\pi : \text{GL}(V) \rightarrow \text{PGL}(V)$, donde cada automorfismo de V es enviado a su coclase. Como $Z(\text{GL}(V)) = \{k \text{id}_V : k \in \mathbb{K}^*\}$ tenemos que dos automorfismos T_1 y T_2 pertenecen a la misma coclase si existe $k \in \mathbb{K}^*$ tal que $T_1 = k T_2$. Usaremos este resultado en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.3. *Sea P una representación proyectiva de G en V . Entonces existen funciones $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ tales que*

$$\Gamma(g)\Gamma(h) = \sigma(g, h)\Gamma(gh), \quad \forall g, h \in G. \quad (1.1)$$

Esto es,

$$\pi(\Gamma(g)\Gamma(h)) = \pi(\Gamma(gh)), \quad \forall g, h \in G.$$

Recíprocamente, si existen funciones $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^$ que satisfacen (1.1), entonces existe un único homomorfismo $P : G \rightarrow \text{PGL}(V)$ tal que $P(g) = \pi(\Gamma(g))$, para todo $g \in G$.*

Demostración. Fijemos X un conjunto de representantes de las coclases de $\text{GL}(V)$ en $\text{PGL}(V)$. Definamos la función $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$, donde para cada $g \in G$, $\Gamma(g)$ es el único elemento de X tal que $\pi(\Gamma(g)) = P(g)$. Como π y P son homomorfismos de grupos, para todo $g, h \in G$ se tiene que

$$\pi(\Gamma(g)\Gamma(h)) = \pi(\Gamma(g))\pi(\Gamma(h)) = P(g)P(h) = P(gh) = \pi(\Gamma(gh)).$$

Esto implica que para cada $g, h \in G$ existe un único $k_{g,h} \in \mathbb{K}^*$ tal que $\Gamma(g)\Gamma(h) = k_{g,h}\Gamma(gh)$. De esta forma, definimos $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ por $\sigma(g, h) = k_{g,h}$, para cada $g, h \in G$. Así, hemos mostrado que las funciones Γ y σ satisfacen la ecuación (1.1).

Recíprocamente, si existen $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ que satisfacen (1.1), entonces definimos $P : G \rightarrow \text{PGL}(V)$ por $P(g) = \pi(\Gamma(g))$, para cada $g \in G$. Note que si $g, h \in G$ entonces

$$P(gh) = \pi(\Gamma(gh)) = \pi(\sigma(g, h)^{-1}\Gamma(g)\Gamma(h)) = \pi(\Gamma(g)\Gamma(h)) = \pi(\Gamma(g))\pi(\Gamma(h)) = P(g)P(h).$$

Luego, P es un homomorfismo y por lo tanto, una representación proyectiva de G en V . \square

Las funciones $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ son llamadas una **sección** y un **conjunto factor** de P , respectivamente. La proposición anterior nos proporciona otra forma equivalente de ver las representaciones proyectivas. Luego, si tenemos dos funciones $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ que satisfacen (1.1), decimos que Γ es una representación proyectiva o una σ -**representación**.

Observación 1.2.4. En la demostración de la Proposición 1.2.3, si consideramos $Y = \{\sigma(1, 1)^{-1}x : x \in X\}$, tenemos que Y es un conjunto de representantes de las coclases de $\text{GL}(V)$ en $\text{PGL}(V)$. Así, si Γ' es la sección correspondiente a Y , entonces

$$\begin{aligned}\Gamma'(g)\Gamma'(h) &= \sigma(1, 1)^{-1}\Gamma(g)\sigma(1, 1)^{-1}\Gamma(h) \\ &= \sigma(g, h)\sigma(1, 1)^{-1}\sigma(1, 1)^{-1}\Gamma(gh) \\ &= \sigma(g, h)\sigma(1, 1)^{-1}\Gamma'(gh).\end{aligned}$$

Tomando $\sigma'(g, h) = \sigma(1, 1)^{-1}\sigma(g, h)$ para cada $g, h \in G$, tenemos que σ' es el conjunto factor correspondiente a Γ' y satisface que $\sigma'(1, 1) = 1$. De este modo, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que los conjuntos factores σ cumplen la condición $\sigma(1, 1) = 1$.

Note que, dado X un conjunto de representantes de $\text{GL}(V)$ en $\text{PGL}(V)$, por la construcción realizada existen únicas funciones Γ y σ . Sin embargo, puede haber más de una sección y un conjunto factor, dependiendo de la elección de X .

Proposición 1.2.5. Sean $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ y $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una σ -representación, entonces $\sigma \in Z^2(G, \mathbb{K}^*)$. Esto es, $\sigma(gh, k)\sigma(g, h) = \sigma(h, k)\sigma(g, hk)$, para todo $g, h, k \in G$.

Demostración. Sean $g, h, k \in G$, entonces usando la ecuación (1.1) tenemos que

$$(\Gamma(g)\Gamma(h))\Gamma(k) = \sigma(g, h)\Gamma(gh)\Gamma(k) = \sigma(g, h)\sigma(gh, k)\Gamma(ghk),$$

$$\Gamma(g)(\Gamma(h)\Gamma(k)) = \Gamma(g)\sigma(h, k)\Gamma(hk) = \sigma(h, k)\Gamma(g)\Gamma(hk) = \sigma(h, k)\sigma(g, hk)\Gamma(ghk).$$

Por consiguiente, $\sigma(g, h)\sigma(gh, k)\Gamma(ghk) = \sigma(h, k)\sigma(g, hk)\Gamma(ghk)$. De lo anterior se deduce que $\sigma(gh, k)\sigma(g, h) = \sigma(h, k)\sigma(g, hk)$. \square

A continuación, analizaremos la relación entre los conjuntos factores que provienen de la misma representación proyectiva.

Proposición 1.2.6. Sean P una representación proyectiva de G en V , Γ y Γ' dos secciones de P con σ y σ' sus respectivos conjuntos factores. Entonces σ y σ' son cohomólogos.

Demostración. Dado que Γ y Γ' son dos secciones de la representación proyectiva P tenemos que $\pi(\Gamma(g)) = \pi(\Gamma'(g))$, para todo $g \in G$. Por ende, para cada $g \in G$ existe $k_g \in \mathbb{K}^*$ tal que $\Gamma(g) = k_g \Gamma'(g)$. Considerando la función $t : G \rightarrow \mathbb{K}^*$ dada por $t(g) = k_g$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(g, h)t(gh)\Gamma'(gh) &= \sigma(g, h)\Gamma(gh) \\ &= \Gamma(g)\Gamma(h) \\ &= t(g)t(h)\Gamma'(g)\Gamma'(h) \\ &= t(g)t(h)\sigma'(g, h)\Gamma'(gh). \end{aligned}$$

De ahí que, $\sigma(g, h)t(gh) = t(g)t(h)\sigma'(g, h)$ y por lo tanto, $\sigma(g, h) = t(h)t(gh)^{-1}t(g)\sigma'(g, h)$. Es decir, σ y σ' son cohomólogos. \square

A partir de la proposición anterior, surge la siguiente definición.

Definición 1.2.7. Sean $P : G \rightarrow \text{PGL}(V)$ una representación proyectiva y $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ un conjunto factor de una sección $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Entonces la clase de cohomología $\text{cls}(\sigma)$ de σ es llamada la **clase de cohomología asociada** a la representación proyectiva P .

Ahora veremos que para cada clase de cohomología de $H^2(G, \mathbb{K}^*)$ existe una representación proyectiva asociada a dicha clase.

Sea $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ un 2-cociclo. Denotemos por $\mathbb{K}^\sigma G$ al \mathbb{K} -espacio vectorial cuya base está dada por elementos de G . La multiplicación en $\mathbb{K}^\sigma G$ se define extendiendo linealmente la igualdad:

$$g \cdot h := \sigma(g, h)gh,$$

para todo $g, h \in G$. Con estas operaciones se tiene que $\mathbb{K}^\sigma G$ es una \mathbb{K} -álgebra (ver ¹⁰, Lema 2.3.3). Llamamos a $\mathbb{K}^\sigma G$ **el álgebra de grupo de G torcida por σ** .

¹⁰ G. KARPILOVSKY. *The Schur Multiplier*. (London Mathematical Society Monographs New Series). Clarendon Press Oxford, 1987.

Teorema 1.2.8. Sea $\sigma \in Z^2(G, \mathbb{K}^*)$. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre las σ -representaciones de G y los $\mathbb{K}^\sigma G$ -módulos.

Demostración. Ver ¹⁰, Proposición 2.3.6. □

Observación 1.2.9. Si $\sigma \in Z^2(G, \mathbb{K}^*)$, entonces considerando a $\mathbb{K}^\sigma G$ como un $\mathbb{K}^\sigma G$ -módulo, el Teorema 1.2.8 nos permite concluir que existe una representación proyectiva de G cuya clase de cohomología asociada es $\text{cls}(\sigma)$.

De la Proposición 1.2.6 y la Observación 1.2.9, tenemos que, dados un grupo G y un cuerpo \mathbb{K} , los conjuntos factores de las representaciones proyectivas de G sobre \mathbb{K} -espacios vectoriales son exactamente los 2-cociclos y, por lo tanto, forman un grupo con la multiplicación punto a punto.

1.3. Teoría de Semigrupos

A continuación, se introducen los conceptos fundamentales de la teoría de semigrupos relevantes para este trabajo, con énfasis en los semigrupos inversos conmutativos, los cuales desempeñan un papel clave en el estudio del multiplicador parcial de Schur. Para el desarrollo de esta sección, se toman como referencias el libro ¹¹ y los trabajos de grado ^{12, 13}.

Definición 1.3.1. Un **semigrupo** es un conjunto S junto con una operación binaria y asociativa en S .

Ejemplo 1.3.2. i) Todo grupo es un semigrupo.

ii) Para cualquier conjunto X , las funciones de X en X son un semigrupo con la composición de funciones.

Decimos que un semigrupo S posee un **elemento identidad**, si existe un elemento en S , que denotaremos por 1_S , tal que $x1_S = 1_Sx = x$, para todo $x \in S$. Un semigrupo con

¹¹ J. HOWIE. *Fundamentals of Semigroup Theory*. (London Mathematical Society Monographs New Series). Clarendon Press Oxford, 1995.

¹² J. BAEZ. "Semigrupo de Picard y acciones parciales". En: *Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander* (2016).

¹³ A. GONZALEZ. "Semigrupos Inversos y Acciones Parciales". En: *Tesis de Pregrado, Universidad Industrial de Santander* (2016).

elemento identidad es llamado **monoide**.

Definimos las **unidades** en un monoide S como sigue

$$\mathcal{U}(S) = \{x \in S : \text{existe } y \in S \text{ tal que } xy = yx = 1_S\}.$$

Definición 1.3.3. Decimos que un semigrupo S es un **semigrupo con 0** si existe $x \in S$ tal que $xy = yx = x$, para todo $y \in S$. Si este elemento existe es único y es denotado por 0.

Ejemplo 1.3.4. El conjunto $M_n(\mathbb{K})$ formado por las matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en \mathbb{K} junto con la multiplicación de matrices es un semigrupo con 0.

Definición 1.3.5. Sean S un semigrupo y $T \subseteq S$ no vacío. Decimos que T es un **subsemigrupo** de S si para todo $x, y \in T$, $xy \in T$. Además, si para todo $x \in S, y \in T$, se tiene que $xy, yx \in T$, decimos que T es un **ideal** de S .

Un semigrupo S es **conmutativo** si $xy = yx$, para todo $x, y \in S$. Un elemento $e \in S$ es llamado **idempotente** si $e^2 = e$. Ahora, analizaremos la estructura de los semigrupos conmutativos formados de idempotentes. Para ello, introducimos los siguientes conceptos.

Sean (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado y $Y \subseteq X$. Decimos que un elemento $c \in X$ es **cota inferior** de Y si $c \leq y$, para todo $y \in Y$. Si el conjunto de las cotas inferiores de Y es no vacío y tiene un elemento máximo d , decimos que d es la **mayor de las cotas inferiores**, o el **ínfimo** de Y . El elemento d es único (si existe) y si $Y = \{a, b\}$, escribimos $d = a \wedge b$.

Definición 1.3.6. Sea (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado. Si para todo $a, b \in X$ se vale que $a \wedge b$ existe, decimos que (X, \leq) es un **semirretículo inferior**.

Proposición 1.3.7. *Sea (E, \leq) un semirretículo inferior. Entonces (E, \wedge) es un semigrupo conmutativo donde todos sus elementos son idempotentes. Recíprocamente, supongamos que (E, \cdot) es un semigrupo conmutativo de idempotentes. Entonces la relación \leq en E definida por*

$$a \leq b \iff ab = a,$$

es un orden parcial en E y (E, \leq) es un semirretículo inferior, donde el ínfimo de a y b es su producto ab .

Demostración. Sea (E, \leq) un semirretículo inferior. Sean $a, b, c \in E$. Es sencillo ver que $(a \wedge b) \wedge c$ y $a \wedge (b \wedge c)$ son el ínfimo de $\{a, b, c\}$. Por lo tanto, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$. Luego, (E, \wedge) es un semigrupo. Dado que $a \wedge a = a$ y $a \wedge b = b \wedge a$, para todo $a, b \in E$, concluimos que (E, \wedge) es un semigrupo conmutativo y todos sus elementos son idempotentes.

Recíprocamente, sea (E, \cdot) un semigrupo conmutativo de idempotentes. Note que si $a \in E$, entonces $a^2 = a$, lo cual implica que $a \leq a$. Además, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $ab = a$ y $ba = b$, pero dado que E es conmutativo, concluimos que $a = b$. Ahora, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $ab = a$ y $bc = b$. Lo que nos lleva a $ac = abc = ab = a$ y por lo tanto, $a \leq c$. De esta forma, hemos mostrado que \leq es un orden parcial en E .

Finalmente, veamos que (E, \leq) es un semirretículo inferior. Sean $a, b \in E$. Se tiene que $(ab)a = a^2b = ab$ y $(ab)b = ab^2 = ab$; por lo tanto, $ab \leq a$ y $ab \leq b$. Por otro lado, si c es una cota inferior de $\{a, b\}$, entonces $ca = c$ y $cb = c$. Así,

$$c = c^2 = (ca)(cb) = c^2ab = cab.$$

Luego, $c \leq ab$ y por consiguiente, $a \wedge b = ab$. □

De la proposición anterior tenemos que las nociones de semirretículo inferior y semigrupo conmutativo de idempotentes son equivalentes. En adelante, utilizaremos el término **semirretículo** en cualquiera de estos dos sentidos.

Definición 1.3.8. Sean S un semigrupo y R una relación de equivalencia en S . Decimos que R es una **congruencia** en S si, para todo $x, y, z, w \in S$, el hecho de que xRy y zRw implica que $xzRyw$.

Ejemplo 1.3.9. En el monoide $M_n(\mathbb{K})$ la relación de equivalencia λ dada por:

$$A\lambda B \iff \det(A) = \det(B),$$

es una congruencia.

El siguiente resultado es una consecuencia directa de la Definición 1.3.8.

Proposición 1.3.10. Sean S un semigrupo y R una congruencia en S . Entonces el conjunto cociente $S/R = \{\text{cls}(x) : x \in S\}$ es un semigrupo con la operación $\text{cls}(x) \text{cls}(y) = \text{cls}(xy)$. Este semigrupo es llamado el **semigrupo cociente**.

Es fácil ver que la intersección arbitraria de congruencias en un semigrupo S , es una congruencia. Así, de manera natural, dada cualquier relación R en $S \times S$, podemos definir la **congruencia generada por R** como la intersección de todas las congruencias en S que contienen a R .

Definición 1.3.11. Sean S y T semigrupos. Decimos que $\varphi : S \rightarrow T$ es un **homomorfismo** si $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para todo $x, y \in S$.

En la última parte de esta sección, estudiaremos los semigrupos inversos, con un enfoque particular en los que son conmutativos.

Definición 1.3.12. Sean S un semigrupo y $x \in S$. Decimos que $x' \in S$ es un **inverso** de x si $xx'x = x$ y $x'xx' = x'$.

A diferencia de los grupos, no todo elemento en un semigrupo tiene inverso, y este no necesariamente es único.

Definición 1.3.13. Sea S un semigrupo. S es llamado un **semigrupo regular** si todo elemento de S tiene inverso. Además, si para cada $x \in S$, el inverso de x es único, entonces S es llamado un **semigrupo inverso**.

Proposición 1.3.14. Sea S un semigrupo. S es un semigrupo inverso si, y solo si, S es regular y los idempotentes de S conmutan entre ellos.

Demostración. Supongamos que S es un semigrupo inverso, entonces por definición S es regular. Sean e, f idempotentes. Probaremos que ef es idempotente. Sea g el inverso de ef , entonces $efgef = ef$ y $gefg = g$. Luego, $(ef)(ge)(ef) = efgef = ef$ y $(ge)(ef)(ge) = gefge = ge$, esto es, ge es un inverso de ef . Dado que g es también un inverso de ef , $ge = g$. Similarmente, $(ef)(fg)(ef) = ef$ y $(fg)(ef)(fg) = fg$ y como en S los inversos son únicos, $fg = g$. De esta forma, $g^2 = gefg = g$; es decir, g es idempotente y por consiguiente g es su propio inverso. No obstante, ef también es un inverso de g y por lo tanto, $ef = g$. Así, hemos probado que el producto de idempotentes es un idempotente.

Utilizando lo anterior, demostraremos que los idempotentes conmutan. Sean e, f idempotentes, entonces ef y fe son idempotentes y por consiguiente, $(ef)(fe)(ef) = (ef)(ef) = ef$ y $(fe)(ef)(fe) = (fe)(fe) = fe$. Es decir, fe es un inverso de ef , pero como ef es también un inverso de sí mismo, concluimos que $ef = fe$.

Recíprocamente, supongamos que S es regular y los idempotentes conmutan. Sea $x \in S$ y asumamos que existen $u, v \in S$ inversos de x . Esto es, $x = xux = xv x$, $u = uxu$ y $v = vxv$. Es sencillo ver que ux , vx , xu y xv son idempotentes. Así, estos elementos conmutan entre ellos y por lo tanto,

$$\begin{aligned} u &= uxu = u(xvx)u = (ux)(vx)u = (vx)(ux)u = v(xux)u = vxu = v(xvx)u \\ &= v(xv)(xu) = v(xu)(xv) = v(xux)v = vxv = v. \end{aligned}$$

Luego, S es un semigrupo inverso. □

Observación 1.3.15. Sean S un semigrupo inverso y $x, y \in S$. Es fácil verificar que:

- i) $x'' = x$;
- ii) $(xy)' = y'x'$;

Definición 1.3.16. Sea S un semigrupo inverso. Definimos las relaciones de equivalencia \mathcal{L} , \mathcal{R} y \mathcal{H} como sigue:

$$\begin{aligned} (a, b) \in \mathcal{L} &\iff a'a = b'b, \\ (a, b) \in \mathcal{R} &\iff aa' = bb', \\ (a, b) \in \mathcal{H} &\iff a'a = b'b \text{ y } aa' = bb'. \end{aligned}$$

Observación 1.3.17. En general, para cualquier semigrupo S se pueden definir las relaciones de equivalencia \mathcal{L} , \mathcal{R} y \mathcal{H} . Junto con otras dos relaciones \mathcal{J} y \mathcal{D} conforman las llamadas **relaciones de Green** en S (ver por ejemplo ¹¹, Sección 2.1). En este trabajo, estaremos interesados en la relación \mathcal{H} en semigrupos inversos.

Para cada $x \in S$, con S un semigrupo inverso, definimos la \mathcal{H} -clase de x por

$$\mathcal{H}_x = \{s \in S : (s, x) \in \mathcal{H}\}.$$

En particular, para e idempotente de S

$$\mathcal{H}_e = \{s \in S : ss' = e = s's\}.$$

Proposición 1.3.18. Sean S un semigrupo inverso y e idempotente de S . Entonces, las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- I) eSe es un monoide inverso con identidad e .
- II) $\mathcal{H}_e = \mathcal{U}(eSe)$. En particular, \mathcal{H}_e es un grupo.

Demostración. Probaremos cada una de las afirmaciones.

- I) Como e es idempotente, es claro que eSe es un semigrupo. Sea $x \in S$, entonces $e(exe) = exe = (exe)e$ y por lo tanto, e es elemento identidad de eSe . Además, por el ítem II) de la Observación 1.3.15, se tiene que $(exe)' = e'x'e' = ex'e \in eSe$. Por ende, eSe es un monoide inverso.
- II) Sea $x \in \mathcal{H}_e$, entonces $xx' = e = x'x$. Esto implica que $ex = xx'x = x$ y $xe = xx'x = x$. Por lo tanto, $exe = xe = x$, esto es, $x \in eSe$ y como e es el elemento identidad de eSe , $x \in \mathcal{U}(eSe)$. Recíprocamente, sea $x \in \mathcal{U}(eSe)$, entonces $x' \in \mathcal{U}(eSe)$. Luego, $xx' = e = x'x$ y por ende, $x \in \mathcal{H}_e$.

□

Definición 1.3.19. Un semigrupo S es llamado un **semirretículo de grupos** si existe una colección $\{S_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ de subgrupos disyuntos de S tales que

- I) Y es un semirretículo;
- II) $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$;
- III) $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$, donde $\alpha\beta$ es el producto de α y β en el semirretículo Y .

Teorema 1.3.20. Sea S un semigrupo inverso conmutativo. Entonces

$$S = \bigcup_{e \in E(S)} \mathcal{H}_e,$$

donde $E(S)$ es el conjunto de idempotentes de S . Más aún, todo semigrupo inverso conmutativo es un semirretículo de grupos.

Demostración. Sean S un semigrupo inverso conmutativo y $s \in S$. Entonces ss' es idempotente y como S es conmutativo, $ss' = s's$. Esto implica que $s \in \mathcal{H}_{ss'}$ y por lo tanto;

$$S = \bigcup_{e \in E(S)} \mathcal{H}_e.$$

Esta unión es disyunta, ya que si e, f son idempotentes tales que $\mathcal{H}_e \cap \mathcal{H}_f \neq \emptyset$, entonces existe $a \in S$ tal que $aa' = e = a'a = f$ y por ende, $e = f$. Además, $\mathcal{H}_e \mathcal{H}_f \subseteq \mathcal{H}_{ef}$, pues si $x \in \mathcal{H}_e, y \in \mathcal{H}_f$ entonces $xx' = e = x'x$ y $yy' = f = y'y$. De esta forma, $(xy)(xy)' = xyy'x' = xf'x' = xx'f = ef$ y como S es conmutativo, $(xy)'(xy) = ef$. Así, $xy \in \mathcal{H}_{ef}$. Finalmente, como S es conmutativo, $E(S)$ es un semirretículo y por la proposición anterior, cada \mathcal{H}_e es un grupo. Luego, S es un semirretículo de grupos. \square

1.4. El semigrupo de Exel

Dado un grupo G , podemos asociarle un semigrupo inverso, que denotaremos por $E(G)$. Este semigrupo desempeña un papel fundamental en el estudio de las representaciones parciales proyectivas de G . En lo que sigue, veremos algunas propiedades estructurales de este semigrupo que serán utilizadas en el Capítulo 2.

Antes de definir el semigrupo de Exel es necesario explorar como construir semigrupos a partir de conjuntos.

Definición 1.4.1. Sea L un conjunto arbitrario no vacío. Definimos L^* como el conjunto de todas las concatenaciones de elementos de L de longitud finita mayor a 0. Esto es,

$$L^* = \{l_1 l_2 \dots l_n : l_i \in L, n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Es sencillo ver que L^* es un semigrupo con la operación $wv = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$, donde $w = a_1 a_2 \dots a_n$ y $v = b_1 \dots b_m$. Este semigrupo es llamado el **semigrupo libre** generado por L . Es claro que $L \subseteq L^*$.

Observación 1.4.2. Sean S un semigrupo y $f : L \rightarrow S$ una función. Definimos $f^* : L^* \rightarrow S$ por $f^*(l_1 l_2 \dots l_n) = f(l_1) f(l_2) \dots f(l_n)$. Es inmediato que f^* es un homomorfismo de semigrupos que extiende a f .

Los semigrupos libres proporcionan una manera de construir semigrupos a través de generadores y relaciones. Sean R una relación binaria en L^* y λ la congruencia generada por R , entonces L^*/λ es el **semigrupo generado por L sujeto a la relación R** . Denotamos por $i : L \rightarrow L^*/\lambda$, al homomorfismo natural donde cada elemento de L es enviado a su clase de equivalencia.

Proposición 1.4.3. Sean L, R y λ anteriormente descritos. Sean S un semigrupo y $f : L \rightarrow S$ una función tal que para todo $u, v \in L^*$, uRv implica que $f^*(u) = f^*(v)$. Entonces existe un único homomorfismo $\psi : L^*/\lambda \rightarrow S$ tal que $f = \psi \circ i$.

Demostración. Ver ¹³, Proposición 2.4.2. □

Definición 1.4.4. Sea G un grupo. El **semigrupo de Exel** $E(G)$ es el semigrupo definido por los generadores $[x]$ ($x \in G$) y las relaciones:

- I) $[x^{-1}][x][y] = [x^{-1}][xy];$
- II) $[x][y][y^{-1}] = [xy][y^{-1}];$
- III) $[x][1] = [x];$

para todo $x, y \in G$. Es decir, $E(G) = L^*/\lambda$, donde L^* es el semigrupo libre generado por $L = \{[x] : x \in G\}$ y λ la congruencia generada por la relación

$$R = \{([x^{-1}][x][y], [x^{-1}][xy]), ([x][y][y^{-1}], [xy][y^{-1}]), ([x][1], [x]) : x, y \in G\} \subseteq L^* \times L^*.$$

Observación 1.4.5. Sea $x \in G$. Por los ítems I) y III), tenemos que $[x][x^{-1}][x] = [x][1] = [x]$. Además, del ítem II) $[x][x^{-1}][x] = [1][x]$. Luego, $[1][x] = [x]$. Esto implica que $E(G)$ es un monoide con elemento identidad $[1]$.

Proposición 1.4.6. Sean S un semigrupo y $\varphi : G \rightarrow S$ una función que satisfice:

- I) $\varphi(x^{-1})\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x^{-1})\varphi(xy);$
- II) $\varphi(x)\varphi(y)\varphi(y^{-1}) = \varphi(xy)\varphi(y^{-1});$
- III) $\varphi(x)\varphi(1) = \varphi(x);$

para todo $x, y \in G$. Entonces existe un único homomorfismo $\tilde{\varphi} : E(G) \rightarrow S$ tal que $\varphi(x) = \tilde{\varphi}([x])$, para todo $x \in G$.

Demostración. Considere la función $f : L \rightarrow S$ dada por $f([x]) = \varphi(x)$, para cada $x \in G$. Por las propiedades de la función φ , tenemos que f cumple las condiciones de la Proposición 1.4.3 y por lo tanto, existe un único homomorfismo $\tilde{\varphi} : E(G) \rightarrow S$ tal que $f = \tilde{\varphi} \circ i$. Considere la función $h : G \rightarrow L$ dada por $h(x) = [x]$, para cada $x \in G$, entonces $\varphi = f \circ h = \tilde{\varphi} \circ i \circ h$. Luego, $\varphi(x) = \tilde{\varphi}([x])$, para todo $x \in G$. □

Proposición 1.4.7. Existe un anti-automorfismo involutivo ¹⁴ $*$: $E(G) \rightarrow E(G)$ tal que para cada $x \in G$, $[x]^* = [x^{-1}]$.

¹⁴ Sea S un semigrupo. Una función $f : S \rightarrow S$ es un **anti-automorfismo involutivo** si f es una biyección y para todo $x, y \in S$, se cumple que $f(xy) = f(y)f(x)$ y $f(f(x)) = x$.

Demostración. Ver ¹⁵, Proposición 2.3. □

De esta forma, para cada $s \in E(G)$, denotaremos por s^* , a la imagen de s bajo el anti-automorfismo presentado anteriormente. Algunas propiedades importantes de los idempotentes en $E(G)$ se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 1.4.8. *Para cada $x \in G$, sea $e_x = [x][x^{-1}]$. Entonces, para cualesquiera $x, y \in G$;*

- I) e_x es idempotente y $e_x = e_x^*$;
- II) $[y]e_x = e_{yx}[y]$;
- III) e_x y e_y conmutan.

Demostración. Veamos cada uno de los enunciados:

- I) Sea $x \in G$, entonces $e_x e_x = [x][x^{-1}][x][x^{-1}] = [x][x^{-1}] = e_x$ y $e_x^* = ([x][x^{-1}])^* = [x^{-1}]^*[x]^* = [x][x^{-1}] = e_x$.
- II) Sean $x, y \in G$, entonces usando las relaciones de la Definición 1.4.4

$$[y]e_x = [y][x][x^{-1}] = [yx][x^{-1}] = [yx][x^{-1}y^{-1}][y] = e_{yx}[y].$$

- III) Sean $x, y \in G$, entonces $e_x e_y = [x][x^{-1}]e_y = [x]e_{x^{-1}y}[x^{-1}] = e_{xx^{-1}y}[x][x^{-1}] = e_y e_x$.

□

Proposición 1.4.9. *Cada elemento $s \in E(G)$ puede ser escrito de la forma*

$$s = e_{x_1} \dots e_{x_n}[y],$$

donde

- I) $n \geq 0$ y $x_1, \dots, x_n, y \in G$;
- II) $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$;
- III) $1 \neq x_i \neq y$, para cada i .

¹⁵ R. EXEL. "Partial actions of groups and actions of inverse semigroups". En: *Proc. Amer. Math. Soc* 126 (1998), págs. 3481-3494.

Demostración. Tomando $n = 0$, $y = x$, tenemos que para cualquier $x \in G$, $[x]$ se puede descomponer de esta forma. Dado que $E(G)$ es generado por el conjunto $\{[x] : x \in G\}$, para demostrar que cualquier elemento $s \in E(G)$ admite una descomposición de esta forma, es suficiente probar que los elementos que admiten dicha descomposición son un subsemigrupo de $E(G)$. Sean $s = e_{x_1} \dots e_{x_n}[y]$ y $t = e_{r_1} \dots e_{r_m}[p]$. Por la propiedad II) de la Proposición 1.4.8,

$$st = e_{x_1} \dots e_{x_n}[y]e_{r_1} \dots e_{r_m}[p] = e_{x_1} \dots e_{x_n}e_{yr_1}[y]e_{r_2} \dots e_{r_m}[p].$$

Continuando este proceso,

$$\begin{aligned} st &= e_{x_1} \dots e_{x_n}e_{yr_1}e_{yr_2} \dots e_{yr_m}[y][p] \\ &= e_{x_1} \dots e_{x_n}e_{yr_1}e_{yr_2} \dots e_{yr_m}[y][y^{-1}][y][p] \\ &= e_{x_1} \dots e_{x_n}e_{yr_1}e_{yr_2} \dots e_{yr_m}[y][y^{-1}][yp] \\ &= e_{x_1} \dots e_{x_n}e_{yr_1}e_{yr_2} \dots e_{yr_m}e_y[yp]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier elemento $s \in E(G)$ puede escribirse de la forma $e_{x_1} \dots e_{x_n}[y]$, con $n \geq 0$ y $x_1, \dots, x_n, y \in G$. Del ítem III) de la Proposición 1.4.8, se sigue que se pueden eliminar los idempotentes repetidos y, por lo tanto, se cumple la condición II). Por último, si algún $x_i = y$, entonces $e_{x_i} = [y][y^{-1}]$ y así,

$$s = e_{x_1} \dots e_{x_{i-1}}e_{x_{i+1}} \dots e_{x_n}[y][y^{-1}][y] = e_{x_1} \dots e_{x_{i-1}}e_{x_{i+1}} \dots e_{x_n}[y].$$

Luego, e_{x_i} puede ser eliminado y, por consiguiente, se tiene la condición III). □

Definición 1.4.10. Si $s \in E(G)$ se escribe de la forma $s = e_{x_1} \dots e_{x_n}[y]$ y se satisfacen las condiciones de la proposición anterior, entonces decimos que s está en la **forma estándar**.

Probaremos ahora, que $E(G)$ es un semigrupo regular.

Proposición 1.4.11. Sea $s \in E(G)$. Entonces $ss^*s = s$ y $s^*ss^* = s^*$.

Demostración. Sea $s \in E(G)$, entonces $s = e_{x_1} \dots e_{x_n}[y]$ con $x_i, y \in G$. Así,

$$s^* = [y]^*e_{x_n}^* \dots e_{x_1}^* = [y^{-1}]e_{x_n} \dots e_{x_1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} ss^*s &= e_{x_1} \dots e_{x_n} [y][y^{-1}] e_{x_n} \dots e_{x_1} e_{x_1} \dots e_{x_n} [y] = e_{x_1} \dots e_{x_n} e_y [y] \\ &= e_{x_1} \dots e_{x_n} [y] = s. \end{aligned}$$

Aplicando el anti-automorfismo involutivo $*$ a la ecuación anterior, concluimos que $s^*s s^* = s^*$. □

De esta forma, si queremos probar que $E(G)$ es un semigrupo inverso, debemos probar que para cada elemento existe un único inverso. Para ello, necesitamos hablar de representaciones.

Definición 1.4.12. Una **representación del semigrupo** $E(G)$ es un homomorfismo de $E(G)$ en algún semigrupo S .

Ejemplo 1.4.13. Sea $\varphi : G \rightarrow G$ el homomorfismo identidad. Es claro que φ satisface las propiedades de la Proposición 1.4.6. Luego, existe $\partial : E(G) \rightarrow G$ homomorfismo de grupos tal que $\partial([g]) = g$. Es decir, ∂ es una representación de $E(G)$.

Sea $\mathcal{P}_1(G)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de G que contienen al elemento identidad de G . Sea $\mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G))$ el conjunto de todas las funciones de $\mathcal{P}_1(G)$ en sí mismo. Este conjunto es un semigrupo con la composición de funciones.

Para cada $x \in G$, denotamos por ϕ_x a la función $\phi_x : \mathcal{P}_1(G) \rightarrow \mathcal{P}_1(G)$, dada por $\phi_x(E) = xE \cup \{1\}$, donde $xE = \{xy : y \in E\}$.

Proposición 1.4.14. La función $x \in G \rightarrow \phi_x \in \mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G))$ cumple las condiciones de la Proposición 1.4.6, y por lo tanto, existe una única representación $\Lambda : E(G) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G))$ tal que $\Lambda([x]) = \phi_x$, para cada $x \in G$.

Demostración. Sean $x, y \in G$. Mostraremos que $\phi_{x^{-1}}\phi_x\phi_y = \phi_{x^{-1}}\phi_{xy}$. Sea E un subconjunto finito de G que contiene a 1. Entonces,

$$\phi_{x^{-1}}\phi_x\phi_y(E) = \phi_{x^{-1}}\phi_x(yE \cup \{1\}) = \phi_{x^{-1}}(xyE \cup \{x, 1\}) = yE \cup \{1, x^{-1}\}.$$

Mientras que, $\phi_{x^{-1}}\phi_{xy}(E) = \phi_{x^{-1}}(xyE \cup \{1\}) = yE \cup \{x^{-1}, 1\}$. Luego, $\phi_{x^{-1}}\phi_x\phi_y = \phi_{x^{-1}}\phi_{xy}$. Análogamente, se muestra que $\phi_x\phi_y\phi_{y^{-1}} = \phi_{xy}\phi_{y^{-1}}$. Ahora, como $\phi_1(E) = E$ para cualquier E un subconjunto finito de G que contiene a 1, se tiene que $\phi_x\phi_1 = \phi_x$. De esta forma, se cumplen las condiciones de la Proposición 1.4.6. □

Note que para cualquier $r \in G$ y $E \in \mathcal{P}_1(G)$, se tiene que

$$\Lambda(e_r)(E) = (\phi_r \phi_{r^{-1}})(E) = \phi_r(r^{-1}E \cup \{1\}) = E \cup \{r\}.$$

En particular, si $s = e_{x_1} \dots e_{x_n}[y]$, entonces

$$\Lambda(s) = \Lambda(e_{x_1}) \dots \Lambda(e_{x_n})\Lambda([y]) = \Lambda(e_{x_1}) \dots \Lambda(e_{x_n})\phi_y.$$

Luego, $\Lambda(s)(\{1\}) = (\Lambda(e_{x_1}) \dots \Lambda(e_{x_n}))(\{y, 1\}) = \{x_1, \dots, x_n, y, 1\}$.

Usando estas dos representaciones del semigrupo de Exel, probaremos la unicidad de la descomposición estándar y así, la unicidad de los inversos.

Proposición 1.4.15. *Sea $s \in E(G)$. Entonces s admite una única descomposición estándar $s = e_{x_1} \dots e_{x_n}[y]$, salvo el orden de los e_{x_i} .*

Demostración. Supongamos que existe otra descomposición $s = e_{r_1} \dots e_{r_m}[p]$. Por el Ejemplo 1.4.13, tenemos que $\partial(s) = y$ y $\partial(s) = p$. Luego, $y = p$. Por otro lado, $\Lambda(s)(\{1\}) = \{x_1, \dots, x_n, y, 1\}$ y $\Lambda(s)(\{1\}) = \{r_1, \dots, r_m, p, 1\}$. Así, $\{x_1, \dots, x_n, y, 1\} \setminus \{y, 1\} = \{r_1, \dots, r_m, p, 1\} \setminus \{p, 1\}$. Por la condición III) de la forma estándar, concluimos que $\{x_1, \dots, x_n\} = \{r_1, \dots, r_m\}$. \square

Teorema 1.4.16. *$E(G)$ es un semigrupo inverso.*

Demostración. Sea $s \in E(G)$, entonces existe $s^* \in E(G)$ tal que $ss^*s = s$ y $s^*ss^* = s^*$. Supongamos que existe $t \in E(G)$ tal que $sts = s$ y $tst = t$. Escribamos a s y t^* en su forma estándar:

$$s = e_{x_1} \dots e_{x_n}[y]$$

$$t^* = e_{r_1} \dots e_{r_m}[p].$$

Por lo tanto, $t = [p^{-1}]e_{r_1} \dots e_{r_m}$. Así, $y = \partial(s) = \partial(sts) = yp^{-1}y$; luego $p = y$. Además,

$$\begin{aligned} sts &= e_{x_1} \dots e_{x_n}[y][y^{-1}]e_{r_1} \dots e_{r_m}e_{x_1} \dots e_{x_n}[y] \\ &= e_{x_1} \dots e_{x_n}e_{r_1} \dots e_{r_m}e_y[y] \\ &= e_{x_1} \dots e_{x_n}e_{r_1} \dots e_{r_m}[y]. \end{aligned}$$

Por la unicidad de la descomposición estándar tenemos que $\{x_1, \dots, x_n, r_1, \dots, r_m\} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Así, $\{r_1, \dots, r_m\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. Utilizando el mismo argumento a $t^*s^*t^* = t^*$,

concluimos que $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \{r_1, \dots, r_m\}$. De esta forma, $s = t^*$ y por lo tanto $t = s^*$. \square

Finalizamos esta sección presentando una caracterización del semigrupo de Exel, la cual será de gran utilidad en el Capítulo 2.

Teorema 1.4.17. *Sea $\{(A, a) : A \in \mathcal{P}_1(G), a \in A\}$ el semigrupo con multiplicación definida por*

$$(A, a)(B, b) = (A \cup aB, ab).$$

Entonces existe un isomorfismo de semigrupos $\varphi : E(G) \rightarrow \{(A, a) : A \in \mathcal{P}_1(G), a \in A\}$ tal que $\varphi([x]) = (\{1, x\}, x)$, para todo $x \in G$.

Demostración. Ver ¹⁶, Lema 2.3 y Teorema 2.4. \square

Definición 1.4.18. Sea $x = (A, a) \in E(G)$. El conjunto A es llamado el **soporte** de x y el cardinal $|A|$ es el **volumen** de x .

1.5. Representaciones proyectivas de semigrupos

Más adelante, observaremos una estrecha relación entre las representaciones parciales proyectivas de grupos y las representaciones proyectivas de semigrupos. Por ello, en esta sección nos centraremos en el estudio de este tipo de representaciones, cuya teoría fue desarrollada por el matemático B. Novikov. Usaremos como referencia principal el artículo ¹.

Definición 1.5.1. Sea \mathbb{K} un cuerpo. Decimos que un semigrupo S con 0 es un **\mathbb{K} -semigrupo** si existe una función $\mathbb{K} \times S \rightarrow S$, denotada por $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ tal que:

- I) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
- II) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$;
- III) $1_{\mathbb{K}}x = x$;
- IV) $0_{\mathbb{K}}x = 0 \in S$;

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo $x, y \in S$.

¹⁶ J. KELLENDONK y M. LAWSON. "Partial Actions of Groups". En: *International Journal of Algebra and Computation* 1 (2004), págs. 87-114.

Definición 1.5.2. Un \mathbb{K} -semigrupo S es llamado un **semigrupo \mathbb{K} -cancelativo** si para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x \neq 0 \in S$, la igualdad $\alpha x = \beta x$ implica que $\alpha = \beta$. Si se tiene que S es un monoide, decimos que S es un **monoide \mathbb{K} -cancelativo**.

Ejemplo 1.5.3. $M_n(\mathbb{K})$ es un monoide \mathbb{K} -cancelativo. Más general, cualquier \mathbb{K} -álgebra vista como un semigrupo multiplicativo es un semigrupo \mathbb{K} -cancelativo.

Ejemplo 1.5.4. Sea A una \mathbb{K} -álgebra con elemento identidad 1_A . El \mathbb{K} -submonoide generado por $a \in A$, $\{\alpha a^n : \alpha \in \mathbb{K}, n \geq 0\}$ (donde $a^0 = 1_A$), es un monoide \mathbb{K} -cancelativo. Un ejemplo concreto es $\{(\alpha, \alpha), (0, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{K}\} \subseteq A = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, el \mathbb{K} -submonoide generado por $a = (0, 1)$.

Dado un monoide \mathbb{K} -cancelativo M , inspirados en el grupo lineal general proyectivo, definimos la siguiente relación λ en M :

$$x\lambda y \iff x = \alpha y, \quad \text{para algún } \alpha \in \mathbb{K}^*.$$

Es sencillo ver que λ es una relación de equivalencia en M . Además, si $x\lambda y$ y $z\lambda w$, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$ tales que $x = \alpha y$ y $z = \beta w$. Luego,

$$xz = (\alpha y)(\beta w) = \alpha(y(\beta w)) = \alpha(\beta(yw)) = (\alpha\beta)(yw).$$

Como $\alpha\beta \in \mathbb{K}^*$, tenemos que $xz\lambda yw$ y por lo tanto, λ es una congruencia en M .

De esta forma, obtenemos el semigrupo cociente $\text{Proj } M = M/\lambda$ y denotamos por ξ al homomorfismo natural $\xi : M \rightarrow \text{Proj } M$, donde cada elemento de M es enviado a su clase de equivalencia.

Definición 1.5.5. Sean S un semigrupo y M un monoide \mathbb{K} -cancelativo. Una **representación proyectiva de S en M** es una función $\Gamma : S \rightarrow M$ tal que $\xi\Gamma : S \rightarrow \text{Proj } M$ es un homomorfismo.

En la siguiente proposición presentamos una caracterización de las representaciones proyectivas de semigrupos, siguiendo una estructura similar a la presentada en la Proposición 1.2.3. En este contexto, por función parcialmente definida $\sigma : S \times S \rightarrow \mathbb{K}^*$ nos referimos a una función que no está definida en su totalidad en $S \times S$, sino solo en un subconjunto de $S \times S$.

Proposición 1.5.6. ¹ Sea M un monoide \mathbb{K} -cancelativo. Una función $\Gamma : S \rightarrow M$ es una representación proyectiva de un semigrupo S si, y solo si, se satisfacen las siguientes condiciones:

I) $\Gamma(xy) = 0 \iff \Gamma(x)\Gamma(y) = 0$, para cada $x, y \in S$;

II) existe una única función parcialmente definida $\rho : S \times S \rightarrow \mathbb{K}^*$ tal que

$$\text{dom } \rho = \{(x, y) \in S \times S : \Gamma(xy) \neq 0\},$$

y para cada $(x, y) \in \text{dom } \rho$,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \rho(x, y)\Gamma(xy). \quad (1.2)$$

Demostración. Supongamos que $\Gamma : S \rightarrow M$ es una representación proyectiva de semigrupos. Por definición, $\xi\Gamma : S \rightarrow \text{Proj } M$ es un homomorfismo de semigrupos. Sean $x, y \in S$. Note que si $\Gamma(xy) = 0$, entonces $\xi\Gamma(xy) = 0$. Como $\xi\Gamma$ y ξ son homomorfismos, entonces $0 = \xi\Gamma(xy) = \xi\Gamma(x)\xi\Gamma(y) = \xi(\Gamma(x)\Gamma(y))$. Es fácil ver que $x \lambda 0 \iff x = 0$. Por lo tanto, $\Gamma(x)\Gamma(y) = 0$. Análogamente, mostramos que si $\Gamma(x)\Gamma(y) = 0$, entonces $\Gamma(xy) = 0$. Resta ver que se cumple la condición II). Sean $(x, y) \in S \times S$ tales que $\Gamma(xy) \neq 0$, entonces $\xi(\Gamma(xy)) = \xi(\Gamma(x)\Gamma(y))$. Luego, existe $\rho(x, y) \in \mathbb{K}^*$ tal que $\Gamma(x)\Gamma(y) = \rho(x, y)\Gamma(xy)$. Como $\Gamma(xy) \neq 0$ y M es un monoide \mathbb{K} -cancelativo, concluimos que la función ρ es única.

Recíprocamente, si se satisfacen las condiciones I) y II) de esta proposición, al igual que en la Proposición 1.2.3, es fácil ver que Γ es una representación proyectiva de semigrupos. □

La función ρ es llamada **el conjunto factor** de Γ .

Observación 1.5.7. Si extendemos ρ a una función totalmente definida en $S \times S$, estableciendo que $\rho(x, y) = 0$, para los pares ordenados (x, y) tales que $\Gamma(x)\Gamma(y) = 0$, entonces la ecuación (1.2) se cumple para todo $x, y \in S$.

Proposición 1.5.8. Sea $\Gamma : S \rightarrow M$ una representación proyectiva de un semigrupo S en un monoide \mathbb{K} -cancelativo M . Entonces para todo $x, y, z \in S$,

$$\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z) = 0 \iff \Gamma(xyz) = 0.$$

Demostración. Sean $x, y, z \in S$. Como $\xi, \xi\Gamma$ son homomorfismos,

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z) = 0 &\iff \xi(\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z)) = 0 \iff \xi(\Gamma(x))\xi(\Gamma(y))\xi(\Gamma(z)) = 0 \\ &\iff \xi\Gamma(x)\xi\Gamma(y)\xi\Gamma(z) = 0 \iff \xi\Gamma(xyz) = 0 \iff \Gamma(xyz) = 0 \end{aligned}$$

□

Al igual que en el caso de las representaciones proyectivas de grupos, queremos obtener una caracterización de las funciones parcialmente definidas $\rho : S \times S \rightarrow \mathbb{K}^*$. Siguiendo la prueba de la Proposición 1.2.5, se tiene que para todo $x, y, z \in S$,

$$\rho(xy, z)\rho(x, y) = \rho(y, z)\rho(x, yz).$$

Sin embargo, a diferencia de los conjuntos factores de representaciones proyectivas de grupos, la condición anterior no es suficiente. En el resto de esta sección, trabajaremos con S un monoide.

Teorema 1.5.9. *Sea S un monoide. Una función $\rho : S \times S \rightarrow \mathbb{K}$ es un conjunto factor de alguna representación proyectiva de S si, y solo si,*

$$\rho(xy, z)\rho(x, y) = \rho(y, z)\rho(x, yz)$$

y, además,

$$\rho(x, y) = 0 \iff \rho(1, xy) = 0, \tag{1.3}$$

para cada $x, y, z \in S$.

Demostración. Ver ¹, Corolario 1. □

Sean ρ y σ dos conjuntos factores. Definimos el producto $\rho\sigma$ por

$$\rho\sigma(x, y) = \rho(x, y)\sigma(x, y).$$

Se sigue del Teorema 1.5.9 que $\rho\sigma$ es un conjunto factor. Similarmente al caso de grupos, tenemos la siguiente relación entre conjuntos factores.

Definición 1.5.10. Sea S un monoide. Dos conjuntos factores ρ y σ son llamados **equivalentes**, que denotamos por $\rho \sim \sigma$, si existe una función $\eta : S \rightarrow \mathbb{K}^*$ tal que

$$\rho(x, y) = \eta(y)\eta(xy)^{-1}\eta(x)\sigma(x, y),$$

para todo $x, y \in S$.

De esta forma, el conjunto $m(S)$ de todos los conjuntos factores es un semigrupo con la congruencia \sim .

Definición 1.5.11. El semigrupo cociente $M(S) = m(S)/\sim$ es llamado **el multiplicador de Schur de S**.

Proposición 1.5.12. Sea S un monoide, entonces $m(S)$ y $M(S)$ son semigrupos inversos conmutativos.

Demostración. Sea $\rho \in m(S)$. Defina

$$\rho'(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y)^{-1} & \text{si } \rho(x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{si } \rho(x, y) = 0. \end{cases}$$

Por el Teorema 1.5.9, $\rho' \in m(S)$. Además, es claro que $\rho\rho'\rho = \rho$ y $\rho'\rho\rho' = \rho'$ y por lo tanto, $m(S)$ es regular. Como $M(S)$ es un semigrupo cociente de $m(S)$, también es regular. Finalmente, como \mathbb{K} es cuerpo tenemos ambos semigrupos son conmutativos y así, la Proposición 1.3.14 implica que son semigrupos inversos. \square

Por el Teorema 1.3.20, tenemos que

$$m(S) = \bigcup_{\epsilon \in E(m(S))} \mathcal{H}_\epsilon, \quad M(S) = \bigcup_{\epsilon \in E(M(S))} \mathcal{H}_\epsilon$$

Luego, estudiaremos los conjuntos factores idempotentes.

Teorema 1.5.13. ¹ Existe una biyección $\epsilon \leftrightarrow I_\epsilon$ entre los idempotentes de $m(S)$ y los ideales de S tal que para todo idempotente ϵ se vale que

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy \notin I_\epsilon, \\ 0 & \text{si } xy \in I_\epsilon. \end{cases}$$

$$y I_{\epsilon_1 \epsilon_2} = I_{\epsilon_1} \cup I_{\epsilon_2}.$$

Demostración. Sea $\epsilon \in m(S)$ idempotente, entonces $\epsilon(x, y)^2 = \epsilon(x, y)$, para todo $x, y \in S$. Esto implica que los únicos valores que toma ϵ son 0 y 1. De (1.3) tenemos que $\epsilon(x, y) =$

$0 \iff \epsilon(1, xy) = 0$, pero por lo anterior esto implica que $\epsilon(x, y) = \epsilon(1, xy)$, para todo $x, y \in S$. Luego, la ecuación de 2-cociclo implica que

$$\epsilon(1, xy)\epsilon(1, xyz) = \epsilon(1, yz)\epsilon(1, xyz), \quad \forall x, y, z \in S. \quad (1.4)$$

Considere $I_\epsilon = \{y \in S : \epsilon(1, y) = 0\}$. Afirmamos que I_ϵ es un ideal de S . En efecto, sean $y \in I_\epsilon, z \in S$. Tomando $x = 1$ en (1.4) tenemos que

$$\epsilon(1, y)\epsilon(1, yz) = \epsilon(1, yz)\epsilon(1, yz) = \epsilon(1, yz).$$

Como $y \in I_\epsilon$, $\epsilon(1, y) = 0$ y por lo tanto, $\epsilon(1, yz) = 0$. Esto es, $yz \in I_\epsilon$. Similarmente, si $x \in S$, tomando $z = 1$ en (1.4), obtenemos que

$$\epsilon(1, xy) = \epsilon(1, xy)\epsilon(1, xy) = \epsilon(1, y)\epsilon(1, xy).$$

Dado que $\epsilon(1, y) = 0$, concluimos que $xy \in I_\epsilon$. Luego, I_ϵ es un ideal de S . Por lo tanto, podemos definir la función $\epsilon \rightarrow I_\epsilon$. Veamos que es sobreyectiva. Sea I un ideal de S . Considere $\epsilon : S \times S \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy \notin I, \\ 0 & \text{si } xy \in I. \end{cases}$$

Es claro que ϵ es idempotente. Probaremos que ϵ es un conjunto factor de S . Dado que $xy = 1(xy)$, se sigue de la definición de ϵ que $\epsilon(x, y) = 0 \iff \epsilon(1, xy) = 0$. Verifiquemos ahora la ecuación de 2-cociclo. Sean $x, y, z \in S$. Si $xyz \in I$, entonces $\epsilon(x, yz) = 0$ y $\epsilon(xy, z) = 0$, luego trivialmente se verifica la ecuación. Ahora, si $xyz \notin I$, como I es ideal tenemos que $xy \notin I$ y $yz \notin I$, luego $\epsilon(x, yz) = \epsilon(xy, z) = \epsilon(x, y) = \epsilon(y, z) = 1$. Por el Teorema 1.5.9, tenemos que ϵ es un conjunto factor de S . Se tiene que $I_\epsilon = I$ y por consiguiente, la función es sobreyectiva.

Por otro lado, es fácil ver que la función es inyectiva. Finalmente, sean ϵ_1, ϵ_2 idempotentes de $m(S)$, entonces

$$y \in I_{\epsilon_1 \epsilon_2} \iff \epsilon_1(1, y)\epsilon_2(1, y) = 0 \iff \epsilon_1(1, y) = 0 \text{ ó } \epsilon_2(1, y) = 0 \iff y \in I_{\epsilon_1} \cup I_{\epsilon_2}.$$

□

Denotamos por $Y(S)$ al conjunto de los ideales de S . Sean $I, J \in Y(S)$, definimos el siguiente orden parcial:

$$I \leq J \iff I \supseteq J.$$

Es claro que $I \cup J$ es una cota inferior de $\{I, J\}$. Además, si $K \in Y(S)$ con $K \leq I, K \leq J$, entonces $K \supseteq I \cup J$. Por lo tanto, $(Y(S), \leq)$ es un semirretículo, donde el ínfimo entre I, J es $I \cup J$.

Corolario 1.5.14. $E(m(S)) \cong Y(S) \cong E(M(S))$

Demostración. Por el Teorema 1.5.13, tenemos que $E(m(S)) \cong Y(S)$. Definamos la función $\pi : E(m(S)) \rightarrow E(M(S))$, dada por $\pi(\epsilon) = \text{cls}(\epsilon)$, para cada $\epsilon \in E(m(S))$. Claramente, π está bien definida y es un homomorfismo de semigrupos. Sean $\epsilon_1, \epsilon_2 \in E(m(S))$ tales que $\text{cls}(\epsilon_1) = \text{cls}(\epsilon_2)$, entonces existe $\eta : S \rightarrow \mathbb{K}^*$ tal que $\epsilon_1(x, y) = \eta(y)\eta(xy)^{-1}\eta(x)\epsilon_2(x, y)$. Si $\epsilon_1(x, y) = 0$, como $\eta(y)\eta(xy)^{-1}\eta(x) \in \mathbb{K}^*$ tenemos que $\epsilon_2(x, y) = 0$. Si $\epsilon_1(x, y) = 1$, dado que $\epsilon_2(x, y)$ es 0 ó 1, tenemos que $\epsilon_2(x, y) = 1$. Luego, $\epsilon_1 = \epsilon_2$.

Por último, veamos que π es sobreyectiva. Sea $\sigma \in m(S)$ tal que $\text{cls}(\sigma)$ es idempotente. Esto es, $\text{cls}(\sigma^2) = \text{cls}(\sigma)$. Por lo tanto, existe $\eta : S \rightarrow \mathbb{K}^*$ tal que $\sigma^2(x, y) = \eta(y)\eta(xy)^{-1}\eta(x)\sigma(x, y)$. Definamos $\epsilon : S \times S \rightarrow \mathbb{K}$ por $\epsilon(x, y) = (\eta(y)\eta(xy)^{-1}\eta(x))^{-1}\sigma(x, y)$. Es fácil ver que ϵ cumple las condiciones del Teorema 1.5.9 y, por lo tanto, ϵ es un conjunto factor idempotente. Además, $\sigma(x, y) = \eta(y)\eta(xy)^{-1}\eta(x)\epsilon(x, y)$; luego $\text{cls}(\sigma) = \text{cls}(\epsilon)$, es decir, $\pi(\epsilon) = \text{cls}(\sigma)$. \square

Dado I ideal de S , definimos el conjunto factor idempotente

$$\epsilon_I(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy \notin I, \\ 0 & \text{si } xy \in I. \end{cases}$$

Se sigue del Corolario 1.5.14 que

$$m(S) = \bigcup_{I \in Y(S)} m_I(S), \quad M(S) = \bigcup_{I \in Y(S)} M_I(S), \quad (1.5)$$

donde $m_I(S) = \mathcal{H}_{\epsilon_I}$, $M_I(S) = \mathcal{H}_{\text{cls}(\epsilon_I)}$. Además, recordando que

$$\mathcal{H}_{\epsilon_I} = \{\rho \in m(S) : \rho\rho' = \epsilon_I\},$$

se deduce que

$$m_I(S) = \{\rho \in m(S) : \rho(x, y) = 0 \iff xy \in I\}. \quad (1.6)$$

Como consecuencia del Teorema 1.3.20 y del Corolario 1.5.14, tenemos que

$$m_I(S)m_J(S) \subseteq m_{I \cup J}(S), \text{ con } I, J \in Y(S). \quad (1.7)$$

Sea I un ideal de un semigrupo S . Es sencillo verificar que la siguiente relación

$$\rho_I = (I \times I) \cup \{(x, x) : x \in S\}$$

es una congruencia en S . Luego, tenemos el semigrupo cociente

$$S/\rho_I = \{I\} \cup \{x : x \in S \setminus I\}.$$

Dado que I es el elemento cero de S/ρ_I , es conveniente ver a este semigrupo cociente como el conjunto $(S \setminus I) \cup \{0\}$, donde el producto xy para $x, y \in S \setminus I$ se mantiene igual si $xy \notin I$, pero se define como cero cuando $xy \in I$. Por simplicidad, escribiremos S/I en lugar de S/ρ_I . De (1.6) se sigue que si I es un ideal no vacío de S , entonces $m_I(S) \cong m_0(S/I)$. En el caso $I = \emptyset$, tenemos que $m_\emptyset(S) = m_0(S^0)$, donde S^0 es el semigrupo que se obtiene al añadirle un elemento cero a S .

2. El multiplicador parcial de Schur

En este capítulo se presenta un estudio detallado de las propiedades estructurales del multiplicador parcial de Schur, con base en los artículos ¹, ³ y ⁴. Los resultados más importantes de este capítulo se encuentran en el Teorema 2.2.15 y el Teorema 2.4.4. A partir de la Sección 2.3, asumiremos que el cuerpo \mathbb{K} es algebraicamente cerrado, hipótesis que será relevante en la demostración del Lema 2.3.6 y el Teorema 2.4.4.

2.1. Representaciones parciales proyectivas de grupos

Como primer paso hacia la generalización del multiplicador de Schur, abordamos el estudio de las representaciones parciales proyectivas de grupos. El objetivo de esta sección es entender en profundidad el Teorema 2.1.7, un resultado de suma importancia en este trabajo. Recordemos, según lo presentado en la Sección 1.5, que dado cualquier monoide \mathbb{K} -cancelativo M , definimos el semigrupo cociente $\text{Proj } M$ y el homomorfismo canónico $\xi : M \rightarrow \text{Proj } M$.

Definición 2.1.1. Sean G un grupo y M un monoide. Una función $\varphi : G \rightarrow M$ que preserve los elementos identidad es llamada un **homomorfismo parcial (unitario)** si para todo $g, h \in G$ se tiene que:

$$\varphi(g^{-1})\varphi(g)\varphi(h) = \varphi(g^{-1})\varphi(gh);$$

$$\varphi(g)\varphi(h)\varphi(h^{-1}) = \varphi(gh)\varphi(h^{-1}).$$

Definición 2.1.2. Una **representación parcial proyectiva** de G en un monoide \mathbb{K} -cancelativo M es una función $\Gamma : G \rightarrow M$ tal que $\xi\Gamma : G \rightarrow \text{Proj } M$ es un homomorfismo parcial.

Observación 2.1.3. Sea $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación proyectiva de G . Tenemos que $L(V)$, el conjunto de las transformaciones lineales de V , es un monoide \mathbb{K} -cancelativo y que, $\text{GL}(V) \subseteq L(V)$. Además, todo homomorfismo es en particular un homomorfismo parcial y por ende, este nuevo concepto generaliza las representaciones proyectivas de grupo.

Proposición 2.1.4. ¹ Una función $\Gamma : G \rightarrow M$ es una representación parcial proyectiva si,

y solo si, existe una representación proyectiva $\tilde{\Gamma} : E(G) \rightarrow M$ tal que $\Gamma(x) = \tilde{\Gamma}([x])$, para cada $x \in G$.

Demostración. Supongamos que $\Gamma : G \rightarrow M$ es una representación parcial proyectiva. Esto es, $\Delta = \xi\Gamma : G \rightarrow \text{Proj } M$ es un homomorfismo parcial. Por la Proposición 1.4.6, existe un homomorfismo $\tilde{\Delta} : E(G) \rightarrow \text{Proj } M$ tal que $\Delta(x) = \tilde{\Delta}([x])$, para todo $x \in G$.

Fijemos X un conjunto de representantes de las coclases de M en $\text{Proj } M$. Definamos la función $\xi' : \text{Proj } M \rightarrow M$, donde cada coclase es enviada a su único representante en X . Dado que $\xi\xi' : \text{Proj } M \rightarrow \text{Proj } M$ es la función identidad, $\Gamma' = \xi'\tilde{\Delta} : E(G) \rightarrow M$ es una representación proyectiva de semigrupos. Note que para cada $x \in G$ $\xi(\Gamma'([x])) = \xi(\xi'\tilde{\Delta}([x])) = \tilde{\Delta}([x]) = \xi(\Gamma(x))$. Lo que implica que para cada $x \in G$, existe $\lambda(x) \in \mathbb{K}^*$ tal que

$$\Gamma(x) = \lambda(x)\Gamma'([x]).$$

Fijemos $\tilde{\lambda} : E(G) \rightarrow \mathbb{K}^*$ una función tal que $\tilde{\lambda}([x]) = \lambda(x)$, para todo $x \in G$. Consideremos la función $\tilde{\Gamma} : E(G) \rightarrow M$ dada por $\tilde{\Gamma}(s) = \tilde{\lambda}(s)\Gamma'(s)$, para cada $s \in E(G)$. De esta forma, tenemos que $\xi\tilde{\Gamma} = \xi\Gamma'$ y como Γ' es una representación proyectiva de semigrupos, podemos concluir que $\tilde{\Gamma}$ también lo es. Finalmente, para cada $x \in G$, $\tilde{\Gamma}([x]) = \tilde{\lambda}([x])\Gamma'([x]) = \lambda(x)\Gamma'([x]) = \Gamma(x)$.

Recíprocamente, supongamos que existe una representación proyectiva $\tilde{\Gamma} : E(G) \rightarrow M$ tal que $\Gamma(x) = \tilde{\Gamma}([x])$, para cada $x \in G$. Esto implica que $\xi\tilde{\Gamma} : E(G) \rightarrow \text{Proj } M$ es un homomorfismo de monoides. Consideremos la función $f : G \rightarrow \text{Proj } M$ definida por $f(x) = \xi\tilde{\Gamma}([x])$, para cada $x \in G$. Según la Definición 1.4.4 y dado que $\xi\tilde{\Gamma}$ es un homomorfismo de monoides, podemos concluir que f es un homomorfismo parcial. Por último, la hipótesis $\Gamma(x) = \tilde{\Gamma}([x])$, para cada $x \in G$ implica que $f = \xi\Gamma$, por lo tanto, Γ es una representación parcial proyectiva. \square

De este modo, hemos visto la importancia del semigrupo de Exel en el estudio de este tipo de representaciones. Dado que dicho semigrupo es inverso, veremos algunas propiedades de las representaciones proyectivas de semigrupos inversos.

Lema 2.1.5. Sean S un semigrupo inverso, M un monoide \mathbb{K} -cancelativo y $\Pi : S \rightarrow M$ una representación proyectiva. Entonces para cada $a, b \in S$

$$\Pi(a)\Pi(b) = 0 \iff \Pi(a^{-1})\Pi(ab) = 0 \iff \Pi(ab)\Pi(b^{-1}) = 0.$$

Demostración. Sean $a, b \in S$. Por la caracterización de representaciones proyectivas de semigrupos, se tiene que $\Pi(ab) = 0 \iff \Pi(a)\Pi(b) = 0$. Así, $\Pi(a)\Pi(b) = 0$ si, y solo si, $ab \in \Pi^{-1}(0)$. Afirmamos que $\Pi^{-1}(0)$ es un ideal de S . En efecto, dado que Π es un representación proyectiva, $\xi\Pi$ es un homomorfismo de semigrupos. Además, si $x \in S$, $y \in \Pi^{-1}(0)$, entonces $y \in (\xi\Pi)^{-1}(0)$. Por lo tanto, $\xi\Pi(xy) = \xi\Pi(x)\xi\Pi(y) = 0$. Esto es, $xy \in (\xi\Pi)^{-1}(0)$, pero esto implica que $xy \in \Pi^{-1}(0)$. De manera análoga, se prueba que $yx \in \Pi^{-1}(0)$.

Como $\Pi^{-1}(0)$ es un ideal, si $ab \in \Pi^{-1}(0)$, entonces $a^{-1}ab \in \Pi^{-1}(0)$. Recíprocamente, si $a^{-1}ab \in \Pi^{-1}(0)$, entonces $ab = aa^{-1}ab \in \Pi^{-1}(0)$. De esta forma,

$$ab \in \Pi^{-1}(0) \iff a^{-1}ab \in \Pi^{-1}(0) \iff \Pi(a^{-1}ab) = 0 \iff \Pi(a^{-1})\Pi(ab) = 0.$$

Por lo tanto, hemos mostrado que $\Pi(a)\Pi(b) = 0 \iff \Pi(a^{-1})\Pi(ab) = 0$. Similarmente, se puede mostrar que $\Pi(a)\Pi(b) = 0 \iff \Pi(ab)\Pi(b^{-1}) = 0$. \square

Corolario 2.1.6. *Si π es un conjunto factor de Π , entonces para cada $a, b \in S$*

$$\pi(a, b) = 0 \iff \pi(a^{-1}, ab) = 0 \iff \pi(ab, b^{-1}) = 0.$$

A continuación presentamos un análogo de la Proposición 1.5.6 para una representación parcial proyectiva de grupo.

Teorema 2.1.7. ¹ *Sea M un monoide \mathbb{K} -cancelativo. Una función $\Gamma : G \rightarrow M$ es una representación parcial proyectiva de un grupo G si, y solo si, se satisfacen las siguientes condiciones:*

i) *para todo $x, y \in G$*

$$\Gamma(x^{-1})\Gamma(xy) = 0 \iff \Gamma(x)\Gamma(y) = 0 \iff \Gamma(xy)\Gamma(y^{-1}) = 0; \quad (2.1)$$

ii) *existe una única función parcialmente definida $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ tal que*

$$\text{dom } \sigma = \{(x, y) \in G \times G \mid \Gamma(x)\Gamma(y) \neq 0\} \quad (2.2)$$

y para todo $(x, y) \in \text{dom } \sigma$

$$\Gamma(x^{-1})\Gamma(x)\Gamma(y) = \sigma(x, y)\Gamma(x^{-1})\Gamma(xy), \quad (2.3)$$

$$\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(y^{-1}) = \sigma(x, y)\Gamma(xy)\Gamma(y^{-1}). \quad (2.4)$$

Demostración. Sea $\Gamma : G \rightarrow M$ una representación parcial proyectiva. Por la Proposición 2.1.4, existe $\tilde{\Gamma} : E(G) \rightarrow M$ una representación proyectiva tal que $\Gamma(x) = \tilde{\Gamma}([x])$, para cada $x \in G$. Veamos i). Sean $x, y \in G$. Usando la Proposición 1.5.6 y el Lema 2.1.5 tenemos que:

$$\begin{aligned} \Gamma(x^{-1})\Gamma(xy) = \tilde{\Gamma}([x^{-1}])\tilde{\Gamma}([xy]) = 0 &\iff \tilde{\Gamma}([x^{-1}][xy]) = \tilde{\Gamma}([x^{-1}][x][y]) = 0 \\ &\iff \tilde{\Gamma}([x^{-1}])\tilde{\Gamma}([x][y]) = 0 \iff \tilde{\Gamma}([x])\tilde{\Gamma}([y]) = 0 \iff \Gamma(x)\Gamma(y) = 0. \end{aligned}$$

Análogamente, probamos que $\Gamma(xy)\Gamma(y^{-1}) = 0 \iff \Gamma(x)\Gamma(y) = 0$.

Ahora, probaremos ii). Sea ρ el conjunto factor de $\tilde{\Gamma}$. Supongamos que $\Gamma(x^{-1})\Gamma(x)\Gamma(y) \neq 0$. Esto implica que $\Gamma(x^{-1})\Gamma(xy) \neq 0$, pues si suponemos que $\Gamma(x^{-1})\Gamma(xy) = 0$, entonces por la ecuación (2.1) $\Gamma(x)\Gamma(y) = 0$ y así, $\Gamma(x^{-1})\Gamma(x)\Gamma(y) = 0$. De esta forma, $\tilde{\Gamma}([x^{-1}])\tilde{\Gamma}([xy]) \neq 0$ y por lo tanto $\rho([x^{-1}], [xy]) \neq 0$. Por (1.2) de la Proposición 1.5.6, tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(x^{-1})\Gamma(x)\Gamma(y) &= \tilde{\Gamma}([x^{-1}])\tilde{\Gamma}([x])\tilde{\Gamma}([y]) \\ &= \rho([x], [y])\tilde{\Gamma}([x^{-1}])\tilde{\Gamma}([x][y]) \\ &= \rho([x], [y])\rho([x^{-1}], [x][y])\tilde{\Gamma}([x^{-1}][x][y]) \\ &= \rho([x], [y])\rho([x^{-1}], [x][y])\tilde{\Gamma}([x^{-1}][xy]) \\ &= \frac{\rho([x], [y])\rho([x^{-1}], [x][y])}{\rho([x^{-1}], [xy])}\tilde{\Gamma}([x^{-1}])\tilde{\Gamma}([xy]) \\ &= \frac{\rho([x], [y])\rho([x^{-1}], [x][y])}{\rho([x^{-1}], [xy])}\Gamma(x^{-1})\Gamma(xy). \end{aligned}$$

Tomando

$$\sigma(x, y) = \frac{\rho([x], [y])\rho([x^{-1}], [x][y])}{\rho([x^{-1}], [xy])},$$

tenemos por la ecuación (2.1) y el Corolario 2.1.6 que $\sigma(x, y) \in \mathbb{K}^*$ si, y solo si, $\Gamma(x)\Gamma(y) \neq 0$. Hasta el momento, hemos probado la igualdad (2.3) bajo la hipótesis de que $\Gamma(x^{-1})\Gamma(x)\Gamma(y) \neq 0$. Sin embargo, si $(x, y) \in \text{dom } \sigma$ entonces usando que $\xi, \xi\Gamma$ son

homomorfismos y (2.1) tenemos que

$$\xi(\Gamma(x^{-1})\Gamma(x)\Gamma(y)) = \xi\Gamma(x^{-1})\xi\Gamma(x)\xi\Gamma(y) = \xi\Gamma(x^{-1})\xi\Gamma(xy) = \xi(\Gamma(x^{-1})\Gamma(xy)) \neq 0,$$

lo que completa la prueba de (2.3). De manera análoga, obtenemos

$$\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(y^{-1}) = \frac{\rho([x], [y])\rho([x][y], [y^{-1}])}{\rho([xy], [y^{-1}])}\Gamma(xy)\Gamma(y^{-1}).$$

Consideremos la siguiente función parcialmente definida

$$\tau(x, y) = \frac{\rho([x], [y])\rho([x][y], [y^{-1}])}{\rho([xy], [y^{-1}])}.$$

Veamos que las funciones parcialmente definidas σ y τ son iguales. Primero, mostraremos que $\text{dom } \sigma = \text{dom } \tau$. Sea $(x, y) \in \text{dom } \sigma$, entonces $\Gamma(x)\Gamma(y) \neq 0$. Esto implica que $\rho([x], [y]) \neq 0$ y por el Corolario 2.1.6, $\rho([x][y], [y^{-1}]) \neq 0$. Además, como $\Gamma(x)\Gamma(y) \neq 0$ tenemos que $\Gamma(xy)\Gamma(y^{-1}) \neq 0$ y por tanto, $\rho([xy], [y^{-1}]) \neq 0$. Así, $(x, y) \in \text{dom } \tau$. Recíprocamente, si $(x, y) \in \text{dom } \tau$, entonces $\rho([x], [y]) \neq 0$ y por consiguiente, $\Gamma(x)\Gamma(y) \neq 0$. Luego, $(x, y) \in \text{dom } \sigma$.

Sea $(x, y) \in \text{dom } \sigma$. Usando la ecuación de 2-cociclo del Teorema 1.5.9, tenemos que

$$\begin{aligned} \rho([x^{-1}], [x][y])\rho([xy], [y^{-1}])\rho([x^{-1}], [xy][y^{-1}]) &= \rho([x^{-1}], [x][y])\rho([x^{-1}][xy], [y^{-1}])\rho([x^{-1}], [xy]) \\ &= \rho([x^{-1}], [x][y])\rho([x^{-1}][x][y], [y^{-1}])\rho([x^{-1}], [xy]) \\ &= \rho([x^{-1}], [xy])\rho([x][y], [y^{-1}])\rho([x^{-1}], [x][y][y^{-1}]). \end{aligned}$$

Por (1.3) del Teorema 1.5.9 y el Corolario 2.1.6

$$\begin{aligned} \rho([x^{-1}], [x][y][y^{-1}]) \neq 0 &\iff \rho([x], [y][y^{-1}]) \neq 0 \iff \rho(1, [x][y][y^{-1}]) \neq 0 \\ &\iff \rho([x][y], [y^{-1}]) \neq 0 \iff \rho([x], [y]) \neq 0 \\ &\iff \Gamma(x)\Gamma(y) \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dividiendo por $\rho([x^{-1}], [xy][y^{-1}]) = \rho([x^{-1}], [x][y][y^{-1}])$ obtenemos:

$$\rho([x^{-1}], [x][y])\rho([xy], [y^{-1}]) = \rho([x^{-1}], [xy])\rho([x][y], [y^{-1}]).$$

Luego, $\sigma(x, y) = \tau(x, y)$. Note que la unicidad de σ se sigue de la propiedad \mathbb{K} -cancelativa de M . Así, hemos probado II).

Recíprocamente, si $\Gamma : G \rightarrow M$ es una función que satisface las condiciones de este teorema, es sencillo ver que $\xi\Gamma$ es un homomorfismo parcial y por lo tanto, Γ es una representación parcial proyectiva. \square

La función σ es llamada un conjunto factor de Γ o un **conjunto factor parcial** de G . Es conveniente asumir que σ está totalmente definida en $G \times G$, definiendo $\sigma(x, y) = 0$ para cada $(x, y) \notin \text{dom } \sigma$ y mantener la notación $\text{dom } \sigma$ para el conjunto definido en (2.2). De esta forma, es claro que las igualdades (2.3) y (2.4) valen para todo $x, y \in G$.

2.2. Conjuntos factores parciales

Sean Γ una representación parcial proyectiva de un grupo G en un monoide \mathbb{K} -cancelativo M y σ su respectivo conjunto factor parcial. Dado que $\xi\Gamma$ preserva los elementos identidad, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\Gamma(1) = 1_M$. De esta forma, al igual que en la Observación 1.2.4, $\sigma(1, 1) = 1$.

A continuación, mencionaremos una propiedad muy importante de los conjuntos factores parciales. Uno esperaría que estas funciones cumplan la ecuación de 2-cociclo presentada en la Proposición 1.2.5. Sin embargo, esto es válido únicamente bajo ciertas condiciones restringidas. Un ejemplo de un conjunto factor parcial que no cumple dicha ecuación se muestra en el Ejemplo 2.2.10.

Proposición 2.2.1. *Sea Γ una representación parcial proyectiva con un conjunto factor σ . Entonces para todo $x, y, z \in G$ con $\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z) \neq 0$ se tiene que $\sigma(xy, z)\sigma(x, y) = \sigma(y, z)\sigma(x, yz)$.*

Demostración. Sean $x, y, z \in G$ tales que $\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z) \neq 0$. Por las ecuaciones (2.3) y (2.4)

$$\begin{aligned} (\Gamma(x^{-1})\Gamma(x)\Gamma(y))\Gamma(z)\Gamma(z^{-1}) &= \sigma(x, y)\Gamma(x^{-1})\Gamma(xy)\Gamma(z)\Gamma(z^{-1}) \\ &= \sigma(x, y)\sigma(xy, z)\Gamma(x^{-1})\Gamma(xyz)\Gamma(z^{-1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(x^{-1})\Gamma(x)(\Gamma(y)\Gamma(z)\Gamma(z^{-1})) &= \sigma(y, z)\Gamma(x^{-1})\Gamma(x)\Gamma(yz)\Gamma(z^{-1}) \\ &= \sigma(y, z)\sigma(x, yz)\Gamma(x^{-1})\Gamma(xyz)\Gamma(z^{-1}).\end{aligned}$$

Luego,

$$\sigma(x, y)\sigma(xy, z)\Gamma(x^{-1})\Gamma(xyz)\Gamma(z^{-1}) = \sigma(y, z)\sigma(x, yz)\Gamma(x^{-1})\Gamma(xyz)\Gamma(z^{-1}). \quad (2.5)$$

Afirmamos que $\Gamma(x^{-1})\Gamma(xyz)\Gamma(z^{-1}) \neq 0$. Supongamos por absurdo que $\Gamma(x^{-1})\Gamma(xyz)\Gamma(z^{-1}) = 0$. Esto es, $\tilde{\Gamma}([x^{-1}])\tilde{\Gamma}([xyz])\tilde{\Gamma}([z^{-1}]) = 0$. Por la Proposición 1.5.8, $\tilde{\Gamma}([x^{-1}][xyz][z^{-1}]) = 0$. Lo que implica que $[x^{-1}][x][y][z][z^{-1}] \in \tilde{\Gamma}^{-1}(0)$. Al igual que en la prueba del Lema 2.1.5, $\tilde{\Gamma}^{-1}(0)$ es un ideal de $E(G)$. Por lo tanto, $[x][x^{-1}][x][y][z][z^{-1}][z] = [x][y][z] \in \tilde{\Gamma}^{-1}(0)$ y por la Proposición 1.5.8, $\tilde{\Gamma}([x])\tilde{\Gamma}([y])\tilde{\Gamma}([z]) = 0$. Lo que contradice la hipótesis de que $\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z) = 0$. Por consiguiente, $\Gamma(x^{-1})\Gamma(xyz)\Gamma(z^{-1}) \neq 0$.

Como M es un monoide \mathbb{K} -cancelativo, podemos concluir de (2.5) que $\sigma(xy, z)\sigma(x, y) = \sigma(y, z)\sigma(x, yz)$. \square

La siguiente proposición muestra una definición alternativa de los conjuntos factores parciales que es independiente del concepto de una representación parcial proyectiva de grupo.

Proposición 2.2.2. ¹ *Una función parcialmente definida $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ es un conjunto factor para alguna representación parcial proyectiva $\Gamma : G \rightarrow M$ si, y solo si, existe un conjunto factor ρ de $E(G)$ tal que*

$$I) \forall x, y \in G \quad (x, y) \in \text{dom } \sigma \iff ([x], [y]) \in \text{dom } \rho;$$

$$II) \forall x, y \in G \quad (x, y) \in \text{dom } \sigma, \quad \sigma(x, y) = \frac{\rho([x], [y])\rho([x^{-1}], [x][y])}{\rho([x^{-1}], [xy])}.$$

Demostración. Sea $\Gamma : G \rightarrow M$ una representación parcial proyectiva y σ su conjunto factor, tomando ρ como el conjunto factor de la representación proyectiva de semigrupos $\tilde{\Gamma} : E(G) \rightarrow M$, como se mostró en la prueba del Teorema 2.1.7, se valen las condiciones mencionadas. Recíprocamente, sea $\tilde{\Gamma}$ una representación proyectiva de $E(G)$ y ρ su conjunto factor. Definiendo $\Gamma : G \rightarrow \text{Proj } M$ por $\Gamma(x) = \tilde{\Gamma}([x])$, para cada $x \in G$ tenemos por la Proposición 1.4.6 que Γ es una representación parcial proyectiva de G y como se mostró en el Teorema 2.1.7, σ es un conjunto factor. \square

Corolario 2.2.3. ¹ Los conjuntos factores parciales de un grupo G son un semigrupo inverso conmutativo con la multiplicación punto a punto, esto es, $(\sigma\tau)(x, y) = \sigma(x, y)\tau(x, y)$.

Demostración. Sean σ, τ conjuntos factores parciales de G . Usando la proposición anterior es sencillo verificar que $\sigma\tau$ es un conjunto factor parcial. Considere

$$\sigma'(x, y) = \begin{cases} \sigma(x, y)^{-1} & \text{si } (x, y) \in \text{dom } \sigma, \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin \text{dom } \sigma. \end{cases}$$

Es claro que $\sigma\sigma'\sigma = \sigma$ y $\sigma'\sigma\sigma' = \sigma'$. Afirmamos que σ' es un conjunto factor parcial de G . En efecto, como σ es un conjunto factor parcial existe ρ una representación de $E(G)$ que cumple las condiciones I) y II) de la Proposición 2.2.2. Considerando la representación ρ' de $E(G)$ definida en el Teorema 1.5.12, tenemos que σ' cumple las condiciones de la Proposición 2.2.2 y por lo tanto es un conjunto factor parcial de G . Así, hemos mostrado que estos conjuntos factores son un semigrupo regular y como sus idempotentes conmutan, es un semigrupo inverso. \square

Este semigrupo es denotado por $pm(G)$.

Observación 2.2.4. Note que $pm(G)$ es un monoide, cuyo elemento identidad es el conjunto factor parcial $1_{pm(G)} : G \rightarrow \mathbb{K}^*$, dado por $1_{pm(G)}(g) = 1_{\mathbb{K}}$ para cada $g \in G$. Sin embargo, para $\sigma \in pm(G)$, cuyo dominio sea diferente de $G \times G$, tenemos que $\sigma\sigma' \neq 1_{pm(G)}$. Luego, $pm(G)$ no es un grupo, pero sí un semigrupo inverso.

Definición 2.2.5. El **multiplicador parcial de Schur** de un grupo G es el semigrupo cociente $pM(G) = pm(G)/\sim$, donde la congruencia \sim es dada por

$$\sigma \sim \tau \iff \sigma(x, y) = \eta(y)\eta(xy)^{-1}\eta(x)\tau(x, y), \quad \forall x, y \in G,$$

para alguna función $\eta : G \rightarrow \mathbb{K}^*$.

Dado que $pM(G)$ es un semigrupo cociente de un semigrupo inverso conmutativo, también lo es. Luego, ambos semigrupos son un semirretículo de grupos abelianos y por ende es útil estudiar sus idempotentes. Empezaremos con algunas propiedades de los dominios de los conjuntos factores parciales.

Proposición 2.2.6. Sean σ un conjunto factor de alguna representación parcial proyectiva y D su dominio, entonces para todo $x, y \in G$

$$(x, y) \in D \iff (x^{-1}, xy) \in D \iff (xy, y^{-1}) \in D \iff (y, y^{-1}x^{-1}) \in D \\ \iff (y^{-1}, x^{-1}) \in D \iff (y^{-1}x^{-1}, x) \in D.$$

Demostración. De las ecuaciones (2.1) y (2.2) del Teorema 2.1.7 tenemos que

$$(x, y) \in D \iff (x^{-1}, xy) \in D \iff (xy, y^{-1}) \in D, \forall x, y \in G.$$

Aplicando estas equivalencias adecuadamente obtenemos

$$(x^{-1}, xy) \in D \iff (y, y^{-1}x^{-1}) \in D \iff (y^{-1}, x^{-1}) \in D \iff (y^{-1}x^{-1}, x) \in D.$$

□

Corolario 2.2.7. Sean σ un conjunto factor de alguna representación parcial proyectiva Γ y D su dominio, entonces para todo $x, y \in G$

$$(x, 1) \in D \iff (x^{-1}, x) \in D \iff (1, x^{-1}) \in D \iff (1, x) \in D.$$

Demostración. De la proposición anterior tenemos que

$$(x, y) \in D \iff (x^{-1}, xy) \in D \iff (y, y^{-1}x^{-1}) \in D.$$

Tomando $y = 1$, obtenemos

$$(x, 1) \in D \iff (x^{-1}, x) \in D \iff (1, x^{-1}) \in D.$$

Además, como $\Gamma(1) = 1$, $(x, 1) \in D \iff \Gamma(x) \neq 0 \iff (1, x) \in D$.

□

Proposición 2.2.8. Si $(x, y) \in D$, entonces $(x, 1), (y, 1) \in D$ y $\sigma(x, 1) = \sigma(1, x) = \sigma(y, 1) = \sigma(1, y) = 1$.

Demostración. Si $(x, y) \in D$, entonces $\Gamma(x)\Gamma(y) \neq 0$. Esto implica que $\Gamma(x) \neq 0$ y $\Gamma(y) \neq 0$. Luego, $(x, 1) \in D$ y $(y, 1) \in D$. De esta forma, por el Corolario 2.2.7, $(1, x)$ y $(1, y) \in D$. Ahora bien, tomando $y = 1$ en la ecuación (2.4) obtenemos que $\Gamma(x) = \sigma(x, 1)\Gamma(x)$. Dado que $\Gamma(x) \neq 0$, concluimos que $\sigma(x, 1) = 1$. Análogamente, se puede mostrar que $\sigma(1, x) = \sigma(y, 1) = \sigma(1, y)$.

□

Teorema 2.2.9. ¹ Una función $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\sigma(1, 1) = 1$, es un conjunto factor parcial idempotente si, y solo si, sus valores son 0 y 1, y la siguiente condición se satisface:

$$\forall x, y \in G, (x, y) \in \text{dom } \sigma \Rightarrow (xy, y^{-1}), (y^{-1}, x^{-1}), (x, 1) \in \text{dom } \sigma. \quad (2.6)$$

Demostración. Supongamos que $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ es idempotente. Es claro que si $(x, y) \in \text{dom } \sigma$, entonces $\sigma(x, y) = 1$ y en caso contrario, $\sigma(x, y) = 0$. La condición (2.6) se sigue de las Proposiciones 2.2.6 y 2.2.8. Recíprocamente, supongamos que los únicos valores de $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ son 0 y 1 y se vale la condición (2.6). Es claro que σ es idempotente. De (2.6) se sigue que si $(xy, y^{-1}) \in \text{dom } \sigma$, entonces $(xyy^{-1}, (y^{-1})^{-1}) = (x, y) \in \text{dom } \sigma$. Por la misma propiedad, se tiene que

$$(xy, y^{-1}) \in \text{dom } \sigma \Rightarrow (y, y^{-1}x^{-1}) \in \text{dom } \sigma \Rightarrow (x^{-1}, xy) \in \text{dom } \sigma.$$

$$(x^{-1}, xy) \in \text{dom } \sigma \Rightarrow (y, y^{-1}x^{-1}) \in \text{dom } \sigma \Rightarrow (xy, y^{-1}) \in \text{dom } \sigma.$$

$$(x, y) \in \text{dom } \sigma \Rightarrow (y^{-1}, x^{-1}) \in \text{dom } \sigma \Rightarrow (y^{-1}, 1) \in \text{dom } \sigma \Rightarrow (1, y) \in \text{dom } \sigma.$$

Por lo tanto,

$$(x, y) \in \text{dom } \sigma \iff (xy, y^{-1}) \in \text{dom } \sigma \iff (x^{-1}, xy) \in \text{dom } \sigma. \quad (2.7)$$

$$(x, y) \in \text{dom } \sigma \Rightarrow (1, y) \in \text{dom } \sigma. \quad (2.8)$$

Considere $L = \{[x][y] \in E(G) : \sigma(x, y) = 0\}$, $I = E(G)LE(G)$ y $\rho : E(G) \times E(G) \rightarrow \mathbb{K}$, dada por

$$\rho(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } AB \notin I, \\ 0 & \text{si } AB \in I. \end{cases} \quad (2.9)$$

para cada $A, B \in E(G)$. Como I es un ideal de $E(G)$, por el Teorema 1.5.13 tenemos que ρ es un conjunto factor de $E(G)$. Queremos probar que se cumplen las condiciones I) y II) de la Proposición 2.2.2. Note que es suficiente ver que $\rho([u], [v]) = \sigma(u, v)$, para todo $u, v \in G$, puesto que eso implicaría la condición I) y como $\rho([u^{-1}], [u][v]) = \rho([u^{-1}], [uv])$ tendríamos $\frac{\rho([u], [v])\rho([u^{-1}], [u][v])}{\rho([u^{-1}], [uv])} = \sigma(u, v)$, es decir, la condición II). Dado que los únicos valores que toman las funciones ρ, σ son 0 y 1, probaremos que $\sigma(u, v) = 0 \iff \rho([u], [v]) = 0$, para todo $u, v \in G$.

Sean $u, v \in G$. Supongamos que $\sigma(u, v) = 0$, entonces $[u][v] \in L$ y por lo tanto, $[u][v] \in I$. Esto implica que, $\rho([u], [v]) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $\rho([u], [v]) = 0$, entonces existen $A, B \in E(G)$, $[x][y] \in L$ tales que

$$[u][v] = A[x][y]B.$$

Para probar que $\sigma(u, v) = 0$, es conveniente representar a los elementos de $E(G)$ como en el Teorema 1.4.17. Se tiene que $[u] = (\{1, u\}, u)$, $[v] = (\{1, v\}, v)$ y que existen $P, Q \in \mathcal{P}_1(G)$, $p \in P$ y $q \in Q$ tales que $A = (P, p)$ y $B = (Q, q)$. Así,

$$\begin{aligned} (\{1, u, uv\}, uv) &= (P, p)(\{1, x, xy\}, xy)(Q, q) \\ &= (P \cup p\{1, x, xy\}, pxy)(Q, q) \\ &= (P \cup p\{1, x, xy\} \cup pxyQ, pxyq). \end{aligned}$$

Luego,

$$p\{1, x, xy\} \subseteq \{1, u, uv\}, \quad (2.10)$$

con $p, x, y \in G$ y $\sigma(x, y) = 0$. Para concluir esta prueba, utilizaremos la siguiente afirmación.

Afirmación: Supongamos que los valores de $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ son 0 y 1, $\sigma(1, 1) = 1$ y σ satisface (2.6). Sean $a, b, c, d \in G$ tales que $\sigma(a, b) = 0$ y $\{a^{-1}, b\} \subseteq \{1, c^{-1}, d\}$, entonces $\sigma(c, d) = 0$.

En efecto, asumamos por absurdo que $\sigma(c, d) \neq 0$, entonces $\sigma(c, d) = 1$. De (2.6) y (2.8) tenemos que

$$\sigma(d^{-1}, c^{-1}) = \sigma(c, 1) = \sigma(1, d) = \sigma(1, c^{-1}) = \sigma(d^{-1}, 1) = 1.$$

Por otro lado, de la contención $\{a^{-1}, b\} \subseteq \{1, c^{-1}, d\}$, tenemos que $\sigma(a, b)$ tiene nueve valores posibles, pero por las igualdades anteriormente mencionadas y la hipótesis de que $\sigma(a, b) = 0$, tenemos que $\sigma(a, b)$ coincide con solo uno de los siguientes valores: $\sigma(1, 1), \sigma(c, c^{-1}), \sigma(d^{-1}, d)$. Sin embargo, aplicando (2.6) y (2.7) a $(c, d) \in \text{dom } \sigma$, obtenemos que:

$$(c^{-1}, cd), (c^{-1}, 1), (1, c), (c, c^{-1}) \in \text{dom } \sigma.$$

Similarmente, como $(c, d) \in \text{dom } \sigma$, $(d^{-1}, c^{-1}) \in \text{dom } \sigma$ y así;

$$(d, d^{-1}c^{-1}), (d, 1), (1, d^{-1}), (d^{-1}, d) \in \text{dom } \sigma.$$

Esto es, $\sigma(c, c^{-1}) = \sigma(d^{-1}, d) = \sigma(1, 1) = 1$, lo cual contradice que alguno de estos valores es igual a $\sigma(a, b) = 0$.

Continuando con la demostración de este teorema, de (2.7) se tiene que $\sigma(x^{-1}, xy) \notin \text{dom } \sigma$ y además, se sigue de (2.10) que $p \in \{1, u, uv\}$. Por consiguiente, tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si $p = 1$, entonces $\{x, xy\} \subseteq \{1, u, uv\}$. Utilizando la afirmación con $a = x^{-1}$, $b = xy$, $c = u^{-1}$, $d = uv$, concluimos que $\sigma(u^{-1}, uv) = 0$ y por (2.7) se tiene que $\sigma(u, v) = 0$.

Caso 2: Si $p = u$, entonces $\{x, xy\} \subseteq \{1, u^{-1}, v\}$. Al igual que en el caso anterior tomando $a = x^{-1}$, $b = xy$, $c = u$, $d = v$, concluimos que $\sigma(u, v) = 0$.

Caso 3: Si $p = uv$, entonces $\{x, xy\} \subseteq \{1, v^{-1}, v^{-1}u^{-1}\}$. Aplicando la afirmación con $a = x^{-1}$, $b = xy$, $c = v$, $d = v^{-1}u^{-1}$, concluimos que $\sigma(v, v^{-1}u^{-1}) = 0$. Por (2.7), $\sigma(v^{-1}, u^{-1}) = 0$ y por (2.6), $\sigma(u, v) = 0$. \square

Por la Observación 2.1.3, es claro que $M(G) \subseteq pM(G)$. No obstante, el siguiente ejemplo muestra que esta contención puede ser estricta.

Ejemplo 2.2.10. Sea $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, el grupo abeliano de orden 8 con todos sus elementos no nulos de orden 2. Es claro que G es un \mathbb{Z}_2 -espacio vectorial de dimensión 3. Luego, existen $a, b, c \in G$ tales que $G = \langle a, b, c \rangle$. Considere $H = \langle b, c \rangle$ y $K = ((H \setminus 1) \times (H \setminus 1)) \setminus \Delta$, donde Δ es la diagonal del producto cartesiano. Afirmamos que $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$, dada por

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \notin K, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in K. \end{cases}$$

es un conjunto factor parcial pero no es un conjunto factor.

En efecto, es claro que σ es idempotente y $\sigma(1, 1) = 1$. Supongamos por absurdo que σ no es un conjunto factor parcial, por el Teorema 2.2.9 y dado que en G todo elemento es su propio inverso, tenemos que existen $x, y \in G$ tales que $(x, y) \notin K$ pero alguno de los siguientes pares ordenados $(xy, y)(y, x), (x, 1)$ pertenecen a K . Claramente, esto es imposible para los dos últimos pares. Ahora bien, si $(xy, y) \in K$,

entonces $xy, y \in H \setminus 1$ y $xy \neq y$. Esto implica que $x = xyy \in H \setminus 1$ y $x \neq y$. Luego, $(x, y) \in K$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, σ es un conjunto factor parcial.

Finalmente, tenemos que $\sigma(ba, ac) = \sigma(b, a) = 1$; pero $\sigma(b, c) = 0$. De esto, la ecuación del 2-cociclo no se cumple para $x = b, y = a, z = ac$ y por lo tanto; $\sigma \notin Z^2(G, \mathbb{K}^*)$.

En la siguiente proposición, estudiamos las \mathcal{H} -clases de los conjuntos factores parciales idempotentes.

Proposición 2.2.11. *Sean σ un conjunto factor parcial idempotente de G y X su dominio. Considere $pm_X(G) = \{\tau \in pm(G) : \text{dom } \tau = X\}$, entonces $\mathcal{H}_\sigma = pm_X(G)$.*

Demostración. Sea $\tau \in pm(G)$ tal que $\tau\tau' = \sigma$. Como $\text{dom } \tau = \text{dom } \tau\tau'$, tenemos que $\text{dom } \tau = X$ y por consiguiente $\tau \in pm_X(G)$. Recíprocamente, sea $\tau \in pm(G)$ tal que $\text{dom } \tau = X$, entonces $\tau\tau'(x, y) = 1$, si $(x, y) \in X$ y $\tau\tau'(x, y) = 0$, si $(x, y) \notin X$. Por el Teorema 2.2.9, $\tau\tau'$ es un conjunto factor parcial idempotente con dominio X , esto es, $\tau\tau' = \sigma$. \square

Usando el Teorema 2.2.9, caracterizaremos los dominios de conjuntos factores parciales, para esto definimos las siguientes transformaciones de $G \times G$:

$$g : (x, y) \mapsto (xy, y^{-1}), \quad (2.11)$$

$$h : (x, y) \mapsto (y^{-1}, x^{-1}), \quad (2.12)$$

$$t : (x, y) \mapsto (x, 1). \quad (2.13)$$

Estas funciones satisfacen las relaciones:

$$g^2 = h^2 = 1, \quad (gh)^3 = 1, \quad t^2 = t, \quad gt = t, \quad tght = thgh, \quad tht = 0, \quad (2.14)$$

donde 1 es la función identidad en $G \times G$ y 0 es la función $(x, y) \mapsto (1, 1)$.

Sea \mathcal{T} el semigrupo abstracto generado por los elementos g, h, t con las relaciones definidas en (2.14). Las funciones (2.11)-(2.13) determinan una acción de \mathcal{T} en $G \times G$.

Definición 2.2.12. Sea $X \subseteq G \times G$. Decimos que X es un \mathcal{T} -**subconjunto** de $G \times G$ si para todo $\alpha \in \mathcal{T}$ y $(x, y) \in X$ se tiene que $\alpha(x, y) \in X$.

De esta forma, podemos reformular el Teorema 2.2.9 de la siguiente manera:

Corolario 2.2.13. Una función idempotente $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\sigma(1,1) = 1$, es un conjunto factor parcial si, y solo si, $\text{dom } \sigma$ es un \mathcal{T} -subconjunto de $G \times G$.

Denotamos por $C(G)$ a la colección de los \mathcal{T} -subconjuntos de $G \times G$. Ordenando a $C(G)$ parcialmente con la inclusión de conjuntos, tenemos que dados $X, Y \in C(G)$, $X \cap Y \in C(G)$ y si $S \in C(G)$ tal que $S \subseteq X$, $S \subseteq Y$ entonces $S \subseteq X \cap Y$. Luego, $X \cap Y = X \wedge Y$ y por lo tanto, $C(G)$ es un semirretículo.

Corolario 2.2.14. Sea G un grupo, entonces $E(pm(G)) \cong C(G) \cong E(pM(G))$.

Demostración. Definamos $f : E(pm(G)) \rightarrow C(G)$, dada por $f(\sigma) = \text{dom } \sigma$, para cada σ conjunto factor parcial idempotente. Del corolario anterior, se tiene que f está bien definida y es sobreyectiva. Es claro que f es inyectiva. Además, sean $\sigma_1, \sigma_2 \in E(pm(G))$ y X, Y sus respectivos dominios, entonces $\sigma_1 \sigma_2$ es el conjunto factor idempotente cuyo dominio es $X \cap Y$. Luego, f es un homomorfismo de semigrupos y por lo tanto $E(pm(G)) \cong C(G)$. Por último, siguiendo la prueba del Corolario 1.5.14, tenemos que la función $\pi : E(pm(G)) \rightarrow E(pM(G))$, dada por $\pi(\sigma) = \text{cls}(\sigma)$, es un isomorfismo de semigrupos y por lo tanto, $E(pm(G)) \cong E(pM(G))$. \square

Teorema 2.2.15. ¹ Los semigrupos $pm(G)$ y $pM(G)$ son semirretículos de grupos abelianos

$$pm(G) = \bigcup_{X \in C(G)} pm_X(G), \quad pM(G) = \bigcup_{X \in C(G)} pM_X(G),$$

donde $pm_X(G) = \{\sigma \in pm(G) : \text{dom } \sigma = X\}$ y $pM_X(G) = pm_X(G) / \sim$.

Demostración. Por el Teorema 1.3.20, tenemos que

$$pm(G) = \bigcup_{\sigma \in E(pm(G))} \mathcal{H}_\sigma, \quad pM(G) = \bigcup_{\text{cls}(\sigma) \in E(pM(G))} \mathcal{H}_{\text{cls}(\sigma)}$$

De la Proposición 2.2.11 y el Corolario 2.2.14, tenemos que

$$pm(G) = \bigcup_{X \in C(G)} pm_X(G).$$

Sea $\text{cls}(\sigma) \in pM(G)$ idempotente. Por el Corolario 2.2.14, podemos asumir que σ es un conjunto factor parcial idempotente. Sea $X = \text{dom}(\sigma)$, afirmamos que $\mathcal{H}_{\text{cls}(\sigma)} = pM_X(G)$. En efecto, sea $\text{cls}(\tau) \in pM(G)$ tal que $\text{cls}(\tau) \text{cls}(\tau') = \text{cls}(\sigma)$. Como $\tau \tau'$ y σ son

idempotentes, esto implica que $\tau\tau' = \sigma$. Es decir, $\tau \in pm_X(G)$. La otra contencia es clara. Usando esta igualdad y el Corolario 2.2.14 concluimos que

$$pM(G) = \bigcup_{X \in \mathcal{C}(G)} pM_X(G). \quad (2.15)$$

□

Los grupos abelianos $pM_X(G)$ en la igualdad (2.15) se conocen como las **componentes** del multiplicador parcial de Schur. En el caso particular cuando $X = G \times G$, la componente $pM_{G \times G}(G)$ es llamada **la componente total**.

Ahora, definiremos un semigrupo cociente de $E(G)$, el cual nos permitirá obtener resultados más fuertes sobre los conjuntos factores parciales.

Sea G un grupo, denotamos por $N_3(G)$ al ideal

$$\{(A, a) \in E(G) : |A| \geq 4\} \trianglelefteq E(G)$$

y a $E_3(G)$ al semigrupo cociente $E(G)/N_3(G)$. Si $|G| \leq 3$, entonces $N_3(G) = \emptyset$. En este caso, $E_3(G) = \{\emptyset\} \cup E(G)$. Por simplicidad, escribiremos E y E_3 en lugar de $E(G)$ y $E_3(G)$, respectivamente. Es claro que como E es un semigrupo inverso, E_3 al ser un semigrupo cociente, también lo es.

A continuación, veremos que es posible obtener cada conjunto factor parcial de G a partir de un conjunto factor de E_3 .

Proposición 2.2.16. ³ *Una función $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ es un conjunto factor parcial si, y solo si, existe un conjunto factor $\rho \in m(E_3)$ tal que*

$$\forall x, y \in G \quad (x, y) \in \text{dom } \sigma \iff ([x], [y]) \in \text{dom } \rho \quad (2.16)$$

$$\forall x, y \in G \quad (x, y) \in \text{dom } \sigma, \quad \sigma(x, y) = \frac{\rho([x], [y])\rho([x^{-1}], [x][y])}{\rho([x^{-1}], [xy])}. \quad (2.17)$$

Demostración. Sea $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ un conjunto factor. Entonces existe $\rho \in m(E)$ que cumple las condiciones de la Proposición 2.2.2. Por otro lado, de (1.5) existe I ideal de E tal que $\rho \in m_I(E)$. Como I y N_3 son ideales de E_3 , tenemos que $N_3 \cup I$ es un ideal

de E . Luego, podemos considerar el homomorfismo $\psi : m_I(E) \rightarrow m_{N_3 \cup I}(E)$, dado por la restricción de dominios de los conjuntos factores. Además, es claro que $m_{N_3 \cup I}(E) \cong m_{(N_3 \cup I)/N_3}(E_3) \subseteq m(E_3)$. De esta forma, obtenemos un homomorfismo entre $m_I(E)$ y $m(E_3)$, que asigna a cada $\rho \in m_I(E_3)$ al elemento $\rho' \in m(E_3)$ definido por:

$$\rho'(A, B) = \begin{cases} \rho(A, B) & \text{si } AB \notin N_3 \cup I, \\ 0 & \text{si } AB \in N_3 \cup I. \end{cases}$$

Como

$$[x][y] = (\{1, x, xy\}, xy) \notin N_3,$$

para todo $x, y \in G$, se sigue $\rho'([x], [y]) = 0 \iff \rho([x], [y]) = 0$. Igualmente, dado que $[x^{-1}][x][y] = [x^{-1}][xy] \notin N_3$ tenemos que

$$\rho'([x^{-1}], [x][y]) = 0 \iff \rho([x^{-1}], [x][y]) = 0.$$

Así, podemos reemplazar ρ por ρ' y obtener lo deseado.

Recíprocamente, supongamos que existe $\rho \in m(E_3)$ que cumple las dos condiciones de esta proposición. Considere $\rho' : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$, dado por:

$$\rho'(A, B) = \begin{cases} \rho(A, B) & \text{si } AB \notin N_3, \\ 0 & \text{si } AB \in N_3. \end{cases}$$

Note que

$$\rho'(A, B) = 0 \iff \rho'(1, AB) = 0,$$

pues si $AB \in N_3$, entonces $1(AB) \in N_3$ y por tanto $\rho'(A, B) = \rho'(1, AB) = 0$. Por otro lado, si $AB \notin N_3$, se cumple que $\rho'(A, B) = \rho(A, B)$ y $\rho'(1, AB) = \rho(1, AB)$, por lo que el resultado se sigue del hecho que $\rho(A, B) = 0 \iff \rho(1, AB) = 0$. Similarmente, se prueba que se cumple la ecuación de 2-cociclo. Así, por el Teorema 1.5.9, $\rho' \in m(E)$. Análogamente a lo hecho en la implicación anterior, se puede reemplazar ρ por ρ' y por la Proposición 2.2.2, σ es un conjunto factor parcial. \square

Concluimos esta sección estableciendo una correspondencia entre los \mathcal{T} -subconjuntos de $G \times G$ y los ideales de E_3 . Para ello, utilizaremos el siguiente resultado.

Lema 2.2.17. Sea $\sigma \in pm_{G \times G}(G)$. Entonces existe $\rho \in m_0(E_3)$ que cumple las condiciones de la Proposición 2.2.16.

Demostración. Sea $\sigma \in pm_{G \times G}(G)$. Por la Proposición 2.2.16, existe $\rho \in m(E_3)$ que cumple (2.16) y (2.17). Además, por (1.5), existe I ideal de E_3 tal que $\rho \in m_I(E_3)$. Usando (2.16) y (1.6), tenemos

$$\forall x, y \in G, [x][y] \notin I. \quad (2.18)$$

Supongamos que $I \neq \emptyset$. Sea J la preimagen de I bajo la proyección canónica $\pi : E \rightarrow E_3$. Afirmamos que $J = N_3$. Como I es un ideal no vacío de E_3 , entonces $0 \in I$; lo que implica que $N_3 \subseteq J$. Veamos que $J \subseteq N_3$. Sea $(A, a) \in E$ con $|A| \leq 2$, entonces tenemos las siguientes posibilidades:

$$(A, a) = (\{1, a\}, a) = [a] = [a][1],$$

$$(A, a) = (\{1, a\}, 1) = [a][a^{-1}].$$

$$(A, a) = (\{1\}, 1) = [1].$$

Por (2.18), $(A, a) \notin J$. Sea $(A, x) \in E$ con $|A| = 3$, entonces $A = \{1, a, b\}$ y se tienen las siguientes opciones:

$$(A, x) = (A, a) = (\{1, b\}, b)(\{1, b^{-1}a\}, b^{-1}a) = [b][b^{-1}a] \quad (2.19)$$

$$(A, x) = (A, b) = (\{1, a\}, a)(\{1, a^{-1}b\}, a^{-1}b) = [a][a^{-1}b] \quad (2.20)$$

$$(A, x) = (A, 1). \quad (2.21)$$

Concluimos que las dos primeras opciones de $(A, x) \notin J$, por (2.18). Además, $(A, 1)(A, a) = (A, a) \notin J$ y como J es un ideal, tenemos que $(A, 1) \notin J$. Así, hemos mostrado que $J \subseteq N_3$. Por lo tanto, $J = N_3$, que implica $I = 0$; es decir, $\rho \in m_0(E_3)$.

Finalmente, veamos el caso $I = \emptyset$. Por (1.6), $\rho(A, B) \neq 0$, para todo $A, B \in E_3$. Definamos $\rho' : E_3 \times E_3 \rightarrow \mathbb{K}$, dado por:

$$\rho'(A, B) = \begin{cases} \rho(A, B) & \text{si } AB \neq 0, \\ 0 & \text{si } AB = 0. \end{cases}$$

Usando el Teorema 1.5.9, concluimos que $\rho' \in m(E_3)$ y por (1.6), se tiene que $\rho' \in m_0(E_3)$. Dado que $[x][y] \notin N_3$, para todo $x, y \in G$, podemos reemplazar ρ por ρ' en las condiciones de la proposición anterior. \square

Sean I, J ideales no vacíos y propios de E_3 . Entonces $1 \notin I \cup J$ y por lo tanto; $I \cup J \neq E_3, \emptyset$. Luego, $Y(E_3) \setminus \{E_3, \emptyset\}$ es un semigrupo con la unión de ideales.

Teorema 2.2.18. *Existe un isomorfismo $\iota : C(G) \rightarrow Y(E_3) \setminus \{E_3, \emptyset\}$ de semigrupos.*

Demostración. Sea X un \mathcal{T} -subconjunto de $G \times G$. Sea $\sigma \in pm_X(G)$, entonces existe $\rho \in m_I(E_3)$, para algún I ideal de E_3 , que cumple las condiciones de la Proposición 2.2.16. Definamos $\iota : C(G) \rightarrow Y(E_3) \setminus \{E_3, \emptyset\}$, por $\iota(X) = I$.

Primero, veamos que ι está bien definida. Tenemos que $(x, y) \in X \iff [x][y] \notin I$. Esto implica que si $X \neq G \times G$, entonces $I \neq \emptyset$. Por el Lema 2.2.17, si $X = G \times G$, entonces podemos tomar $I = 0$. Luego, en cualquier caso $I \neq \emptyset$. Además, como $(1, 1) \in \text{dom } \sigma$, $I \neq E_3$. Por otro lado, si tomamos $\sigma' \in pm_X(G)$, entonces existe $\rho' \in m(E_3)$ tal que $(x, y) \in X \iff ([x], [y]) \in \text{dom } \rho'$. Tenemos que existe $J \in Y(E_3)$ tal que $\rho' \in m_J(E_3)$. Por consiguiente,

$$(x, y) \in X \iff [x][y] \notin J, \forall x, y \in G.$$

Así,

$$[x][y] \in I \iff [x][y] \in J, \forall x, y \in G. \quad (2.22)$$

Por el Lema 2.2.17, tenemos que si $X = G \times G$, entonces $I = J = 0$. Supongamos que $X \neq G \times G$, entonces $\emptyset \neq I, J \neq 0$. Queremos ver que $I = J$. Sea $(A, a) \in I \cap E_3 \setminus N_3$. Usando todas las posibilidades para (A, a) descritas en el lema anterior y (2.22), concluimos que $(A, a) \in J$. Luego, $I \subseteq J$. Similarmente, $J \subseteq I$. Así, $I = J$ y ι esta bien definida.

Ahora, probaremos que ι es inyectiva. Sean $X, Y \in C(G)$ tales que $\iota(X) = \iota(Y) = I$, entonces

$$(x, y) \in X \iff [x][y] \notin I \iff (x, y) \in Y.$$

Por lo tanto, $X = Y$. La sobreyectividad de ι se sigue de la Proposición 2.2.16. Finalmente, sean $X, Y \in C(G)$, $\sigma_1 \in pm_X(G)$, $\sigma_2 \in pm_Y(G)$, con sus respectivos conjuntos factores de E_3 $\rho_1 \in m_I(E_3)$, $\rho_2 \in m_J(E_3)$. Entonces, $\sigma_1\sigma_2 \in pm_{X \cap Y}(G)$ y $\rho_1\rho_2$ es su correspondiente

conjunto factor de E_3 . Por (1.7), tenemos que $\rho_1\rho_2 \in m_{I \cup J}(E_3)$. Luego, $\iota(X \cap Y) = I \cup J = \iota(X) \cup \iota(Y)$. Así, ι es un isomorfismo de semigrupos. \square

2.3. Conjuntos factores de E_3

Por lo visto en la sección anterior, estamos interesados en estudiar $m(E_3)$. En adelante, trabajaremos con \mathbb{K} un cuerpo algebraicamente cerrado. El objetivo de esta sección, es describir cada subgrupo $m_I(E_3)$ de $m(E_3)$. Para esto, empezaremos hablando de \mathcal{J} -clases del semigrupo de Exel.

Definición 2.3.1. Sea S un monoide. Definimos la relación de equivalencia \mathcal{J} en S como sigue:

$$(x, y) \in \mathcal{J} \iff SxS = SyS$$

Cada clase J se convierte en un semigrupo, denotado por J^0 , que se obtiene al añadirle un elemento cero extra a J con la siguiente operación:

$$x \circ y = \begin{cases} xy & \text{si } xy \in J, \\ 0 & \text{si } xy \notin J. \end{cases}$$

Dado $\rho \in m(S)$ y J una \mathcal{J} -clase de S , podemos restringir ρ a J de la siguiente manera:

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y) & \text{si } xy \in J, \\ 0 & \text{si } xy \notin J. \end{cases}$$

Usando el Teorema 1.5.9, es fácil verificar que ρ_1 es un conjunto factor de J^0 .

Proposición 2.3.2. Sea $(A, a) \in E$, entonces la \mathcal{J} -clase de (A, a) es

$$J_{(A,a)} = \{(B, b) \in E : \exists x \in G \text{ tal que } xA = B\}.$$

En particular, para todo $(B, b) \in J_{(A,a)}$, se tiene que $|A| = |B|$.

Demostración. Ver ³, Corolario 2. \square

Por la Proposición 2.3.2, tenemos que $J_{(A,a)}$ no depende de a . Por consiguiente, esta clase será denotada por J_A . Ahora estudiaremos la estructura particular que poseen estas clases. Para este fin, hablaremos de semigrupos completamente 0-simples.

Definición 2.3.3. Sea S un semigrupo con 0 . Decimos que S es un semigrupo completamente 0-simple si:

- i) $S^2 \neq 0$,
- ii) S no contiene ideales propios no nulos,
- iii) S contiene un idempotente primitivo no nulo, esto es, un idempotente minimal con respecto al orden $e \leq f \iff ef = fe = e$, definido en los idempotentes de S .

Teorema 2.3.4. (Teorema de Rees-Sushkevich) Sean H un grupo, I, Λ conjuntos arbitrarios, 0 un símbolo y $P = (p_{\lambda,i})_{\lambda \in \Lambda, i \in I}$ una matriz de tamaño $|\Lambda| \times |I|$ con entradas en $H \cup \{0\}$ y cuyas filas y columnas son no nulas. Denotamos por $S^0(H; I; \Lambda; P)$ al conjunto

$$\{\langle i, h, \lambda \rangle : i \in I, h \in H, \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}.$$

Asimismo, definimos la siguiente operación entre los elementos de este conjunto:

$$\langle i, g, \lambda \rangle \langle j, h, \mu \rangle = \begin{cases} \langle i, gp_{\lambda,i}h, \mu \rangle & \text{si } p_{\lambda,i} \neq 0, \\ 0 & \text{si } p_{\lambda,i} = 0. \end{cases}$$

$$\langle i, g, \lambda \rangle \cdot 0 = 0 \cdot \langle i, g, \lambda \rangle = 0.$$

Se tiene que $S^0(H; I; \Lambda; P)$ es un semigrupo completamente 0-simple. Recíprocamente, si S es un semigrupo completamente 0-simple, entonces existen H, I, Λ, P tales que S es isomorfo a $S^0(H; I; \Lambda; P)$.

Demostración. Ver ¹¹, Teorema 3.2.3. □

Sea A un subconjunto finito de G . El estabilizador de A es el grupo

$$\text{St } A = \{x \in G : xA = A\}.$$

Considere la siguiente acción del grupo $\text{St } A$ en el conjunto A dada por:

$$\begin{aligned} \text{St } A \times A &\longrightarrow A \\ (x, a) &\longmapsto xa. \end{aligned}$$

Para cada $a \in A$, consideramos su órbita $\mathcal{O}_a = \{xa : x \in \text{St } A\}$. Llamando $A/\text{St } A$ a un conjunto completo de representantes de las distintas órbitas, tenemos que

$$A = \bigsqcup_{a \in A/\text{St } A} \mathcal{O}_a.$$

Es claro que para todo $a \in A$, $|\mathcal{O}_a| = |\text{St } A|$ y por lo tanto, $|A| = |A/\text{St } A| |\text{St } A|$. Así, $|\text{St } A|$ divide a $|A|$.

Proposición 2.3.5. *Si J_A es una \mathcal{J} -clase del semigrupo de Exel, entonces J_A^0 es un semigrupo completamente 0-simple de la forma*

$$S^0(\text{St } A; A/\text{St } A; A/\text{St } A, Id),$$

donde I_d es la matriz identidad de tamaño $|A/\text{St } A| \times |A/\text{St } A|$.

Demostración. Ver ³, Lema 3. □

Además, en ¹⁷ se probó que si $T = S^0(G; I, \Lambda, P)$, entonces $M_0(T) = H^2(G, \mathbb{K}^*)$. Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos que $M_0(J_A^0) = H^2(\text{St } A, \mathbb{K}^*)$.

Lema 2.3.6. ⁴ *Sea $\rho \in m_I(E_3)$. Entonces existe ρ' un conjunto factor equivalente a ρ tal que todas las restricciones de ρ' en cada \mathcal{J} -clase que no esta contenida en I son triviales (es decir, sus únicos valores son 0 y 1).*

Demostración. Es claro que $E = \bigcup_{(A,a)} J_A$ con $A \subseteq G$, A finito y $1 \in A$. Además, como N_3 es un ideal de E , si $(A, a) \notin N_3$ y $(B, b) \in J_A$, entonces $(B, b) \notin N_3$. Luego,

$$E_3 = E \setminus N_3 \cup \{0\} = \bigcup_{(A,a) \in E, |A| \leq 3} J_A \cup \{0\}.$$

Similarmente, si I es ideal de E_3 , entonces

$$E_3/I = E_3 \setminus I \cup \{0\} = \bigcup_{(A,a) \notin I} J_A \cup \{0\}.$$

¹⁷ B. NOVIKOV. "On projective representations of semigroups". En: *Dopovidi AN USSR* 6 (1979), págs. 472-475.

De esta forma,

$$m_I(E_3) \cong m_0(E_3/I) = m_0 \left(\bigcup_{(A,a) \notin I} J_A \cup \{0\} \right).$$

Dado que $|\text{St } A|$ divide a $|A|$ y $|A| \leq 3$, tenemos que $|\text{St } A| = 1, 2$ o 3 . Por lo tanto, $\text{St } A$ es un grupo cíclico. Por otro lado, según ¹⁰, Teorema 1.5.2, se tiene que, si G es un grupo cíclico de n elementos, entonces $H^2(G, \mathbb{K}^*) \cong \mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^n$. Así,

$$M_0(J_A^0) = H^2(\text{St } A, \mathbb{K}^*) \cong \mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^{|\text{St } A|},$$

pero \mathbb{K} es algebraicamente cerrado; luego $(\mathbb{K}^*)^{|\text{St } A|} = \mathbb{K}^*$ y por lo tanto, $M_0(J_A^0)$ es trivial. Esto implica, que la restricción de $\rho \in m_I(E_3)$ a cualquier \mathcal{J} -clase $J_A \not\subseteq I$ es equivalente al conjunto factor identidad $\epsilon : J_A \times J_A \rightarrow \mathbb{K}$ dado por:

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy \in J_A, \\ 0 & \text{si } xy \notin J_A. \end{cases}$$

Así, para cada A tal que $(A, a) \in E_3 \setminus I$ existe una función $\alpha_A : J_A \rightarrow \mathbb{K}^*$ tal que

$$\forall x, y \in J_A \quad xy \in J_A \implies \rho(x, y) = \alpha_A(y)\alpha_A(xy)^{-1}\alpha_A(x).$$

Como la intersección de dos \mathcal{J} -clases diferentes es vacía, podemos escoger un conjunto completo de representantes de \mathcal{J} -clases no contenidas en I , con sus respectivas funciones α_A , para obtener una función $\alpha : (E_3/I) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}^*$. Finalmente, considere

$$\rho'(x, y) = \alpha(xy)\alpha(y)^{-1}\alpha(x)\rho(x, y),$$

para todo $x, y \in E_3/I$ con $xy \notin I$. Así, ρ' es un conjunto factor equivalente a ρ y todas sus restricciones a J_A son triviales, es decir, si $x, y, xy \in J_A$, entonces $\rho'(x, y) = 1$. \square

Denotamos por \overline{N}_2 , al subconjunto de E_3/I que consiste del elemento cero y todas las \mathcal{J} -clases J_A con $|A| = 3$, que no están contenidas en I . Como consecuencia del Lema 4 de ³, tenemos que si $|A| = 3$ y $(A, a) \notin I$, entonces $J_A \cup \{0\}$ es un ideal de E_3/I . Luego, \overline{N}_2 es una unión de ideales de E_3/I y por lo tanto, \overline{N}_2 es un ideal de E_3/I . Por otro lado,

considere D , el conjunto de idempotentes del semigrupo inverso E_3/I ; es fácil ver que

$$D = \{(A, a) \in E_3 \setminus I : a = 1\} \cup \{0\}.$$

Se tiene que D es un subsemigrupo conmutativo (semirretículo) de E_3/I y por consiguiente, la unión $\bar{D} = D \cup \bar{N}_2$ es un subsemigrupo de E_3/I .

Lema 2.3.7. *Sean $x \in \bar{N}_2$, $e \in D$. Si $xe \neq 0$, entonces $xe = x$; si $ex \neq 0$, entonces $ex = x$.*

Demostración. Supongamos que $xe \neq 0$. Entonces e es un idempotente no nulo y por consiguiente, podemos escribir $x = (P, p)$ y $e = (Q, 1)$. Así, $xe = (P \cup pQ, p)$, pero como \bar{N}_2 es un ideal, $xe \in \bar{N}_2$. Como $xe \neq 0$, por la Proposición 2.3.2, se tiene que $|P \cup pQ| = 3$; sin embargo, $|P| = 3$ y por tanto, $P \cup pQ = P$. Es decir, $xe = x$. Análogamente, probamos que si $ex \neq 0$, entonces $ex = x$. \square

Con ayuda de los dos lemas anteriores, demostramos uno de los resultados más importantes sobre estos conjuntos factores.

Teorema 2.3.8. ⁴ *Cualquier conjunto factor $\rho \in m_I(E_3)$ es equivalente a un conjunto factor ρ' , cuyas restricciones a \bar{D} y todas las \mathcal{J} -clases que no están contenidas en I son triviales.*

Demostración. Sea $\rho \in m_I(E_3)$, por el Lema 2.3.6 tenemos que existe $\rho' \in m_I(E_3) \cong m_0(E_3/I)$ equivalente a ρ tal que sus restricciones a las \mathcal{J} -clases son triviales. Afirmamos que si $|A| = |B| = 3$ y $J_A \neq J_B$, entonces $J_A J_B = 0$. En efecto, supongamos por absurdo que existen $(P, p) \in J_A$ y $(Q, q) \in J_B$ tales que $(P, p)(Q, q) = (P \cup pQ, pq) \neq 0$. Como este producto pertenece a E_3 , entonces $|P \cup pQ| \leq 3$. Por otro lado, de la Proposición 2.3.2 tenemos que como $|A| = 3$ y $(P, p) \in J_A$, entonces $|P| = 3$. Similarmente, concluimos que $|pQ| = 3$. Luego, $P = pQ$ y así $(P, p) \in J_Q$; esto implica que $J_A = J_B$. Un absurdo.

Por la afirmación anterior, tenemos que la restricción de ρ' a \bar{N}_2 es trivial. Por otro lado, en ¹⁷ se probó que $M_0(S)$ es trivial para cualquier semirretículo S . Por lo tanto, existe una función $\alpha : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}^*$ tal que

$$\forall e, f \in D, ef \neq 0 \implies \rho'(e, f) = \alpha(f)\alpha(ef)^{-1}\alpha(e).$$

Probaremos que para todo $e \in D \setminus \{0\}$, $\alpha(e) = 1$. En efecto, tomando $e = f$ en la ecuación anterior, concluimos que $\rho'(e, e) = \alpha(e)$. Además, e es un idempotente no nulo de E_3/I ; luego $e \in J_A$ para algún $J_A \not\subseteq I$. Esto implica, que $\rho'(e, e) = 1$; es decir, $\alpha(e) = 1$. De esta

forma, hemos probado que si $ef \neq 0$, entonces $\rho'(e, f) = 1$; esto es, la restricción de ρ' a D es trivial.

Finalmente, resta probar que las restricciones de ρ' en $\overline{N}_2 \times (D \setminus \overline{N}_2)$ y $(D \setminus \overline{N}_2) \times \overline{N}_2$ son triviales. A continuación, haremos la prueba para el primer caso y el segundo caso es análogo. Sean $x \in \overline{N}_2$, $e \in D \setminus \overline{N}_2$, tales que $xe \neq 0$. Por el Lema 2.3.7, $xe = x$; luego $\rho'(xe, e) = \rho'(x, e) \neq 0$. Por otro lado, de la ecuación cohomológica tenemos que:

$$\rho'(x, e)\rho'(xe, e) = \rho'(x, e)\rho'(e, e).$$

Así,

$$1 = \frac{\rho'(x, e)^2}{\rho'(x, e)\rho'(e, e)} = \rho'(x, e).$$

□

Denotamos por $m'_I \subseteq m_I(E_3)$ al subsemigrupo conformado por los conjuntos factores $\rho \in m_I(E_3)$, cuyas restricciones a \overline{D} y todas las \mathcal{J} -clases que no están contenidas en I son triviales. Para finalizar esta sección, caracterizaremos los elementos de m'_I .

Teorema 2.3.9. ⁴ *Sea $\rho \in m'_I$, entonces existe una función $v : E_3 \times E_3 \rightarrow \mathbb{K}$, que satisface las siguientes propiedades:*

$$v(x, y) = 0 \iff x^{-1}y \in I, \quad (2.23)$$

$$v(x, x) = 1, \text{ para todo } x \in E_3 \setminus I, \quad (2.24)$$

$$v(x, y)v(y^{-1}x, y^{-1}) = 1, \text{ si } x^{-1}y \notin I; \quad (2.25)$$

y para todo $x, y \in E_3$,

$$v(x, y) = v(xx^{-1}, y), \quad (2.26)$$

$$\rho(x, y) = v(xy, x)v(x^{-1}, y). \quad (2.27)$$

Recíprocamente, sea $v : E_3 \times E_3 \rightarrow \mathbb{K}$ una función que verifica (2.23)-(2.26). Defina

$$\begin{aligned} \rho : E_3 \times E_3 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto v(xy, x)v(x^{-1}, y) \end{aligned}$$

entonces $\rho \in m'_I$.

Demostración. Ver ⁴, Teorema 4.6 y Teorema 4.9. □

Proposición 2.3.10. Sean $v : E_3 \times E_3 \rightarrow \mathbb{K}$ una función, que verifica (2.23)-(2.26) y $x = (A, a), y = (B, b) \in E_3$ tales que $x^{-1}y \notin I$.

I) Si y es idempotente, entonces $v(x, y) = 1$

II) Si $A \subseteq B$, entonces $v(x, y) = 1$.

Demostración. Ver ³, Corolario 4.8. □

2.4. Caracterización de los conjuntos factores parciales

Sea $X \in C(G)$. Considere $I = \iota(X)$, el ideal de E_3 asociado a X . Usando la descripción obtenida de los elementos de m'_I , presentaremos una caracterización de los elementos de $pm_X(G)$ (ver Teorema 2.4.4) que es independiente del concepto de representación parcial proyectiva. Iniciaremos esta sección con algunos resultados técnicos que servirán como base para la demostración del teorema principal.

Teorema 2.4.1. ⁴ Sea $\sigma \in pm_X(G)$. Entonces existe σ' equivalente a σ tal que

$$\sigma'(a, b) = \frac{\lambda(a^{-1}, b)\lambda(ab, a)}{\lambda(a, ab)}, \quad \forall (a, b) \in X, \quad (2.28)$$

donde $\lambda : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ es una función que satisface

$$\lambda(a, b) = 0 \iff [a^{-1}][b] \in I, \quad (2.29)$$

$$\lambda(a, 1) = \lambda(1, a) = 1, \text{ si } [a] \notin I, \quad (2.30)$$

$$\lambda(a, b)\lambda(b^{-1}a, b^{-1}) = 1, \quad \forall (a^{-1}, b) \in X. \quad (2.31)$$

Demostración. Sea $\sigma \in pm_X(G)$. Entonces existe $\rho \in m_I(E_3)$ que satisface (2.16) y (2.17). Por el Teorema 2.3.8, existe un conjunto factor $\rho' \in m'_I$ equivalente a ρ . Luego, existe una función $\eta : E_3 \rightarrow \mathbb{K}^*$ tal que

$$\rho'(x, y) = \eta(y)\eta(xy)^{-1}\eta(x)\rho(x, y), \quad \forall x, y \in E_3.$$

Considere $\sigma' : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ dada por:

$$\sigma'(a, b) = \begin{cases} \frac{\rho'([a], [b])\rho'([a^{-1}], [a][b])}{\rho'([a^{-1}], [ab])} & \text{si } (a, b) \in X, \\ 0 & \text{si } (a, b) \notin X. \end{cases}$$

Por la Proposición 2.2.16, $\sigma' \in pm(G)$. Afirmando que σ' es equivalente a σ . En efecto, sea $(a, b) \in X$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma'(a, b) &= \frac{\rho'([a], [b])\rho'([a^{-1}], [a][b])}{\rho'([a^{-1}], [ab])} \\ &= \frac{\eta([b])\eta([a][b])^{-1}\eta([a])\eta([a][b])\eta([a^{-1}][a][b])^{-1}\eta([a^{-1}])}{\eta([ab])\eta([a^{-1}][ab])^{-1}\eta([a^{-1}])}\sigma(a, b) \\ &= \frac{\eta([b])\eta([a])\eta([a^{-1}][ab])^{-1}}{\eta([ab])\eta([a^{-1}][ab])^{-1}}\sigma(a, b) \\ &= \eta([b])\eta([ab])^{-1}\eta([a])\sigma(a, b). \end{aligned}$$

Definamos $\delta : G \rightarrow \mathbb{K}^*$ por $\delta(a) = \eta([a])$, para cada $a \in G$. Dado que para todo $(a, b) \notin X$, $\sigma'(a, b) = \sigma(a, b) = 0$, tenemos que $\sigma'(a, b) = \delta(b)\delta(ab)^{-1}\delta(a)\sigma(a, b)$, para todo $a, b \in G$. Esto es, σ y σ' son equivalentes.

Por otro lado, por el Teorema 2.3.9, existe una función $v : E_3 \times E_3 \rightarrow \mathbb{K}$, que satisface las propiedades (2.23)-(2.27). De esta forma, por (2.27) tenemos que para cada $(a, b) \in X$:

$$\sigma'(a, b) = \frac{v([a][b], [a])v([a^{-1}], [b])v([a^{-1}][a][b], [a^{-1}])v([a], [a][b])}{v([a^{-1}][ab], [a^{-1}])v([a], [ab])}.$$

Recordando $[a] = (\{1, a\}, a)$, $[a][b] = (\{1, a, ab\}, ab)$ y además, como $(a, b) \in X$, se tiene que $(a^{-1}, ab) \in X$. Sin embargo, por (2.16), esto implica que $[a^{-1}][a][b] = [a^{-1}][ab] \notin I$. Así, tomando $x = [a], y = [a][b]$ en el ítem ii) de la Proposición 2.3.10 tenemos que $v([a], [a][b]) = 1$. De igual forma, $v([a^{-1}][a][b], [a^{-1}]) = v([a^{-1}][ab], [a^{-1}])$ y por lo tanto;

$$\sigma'(a, b) = \frac{v([a][b], [a])v([a^{-1}], [b])}{v([a], [ab])}.$$

Tomando $x = [a][b]$ y $y = [a]$, tenemos que $x^{-1}y = [b^{-1}][a^{-1}][a] = [b^{-1}a^{-1}][a] \notin I$, pues

$(b^{-1}a^{-1}, a) \in X$. Luego, por (2.25), se cumple que $1 = v([a][b], [a])v([a^{-1}][a][b], [a^{-1}])$. Similarmente, considerando $x = [ab]$ y $y = [a]$ en la misma ecuación, concluimos que $1 = v([ab], [a])v([a^{-1}][ab], [a^{-1}])$. Así,

$$v([a][b], [a]) = v([ab], [a]). \quad (2.32)$$

Por consiguiente,

$$\sigma'(a, b) = \frac{v([ab], [a])v([a^{-1}], [b])}{v([a], [ab])}.$$

Definamos

$$\begin{aligned} \lambda : G \times G &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a, b) &\longmapsto v([a], [b]) \end{aligned} ,$$

entonces hemos probado (2.28). Ahora, por (2.23)

$$\lambda(a, b) = 0 \iff v([a], [b]) = 0 \iff [a^{-1}][b] \in I.$$

Veamos (2.30). Si $[a] \notin I$, entonces $[a^{-1}] \notin I$, pues en caso contrario $[a] = [a][a^{-1}][a] \in I$. Así, usando (2.24) y (2.25) tenemos que

$$1 = v([1], [a])v([a^{-1}], [a^{-1}]) = v([1], [a]).$$

Por otro lado, del ítem i) de la Proposición 2.3.10, tenemos que $v([a], [1]) = 1$. Así, $\lambda(a, 1) = \lambda(1, a) = 1$. Finalmente, probaremos (2.31). Sea $(a^{-1}, b) \in X$, entonces $(b^{-1}, a) \in X$ y $[a^{-1}][b] \notin I$. Usando (2.32) y (2.25), obtenemos que

$$\lambda(a, b)\lambda(b^{-1}a, b^{-1}) = v([a], [b])v([b^{-1}a], [b^{-1}]) = v([a], [b])v([b^{-1}][a], [b^{-1}]) = 1.$$

□

En la demostración del siguiente teorema, usaremos la notación de la Definición 1.4.18.

Teorema 2.4.2. ⁴ Sean $X \in C(G)$ y $\lambda : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ una función que satisface (2.29)-(2.31). Entonces la función σ definida por (2.28) pertenece a $pm_X(G)$.

Demostración. Sea $I = \iota(X)$. Queremos definir una función $v : E_3 \times E_3 \rightarrow \mathbb{K}$ que cumpla (2.23)-(2.26), para así obtener $\rho \in m'_I$. Definiremos esta función por casos. Sean $x, y \in E_3$.

Caso 1: Si $x^{-1}y \in I$, definimos $v(x, y) = 0$.

Caso 2: Si $x^{-1}y \notin I$; entonces

Caso 2.1: Si y es idempotente o y tiene volumen 3 o $x = [1]$, establecemos $v(x, y) = 1$.

Caso 2.2: Supongamos que $y = [b]$ con $b \neq 1$. Sea A el soporte de x , entonces tenemos las siguientes posibilidades:

Caso 2.2.1: Si $|A| = 2$; es decir, $A = \{1, a\}$ con $a \neq 1$, definimos $v(x, y) = \lambda(a, b)$.

Caso 2.2.2: Si $|A| = 3$, dado que $x^{-1}y \neq 0$, tenemos que el volumen de $x^{-1}y$ es 3. Esto implica que $\{1, b\} \subseteq A$ y por lo tanto, $A = \{1, a, b\}$. Una vez más, definimos $v(x, y) = \lambda(a, b)$.

Veamos que se cumple (2.23). Sea $x^{-1}y \notin I$. Del **caso 2.1**, es claro que $v(x, y) \neq 0$. Ahora, para el **caso 2.2.1**, $x = [a]$ o $x = [a][a^{-1}]$. En la primera opción, concluimos que $[a^{-1}][b] \notin I$. Para la segunda opción, tenemos que $[a][a^{-1}][b] \notin I$, pero esto implica que $[a^{-1}][b] \notin I$. En ambas opciones, $[a^{-1}][b] \notin I$; luego por (2.29), $v(x, y) = \lambda(a, b) \neq 0$. Para el **caso 2.2.2**, si suponemos por absurdo que $[a^{-1}][b] \in I$. Tenemos que (2.19), (2.20) y (2.21) son las opciones para x . En las tres opciones, es fácil verificar que $xx^{-1} = (\{1, a, b\}, 1)$. Así,

$$xx^{-1}y = (\{1, a, b\}, b) = [a][a^{-1}b] = [a][a^{-1}][b] \in I.$$

Esto implica que $x^{-1}y = x^{-1}xx^{-1}y \in I$. Absurdo, luego $[a^{-1}][b] \notin I$, y por consiguiente, $v(x, y) = \lambda(a, b) \neq 0$.

Sea $x \in E_3 \setminus I$. Es claro que $x^{-1}x \notin I$. Por el **caso 2.1**, tenemos que $v(x, x) = 1$, cuando x es idempotente o tenga volumen 1 o 3. Si el volumen de x es 2; como ya mencionamos, $x = [a]$ o $x = [a][a^{-1}]$. Dado que $[a][a^{-1}]$ es idempotente, concluimos que $v([a][a^{-1}], [a][a^{-1}]) = 1$. Por otro lado, para $x = [a]$, tenemos que $[a^{-1}][a] \notin I$; lo que implica que $(a^{-1}, a) \in X$. Por (2.31), tenemos que

$$\lambda(a, a)\lambda(1, a^{-1}) = 1.$$

Sin embargo, $[a^{-1}] \notin I$; luego por (2.30), $\lambda(1, a^{-1}) = 1$. Así, $v([a], [a]) = \lambda(a, a) = 1$. De esta forma, hemos mostrado (2.24).

Ahora, probaremos (2.25). Sean $x, y \in E_3$ tales que $x^{-1}y \notin I$. Examinemos el **caso 2.1**. Si y es idempotente, entonces y^{-1} también es idempotente y si y tiene volumen

3, y^{-1} también. Luego, en estas dos posibilidades $v(x, y) = v(y^{-1}x, y^{-1}) = 1$. Por lo tanto, se vale (2.25). Si $x = [1]$, entonces $y^{-1} \notin I$ y por consiguiente, $v(y^{-1}, y^{-1}) = 1$. Esto implica que se cumpla (2.25) en este caso. A continuación, discutiremos el **caso 2.2**. Tenemos que $y = [b]$ con $1 \neq b \in G$, $x \neq [1]$. Por lo probado en la condición (2.23), $[a^{-1}][b] \notin I$. Si x tiene volumen 2, tenemos que $v(x, y) = \lambda(a, b)$. Además, para ambas opciones de x de volumen 2, $y^{-1}x = (\{1, b^{-1}, b^{-1}a\}, c)$ con $c \in \{b^{-1}a, b^{-1}\}$. Si $a = b$, entonces $y^{-1}x = (\{1, a^{-1}\}, a^{-1})$; por lo tanto el par $(y^{-1}x, y^{-1})$ pertenece al **caso 2.2.1** y así;

$$v(x, y)v(y^{-1}x, y^{-1}) = \lambda(a, a)\lambda(a^{-1}, a^{-1}) = 1.$$

Si $a \neq b$, entonces $(y^{-1}x, y^{-1})$ pertenece al **caso 2.2.2** y por tanto, $v(y^{-1}x, y^{-1}) = \lambda(b^{-1}a, b^{-1})$. Luego, (2.25) es consecuencia de (2.31). Finalmente, si x tiene soporte $\{1, a, b\}$, entonces $v(x, y) = \lambda(a, b)$ y además, el soporte de $y^{-1}x$ es $\{1, b^{-1}, b^{-1}a\}$. De esto, $(y^{-1}x, y^{-1})$ pertenece al **caso 2.2.2** y por tanto, $v(y^{-1}x, y^{-1}) = \lambda(b^{-1}a, b^{-1})$. Una vez más, (2.25) se sigue de (2.31).

Resta probar (2.26). Es fácil ver que para todo $(x, y) \in E_3$, el par (xx^{-1}, y) pertenece al mismo caso que (x, y) ; luego $v(x, y) = v(xx^{-1}, y)$. Por el Teorema 2.3.9, la función $\rho(x, y) = v(xy, x)v(x^{-1}, y) \in m'_I$. Además, si $(a, b) \in X$, entonces $[a][b] \notin I$ y al igual que en la prueba del teorema anterior,

$$\frac{\rho([a], [b])\rho([a^{-1}], [a][b])}{\rho([a^{-1}], [ab])} = \frac{v([ab], [a])v([a^{-1}], [b])}{v([a], [ab])} = \frac{\lambda(ab, a)\lambda(a^{-1}, b)}{\lambda(a, ab)},$$

donde la última igualdad se sigue de la definición de v (**caso 2.2.1**). Por la Proposición 2.2.16, se sigue que σ definida por (2.28) es un conjunto factor de G con dominio X . \square

Recordemos las transformaciones

$$g : (x, y) \mapsto (xy, y^{-1}), \quad h : (x, y) \mapsto (y^{-1}, x^{-1}),$$

definidas en la Sección 2.2. Dado que $g^2 = h^2 = (gh)^3 = 1$, tenemos que $\langle g, h \rangle \cong S_3$; el grupo simétrico de 6 elementos. Luego, si X es un \mathcal{T} -subconjunto, entonces las funciones g, h determinan una acción de S_3 en X . En la siguiente proposición, estudiaremos las órbitas de esta acción.

Proposición 2.4.3. *Sea $X \in C(G)$. Entonces, cualquier S_3 órbita de X tiene longitud 1, 2, 3 o 6. Más aún, la única órbita de longitud 1 es $\{(1, 1)\}$ y las órbitas de longitud 2 ó 3 son*

de la forma

$$\{(a, a), (a^{-1}, a^{-1})\} \quad \text{y} \quad \{(a, 1), (a^{-1}, a), (1, a^{-1})\},$$

respectivamente con $a \neq 1$.

Demostración. Sea $X \in C(G)$. Es fácil ver que $\langle g, h \rangle = \{h^2, g, h, gh, hg, hgh\}$, donde

$$h^2 : (x, y) \mapsto (x, y), \quad gh : (x, y) \mapsto (y^{-1}x^{-1}, x),$$

$$hg : (x, y) \mapsto (y, y^{-1}x^{-1}), \quad hgh : (x, y) \mapsto (x^{-1}, xy).$$

Así, dado cualquier par $(a, b) \in X$, su S_3 órbita es:

$$S_3(a, b) = \{(a, b), (ab, b^{-1}), (b^{-1}, a^{-1}), (b^{-1}a^{-1}, a), (b, b^{-1}a^{-1})(a^{-1}, ab)\}.$$

Similarmente, tenemos una acción del grupo cíclico $C_3 = \langle gh \rangle = \{h^2, gh, hg\}$ en X . Denotando por $C_3(a, b)$ a la órbita de (a, b) en dicha acción, tenemos que

$$C_3(a, b) = \{(a, b), (b^{-1}a^{-1}, a), (b, b^{-1}a^{-1})\} \quad \text{y} \quad C_3(b^{-1}, a^{-1}) = \{(b^{-1}, a^{-1}), (ab, b^{-1}), (a^{-1}, ab)\}.$$

Luego,

$$S_3(a, b) = C_3(a, b) \cup C_3(b^{-1}, a^{-1}).$$

Afirmamos que $C_3(a, b)$ tiene exactamente un elemento cuando $a = b$ y $a^3 = 1$; en cualquier otro caso, tiene 3 elementos. En efecto, si $a = b$ y $a^3 = 1$, entonces $a = a^{-2}$ y por lo tanto;

$$C_3(a, b) = \{(a, a), (a^{-2}, a), (a, a^{-2})\} = \{(a, a)\}. \quad (2.33)$$

Por otro lado, si $a \neq b$, es claro que todos los elementos en $C_3(a, b)$ son distintos, y si $a = b$ pero $a^3 \neq 1$, entonces $a \neq a^{-2}$ y por (2.33), dicha órbita tiene 3 elementos distintos.

Con esto, describiremos las posibilidades para $S_3(a, b)$. Si $a = b$ y $a^3 = 1$, entonces $(a^{-1})^3 = 1$. Por las afirmaciones anteriores,

$$S_3(a, a) = C_3(a, a) \cup C_3(a^{-1}, a^{-1}) = \{(a, a), (a^{-1}, a^{-1})\}. \quad (2.34)$$

Luego, si $a = 1$, entonces la órbita es $\{(1, 1)\}$. Pero, si $a \neq 1$, entonces el orden de a es 3 y por lo tanto, $a \neq a^{-1}$. Así, la órbita tiene longitud 2 y es de la forma (2.34). Para finalizar,

si $|C_3(a, b)| = 3$, entonces

$$|S_3(a, b)| = 3 \iff C_3(a, b) = C_3(b^{-1}, a^{-1}) \iff (a, b) \in \{(b^{-1}, a^{-1}), (ab, b^{-1}), (a^{-1}, ab)\}.$$

De esta forma, cuando $|C_3(a, b)| = 3$, se tiene que

$$|S_3(a, b)| = 3 \iff ab = 1 \quad \text{o} \quad a = 1 \quad \text{o} \quad b = 1.$$

Por consiguiente, cualquier S_3 órbita de X de longitud 3 es de la forma:

$$\{(a, 1), (a^{-1}, a), (1, a^{-1})\}, \quad \text{con } a \neq 1.$$

□

De la proposición anterior se sigue que las órbitas de longitud 2 o 6 están contenidas en el conjunto $\{(a, b) \in G \times G : a, b, ab \neq 1\}$. Dichas órbitas son llamadas **efectivas**.

Teorema 2.4.4. ⁴ *Sea τ un conjunto factor parcial de G con dominio X . Entonces existe un conjunto factor parcial σ , congruente a τ , tal que para todo $(a, b) \in X$*

$$\sigma(a, b) = \frac{1}{\sigma(b^{-1}, a^{-1})}; \tag{2.35}$$

$$\sigma(a, b) = \sigma(b^{-1}a^{-1}, a) = \sigma(b, b^{-1}a^{-1}); \tag{2.36}$$

$$\sigma(a, 1) = 1. \tag{2.37}$$

Recíprocamente, sea $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ una función parcialmente definida con dominio $X \in C(G)$, tal que se satisfacen (2.35)-(2.37) para todo $(a, b) \in X$. Entonces σ es un conjunto factor parcial de G .

Demostración. Sean $\tau \in pm_X(G)$, $I = \iota(X)$. Por el Teorema 2.4.1, existe $\sigma \in pm_X(G)$ tal que para todo $(a, b) \in X$, $\sigma(a, b) = \frac{\lambda(a^{-1}, b)\lambda(ab, a)}{\lambda(a, ab)}$, donde λ es una función que satisface (2.29)-(2.31). Note que si $(a, b) \in X$, entonces $[a][b] \notin I$. Dado que I es un ideal de E_3 , tenemos que

$$[b^{-1}][a^{-1}], [b^{-1}a^{-1}][a], [b][b^{-1}a^{-1}] \notin I.$$

Por lo tanto, todas las expresiones en (2.35) y (2.36) son diferentes de cero. Probaremos

(2.35). Por hipótesis, tenemos que

$$\sigma(b^{-1}, a^{-1}) = \frac{\lambda(b, a^{-1})\lambda(b^{-1}a^{-1}, b^{-1})}{\lambda(b^{-1}, b^{-1}a^{-1})}.$$

Por otro lado, de (2.31)

$$\lambda(a^{-1}, b)\lambda(b^{-1}a^{-1}, b^{-1}) = 1 \quad \text{ya que } (a, b) \in X,$$

$$\lambda(b, a^{-1})\lambda(ab, a) = 1 \quad \text{ya que } (b^{-1}, a^{-1}) \in X,$$

$$\lambda(b^{-1}, b^{-1}a^{-1})\lambda(a, ab) = 1 \quad \text{ya que } (b, b^{-1}a^{-1}) \in X.$$

Así,

$$\sigma(a, b) = \frac{\lambda(b^{-1}, b^{-1}a^{-1})}{\lambda(b^{-1}a^{-1}, b^{-1})\lambda(b, a^{-1})} = \frac{1}{\sigma(b^{-1}, a^{-1})}.$$

Similarmemente,

$$\sigma(b, b^{-1}a^{-1}) = \frac{\lambda(b^{-1}, b^{-1}a^{-1})\lambda(a^{-1}, b)}{\lambda(b, a^{-1})} = \frac{\lambda(a^{-1}, b)\lambda(ab, a)}{\lambda(a, ab)} = \sigma(a, b).$$

Análogamente, se prueba que $\sigma(b^{-1}a^{-1}, a) = \sigma(a, b)$. Resta ver (2.37). Note que $[a^{-1}] \notin I$, pues lo contrario, implicaría que $[a][a^{-1}][a][b] = [a][b] \in I$. Luego, por (2.30), $\lambda(a^{-1}, 1) = 1$ y así,

$$\sigma(a, 1) = \frac{\lambda(a^{-1}, 1)\lambda(a, a)}{\lambda(a, a)} = 1.$$

Recíprocamente, supongamos que existe $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ con las condiciones mencionadas. Sea $[a] \notin I$, entonces $(a, 1) \in X$. De (2.36) y (2.37), tenemos que $1 = \sigma(a, 1) = \sigma(a^{-1}, a) = (1, a^{-1})$. Por la Proposición 2.4.3, el valor de σ evaluado en cualquier elemento de una S_3 -órbita de X de longitud 3 es 1. Además, por (2.36), σ es constante tanto en $C_3(a, b)$ como en $C_3(b^{-1}, a^{-1})$. Sea $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las S_3 -órbitas de X . Definiremos una función

$$\omega : X \longrightarrow \mathbb{K}^* \\ (a, b) \longmapsto \omega_{a,b},$$

primero estableciendo su valor en estos representantes: como \mathbb{K} es algebraicamente cerrado, para cada $i \in I$, podemos fijar $\omega_{a_i, b_i} \in \mathbb{K}^*$ tal que $\omega_{a_i, b_i}^3 = \sigma(a_i, b_i)$ (en el caso de que (a_i, b_i) pertenezca a una órbita de longitud 3, definimos $\omega_{a_i, b_i} = 1$). Ahora bien, a

partir de un representante (a, b) , definimos ω en los demás elementos de la órbita de (a, b) como sigue:

$$\omega_{a,b} = \omega_{b^{-1}a^{-1},a} = \omega_{b,b^{-1}a^{-1}} = \frac{1}{\omega_{b^{-1},a^{-1}}} = \frac{1}{\omega_{ab,b^{-1}}} = \frac{1}{\omega_{a^{-1},ab}}. \quad (2.38)$$

Note que ω está bien definida pues órbitas diferentes no se intersecan. Por las propiedades mencionadas, es fácil ver que $\sigma(a, b) = \omega_{a,b}^3$ y que (2.38) se vale para todo $(a, b) \in X$. Considere la función $\lambda : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ dada por:

$$\lambda(a, b) = \begin{cases} \omega_{a^{-1},b} & \text{si } (a^{-1}, b) \in X, \\ 0 & \text{si } (a^{-1}, b) \notin X. \end{cases}$$

Es claro que $\lambda(a, b) = 0 \iff [a^{-1}][b] \in I$. Veamos que λ satisface las condiciones (2.30) y (2.31).

Si $[a] \notin I$, entonces $(1, a), (a^{-1}, 1) \in X$ y además, hacen parte de una órbita de longitud 3. Luego;

$$\lambda(a, 1) = \omega_{a^{-1},1} = 1, \quad \lambda(1, a) = \omega_{1,a} = 1.$$

Si $[a^{-1}][b] \notin I$, entonces $(a^{-1}, b) \in X$. Lo que implica que $(a^{-1}b, b^{-1})$ y así;

$$\lambda(a, b)\lambda(b^{-1}a, b^{-1}) = \omega_{a^{-1},b}\omega_{a^{-1}b,b^{-1}} = \frac{\omega_{a^{-1},b}}{\omega_{a^{-1},b}} = 1.$$

Finalmente, note que si $(a, b) \in X$, entonces

$$\frac{\lambda(a^{-1}, b)\lambda(ab, a)}{\lambda(a, ab)} = \frac{\omega_{a,b}\omega_{b^{-1}a^{-1},a}}{\omega_{a^{-1},ab}} = \omega_{a,b}^3 = \sigma(a, b).$$

Por el Teorema 2.4.2, concluimos que $\sigma \in pm_X(G)$. □

Denotamos por $p\tilde{m}_X(G)$ al subgrupo de $pm_X(G)$ que consiste de las funciones $\sigma : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ las cuales satisfacen (2.35)-(2.37).

Corolario 2.4.5. ⁴ Sean G un grupo y X un dominio de un conjunto factor parcial de G . Entonces

- i) Cualquier conjunto factor parcial de $pm_X(G)$ es equivalente a un elemento de $p\tilde{m}_X(G)$.

ii) El kernel de la proyección canónica $p\tilde{m}_X(G) \rightarrow pM_X(G)$ consiste de los conjuntos factores $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ para los cuales existen funciones $\rho : G \rightarrow \mathbb{K}^*$ tales que

$$\rho(1) = 1, \quad (2.39)$$

$$\rho(a) = \frac{1}{\rho(a^{-1})} \quad \forall a \in G \text{ con } (a, 1) \in X, \quad (2.40)$$

$$\sigma(a, b) = \begin{cases} \rho(b)\rho(ab)^{-1}\rho(a) & \text{si } (a, b) \in X, \\ 0 & \text{si } (a, b) \notin X. \end{cases} \quad (2.41)$$

iii) $p\tilde{m}_X(G)$ es isomorfo a $(\mathbb{K}^*)^s$, donde $s = s(G, X)$ es la cardinalidad del conjunto de las S_3 -órbitas efectivas X .

iv) Para cualquier dominio $Y \in C(G)$ tal que $Y \supseteq X$, la función

$$\begin{aligned} \psi_X^Y : pM_Y(G) &\longrightarrow pM_X(G) \\ \text{cls}(\sigma) &\longmapsto \text{cls}(\sigma|_X) \end{aligned}$$

es un epimorfismo. En particular, $pM_X(G)$ es una imagen homomorfa de $pM_{G \times G}(G)$.

Demostración. Probaremos cada una de las afirmaciones.

i) Es consecuencia directa del teorema anterior.

ii) En primer lugar, recordemos que el elemento identidad de $pM_X(G)$ es la clase del idempotente $\tau : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$, definido por $\tau(a, b) = 1$, si $(a, b) \in X$ y en el caso contrario, $\tau(a, b) = 0$. Luego, si $\sigma \sim \tau$, entonces existe una función $\rho : G \rightarrow \mathbb{K}^*$ tal que $\sigma(a, b) = \rho(b)\rho(ab)^{-1}\rho(a)\tau(a, b)$. Por lo tanto, se cumple (2.41). Como $(1, 1) \in X$ y $\sigma(1, 1) = 1$, se vale que $\rho(1) = 1$. Por otro lado, si $(a, 1) \in X$, entonces $(a^{-1}, a) \in X$. Así, $\sigma(a^{-1}, a) = \rho(a)\rho(a^{-1}) = 1$. Esto es, la condición (2.40).

Recíprocamente, sea $\rho : G \rightarrow \mathbb{K}^*$ que satisface (2.39)-(2.40). Definimos σ por (2.41). Es claro que $\sigma(a, 1) = 1$, para todo $(a, 1) \in X$. Ahora, si $(a, b) \in X$, entonces usando (2.40) tenemos que

$$\sigma(a, b) = \rho(b)\rho(ab)^{-1}\rho(a) = \frac{1}{\rho(b)^{-1}\rho((ab)^{-1})^{-1}\rho(a)^{-1}} = \frac{1}{\sigma(b^{-1}, a^{-1})},$$

$$\sigma(b, b^{-1}a^{-1}) = \rho(b^{-1}a^{-1})\rho(a^{-1})^{-1}\rho(b) = \rho((ab)^{-1})\rho(a)\rho(b) = \rho(b)\rho(ab)^{-1}\rho(a) = \sigma(a, b).$$

Análogamente, se prueba que $\sigma(a, b) = \sigma(b^{-1}a^{-1}, a)$. Por consiguiente, $\sigma \in p\tilde{m}_X(G)$ y $\sigma \sim \tau$.

- III) Sea $(a, b) \in X$. De la Proposición 2.4.3, tenemos que la órbita $S_3(a, b)$ tiene 2 o 6 elementos si, y solo si, $ab, a, b \neq 1$. Por esta razón, considere el conjunto

$$A = ((G \setminus \{1\}) \times (G \setminus \{1\})) \setminus \Delta,$$

donde $\Delta = \{(x, x^{-1}) : x \in G\}$. Es claro que $X' = X \cap A$ es un S_3 -conjunto. Por lo tanto, podemos considerar un conjunto I de cardinalidad s y $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las S_3 -órbitas de X' . Como mencionamos en la prueba del Teorema 2.4.4, para cualquier $\sigma \in p\tilde{m}_X(G)$, se tiene σ evaluado en cualquier elemento que pertenezca a una órbita de longitud 1 o 3 es 1. Además, si conocemos el valor de σ en $(a, b) \in X'$, entonces también lo conocemos en cualquier elemento de $S_3(a, b)$. Así, definimos la función

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{K}^*)^s &\longrightarrow p\tilde{m}_X(G) \\ x = (x_i)_{i \in I} &\longmapsto \sigma_x \end{aligned},$$

donde σ_x es el conjunto factor parcial que se obtiene al definir $\sigma_x(a_i, b_i) = x_i$, para todo $i \in I$. Es inmediato que φ es un isomorfismo de grupos.

- IV) Sea $\text{cls}(\sigma) \in pm_X(G)$. Por el ítem I), podemos asumir que $\sigma \in p\tilde{m}_X(G)$. Considere $\sigma' : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$, dado por

$$\sigma'(a, b) = \begin{cases} \sigma(a, b) & \text{si } (a, b) \in X, \\ 1 & \text{si } (a, b) \in Y \setminus X, \\ 0 & \text{si } (a, b) \notin Y. \end{cases}$$

Es fácil verificar que σ' cumple las condiciones (2.35)-(2.37), para todo $(a, b) \in Y$ y por consiguiente, $\sigma' \in p\tilde{m}_Y(G)$. Es claro que $\psi_X^Y(\text{cls}(\sigma')) = \text{cls}(\sigma)$. Luego, ψ_X^Y es sobreyectiva.

□

Definición 2.4.6. Un **cobordo parcial** es una función $\sigma \in p\tilde{m}_X(G)$ equivalente a $1_{p\tilde{m}_X(G)}$, donde $1_{p\tilde{m}_X(G)} : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ está dada por:

$$1_{p\tilde{m}_X(G)}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } (a, b) \in X, \\ 0 & \text{si } (a, b) \notin X. \end{cases}$$

El conjunto de los cobordos parciales en $p\tilde{m}_X(G)$ es denotado por $pB_X(G)$.

En el ítem II) de la proposición anterior se presenta la caracterización de los elementos de $pB_X(G)$.

Finalizamos esta sección con un ejemplo que resalta la importancia de estudiar la componente total.

Ejemplo 2.4.7. Considere C_n , el grupo cíclico de n elementos. En ⁴, Corolario 6.4, se probó que para $1 \leq n \leq 5$, $pM_{C_n \times C_n}(C_n) \cong C_1$. Luego, el ítem IV) del Corolario 2.4.5, implica que cada componente de $pM(C_n)$ es trivial. De esta forma, solo es necesario saber la estructura de $C(C_n)$. A continuación, calcularemos el multiplicador parcial de Schur para los grupos cíclicos C_1, C_2 y C_3 .

I) Es claro que $C(C_1) = \{C_1 \times C_1\}$ y por lo tanto,

$$pM(C_1) = pM_{C_1 \times C_1}(C_1) \cong C_1.$$

II) Tenemos que $C(C_2) = \{X_1, C_2 \times C_2\}$, con $X_1 = \{(1, 1)\}$. Los dominios forman la siguiente cadena

$$\begin{array}{c} C_2 \times C_2 \\ \uparrow \\ X_1 \end{array}$$

Figura 2.1: El multiplicador parcial de Schur de C_2

y,

$$pM(C_2) = pM_{X_1}(C_2) \cup pM_{C_2 \times C_2}(C_2),$$

donde $pM_{X_1}(C_2) \cong pM_{C_2 \times C_2}(C_2) \cong C_1$.

iii) Encontramos que $C(C_3) = \{X_1, X_2, C_3 \times C_3\}$, con $X_1 = \{(1, 1)\}$ y

$$X_2 = \{(1, 1), (1, a), (1, a^2), (a, 1), (a^2, 1), (a, a^2), (a^2, a)\}.$$

En este caso tenemos la cadena

$$\begin{array}{c} C_3 \times C_3 \\ \uparrow \\ X_2 \\ \uparrow \\ X_1 \end{array}$$

Figura 2.2: El multiplicador parcial de Schur de C_3

y,

$$pM(C_3) = pM_{X_1}(C_3) \cup pM_{X_2}(C_3) \cup pM_{C_3 \times C_3}(C_3),$$

donde $pM_{X_1}(C_3) \cong pM_{X_2}(C_3) \cong pM_{C_3 \times C_3}(C_3) \cong C_1$.

3. Sobre las componentes de $pM(G)$ vistas como grupos topológicos compactos divisibles

En este capítulo se analiza cada una de las componentes de $pM(G)$ como un grupo divisible. La Sección 3.1 esta dedicada al estudio de los grupos divisibles, haciendo uso de la aritmética de números cardinales. Por otra parte, la caracterización presentada en la Sección 3.3 sugiere que resulta conveniente dotar a cada componente de una topología compacta, lo cual se lleva a cabo en la última sección de este capítulo.

3.1. Grupos divisibles

El Teorema 3.1.11 es el resultado más importante de la estructura de los grupos divisibles, en donde las partes de torsión y libres de torsión desempeñan un papel fundamental. Aprovecharemos este teorema para obtener información más detallada sobre las componentes del multiplicador parcial de Schur.

Definición 3.1.1. Sea G un grupo abeliano. Decimos que G es un **grupo divisible** si para cada $a \in G$, $n \in \mathbb{Z}^+$ existe $b \in G$ tal que $a = nb$. En notación multiplicativa, esto es, $a = b^n$.

Ejemplo 3.1.2. Si \mathbb{K} es un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces \mathbb{K}^* es un grupo divisible. En efecto, sean $a \in \mathbb{K}^*$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Como el polinomio $x^n - a$ tiene todas sus raíces en \mathbb{K} , existe $b \in \mathbb{K}^*$ tal que $b^n = a$.

El siguiente ejemplo es una consecuencia directa del resultado anterior.

Ejemplo 3.1.3. $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} : \|x\| = 1\}$ es un grupo multiplicativo divisible.

En la siguiente proposición se establecen algunas propiedades de los grupos divisibles. Sus demostraciones son directas a partir de la definición y, por lo tanto, las omitiremos.

Proposición 3.1.4. Sean G y H grupos abelianos. Entonces:

- I) Si G es divisible y $\phi : G \rightarrow H$ es un homomorfismo, entonces $\phi(G)$ es un subgrupo divisible de H .
- II) $\bigoplus_{i \in I} G_i$ es divisible si, y solo si, cada G_i es divisible.
- III) $\prod_{i \in I} G_i$ es divisible si, y solo si, cada G_i es divisible.

Teorema 3.1.5. *Todo subgrupo divisible de un grupo abeliano es un sumando directo.*

Demostración. Ver ¹⁸, Teorema 2.7. □

Definición 3.1.6. Sean G un grupo abeliano y \mathbb{P} el conjunto de los números primos. Definimos el **subgrupo de torsión** de G

$$tG = \{a \in G : a \text{ tiene orden finito}\}.$$

Decimos que G es **libre de torsión** si $tG = \{0\}$. Además, para cada $p \in \mathbb{P}$, definimos los subgrupos

$$G_p = \{a \in G : \text{el orden de } a \text{ es una potencia de } p\}, \quad G[p] = \{a \in G : pa = 0\}.$$

Proposición 3.1.7. *Sea G un grupo abeliano. Entonces:*

i) G/tG es libre de torsión.

ii) $tG = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} G_p.$

Demostración. Probaremos cada una de las afirmaciones.

i) Sea $a + tG \in G/tG$ tal que existe $n \in \mathbb{Z}^+$ con $na + tG = tG$. Esto es, $na \in tG$. Luego, existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $mna = 0$. Así, $a \in tG$.

ii) Sea $a \in tG$ no nulo y consideremos n , el orden de a . Escribamos $n = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$, con p_i primos distintos. Para cada $1 \leq i \leq k$, considere $r_i = \frac{n}{p_i^{e_i}}$. Entonces $\text{mcd}\{r_1, \dots, r_k\} = 1$ y, por consiguiente, existen $s_i \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = r_1 s_1 + \dots + r_k s_k$. Así, para cada $1 \leq i \leq k$, $r_i s_i a \in G_{p_i}$. Luego,

$$a = \sum_{i=1}^k r_i s_i a \in \sum_{p \in \mathbb{P}} G_p.$$

Por lo tanto, $tG = \sum_{p \in \mathbb{P}} G_p$. Resta probar que $G_p \cap \sum_{q \neq p} G_q = \{0\}$. Sea $x = \sum_{q \neq p} x_q$ tal que $x \in G_p$. Entonces, existe $n_p \in \mathbb{Z}$ tal que el orden de x es p^{n_p} y para cada $q \neq p$, existe n_q tal que $q^{n_q} x_q = 0$. Así, $(\prod_{q \neq p} q^{n_q})x = 0$. Lo que implica que $p^{n_p} \mid \prod_{q \neq p} q^{n_q}$ y por ende, $p^{n_p} = 1$. De esta forma, concluimos que $x = 0$.

¹⁸ A. CAÑAS. "Sobre grupos divisibles e isomorfismos relacionados". En: *Tesis de Pregrado, Universidad Industrial de Santander* (2015).

□

Teorema 3.1.8. *Sea G un grupo abeliano divisible y libre de torsión, entonces G es un \mathbb{Q} -espacio vectorial.*

Demostración. Sean $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ y $a \in G$. Como G es divisible, existe $b \in G$ tal que $ma = nb$. Afirmamos que el elemento b es único. Supongamos que existe $b' \in G$ tal que $ma = nb'$. Entonces, $n(b - b') = 0$, es decir, $b - b' \in tG$; pero G es libre de torsión, luego, $b = b'$. De esta forma, definimos la acción de \mathbb{Q} en G por:

$$\left(\frac{m}{n}\right) a = b.$$

Veamos que esta operación está bien definida. Sean $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q}$ y $a \in G$ con $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$. Entonces existen $b, b' \in G$ tales que $ma = nb$ y $m'a = n'b'$. Así, $mn'a = n'nb$ y $m'na = n'nb$. Luego, $n'n(b - b') = 0$, y como G es libre de torsión, $b = b'$. Por lo tanto, la multiplicación está bien definida. Es fácil verificar que esta acción cumple los axiomas de espacio vectorial. □

Introduciremos el siguiente grupo que es de gran importancia en el estudio de los grupos divisibles.

Definición 3.1.9. Para cada $p \in \mathbb{P}$, definimos el **grupo de Prüfer** de tipo p^∞ como el subgrupo del grupo multiplicativo \mathbb{C}^* dado por:

$$C_{p^\infty} = \langle e^{\frac{2\pi i}{p^n}} : n \geq 1 \rangle = \{e^{\frac{2\pi mi}{p^n}} : m \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}.$$

De la definición anterior, tenemos que para todo $p \in \mathbb{P}$, $|C_{p^\infty}| = \aleph_0$. La demostración del siguiente resultado se puede consultar en ¹⁸, Teorema 2.14.

Teorema 3.1.10. *Sea $p \in \mathbb{P}$. Entonces C_{p^∞} es un grupo divisible y el orden de cualquiera de sus elementos es una potencia de p .*

El siguiente resultado clasifica todos los grupos abelianos divisibles.

Teorema 3.1.11. *Sea G un grupo abeliano divisible, entonces*

$$G \cong \bigoplus_{\kappa} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{\lambda_p} C_{p^\infty}, \quad (3.1)$$

donde los cardinales κ y λ_p para cada $p \in \mathbb{P}$, están determinadas únicamente por el grupo G .

Demostración. Sea G un grupo abeliano divisible. Es sencillo ver que tG es divisible. Por el Teorema 3.1.5, existe $V \leq G$ tal que $G = V \oplus tG$. De aquí, $G/tG \cong V$. Pero G/tG es libre de torsión. Luego, el Teorema 3.1.8 implica que V es un \mathbb{Q} -espacio vectorial. Por lo tanto, V es isomorfo a copias de \mathbb{Q} .

Ahora, por la Proposición 3.1.7, se tiene que $tG = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} G_p$. Mostraremos que si $G_p \neq \emptyset$, entonces G_p es una suma directa de copias de C_{p^∞} . Sea $x_1 \in G_p$ de orden p , entonces existe $x_2 \in G$ tal que $x_1 = px_2$. De aquí, $x_2 \in G_p$. De esta forma, obtenemos una sucesión de elementos de G_p , x_2, x_3, \dots tales que $x_j = px_{j+1}$, para $j \geq 1$. Como $px_1 = 0$, se tiene que para todo $j \in \mathbb{Z}^+$, $p^j x_j = 0$. Considere la función

$$f : \langle x_i : i \in \mathbb{Z}^+ \rangle \longrightarrow C_{p^\infty}$$

$$\sum_{j \in J} a_j x_j \longmapsto \prod_{j \in J} e^{\frac{2\pi a_j}{p^j} i},$$

donde $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ es finito. Es claro que f es un epimorfismo. Veamos que f es inyectiva. Sea $\sum_{j \in J} a_j x_j \in \text{Ker } f$. Podemos asumir que $J = \{1, \dots, m\}$ y así, $\sum_{j=1}^m \frac{a_j}{p^j} \in \mathbb{Z}$. Esto implica que, $p^m \mid \sum_{j=1}^m a_j p^{m-j}$. Por otro lado, de la propiedad $x_j = px_{j+1}$, se tiene que $x_j = p^{m-j} x_m$ y por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^m a_j x_j = \left(\sum_{j=1}^m a_j p^{m-j} \right) x_m = 0.$$

Definamos la siguiente familia

$$S = \{H \leq G_p : H \text{ es suma directa de subgrupos isomorfos a } C_{p^\infty}\}.$$

Por el anterior isomorfismo, $S \neq \emptyset$. Ordenamos a S parcialmente con la relación

$$H \leq H' \iff H \text{ es sumando directo de } H'.$$

Como toda cadena tiene cota superior, concluimos por el Lema de Zorn que S tiene un elemento maximal X . Dado que X es suma directa de grupos isomorfos al grupo de Prüfer, X es divisible. Por el Teorema 3.1.5, existe $K \leq G_p$ tal que $G_p = X \oplus K$. Si $K \neq \{0\}$, siguiendo el proceso anterior, K contiene un subgrupo L isomorfo a C_{p^∞} . De esta forma, $X \oplus L \in S$. Lo que contradice la propiedad maximal de X . Por lo tanto, $G_p = X$. Finalmente, la unicidad de los cardinales κ, λ_p se sigue de que κ es la dimensión como

\mathbb{Q} -espacio vectorial de la parte libre de torsión de G y λ_p es la dimensión de $G[p]$ como \mathbb{Z}_p -espacio vectorial. \square

A continuación utilizaremos el teorema anterior para demostrar que ciertos grupos son isomorfos sin construir explícitamente el isomorfismo entre ellos. Para esto, necesitamos los siguientes resultados de la aritmética de números cardinales.

Definición 3.1.12. Sean κ, λ números cardinales. Definimos las siguientes operaciones:

- I) $\kappa + \lambda = |A \cup B|$, con $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ y $A \cap B = \emptyset$.
- II) $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$, con $|A| = \kappa$ y $|B| = \lambda$.
- III) Si $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de conjuntos mutuamente disjuntos y $|A_i| = \kappa_i$, entonces

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right|.$$

El lector interesado puede consultar las demostraciones de las siguientes propiedades en ¹⁹, Secciones 5.1 y 9.1.

Proposición 3.1.13. Sean κ, λ números cardinales. Entonces:

- I) Si κ es infinito, entonces $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.
- II) Si κ, λ son no nulos y uno de ellos es infinito, entonces $\kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
- III) $\underbrace{\kappa + \kappa + \dots}_{\lambda \text{ veces}} = \kappa \cdot \lambda$.
- IV) Si $\kappa_i \leq \lambda_i$, para todo $i \in I$, se tiene que $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \sum_{i \in I} \lambda_i$.

En la siguiente proposición, determinamos el cardinal de una suma directa.

Proposición 3.1.14. Sean I un conjunto de índices infinito, κ un cardinal infinito y G_i grupos tales que $|G_i| = \kappa$, para todo $i \in I$. Entonces $\left| \bigoplus_{i \in I} G_i \right| = \max\{\kappa, |I|\}$.

¹⁹ K. HRBACEK y T. JECH. *Introduction to Set Theory, Revised and Expanded*. 3.^a ed. CRC Press, 1999.

Demostración. Considere la familia $\mathcal{P}_{<\omega}(I) = \{J \subseteq I : J \text{ es finito}\}$. Para cada $J \in \mathcal{P}_{<\omega}(I)$, definimos

$$S_J = \{(x_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} G_i : \text{supp}((x_i)_{i \in I}) = J\}.$$

Es inmediato que $\bigoplus_{i \in I} G_i = \bigsqcup_{J \in \mathcal{P}_{<\omega}(I)} S_J$. Probaremos que $|\mathcal{P}_{<\omega}(I)| = |I|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere los conjuntos

$$I_n = \{J \subseteq I : |J| = n\}, \quad I_{\leq n} = \{J \subseteq I : |J| \leq n\}.$$

Es fácil ver que la función $f : I^n \rightarrow I_{\leq n}$ que envía cada n -tupla al conjunto que contiene a los elementos de esta n -tupla es sobreyectiva y por lo tanto, $|I_n| \leq |I_{\leq n}| \leq |I^n|$. Del ítem i) de la Proposición 3.1.13, $|I^n| = |I|$. Luego, $|I_n| \leq |I|$. Además, es claro que $\mathcal{P}_{<\omega}(I) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Usando las propiedades de la Proposición 3.1.13, concluimos que $|\mathcal{P}_{<\omega}(I)| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |I| = \aleph_0 \cdot |I| = |I|$. Dado que $|I| \leq |\mathcal{P}_{<\omega}(I)|$, se obtiene lo deseado.

Por otro lado, sea $J \in \mathcal{P}_{<\omega}(I)$ no vacío, entonces existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|J| = n$. Considere la función

$$\begin{aligned} g : S_J &\longrightarrow \prod_{j \in J} G_j \setminus \{0\} \\ (x_i)_{i \in I} &\longmapsto (x_j)_{j \in J} \end{aligned}$$

Es sencillo verificar que g es biyectiva y por lo tanto, para cada $J \in \mathcal{P}_{<\omega}(I)$ no vacío $|S_J| = \kappa^n = \kappa$. Finalmente,

$$\left| \bigoplus_{i \in I} G_i \right| = \sum_{J \in \mathcal{P}_{<\omega}(I)} |S_J| = \sum_{J \in \mathcal{P}_{<\omega}(I) \setminus \{\emptyset\}} \kappa = \kappa \cdot |I| = \max\{\kappa, |I|\}.$$

□

Corolario 3.1.15. $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{S}^1$.

Demostración. Por el Teorema 3.1.11,

$$\mathbb{C}^* \cong \bigoplus_{\kappa_1} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{\mathfrak{m}_p} C_{p^\infty}, \quad \mathbb{S}^1 \cong \bigoplus_{\kappa_2} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{\mathfrak{n}_p} C_{p^\infty}.$$

Mostraremos que para cada $p \in \mathbb{P}$, $m_p = n_p = 1$. Sea $p \in \mathbb{P}$, entonces

$$\mathbb{C}^*[p] = \{a \in \mathbb{C}^* : a^p = 1\} = \{e^{\frac{2\pi ki}{p}} : 0 \leq k \leq p-1\} = \mathbb{S}^1[p].$$

Es decir, que tanto $\mathbb{C}^*[p]$ como $\mathbb{S}^1[p]$ tienen p elementos. Esto implica que las dimensiones de estos \mathbb{Z}_p -espacios vectoriales es 1. Luego,

$$\mathbb{C}^* \cong \bigoplus_{\kappa_1} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} C_{p^\infty}, \quad \mathbb{S}^1 \cong \bigoplus_{\kappa_2} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} C_{p^\infty}.$$

Por la Proposición 3.1.14, tenemos que

$$|\mathbb{C}^*| = \left| \bigoplus_{\kappa_1} \mathbb{Q} \right| \left| \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} C_{p^\infty} \right| = \max\{\kappa_1, \aleph_0\} \cdot \aleph_0.$$

Esto implica que $\kappa_1 > \aleph_0$, pues en caso contrario, $|\mathbb{C}^*| = \aleph_0$, absurdo. Así, $2^{\aleph_0} = |\mathbb{C}^*| = \kappa_1 \cdot \aleph_0 = \max\{\kappa_1, \aleph_0\} = \kappa_1$. Similarmente, $\kappa_2 = 2^{\aleph_0}$. Por consiguiente,

$$\mathbb{C}^* \cong \bigoplus_{2^{\aleph_0}} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} C_{p^\infty} \cong \mathbb{S}^1.$$

□

De manera más general, estudiamos la estructura del grupo divisible \mathbb{K}^* , siendo \mathbb{K} un cuerpo algebraicamente cerrado no enumerable.

Corolario 3.1.16. *Sea \mathbb{K} un cuerpo algebraicamente cerrado no enumerable de cardinal κ . Entonces, las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

1) *Si \mathbb{K} tiene característica cero,*

$$\mathbb{K}^* \cong \bigoplus_{\kappa} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} C_{p^\infty},$$

y si \mathbb{K} tiene característica $q \in \mathbb{P}$,

$$\mathbb{K}^* \cong \bigoplus_{\kappa} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}, p \neq q} C_{p^\infty}.$$

ii) Si s es un cardinal finito, entonces para \mathbb{K} de característica cero

$$(\mathbb{K}^*)^s \cong \bigoplus_{\kappa} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} C_{p^\infty}^s,$$

y para \mathbb{K} de característica $q \in \mathbb{P}$,

$$(\mathbb{K}^*)^s \cong \bigoplus_{\kappa} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}, p \neq q} C_{p^\infty}^s.$$

Demostración. Veamos la prueba de cada uno de los enunciados.

- i) Si \mathbb{K} tiene característica cero, entonces, para cada $p \in \mathbb{P}$, el polinomio $x^p - 1$ tiene p raíces todas distintas. Luego, la dimensión de $\mathbb{K}^*[p]$ como \mathbb{Z}_p -espacio vectorial es 1. Ahora, si \mathbb{K} tiene característica $q \in \mathbb{P}$, tenemos que $x^q - 1 = (x - 1)^q$ y por tanto, no existe ningún elemento en \mathbb{K}^* cuyo orden sea q . Esto quiere decir que C_{q^∞} no aparece en la descomposición. Similarmente, si $p \neq q$, la dimensión de $\mathbb{K}^*[p]$ como \mathbb{Z}_p -espacio vectorial es 1. Finalmente, siguiendo el argumento del corolario anterior, concluimos que la dimensión de parte libre de torsión como \mathbb{Q} -espacio vectorial es κ .
- ii) Si \mathbb{K} tiene característica cero, entonces, para cada $p \in \mathbb{P}$, $(\mathbb{K}^*)^s[p]$ tiene p^s elementos, luego la dimensión es s . Como s es finito, $|(\mathbb{K}^*)^s| = \kappa$ y por lo tanto,

$$(\mathbb{K}^*)^s \cong \bigoplus_{\kappa} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} C_{p^\infty}^s.$$

La prueba del otro caso es análoga.

□

Con base en las propiedades previamente establecidas de los grupos divisibles, procedemos a retomar el estudio del multiplicador parcial de Schur. Fijemos $X \in C(G)$ y s la cardinalidad del conjunto de las S_3 -órbitas efectivas de X . Por el Corolario 2.4.5, la función

$$\begin{aligned} \varphi_X : (\mathbb{K}^*)^s &\longrightarrow pM_X(G) \\ \mu = (\mu_i)_{i \leq s} &\longmapsto \text{cls}(\sigma_\mu) \end{aligned}$$

es un epimorfismo de grupos. Se sigue de la Proposición 3.1.4 que $pM_X(G)$ es un grupo divisible.

Teorema 3.1.17. ⁷ Existe un epimorfismo de grupos $t(\mathbb{K}^*)^s \rightarrow tpM_X(G)$

Demostración. Mostraremos que la restricción de φ_X a $t(\mathbb{K}^*)^s$ es el epimorfismo que buscamos. En primer lugar, es claro que si $\mu = (\mu_i)_{i \leq s} \in t(\mathbb{K}^*)^s$, entonces $\text{cls}(\sigma_\mu) \in tpM_X(G)$. Veamos que esta restricción es sobreyectiva. Sea $\text{cls}(\sigma) \in tpM_X(G)$, entonces existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que σ^m es un cobordo parcial. Por el ítem II) del Corolario 2.4.5 existe una función $\rho : G \rightarrow \mathbb{K}^*$ que satisface (2.39)-(2.41). Sea $C_2 = \{1, a\}$, el grupo cíclico de 2 elementos. Considere la acción de C_2 en G dada por $(a, x) \mapsto x^{-1}$. Así, para cada $x \in G$ su órbita esta dada por $\mathcal{O}_x = \{x, x^{-1}\}$.

Sea $\{x_j\}_{j \in J}$ un conjunto completo de representantes de estas órbitas. Definamos una función $\alpha : G \rightarrow \mathbb{K}^*$, primero estableciendo su valor en estos representantes. Si la órbita de x_j es de longitud 1, definimos $\alpha(x_j) = 1$ y en caso contrario, $\alpha(x_j) = \omega_{x_j}$, donde ω_{x_j} es una raíz m -ésima fija de $\rho(x_j)$. Ahora, si $x \in G \setminus \{x_j\}_{j \in J}$, definimos $\alpha(x) = \frac{1}{\alpha(x_j)}$, siendo x_j el representante de la órbita de x . De esta forma, tenemos que

$$\alpha^{2m}(x) = \rho^2(x), \quad \text{para todo } x \in G \text{ tal que } (x, 1) \in G. \quad (3.2)$$

Considere $\sigma' : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$\sigma'(a, b) = \begin{cases} \alpha(b)\alpha(ab)^{-1}\alpha(a) & \text{si } (a, b) \in X, \\ 0 & \text{si } (a, b) \notin X. \end{cases}$$

Es claro que α satisface las condiciones (2.39) y (2.40). Luego, $\sigma' \in pB_X(G)$. Por (3.2), tenemos que $(\sigma')^{2m} = \sigma^{2m}$. Esto implica que existe una función $\theta : G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ con dominio X tal que $\theta(x, y)^{2m} = 1$ y $\sigma(x, y) = \theta(x, y)\sigma'(x, y)$, para todo $(x, y) \in X$. Por ende, $\theta \in p\tilde{m}_X(G)$ y $\text{cls}(\sigma) = \text{cls}(\theta)$. Así, tenemos que $\theta = \theta_\mu$, donde $\mu_i^{2m} = 1$ para $i \leq s$ y en consecuencia, $\mu = (\mu_i)_{i \leq s} \in t(\mathbb{K}^*)^s$ es la preimagen de $\text{cls}(\sigma)$. \square

En lo que sigue, trabajaremos el multiplicador parcial de Schur sobre cuerpos algebraicamente cerrados de cardinal 2^m , con $m \geq \aleph_0$.

Proposición 3.1.18. Supongamos que s es finito. Entonces

$$pM_X(G) \cong \bigoplus_T \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{\lambda_p} C_{p^\infty},$$

con λ_p es finito o $\lambda_p = \aleph_0$, para cada $p \in \mathbb{P}$.

Demostración. Estudiaremos el caso donde la característica de \mathbb{K} sea cero. El otro caso es análogo. Usando el Corolario 3.1.16 ítem II) y el Teorema 3.1.17 concluimos que existe un epimorfismo

$$\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} C_{p^\infty}^s \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{\lambda_p} C_{p^\infty}.$$

Note que para cada $p \in \mathbb{P}$, $|C_{p^\infty}^s| = \aleph_0$ y por lo tanto, $\left| \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} C_{p^\infty}^s \right| = \aleph_0$. El epimorfismo anterior implica que $\left| \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{\lambda_p} C_{p^\infty} \right| \leq \aleph_0$. Luego, para cada $p \in \mathbb{P}$, $\left| \bigoplus_{\lambda_p} C_{p^\infty} \right| \leq \aleph_0$. No obstante, si λ_p es infinito, por la Proposición 3.1.14

$$\left| \bigoplus_{\lambda_p} C_{p^\infty} \right| = \max\{\lambda_p, \aleph_0\}.$$

Así, concluimos que λ_p es finito o $\lambda_p = \aleph_0$. □

3.2. Grupos topológicos

Intuitivamente, un grupo topológico es un grupo dotado de una topología compatible con su operación binaria. Antes de enunciar formalmente este concepto, recordaremos la topología que se define en un producto cartesiano. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Definamos la siguiente familia

$$\mathcal{B}_P = \left\{ \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) : U_j \text{ abierto en } X_j \text{ y } J \text{ es subconjunto finito de } I \right\},$$

donde para cada $l \in I$, $\pi_l : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_l$ es la proyección canónica. Entonces \mathcal{B}_P es base de topología y la topología generada por esta familia es llamada la **topología producto**.

Definición 3.2.1. Un **grupo topológico** es un grupo (G, \cdot) con una topología τ tal que las funciones

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

son continuas, donde $G \times G$ tiene la topología producto.

Observación 3.2.2. Probar que G es un grupo topológico es equivalente a mostrar que la

función

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

es continua. Esto es, para todo $(x, y) \in G \times G$ y toda vecindad W de xy^{-1} , existen U y V vecindades de x, y respectivamente tales que

$$UV^{-1} = \{uv^{-1} : u \in U, v \in V\} \subseteq W.$$

Ejemplo 3.2.3. Estos son algunos ejemplos de grupos topológicos.

- i) Cualquier grupo G con la topología discreta e indiscreta. De hecho, en último caso, la continuidad es inmediata. Además, si G tiene la topología discreta, dado cualquier $W \subseteq G$ que contiene a xy^{-1} , podemos tomar $U = \{x\}, V = \{y\}$ abiertos y obtener $UV^{-1} \subseteq W$.
- ii) \mathbb{S}^1 con la multiplicación usual y la topología heredada de \mathbb{C} . En efecto, sean $z_1, z_2 \in \mathbb{S}^1$ y W una vecindad de $z_1z_2^{-1}$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z_1z_2^{-1}, \epsilon) \cap \mathbb{S}^1 \subseteq W$. Considere las vecindades $U = B(z_1, \epsilon_1) \cap \mathbb{S}^1$ y $V = B(z_2, \epsilon_2) \cap \mathbb{S}^1$, con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$. Sean $u \in U, v \in V$, entonces

$$\begin{aligned} \|uv^{-1} - z_1z_2^{-1}\| &= \|(u - z_1)v^{-1} + (v^{-1} - z_2^{-1})z_1\| < \epsilon_1\|v^{-1}\| + \|v^{-1} - z_2^{-1}\|\|z_1\| \\ &= \epsilon_1\|v^{-1}\| + \frac{\|z_2 - v\|}{\|v\|\|z_2\|}\|z_1\| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Esto es, $uv^{-1} \in B(z_1z_2^{-1}, \epsilon) \cap \mathbb{S}^1 \subseteq W$.

- iii) \mathbb{R} con la suma y topología usual. Se verifica similarmente al ítem anterior.

Presentamos algunas propiedades de los grupos topológicos.

Proposición 3.2.4. Sean (G_1, τ_1) un grupo topológico y G_2 un grupo arbitrario. Se tienen las siguientes afirmaciones:

- i) Si $U \in \tau_1$ y $x \in G_1$, entonces xU es abierto.
- ii) Si existe $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ epimorfismo, entonces G_2 es grupo topológico con la topología cociente $\tau_\psi = \{U \subseteq G_2 : \psi^{-1}(U) \in \tau_1\}$.

Demostración. Probaremos cada implicación.

- i) Sea $u \in U$. Como $u = x^{-1}xu$ y U es una vecindad de u , tenemos que existen U', V vecindades de x^{-1} y xu , respectivamente tales que $U'V \subseteq U$. Esto implica que $x^{-1}V \subseteq U$ y por lo tanto, $xu \in V \subseteq xU$. Esto es, $xu \in (xU)^\circ$ y en consecuencia, xU es abierto.
- ii) Sean $(x, y) \in G_2 \times G_2$ y W una vecindad de xy^{-1} . Dado que ψ es sobreyectiva, existen $a, b \in G_1$ tales que $\psi(a) = x$ y $\psi(b) = y$. De aquí, $\psi^{-1}(W)$ es una vecindad de ab^{-1} . Por hipótesis, existen U, V vecindades de a y b , respectivamente tales que $UV^{-1} \subseteq \psi^{-1}(W)$. Esto implica que, $\psi(U)\psi(V)^{-1} \subseteq W$. Luego, resta ver que $\psi(U), \psi(V)$ son vecindades de x, y , respectivamente. Note que

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(\psi(U)) &= \{g \in G_1 : \exists u \in U \text{ tal que } \psi(g) = \psi(u)\} \\ &= \{g \in G_1 : \exists u \in U \text{ tal que } g \in \text{Ker}(\psi)u\} \\ &= \text{Ker}(\psi)U = \bigcup_{h \in \text{Ker}(\psi)} hU.\end{aligned}$$

Se sigue del ítem anterior que $\psi^{-1}(\psi(U)) \in \tau_1$ y como $x \in \psi(U)$, concluimos que $\psi(U)$ es una vecindad de x . Similarmente para $\psi(V)$ y por lo tanto, G_2 con la topología cociente es un grupo topológico. □

Teorema 3.2.5. *Sea \mathcal{A} un conjunto de índices. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, sea G_α un grupo topológico. Entonces $G = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$ con la topología producto, es un grupo topológico.*

Demostración. Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in G$ y W una vecindad de xy^{-1} . Entonces existen un conjunto finito de índices $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ y abiertos U_{α_i} en G_{α_i} tales que $xy^{-1} \in \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subseteq W$. Como cada G_α es topológico, tenemos que, para cada α_i con $1 \leq i \leq n$, existen $V_{\alpha_i}, V'_{\alpha_i}$ vecindades de x_{α_i} y y_{α_i} , respectivamente tales que $V_{\alpha_i}(V'_{\alpha_i})^{-1} \subseteq U_{\alpha_i}$. Considere los siguientes conjuntos

$$V = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) \quad \text{y} \quad V' = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(V'_{\alpha_i}).$$

Es claro que V y V' son vecindades de x, y , respectivamente. Note que si $v \in V$ y $b \in V'$, entonces para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $\pi_{\alpha_i}(vb^{-1}) = v_{\alpha_i}b_{\alpha_i}^{-1} \in V_{\alpha_i}(V'_{\alpha_i})^{-1} \subseteq U_{\alpha_i}$. Luego, $vb^{-1} \in \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$. De esto se sigue que $V(V')^{-1} \subseteq \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subseteq W$. □

Por el Teorema de Tychonoff, tenemos que G es compacto si, y solo si, cada G_α es compacto.

3.3. Una caracterización algebraica de los grupos divisibles que admiten topologías compactas

En esta sección, estudiaremos en detalle la estructura de los grupos divisibles que admiten topologías compactas presentada en el artículo ⁸. En este análisis, el grupo de caracteres y los grupos libres de torsión tendrán un papel central, por lo que comenzaremos revisando sus propiedades. En adelante, denotaremos por $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y consideraremos a G como un grupo abeliano. Sabemos que \mathbb{R} es un grupo topológico con la suma y topología usual. Luego, podemos definir en K la topología cociente τ_π inducida por la proyección canónica $\pi : \mathbb{R} \rightarrow K$. Por la Proposición 3.2.4, (K, τ_π) es un grupo topológico.

Definición 3.3.1. Sea G un grupo topológico. Denotamos por $C(G, K)$ al conjunto de todas las funciones continuas de G en K y por

$$\hat{G} = \{\alpha \in C(G, K) : \alpha \text{ es un homomorfismo de grupos}\}.$$

El conjunto \hat{G} es un grupo abeliano con la suma usual de funciones y es llamado el **grupo de caracteres de G** .

En efecto, sean $\alpha, \beta \in \hat{G}$. Es claro que $\alpha + \beta$ es un homomorfismo de grupos. Por otro lado, considere las funciones

$$\begin{array}{ccc} \phi : G & \longrightarrow & K \times K \\ x & \longmapsto & (\alpha(x), \beta(x)) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \psi : K \times K & \longrightarrow & K \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array},$$

entonces $\alpha + \beta = \psi \circ \phi$. Como α, β son continuas, tenemos que ϕ es continua y dado que K un grupo topológico, ψ también es continua. Por lo tanto, $\alpha + \beta$ es continua y así, \hat{G} es cerrado bajo la suma de funciones. El elemento neutro de \hat{G} es el homomorfismo nulo y similarmente, se prueba que $-\alpha \in \hat{G}$ el cual es el inverso aditivo de α .

En la siguiente proposición definimos una topología en el grupo de caracteres.

Proposición 3.3.2. *Sea G un grupo topológico. Considere la familia*

$$\Sigma^* = \{V(F, U) : U \text{ es un abierto en } K \text{ que contiene al cero y } F \text{ es un compacto en } G\},$$

donde $V(F, U) = \{\alpha \in \hat{G} : \alpha(F) \subseteq U\}$. A partir de esta familia, definimos

$$\Sigma = \{U + \alpha : U \in \Sigma^*, \alpha \in \hat{G}\}.$$

Entonces Σ es base de alguna topología en \hat{G} , y la topología inducida por esta familia,

$$\tau_\Sigma = \{U \subseteq \hat{G} : \forall \alpha \in U, \exists B \in \Sigma \text{ tal que } \alpha \in B \subseteq U\},$$

convierte a \hat{G} en un grupo topológico, donde Σ^ es una base de vecindades para el elemento neutro de \hat{G} .*

Demostración. Ver ²⁰, página 127. □

La topología definida anteriormente es usualmente conocida como **la topología compacta abierta**.

Proposición 3.3.3. *Sean G un grupo topológico y \hat{G} su grupo de caracteres. Considere el abierto $U = (-1/10, 1/10) + \mathbb{Z}$ en K , entonces se tienen las siguientes afirmaciones:*

- i) *Sea $\alpha \in \hat{G}$ tal que $\alpha(G) \subseteq U$, entonces $\alpha = 0$.*
- ii) *Sean W una vecindad del cero en el grupo G cuya clausura \overline{W} es compacta y*

$$V = \{\alpha \in \hat{G} : \alpha(\overline{W}) \subseteq U\}.$$

Entonces V tiene una clausura compacta \overline{V} .

- iii) *Si G es discreto, entonces \hat{G} es compacto.*
- iv) *Si G es compacto, entonces \hat{G} es discreto.*

Demostración. i) Probaremos la contrarecíproca de esta implicación. Supongamos que existe $x \in G$ tal que $\alpha(x) \neq 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n\alpha(x) \notin U$. Sin embargo, $n\alpha(x) = \alpha(nx)$. Por lo tanto, $\alpha(G) \not\subseteq U$.

²⁰ L. PONTRJAGIN. *Topological Groups*. Princeton Mathematical Series, 1946.

- II) Ver ²⁰, Teorema 31, parte b.
- III) Puesto que G es discreto, podemos tomar $W = \{0\}$ en el ítem II) y concluir que $V = \{\alpha \in \hat{G} : \alpha(\{0\}) \subseteq U\} = \hat{G}$ es compacto.
- IV) Como G es compacto, tenemos que $V(G, U)$ es una vecindad del homomorfismo nulo en \hat{G} . No obstante, el ítem I) implica que $V(G, U) = \{0\}$. Luego, dado cualquier $\alpha \in \hat{G}$, $V(G, U) + \alpha = \{\alpha\}$ es abierto en \hat{G} . Es decir, la topología compacta abierta en \hat{G} es discreta.

□

En el siguiente teorema se enuncian algunas propiedades sobre \hat{G} que serán útiles en esta sección. Las demostraciones correspondientes pueden ser consultadas en las referencias indicadas.

Teorema 3.3.4. *Sean G un grupo topológico y \hat{G} su grupo de caracteres. Se cumplen las siguientes propiedades:*

- I) *Si G es discreto o compacto, entonces $G \cong \hat{\hat{G}}$ (²⁰, Teorema 37).*
- II) *Si G es un grupo cíclico finito, entonces $G \cong \hat{G}$ (²⁰, pág 140).*
- III) *\hat{G} es libre de torsión cuando G es compacto y divisible (²¹, pág 55).*
- IV) *Si G es discreto y libre de torsión, entonces \hat{G} es conexo (²⁰, Ejemplo 48).*
- V) *Todo grupo topológico compacto y conexo es divisible (²¹, pág 55).*
- VI) *Supongamos que G es discreto y $|G| = \aleph$, entonces $|\hat{G}| = 2^\aleph$ (²¹, pág 55).*

Definición 3.3.5. Sean G un grupo abeliano libre de torsión y (p_1, p_2, \dots) la sucesión creciente de los números primos. Para cada $g \in G$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, denotamos por $k_n(g)$ al mayor entero no negativo k tal que la ecuación $p_n^k x = g$ tiene solución en G . En caso de que no exista tal exponente máximo, definimos $k_n(g) = \infty$. La sucesión $(k_n(g))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es llamada la **característica** del elemento $g \in G$.

Proposición 3.3.6. *Sea G es un grupo abeliano libre de torsión. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones:*

²¹ I. KAPLANSKY. *Infinite Abelian Groups*. The University of Michigan, 1954.

I) Para cada fijo $n \in \mathbb{Z}^+$ se vale que

$$k_n(g) = \infty, \forall g \in G \iff k_n(g) \neq 0, \forall g \in G.$$

II) Dos conjuntos maximales linealmente independientes cualesquiera en G tienen la misma cardinalidad. Más aún, si un subconjunto maximal linealmente independiente tiene r elementos, entonces G es un subgrupo aditivo de un \mathbb{Q} -espacio vectorial de dimensión r .

Demostración. Fijemos $n \in \mathbb{Z}^+$. Supongamos que $k_n(g) \neq 0$, para todo $g \in G$. Fijemos $g \in G$. Probaremos por inducción que para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, la ecuación $p_n^m x = g$ tiene solución en G . Para el caso base, $m = 1$, como $k_n(g) \neq 0$, existe $h \in G$ tal que $p_n^{k_n(g)} h = g$. Así, $p_n^{k_n(g)-1} h$ es solución de la ecuación $p_n x = g$. Ahora, asumamos que existe $x \in G$ tal que $p_n^m x = g$. Por hipótesis, $k_n(x) \neq 0$ y por lo tanto, existe $y \in G$ tal que $p_n y = x$. En consecuencia, $g = p_n^{m+1} y$. Es decir, $k_n(g) = \infty$. La prueba del ítem II) se puede consultar en ²², página 409. \square

Definición 3.3.7. Sea G un grupo abeliano libre de torsión. El **rango** de G , denotado por $rank(G)$, es la cardinalidad de cualquier subconjunto maximal linealmente independiente.

Observación 3.3.8. Del ítem II) de la proposición anterior, tenemos que si G es de rango 1, entonces $|G| \leq \aleph_0$ y como es libre de torsión, concluimos que $|G| = \aleph_0$.

En los Teoremas del 3.3.9 al 3.3.11, asumiremos que es G un grupo topológico compacto divisible y fijaremos $n \in \mathbb{Z}^+$. Por el Teorema 3.1.11,

$$G \cong \bigoplus_T \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{\lambda_p} C_{p^\infty}. \quad (3.3)$$

Además, del ítem IV) de la Proposición 3.3.3 y del ítem III) Teorema 3.3.4, tenemos que \hat{G} es un grupo topológico discreto libre de torsión.

Teorema 3.3.9. ⁸ $k_n(\alpha) = \infty$, para todo $\alpha \in \hat{G}$ si y solo si el grupo $C_{p_n^\infty}$ no aparece en la suma (3.3).

Demostración. Por el ítem I) del Teorema 3.3.4, $G \cong \hat{G}$. De esta forma, si suponemos por absurdo que este grupo de Prüfer si aparece, entonces existiría $\Phi \in \hat{G}$ de orden p_n . Esto

²² L. FUCHS. *Abelian Groups*. Springer, 2015.

es, $p_n\Phi(\alpha) = \Phi(p_n\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in \hat{G}$. Por otro lado, por la Proposición 3.3.6, para todo $\alpha \in \hat{G}$, la ecuación $p_n x = \alpha$ tiene solución. Esto implica que $p_n\hat{G} = \hat{G}$. Así, Φ es el homomorfismo nulo, lo que contradice que tiene orden p_n .

Recíprocamente, supongamos que existe $\alpha \in \hat{G}$ tal que $k_n(\alpha) \neq \infty$. Por la Proposición 3.3.6, existe $\beta \in \hat{G}$ tal que $k_n(\beta) = 0$. Así, la ecuación $p_n x = \beta$ no tiene solución en \hat{G} y por lo tanto, $p_n\hat{G} \subsetneq \hat{G}$. Por otro lado, $\hat{G}/p_n\hat{G}$ tiene la topología cociente heredada de \hat{G} y al ser este un grupo topológico discreto, implica que $\hat{G}/p_n\hat{G}$ es un grupo topológico discreto no nulo. Llamando $H = \hat{G}/p_n\hat{G}$, tenemos que \hat{H} es no nulo, pues si suponemos lo contrario, tendríamos que $\hat{H} = 0$ y, por tanto, $0 = \hat{H} \cong H$, lo cual contradice el hecho de que H es no nulo.

Luego, existe α un caracter no nulo de H . Considere la proyección canónica $\pi : \hat{G} \rightarrow H$. Como π y α son homomorfismos continuos, tenemos que $\alpha \circ \pi : \hat{G} \rightarrow K \in \hat{\hat{G}}$. Note que $p_n(\alpha \circ \pi)$ es el homomorfismo nulo y al ser $\alpha \circ \pi$ no nulo, tenemos que el orden de $\alpha \circ \pi$ es p_n . Dado que $G \cong \hat{\hat{G}}$, lo anterior implica que existe un elemento en G de orden p_n , y como G es divisible, el grupo $C_{p_n^\infty}$ aparece en la descomposición (3.3). \square

Teorema 3.3.10. ⁸ Si $\hat{G}/p_n\hat{G}$ es un grupo cíclico no nulo, entonces en la suma (3.3) aparece exactamente un sumando directo de $C_{p_n^\infty}$.

Demostración. Probaremos que hay exactamente p_n elementos que satisfacen la ecuación $p_n x = 0$ en G , pero como $G \cong \hat{\hat{G}}$ es equivalente mostrarlo en $\hat{\hat{G}}$. Es claro que el orden de cualquier elemento no nulo en $\hat{G}/p_n\hat{G}$ es p_n y como este grupo es cíclico, tenemos que tiene p_n elementos. Veamos que existe una correspondencia biyectiva entre los caracteres Φ de \hat{G} tales que $p_n\Phi = 0$ y los caracteres de $\hat{G}/p_n\hat{G}$. Sea $\Phi \in \hat{\hat{G}}$ tal que $p_n\Phi = 0$, entonces $p_n\hat{G} \subseteq \ker(\Phi)$. Así, podemos definir

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} : \hat{G}/p_n\hat{G} &\longrightarrow K \\ \beta + p_n\hat{G} &\longmapsto \Phi(\beta) \end{aligned}$$

Es claro que $\bar{\Phi}$ es un homomorfismo y además, si U es un abierto en K , tenemos que $\pi^{-1}(\bar{\Phi}^{-1}(U)) = \Phi^{-1}(U)$, donde $\pi : \hat{G} \rightarrow \hat{G}/p_n\hat{G}$ es la proyección canónica. Luego, $\bar{\Phi}^{-1}(U)$ es abierto en $\hat{G}/p_n\hat{G}$ y por tanto, $\bar{\Phi}$ es continua. Esto implica que $\bar{\Phi}$ es un caracter de $\hat{G}/p_n\hat{G}$. Claramente, la correspondencia donde a cada Φ se le asigna el caracter $\bar{\Phi}$ es inyectiva. Para la sobreyectividad, sea α un caracter de $\hat{G}/p_n\hat{G}$, entonces $\alpha \circ \pi \in \hat{\hat{G}}$ y

$p_n(\alpha \circ \pi) = 0$. Es claro que $\overline{\alpha \circ \pi} = \alpha$. Luego, esta correspondencia es biyectiva. Por último, el ítem II) del Teorema 3.3.4 implica que la cantidad de caracteres de $\hat{G}/p_n\hat{G}$ es p_n y por consiguiente, la cantidad de soluciones de la ecuación $p_n x = 0$ en \hat{G} es p_n . \square

Teorema 3.3.11. ⁸ Si $\text{rank}(\hat{G}) = 1$, entonces $\hat{G}/p_n\hat{G}$ es cíclico.

Demostración. Como el orden de cualquier elemento no nulo en $\hat{G}/p_n\hat{G}$ es p_n , tenemos que este es un grupo abeliano con exponente acotado ²³ y por lo tanto, es la suma directa de grupos cíclicos (Ver ²⁴, Corolario 10.37). Sean $\{\alpha_i + p_n\hat{G}\}_{i \in I}$ los generadores de estos grupos cíclicos. Fijemos $i, j \in I$ cualesquiera. Supongamos por absurdo que $\alpha_i + p_n\hat{G} \neq \alpha_j + p_n\hat{G}$. Como $\text{rank}(\hat{G}) = 1$, tenemos que $\{\alpha_i, \alpha_j\}$ es un conjunto linealmente dependiente; luego, existen $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k\alpha_i = m\alpha_j$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $k, m \neq 0$ y $\text{mcd}(k, m) = 1$. Así,

$$k\alpha_i + p_n\hat{G} = m\alpha_j + p_n\hat{G} \in \langle \alpha_i + p_n\hat{G} \rangle \cap \langle \alpha_j + p_n\hat{G} \rangle = \{0\}.$$

Esto implica que $k\alpha_i + p_n\hat{G} = 0$, y por lo tanto, el orden de $\alpha_i + p_n\hat{G}$, que es p_n , divide a k . Similarmente, $p_n|m$, lo que contradice que $\text{mcd}(k, m) = 1$. De esta forma, para cualesquiera $i, j \in I$, $\alpha_i + p_n\hat{G} = \alpha_j + p_n\hat{G}$. Es decir, todos los generadores en $\hat{G}/p_n\hat{G}$ son iguales y por consiguiente, es cíclico. \square

Definición 3.3.12. Sea G un grupo abeliano libre de torsión. Decimos que las características $(k_n(g))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ y $(k_n(h))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ son **equivalentes** si $k_n(g) = k_n(h)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, excepto en un conjunto finito de índices $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ en el que, para todo $j \in J$, $k_j(g)$ y $k_j(h)$ son finitos.

Proposición 3.3.13. Sea G un grupo abeliano libre de torsión y de rango 1. Si $g, h \in G$ no nulos, entonces sus características son equivalentes.

Demostración. Probaremos primero que las características de g y h son equivalentes cuando existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $h = sg$. Tenemos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, si existe $x \in G$ tal que $p_n^k x = g$, entonces $h = p_n^k s x$. Luego, $k_n(h) \geq k_n(g)$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Esto implica que si $k_n(g) = \infty$, entonces $k_n(h) = \infty$. Supongamos que $p_n \nmid s$, entonces $\text{mcd}(p_n^{k_n(g)}, s) = 1$ y además, existe $x \in G$ tal que $p_n^{k_n(h)} x = h = sg$. Así, existen $r, t \in \mathbb{Z}$ tales que $rp_n^{k_n(g)} + ts = 1$

²³ Un grupo abeliano G tiene **exponente acotado** si existe $n > 0$ tal que $ng = 0$, para todo $g \in G$.

²⁴ J. ROTMAN. *An Introduction to the Theory of Groups*. 4.^a ed. Springer-Verlag, 1995.

y,

$$g = (rp_n^{k_n(g)} + ts)g = p_n^{k_n(g)}(rg + tx).$$

Por lo tanto, $k_n(g) \geq k_n(h)$. En conclusión, si $p_n \nmid s$, entonces $k_n(h) = k_n(g)$. Ahora, en el caso cuando $p_n \mid s$, tenemos que existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\text{mcd}(s, p_n^m) = 1$. De esta forma, usando un argumento similar al anterior probamos que si $k_n(h) = \infty$, entonces $k_n(g) = \infty$. Luego, para $p_n \mid s$, $k_n(g) = \infty \iff k_n(h) = \infty$. En consecuencia, $(k_n(g))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ y $(k_n(h))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ son equivalentes.

Finalmente, en el caso general, como G tiene rango 1, existen $m, s \in \mathbb{Z}$ tales que $mh = sg$. Por lo probado anteriormente, $(k_n(g))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es equivalente a $(k_n(sg))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ y esta sucesión es equivalente $(k_n(h))_{n \in \mathbb{Z}^+}$. Usando la propiedad transitiva, concluimos lo deseado. \square

Como consecuencia de la proposición anterior, obtenemos la siguiente definición.

Definición 3.3.14. Sea G un grupo abeliano libre de torsión de rango 1. Entonces cualquier sucesión de la forma $(k_n(g))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ con $g \neq 0$ es llamada la **característica del grupo G** .

Proposición 3.3.15. Sea $(k_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ una sucesión de enteros no negativos y el símbolo ∞ . Entonces existe G un grupo abeliano libre de torsión y rango 1 tal que la característica de G sea esta sucesión.

Demostración. Considere el siguiente subgrupo aditivo de \mathbb{Q} , $G = \langle p_n^{-l_n} : l_n \leq k_n \rangle$. Es claro la característica del elemento 1 es la sucesión $(k_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$. Además, como \mathbb{Q} es un grupo abeliano libre de torsión de rango 1, concluimos que G también lo es y por lo tanto, la característica de G es $(k_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$. \square

A partir de estas propiedades de los grupos de rango 1, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 3.3.16. ⁸ Sea G un grupo topológico compacto divisible. Si \hat{G} es de rango 1, entonces la característica $(k_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ del grupo \hat{G} define los cardinales λ_p presentados en la descomposición (3.3) de G .

Demostración. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $k_n = \infty$, entonces por la Proposición 3.3.13 se tiene que $k_n(\alpha) = \infty$, para todo $\alpha \in \hat{G}$. Por el Teorema 3.3.9, el grupo $C_{p_n^\infty}$ no aparece en la descomposición (3.3) de G . Ahora, si $k_n \neq \infty$, entonces al igual que en el Teorema 3.3.9,

$\hat{G}/p_n\hat{G}$ es no nulo. Además, el Teorema 3.3.11 implica que este grupo cociente es cíclico y así, usando el Teorema 3.3.10 concluimos que el grupo $C_{p_n^\infty}$ aparece exactamente una vez en la descomposición de G . \square

Corolario 3.3.17. ⁸ *Cualquier grupo de la forma*

$$\bigoplus_{2^{\aleph_0}} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{i \in I} C_{p_i^\infty},$$

con $I \subseteq \mathbb{Z}^+$ un conjunto de índices finito o infinito y $(n_i)_{i \in I}$ una sucesión de enteros positivos diferentes, admite una topología compacta.

Demostración. Considere la sucesión $(k_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ definida por:

$$k_n = \infty, \text{ si } n \notin \{n_i\}_{i \in I} \quad \text{y} \quad k_n = 0, \text{ si } n \in \{n_i\}_{i \in I}.$$

Por la Proposición 3.3.15, sabemos que existe G un grupo abeliano libre de torsión y de rango 1, tal que la característica de G sea $(k_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$. Dotamos a G de la topología discreta. Así, por el ítem IV) del Teorema 3.3.4, \hat{G} es compacto y conexo. Luego, el ítem v) del mismo teorema implica que \hat{G} es también divisible. De esta forma, llamando $H = \hat{G}$ tenemos que H es un grupo topológico compacto divisible, cuyo grupo de caracteres, $\hat{H} \cong G$, es de rango 1. Por el Corolario 3.3.16,

$$H = \bigoplus_T \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{i \in I} C_{p_i^\infty}.$$

Más aún, por la Observación 3.3.8, $|G| = \aleph_0$ y por lo tanto, el ítem VI) del Teorema 3.3.4 implica que $|H| = |\hat{G}| = 2^{\aleph_0}$. No obstante, $|H| = |T|$ y así, concluimos lo deseado. \square

Finalizamos esta sección con la caracterización algebraica de estos grupos.

Teorema 3.3.18. ⁸ *Un grupo abeliano divisible G admite una topología compacta si, y solo si, es de la forma*

$$G \cong \bigoplus_T \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{\lambda_p} C_{p^\infty},$$

donde

- I) $|T| = 2^m$, $m \geq \aleph_0$;
- II) λ_p es finito o $\lambda_p = 2^{\aleph}$, $\aleph \geq \aleph_0$;

III) para cada $p \in \mathbb{P}$, $|T| \geq \lambda_p$.

Demostración. Sea G un grupo abeliano divisible que admite una topología compacta. Por el Teorema 3.3.4, \hat{G} es libre de torsión y discreto. Llamemos $m = |\hat{G}|$ y al ser este grupo libre de torsión, $m \geq \aleph_0$. Además, los ítem I) y VI) del mismo teorema, implican que $|G| = |\hat{G}| = 2^m$. Mostraremos que la parte libre de torsión de \hat{G} también tiene cardinal 2^m . En primer lugar, supongamos que el rango de \hat{G} es k , con k un cardinal infinito. Tenemos que \hat{G} está contenido en un \mathbb{Q} -espacio vectorial de dimensión k y como k es infinito, la cardinalidad de este espacio vectorial es k . Dado que $k \leq m$, lo anterior implica que $m = k$.

Ahora, fijemos $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ un conjunto maximal linealmente independiente de \hat{G} y x_1, x_2 dos elementos linealmente independientes de la parte libre de torsión de K . Sea Φ cualquier función arbitraria de $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ a $\{x_1, x_2\}$. Afirmamos que esta función puede ser extendida a un carácter de \hat{G} . De hecho, sea $\alpha \in \hat{G}$, entonces el conjunto $\{\alpha\} \cup \{\alpha_i\}_{i \in I}$ es linealmente dependiente y por lo tanto, existen $m \in \mathbb{Z}^+$, índices $i_1, \dots, i_m \in I$ y enteros n, n_{i_j} no nulos para cada $1 \leq j \leq m$ tales que

$$n\alpha = n_{i_1}\alpha_{i_1} + \dots + n_{i_m}\alpha_{i_m}. \quad (3.4)$$

Como K es un grupo divisible, existe $z \in K$ tal que $nz = n_{i_1}\Phi(\alpha_{i_1}) + \dots + n_{i_m}\Phi(\alpha_{i_m})$. Además, podemos escribir $z = x + y$, con x que pertenece a la parte libre de torsión de K y $y \in tK$. Así, $nz - nx = ny$ pertenece a ambas partes y por tanto, $nz = nx$. Esto quiere decir que existe un único x en la parte libre de torsión de K que satisface

$$nx = n_{i_1}\Phi(\alpha_{i_1}) + \dots + n_{i_m}\Phi(\alpha_{i_m}).$$

De esta forma, definimos $\Phi(\alpha) = x$. Note que el valor de Φ en α no depende de la descomposición presentada en (3.4), pues si tenemos que

$$s\alpha = s_{i_1}\alpha_{i_1} + \dots + s_{i_m}\alpha_{i_m}$$

(podemos suponer que en ambas descomposiciones se usan los mismos índices en I , completando con ceros los escalares necesarios), entonces

$$(sn_{i_1} - s_{i_1}n)\alpha_{i_1} + \dots + (sn_{i_m} - s_{i_m}n)\alpha_{i_m} = 0.$$

Dado que $\{\alpha_{i_j}\}_{j=1}^m$ es linealmente independiente, concluimos que $sn_{i_j} = ns_{i_j}$, para todo

$1 \leq j \leq m$. Por ende, si x' es el único elemento en la parte libre de torsión de K tal que $sx' = s_{i_1}\Phi(\alpha_{i_1}) + \cdots + s_{i_m}\Phi(\alpha_{i_m})$, entonces

$$\begin{aligned} snx' &= ns_{i_1}\Phi(\alpha_{i_1}) + \cdots + ns_{i_m}\Phi(\alpha_{i_m}) \\ &= sn_{i_1}\Phi(\alpha_{i_1}) + \cdots + sn_{i_m}\Phi(\alpha_{i_m}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $nx' = n_{i_1}\Phi(\alpha_{i_1}) + \cdots + n_{i_m}\Phi(\alpha_{i_m})$ y así $x = x'$. Esto implica que Φ está bien definida. Por otro lado, de la definición de Φ tenemos que

$$\Phi(n_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + n_{i_m}\alpha_{i_m}) = \Phi(n\alpha) = n_{i_1}\Phi(\alpha_{i_1}) + \cdots + n_{i_m}\Phi(\alpha_{i_m}).$$

Luego, Φ es un homomorfismo y como \hat{G} es discreto, $\Phi \in \hat{\hat{G}}$. En consecuencia, Φ es un carácter de orden infinito de \hat{G} y de esta manera, existe una correspondencia inyectiva entre $\{x_1, x_2\}^{\{\alpha_i\}_{i \in I}}$ y la parte libre de torsión de $\hat{\hat{G}}$. Como claramente el cardinal de la parte libre de torsión de $\hat{\hat{G}}$ es menor o igual a 2^m , lo anterior nos permite concluir que el cardinal de esta parte libre de torsión es exactamente 2^m .

En el caso donde rango de \hat{G} es k , con k un cardinal finito, fijamos $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ un conjunto maximal linealmente independiente de \hat{G} y x_1 en la parte libre de torsión de K . Sin embargo, variamos x_2 también en esta parte libre de torsión y como $K \cong \bigoplus_{2^{\aleph_0}} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} C_{p^\infty}$, tenemos 2^{\aleph_0} posibilidades a x_2 . Siguiendo el argumento usado en el caso anterior, construimos 2^{\aleph_0} elementos en la parte libre de torsión de $\hat{\hat{G}}$ y como en este caso, $m = \aleph_0$, concluimos lo deseado. Ahora bien, como $G \cong \hat{\hat{G}}$, lo probado implica que $|T| = 2^m$, con $m \geq \aleph_0$. Veamos que se cumple el ítem iii). Si suponemos por absurdo que algún $\lambda_p > 2^m$, entonces

$$2^m = |G| = \left| \bigoplus_T \mathbb{Q} \right| \left| \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{\lambda_p} C_{p^\infty} \right| = 2^m \mu,$$

con $\mu \geq \lambda_p$, lo que es un absurdo. Por lo tanto, $\lambda_p \leq |T|$, para todo $p \in \mathbb{P}$. Por último, veamos la condición ii). Sea $p \in \mathbb{P}$. Dado que $G \cong \hat{\hat{G}}$, tenemos que $G[p] \cong \hat{\hat{G}}[p]$. Al igual que en la demostración del Teorema 3.3.10, existe una correspondencia biyectiva entre $\hat{\hat{G}}[p]$ y los caracteres de $\hat{G}/p\hat{G}$. Luego, si $\hat{G}/p\hat{G}$ es finito, entonces $|G[p]|$ es finito y por consiguiente, λ_p es finito. Por otro lado, si $\hat{G}/p\hat{G}$ es infinito y tiene cardinal \aleph , por el ítem vi) del Teorema 3.3.4, $|G[p]| = 2^\aleph$ y así, $\lambda_p = 2^\aleph$.

Recíprocamente, supongamos que G es un grupo de la forma (3.1) que cumple las condiciones I)-III). Como $|T| = 2^m 2^{\aleph_0}$, G puede ser expresado como la suma directa de 2^m grupos de la forma

$$\bigoplus_{2^{\aleph_0}} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{i \in I} C_{p^{n_i} \infty},$$

con $(n_i)_{i \in I}$ una sucesión infinita o finita de enteros positivos diferentes. Por el Corolario 3.3.17, cada uno de estos grupos admite una topología compacta y por consiguiente, G con la topología producto sería un grupo topológico compacto. \square

3.4. Una topología compacta para $pM_X(G)$

Sea \mathbb{K} un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal 2^m , con $m \geq \aleph_0$. En lo que sigue fijaremos $X \in C(G)$ y s el cardinal de sus S_3 -órbitas efectivas. El primer paso para definir una topología compacta para $pM_X(G)$, es obtener una topología compacta para \mathbb{K}^* .

Por el Corolario 3.1.16 y el Teorema 3.3.18, existe τ una topología tal que (\mathbb{K}^*, τ) es un grupo topológico compacto. Como consecuencia del Teorema 3.2.5, obtenemos un grupo topológico compacto $((\mathbb{K}^*)^s, \tau^s)$, donde $\tau^s = \prod_{i \leq s} \tau$. Ahora, sea $\varphi_X: (\mathbb{K}^*)^s \rightarrow pM_X(G)$ el epimorfismo definido en la Sección 3.1. Entonces la componente $(pM_X(G), \tau_{\varphi_X})$ es un grupo topológico compacto, donde τ_{φ_X} es la topología cociente inducida por φ_X . Esto implica que cada componente del multiplicador parcial de Schur es un grupo divisible que admite una topología compacta.

Observación 3.4.1. Inicialmente, consideramos el caso del cuerpo de los números complejos y observamos que es posible dotar a \mathbb{C}^* de una topología compacta sin recurrir al Teorema 3.3.18, como se describe a continuación:

Dado un espacio topológico (X, τ) y $Y \subseteq X$, denotamos por τ_Y a la topología de subespacio de Y , esto es, $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$. Es bastante conocido que $(\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^1})$ es un subespacio compacto de \mathbb{C} . Por el Corolario 3.1.15, existe $\lambda: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$ isomorfismo de grupos. Luego, definiendo la topología cociente $\tau = \{U \subseteq \mathbb{C}^* : \lambda^{-1}(U) \in \tau_{\mathbb{S}^1}\}$, tenemos por el ítem II) de la Proposición 3.2.4 que (\mathbb{C}^*, τ) es un grupo topológico compacto.

Teorema 3.4.2. *Sea \mathbb{K} un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal 2^m , con $m \geq \aleph_0$. Considere $pM(G)$ sobre el cuerpo \mathbb{K} y $X \in C(G)$. Supongamos que s , el cardinal de las*

S_3 -órbitas efectivas de X , es finito. Entonces

$$pM_X(G) \cong \bigoplus_{2^{\aleph}} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} C_{p^\infty}^{\lambda_p},$$

donde $\aleph \geq \aleph_0$ y para cada $p \in \mathbb{P}$, λ_p es finito. Más aún, cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tenemos que $\aleph = \aleph_0$.

Demostración. Usando la Proposición 3.1.18 y el Teorema 3.3.18, concluimos que cada λ_p en la descomposición de $pM_X(G)$ es finito y la cantidad de copias \mathbb{Q} es 2^{\aleph} con $\aleph \geq \aleph_0$. Por otro lado, cuando trabajamos sobre el cuerpo de los complejos,

$$|pM_X(G)| = \left| \bigoplus_{2^{\aleph}} \mathbb{Q} \right| \left| \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} C_{p^\infty}^{\lambda_p} \right| = 2^{\aleph} \cdot \aleph_0 = 2^{\aleph}.$$

Sin embargo, del epimorfismo φ_X tenemos que $|pM_X(G)| \leq 2^{\aleph_0}$. Además, $\aleph \geq \aleph_0$ y por lo tanto, $2^{\aleph} \geq 2^{\aleph_0}$. Luego, $2^{\aleph} = 2^{\aleph_0}$. \square

Bibliografía

- BAEZ, J. “Semigrupo de Picard y acciones parciales”. En: *Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander* (2016) (vid. pág. 17).
- CAÑAS, A. “Sobre grupos divisibles e isomorfismos relacionados”. En: *Tesis de Pregrado, Universidad Industrial de Santander* (2015) (vid. págs. 75, 76).
- DE LIMA, H. y H. PINEDO. “On the total component of the partial Schur multiplier”. En: *Journal of the Australian Mathematical Society* 100 (2016), págs. 374-402 (vid. pág. 10).
- DOKUCHAEV, M. y E. JEREZ. “The Twisted Partial Group Algebra and (Co)homology of Partial Crossed Products”. En: *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series* 55.33 (2024) (vid. pág. 9).
- DOKUCHAEV, M. y B. NOVIKOV. “Partial projective representations and partial actions”. En: *Journal of Pure and Applied Algebra* 214.3 (2010), págs. 251-268 (vid. págs. 9, 29, 31-33, 35, 37, 39, 43, 44, 46, 50).
- “Partial projective representations and partial actions”. En: *Journal of Pure and Applied Algebra* 216.2 (2012), págs. 438-455 (vid. págs. 9, 37, 51, 55, 57, 58, 61).
- DOKUCHAEV, M., B. NOVIKOV y H. PINEDO. “The partial Schur multiplier of a group”. En: *Journal of Algebra* 392 (2013), págs. 199-225 (vid. págs. 9, 37, 57, 59-61, 63, 67, 69, 72).
- DOKUCHAEV, M. y N. SAMBONET. “Schur’s theory for partial projective representations”. En: *Israel Journal of Mathematics* 232 (2019), págs. 373-399 (vid. pág. 10).
- EXEL, R. “Partial actions of groups and actions of inverse semigroups”. En: *Proc. Amer. Math. Soc* 126 (1998), págs. 3481-3494 (vid. pág. 25).
- FUCHS, L. *Abelian Groups*. Springer, 2015 (vid. pág. 89).

- GONZALEZ, A. "Semigrupos Inversos y Acciones Parciales". En: *Tesis de Pregrado, Universidad Industrial de Santander* (2016) (vid. págs. 17, 24).
- HOWIE, J. *Fundamentals of Semigroup Theory*. (London Mathematical Society Monographs New Series). Clarendon Press Oxford, 1995 (vid. págs. 17, 21, 56).
- HRBACEK, K. y T. JECH. *Introduction to Set Theory, Revised and Expanded*. 3.^a ed. CRC Press, 1999 (vid. pág. 78).
- HULANICKI, A. "Algebraic characterization of abelian divisible groups which admit compact topologies". En: *Fundamenta Mathematicae* 44.2 (1957), págs. 192-197 (vid. págs. 11, 86, 89-93).
- KAPLANSKY, I. *Infinite Abelian Groups*. The University of Michigan, 1954 (vid. pág. 88).
- KARPILOVSKY, G. *The Schur Multiplier*. (London Mathematical Society Monographs New Series). Clarendon Press Oxford, 1987 (vid. págs. 16, 17, 58).
- KELLENDONK, J. y M. LAWSON. "Partial Actions of Groups". En: *International Journal of Algebra and Computation* 1 (2004), págs. 87-114 (vid. pág. 29).
- MONTEIRO, E. *Projective representations of groups*. 2017. URL: https://alistairsavage.ca/pubs/Mendonca-Projective_Representation_of_Groups.pdf (vid. pág. 12).
- NOVIKOV, B. "On projective representations of semigroups". En: *Dopovidi AN USSR* 6 (1979), págs. 472-475 (vid. págs. 57, 59).
- PINEDO, H. "On the total component and the torsion part of the partial Schur multiplier". En: *Communications in Algebra* 45.3 (2017), págs. 954-966 (vid. págs. 10, 82).
- PONTRJAGIN, L. *Topological Groups*. Princeton Mathematical Series, 1946 (vid. págs. 87, 88).
- ROTMAN, J. *An Introduction to the Theory of Groups*. 4.^a ed. Springer-Verlag, 1995 (vid. pág. 91).