NOCIÓN DE EQUILIBRIOS EN TEORÍA DE JUEGOS

MANUEL JOHANY ARIZA OSMA

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2005

NOCIÓN DE EQUILIBRIOS EN TEORÍA DE JUEGOS

MANUEL JOHANY ARIZA OSMA

Monografía presentada como requisito para optar al titulo de *Licenciado en Matemáticas*

Luis Alejandro Palacio
Director
Henry Lamos
Codirector

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2005

Dedicatoria

A mi familia por su gran comprensión, cariño y apoyo, a Marce por todo su amor y compañía; pero especialmente a nuestro nido de ilusiones JM.

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

A Dios por que todo es posible con él.

A Luis Alejandro Palacio, un joven y brillante profesor por su gran ayuda en la realización de este documento.

A Julio Cesar Ruiz por su ayuda en Visual Basic .NET.

A Marce por todo su tiempo y además algunas correcciones en el texto final.

TITULO: NOCIÓN DE EQUILIBRIOS EN TEORÍA DE JUEGOS*
AUTOR: MANUEL JOHANY ARIZA OSMA**

PALABRAS CLAVES:
Estrategia
Combinación de estrategias
Equilibrio de Nash.

DESCRIPCIÓN

En algunas situaciones la interacción de los individuos es crucial para un determinado fin. Estas interacciones son analizadas a partir de herramientas conceptuales que da la teoría de juegos; donde los individuos que participan tratan de obtener lo mejor para cada uno, y se destacan por su importancia las nociones de equilibrio que son una combinación de estrategias en la cual ningún jugador tiene incentivos a desviarse unilateralmente para mejorar sus pagos.

La noción de equilibrio es importante puesto que, una vez que se ha planteado una situación, es deseable intentar hacer alguna predicción teórica sobre los resultados, debido a esto se analizan las diferentes nociones de equilibrio: equilibrio de Nash, equilibrio perfecto en subjuegos, equilibrio bayesiano, equilibrio bayesiano perfecto en los que, cada uno cada vez es más restrictivo para intentar eliminar los equilibrios, permitidos por nociones de equilibrio más débiles.

Esta monografía esta concebida para presentar teoría de juegos a las personas que, desconocen el tema, presenta el desarrollo teórico y muestra detalladamente los ejemplos, las aplicaciones se dan como referencia [1], incluye además un software desarrollado en Visual Basic .NET, que halla los equilibrios de Nash, y se muestran algunos ejemplos en el anexo.

---

*Monografía

** Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas.
Director: Luis Alejandro Palacio

TITLE: NOTION OF EQUILIBRIUMS THEORY OF GAMES*
AUTHOR: MANUEL JOHANY ARIZA OSMA**

KEY WORDS:
Strategy
Combination of strategies
Nash's equilibrium.

DESCRIPTION

In some situations the interaction of the people is crucial for a certain purpose. These interactions are analyzed by conceptual tools that the theory of games gives; where the people that take part try to obtain the best for each one, and are outlined for yours importance the notions of equilibrium that are a combination of strategies in which no player has incentives to turn aside unilaterally to improve theirs payments.

The notion of equilibrium is important since, as soon as a situation has appeared, is desirable to try to do some theoretical prediction on the results, due to this the different notions of equilibrium are analyzed: Nash's equilibrium, perfect equilibrium in subgames, equilibrium Bayesiano, equilibrium Bayesiano perfect in that, each one every time is more restrictive to try to eliminate the equilibrium allowed by notions of equilibrium more weak.

This monograph this conceived to present theory of games to the persons that, they do not know the topics, presents the theoretical development and shows detailed the examples, the applications give themselves as reference [1], it includes besides a software developed in Visual Basic .NET, which finds Nash's equilibriums, and some examples appear in the annexe.

---

*Monograph

** Faculty of sciences. Mathematics school.
Director: Luis Alejandro Palacio

Índice General

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

VISIÓN GENERAL

La Teoría de Juegos es una manera formal de analizar la interacción entre un grupo de agentes[1] que actúan en forma estratégica, donde se analizan las decisiones óptimas que deben tomar los diversos adversarios en conflicto, por medio de modelos matemáticos que lo describen. Tales decisiones se consideran estratégicas e interdependientes, donde los participantes en el juego actúan teniendo en cuenta las acciones que tomarían los demás.

Es de resaltar que la palabra "juego" se refiere a cuestiones lúdicas o llevadas por el azar; en principio se basó en los juegos de salón, aunque la teoría de juegos no tiene como principal objetivo este estudio. Una terminología alternativa que ilustra más claramente el objeto de la teoría de juegos es el "análisis matemático de conflictos" y la "toma interactiva de decisiones".

La teoría de juegos se divide en dos ramas, una *cooperativa* en la que hay alianzas para actuar en forma mancomunada y la *no-cooperativa*, donde los agentes que participan tratan de obtener lo máximo posible para ellos individualmente, pero si muestran una conducta de cooperación, esto se hará porque tal conducta cooperativa sea lo mejor para cada agente por separado. En esta monografía nos ocuparemos solamente de la teoría de juegos no-cooperativos y de sus dos formas de representación la forma *normal* y la forma *extensiva*, aunque todo juego puede representarse de una u otra forma; sin embargo, los juegos estáticos (juegos de movimientos simultáneos) suelen representarse en forma normal, y los juegos secuenciales en forma extensiva.

Esta teoría tiene una amplia aplicación y trata situaciones de carácter social, jurídico, político, biológico y desde luego militar, aunque sus mayores aportes los ha hecho a la economía. Los precursores de la teoría de juegos son Zermelo (1913), Borel (1921) y Von

[1]Un agente puede ser una empresa, un grupo de personas o un jugador.

Neumann (1928) estudiando los equilibrios de tipo *minimax* en juegos de suma-cero, es decir, juegos en los que lo que gana un jugador lo pierde su rival. Un gran avance para la teoría de juegos ocurre, con la publicación del libro de Neumann y Morgenstern (1944) *Theory of Games and Economic Behavior* (*Teoría de juegos y el comportamiento económico*), en el que se recogen las bases de la teoría de juegos. A mediados del siglo, John Nash (1950) en su tesis de doctorado definió el equilibrio que lleva su nombre, y demostró su existencia en todos los juegos no-cooperativos, lo que permitió extender la teoría a contextos más generales que los de suma cero. Durante esa época, el Departamento de Defensa de los EE.UU. y la RAND Corporation[2] fueron los que financiaron las investigaciones en el tema, debido a que la mayor parte de las aplicaciones de los juegos de tipo suma-cero se concentraban en temas de estrategia militar.

Harsanyi (1967) extendió la teoría a juegos de información incompleta, donde los jugadores no conocen todas las características del juego, por ejemplo, no saben lo que obtienen los otros jugadores como recompensa a sus acciones. Así mismo algunas situaciones analizadas, mostraban pocas predicciones ante la multiplicidad de resultados de un juego, lo que llevó a Selten[3] (1975) a refinar tales resultados y definir el equilibrio perfecto en subjuegos para juegos de información completa, y además una generalización para el caso de juegos de información imperfecta.

El problema planteado en esta monografía es de interacción; como actuar cuando mis ganancias, dependen tanto de mi elección como la de los demás jugadores, problema que solucionaremos a medida que avancemos en los capítulos.

A medida que vayamos introduciéndonos en el tema de la teoría de juegos utilizaremos varios conceptos, entre los que tenemos:

1. Tipo de juegos
    a) Juegos estáticos: los jugadores eligen sus estrategias de forma simultánea, es decir, cada jugador elige sin conocer las decisiones de los demás.
    b) Juegos secuenciales: los jugadores actúan en determinado orden y las decisiones se toman de forma consecutiva.
2. Tipo de información
    a) Información completa: el juego, las acciones y la función de utilidad de cada jugador a partir de la acción elegida, es de conocimiento común de todos los jugadores.

[2]La RAND es una institución de investigación en estrategias, catalogada como la empresa de las fuerzas aéreas dedicada a la caza de talentos, en el cual brillantes académicos se dedicaban a reflexionar sobre la guerra nuclear y la nueva teoría de juegos.

[3]John Forbes Nash, John C. Harsanyi, Reinhard Selten recibieron el Premio Nobel de Economía por sus contribuciones a la teoría de juegos.

b) Información incompleta: cuando al menos un jugador no conoce todos los componentes del juego, en particular, la utilidad que reciben otros jugadores debido a sus acciones.

c) Información perfecta: en cada momento del juego el jugador a quien le corresponde decidir conoce la historia completa de todas las decisiones tomadas hasta ese momento.

d) Información imperfecta: en algún momento del juego el jugador a quien le corresponde decidir no conoce la historia completa del juego.

3. Características del juego

a) Hipótesis de racionalidad: este principio está en el corazón de la teoría básica de juegos, y dice esencialmente, que cada jugador siempre prefiere resultados con pagos altos a aquellos con pagos bajos.

b) Acción: es una de las opciones visibles que el jugador tiene disponibles para alcanzar el objetivo buscado. El orden del juego determina en qué momento esas acciones están disponibles.

c) Estrategia: es un plan completo de acciones, que le dice a un jugador qué hacer en cada momento, es decir, una especificación de acciones para cada momento en que le toca elegir a un jugador. Una combinación de estrategias está compuesta por una estrategia para cada uno de los jugadores.

d) Equilibrio de Nash: es una combinación de estrategias en la cual ningún jugador tiene incentivos a desviarse unilateralmente para mejorar sus pagos.

CAPÍTULO 2

JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA

El pensamiento estratégico es el arte de vencer al adversario,
sabiendo que éste trata de hacer lo mismo que uno.
Avinash Dixit Barry Nalebuff, *Thinking strategically* (1991).

2.1. Introducción

Para iniciar analizaremos juegos en los que los jugadores toman sus decisiones sin conocer las de los demás y el conjunto de estas decisiones determina el resultado del juego. Estos juegos se conocen como juegos estáticos o de movimientos simultáneos. Dentro de esta clase analizaremos en primer lugar los de *información completa*, es decir, todos los jugadores conocen las características del juego, las acciones y la función de utilidad de cada jugador a partir de la combinación de acciones elegidas. La representación de este tipo de juegos está dada por la forma normal, que analizaremos en este capítulo.

Consideremos la siguiente situación analizada por Albert Tucker en 1950, conocida como el dilema de los prisioneros, donde dos sospechosos acusados de un delito, son arrestados y enviados a celdas separadas. La policía no tiene pruebas suficientes para condenarlos, y les propone un trato. Cada uno puede acusar a su cómplice; si ambos se acusan mutuamente, serán sentenciados a cinco años de cárcel. Si ambos callan, la policía no tendrá suficientes pruebas para culparlos del crimen más grave, y serán condenados por un delito menor y sentenciados a dos años de cárcel. Finalmente, si uno acusa al otro y este calla, el que acusó al otro será puesto en libertad inmediatamente, y el otro será sentenciado a siete años en prisión, cinco años por el delito y dos más por obstrucción a la justicia.

Supongamos que a cada prisionero no le interesa cuánto tiempo encierren a su compañero, sino sólo cuánto tiempo estará él en la cárcel, una situación en la que cada jugador quiere

sacar el mejor partido; si un sospechoso va a acusar al otro, sería mejor para este acusarlo también, y con ello ir a la cárcel dos años, en lugar de callar y pasar siete años en prisión. Del mismo modo, si un sospechoso va a callar, para el otro sería mejor acusarlo y con ello ser puesto en libertad inmediatamente, en lugar de callar y permanecer en prisión durante dos años, así la combinación de estrategias acusar será para cada uno la mejor respuesta a la situación, siendo este un equilibrio de Nash. Analizaremos esta situación en el ejemplo 2.4.1.
A continuación se presentarán las herramientas teóricas para modelar este tipo de problemas, lo cual se conoce como juegos en forma normal.

2.2. Juegos en forma normal

Un juego en forma normal está conformado por los siguientes elementos:

i) Los jugadores que tienen como meta maximizar su utilidad a través de las estrategias que tomen.

ii) Las estrategias de cada jugador: que son un plan de acción para todo momento en que le toca elegir; como estos juegos son de movimientos simultáneos, las estrategias coinciden con las acciones.

iii) El pago que cada jugador recibe de cada posible combinación de estrategias (una combinación de estrategias es una estrategia por cada uno de los jugadores).

En un juego en forma normal los jugadores eligen sus estrategias en forma simultánea, es decir, cada jugador elige su jugada sin conocer las decisiones de los demás, y los jugadores poseen información completa acerca del juego.

Definición 2.2.1 (Juego finito en forma normal)**.** Un juego finito entre n jugadores en forma normal es una $3n-tupla$ $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ donde $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ es el conjunto que indica los jugadores; $S_i = (s_{i_1}, \dots, s_{i_m})$ es el conjunto finito de m estrategias puras para el jugador $i \in N$, aunque la notación suele simplificarse designando por s_i a un elemento arbitrario de S_i; $u_i : \prod_{i\in N} S_i \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función de pagos (utilidad) para el jugador $i \in N$ que asigna un pago (número real) a cada combinación de estrategias, $s = (s_i, \dots, s_m)$, donde el producto cartesiano $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = \prod_{i\in N} S_i$ es el conjunto de combinaciones de estrategias de los jugadores.

Un juego finito en forma normal $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ es un juego con información completa si Γ es de *conocimiento común*, es decir, todos los jugadores conocen Γ; así mismo, cada jugador sabe que los demás también conocen Γ, cada jugador sabe que cada jugador sabe que los demás conocen Γ, y así sucesivamente.

Notación 1. *Para cada jugador i distinguimos por el subíndice $-i$ la $(n-1)$–tupla de estrategias de los demás jugadores, es decir*

$$s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_m) \in S_{-i}.$$

Dada la notación anterior, la combinación de estrategias s se puede escribir como $s = (s_i, s_{-i})$.

Como ejemplos de juegos en forma normal, se destacan los juegos con dos jugadores, que se describen mediante una bimatriz[1] de resultados en la que se incluyen las diferentes estrategias de ambos jugadores y las utilidades respectivas; en cada entrada tiene los valores (pagos) que recibe cada jugador. Siempre supondremos que el jugador 1 es el que elige entre las filas y el jugador 2 el que elige entre las columnas; por convención, el primer puesto en cada celda corresponde al pago del jugador fila, y el segundo corresponde al jugador columna.

Ejemplo 2.2.1 (Juego de las monedas)**.** Dos jugadores, 1 y 2, colocan cada uno una moneda frente a ellos, cubriéndola. Ninguno sabe el lado de la moneda que escogió el otro, pero sí el propio; entonces se descubren las monedas, y si las dos muestran la misma cara (las dos cara (C) o sello (S)) el jugador 1 gana, obteniendo un pago de una unidad por parte del jugador 2. Si las dos monedas muestran lados distintos, el jugador 2 gana, recibiendo un pago de una unidad del jugador 1.
A continuación se muestra el análisis de la situación.

1. $N = \{1, 2\}$
2. $S_1 = \{C, S\}, \quad S_2 = \{c, s\}$
3. $S = S_1 \times S_2 = \{(C, c), (C, s), (S, c), (S, s)\}$
4. $u_1 : S \longrightarrow \mathbb{R}$, por ejemplo: $u_1(C, c) = 1$,
   $u_2 : S \longrightarrow \mathbb{R}$, por ejemplo: $u_2(C, c) = -1$.

		Jugador 2	
		c	s
	C	1, -1	-1, 1
Jugador 1	S	-1, 1	1, -1

Tabla 2.1: *Monedas emparejadas.*

Una particularidad de este juego es que a cada jugador le gustaría adivinar la jugada del otro y que el otro no adivinase la suya. A estos juegos suele llamárseles de conflicto puro, donde lo que gana un jugador lo pierde su rival.

[1] Es una matriz en la que cada celda tiene dos números, y no uno como la matriz ordinaria.

2.2.1. Principio-solución

Luego de reducir la interacción entre los agentes a un juego en forma normal es necesario determinar la forma de resolverlo, teniendo en cuenta que para todo principio solución se tiene la siguiente hipótesis: *los agentes son "racionales", siempre prefieren estrategias con pagos altos a estrategias con pagos bajos.* Los principio solución que analizamos son la *dominancia estricta* y el *equilibrio de Nash.*

2.3. Principio solución: Dominancia estricta

Definición 2.3.1. En el juego en forma normal $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$, sean $s_i', s_i'' \in S_i$, posibles estrategias del jugador i. La estrategia s_i' está **estrictamente dominada** por la estrategia s_i'' si para cada combinación posible de las estrategias de los restantes jugadores el pago de i por utilizar s_i' es estrictamente menor que el pago de i por utilizar s_i'':

$$u_i(s_i', s_{-i}) < u_i(s_i'', s_{-i}), \forall s_{-i}. \tag{E.D}$$

Así, los jugadores racionales nunca escogerán estrategias dominadas.

Ejemplo 2.3.1. En el juego de la tabla 2.2 izquierda la estrategia A del jugador 1 está dominada por la estrategia B $(3 > 0,\ 1 > -1)$; así mismo, la estrategia b del jugador 2 está dominada por a $(4 > -2,\ 2 > 0)$. Luego al eliminar las estrategias dominadas el resultado del juego es la combinación de estrategias (B, a).

		Jugador 2	
		a	b
	A	$0, 4$	-1, -2
Jugador 1	B	$3, 2$	$1, 0$

		Jugador 2	
		s_1	s_2
	t_1	$4, 1$	-1, 2
Jugador 1	t_2	$3, 2$	$1, 0$

Tabla 2.2: *Dominancia.*

En el juego de la derecha no existen estrategias dominadas, luego este principio solución no permite ninguna predicción. A continuación abordamos el equilibrio de Nash, un concepto solución que da lugar a predicciones mucho más precisas.

Definición 2.3.2. Una estrategia s_i^* del jugador i es **mejor respuesta** a s_{-i} (las estrategias de los demás jugadores) si:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i.$$

Es decir, una estrategia de un jugador es una mejor respuesta si no existe otra estrategia para este jugador que le de un pago estrictamente mayor sin cambiar las estrategias de los otros jugadores.

2.4. Principio solución: Equilibrio de Nash

En la combinación de estrategias llamada *equilibrio de Nash*, la estrategia elegida de cada jugador debe ser la mejor respuesta ante las estrategias de los demás jugadores. También se puede ver como la situación en el cual ningún jugador podría mejorar su pago escogiendo unilateralmente una estrategia diferente, si supone que los otros continuarán jugando la estrategia previamente escogida; es decir, ningún jugador tiene incentivo alguno para desviarse por su parte del conjunto de estrategias de equilibrio, si los demás jugadores las mantienen. Por ejemplo, en el dilema de los prisioneros, la combinación de estrategias acusar para cada uno es un equilibrio de Nash. Para entender por que, nótese que si el jugador 2 escogiese callar le iría mucho peor que si acusa; de la misma manera, la mejor respuesta de 1 a la elección de 2 es acusar. Tal es el criterio de un equilibrio de Nash: cada jugador está maximizando por su cuenta dadas las supuestas acciones de los otros.

Este principio fue introducido por John Nash en 1950 y se ha posicionado como el concepto central de solución en la teoría de juegos, cuya importancia radica en que si la teoría de juegos ofrece una única solución, esta debe ser un equilibrio de Nash.

Definición 2.4.1. En el juego en forma normal de N jugadores, $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$, la combinación de estrategias $s^* = (s_1^*, \ldots, s_m^*)$ forma un **equilibrio de Nash** si, para cada jugador $i \in N$, la estrategia $s_i^* \in S_i$ es la mejor respuesta del jugador i a las estrategias de los demás jugadores, (s_{-i}^*):

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \tag{E.N.}$$

para cada posible estrategia s_i en S_i; esto es, s_i^* es una solución de

$$\max_{s_i\in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Una relación entre los dos principios solución, dominancia estricta y el equilibrio de Nash, está dada por los siguientes teoremas. Tomando de referencia [1], tenemos:

Teorema 2.4.1. *Si un juego se puede resolver por eliminación de estrategias dominadas, entonces la solución obtenida es un equilibrio de Nash.*

Demostración. Supongamos que la eliminación de estrategias dominadas elimina todas excepto $(s_1^*, \ldots, s_m^*)$, y que esta combinación de estrategias no forma un equilibrio de Nash. Entonces debe existir un jugador i con una estrategia s_i en S_i tal que la definición (E.N.) no se cumple:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) < u_i(s_i, s_{-i}^*), \tag{2.1}$$

y además s_i debe haber sido dominada por alguna otra estrategia s_i' en algún otro punto del proceso, es decir,

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s_i', s_{-i}) \tag{2.2}$$

para cada $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_m)$ combinación de estrategias de los demás jugadores, que puede ser construida a partir de las estrategias que no han sido eliminadas. Puesto que las estrategias de los demás jugadores s^*_{-i} nunca son eliminadas, se cumple debido a (2.2) que

$$u_i(s_i, s^*_{-i}) < u_i(s'_i, s^*_{-i}). \tag{2.3}$$

Ahora bien, si se cumple que $s'_i = s^*_i$ (es decir, si s_i es dominada por la estrategia s^*_i), (2.3) contradice a (2.1) y la demostración está completa. Si $s'_i \neq s^*_i$ debe existir otra estrategia s''_i que domine a s'_i, ya que s'_i no sobrevive al proceso. Así, las desigualdades análogas a (2.2) y (2.3) se cumplen para s'_i y s''_i, que sustituyen a s_i y s'_i respectivamente. Luego si $s''_i = s^*_i$ la demostración esta completa; si no, pueden construirse otras dos desigualdades análogas. Puesto que s^*_i es la única estrategia de S_i que sobrevive al proceso, la repetición de este argumento (en un juego finito) completa la demostración. □

Teorema 2.4.2. *Si en un juego la combinación de estrategias $s^* = (s^*_1, \ldots, s^*_m)$ forma un equilibrio de Nash, entonces sobrevive a la eliminación de estrategias dominadas.*

Demostración. Sea la combinación de estrategias $(s^*_1, \ldots, s^*_m)$ que conforman un equilibrio de Nash, y supongamos que s^*_i es la primera de las estrategias del equilibrio en ser eliminada, por ser dominada. Entonces, debe existir una estrategia s'_i que no ha sido aún eliminada que domina a s^*_i,

$$u_i(s^*_i, s_{-i}) < u_i(s'_i, s_{-i}), \tag{2.4}$$

para cada $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_m)$ combinación de estrategias de los demás jugadores, que puede ser construida a partir de las estrategias que no han sido eliminadas. Puesto que s^*_i es la primera de las estrategias del equilibrio en ser eliminada, las estrategias del equilibrio de los otros jugadores no han sido eliminadas, por lo que en consecuencia de (2.4) es

$$u_i(s^*_i, s^*_{-i}) < u_i(s'_i, s^*_{-i}); \tag{2.5}$$

pero (2.5) es contradicha por la definición (E.N.), pues s^*_i debe ser una mejor respuesta a $(s^*_1, \ldots, s^*_{i-1}, s^*_{i+1}, \ldots, s^*_m)$, por lo que no puede existir una estrategia s'_i que domine estrictamente a s^*_i. Esta contradicción completa la demostración. □

Ejemplo 2.4.1 (Dilema de los prisioneros)**.** Representado en la siguiente bimatriz.

		Prisionero 2	
		Callar	Acusar
	Callar	-2, -2	-7, 0
Prisionero 1	Acusar	0, -7	-5, -5

Tabla 2.3: *Dilema de los prisioneros.*

Si el preso 1 elige callar y el preso 2 acusar, el preso 1 obtiene un pago de -7 (representa 7 años en prisión) y para el preso 2 recibe un pago de 0 (salir libre) y así respectivamente. El dilema de los prisioneros puede ocurrir en cualquier matriz binaria en el que los pagos

dados $0, -2, -5, -7$ son reemplazados por los pagos T; R; P e I respectivamente, siempre que $T > R > P > I$, con la idea de pago referente a tentación, recompensa, penalización e ingenuidad.
Hallar los equilibrios de Nash en un juego consiste en comprobar si cada combinación posible de estrategias satisface la condición de la definición (E.N.); o también, determinar la estrategia que es mejor respuesta para cada jugador dada la combinación de estrategias de los demás, y el equilibrio de Nash será la intersección de las mejores respuestas de los jugadores. Se representa subrayando el pago de mejor respuesta en la bimatriz 2.4; por ejemplo, si el jugador 2 calla, el jugador 1 debe escoger entre sus estrategias callar o acusar, eligiendo racionalmente acusar, obteniendo un mayor pago, puesto que $0 > -2$, por eso el pago de 0 del jugador 1 está subrayado; si el jugador 2 confiesa, lo mejor que debe hacer el jugador 1, es acusar puesto que $-5 > -7$, y el pago de -5 también esta subrayado. Para la elección del jugador 2 se utiliza el mismo criterio. Así, el resultado de equilibrio en el que se encuentran subrayados los pagos es la combinación de estrategias (Acusar, Acusar).

		Prisionero 2	
		Callar	Acusar
	Callar	-2, -2	-7, $\underline{0}$
Prisionero 1	Acusar	$\underline{0}$, -7	$\underline{-5}$, $\underline{-5}$

Tabla 2.4: *Subrayando las mejores respuestas.*

Observemos que existe una situación en la que los dos podrían estar mejor, es decir, si los dos callan; esta situación la llamaremos **Óptimo de pareto**, en la que si un jugador se desvía de su estrategia para mejorar su pago, empeora el pago del otro jugador.

Ejemplo 2.4.2 (Batalla del mar de Bismarck)**.** A mediados del siglo XX, mientras se desarrollaba la Segunda Guerra Mundial se presentó un hecho bastante crítico por el control de Nueva Guinea. El jefe de los aliados, el general Kenney, tenía reportes de inteligencia que indicaban que el ejército japonés haría movimientos de tropa para reforzar su base en Nueva Guinea. El jefe de los japoneses, el almirante Inamura, tenía dos alternativas: tomar una ruta pasando por el norte, o bien otra por el sur de Nueva Bretaña. El viaje les tomaría tres días por cualquiera de las rutas; la ruta por el norte era la más lluviosa y reduciría el bombardeo un día; además, si el general Kenney enviase sus aviones por la ruta equivocada perdería un tiempo de bombardeo de casi un día. En días de bombardeo, el personal de Kenney estimaba para las distintas opciones los resultados que se dan en la siguiente tabla:

		Japoneses	
		Norte	Sur
	Norte	2, -2	2.1, -2.1
Aliados	Sur	1.1, -1.1	3, -3

Tabla 2.5: *Batalla del mar de Bismarck.*

¿Qué rutas se debieron escoger?
Históricamente resulta que los dos comandantes escogieron la ruta norte.

La estrategia Sur de el jugador 2 es dominada por Norte y la eliminará de sus estrategias; el jugador 1 teniendo en cuenta que el jugador 2 es racional, elimina su estrategia Sur que esta dominada por Norte; por el teorema 2.4 la combinación que es un equilibrio de Nash es (Norte, Norte).

		Japoneses	
		Norte	Sur
	Norte	$\underline{3}, \underline{-2}$	$2.1, -2.1$
Aliados	Sur	$1.1, \underline{-1.1}$	$\underline{3}, -3$

Tabla 2.6: *Subrayando las mejores respuestas.*

A continuación veremos un ejemplo de tres jugadores, en los que cada uno tiene a su disposición acciones según se explica.

Ejemplo 2.4.3 (Juego de tres)**.** El jugador 1, elige entre filas, (Alta, Media, Baja) el jugador 2 elige columnas (Izquierda, Centro, Derecha) y el jugador 3 elige entre matrices, A y B.

		Jugador 2			
		Izquierda	Centro	Derecha	
Jugador 1	Alta	$8, 2, 6$	$3, 6, 9$	$4, 0, 5$	A
	Media	$7, 3, 0$	$4, 8, 9$	$3, 1, 2$	
	Baja	$3, 4, 8$	$0, 1, 8$	$3, 4, 0$	

Tabla 2.7: *Juego de tres,*

		Jugador 2			
		Izquierda	Centro	Derecha	
Jugador 1	Alta	$6, 0, 7$	$5, 3, 8$	$6, 6, 8$	B
	Media	$5, 1, 3$	$0, 2, 7$	$4, 0, 3$	
	Baja	$4, 0, 1$	$4, 6, 1$	$3, 0, 0$	

Tabla 2.8: *Juego de tres.*

Para resolver este juego elegimos la mejor respuesta de cada jugador dado lo que hagan los demás, es decir, la mejor respuesta conjunta. Se fijan cada una de las estrategias de los demás jugadores y se elige la mejor respuesta a esas estrategias.
Supongamos que el jugador 2 elige Centro y el jugador 3 elige la matriz B; para hallar la mejor respuesta del jugador 1 entre sus estrategias Alta, Media y Baja, comparamos sus pagos respectivamente de 3,2 y 6, lo que hace que el jugador 1 elija Alta como su estrategia de mejor respuesta.

		Jugador 2			
		Izquierda	Centro	Derecha	
Jugador 1	Alta	$\underline{8}, 2, 6$	$3, \underline{6}, \underline{9}$	$\underline{4}, 0, 5$	A
	Media	$7, 3, 0$	$\underline{4}, \underline{8}, \underline{9}$	$3, 1, 2$	
	Baja	$3, \underline{4}, \underline{8}$	$0, 1, \underline{8}$	$3, \underline{4}, \underline{0}$	

Tabla 2.9: *Juego de tres, subrayando la mejor respuesta,*

		Jugador 2			
		Izquierda	Centro	Derecha	
Jugador 1	Alta	$\underline{6}, 0, \underline{7}$	$\underline{5}, 3, 8$	$\underline{6}, \underline{6}, \underline{8}$	B
	Media	$5, 1, \underline{3}$	$0, \underline{2}, 7$	$4, 0, \underline{3}$	
	Baja	$4, 0, 1$	$4, \underline{6}, 1$	$3, 0, \underline{0}$	

Tabla 2.10: *Juego de tres, subrayando la mejor respuesta.*

Así, las mejores respuestas aparecen subrayadas en las tablas 2.9 y 2.10 y llevan a dos resultados de equilibrio, la combinación de estrategias $[(\text{Alta}, \text{Derecha}, B), (\text{Media}, \text{Centro}, A)]$.

Anteriormente se argumento que si la teoría de juegos ofrece una solución única, ella debe ser un equilibrio de Nash, aunque no se dijo nada si la solución no es única, o aun si no hay, como lo es el caso del juego de las monedas.

Ejemplo 2.4.4 (Juego de las monedas)**.** Si subrayamos las mejores respuestas, observamos que no existe una combinación que sea un equilibrio de Nash:

		Jugador 2	
		c	s
	C	$\underline{1}$, -1	-1, $\underline{1}$
Jugador 1	S	-1, $\underline{1}$	$\underline{1}$, -1

Tabla 2.11: *Monedas emparejadas.*

En cualquier juego en el cual a cada jugador le convenga adivinar la jugada del otro y que el otro no adivine la suya, no existe equilibrio de Nash; en este caso el equilibrio de Nash en estrategias puras falla y no se predice nada acerca del juego.
Sin embargo, si incluimos un elemento de incertidumbre sobre lo que harán los jugadores, por ejemplo, la estrategia definida como un medio de la estrategia C y un medio de la estrategia S, el juego efectivamente tiene solución, en lo que llamaremos *estrategias mixtas.*

2.5. Estrategias mixtas

La noción de estrategia mixta se interpreta como la incertidumbre de un jugador respecto a lo que harán los demás jugadores. Este equilibrio que introduciremos se llama equilibrio de Nash que incluye estrategias mixtas.

Definición 2.5.1. En un juego finito en forma normal $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ una **estrategia mixta** σ_i del jugador i es una distribución de probabilidades sobre estrategias puras S_i. Denotamos por $\sigma_i(s_j)$ la probabilidad que el i-ésimo jugador le asigna a la estrategia pura s_j, y $\Delta_i = \{\sigma_i \in R^m \mid \sigma_i(s_j) \in [0,1] \text{ y } \sum_{j=1}^{m} \sigma_i(s_j) = 1\},$ el conjunto de las estrategias mixtas del jugador i. Δ_i es el simplex unitario en R^m.
Una combinación en estrategias mixtas del juego Γ es una combinación de distribuciones $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$, donde $\sigma_i \in \Delta_i$ para todo i, es decir $\sigma \in \prod_{i=1}^{n} \Delta_i = \Delta$.
El soporte de una estrategia mixta σ_i es el conjunto de estrategias puras las cuales σ_i les asigna probabilidad estrictamente positiva, así mismo las estrategias puras están contenidas en las estrategias mixtas, esto es, a cada σ_i le asigna 1 a cierta estrategia pura y 0 a las otras estrategias.

Respecto al espacio estratégico del jugador i, Δ_i se tiene que es un subconjunto del espacio euclídeo R^m y además que es compacto y convexo; un **conjunto compacto** en R^n es un conjunto que es tanto **cerrado** (es decir, que contiene sus puntos límites) como **acotado** (es decir, que puede ser contenido dentro de una bola de radio finito). Un **conjunto convexo** tiene la propiedad de que el segmento que une dos puntos cualesquiera del conjunto se halla también en el conjunto. Debido a la extensión de las estrategias, es necesario definir los pagos respecto a estas estrategias mixtas.

Definición 2.5.2. La **utilidad esperada** de un jugador debido a la combinación de estrategias mixtas $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ es

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s\in S} \left(\prod_{j=1}^{m} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s), \tag{U.E}$$

donde:
$u_i(s)$: Utilidad que le reporta al jugador i el que se juegue la combinación s;
$\sigma_j(s_j)$: Probabilidad que se juegue la estrategia $s_j \in S_j$;
$\prod_{j=1}^{m} \sigma_j(s_j)$: Probabilidad que se juegue $s \in S$.

A continuación se presenta un ejemplo para la aplicación de las utilidades esperadas, respecto a la incertidumbre sobre sus estrategias mixtas.

Ejemplo 2.5.1 (Cálculo de las utilidades esperadas)**.** Este juego se presenta como ejemplo para calcular las utilidades esperadas.

			Jugador 2	
			(q)	$(1-q)$
			C	D
	(p)	A	$3,2$	$5,1$
Jugador 1	$(1-p)$	B	$4,1$	$2,3$

Tabla 2.12: *Visualización de la utilidad de esperada.*

En este juego ninguno de los jugadores tiene certeza acerca de lo que el contrincante elegirá; por consiguiente, cada uno de ellos asigna probabilidades a las estrategias de acuerdo con sus creencias. El jugador 1 (conjetura respecto a 2), asigna una probabilidad q a la estrategia C, y una probabilidad de $1-q$ a la estrategia D del jugador 2. De igual forma, el jugador 2 asigna una probabilidad p a la estrategia A y una probabilidad de $1-p$ a la estrategia B del jugador 1. Nótese que ellos eligen una probabilidad para su contrincante, no para ellos mismos. Por ejemplo, el jugador 1 recibirá una utilidad de 3 si escoge la estrategia C cuando el jugador 2 elige la estrategia A (con una probabilidad p y una probabilidad q respectivamente). Como se supone que ni el jugador 1 ni el jugador 2 saben cuál es la elección de su oponente, las estrategias son independientes[2]. Por consiguiente la utilidad esperada del jugador 1 de su estrategia A es: $3 \cdot q + 5 \cdot (1-q)$, y la utilidad esperada de su estrategia B es: $4 \cdot q + 2 \cdot (1-q)$. Similarmente, tenemos que para el jugador 2 la utilidad esperada de su estrategia C es: $2 \cdot p + 1 \cdot (1-p)$ y la de su estrategia D es: $1 \cdot p + 3 \cdot (1-p)$. De manera que los pagos de los jugadores por la estrategia mixta $(\sigma_1,\, \sigma_2)$ donde $\sigma_1 = (p, 1-p)$, $\sigma_2 = (q, 1-q)$ serán, utilizando (U.E),

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_1,\, \sigma_2) &= pq \cdot 3 + p(1-q) \cdot 5 + (1-p)q \cdot 4 + (1-p)(1-q) \cdot 2 \\ &= -4pq + 3p + 2q + 2, \\ U_2(\sigma_1,\, \sigma_2) &= pq \cdot 2 + p(1-q) \cdot 1 + (1-p)q \cdot 1 + (1-p)(1-q) \cdot 3 \\ &= 3pq - 2q - 2p + 3. \end{aligned}$$

Analizaremos más adelante algunos ejemplos donde será necesario la utilización de estrategias mixtas, para su solución.

Definición 2.5.3. En el juego en forma normal, $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$, las estrategias mixtas $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_m^*) \in \Delta$ forman un **equilibrio de Nash en estrategias mixtas** si, para cada jugador $i \in N$, la estrategia mixta, σ_i^* es la mejor respuesta del jugador i a las estrategias de los demás jugadores, es decir, si

$$U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*),\ \forall_i,\ \forall \sigma_i. \tag{E.N.M.}$$

Así, una estrategia mixta es un equilibrio de Nash si y sólo si ningún jugador puede aumentar su pago esperado desviándose unilateralmente de la predicción de la estrategia mixta.

[2]Es decir, si dos eventos M y N son independientes, entonces $P(M \bigcap N) = P(M)P(N)$.

2.5.1. Gráfica de mejor respuesta y equilibrio de Nash

En cualquier juego, un equilibrio de Nash (con estrategias mixtas o puras) es la intersección de las funciones de mejor respuesta de los jugadores; aunque graficar solo se puede hacer para dos jugadores cuando utilizan dos estrategias. Para la gráfica de los equilibrios de Nash utilizamos los ejes, que representan las estrategias, como las probabilidades están entre 0 y 1; el gráfico será entre $[0,1]\times[0,1]$ y se indicarán las combinaciones en la siguiente forma, analizando el juego en forma normal de la tabla 2.12:

			Jugador 2	
			(q)	$(1-q)$
			C	D
	(p)	A	$3,2$	$5,1$
Jugador 1	$(1-p)$	B	$4,1$	$2,3$

Tabla 2.13: *Juego muestra para gráfico Nash.*

- $(0,0)$ la combinación $(B,\, D)$
- $(0,1)$ la combinación $(B,\, C)$
- $(1,0)$ la combinación $(A,\, D)$
- $(1,1)$ la combinación $(A,\, C)$

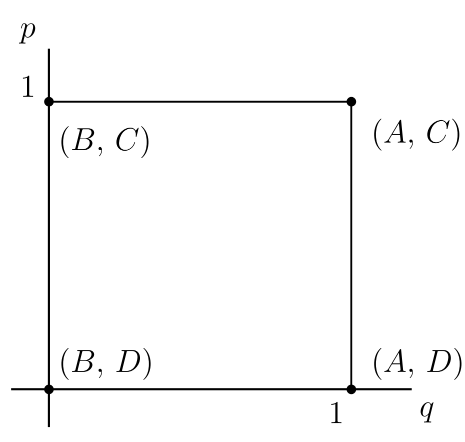

Figura 2.1: *Ubicación de las combinaciones de estrategias.*

Luego utilizando las utilidades esperadas en el ejemplo (2.5.1),

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_1,\, \sigma_2) &= -4pq + 3p + 2q + 2 \\ &= p\,(-4q+3) + 2q + 2, \\ U_2(\sigma_1,\, \sigma_2) &= 3pq - 2q - 2p + 3 \\ &= q(3p-2) + 2p + 3. \end{aligned}$$

Maximizando con respecto a p la utilidad esperada del jugador 1 y con respecto a q la utilidad esperada del jugador 2, calculamos las funciones de mejor respuesta, y tenemos:

$$\max_p \, p\,(-4q+3)+2q+2, \qquad \max_q \, q(3p-2)+2p+3.$$

Puesto que la utilidad esperada del jugador 1 es creciente en p si $-4q+3>0$ y decreciente en p si $-4q+3<0$, la mejor respuesta del jugador 1 es $p=1$ si $q<3/4$, y $p=0$ si $q>3/4$. Cuando $q=3/4$ el jugador 1 es indiferente entre elegir sus estrategias puras y mixtas, puesto que la utilidad esperada del jugador 1 es independiente de p, es decir, cualquier estrategia mixta $(p\,,1-p)$ es mejor respuesta a la estrategia del jugador 2.Por consiguiente $p^*(q)$ es todo el intervalo $[0,1]$.
Esta información se resume en las funciones de mejor respuesta que son:

$$p^*(q)=\begin{cases}1, & \text{si } q<3/4,\\ 0, & \text{si } q>3/4,\\ [0,1], & \text{si } q=3/4;\end{cases} \qquad q^*(p)=\begin{cases}1, & \text{si } p>2/3,\\ 0, & \text{si } p<2/3,\\ [0,1], & \text{si } p=2/3.\end{cases}$$

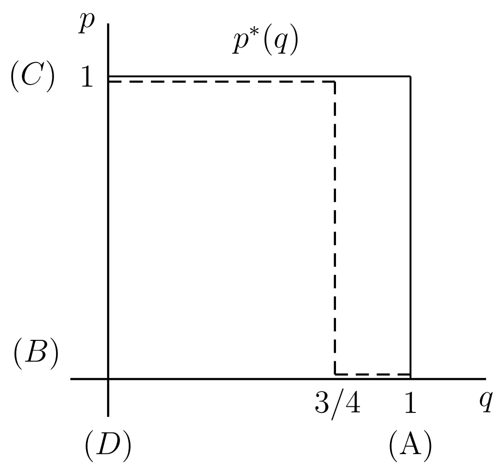

Figura 2.2: *Mejor respuesta del jugador* 1.

Luego, sobreponiendo la intersección de las funciones de mejor respuesta, en la figura 2.4 nos da el equilibrio de Nash en estrategias mixtas [(3/4,1/4),(2/3,1/3)].

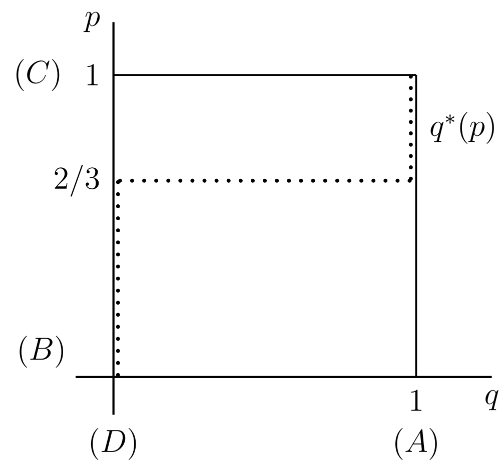

Figura 2.3: *Mejor respuesta del jugador* 2.

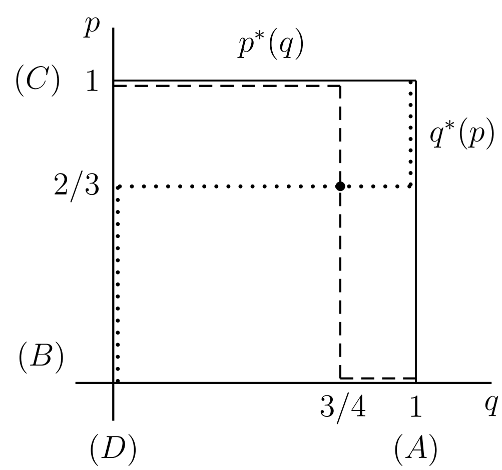

Figura 2.4: *Mejor respuesta conjunta.*

Un teorema que ayuda a caracterizar los equilibrios de Nash, tomando de referencia [2] es el siguiente:

Teorema 2.5.1. *Una condición necesaria y suficiente para que $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_m^*)$ sea un equilibrio de Nash es que para todo jugador i se tenga que si la probabilidad asignada por σ_i^* a una estrategia s_i es positiva, entonces s_i es mejor respuesta a σ_{-i}^**

Demostración. Sean s_i y s_i' estrategias puras del jugador i a las que les ha asignado la probabilidad positiva; p y $1-p$ conforman su estrategia mixta σ_i^*. Vamos a demostrar que en este caso las estrategias s_i y s_i' también son mejores respuestas de i contra la estrategia σ_{-i}^*.
Primero demostramos que el jugador gana lo mismo con s_i que con s_i' cuando los demás jugadores juegan σ_{-i}^*.
Supongamos que eso es falso. Entonces, el jugador i gana más con una estrategia, por ejemplo s_i, que con la otra, s_i', es decir,

$$U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) > U_i(s_i', \sigma_{-i}^*). \tag{2.6}$$

Si al equilibrio de Nash el jugador i asigna una probabilidad p a s_i, y una probabilidad $(1-p)$ a s_i' la utilidad esperada del jugador i con el equilibrio de Nash es

$$U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) = p\, U_i(s_i,\, \sigma_{-i}^*) + (1-p) U_i(s_i',\, \sigma_{-i}^*). \tag{2.7}$$

Pero la utilidad esperada del jugador i cuando juega la estrategia pura s_i se puede escribir como

$$U_i(s_i,\, \sigma_{-i}^*) = p\, U_i(s_i,\, \sigma_{-i}^*) + (1-p) U_i(s_i,\, \sigma_{-i}^*). \tag{2.8}$$

Si calculamos la diferencia entre las ecuaciones (2.8) y (2.7) tenemos:

$$\begin{aligned} U_i(s_i,\, \sigma_{-i}^*) - U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) &= p\, U_i(s_i,\, \sigma_{-i}^*) + (1-p) U_i(s_i,\, \sigma_{-i}^*) \\ &\quad - p\, U_i(s_i,\, \sigma_{-i}^*) - (1-p) U_i(s_i',\, \sigma_{-i}^*) \\ &= U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) - p\, U_i(s_i,\, \sigma_{-i}^*) - (1-p) U_i(s_i',\, \sigma_{-i}^*) \\ &= (1-p)[U_i(s_i,\, \sigma_{-i}^*) - U_i(s_i',\, \sigma_{-i}^*)]. \end{aligned}$$

Por la ecuación (2.6) podemos ver que el resultado es siempre estrictamente positivo, por lo cual el jugador i gana estrictamente más con la estrategia pura s_i que con la estrategia mixta σ^*. Entonces, la combinación σ^* no sería un equilibrio de Nash, contradiciendo la hipótesis. Luego se tiene que $U_i(s_i,\, \sigma_{-i}^*)$=$U_i(s_i',\, \sigma_{-i}^*)$, y además

$$U_i(s_i,\, \sigma_{-i}^*) = U_i(s_i',\, \sigma_{-i}^*) = U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*). \tag{2.9}$$

Es decir, las utilidades esperadas del jugador i jugando la estrategia mixta o jugando s_i o jugando s_i' son iguales, cuando los demás juegan la combinación de equilibrio.
Dos estrategias (o más) son mejores respuestas si no hay otra estrategia que dé mayores utilidades y las utilidades esperadas de estas estrategias deben ser iguales, entonces estas estrategias son también mejores respuestas. □

Ejemplo 2.5.2 (El Dilema del samaritano)**.** Una situación donde el gobierno quiere ayudar a los desempleados, si ellos se esfuerzan por buscar trabajo, pero no en caso contrario; un desempleado trata de buscar trabajo solo si no puede depender de la ayuda del gobierno, información que mostraremos en la siguiente tabla:

		Desempleado	
		Trabaja	No trabaja
	Ayuda	3, 2	-1, 3
Gobierno	No ayuda	-1, 1	0, 0

Tabla 2.14: *Dilema del samaritano.*

Sea la probabilidad que le asigna el desempleado para que el gobierno ayude o no ayude respectivamente, σ_1(Ayudar)= p y σ_1(No ayudar)= $1-p$; la probabilidad que asigna el gobierno para que el desempleado trabaje o no lo haga σ_2(Trabajar)= q y σ_2(No Trabajar)=$1-q$.

Para encontrar el equilibrio de Nash mixto, se debe encontrar la distribución de probabilidad $\sigma_1{=}(p, 1{-}p)$ y $\sigma_2{=}(q, 1{-}q)$ que les brinde mayor utilidad esperada, respectivamente. Por el teorema 2.5.1 se tiene que para que $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ sea un equilibrio de Nash mixto, cumpliéndose $0 < p < 1$ y $0 < q < 1$, se deben igualar las utilidades esperadas de sus dos estrategias para cada uno de los jugadores.
Las utilidades esperadas para el gobierno son:

$$\begin{aligned} 3 \cdot q + (-1) \cdot (1 - q) &= -1 \cdot q + (0) \cdot (1 - q), \\ 4q - 1 &= -q. \end{aligned}$$

Luego se obtiene que $q^* = 1/5 = 20\,\%$. Para que una estrategia mixta sea óptima para el gobierno, el desempleado debe seleccionar trabajar con una probabilidad exacta del $20\,\%$.
Las utilidades esperadas para el desempleado son:

$$\begin{aligned} 2 \cdot p + (1) \cdot (1 - p) &= 3 \cdot p + (0) \cdot (1 - p), \\ p + 1 &= 3p. \end{aligned}$$

Obteniendo que p^* $=1/2=50\,\%$. Como conclusión se puede deducir que un equilibrio en estrategias mixtas es la combinación de estrategias $\sigma^*{=}((1/2,\, 1/2), (1/5,\, 4/5))$, donde el gobierno elige ayudar con una probabilidad del $50\,\%$ y el desempleado selecciona trabajar con una probabilidad del $20\,\%$. La utilidad esperada del gobierno, (jugador 1) y del desempleado (jugador 2) debido a la estrategia mixta $\sigma = (\sigma_1,\, \sigma_2)$ es

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_1,\, \sigma_2) &= p(3 \cdot q + (-1) \cdot (1 - q)) + (1 - p)(-1 \cdot q + (0) \cdot (1 - q)) \\ &= 5pq - p - q \\ &= p(5q - 1) - q. \end{aligned}$$

Ahora bien, maximizando con respecto a p la utilidad esperada, pues es la probabilidad que le asignó el desempleado, tenemos

$$\max_p \, p(5q - 1) - q.$$

Entonces la función de mejor respuesta es

$$p^*(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } q > 1/5, \\ 0, & \text{si } q < 1/5, \\ [0, 1], & \text{si } q = 1/5. \end{cases}$$

La utilidad esperada del desempleado, jugador 2, es

$$\begin{aligned} U_2(\sigma_1,\, \sigma_2) &= q(2 \cdot p + (1) \cdot (1 - p)) + (1 - q)(3 \cdot p + (0) \cdot (1 - p) \\ &= -2pq + 3p + q \\ &= q(-2p + 1) + p. \end{aligned}$$

Maximizando ahora con respecto a q la utilidad esperada, pues es la probabilidad que le asignó el gobierno

$$\max_q \, q(-2p + 1) + p,$$

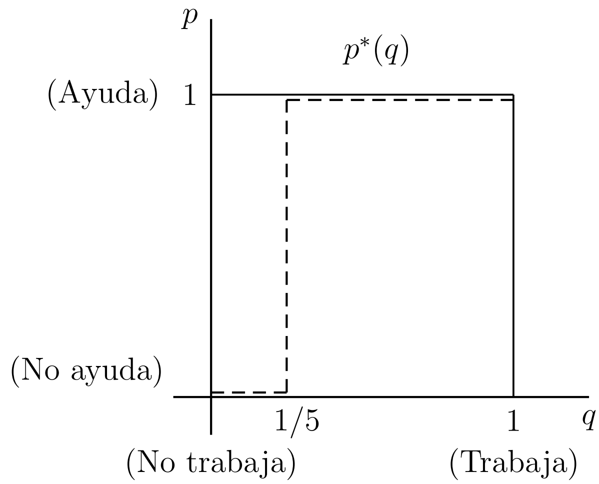

Figura 2.5: *Mejor respuesta del gobierno.*

lo que es equivalente a $p = 1/2 = 50\,\%$. Haciendo el análisis de mejor respuesta del desempleado, si el gobierno selecciona ayudar menos del 50 %, el desempleado seleccionará trabajar; si el gobierno selecciona ayudar más del 50 %, el desempleado seleccionará no trabajar. Entonces tendremos la función

$$q^*(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p < 1/2, \\ 0, & \text{si } p > 1/2, \\ [0,1], & \text{si } p = 1/2. \end{cases}$$

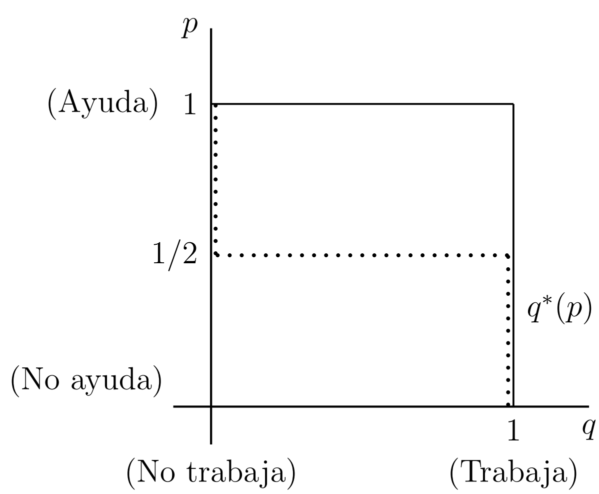

Figura 2.6: *Mejor respuesta del desempleado.*

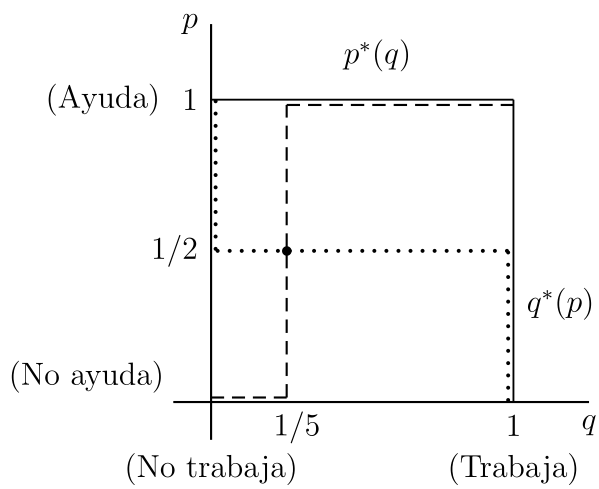

Figura 2.7: *Mejor respuesta conjunta.*

La intersección de las correspondencias de mejor respuesta de los jugadores se muestra en la figura anterior, con un único equilibrio en estrategias mixtas $[(1/2, 1/2)$,$(1/5, 4/5)]$.

Ejemplo 2.5.3 (Juego de "el gallina")**.** En este juego, dos adolescentes se enfrentan con sus autos a alta velocidad; van en direcciones opuestas en un camino abandonado, y chocarán a menos que uno de ellos se desvíe. El que se desvía es "el gallina", y obtiene 0, mientras el otro sigue y se queda con el prestigio de ser valiente, obteniendo 2; si los dos se desvían, se consideran gallinas y obtienen 1. La situación en que ambos jugadores siguen, es la peor ay que se obtienen pagos de -3. Existen tres equilibrios de Nash, dos en estrategias puras: donde en cada uno de ellos, uno de los jugadores se desvía y el tercero en estrategias mixtas.

		Jugador 2	
		s	d
	S	-3, -3	$\underline{2}, \underline{0}$
Jugador 1	D	$\underline{0}, \underline{2}$	$1, 1$

Tabla 2.15: *Juego de "el gallina".*

Sean las estrategias Seguir (S) y Desviarse (D); los dos equilibrios de Nash en estrategias puras son $[(D, s)$, $(S, d)]$, que corresponde al equilibrio de Nash mixto $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, donde $\sigma_1(D) = 1$, $\sigma_1(s) = 0$ y $\sigma_1(S) = 1$, $\sigma_1(d) = 0$. Para hallar el equilibrio de Nash mixto, suponemos que la probabilidad que le ha dado el jugador 1 a la estrategia del jugador 2 es $\sigma_2(s) = q$ y $\sigma_2(d) = 1 - q$; similarmente el jugador 2 da la probabilidad $\sigma_1(S) = p$ y $\sigma_2(D) = 1 - p$; debemos igualar las utilidades esperadas de las dos estrategias de cada jugador.
Las utilidades esperadas para el jugador 2 son

$$-3 \cdot p + 2 \cdot (1 - p) = 0 \cdot p + 1 \cdot (1 - p),$$
$$-5p + 2 = 1 - p.$$

Entonces se obtiene que $p^* = 1/4$. Similarmente, para el jugador 1 se tiene que $p^* = 1/4$, entonces la estrategia mixta óptima para los jugadores es $\sigma^* = [(1/4, 3/4), (1/4, 3/4)]$. Para graficar la mejor respuesta para cada jugador analizamos la utilidad esperada para el jugador 2 al utilizar cada uno la utilidad esperada de la combinación de estrategias mixtas:

$$\begin{aligned} U_2(\sigma_1,\, \sigma_2) &= q(-3 \cdot p + (2) \cdot (1-p)) + (1-q)(0 \cdot p + (1) \cdot (1-p) \\ &= -4pq + q - p + 1 \\ &= q(-4p+1) - p + 1. \end{aligned}$$

Maximizando ahora con respecto a q la utilidad esperada, pues es la probabilidad que le asignó el jugador 1, tenemos

$$\max_q \, q(-4p+1) - p + 1.$$

Las funciones de mejor respuesta para el jugador 2 y para el jugador 1 dado que los pagos son simétricos, son

$$q^*(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p < 1/4, \\ 0, & \text{si } p > 1/4, \\ [0,1], & \text{si } p = 1/4; \end{cases} \qquad p^*(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } q < 1/4, \\ 0, & \text{si } q > 1/4, \\ [0,1], & \text{si } q = 1/4. \end{cases}$$

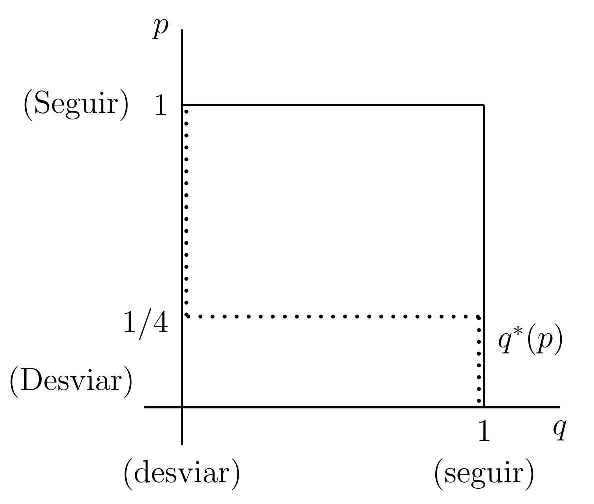

Figura 2.8: *Mejor respuesta del jugador* 2.

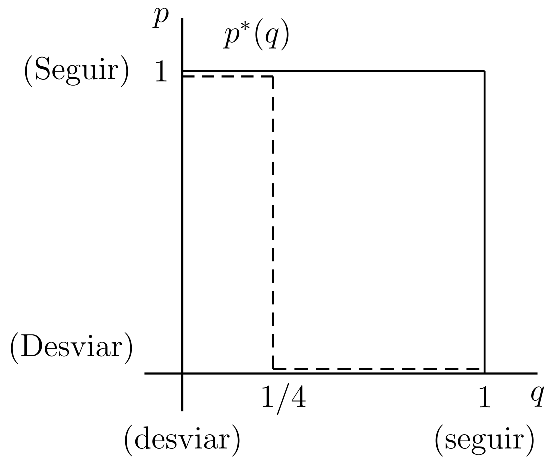

Figura 2.9: *Mejor respuesta del jugador* 1.

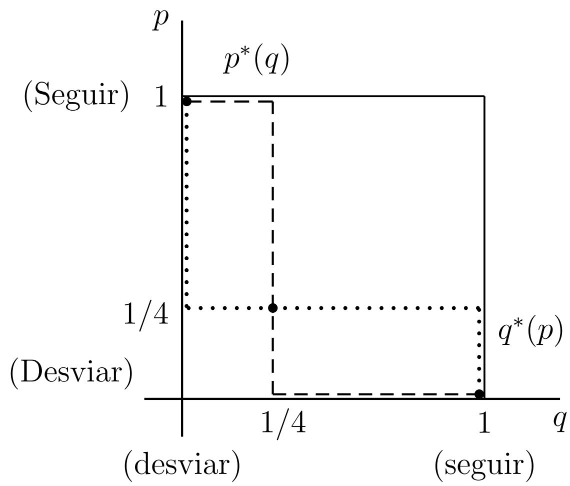

Figura 2.10: *Mejor respuesta conjunta.*

La intersección de las correspondencias de mejor respuesta de los jugadores, en la figura 2.10, da lugar a tres puntos que son tres equilibrios de Nash. Si el jugador 1 supone que el jugador 2 elige como su estrategia seguir (s), lo mejor que puede hacer es desviarse (punto situado a la derecha-abajo); así mismo si el jugador 2 se desvía lo mejor que debe hacer es seguir (punto situado a la izquierda-arriba). Igualmente para el jugador 2; pero si se eligen las estrategias con aleatoriedad, entonces la estrategia para el jugador 1 dado que la probabilidad del jugador 2 de seguir sea mayor a 1/4, debe elegir seguir, de lo contrario desviarse. De igual manera para el jugador 2, (obteniendo el punto intermedio).

Ejemplo 2.5.4 (Asignación de riesgo a procedimientos médicos)**.** Como es bien sabido, muchos procedimientos médicos involucran un riesgo no despreciable para el paciente y sólo se deben llevar a cabo cuando él mismo se expone a un riesgo mayor si no se aplica el tratamiento. ¿Cómo puede determinarse qué riesgo es mayor en una situación dada? Este problema es complicado, aún más cuando no hay una completa certeza de que el paciente tiene la enfermedad que se sospecha. Por ejemplo, a veces se emplea la cirugía para extraer tumores aun cuando la probabilidad es pequeña de que el tumor será maligno.

¿Qué tan grande debe ser esta probabilidad para que deba recomendarse la cirugía?. Para analizar esta cuestión, supóngase que la probabilidad de que un paciente padezca cierta enfermedad es q (esta probabilidad se ha determinado por medio de varias pruebas). El tratamiento para esta enfermedad es una operación de importancia. Si el paciente tiene la enfermedad pero no se le opera, puede esperar vivir 5 años; pero si se opera al paciente, puede esperar vivir 20 años. Si el paciente no tiene la enfermedad, puede esperar vivir 25 años si se opera, ó 30 años si no se opera. La decisión de operarlo o no claramente depende de q la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad. Si $q = 0$, el paciente no tiene la enfermedad y no debe ser operado. ¿Cuál es el menor valor de q, para el cual es recomendable que se le opere?
Este problema se analiza como un juego de matriz. (Una sola componente para los pagos del paciente).

		Naturaleza	
		Padecer	No padecer
	Operarse	20	25
Paciente	No Operarse	5	30

Tabla 2.16: *Procedimiento médico.*

La estrategia de la naturaleza es $\sigma_1 = (q, 1-q)$, en donde q es la probabilidad de que el paciente padezca la enfermedad. Supongamos que la estrategia del paciente para operarse es $\sigma_2 = (p, 1-p)$; ahora, al igualar las utilidades esperadas de sus dos estrategias para el paciente tenemos

$$\begin{aligned} 20 \cdot q + (25) \cdot (1-q) &= 5 \cdot q + (30) \cdot (1-q), \\ -5q + 25 &= -25q + 30. \end{aligned}$$

Entonces se obtiene que q^*=1/4=25 %. Para que una estrategia mixta sea óptima para el paciente, este debe operarse si la probabilidad de padecer la enfermedad es mayor que el 25 %.
La utilidad esperada (en años de vida) para el paciente debido a la estrategia mixta $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ es

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_1, \sigma_2) &= p \cdot (20 \cdot q + 25 \cdot (1-q)) + (1-p)(5 \cdot q + 30 \cdot (1-q)) \\ &= 20pq - 5p - 25q + 30 \\ &= p(20q - 5) - 25q + 30. \end{aligned}$$

Ahora maximizando con respecto a p la utilidad esperada obtenemos

$$\max_p \, p(20q - 5) - 25q + 30,$$

lo que es equivalente a q=1/4=25 %. El paciente debe operarse si la probabilidad de padecer la enfermedad es mayor al 25 %, que coincide con la optimización del valor esperado de la estrategia mixta del paciente. Esto quiere decir que si de la información disponible se infiere que la probabilidad de que tenga la enfermedad es, por ejemplo del 15 %, la operación no se debe hacer.
Se requeriría más información para poder recomendar que se haga la operación.

2.6. Existencia de un equilibrio de Nash

La primera demostración de que existen puntos de equilibrio en los juegos no-cooperativos de n jugadores se debe a Nash; es una generalización del punto de silla de Neumann para los juegos de suma-cero, donde un jugador se esfuerza por incrementar su propio pago y necesariamente por disminuir el pago del otro jugador. Aunque fuera de juegos bipersonales y competitivos no funciona.
Para demostrar el teorema de Nash, utilizaremos el teorema del punto fijo de Brouwer de referencia [3].

Teorema del punto fijo de Brouwer 2.6.1. *Toda función continua $f : C \longrightarrow C$, con dominio C y recorrido C, siendo C un conjunto compacto y convexo en R^n, tiene al menos un punto fijo, es decir, existe un x en C tal que $f(x) = x$.*

Un ejemplo sencillo de este teorema es una función continua con dominio $[0,1]$ y recorrido $[0,1]$, que tiene necesariamente un punto fijo: existe x en $[0,1]$ tal que $f(x) = x$. la siguiente figura ilustra este teorema.

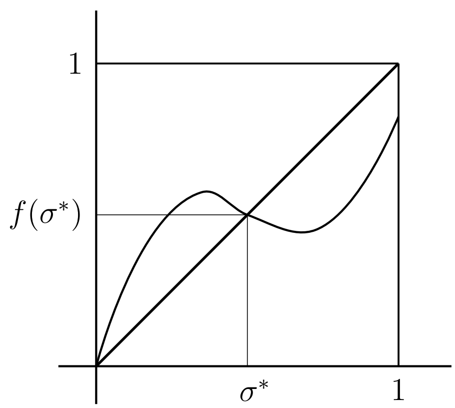

Figura 2.11: *Existencia de punto fijo.*

Teorema de Nash 2.6.1. *Todo juego finito en forma normal tiene un equilibrio de Nash (en estrategias puras o mixtas).*

Demostración. Consta de dos pasos:

I) Definir una función que satisfaga las condiciones del teorema de punto fijo de Brouwer y que, por tanto tenga un punto fijo.

II) Probar que un punto fijo de la función elegida es necesariamente un equilibrio de Nash.

I) Definimos la función que satisface las condiciones del teorema de Brouwer. Se denota por $\sigma_i(s_j) = \sigma_{ij}$ la probabilidad que el i-ésimo jugador le asigna a la estrategia pura s_j. La función que vamos a definir toma una combinación de estrategias mixtas en Δ y la envía a este mismo espacio, $f : \Delta \longrightarrow \Delta$. Sea f_{ij} la probabilidad que asigna f a la j-ésima estrategia del i-ésimo jugador. Considérese entonces la función f_{ij} definida por

$$f_{ij} = \frac{\sigma_{ij} + \max\{0, U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)\}}{1 + \sum_{j=1}^{m} \max\{0, U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)\}},$$

donde el jugador i tiene m estrategias puras y σ_{-i} denota las estrategias mixtas de los jugadores excepto el i-ésimo.
Notemos cómo decide esta función qué probabilidad asigna a la j-ésima estrategia pura del jugador i-ésimo, como función de una combinación de estrategias mixta arbitraria, σ.
Δ es un conjunto compacto y convexo (debido al hecho de que el producto de conjuntos compactos es compacto, lo mismo para los conjuntos convexos, la demostración se puede consultar en la referencia [4]). La función es continua debido a que la funciones $\max\{x, y\}$, suma y resta son continuas y el denominador siempre es positivo. Entonces, $f : \Delta \longrightarrow \Delta$, tiene efectivamente un punto fijo: existe σ en Δ tal que $f(\sigma) = \sigma$.

II) Ahora mostramos que este punto fijo es un equilibrio de Nash. En un punto fijo se cumple que, para todo i en N, y para todo s_j en S_i

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij} + \max\{0,\, U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)\}}{1 + \sum_{j=1}^{m} \max\{0, U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)\}},$$

de donde:

$$\sigma_{ij}\,[1 + \sum_{j=1}^{m} \max\{0,\, U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)\}] = \sigma_{ij} + \max\{0,\, U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)\};$$

restando σ_{ij} a ambos lados obtenemos

$$\sigma_{ij} \sum_{j=1}^{m} \max\{0,\, U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)\} = \max\{0,\, U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)\};$$

multiplicando ahora ambos lados por $U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)$ tenemos

$$[U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)]\, \sigma_{ij} \sum_{j=1}^{m} \max\{0,\, U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)\} =$$
$$[U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)] \max\{0,\, U_i(s_j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)\}.$$

La anterior ecuación se cumple para cada estrategia pura j del jugador i-ésimo. Si sumamos las m ecuaciones correspondientes a este jugador obtenemos

$$\sum_{j=1}^{m}[U_i(s_j,\sigma_{-i})-U_i(\sigma)]\,\sigma_{ij}\ \sum_{j=1}^{m}\text{máx}\{0,\,U_i(s_j,\sigma_{-i})-U_i(\sigma)\}=$$
$$\sum_{j=1}^{m}[U_i(s_j,\sigma_{-i})-U_i(\sigma)]\,\text{máx}\{0,\,U_i(s_j,\sigma_{-i})-U_i(\sigma)\}.$$

Notemos que el lado izquierdo de la anterior expresión es igual a cero, pues

$$\sum_{j=1}^{m}[U_i(s_j,\sigma_{-i})-U_i(\sigma)]\,\sigma_{ij}=\sum_{j=1}^{m}U_i(s_j,\sigma_{-i})\sigma_{ij}-U_i(\sigma)\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}=0.$$

Por tanto, el lado derecho de esa ecuación es también igual a cero

$$\sum_{j=1}^{m}[U_i(s_j,\sigma_{-i})-U_i(\sigma)]\,\text{máx}\{0,\,U_i(s_j,\sigma_{-i})-U_i(\sigma)\}=0.$$

Notemos también que cada sumando de la anterior sumatoria es no negativo: es estrictamente positivo si $U_i(s_j,\sigma_{-i})-U_i(\sigma)>0$, y es igual a cero si $U_i(s_j,\sigma_{-i})-U_i(\sigma)\leq 0$. Por tanto, el hecho de que la sumatoria sea igual a cero implica que todos los sumandos son cero, es decir, que para todo i en N, y para todo s_j en S_i

$$U_i(s_j,\sigma_{-i})\leq U_i(\sigma)$$

Ahora bien, puesto que la utilidad esperada que obtiene el jugador i-ésimo con una estrategia mixta σ_i es una media ponderada de las utilidades que obtiene con sus estrategias puras, donde los ponderadores son las probabilidades que asigna σ_i a las distintas estrategias puras, ninguna estrategia mixta podrá proporcionar al jugador i-ésimo una utilidad superior a $U_i(\sigma)$:

$$U_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\leq U_i(\sigma)\quad \text{para todo}\quad \sigma_i\in\Delta_i,\quad \text{para todo}\quad i\in N.$$

Esta desigualdad nos dice que ningún jugador puede aumentar su utilidad esperada utilizando una estrategia mixta distinta de la especificada en la combinación de estrategias $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m)$, es decir, nos dice que σ es efectivamente un equilibrio de Nash. □

El problema de hallar los equilibrios de Nash a menudo suele ser muy tedioso, por esta razón se realizo un programa, que se encuentra consignado en versión de cd rom de esta monografía y cuyo ejemplo se encuentra en el anexo.

2.6.1. Interpretación de las estrategias mixtas

Las estrategias mixtas, se deben interpretar como la representación de la incertidumbre de un jugador con respecto a lo que harán los demás. Se puede ver como una ruleta que el jugador hace girar. En la ruleta se han establecido divisiones que particionan el círculo en áreas que corresponden a las probabilidades que la estrategia mixta le asigna a cada estrategia pura. El jugador hace girar la aguja y utiliza la estrategia elegida por la aguja. Cada jugador usa su propia ruleta y éstas son independientes entre sí.

CAPÍTULO 3

JUEGOS SECUENCIALES CON INFORMACIÓN COMPLETA

3.1. Introducción

En la primera parte se estudiaron juegos de decisión simultánea e información completa, representándolos en forma normal; analizamos ahora juegos secuenciales, en los cuales un jugador mueve antes que otros jugadores y estos observan su decisión antes de jugar. Para la primera sección se analizan juegos con información además de completa, *perfecta*, lo que significa que en cada momento del juego el jugador a quien le corresponde decidir conoce la historia completa de todas las decisiones tomadas hasta ese momento. Estos juegos se ilustraran por medio de la definición de historias que son secuencias de acciones con la ayuda de la referencia [5], cambiando así la relación de orden que se utiliza en otros libros para así facilitar la representación del juego tanto para la explicación como para el análisis. La representación de este tipo de juegos está dada por la forma extensiva, que analizaremos en este capítulo.
El tema central de los juegos secuenciales es la credibilidad; en algunos juegos se hacen algunas amenazas, que no resultan ser creíbles, como ejemplo la siguiente situación:
Un niño debe decidir si tomarse la sopa o no. El padre, a la vista de la conducta de su hijo, debe decidir, si castigarlo o no (el castigo es no darle de comer en todo el día). Si el hijo se toma la sopa (lo preferido por el padre), le da un pago al padre de dos, mientras que al hijo solo de uno. Si el niño no se toma la sopa y el padre no lo castiga, le proporcionan los mayores pagos al hijo, dos, mientras que solo de uno al padre. Si el hijo no se toma la sopa y el padre lo castiga, se obtienen los peores pagos para el hijo (es castigado) y para el padre (se siente culpable). Supondremos que ambos tienen un pago de cero.
Supongamos que el padre amenaza con castigarlo a no ser que su hijo se tome la sopa; si el niño se cree la amenaza su mejor respuesta debe ser tomarse la sopa, aunque no debe creerse semejante amenaza, pues si al padre se le diera la oportunidad de ejecutar

dicha amenaza no la cumpliría, es decir el niño no debería tomarse la sopa. La cuestión clave en las jugadas estratégicas, como las amenazas, es que para que estas sean efectivas deben ser creíbles, y sólo serán creíbles si el jugador que la formula tiene los incentivos adecuados a llevarla a cabo en caso necesario. Analizaremos esta situación en el ejemplo 3.2.2.
A continuación se presentarán las herramientas teóricas para modelar este tipo de problemas, lo cual se conoce como juegos en forma extensiva.

3.2. Juegos en forma extensiva

Un juego en forma extensiva esta conformado por los siguientes elementos:

i) Los jugadores.

ii) los momentos en los que le corresponde jugar.

iii) Las acciones de cada jugador en las que se debe tener en cuenta:

- Lo que puede hacer cada vez que tenga la oportunidad de jugar.
- lo que sabe cada vez que tiene la oportunidad de jugar.

iv) Los pagos a los jugadores debido a la combinación de acciones.

Definición 3.2.1. La forma extensiva de un juego secuencial consiste en:

1. Un conjunto (finito) N de jugadores.
2. Un conjunto H de historias (una historia es una sucesión de acciones $(a^k)_{k=1,2,\ldots,K}$) que satisfacen la siguientes condiciones:
   (a) $\varnothing \in H$, que da inicio al juego.
   (b) Sea $(a^k)_{k=1,2,\ldots,K}$ la sucesión k-ésima de acciones; si $(a^k)_{k=1,2,\ldots,K} \in H$, y $L < K < \infty$, entonces $(a^k)_{k=1,2,\ldots,L} \in H$.
   Denotaremos la historia $(a^k)_{k=1,2,\ldots,L}$ por $h \in H$, es decir, todo elemento de H es una historia; cada componente de una historia es una acción.
   (c) Una historia $(a^k)_{k=1,2,\ldots,K}$ es terminal si $\nexists\, a^{K+1}$ tal que $(a^k)_{k=1,2,\ldots,K+1} \in H$.
   El conjunto de historias terminales, se denota Z.
   (d) $A(h)$ son las acciones disponibles en la historia no terminal h:
   $$A(h) = \{a : (h, a) \in H\};$$
   $A(h) \cap A(h') = \varnothing$, $\forall\, h, h' \in H$, $h \neq h'$, es decir, que dos historias distintas no pueden terminar en la misma acción.

3. Una función $P : H \setminus Z \longrightarrow N$ que asigna a cada historia no terminal un jugador[1] a quien le corresponderá el turno de jugar; el jugador $P(h)$ elige una acción después de la historia h, acción que elige del conjunto $A(h)$.

4. Para cada jugador $i \in N$, una función de utilidad $u_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$; así, esta función implica que sólo existirán pagos en las historias terminales (la primera componente, para el primer jugador y así sucesivamente).

Definición 3.2.2 (Juego en forma extensiva)**.** Un juego en forma extensiva es una $4n - tupla$ $J = (N, H, P, (u_i))$, donde N es un conjunto (finito) de jugadores, que satisface la definición (3.2.1).
Nótese que los conjuntos de historias asemejan la ilustración de un árbol, que se utilizan en otros textos; los nodos de un árbol corresponden a la asignación de jugadores en las historias. El juego se desarrolla en la parte superior de las historias hasta las historias terminales en la parte inferior.

Definición 3.2.3 (Conjunto de información)**.** Los conjunto de información del jugador i son la historias que se le asignan al jugador i, en el caso de que haya varias, conectadas con una línea punteada; el jugador no puede distinguirlas entre sí, es decir, no puede prever cuál fue la acción tomada del jugador en la etapa anterior.
Si un jugador tiene en un mismo conjunto de información dos historias cualesquiera, las acciones disponibles, deben ser las mismas.

Definición 3.2.4. Una estrategia del jugador $i \in N$ en $J = (N, H, P, (u_i))$ es una función que le asigna una y sólo una acción $A(h)$ a cada historia no terminal $h \in H \setminus Z$, para la cual $P(h) = i$. La denotaremos por S_i.
Es decir, una estrategia de un jugador es un plan completo de acciones; especifica la acción elegida para cada historia después de la cual le toca elegir, aún si, dada la combinación de estrategias elegidas por los jugadores, no ocurre.

3.2.1. Información perfecta

En cada momento del juego el jugador a quien le corresponde decidir conoce la historia completa de todas las decisiones tomadas hasta ese momento, es decir, los conjuntos de información de cada jugador están compuestos por una sola historia.

Ejemplo 3.2.1. Situación de dos jugadores donde el jugador 1 decide dos veces; la ilustración del juego es: $N = \{1, 2\}$,
$H = \{\varnothing, R, Q, (Q, S), (Q, T), (Q, S, V), (Q, S, U)\}$,
$Z = \{R, (Q, T), (Q, S, V), (Q, S, U)\}$,
$H \setminus Z = \{\varnothing, Q, (Q, S)\}$,
$P(\varnothing) = 1, \quad P(Q) = 2, \quad P((Q, S)) = 1$,
$A(Q) = \{S, T\}, \quad A(S) = \{U, V\}$,
$u_1 : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, por ejemplo: $u_1(Q, S, U) = 3$,
$u_2 : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, por ejemplo: $u_1(Q, S, U) = 1$.

[1] Es decir, no hay jugadores en las historias terminales.

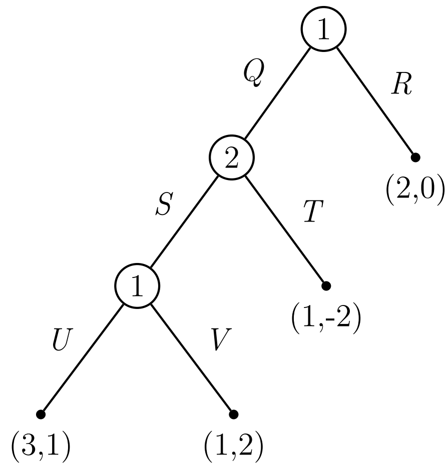

Figura 3.1: *Juego en forma extensiva.*

Las acciones del jugador 1 son: A_1=$\{Q, R, U, V\}$; las primeras dos son acciones al iniciar y las otras son para finalizar respectivamente, ahora bien, como su estrategia es un plan completo de acciones, debe tener una acción tanto para iniciar como para terminar, así no llegue a utilizar su acción final; luego las estrategias del jugador 1 son: S_1 =$\{Q$-U, Q-V, R-U, R-$V\}$. Supongamos que se juega la estrategia Q-U, entonces se juega la acción Q para el primer movimiento y la acción U para el segundo, la estrategia R-V tiene un solo movimiento y acaba el juego. El jugador 2 tiene dos acciones A_2=$\{S, T\}$, y debe elegir una de las dos en determinado momento; luego las acciones coinciden con las estrategias, S_2=$\{S, T\}$.
El primer jugador tiene un único conjunto de información donde puede elegir entre sus dos acciones; el segundo jugador también posee un conjunto información, que le dice la acción tomada por parte del jugador 1, igualmente como lo vuelve a tener el jugador 1.

3.2.2. Principio-solución

Para resolver un juego secuencial, la primera alternativa consiste en escribirlo en forma normal y aplicar el concepto de equilibrio de Nash que conocemos para juegos estáticos. Aplicando este concepto a la figura 3.2.3 y con sus estrategias se tiene la siguiente tabla.

		Jugador 2	
		S	T
Jugador 1	Q-U	$\underline{3}, \underline{1}$	1, -2
	Q-V	$1, \underline{2}$	1, -2
	R-U	$2, \underline{0}$	$\underline{2}, \underline{0}$
	R-V	$2, \underline{0}$	$\underline{2}, \underline{0}$

Tabla 3.1: *Juego en forma normal.*

Así, es fácil ver que este juego presenta tres equilibrios de Nash en estrategias puras con las combinaciones $[(Q\text{-}U, S), (R\text{-}U, T), (R\text{-}V, T)]$; luego para refinar esta solución utilizamos el principio de inducción hacia atrás para eliminar los equilibrios que conllevan amenazas no creíbles.

Definición 3.2.5. Para un equilibrio en un juego en forma extensiva, un conjunto de información está en la **trayectoria de equilibrio** si se alcanza con probabilidad positiva cuando el juego se desarrolla según las estrategias de equilibrio, y está fuera de la trayectoria de equilibrio si no se alcanza cuando el juego se desarrolla según las estrategias de equilibrio.

3.2.3. Principio de inducción hacia atrás y equilibrio perfecto en subjuegos

El principio de inducción hacia atrás, consiste en predecir el resultado en cada etapa futura del juego y entonces razonar hacia atrás en la etapa presente. Siguiendo este procedimiento comenzaremos el juego por la última etapa y retrocederemos progresivamente hacia la primera, eligiendo en cada etapa la acción que sea mejor respuesta. Como veremos, la inducción hacia atrás es una forma natural de obtener un equilibrio de Nash creíble en un juego secuencial, pues siempre se intenta hallar, en cada etapa, la mejor respuesta ante cualquier acción del contrario. La teoría de juegos considera la inducción hacia atrás como un criterio adicional o un refinamiento del equilibrio de Nash, llamado equilibrio perfecto en subjuegos, que permitirá desechar ciertos equilibrios de Nash por tener problemas de credibilidad.

Ejemplo 3.2.2 (Comportamiento del niño)**.** Sea el niño (jugador 1) y el padre (jugador 2). El niño debe decidir si tomarse la sopa o no (acciones T y Nt respectivamente). El padre, decide si castigarlo o no, si no se ha tomado la sopa (acciones C y Nc, respectivamente):

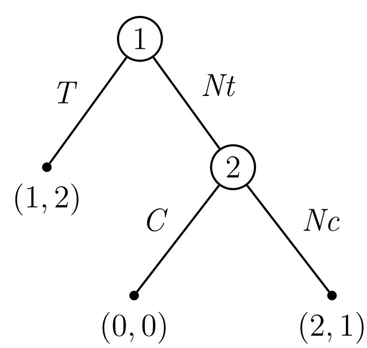

Figura 3.2: *Juego del comportamiento extensivo.*

Existen dos equilibrios de Nash: $[(T, C), (Nt, Nc)]$. Para refinar esta solución procedemos por inducción hacia atrás. En la segunda etapa; el jugador 2 elige entre C y Nc con una ganancia de 0 y 1 respectivamente, eligiendo de modo óptimo Nc.

		Jugador 2	
		C	Nc
	T	$\underline{1}, \underline{2}$	$1, \underline{2}$
Jugador 1	Nt	$0, 0$	$\underline{2}, \underline{1}$

Tabla 3.2: *Juego del comportamiento estratégico.*

En la primera etapa; el jugador 1 prevé que si el juego llega a la segunda etapa, el jugador 2 escogerá Nc, lo que le proporcionara una ganancia de 2 (en la etapa final); entonces en la primera etapa elige entre T y Nt, una ganancia de 1 y 2 respectivamente, eligiendo de modo óptimo Nt.
Luego la trayectoria de equilibrio y equilibrio del juego es (Nt, Nc). El equilibrio (T, C), no alcanza a llegar al conjunto de información del jugador 2, diremos que está fuera de la trayectoria de equilibrio.
Por consiguiente el equilibrio de Nash (T, C) no es creíble, y por lo tanto no se jugará; en los equilibrios libres de amenazas no creíbles se cumple lo que llamaremos el principio de racionalidad secuencial: los jugadores anticipan o prevén en todo punto del juego conducta racional futura (maximizadora de pagos) de sus oponentes.

Definición 3.2.6. En el juego en forma extensiva de N jugadores, $J = (N, H, P, (u_i))$, un **subjuego** $J(h)$ son las historias que prosiguen a la historia no terminal h que tiene un solo elemento, es decir un singulete:

$$J(h) = (N, H/h, P/h, (u_i/h)),$$

donde:
H/h, es el conjunto de subhistorias h' que prosiguen la historia h, tal que $(h, h') \in H$;
$P/h \equiv P(h, h'),\ \forall h' \in H/h,$ tal que $(h, h') \in H \setminus Z$;
$u_i/h \equiv u_i(h, h'),\ \forall h' \in H/h,$ tal que $(h, h') \in Z$.

Definición 3.2.7. En el juego en forma extensiva de N jugadores, $J = (N, H, P, (u_i))$, la combinación de estrategias $s^* = (s_1^*, \dots, s_m^*) \in S$ es un **equilibrio perfecto en subjuegos** si:
1. Es un equilibrio de Nash de J.
2. $\forall h \in H/Z,\ s^*/h$ es un equilibrio de Nash de $J(h) = (N, H/h, P/h, (u_i/h))$.

Ejemplo 3.2.3 (Reparto de 3 objetos indivisibles)**.** Dos individuos deben repartirse 3 objetos indivisibles. El jugador 1, debe proponer un reparto de estos objetos; pero con la restricción de que ningún jugador se puede quedar sin ningún objeto. A la vista de la propuesta de reparto, el jugador 2, debe decidir si acepta esta propuesta o no. Si la acepta (A), cada jugador se queda con el número de objetos recogidos en la propuesta; si rechaza (R) la propuesta, ambos jugadores se quedan sin nada. Los jugadores deciden secuencialmente, como se muestra en la figura 3.3, donde ofrece $(2, 1)$ significa, dos objetos para el jugador 1 y uno sólo para el jugador 2; de la misma manera, ofrece $(1, 2)$ significa un objeto para el jugador 1 y dos para el jugador 2.
De aquí en adelante $ofrecer(2, 1)$ lo escribiremos como $(2, 1)$, y $ofrecer(1, 2)$ como $(1, 2)$.

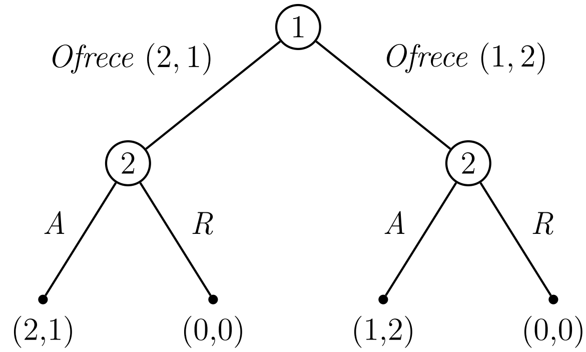

Figura 3.3: *Reparto de 3 objetos indivisibles.*

El primer jugador tiene un único conjunto de información en el que puede elegir entre sus acciones que coinciden con sus estrategias, A_1=S_1=$\{(2,1),(1,2)\}$. El segundo jugador posee dos conjuntos de información, que puede distinguir entre sí, ya que sabe lo que ha jugado el jugador 1. En cada uno de ellos se elige entre las acciones, A_2=$\{A, R\}$. La estrategia del jugador 2 debe ser un plan completo que especifique qué decidir en cada posible elección del jugador 1, lo que da un total de cuatro estrategias distintas.

Estrategias del jugador 2:

- Si el jugador 1 juega $(2,1)$, entonces elige A, y si juega $(1,2)$, entonces elige A.
- Si el jugador 1 juega $(2,1)$, entonces elige A, y si juega $(1,2)$, entonces elige R.
- Si el jugador 1 juega $(2,1)$, entonces elige R, y si juega $(1,2)$, entonces elige A.
- Si el jugador 1 juega $(2,1)$, entonces elige R, y si juega $(1,2)$, entonces elige R.

Para simplificar la notación en lo que sigue denotaremos estas cuatro estrategias[2] del jugador 2 de la siguiente forma: S_2=$\{A\text{-}A,\ A\text{-}R,\ R\text{-}A,\ A\text{-}R\}$.

Jugador 1	Jugador 2			
	A-A	A-R	R-A	R-R
$(2,1)$	$\underline{2},\underline{1}$	$\underline{2},\underline{1}$	$0,0$	$\underline{0},0$
$(1,2)$	$1,\underline{2}$	$0,0$	$\underline{1},\underline{2}$	$\underline{0},0$

Tabla 3.3: *Reparto de 3 objetos indivisibles en forma normal.*

En esta bimatriz existen tres equilibrio de Nash: $[((2,1), A\text{-}A), ((2,1), A\text{-}R), ((1,2), R\text{-}A)]$. Para refinar estos equilibrios aplicamos inducción hacia atrás en la figura 3.3: si el jugador 2 esta en el conjunto de información que sigue a la historia $(2,1)$, elige entre A y R un pago de 2 y 0 respectivamente, luego la mejor respuesta es elegir A.

[2]Una forma intuitiva de pensar en una estrategia es imaginarla como un conjunto de instrucciones completas que se le dejan a un delegado para que juegue en ausencia del correspondiente, pero sin ninguna libertad estratégica, es decir, haciendo exactamente lo que dictan las instrucciones.

Si el jugador 2 está en el conjunto de información que sigue a la historia $(1, 2)$, elige entre A y R una ganancia de 1 y 0 respectivamente, luego la mejor respuesta es elegir A.
Por lo tanto, el jugador 2 planea aceptar tanto el reparto $(2, 1)$ como el reparto $(1, 2)$; entonces la mejor respuesta del jugador 1 es ofrecer $(2, 1)$, de esta forma consigue el mejor resultado posible para él, dos objetos.
El equilibrio $((1, 2), R\text{-}A)$ no es perfecto en subjuegos por contener una amenaza del jugador 2 en el que planea rechazar el reparto $(2, 1)$ del jugador 1 y aceptar solo el reparto $(1, 2)$. Si el jugador 1 cree esta amenaza su mejor respuesta es ofrecer $(1, 2)$; de esta forma el jugador 2 consigue el mejor resultado posible del juego para él. Sin embargo, esta amenaza no es creíble, pues en ese caso el jugador 2 obtendría un pago de 0 cuando aceptando el ofrecimiento obtendría el pago de 1, luego, este equilibrio no es razonable; de la misma manera el equilibrio $((2, 1), A\text{-}R)$ tampoco es perfecto en subjuegos.

Este juego también puede resolverse mediante los subjuegos de la figura 3.3 que se encuentran uno después de las historia $(ofrecer(2, 1))$ y el otro después de la historia $(ofrecer(1, 2))$, que mostraremos en la siguiente figura:

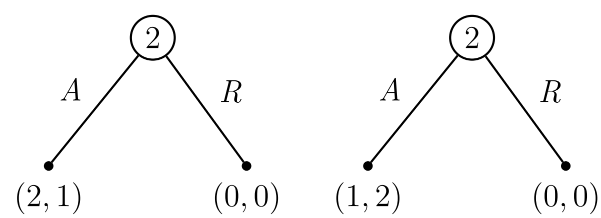

Figura 3.4: *Juego del comportamiento extensivo.*

En el subjuego, luego de la acción del jugador 1 $(ofrecer(2, 1))$, la mejor respuesta del jugador 2 es aceptar: obtiene un pago de un objeto, ya que si no acepta no obtiene nada.
En el subjuego, luego de $(ofrecer(1, 2))$, la mejor respuesta del jugador 2 es aceptar, obtiene un pago de dos objetos, ya que si no acepta no obtiene nada.
En el juego completo, si el jugador 1, sabiendo lo que el jugador 2 escogerá racionalmente, deberá elegir, $(ofrecer(2, 1))$ con una utilidad mayor para él.

En esta sección damos un ejemplo que demuestra que el equilibrio perfecto en subjuegos puede llegar a resultados que no son satisfactorios.

Ejemplo 3.2.4 (El ciempiés)**.** Situación de dos jugadores llamado "el ciempiés". Se llama así porque su representación gráfica tiene un poco la apariencia de este animal.

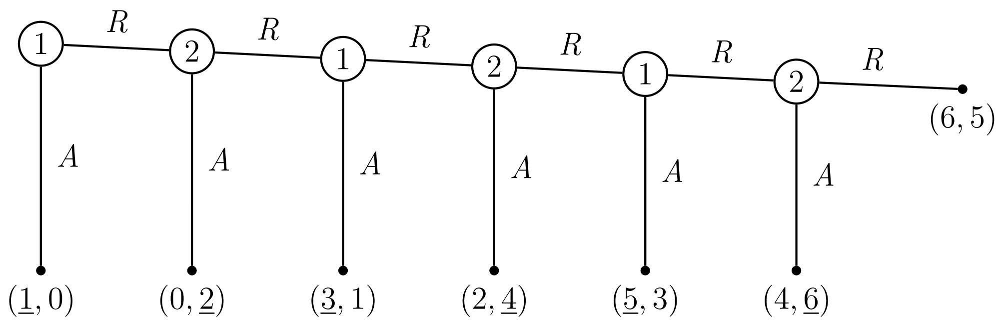

Figura 3.5: *ciempiés.*

Si aplicamos inducción hacia atrás vemos que en la penúltima etapa el jugador 2 elegirá A obteniendo el pago de seis dejando con cuatro al jugador 1, pero en la antepenúltima etapa el jugador 1 puede aceptar y quedarse con un cinco dejando con tres al jugador 2. Si se realiza esto hasta llegar a la primera etapa los jugadores elegirán siempre aceptar, cuyo único equilibrio perfecto es la combinación (A-A-A, A-A-A) obteniendo pagos de $(1, 0)$, que no son deseables, puesto que podrían haber rechazado alguna vez, para mejorar sus pagos. Este ejemplo es considerado una ilustración de la ineficiencia de la decisiones no cooperativas.

Ejemplo 3.2.5 (Juego con múltiples equilibrios)**.**

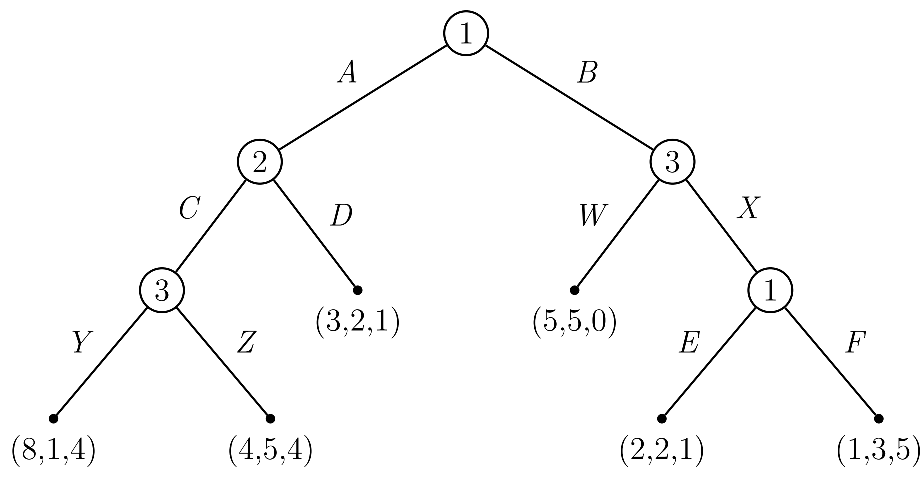

Figura 3.6: *Juego en forma extensiva.*

Este juego tiene dos equilibrios perfectos en subjuegos, con las estrategias $[(A, C\text{-}E, Z\text{-}W), (A, D\text{-}F, Y\text{-}W)]$, con pagos de $(4, 5, 4)$ y $(3, 2, 1)$ respectivamente. La multiplicidad de equilibrios es una debilidad, puesto que no está claro que los jugadores coordinen para jugar una combinación de estrategias de equilibrio. La situación más deseable sería que el equilibrio fuera único.

CAPÍTULO 4

JUEGOS CON PROBLEMAS DE INFORMACIÓN

4.1. Introducción

Un supuesto fundamental dentro de los juegos que hemos visto hasta ahora es que el jugador conoce el juego y que esto es de conocimiento común. Cuando al menos un jugador no conoce todos los componentes del juego, en particular los pagos que reciben otros jugadores, se dice que el juego presenta *información incompleta*. A estos juegos suele llamarselos, juegos bayesianos.

Empezaremos con los juegos estáticos, con información incompleta, presentando la transformación de Harsanyi (1967), que permite analizarlos como juegos de información imperfecta, donde los jugadores, en algún momento del juego no conocen la historia completa del juego; además, presentaremos el concepto de equilibrio bayesiano. Posteriormente analizamos los juegos secuenciales con información imperfecta y el concepto de equilibrio bayesiano perfecto.

Para entender la importancia de esta falta de información por parte de algún jugador resulta útil el siguiente ejemplo. Se considera la situación donde un trabajador firma el contrato con el empleador, un contrato abierto, en el que sólo se fija el salario. El trabajador tendrá dos acciones: aceptar el contrato o rechazarlo, aceptando las instrucciones no especificadas por parte del empleador. De acuerdo a las circunstancias, el empleador ve lo que necesita hacer y le da instrucciones al trabajador, pero desde luego al trabajador debiera preocuparle que el empleador tenga unas tareas demasiado fuertes o desagradables. Por supuesto, el trabajador conserva el derecho a renunciar, aunque el empleador tendría una pérdida, pues encontrar otro implica costos de inducción y ubicación. La posición del trabajador una vez firmado el contrato es de incertidumbre. ¿Por qué no le preocupa al trabajador la posibilidad de que el empleador realice tal explotación? ¿Por qué el empleador no explota esta circunstancia?

Una posibilidad es que el trabajador sea consciente de los incentivos, para él sea mejor trabajar y devengar un salario que quedarse desempleado. Una segunda posibilidad es que así como el trabajador queda a merced del empleador, también el empleador queda a merced del trabajador, puesto que el trabajador puede aprender ciertas cosas del negocio del empleador y así le resulte insustuible. Aunque la tercera posibilidad, si el empleador promete implícita o explícitamente que el empleo no implicará obligaciones desagradables, ni exageradas, podría ser una promesa creíble porque si el empleador violara esta promesa, sería conocido como un mal empleador, y es posible que no encuentre otro trabajador si este renuncia y tendría que ofrecer mayores salarios.
A continuación formalizamos las bases teóricas para estos juegos.

4.2. Juego bayesiano estático

Para representar un juego bayesiano estático en forma normal, sabiendo que cada jugador conoce sus pagos, pero que ignora los de los demás jugadores, los posibles pagos de los jugadores dependerán de un tipo de jugador, que lo conforma la información privada que éste posee; así para sus oponentes cada jugador puede ser de varios tipos, pero sólo él mismo conoce su propio tipo.

Un juego bayesiano en forma normal está conformado por los siguientes elementos:

i) Los jugadores, más la naturaleza.

ii) Un conjunto de acciones para cada jugador.

iii) Un conjunto de tipos para cada jugador.

iv) Una función de utilidad que depende tanto de las combinación de acciones como del tipo del jugador.

v) Una distribución de probabilidades conjuntas:

   - $p : t_1 \times t_2 \longrightarrow [0, 1]$;
   - $\sum_{t_1 \times t_2} p_i = 1$.

Definición 4.2.1 (Juego bayesiano en forma normal)**.** Un juego finito en forma normal es una $4n + 1 - tupla$ $G = (N, (A_i), (t_i)(u_i), p)$, donde $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ es el conjunto que indica los jugadores; A_i es el conjunto finito de acciones para el jugador $i \in N$; un conjunto de tipos, T_i, una función de pagos para el jugador $i \in N$ que asigna un pago a cada combinación de acciones, junto con el tipo de jugador, $u_i : \prod_{i \in N} A_i \times T_i \longrightarrow \mathbb{R}$, y una distribución conjunta de probabilidades p sobre los tipos.

Harsanyi, considerado el fundador de la economía de la información, creó la idea de tipo de jugador para modelar juegos de información incompleta como juegos de información imperfecta; introduce un jugador adicional denominado Naturaleza, que elige los tipos de jugadores de acuerdo con p y revela al jugador i su t_i, pero no a ningún otro jugador; luego los jugadores toman sus decisiones simultáneamente.

Definición 4.2.2. Una estrategia del jugador i en $G = (N, (A_i), (t_i)(u_i), p)$ es una función ampliada de los tipos a las acciones, $S_i : T_i \longrightarrow A_i$. Nótese que si cada jugador tiene un solo tipo la estrategia es equivalente a la de un juego con información completa.
Una vez tenemos las estrategias ampliadas que dependen de los tipos, procedemos a escribir la utilidad esperada del jugador i como función solamente de las estrategias ampliadas elegidas por todos los jugadores y ya no de su tipo:

$$\overline{u}_i(s_1(t_1), \ldots, s_n(t_n)) = \sum P(t)\, u_i(\, s_1(t_1), \ldots, s_n(t_n)); t_i\,).$$

Definición 4.2.3. En el juego bayesiano en forma normal, $G = (N, (A_i), (t_i)(u_i), p)$, un **equilibrio bayesiano de Nash** será un equilibrio de Nash en que los conjuntos de estrategias S_i, han sido reemplazados por los conjuntos de estrategias ampliadas $S_i(t_i)$, y las funciones de utilidad $u_i(\, s_1(t_1), \ldots, s_n(t_n)); t_i\,)$ por las funciones $\overline{u}_i(s_1(t_1), \ldots, s_n(t_n))$.

El equilibrio bayesiano de Nash, en un juego en el que cada jugador tiene un solo tipo, es equivalente al equilibrio de Nash
A continuación se presenta un ejemplo, para la aplicación del equilibrio bayesiano.

Ejemplo 4.2.1 (problema de salón de clase)**.** Se considera el juego de dos jugadores el profesor (jugador 1) y el alumno (jugador 2). El jugador 1 debe decidir entre realizar un control de lectura en una clase (R) o no realizarlo (Nr); el jugador (2) debe decidir simultáneamente si estudia (E) o no estudia (Ne). El jugador (1) es el único que conoce la importancia del tema, mientras que para el jugador (2) este hecho es incierto, de aquí el problema de información. Los pagos aparecen en las siguientes tablas.

		Jugador 2	
		Ne	E
Jugador 1	R	0, -1	2, $\underline{0}$
	Nr	$\underline{2}$,$\underline{1}$	$\underline{3}$, 0

Tema no importante

		Jugador 2	
		Ne	E
Jugador 1	R	1.5, -1	$\underline{3.5}$, $\underline{0}$
	Nr	$\underline{2}$, $\underline{1}$	3, 0

Tema importante

Tabla 4.1: *problema de clase.*

Si el tema no es importante, la mejor estrategia del jugador 1 es no realizar el examen, ya que su estrategia realizar es dominada. Sin embargo, cuando el tema es importante, la estrategia óptima del jugador 1 depende de la predicción de la probabilidad asociada a que el jugador 2 elija estudiar (E) o no estudiar (Ne). En otras palabras, el jugador 1 tiene que tratar de predecir el comportamiento del jugador 2, pero éste no puede inferir la acción del jugador 1 a partir de su conocimiento de los pagos que existen en el juego.
El jugador 1 posee dos tipos, uno en que sabe que el tema es importante y el otro cuando

no lo es; mientras que el jugador 2 posee un único tipo. La Naturaleza elige los tipos de los jugadores; el tipo para el jugador 1, que el control de lectura sea importante o que no lo sea, y para el jugador 2 su único tipo, luego los jugadores toman las decisiones simultáneamente.
Ahora representamos en la figura 4.1 las probabilidades sobre los tipos, que puede ser el jugador 1 y la elección del jugador 2 de la siguiente manera. Sea r la probabilidad de que el jugador 1 realice el control de lectura cuando el tema no es importante y $(1-r)$ la probabilidad de que lo realice cuando el tema es importante.

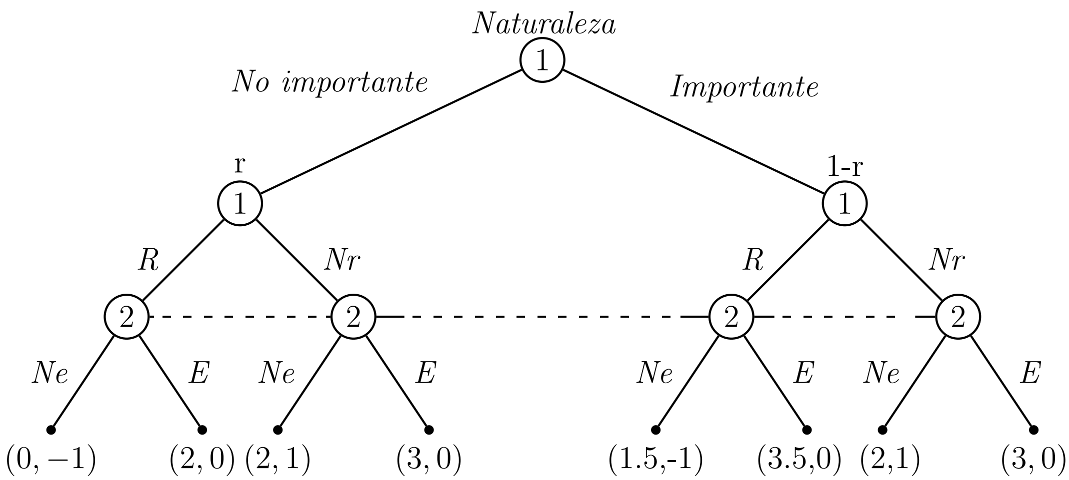

Figura 4.1: *Transformación de Harsanyi.*

		Jugador 2	
		Ne	E
Jugador 1	R-R	$3/2(1-r)$, -1	$-3r/2+7/2$, 0
	R-Nr	$2(1-r)$, $1-2r$	$-r+3$, 0
	Nr-R	$2r+3/2(1-r)$, $2r-1$	$\underline{3r+7/2(1-r)}$, $\underline{0}$
	Nr-Nr	$\underline{2}, \underline{1}$	$3, 0$

Tabla 4.2: *Juego en forma normal.*

Para ver como se construyó esta matriz a partir del juego en forma extensiva 4.1 consideremos como ejemplo el par de estrategias $(R-Nr,\ Ne)$. Con probabilidad r la Naturaleza elegirá que el tema no sea importante. Como el jugador 1 elige realizarlo R y luego el jugador 2 elige estudiar Ne, el juego termina con pagos $(0,-1)$. Por otro lado, con probabilidad $(1-r)$ la Naturaleza elige que el tema sea importante, y ahora el jugador 1 elige no realizarlo Nr de modo que el jugador 2 elige estudiar Ne; el juego termina con pagos $(2,1)$. Entonces el par de estrategias consideradas nos proporcionan utilidades esperadas de $r(0,-1)+(1-r)(2,1)$, que simplificadas, son $(2\,(1-r),\ 1-2r)$ y así sucesivamente.
Un equilibrio bayesiano del juego original es un equilibrio de Nash del juego de la tabla 4.2; por lo tanto los equilibrios bayesianos para $r<1$ son:

- Para cualquier valor de r, un equilibrio de Nash es que el jugador 1 no realice el examen (Nr) y el jugador 2 no estudie (Ne).
- Si $r < 1/2$, un equilibrio de Nash es que el jugador 1 realice el examen (R) y el jugador 2 estudie (E).
- Un equilibrio mixto con la combinación $\sigma = [(1/2(1-r), (1-2r)/2(1-r)), (1/2, 1/2)]$.

4.2.1. Juegos estáticos con información imperfecta y la representación secuencial

Cuando la ignorancia de un jugador se limita a qué es lo que ha pasado en el juego, pero este jugador conoce las características del juego y esto es de conocimiento común, se dice que el juego es de información completa pero imperfecta. También se puede reconocer un juego con información imperfecta, cuando los conjuntos de información de cada jugador, están compuestos por varias historias, donde el jugador no puede distinguir entre si.

Observación 1. *Todo juego estático tiene una representación en forma secuencial y viceversa.*

Observación 2. *Todo juego estático es un juego secuencial con información imperfecta.*

Ejemplo 4.2.2. Por consiguiente, el dilema de los prisioneros puede representarse mediante un juego secuencial con información imperfecta.

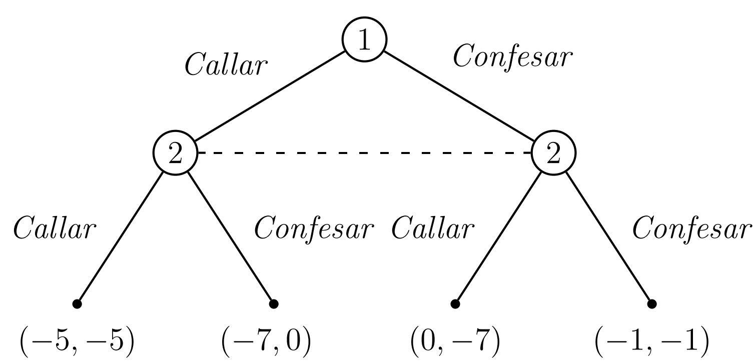

Figura 4.2: *Dilema del prisionero secuencial.*

En este juego se representa la unión de los dos nodos, donde elige el jugador 2 con una línea punteada, luego de las historias h=(C) y h'=(N) el hecho que el jugador 2 no sabe lo que ha hecho el jugador 1 al momento de tomar la decisión. Diremos que h y h' pertenecen al mismo conjunto de información.

El siguiente teorema señala que en los juegos secuenciales, también existe un equilibrio, utilizando la referencia [2]

Teorema 4.2.1. *Todo juego finito en forma extensiva con información perfecta y completa tiene al menos un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.*

Demostración. Es una consecuencia directa del el teorema de equilibrio de Nash y de la representación de un juego en forma extensiva a un juego estático. □

4.3. Juegos secuenciales con información imperfecta

En el capítulo anterior se utilizó para los juegos secuenciales el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, cuyo problema también era la multiplicidad de equilibrios. Una manera de reforzar el equilibrio para excluir el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, no creíbles es imponer los siguientes requisitos.

Requisito1. En cada conjunto de información, el jugador que va a mover debe tener una conjetura acerca de cuál historia en su conjunto de información ha sido alcanzada dentro del juego.

Requisito 2. Dadas sus conjeturas, las estrategias deben ser secuencialmente racionales. Es decir, en cada conjunto de información la acción tomada por el jugador que va a mover debe ser óptima, dada la conjetura del jugador en ese conjunto de información y las estrategias subsecuentes de los otros jugadores.

Requisito 3. En los conjuntos de información sobre la trayectoria de equilibrio, las conjeturas están determinadas por la regla de Bayes y por las estrategias de equilibrio de los otros jugadores.

Requisito 4. En los conjuntos de información por fuera de la trayectoria de equilibrio, las conjeturas están determinadas por la regla de Bayes y por las estrategias de equilibrio de los jugadores.
En esta sección introduciremos la noción de equilibrio bayesiano perfecto, con la idea de que un equilibrio debería especificar no sólo las estrategias de los jugadores sino también sus conjeturas en cada conjunto de información acerca de la historia que ocurrió.

Definición 4.3.1. En un juego secuencial con información imperfecta un **equilibrio bayesiano perfecto** consiste en la combinación de estrategias y las conjeturas, que son una distribución de probabilidad sobre las historias que satisfacen los requisitos 1 a 4.

El equilibrio bayesiano perfecto refuerza los requisitos del equilibrio perfecto en subjuegos, analizando explícitamente las conjeturas de los jugadores
A continuación mostraremos un ejemplo para mostrar la necesidad de los requisitos.

Ejemplo 4.3.1. Se considera el siguiente juego con información completa e imperfecta. En primer lugar, el jugador 1 elige entre tres acciones, A, B, C; si el jugador 1 elige A acaba el juego sin que juegue el jugador 2, puesto que no alcanza su conjunto de información. Si el jugador 1 elige B ó C , el jugador 2 se da cuenta, ya que no ha finalizado el juego, que A no ha sido elegida, (pero ignora si la elección fue B ó C) y entonces elige entre las dos acciones, D y E, tras lo cual termina el juego. Las ganancias se muestran en la forma extensiva de la figura 4.3.

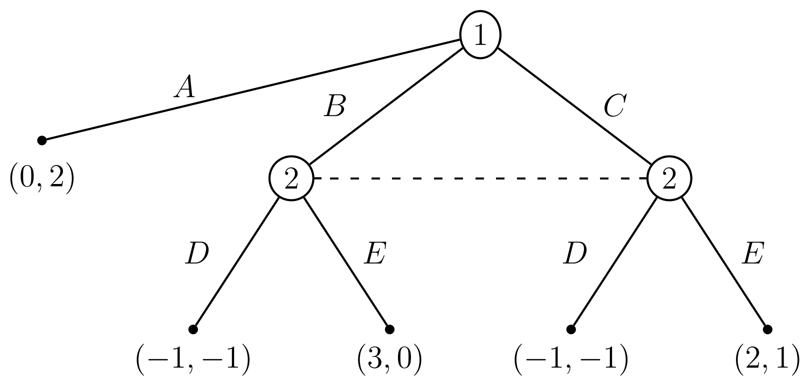

Figura 4.3: *información imperfecta.*

Representando este juego en forma normal, tabla 4.3; observamos que existen dos equilibrios de Nash en estrategias puras $[(B, E), (A, D)]$. Para determinar si estos equilibrios son perfectos en subjuegos, observamos el juego en forma extensiva; como no existen subjuegos aparte del juego completo, cumplen la condición trivialmente, por lo tanto $[(B, E), (A, D)]$ son equilibrios de Nash perfectos en subjuegos.

		Jugador 2	
		D	E
Jugador 1	B	-1, -1	$\underline{3}, \underline{0}$
	C	-1, -1	$2, \underline{1}$
	A	$\underline{0}, \underline{2}$	$0, \underline{2}$

Tabla 4.3: *Juego en forma normal.*

Pero el equilibrio (A, D) depende de una amenaza que no resulta creíble, puesto que si la situación no termina con la jugada del jugador 1, el jugador 2 analiza que jugar D está dominada por E luego el jugador 1 no debería verse inducido a jugar A por la amenaza del jugador 2 de jugar D, puesto que si llega a jugar, no utilizará la amenaza.
El requisito 1 de la definición 4.3 significa que si el juego alcanza el conjunto de información, con más de un elemento del jugador 2, éste debe formarse una conjetura sobre la historia que ha alcanzado, es decir, si el jugador 1 ha jugado B ó C, y se representa con las probabilidades p y $1 - p$ sobre la asignación del jugador a la historia en la figura 4.3. Dada la conjetura del jugador 2, escoge E en lugar de D si la utilidad esperada por jugar

E es mayor que la utilidad esperada por jugar D, es decir, si y sólo si,

$$\begin{aligned} 1 \cdot (1-p) &> -1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p), \\ 1-p &> -1. \end{aligned}$$

puesto que $1-p > -1$ para cualquier valor de p, en el intervalo $[0,1]$; entonces no existe ninguna conjetura por parte del jugador 2 que haga que elija D y se elige E. Por tanto el equilibrio (A, D) se elimina, pues no es creíble. El requisito 2 hace que la estrategia que elija el jugador 1 sea B, que llevan al equilibrio (B, E). En el equilibrio perfecto en subjuegos (B, E), la conjetura del jugador 2 debe ser $p = 1$, dada la estrategias de equilibrio del jugador 1 (concretamente E), satisfaciendo el requisito 3, y cumple de forma trivial el requisito 4, puesto que no hay ningún conjunto de información fuera de esta trayectoria de equilibrio, por lo que constituye un equilibrio bayesiano perfecto del juego.

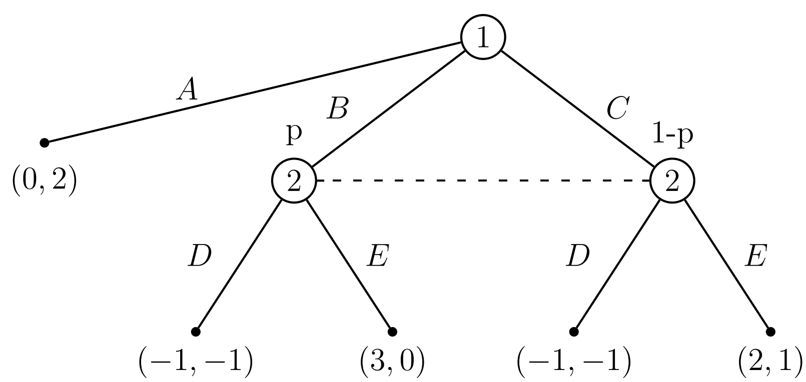

Figura 4.4: *juego con información imperfecta.*

El siguiente ejemplo muestra la necesidad de los requisitos 3 y 4, equilibrios que están fuera y dentro de la trayectoria de equilibrio.

Ejemplo 4.3.2 (Competencia de tarifas)**.** Las firmas Ola (jugador 1), Movistar (jugador 2), y Comcel (jugador 3) compiten por el mercado de las llamadas de celular. Las tarifas por minuto son las estrategias de las firmas. De esta forma, Ola tiene como estrategia reducir su precio en el corto plazo hasta \$ 230 u ofrecer un precio donde obtenga los ingresos suficientes para cubrir todos sus costos. La firma Movistar decide pelear con precios y se sitúa entre un precio superior a los \$ 230, pero inferior a los \$ 277. La firma Comcel no conoce qué estrategia seguirá Movistar, pero sabe que en caso de que Movistar decida reducir su precio, está los reduciría hasta \$ 245, y toma como estrategia reducir \$ 10 dependiendo de cómo lo haga Movistar. Las acciones de las firmas se pueden observar en el siguiente figura.

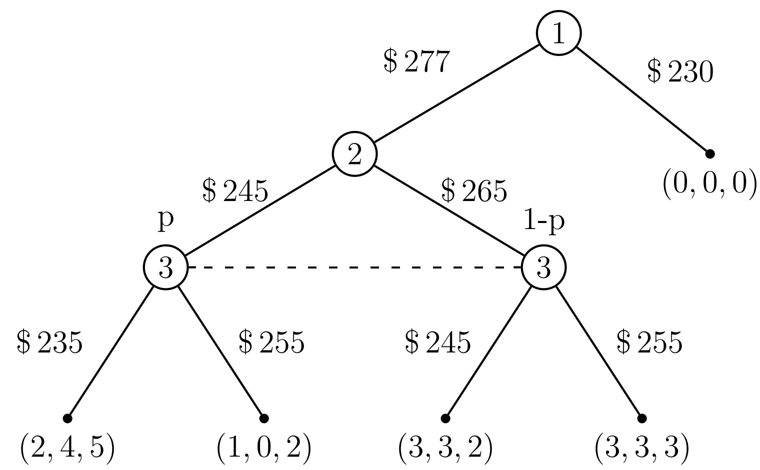

Figura 4.5: *juego de información imperfecta de tres.*

Jugador 1 elige \$ 277

		Jugador 3	
		\$ 235	\$ 255
Jugador 2	\$ 245	$\underline{2}, \underline{4}, \underline{5}$	$\underline{1}, 0, 2$
	\$ 265	$\underline{3}, \underline{3}, 2$	$\underline{3}, \underline{3}, \underline{3}$

Jugador 1 elige \$ 230

		Jugador 3	
		\$ 235	\$ 255
Jugador 2	\$ 245	$0\, \underline{0}, \underline{0}$	$0\, \underline{0}, \underline{0}$
	\$ 265	$0\, \underline{0}, \underline{0}$	$0\, \underline{0}, \underline{0}$

Tabla 4.4: *Juego en forma normal de tres.*

Los equilibrios perfectos en subjuegos son [(\$ 277, \$ 245, \$ 235), (\$ 277, \$ 265, \$ 255)], puesto que el juego tiene un subjuego que comienza en el conjunto de información del jugador 2, donde los equilibrios de Nash en ese subjuego son [(\$ 245, \$ 235), (\$ 265, \$ 255)].
Pero el único equilibrio perfecto en subjuegos, que cumple los requisitos para ser bayesiano perfecto es la combinación (\$ 277, \$ 245, \$ 235) con la conjetura $p = 1$.
Sean p y $1 - p$ las conjeturas que alcancen las historias del jugador 3; este escoge \$ 235 en lugar de \$ 255 si la utilidad esperada por jugar \$ 235 es mayor que la utilidad esperada por jugar \$ 255, es decir, si y sólo si,

$$5 \cdot p + 2 \cdot (1 - p) > 2 \cdot p + 3 \cdot (1 - p),$$
$$p > 1/4.$$

De modo que cuando $p > 1/4$, elegir \$ 235 es óptimo; dado esto el jugador 2 debe decidir secuencialmente, es decir jugar \$ 245; y por ultimo el jugador 1, jugar \$277. Estas estrategias y la conjetura $p = 1$ del jugador 3 satisfacen los requisitos 1 al 4, por lo que constituye un equilibrio bayesiano perfecto.
Consideremos el equilibrio perfecto en subjuegos (\$ 277, \$ 265, \$ 255), con la conjetura $p = 0$; estas estrategias y la conjetura satisfacen los requisitos 1 y 2. El problema es que la conjetura del jugador 3 ($p = 0$) es inconsistente con la estrategia del jugador 2 (\$ 277), ya que el requisito 3 pone restricciones a la conjetura, porque el equilibrio alcanza el conjunto de información del jugador 3; si la estrategia del jugador 2 es (\$ 277), la conjetura debe ser $p = 1$, luego no es un equilibrio bayesiano perfecto.

4.3.1. Conclusiones

Se presentaron las cuatro nociones de equilibrio, una para cada clase de juego en la que se intenta, incorporar cada vez, problemas mas interesantes.

Y respondiendo a la la pregunta hecha en la visión general, de como actuar cuando mis ganancias dependen tanto de mi elección como la de los demás jugadores, es razonar sobre lo que harían los demás y buscar lo mejor que yo debería hacer. El problema de los equilibrios es que se demuestra, su existencia, pero no su unicidad, los problemas de multiplicidad de equilibrios son la debilidad de la teoría de juegos. En situaciones donde hay multiplicidad de equilibrios, no está claro que los jugadores coordinen para jugar una combinación de estrategias de equilibrio. La situación mucho más deseable sería que el equilibrio fuera único. Frente a este problema existen algunos criterios de selección de equilibrio de Nash, para ocasiones en que los jugadores se encuentren en situaciones particulares. El lector interesado, puede remitirse al texto de referencia [6].

Siguiendo la estructura utilizada en el presente trabajo se podrían realizar extensiones, para próximos estudios incorporando otros temas tales como juegos cooperativos.

Ejemplo .0.3 (La batalla de los sexos)**.** Se analiza la situación de dos jugadores, llamada *la batalla de los sexos*, en la que un hombre y una mujer tratan de decidir lo que harán el fin de semana. Las posibilidades son ir a fútbol o ir a teatro: él quiere ir a fútbol y ella a teatro, aunque ambos prefieren pasarla juntos, tanto en fútbol como en el teatro. Los pagos se muestran en figura de la bimatriz a la izquierda 1.
Las estrategias del hombre (jugador 1) son C para fútbol y D para teatro.
Las estrategias de la mujer (jugador 2) son A para fútbol y B para teatro.

Este juego como se ve en la figura tiene tres equilibrios, dos en estrategias puras $[(C, A,), (D, B)]$ y uno en estrategias mixtas $((2/3, 1/3), (1/3, 2/3))$.

Ejemplo .0.4 (Piedra, papel y tijera)**.** El juego de dos jugadores, conocido por los niños como “Piedra, papel y tijera” en el cual a la cuenta de tres cada jugador extiende una mano y hace una de las tres cosas: con su mano extendida, asemejará el papel; su mano mostrando dos dedos entreabiertos denotara tijeras, y su mano empuñada para piedra. Los jugadores hacen esto simultáneamente, y cada uno ignora lo que el otro va a hacer. Si los dos jugadores hacen la misma jugada se considera un empate (ninguno gana o pierde); si los dos jugadores hacen diferentes jugadas, uno gana y el otro pierde, bajo las siguientes reglas:

1. Piedra rompe tijera (el jugador que escoge piedra gana, el jugador que escogió tijera pierde).

2. Tijera corta papel (el jugador que escoge tijera gana, el jugador que escogió papel pierde).

3. Papel envuelve piedra (el jugador que escoge papel gana, el jugador que escogió piedra pierde).

El pago será de cero para cada uno si hay empate; en caso de haber un ganador su pago será de una unidad que lo recibirá del perdedor.
Las estrategias del jugador 1 son A para piedra, B para papel y C para tijera.
Las estrategias del jugador 2 son D para piedra, E para papel y F para tijera.

Este juego como se ve en la figura 1 a la derecha, tiene un equilibrio en estrategias mixtas $((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3))$.

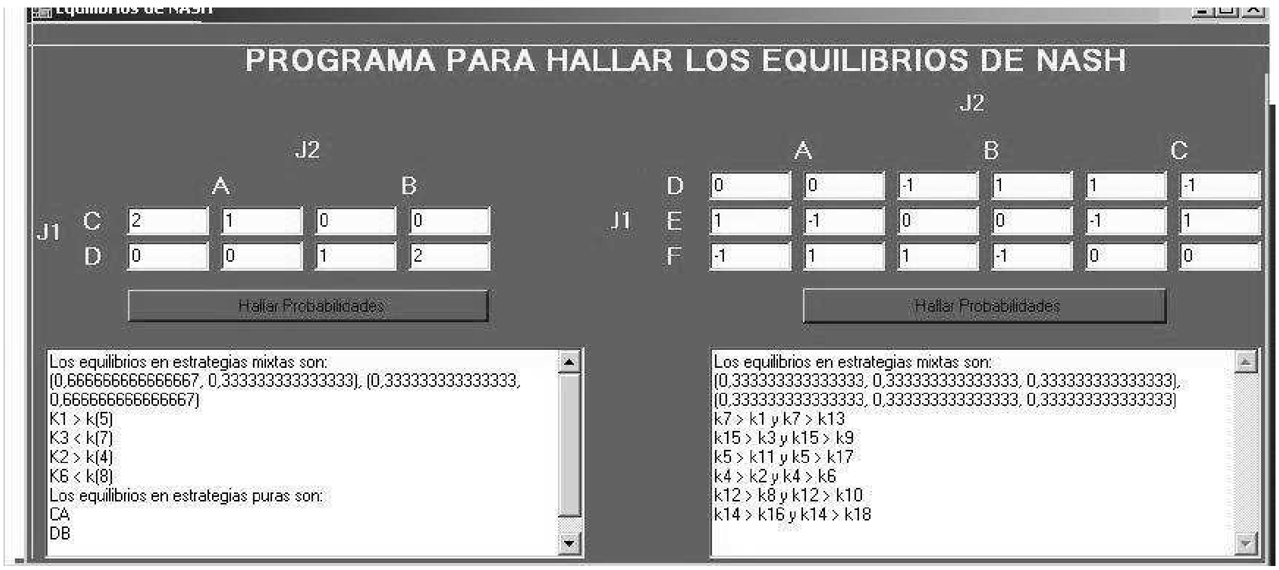

Figura 1: *Solución del juego, con el software.*

En el programa los k_i que aparecen son las comparaciones, para hallar las mejores respuestas de los jugadores, y así hallar los equilibrios en estrategias puras. Por ejemplo en el ejercicio de la izquierda hay dos equilibrios, mientras que en el de la derecha no; esto es porque la combinación de estrategias es un equilibrio si la pareja k_i, k_{i+1} , empezando con k_i impar son mayores en las comparaciones.

REFERENCIAS

[1] GIBBONS Robert. *Un primer curso en teoría de juegos.* Barcelona: Antoni Bosh, 1992.

[2] MONSALVE Sergio. *Introducción a los conceptos de cquilibrio en economía.* Primera Edición. Bogotá: Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Colombia, 1999.

[3] FERNANDEZ Jorge. *Teoría de juegos su aplicación en economía.* México: El Colegio de México, Centro de Estudios Económicos, 2002.

[4] FLEITAS G y MARGAREF J. *Problemas de topología general.* Madrid: Alhambra, 1980.

[5] MORA John. *Teoría de juegos.* http://www.icesi.edu.co/ jjmora/teoriajuegos.htm

[6] KREPS David. *Curso de teoría microeconómica.* Madrid: Mcgrau-Hill, 1995.

Los siguientes textos se dan como bibliografia para el lector interesado.

[7] FISCHER R. *Curso de organización industrial.* 2000. http://www.dii.uchile.cl/ in51a/docs/cap1-2.pdf

[8] FRIEDMAN James. *Teoría de juegos con aplicaciones a la economía.* Alianza Universidad, 1991.

[9] GROSSMAN Stanley. *Aplicaciones de álgebra lineal.* New York: Iberoaméricana, 1998.

[10] NASAR sylvia. *Una mente prodigiosa.* Barcelona: Random House-Mondadori, 2000.