LA COMPACTIFICACIÓN DE STONE-ČECH DE UN ESPACIO DISCRETO

FRANCISCO JAVIER GUTIÉRREZ LIZARAZO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008

LA COMPACTIFICACIÓN DE STONE-ČECH DE UN ESPACIO DISCRETO

FRANCISCO JAVIER GUTIÉRREZ LIZARAZO

Monografía presentada como requisito para optar al
título de Licenciado en Matemáticas

Director
RAFAEL FERNANDO ISAACS GIRALDO
Magister en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008

‘A todos los que quiero, aprecio y admiro”.

Agradecimientos

Quiero expresar mis mas sinceros agradecimientos a (me disculparán si se me pasa alguien):

Mi familia: mis padres, Reyes Ignacio Gutiérrez Salcedo y Luz Marina Lizarazo Sánchez; mis hermanos, Manuel Ignacio y Ronald Mauricio Gutiérrez Lizarazo; mi cuñada Yudi Cristina Ballesteros, por toda su colaboración, apoyo y paciencia durante toda la carrera.

Mis amigos: Jose Luis Puello García, Óscary Ávila Hernández, Arturo Castro, Óscar Madiedo, Jaiver Hernández, Francisco Niño, Hernan Rincón, Félix Páez, por su sincera amistad y por todos los momentos de academia y de no academia.

Mis maestros: Sonia Sabogal, Bernardo Mayorga, Alex Reátiga, Javier Camargo, Edilberto reyes y muy espacialmente a Rafael Isaacs por toda su paciencia y orientación en la realización de esta monografía.

Y a mi novia Yuli Katherine Rueda Galvis, por todo su cariño y comprensión.

TITLE: THE STONE-ČECH COMPACTIFICATION OF A DISCRETE SPACE*
AUTHOR: FRANCISCO JAVIER GUTIÉRREZ LIZARAZO **

KEY WORDS: Compact and Hausdorff spaces, compactification, the Stone-Čech compactification, filters, ultrafilters, semigroup, discrete semigroup.

DESCRIPTION:

When we studied calculus, learned that in the compact and Hausdorff spaces (cloused and bounded sets of real numbers), there are many results such as smallest and largest values over continuous functions , uniform continuity, unique convergence, etc. For this reasons and others, we want to convert any topological space in another compact and Hausdorff space. This process is called Compactificaction. There is a very special kind of compactification called The Stone-Cech compactification, it has important mathematical characteristics, such as uniquess, biggest and the universal extensión property.
In this work we will show a Stone-Cech compactification construction for a discrete space, using the filter and ultrafilter properties in topological spaces. We will prove the universal extensión property of a diferent way than the studied bibliography did it, using the imagen filter and the filter convergence.
To finish we will show some algrebraic properties of the Stone-Cech compactification of a discrete semigroup, and then we will give a proof of the Hindma's theorem using the algebraic structure of the Stone -Cech compactification of the discrete semigroup of the natural numbers.

*Monograph

**Faculty of Sciences, School of Mathematics. Rafael Fernando Isaacs Giraldo, Magister in Mathematics

TÍTULO: LA COMPACTIFICACIÓN DE STONE-ČECH DE UN ESPACIO DISCRETO*
AUTOR: FRANCISCO JAVIER GUTIÉRREZ LIZARAZO**

PALABRAS CLAVES: Espacios compactos y Hausdorff, compactificación, compactificación de Stone-Čech, filtros, ultrafiltros, semigrupo, semigrupo discreto.

DESCRIPCIÓN:

Aprendimos cuando estudiamos cálculo que en los espacios compactos y Hausdorff (conjuntos cerrados y acotados en los reales), se cumplían muchos resultados tales como existencia de máximos y mínimos en funciones continuas, continuidad uniforme, convergencia única , etc. Por tales razones nos interesamos en convertir cualquier espacio topológico en uno compacto y Hausdorff, sin que este pierda de alguna manera su esencia. Es decir tratamos de compactificar cualquier espacio. Entre las diversas tipos de compactificaciones que puede tener un espacios topológico está la compactificación de Stone-Cech; es un tipo especial de compactificación que goza de características matemáticas muy importantes, tales como unicidad, maximalidad y la propiedad de extensión universal.
En este trabajo presentaremos una construcción de la compactificación de Stone-Cech de un espacio discreto, utilizando las propiedades de los filtros y ultrafiltros en espacios topológicos. Mostraremos la propiedad de extensión universal de manera diferente a como lo hacen en la bibliografía consultada; utlizando los filtros imagen y la convergencia de filtros.
Por último presentaremos algunos propiedades algebraicas de la compactificación de de Stone-Cech de un semigrupo discreto, terminando con una demostración del teorema de Hindman que utiliza la estructura algebraica de la compactificación de Stone-Cech del semigrupo discreto de los números naturales.

*Monografía
**Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas. Rafael Fernando Isaacs Giraldo, Magister en Matemáticas

Índice general

Introducción

Los espacios compactos de Hausdorff, son un clase especial de espacios donde objetos matemáticos tales como sucesiones, ultrafiltros y funciones continuas cumplen propiedades muy importantes. Por citar algunos ejemplos del cálculo: la existecia de máximos y mínimos de una función continua, la continuidad uniforme de una función, la existencia y unicidad de los límites de sucesiones y de funciones. Es por estas razones que nos interesamos en estos espacios y deseamos a veces que cualquier espacio se pudiera convertir en un espacio compacto de Hausdorff sin perder de alguna forma la esencia de este. Y es aquí donde aparece el término *compactificación*, entendido como el proceso de convertir un espacio que no es compacto en uno que sí lo es. Existen diversos tipos de compactificaciones, pero nos interesaremos en este trabajo de una en especial llamada la compactificación de *Stone -Čech* para espacios discretos, precisamente porque son estos los espacios menos compactos que existen. Fue construída en 1937 por M. Stone y E. Čech. Esta compactificación goza de propiedades importantes como maximalidad, unicidad y la propiedad de extensión universal, además tiene múltiples aplicaciones en análisis que se escapan de los alcances de este trabajo. Hay diferentes formas de construir la compactificación de Stone -Čech (ver [3]), en nuestro caso para espacios discretos presentaremos una construcción por medio de unos objetos llamados ultrafiltros, muy importantes por sus múltiples aplicaciones en topología y lógica matemática.

Por último presentaremos la demostración del teorema de Hindman, utilizando algunas nociones algebraicas de la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$. Un teorema de la teoría de la combinatoria demostrado topológicamente.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo abordaremos todos los requerimientos o presaberes que necesitamos para el estudio de los siguientes capítulos. Abordaremos algo de conjuntos, funciones y topología general.

1.1. Funciones y relaciones

1.1.1. Funciones

Definición 1.1.1. Una *función* de un conjunto A en un conjunto B, y que se escribe $f : A \to B$ es un subconjunto f de $A \times B$ que cumple las siguientes condiciones:

a) Para todo $a \in A$, existe algún $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

b) Si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = c$.

En otras palabras cada elemento de A aparece solo una vez en una pareja ordenada de f. Por lo general se acostumbra a escribir la pareja ordenada $(a, b) \in f$ como $f(a) = b$. En muchos casos las funciones se pueden escribir mediante una regla que permite encontrar $f(a)$ cuando conocemos a. Por ejemplo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la regla $f(x) = 3x^2 + 5$. Pero en la mayoria de los casos no se puede asociar una regla de asignación a una función dada.

Definición 1.1.2. Sea $f : A \to B$, llamaremos al conjunto A el *dominio* de f o *conjunto de salida*, al conjunto B *conjunto de llegada* y al conjunto $f[A] = \{b \in B : b = f(a), a \in A\}$ *recorrido* de f. Cuando $f[A] = B$ diremos que f es *sobreyectiva* y si $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$ para todo $a, b \in A$ diremos que f es *inyectiva*; si la función es sobreyectiva e inyectiva diremos que la función es *biyectiva*.

Ejemplo 1.1.1. La función $f : A \to A$, con A un conjunto cualquiera definida como $f(a) = a$, para todo $a \in A$ es biyectiva. A la función f la llamaremos la *idéntica* en A y la notaremos I_A.

Definición 1.1.3. Sea $f : A \to B$, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$. Llamaremos *la imagen directa de C bajo f*, a el conjunto $f[C] = \{b \in B : b = f(a), a \in C\}$.
De igual manera llamaremos *la imagen inversa de D bajo f*, a el conjunto $f^{-1}[D] = \{a \in A : f(a) \in D\}$.

Proposición 1.1.1. *Si $f : A \to B$, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$ entonces en general se cumple:*

I) $f[f^{-1}[D]] \subseteq D$

II) $B \subseteq f^{-1}[f[B]]$

Demostración.

I) Sea $y \in f[f^{-1}[D]]$ entonces existe x en $f^{-1}[D]$ tal que $f(x) = y$, lo que quiere decir que $f(x) = y \in D$.

II) Sea $x \in B$ entonces $f(x) = y \in f[B]$, esto es $x \in f^{-1}[f[B]]$ porque $f(x) = y$.

☑

La primera inclusión se convierte en igualdad cuando la función f es sobreyectiva y la segunda cuando f es inyectiva.

Definición 1.1.4. Sean $f : A \to B$ y Si $g : B \to C$. Definiremos la función $g \circ f : A \to C$ como $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, y la llamaremos la *composición* de g con f.

Más formalmente, $(a, c) \in g \circ f$ si y sólo si para algún $b \in B$, $(a, b) \in f$ y $(b, c) \in g$.

Proposición 1.1.2. *La composición de funciones es asociativa, esto es sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$, funciones y A, B y C conjuntos cualesquiera. Entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

Demostración.
Sea $x \in A$, $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$. ☑

Definición 1.1.5. Sean $f : A \to B$, $g : B \to A$ funciones y A, B conjuntos cualesquiera. Diremos que g es *la inversa* de f y la denotaremos f^{-1} si y sólo si $f \circ g = I_A$ y $g \circ f = I_B$.

1.1.2. Relaciones

Definición 1.1.6. Una *relación* R de un conjunto A en otro B es cualquier subconjunto de $A \times B$.

Note que toda función de A en B es una relación de A en B, pero toda relación no cumple todas las condicones para ser función.
Si R es una relación de A en B, usualmente denotamos $(a, b) \in R$ como aRb. Cuando $B = A$ diremos simplemente que R es una relación en A. Este tipo de relaciones las trataremos con atención en esta sección.

Una relación en A es llamada *reflexiva* si y sólo si aRa para todo $a \in A$, *simétrica* si y sólo si aRb implica bRa para todo $a, b \in A$, *antisimétrica* si y sólo si aRb y bRa implica que $a = b$ para todo $a, b \in A$, *transitiva* si y sólo si aRb y bRc implica que aRc para todo $a, b \in A$.

Ejemplo 1.1.2. La relación $|$ en $\mathbb{N}$ definida como:

$$a \mid b \text{ si y sólo si } a \text{ divide a } b$$

es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo 1.1.3. La relación $\perp$ de perpendicularidad entre rectas en $\mathbb{R}^2$ es simétrica.

Existen dos tipos de relaciones muy importantes en el estudio de las matemáticas, las relaciones de equivalencia y las relaciones de orden. Son estas últimas las que serán objeto de estudio en esta sección debido a la importancia que tienen en los capítulos subsiguientes.

1.1.3. Relaciones de orden

Definición 1.1.7. Una relación R en A es una *relación de orden* en A si y sólo si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Como vimos en el ejemplo 1.1.2 la relación $|$ (divide) en $\mathbb{N}$ es una relación de orden. También la relación $\leq$ (menor igual) en $\mathbb{R}$ es de orden.
Si además para todo $a, b \in A$, aRb ó bRa diremos que R es una relación de orden *total* en caso contrario diremos que R es una relación de orden *parcial*.

Ejemplo 1.1.4. La relación $\leq$ en $\mathbb{N}$ es una relación de orden total.

Ejemplo 1.1.5. Sea D un conjunto. La relación $\subseteq$ en $\mathcal{P}(D)$ es una relación de orden parcial.

Definición 1.1.8. Sea R un orden parcial en un conjunto A. Un conjunto $\mathcal{C}$ es una *cadena* en A si y sólo si $\mathcal{C} \subseteq A$ y $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \bigcap R$ es un orden total en $\mathcal{C}$.

Ejemplo 1.1.6. Como dijimos en el ejemplo 1.1.5 la relación $\subseteq$ en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, es una relación de orden parcial. Si $\mathcal{C} = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ es una cadena en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, porque $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 1.1.9. Sea R un orden en un conjunto A. $a \in A$ es *un máximo* en A si y sólo si para todo $x \in A$, xRa. De manera similar $b \in A$ es *un mínimo* en A si y sólo si para todo $x \in A$, bRx.

Proposición 1.1.3. *El elemento máximo de una relación de orden si existe es único.*

Demostración.
Sea R un orden en un conjunto A. Supongamos que existen a_1 y a_2 máximos de A. Por lo tanto a_2Ra_1 y a_1Ra_2 pero como toda relación de orden es antisimétrica se tiene que $a_1 = a_2$. ☑

De igual manera se puede demostrar que en una relación de orden el elemento mínimo si existe es único. Además en adelante no diremos un máximo sino *el máximo* y de igual manera no hablaremos de un mínimo sino de *el mínimo*.

Ejemplo 1.1.7. Volviendo al ejemplo 1.1.5. $\emptyset$ es el mínimo de $\mathcal{P}(D)$ y D es el máximo. Porque para todo $A \in \mathcal{P}(D)$, $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq D$.

Definición 1.1.10. Sea R un orden en un conjunto A. $a \in A$ es *un maximal* en A si y sólo si para todo $x \in A$, aRx implica que $x = a$. De manera similar $b \in A$ es *un minimal* en A si y sólo si para todo $x \in A$, xRb implica que $x = b$.

Definición 1.1.11. Sea R un orden en un conjunto A y $B \subseteq A$. Diremos que B está *superiormente acotado* si y sólo si existe $a_1 \in A$ tal que bRa_1 para todo $b \in B$ y llamaremos a a_1 *una cota superior* de B. De igual manera diremos que B está *inferiormente acotado* si y sólo si existe $a_2 \in A$ tal que a_2Rb para todo $b \in B$ y llamaremos a a_2 *una cota inferior* de B.

1.1.4. Axioma de elección y lema de Zorn

El axioma de elección y el lema de Zorn son herramientas muy poderosas utilizadas por los matemáticos por ejemplo para mostrar la existencia de elementos maximales en un orden, de bases de espacios vectoriales, de elementos idempotentes en semigrupos semitopológicos, de ultrafiltros en un conjunto, etc. Sin la intervencion de ellas no podríamos contar con todos estos resultados tan importantes para diversas ramas de la matemática. Y aunque son proposiciones que al enunciarlas parecen ser diferentes en realidad son equivalentes. En este trabajo utlizaremos sobre todo el lema de Zorn si no en todos, en la mayoría de los capítulos*.

Teorema 1.1.1. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *(Axioma de elección): Si* $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *es una familia indexada de conjuntos no vacíos, disyuntos dos a dos, entonces existe un conjunto* $B \subset \bigcup A_\lambda$ *tal que* $B \cap A_\lambda$ *es exactamente un elemento para cada* $\lambda \in \Lambda$.

b) *(Lema de Zorn): Si toda cadena en un conjunto* A *no vacío, parcialmente ordenado tiene una cota superior, entonces* A *tiene un elemento maximal.*

1.2. Espacios topológicos y funciones continuas

1.2.1. Espacios topológicos

Definición 1.2.1. Una *topología* sobre un conjunto X es una familia τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

a) $\emptyset$ y X pertenecen a τ.

b) La unión arbitraria de elementos de τ pertenece a τ.

c) La intersección finita de elementos de τ pertenece a τ.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama *espacio topológico* y se denota por el par ordenado (X, τ), pero a menudo omitiremos mencionar τ si no existe confusión.

Definición 1.2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Llamaremos *abierto* a todos los subconjuntos de X que pertenezcan a τ.

Presentaremos a continuación algunos ejemplos de espacios topológicos.

Ejemplo 1.2.1. Sea $X = \{a, b, c, d\}$, una topología sobre X, es $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$.

Ejemplo 1.2.2. Si X es un conjunto cualquiera, entonces $\mathcal{P}(X)$ es una topología sobre X y se llama *topología discreta*. La familia formada únicamente por los conjuntos $\emptyset, X$ es también una topología sobre X y la llamaremos *topología indiscreta* o *trivial*.

*Para observar una prueba de la equivalencia ver [4].

Ejemplo 1.2.3. Sea X un conjunto cualquiera. Si $\tau_f = \{U \subseteq X : X \setminus U$ es finito ó $X\}$ entonces τ_f es una topología sobre X y la llamaremos *la topología de los complementos finitos* sobre X.

Claramente $\emptyset$ y X pertenecen a τ_f. Si $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia indexada de abiertos no vacíos de τ_f, entonces

$$X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus U_\lambda).$$

El miembro de la derecha es finito porque cada $X \setminus U_\lambda$, con $\lambda \in \Lambda$ es finito y la intersección arbitraria de conjuntos finitos es finito, por lo tanto $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau_f$. Si $\{U_i : i = 1, 2, 3, \cdots, n\}$ es una familia finita de elementos de τ_f, entonces

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_i).$$

El miembro de la derecha es finito ya que $X \setminus U_i$ para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ es finito y la unión finita de conjuntos finitos es finito, por lo tanto $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau_f$.

1.2.2. Base de una topología

Muchas veces una topología en un conjunto puede ser definida por un subconjunto de abiertos de dicho conjunto. Este subconjunto es el que llamaremos base de una topología.

Definición 1.2.3. Sea X un conjunto, una *base* para una topología sobre X es una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (llamados elementos *básicos*) tales que:

a) Para todo $x \in X$, existe un elemento básico B que lo contiene.

b) Si x está en la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ satisface estas condiciones definiremos la *topología generada* por $\mathcal{B}$ como $\tau_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X :$ para todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que, $x \in B$ y $B \subseteq U\}$.
Observemos que cada elemento de $\mathcal{B}$ pertenece a $\tau_{\mathcal{B}}$.

Demostremos que la colección $\tau_{\mathcal{B}}$ es una topología sobre X. Si U es el conjunto vacío entonces $U \in \tau_{\mathcal{B}}$ trivialmente. Si $U = X$ por la condición a) de la definición 1.2.3, $X \in \tau_{\mathcal{B}}$. Sea $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia indexada de elementos de $\tau_{\mathcal{B}}$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau_{\mathcal{B}}$ porque si $x \in U$ entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in U_\lambda$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Sean ahora U_1 y U_2 elementos en $\tau_{\mathcal{B}}$ y sea $x \in U_1 \cap U_2$, o sea existen $B_1 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_1 \subseteq U_1$ y $B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_2 \subseteq U_2$ y por el inciso *b*) de la definición 1.2.3 existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. Por lo tanto $\tau_{\mathcal{B}}$ es una topología sobre X.

Ejemplo 1.2.4. El conjunto $\mathcal{B} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, o sea el conjunto de los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ es una base para una topología en $\mathbb{R}$ que llamaremos la topología usual en $\mathbb{R}$ y la denotaremos τ_u.

Evidentemente $\mathbb{R} = \cup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$, además la intersección de dos intervalos abiertos es otro intervalo abierto, por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base para una topología en $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.4. Sea τ una topología en un conjunto X y $\mathcal{B} \subseteq \tau$ una base, se dice que $\mathcal{B}$ genera a τ si y sólo si $\tau = \tau_{\mathcal{B}}$.

Observemos que toda topología tiene una base que la genera, y es precisamente toda la topologia; llamaremos a esta base es la *base trivial*.

Ejemplo 1.2.5. La topología discreta sobre cualquier conjunto es generada por la colección de todos los conjuntos unitarios del conjunto.

Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ la topología discreta en X. $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una base para una topología en X, porque $\bigcup \mathcal{B} = X$ y si B_1 y $B_2 \in \mathcal{B}$, con $x \in \mathcal{B}_1 \cap B_2$ entonces $\{x\} \subseteq B_1 \cap B_2$. Además para todo $A \subseteq X$, $A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$, esto quiere decir que $\mathcal{P}(X) \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$. Por lo tanto $\mathcal{P}(X) = \tau_{\mathcal{B}}$, o sea $\mathcal{B}$ genera a $\mathcal{P}(X)$.

1.2.3. La topología de subespacio

Dado un espacio topológico X, podemos definir en $Y \subseteq X$ una topología de la siguiente manera.

Definición 1.2.5. Sea X un espacio topológico con topología τ. Si Y es un subconjunto de X, el conjunto

$$\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y, y la llamaremos *topología de subespacio* o *topología relativa*. Con esta topología denominaremos a Y subespacio de X; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y.

Veamos que evidentemente τ_Y es una topología. Es claro que $\emptyset$ y Y están en τ_Y porque $\emptyset = Y \cap \emptyset$ y $Y = Y \cap X$, con $\emptyset$ y X elementos de τ. El hecho de que sea cerrado para intersecciones finitas y uniones arbitrarias se es consecuencia de las suguientes igualdades

$$(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) \cap \cdots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n) \cap Y$$

$$\bigcup_{\lambda \in \lambda} (U_\lambda \cap Y) = (\bigcup_{\lambda \in \lambda} U_\lambda) \cap Y.$$

Proposición 1.2.1. *Si $\mathcal{B}$ es base para una topología de X, entonces la colección*

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología de subespacio sobre Y.

Demostración.
Sea $y \in Y$ como $\mathcal{B}$ es una base para X, y $Y \subseteq X$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $y \in B \cap Y$. Ahora sea U abierto de X, y $y \in U \cap Y$, por lo tanto existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $y \in B \subseteq U$, entonces $y \in B \cap Y \subseteq U \cap Y$ y por la definición 1.2.4, $\mathcal{B}$ es una base que genera el subespacio Y. ☑

Ejemplo 1.2.6. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y el subconjunto $Y = [0, 1]$. La topología de subespacio sobre Y tiene como base todos los conjuntos de la forma $(a, b) \cap Y$, donde (a, b) es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Este conjunto es alguno de los siguientes:

$$(a, b) \cap Y = \begin{cases} (a, b) & \text{si } a \text{ y } b \text{ están en } Y \\ [0, b) & \text{si solamente } b \text{ está en } Y \\ (a, 1] & \text{si solamente } a \text{ está en } Y \\ Y \text{ ó } \emptyset & \text{si ni } a \text{ ni } b \text{ están en } Y \end{cases}$$

por la definición de subespacio, cada uno de estos conjuntos es abierto en Y. Pero los conjuntos de segundo y tercer tipo (incluso Y) no son abiertos en el espacio más grande $\mathbb{R}$.

1.2.4. Conjuntos cerrados, interior y clausura

Introduciremos la definición de conjunto cerrado, clausura, interior y punto de acumulación conceptos asociados a los espacios topológicos.

Definición 1.2.6. Un subconjunto A de un espacio topológico X decimos que es *cerrado* si y sólo si $X \setminus A$ es abierto.

Ejemplo 1.2.7. El conjunto $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ es cerrado con la topología τ_u porque, $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (\infty, a) \cup (a, \infty)$ es abierto en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.8. En la topología de los complementos finitos sobre un conjunto X, los conjuntos cerrados son X y los conjuntos finitos.

Las definiciones de conjunto abierto y cerrado no son definiciones opuestas, es decir una no es la negación de la otra. Existen espacios topológicos donde un conjunto abierto (diferente a $\emptyset$ y a todo espacio) es a la vez cerrado.

Ejemplo 1.2.9. Volviendo al espacio topológico discreto todo subconjunto es abierto, pero a su vez todo subconjunto es cerrado.

Teorema 1.2.1. *Si $\mathcal{C}$ es la colección de conjuntos cerrados en un espacio topológico X, entonces*

a) $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{C}$.

b) La intersección arbitraria de elementos de $\mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{C}$

c) La unión finita de elementos de $\mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{C}$.

Demostración.
$a)$ $\emptyset$ y X son cerrados porque son complementos de los conjuntos abiertos X y $\emptyset$.

$b)$ Sea $\{C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia indexada de subconjuntos cerrados de X, aplicando la ley de Morgan,

$$X \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus C_\lambda).$$

Como los conjuntos $X \setminus C_\lambda$ son abiertos y la unión arbitraria de abiertos es abierto entonces la parte derecha de la igualdad es abierto. Por lo tanto, $\bigcap C_\lambda$ es cerrado.

$c)$ De igual manera si $\{C_i : i = 1, 2, \cdots, n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ un a familia finita de cerrados de X, aplicando otra vez la ley de Morgan,

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus C_i).$$

Como los intersección finita de conjuntos abiertos es abierto, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ es cerrado. ☑

Definición 1.2.7. Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. El *interior* de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A, y se denota Int$A$ y la *clausura* de A se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A, y lo denotaremos ClA ó $\overline{A}$.

Claramente, Int$A$ es un conjunto abierto y $\overline{A}$ es un conjunto cerrado, además,

$$\text{Int}A \subseteq A \subseteq \overline{A}.$$

Si A es abierto, $A = \text{Int}A$, y si A es cerrado, $A = \overline{A}$.

No daremos mucho énfasis en el interior de un conjunto, pero la clausura de un conjunto si será muy importante para los seguidos capítulos. La definición de clausura de un conjunto no nos da un método fácil de encontrarla ya que por lo general la familia de todos los conjuntos cerrados es muy grande para trabajar con ella. Existe un camino más fácil para encontrar la clausura, solo necesitamos que el espacio topológico tenga una base y se describirá en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.2. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X.*

a) Entonces $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, todo conjunto abierto U que contiene a x interseca a A.

b) Suponiendo que la topología de X está dotada por una base, entonces $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, cada elemento básico B que contiene a x interseca a A.

Demostración.
Transformemos la proposición a) en la siguiente proposición equivalente:
$x \notin \overline{A}$ si y sólo si existe un abierto U tal que $x \in U$, y que no interseca a A.

a) $\Rightarrow$) Sea $x \notin \overline{A}$, por lo tanto $x \in X \setminus \overline{A}$, que es un abierto, y además $(X \setminus \overline{A}) \cap A = \emptyset$.
$\Leftarrow$) Sea U abierto en X, tal que $x \in U$, por lo tanto $x \notin X \setminus U$, como $U \cap A = \emptyset$ entonces $A \subseteq X \setminus U$, por lo tanto $\overline{A} \subseteq X \setminus U$ y como $x \notin X \setminus U$ entonces $x \notin \overline{A}$.

b) $\Rightarrow$) Como cada elemento básico es también un abierto de X, entonces por el inciso a), cada elemento básico interseca a A.
$\Leftarrow$) Sea U abierto en X, tal que $x \in U$, entonces existe B abierto básico tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$ y como cada elemento básico interseca a A, entonces U interseca a A, y por el inciso a), $x \in \overline{A}$. ☑

Entre los subconjuntos de un espacio topológico pueden existir unos cuya clausura coincide con todo el espacio, estos subconjuntos son muy importantes porque con sus elementos podemos hablar de el espacio en general.

Definición 1.2.8. Sea X un espacio topológico y $D \subseteq X$. Diremos que D es denso en X si y sólo si todo abierto de X contiene elementos de D.

Ejemplo 1.2.10. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, es denso en $\mathbb{R}$ con la topología usual, porque todo intervalo abierto no vacío contiene números racionales.

En un espacio topológico con base solo basta ver que en los abiertos básicos existen elementos de un conjunto para decidir si es o no denso.
El siguiente teorema nos muestra otra forma de identififcar los conjuntos densos.

Teorema 1.2.3. *Sean X espacio topológico y $D \subseteq X$. D es denso si y sólo si $\overline{D} = X$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sean $x \in X$, y U abierto en X tal que $x \in U$, pero como D es denso entonces $D \cap U \neq \emptyset$, lo que quiere decir que $\overline{D} = X$.
$\Leftarrow$) Sea U abierto no vacío de X, y sea $x \in U$, como $x \in \overline{D}$ entonces $D \cap U \neq \emptyset$ lo que quiere decir que D es denso en X. ☑

Definición 1.2.9. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que U es una *vecindad* de x, si y sólo si U es un conjunto abierto de X, y $x \in U$. Denotaremos al conjunto de todas las vecindades de x como $\mathcal{U}_x$.

1.2.5. Funciones continuas

Entre todas las clases de funciones definidas en las matemáticas, las funciones continuas son tal vez las más importantes. Ellas son por lo general condición necesaria y suficiente de casi todos los resultados relacionados con el cálculo. En este caso daremos una definición de función continua muy general donde la respectiva al cálculo será sólo un caso particular del espacio topológico usual en $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.10. Sean X y Y espacios. Una función $f : X \to Y$ se dice que es continua si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

Observemos que la continuidad de una función depende no sólo de la función sino también de las topologías definidas en sus conjuntos de partida y llegada. O sea es posible que una función sea continua para unas topologías y para otras no.

Ejemplo 1.2.11. Cualquier función definida de un espacio topológico discreto en otro cualquiera siempre es continua.
Sea $f : X \to Y$ una función, X con la topología discreta y Y un espacio topológico cualquiera. Si V es una abierto en Y, entonces $f^{-1}(V) \subseteq X$, o sea $f^{-1}(V) \in \mathcal{P}(X)$. Por lo tanto según la definición f es continua.

Una manera fácil de ver si una función es continua cuando el espacio de llegada tiene una base, se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.2. *Sea $f : X \to Y$ una función con X, Y espacios topológicos cualesquiera, y $\mathcal{B}$ una base para Y. Entonces f es continua si y sólo si para todo $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B)$ es abierto en X.*

Demostración.
Sea V abierto en Y, que se puede escribir como

$$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$$

pero,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

Y como $f^{-1}(B_\lambda)$ es abierto en X por hipótesis, entonces $f^{-1}(V)$ es un abierto en X, y por lo tanto f es continua. ☑

El siguiente teorema nos dará algunas equivalencias de la definición de continuidad muy útiles para decidir también cuando una función es continua o no.

Teorema 1.2.4. *Sean X y Y espacios topológicos; sea $f : X \to Y$ una función. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *f es continua.*

b) *Para toda conjunto cerrado B de Y, se cumple que $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.*

c) *Para cada $x \in X$ y cada vecindad V de $f(x)$, existe una vecindad U de x, tal que $f(U) \subseteq V$.*

Demostración.
a) $\Rightarrow$ *b)* Sea f continua y B cerrado de Y, por lo tanto $Y \setminus B$ es abierto, entonces

$$f^{-1}[Y \setminus B] = f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[B] = X \setminus f^{-1}[B]$$

es abierto en X, por lo tanto $f^{-1}[B]$ es cerrado en X.

$b) \Rightarrow c)$ Sea $x \in X$ y V vecindad de $f(x)$, entonces $Y \setminus V$ es un conjunto cerrado que no contiene a $f(x)$, esto quiere decir que $[f^{-1}[Y \setminus V] = C$ es un cerrado de X, que no contiene a x, por lo tanto $X \setminus C = U$ es un abierto que contiene a x, y además

$$f[U] = f[X \setminus C] = f[X] \setminus f[C] = Y \setminus (f[f^{-1}[Y]] \setminus f[f^{-1}[V]]) =$$

$$= Y \setminus (Y \setminus f[f^{-1}[V]]) = f[f^{-1}[V]] \subseteq V.$$

$c) \Rightarrow a)$ Sea V un abierto en Y, y sea $x \in f^{-1}[V]$, entonces $f(x) \in V$, por hipótesis existe U abierto en X, tal que $x \in U$, y además $f[U] \subseteq V$, es decir $U \subseteq f^{-1}[f[U]] \subseteq f^{-1}[V]$, o sea $f^{-1}[V]$ lo podemos escribir como unión de abiertos, por lo tanto es abierto en X. ☑

1.2.6. Homeomorfismos

Definición 1.2.11. Sean X y Y dos espacios topológicos; sea $f : X \to Y$ una biyección si se cumple que las funciones f y f^{-1} son continuas decimos que f es un *homeomorfismo*. Además decimos que X y Y son *homeomorfos* y lo denotamos como $X \cong Y$.

Que la función $f^{-1} : Y \to X$ sea continua significa que para todo abierto U de X, se tiene que $(f^{-1})^{-1}[U]$ debe ser abierto, pero $(f^{-1})^{-1}[U] = f(U)$, porque f es una biyección. O sea otra forma de ver que f es un homeomorfismo es diciendo que f es una función biyectiva, tal que $f(U)$ es abierto si y sólo si, U es abierto. Un homeomorfismo tal como acabamos de definirlo no es solo una correspondencia biunívoca entre los elementos de dos conjuntos, sino también entre los conjuntos abiertos de ambos espacios. Esto es, cualquier propiedad descrita por medio de los abiertos en un espacio tiene su equivalente en el otro y viceversa. A este tipo de propiedades se les conoce con el nombre de *propiedades topológicas* o *invariantes topológicos*. Dos espacios homeomorfos se puede decir de cierta forma que son el mismo o que son equivalentes (de hecho la relación $\cong$ en el conjunto de todos los espacios topológicos forma una relación de equivalencia).

Ejemplo 1.2.12. Tener una base no trivial es un invariante topológico. Es decir si dos espacios topológicos son homeomorfos y uno tiene una base no trivial entonces el otro también.
Sean X y Y dos espacios homeomorfos. O sea existe un homeomorfismo $\varphi : X \to Y$. Sea $\mathcal{B}_X = \{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una base de X. Consideremos el

conjunto $\mathcal{B}_Y = \{\varphi[B_\lambda] : \lambda \in \Lambda\}$. Vamos a demostrar que $\mathcal{B}_Y$ es una base para una topología.
Como φ es un homeomorfismo entonces $\varphi[B_\lambda]$, con λ en Λ es un abierto en Y. Ahora si $B_{\lambda_1}, B_{\lambda_2} \in \mathcal{B}_X$, entonces existe $B_{\lambda_3} \in \mathcal{B}_X$ tal que $B_{\lambda_3} \subseteq B_{\lambda_1} \cap B_{\lambda_2}$ y por lo tanto $\varphi[B_{\lambda_3}] \subseteq \varphi[B_{\lambda_1} \cap B_{\lambda_2}] \subseteq \varphi[B_{\lambda_1}] \cap \varphi[B_{\lambda_2}]$, y además como

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = X \text{ entonces, } \varphi[\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda] = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \varphi[B_\lambda] = Y,$$

por lo tanto $\mathcal{B}_Y$ es una base para una topología. Ahora demostraremos que efectivamente la topología generada por $\mathcal{B}_Y$ coincide con la topología de Y. Es claro que τ_{B_Y} está contenida en la topología de Y. Para mostrar la otra contenencia sea A abierto de Y, por lo tanto $\varphi^{-1}[A]$ es un abierto en X, entonces $\varphi^{-1}[A] = \bigcup_{\pi\in\Pi} B_\pi$, con $\Pi \subseteq \Lambda$ y aplicando imagen directa

$$A = \varphi[\varphi^{-1}[A]] = \varphi[\bigcup_{\pi\in\Pi} B_\pi] = \bigcup_{\pi\in\Pi} \varphi[B_\pi].$$

Por lo tanto $\mathcal{B}_Y$ es una base para Y.

1.3. Compacidad

Desde los principios de la topología, se ha pensado que el intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real gozaba de cierta propiedad que era indispensable en la demostración de teoremas tales como el teorema del valor máximo y el teorema de continuidad uniforme. Sin embargo, dicha propiedad tardo mucho en ser formulada para un espacio topológico en general. Después de tantos ires y venires y después de tantos intentos de formular esta propiedad damos a continuación la última formulación en términos de recubrimientos que nosotros llamaremos *compacidad.* Aunque no es tan natural nos permitirá trabajar en espacios arbitrarios. Primero definiremos que es un recubrimiento y después pasaremos a definir la compacidad.

Definición 1.3.1. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio X se dice que *recubre* a X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ es igual a X. Diremos que el *recubrimiento es abierto* si $\mathcal{A}$ esta formado por conjuntos abiertos de X.

Definición 1.3.2. Un espacio topológico X, lo llamaremos *compacto* si y sólo si para cada recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X podemos extraer una subcolección finita que también recubre a X.

Ejemplo 1.3.1. Todo espacio topológico finito es compacto.
Sea $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ un espacio finito y sea $\mathcal{A} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un

recubrimiento abierto de X. O sea $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ pero como cada $x_i \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ existe $A_{\lambda_i} \in \mathcal{A}$ tal que $x_i \in A_{\lambda_i}$ entonces $X = \bigcup_i^n A_{\lambda_i}$ por lo tanto X es compacto.

Ejemplo 1.3.2. La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta, porque el recubrimiento $\mathcal{A} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento abierto que no admite un subrecubrimiento finito.

La siguiente definición la utilizaremos con frecuencia en los siguientes capítulos. Además si D es un conjunto, notaremos $\mathcal{P}(D)$, como el familia de todos los subconjuntos de D; y $\mathcal{P}_f(D)$, como la familia de todos los subconjuntos finitos de D.

Definición 1.3.3. Sean $\mathcal{A}$ y D conjuntos con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(D)$. Diremos que $\mathcal{A}$ tiene la *propiedad de las intersecciones finitas* (P.I.F) si y sólo si para todo $F \in \mathcal{P}_f(\mathcal{A})$, $\bigcap F \neq \emptyset$.

Presentaremos a continuación una caracterización de los espacios compactos por medio de conjuntos cerrados e intersecciones finitas, a veces muy útil para saber si un espacio es compacto o no.

Teorema 1.3.1. *Sea X un espacio topológico. X es compacto si y sólo si en toda colección de conjuntos cerrados de X que tiene la P.I.F su intersección es no vacía.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea A una familia de conjuntos cerrados con P.I.F., y sea $S \in \mathcal{P}_f(A)$ entonces $\bigcap S \neq \emptyset$, tomando complementos tenemos que $X \setminus \bigcap S \neq X$, o sea que por las leyes de Morgan $\bigcup_{i=1}^n (X \setminus S_i) \neq X$, lo que quiere decir que la familia de conjuntos $X \setminus A_\alpha$, con $A_\alpha \in A$ no forma un recubrimiento abierto de X. Por lo tanto $\bigcup (X \setminus A_\alpha) \neq X$, y tomando complementos $\bigcap A \neq \emptyset$.
$\Leftarrow$) Sea $R = \{\mathcal{U}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un recubrimiento abierto de X. Supongamos que todo $R_f \in \mathcal{P}_f(R)$ no recubre a X, o sea $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\lambda_i} \neq X$, con $\mathcal{U}_{\lambda_i} \in R_f$. Tomando complementos se tiene que $X \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\lambda_i} \neq \emptyset$, y por leyes de Morgan $\bigcap_{i=1}^n (X \setminus \mathcal{U}_{\lambda_i}) \neq \emptyset$. O sea la familia formada por los conjuntos cerrados $X \setminus \mathcal{U}_\lambda$ tiene la P.I.F. y por hipótesis $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus \mathcal{U}_\lambda) \neq \emptyset$. Si tomamos complementos nos queda $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda \neq X$, lo que es una contradicción porque R es un recubrimiento de X. ☑

Ahora veremos algunos resultados a cerca de subespacios.

Teorema 1.3.2. *Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si y sólo si cada recubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre a Y.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $R = \{\mathcal{U}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un recubrimiento de Y por abiertos de X, o sea $Y \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda$, entonces $Y = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda) \cap Y = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (\mathcal{U}_\lambda \cap Y)$, que es un recubrimiento de Y, por abiertos del subespacio. Como Y es compacto entonces existe un subrecubrimiento finito, o sea $Y = \bigcup_{i=1}^n (\mathcal{U}_{\lambda_i} \cap Y) = (\bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\lambda_i}) \cap Y$, esto quiere decir que $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\lambda_i}$.
$\Leftarrow$) Sea $R_Y = \{\mathcal{V}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un recubrimiento de Y por abiertos del subespacio. O sea que $\mathcal{V}_\lambda = \mathcal{U}_\lambda \cap Y$, para todo $\lambda \in \Lambda$ y para algún $\mathcal{U}_\lambda$ abierto de X. Es decir $Y = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (\mathcal{U}_\lambda \cap Y)$, pero esto quiere decir que $Y \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda$, pero por hipótesis $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\lambda_i}$, entonces $Y = (\bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\lambda_i}) \cap Y = \bigcup_{i=1}^n (\mathcal{U}_{\lambda_i} \cap Y) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_{\lambda_i}$, que es un subrecubrimiento finito de Y. ☑

Teorema 1.3.3. *Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración.
Sea Y un subespacio cerrado de un espacio X compacto. Y sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento de Y, por abiertos de X. Como Y es cerrado entonces, $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup (X \setminus Y)$ es un recubrimiento abierto de X. Como X es compacto entonces existe un subrecubrimiento finito que recubre a X, si este subrecubrimiento contiene el abierto $X \setminus Y$ entonces los otros recubren a Y, y si no pues también lo recubren. En cualquier caso la colección resultante es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}$ que recubre a Y, y por le teorema 1.3.2 Y es compacto. ☑

1.4. Axiomas de separación

Hay espacios topológicos donde sus puntos se puede separar de diferentes maneras dado su estructura, o sea por medio de sus conjuntos abiertos y cerrados. Dependiendo de la manera en que se separan estos puntos el espacio adquiere cualidades de mucha importancia que apreciaremos más adelante en los siguientes capítulos.

Definición 1.4.1. Un espacio topológico X es un espacio T_0, si y sólo si para todo x y y en X, con $x \neq y$ existe un conjunto abierto que contiene a uno y no al otro.

Ejemplo 1.4.1. La topología discreta en un conjunto con más de un punto es T_0.

Definición 1.4.2. Un espacio topológico X es un espacio T_1, si y sólo si para todo x y $y \in X$, con $x \neq Y$ existe un abierto de cada uno que no contiene al otro.

Definición 1.4.3. Un espacio topológico X es un espacio T_2 o espacio *Hausdorff*, si y sólo si para todo x y $y \in X$, con $x \neq Y$ existen abiertos disyuntos U y V, donde $x \in U$ y $y \in V$.

Ejemplo 1.4.2. El espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topología usual es un espacio Hausdorff. Si a y $b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$, sin perdida de generalidad $a < b$, entonces $a \in (-\infty, a + (b-a)/2)$, $b \in (a + (b-a)/2, \infty)$ y claramente $(-\infty, a + (b-a)/2) \cap (a + (b-a)/2, \infty) = \emptyset$.

Definición 1.4.4. Un espacio topológico X es un espacio *regular* si y sólo si para todo conjunto cerrado A de X, y $x \notin A$, existen abiertos disyuntos U y V, tal que $x \in U$ y $A \subseteq V$.

Los siguientes teoremas nos permitirán decidir cuando un espacio topológico es regular.

Teorema 1.4.1. *Sea X un espacio topológico. X es regular si y sólo si U es abierto en X, y $x \in U$, entonces existe un abierto V, tal que $x \in V$, y además $\overline{V} \subseteq U$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea U abierto de X, y $x \in U$, esto es $X \setminus U$ es cerrado y $x \notin X \setminus U$. Por ser X regular entonces existen abiertos disyuntos W y V tales que $X \setminus U \subseteq W$ y $x \in V$, pero $V \subseteq X \setminus W$, o sea que $V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U$.
$\Leftarrow$) Sea A un conjunto cerrado de X, y $x \notin A$. Entonces $X \setminus A$ es abierto y $x \in X \setminus A$, pero por hipótesis existe V abierto tal que $x \in V$, y además $\overline{V} \subseteq X \setminus A$. Es decir $A \subseteq X \setminus \overline{V} \subseteq X \setminus V$, con V y $X \setminus \overline{V}$ abierto disyuntos que contienen a x y A respectivamente. Por lo tanto X es regular. ☑

Teorema 1.4.2. *Todo espacio compacto y Hausdorff es regular.*

Demostración.
Sea X un espacio compacto y Hausdorff, y sean A cerrado de X y $x \notin A$, para todo $a \in A$, existen U_a y V_a abiertos disyuntos que contienen a a y x respectivamente. pero como

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$$

y sabiendo que A es cerrado por el teorema 1.3.3 A es compacto. O sea que existen $a_1, a_2, \cdots a_n \in A$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} \text{ y además, } (\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}) = \emptyset$$

por lo tanto X es un espacio regular. ☑

Definición 1.4.5. Un espacio X es completamente regular si y sólo si para todo A conjunto cerrado en X y $x \notin A$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[A] = \{1\}$.

Es claro que todo espacio completamente regular es regular. Solo basta con observar que la imagen inversa de dos conjuntos disyuntos es disyunta.

Ejemplo 1.4.3. Todo espacio con la topología discreta es completamente regular. Porque como dijimos en el ejemplo 1.2.11 toda función definida de un espacio discreto en otro cualquiera es continua.

Capítulo 2

Ultrafiltros y la topología de βX

Existen espacios donde todos los conceptos topológicos pueden ser traducidos en términos de sucesiones convergentes*; por ejemplo en los espacios métricos decimos que un conjunto es cerrado si y sólo si toda sucesión convergente de elementos de dicho conjunto converge en él. O sea puedo hablar de la topología de dichos espacios en el lenguaje de las sucesiones convergentes, pero esto no sucede en general para todo espacio topológico. Afortunadamente los filtros si pueden caracterizar todos los conceptos y las propiedades topológicas de cualquier espacio sin distinción; y es aquí donde radica su importancia topológica. Se podría decir que el concepto de filtro por su similitud en cuanto a topología se refiere, es la generalización de sucesión. Además los ultrafiltros y su propiedades nos servirán para generar la topología de la cual estará dotada la compactificación de Stone-Čech para un espacio discreto.

2.1. Filtros y Ultrafiltros

Definición 2.1.1. Sea D un conjunto. Un *filtro* en D es un conjunto no vacío $\mathcal{F}$ de subconjuntos de D con las siguientes propiedades.

a) Si A, $B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

b) Si $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

c) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Los siguientes ejemplos, nos permitirán hacernos una idea de la definición de filtro. Se deja como ejercicio secillo al lector verificarlos.

*Los espacios 1-contables, ver[3].

Ejemplo 2.1.1. El filtro trivial de un conjunto D, $\mathcal{F} = \{D\}$.

Ejemplo 2.1.2. En un conjunto D infinito, el conjunto $\mathcal{F} = \{A \subseteq D : D \setminus A$ es finito $\}$.

Definición 2.1.2. Sea D un conjunto y sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(D)$ tal que $\emptyset$ no está en $\mathcal{B}$. Diremos que $\mathcal{B}$ es *una base* para un filtro en D si y sólo si para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, y al conjunto $\mathcal{F} = \{F \subseteq D:$ existe un $B \in \mathcal{B}$ con $B \subseteq F\}$ lo llamaremos *filtro generado* por $\mathcal{B}$ y lo notaremos $< \mathcal{B} >$ o *gen* $\mathcal{B}$.

Basta mostrar que en efecto $\mathcal{F}$ es un filtro en D.

Claramente $D \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Ahora sean F_1 y F_2 elementos de $\mathcal{F}$, o sea existen en $\mathcal{B}$ elementos B_1 y B_2 tales que $B_1 \subseteq F_1$ y $B_2 \subseteq F_2$, pero sabemos también que por ser base $\mathcal{B}$ existe B_3 en $\mathcal{B}$, tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$, por lo tanto $F_1 \cap F_2$ también pertenece a F. Ahora sea F un elemento de $\mathcal{F}$, o sea existe B en $\mathcal{B}$ tal que $B \subseteq F$ y sea S tal que $F \subseteq S$, o sea $B \subseteq F \subseteq S$, por lo tanto S pertenece a $\mathcal{F}$. Entonces por la definición de filtro $\mathcal{F}$ es un filtro.

Ejemplo 2.1.3. Las vecindades de un punto de un espacio topológico forman una base para un filtro.

Ejemplo 2.1.4. El conjunto $\mathcal{B} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$, es base para un filtro en $\mathbb{R}$ que llamaremos filtro de *Frechet*.
En efecto sean $a, b \in \mathbb{R}$ y podemos suponer sin perdida de generalidad que $a \leq b$, por lo tanto $(a, \infty) \cap (b, \infty) = (b, \infty)$, entonces $\mathcal{B}$ es base para un filtro en $\mathbb{R}$.

Definición 2.1.3. Un *ultrafiltro* en D es un filtro en D el cual no esta propiamente contenido en algún otro filtro en D; en otras palabras un ultrafiltro es un filtro maximal bajo la relación de contenencia en el conjunto de todos los filtros de D.

Más adelante en el teorema 2.1.3 se demostrará que efectivamente estos objetos (ultrafiltros) existen. Una consecuencia inmediata de la anterior definición es la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. *Sea D un conjunto y sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ ultrafiltros en D. Entonces $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ si y sólo si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.*

Demostración.
La necesidad es trivial. La suficiencia se desprende del hecho de que como U es ultrafiltro no puede estar propiamente contenido en el filtro $\mathcal{V}$, por lo tanto $\mathcal{U}$ tiene que ser igual a $\mathcal{V}$. ☑

Lema 2.1.1. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro en el conjunto D y sea $A \subseteq D$. Entonces, existe algún $E \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap E = \emptyset$ ó $F = \{C \subseteq D$: existe algún $E \in \mathcal{F}$ con $A \cap E \subseteq C\}$ es un filtro en D.*

Demostración.
Consideremos el conjunto $\mathcal{B} = \{B : B = A \cap E,\ E \in \mathcal{F}\}$ si $A \cap E \neq \emptyset$ para todo $E \in \mathcal{F}$. Demostraremos que $\mathcal{B}$ es una base para un filtro y además que $< \mathcal{B} >= F$. Sean B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}$, o sea existen E_1 y E_2 elementos de $\mathcal{F}$ tales que $B_1 = A \cap E_1$ y $B_2 = A \cap E_2$, es decir $B_1 \cap B_2 = A \cap (E_1 \cap E_2)$, o sea $B_1 \cap B_2$ pertenece a $\mathcal{B}$, por lo tanto $\mathcal{B}$ es base para un filtro en D. Además por la definición de filtro generado y de F, se concluye que $< \mathcal{B} >= F$.
Y si existe algún $B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ entonces, $\emptyset \in F$ y por lo tanto F no sería un filtro.
Obsérvese que $\mathcal{F} \subseteq F$. ☑

Ahora presentaremos una manera de identificar por medio de la propiedad de las intersecciones finitas cuando un filtro es de hecho un ultrafiltro.

Teorema 2.1.1. *Sea D un conjunto y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(D)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en D.

b) $\mathcal{U}$ tiene la propiedad de las intersecciones finitas y para todo $A \in \mathcal{P}(D) \backslash \mathcal{U}$ existe algún $B \in \mathcal{U}$ tal que $A \cap B = \emptyset$.

c) $\mathcal{U}$ es maximal respecto a la propiedad de las intersecciones finita. (es decir, $\mathcal{U}$ es un miembro maximal de $\{\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(D) : \mathcal{V}$ tiene la propiedad de las intersecciones finitas$\}$.)

d) $\mathcal{U}$ es un filtro y para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{P}(D))$, si $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{F} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

e) $\mathcal{U}$ es un filtro para todo $A \subseteq D$, $A \in \mathcal{U}$ ó $D \setminus A \in \mathcal{U}$.

Demostración.
$a) \Rightarrow b)$. Por las condiciones $a)$ y $c)$ de la definición de filtro $\mathcal{U}$ posee la propiedad de las intersecciones finitas. Supongamos que existe $A \subseteq D$ tal que $A \notin \mathcal{U}$ y además $A \cap B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{U}$. Lo que quiere decir que el conjunto F del lema 2.1.1 es un filtro y además $\mathcal{U} \subseteq F$(contradicción).

$b) \Rightarrow c)$ Supongamos que $\mathcal{U}$ no es maximal respecto a la propiedad de las intersecciones finitas en D. Lo que quiere decir que existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(D)$ con la propiedad de las intersecciones finitas tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Sea $A \in \mathcal{V} \setminus U$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{U}$(contradicción).

$c) \Rightarrow d)$ Claramente $\emptyset \notin \mathcal{U}$, observemos que $\mathcal{U} \cup \{D\}$ posee la P.I.F y además $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \cup \{D\}$ por lo tanto $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \{D\}$ lo que quiere decir que $D \in \mathcal{U}$. Sean A y B elementos de $\mathcal{U}$ por lo tanto $A \cap B \neq \emptyset$, como $\mathcal{U}$ posee la P.I.F entonces $\mathcal{U} \cup \{A \cap B\}$ también y como $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \cup \{A \cap B\}$ entonces $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \{A \cap B\}$ y por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{U}$. Sean $A \in \mathcal{U}$ y $A \subseteq B$ como $\mathcal{U}$ posee la P.I.F entonces $\mathcal{U} \cup \{B\}$ también y como $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \cup \{B\}$ entonces $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \{B\}$ por lo tanto $B \in \mathcal{U}$ y por la definición 2.1.1 tenemos que $\mathcal{U}$ es un filtro. Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{P}(D))$ tal que $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{U}$, supongamos que para todo $A \in \mathcal{F}$, $A \notin \mathcal{U}$ y como $\mathcal{U} \cup \{A\}$ no posee la P.I.F, existe $\mathfrak{G}_A \in \mathcal{P}_f(\mathcal{U})$ tal que $A \cap (\bigcap \mathfrak{G}_A) = \emptyset$ y sea $\mathcal{H} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \mathfrak{G}_A$. Entonces $\mathcal{H} \cup \{\bigcup \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{U}$ pero $(\bigcup \mathcal{F}) \cap (\bigcap \mathcal{H}) = \emptyset$ por que $A \cap (\bigcap \mathcal{H}) = \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}$, contradicción.

$d) \Rightarrow e)$ Sea $A \subseteq D$ y $\mathcal{F} = \{A, D \setminus A\}$.

$e) \Rightarrow a)$ Supongamos que $\mathcal{U}$ no es un ultrafiltro, entonces existe un filtro $\mathcal{V}$ en D tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, por lo tanto existe $A \subseteq D$ donde $A \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ entonces por hipótesis $D \setminus A \in \mathcal{U}$, pero también $D \setminus A \in \mathcal{V}$(contradicción). ☑

Sea $a \in D$, es fácil ver que $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{P}(D) : a \in A\}$ es un ultrafiltro en D. Porque aplicando el teorema anterior claramente es un filtro y para todo $B \subseteq D$, $a \in B$ o $a \in D \setminus B$. Este ultrafiltro lo llamaremos *ultrafiltro principal* generado por a.
A continuación presentaremos un resultado que nos permitirá identificar cuando un ultrafiltro es principal.

Teorema 2.1.2. *Sea D un conjunto y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en D. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro principal.

b) Existe algún $F \in \mathcal{P}_f(D)$ tal que $F \in \mathcal{U}$.

c) El conjunto $\{A \subseteq D : D \setminus A$ es finito $\}$ no esta contenido en $\mathcal{U}$.

d) $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

e) Existe algún $x \in D$, tal que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$.

Demostración.
$a) \Rightarrow b)$ como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro principal existe $x \in D$ tal que $\mathcal{U} = \{A \subseteq D,\ x \in A\}$ o sea $\{x\} \in \mathcal{U}$.

$b) \Rightarrow c)$ Por hipótesis sea $F \in P_f(D) \cap \mathcal{U}$, entonces $D \setminus F \notin \mathcal{U}$.

$c) \Rightarrow d)$ Por hipótesis sea $A \subseteq D$, tal que $A \notin \mathcal{U}$ y $D \setminus A$ es finito. Sea $F = D \setminus A$. Pero $F \in \mathcal{U}$ lo podemos ver como $F = \bigcup\{\{x\} : x \in F\}$ y por el teorema 2.1.1 existe $x \in F$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U}$. Si $B \in \mathcal{U}$ entonces $\{x\} \cap B \neq \emptyset$ por lo tanto $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

$d) \Rightarrow e)$ Por hipótesis $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$ y sea $x \in \bigcap \mathcal{U}$, por lo tanto $D \setminus \{x\} \notin \mathcal{U}$ así que $\bigcap \mathcal{U} \subseteq \{x\}$.

$e) \Rightarrow a)$ Por hipótesis existe $x \in D$ tal que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$. Entonces $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V} = \{A \subseteq D : x \in A\}$ son ambos ultrafiltros en D y observemos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Por lo tanto $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. ☑

Ahora veremos que todo filtro en un conjunto esta contenido en algún ultrafiltro del mismo conjunto.

Teorema 2.1.3. *Sea D un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(D)$, $\mathcal{A}$ con la propiedad de las intersecciones finitas. Entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en D tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$.*

Demostración.
Sea $\mathfrak{T} = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(D) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ donde $\mathcal{B}$ tiene la P.I.F$\}$. Como podemos ver $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}$ por lo tanto $\mathfrak{T} \neq \emptyset$. Dada una cadena $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{T}$ se tiene que claramente que $\mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\bigcup \mathcal{C})$ entonces por ser $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathfrak{T}$ existe un $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Por lo tanto por el lema de Zorn (teorema 1.1.1, b)), $\mathfrak{T}$ tiene al menos un miembro maximal que lo llamaremos $\mathcal{U}$. Pero si observamos detenidamente $\mathcal{U}$ no sólo es maximal de $\mathfrak{T}$ sino también es maximal de las intersecciones finitas en D, porque si suponemos que no, existiría un $\mathcal{V} \in \mathcal{P}(D)$ con la P.I.F tal que $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{V}$, pero de esto se tiene que $\mathcal{V} \in \mathfrak{T}$ por lo tanto $\mathcal{U}$ no sería un maximal de $\mathfrak{T}$ (contradicción). Por lo tanto por el teorema 2.1.1 inciso (c), $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en D. ☑

Corolario 2.1.1. *Sea D un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro en D, sea $A \subseteq D$. Entonces $A \notin \mathcal{F}$ si y sólo si existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en D, tal que $\mathcal{F} \cup \{D \setminus A\} \subseteq \mathcal{U}$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{F} \cup \{D \setminus A\}$ no tiene P.I.F o sea que existe $\mathcal{B} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{F})$ tal que $\bigcap \mathcal{B} \cap (D \setminus A) = \emptyset$. Esto quiere decir que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$B \cap (D \setminus A) = \emptyset$ o sea $B \subseteq A$ y por lo tanto $A \in \mathcal{F}$ (contradicción). Por el teorema 2.1.3 existirá $\mathcal{U}$ ultrafiltro en D tal que $\mathcal{F} \cup \{D \setminus A\} \subseteq \mathcal{U}$.
$\Leftarrow$) Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en D y $(D \setminus A) \in \mathcal{U}$ entonces por el teorema 2.1.1 $A \notin \mathcal{U}$. ☑

El siguiente teorema útil más adelante, muestra condiciones necesarias para la existencia de ultrafiltros no principales.

Teorema 2.1.4. *Sea D un conjunto y $\mathcal{R} = \{B \in \mathcal{P}(D) : B$ es infinito$\}$. Entonces:*

(a) *Siempre que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}$ con la propiedad de que toda subfamilia finita no vacía tenga intersección infinita, existirá un ultrafiltro no principal $\mathcal{U}$ en D tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$.*

(b) *Siempre que $A \in \mathcal{R}$, existirá un ultrafiltro no principal $\mathcal{U}$ en D tal que $A \in \mathcal{U}$*

Demostración.
(a) Sea $\mathcal{B} = \{A \subseteq D : \text{para todo}\, B \in \mathcal{R},\, A \cap B \neq \emptyset\}$. Observemos que $\mathcal{B}$ es diferente de vacío porque $D \in \mathcal{B}$. Ahora sea $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Mostraremos que $\mathcal{C}$ tiene la $P.I.F.$ para ver esto es suficiente ver que para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{A})$ y $\mathcal{G} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{B})$ se tiene que $(\bigcap \mathcal{F}) \cap (\bigcap \mathcal{G}) \neq \emptyset$. Supongamos en cambio que existen tales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ con $(\bigcap \mathcal{F}) \cap (\bigcap \mathcal{G}) = \emptyset$. Entonces por hipótesis $B = \bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{R}$. O sea $B \cap (\bigcap \mathcal{G}) = \emptyset$ y así $B = B \setminus \bigcap_{A \in \mathcal{G}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{G}} (B \setminus A)$ esto quiere decir que existe un $A \in \mathcal{G}$ tal que $C = B \setminus A \in \mathcal{R}$. Pero $A \cap C = \emptyset$ contradiciendo el hecho de que $A \in \mathcal{B}$.
Por el teorema 2.1.3 hay un ultrafiltro $\mathcal{U} \in D$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$. Dado $C \in \mathcal{U}$, $D \setminus C \notin \mathcal{U}$ y en consecuencia $D \setminus C \notin \mathcal{B}$. Es decir existe $B \in R$ tal que $B \cap (D \setminus C) = \emptyset$. Por lo tanto $B \subseteq C$. Es decir $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal.
(b) Si hacemos $\mathcal{A} = \{A\}$. Entonces $\mathcal{A}$ cumple las hipótesis del inciso (a). O sea existe algún ultrafiltro no principal $\mathcal{U}$ en D tal que $A \in \mathcal{U}$. ☑

2.2. Convergencia de filtros

En la presente sección, daremos algunos resultados relacionados con la convergencia de filtros, y apreciaremos algunas aplicaciones de los filtros y los ultrafiltros en espacios topológicos, que además serán de gran importancia en los capítulos siguientes.

Definición 2.2.1. Sea X un espacio topológico, $x \in X$, $\mathcal{U}_x$ el conjunto de todas las vecindades de x y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Se dice que $\mathcal{F}$ converge a x si y sólo si $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$, y se escribe $\mathcal{F} \to x$.

Teorema 2.2.1. *Si $A \subseteq X$, entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe un filtro $\mathcal{F}$ en X tal que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \to x$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Si $x \in \overline{A}$, consideremos el siguiente conjunto $\mathcal{B} = \{U \cap A \,|\, U \in \mathcal{U}_x\}$, veamos que B resulta ser base para un filtro en X que contiene a A y además converge a x.
Sean B_1 y $B_2 \in \mathcal{B}$, o sea existen U_1 y U_2 en $\mathcal{U}_x$ tal que $B_1 = U_1 \cap A$ y $B_2 = U_2 \cap A$, pero $B_1 \cap B_2 = (U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = (U_1 \cap U_2) \cap A$, y como $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$ entonces $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$, o sea $\mathcal{B}$ es base para un filtro en X, y es claro que $A \in < \mathcal{B} >$ y $\mathcal{U}_x \subseteq < \mathcal{B} >$.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X tal que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \to x$, y sea $U \in \mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$ entonces $A \cap U \neq \emptyset$ por lo tanto $x \in \overline{A}$. ☑

Como consecuencia inmediata del anterior teorema se tiene que un conjunto es cerrado si y sólo si todo filtro convergente que contiene al conjunto converge en él.

Teorema 2.2.2 (Definición). *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X y $f : X \to Y$, entonces $f(\mathcal{F})$ es el filtro en Y, que tiene como base los conjuntos $f[F]$, $F \in \mathcal{F}$ que llamaremos el filtro imagen de $\mathcal{F}$ bajo f.*

Demostración.
Debemos demostrar que el conjunto $\mathcal{B} = \{f[F],\ F \in \mathcal{F}\}$ es en efecto una base para un filtro que denotaremos $f(\mathcal{F})$.
Sean B_1 y $B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existirán A_1 y A_2, tal que $B_1 = f[A_1]$ y $B_2 = f[A_2]$, y como $A_1 \cap A_2 = A_3 \subseteq A_1$ y $A_1 \cap A_2 = A_3 \subseteq A_2$, por funciones se tiene que $f[A_3] \subseteq f[A_1]$ y $f[A_3] \subseteq f[A_2]$, por lo tanto $f[A_3] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$, y como $A_1 \cap A_2 = A_3 \in \mathcal{F}$ se tiene que $f[A_3] \in \mathcal{B}$ ☑

Veremos ahora que así como las sucesiones convergentes en ciertos espacios guardan uniformidad bajo funciones continuas, los filtros en cualquier espacio topológico también lo hacen.

Teorema 2.2.3. *Sea $f : X \to Y$. Entonces f es continua en $x \in X$ si y sólo si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, tal que $\mathcal{F} \to x$ entonces $f(\mathcal{F}) \to f(x)$ en Y.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $U \in \mathcal{U}_{f(x)}$, como f es continua en x, existe $V \in \mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$ tal que

$f[V] \subseteq U$ y como $f[V] \in f(\mathcal{F})$ y $f(\mathcal{F})$ es filtro entonces $U \in f(\mathcal{F})$.

$\Leftarrow$) En particular sea $\mathcal{F} = \mathcal{U}_x$, como $\mathcal{F} \rightarrow x$ entonces $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x)$ en Y por hipótesis, y sea $U \in \mathcal{U}_{f(x)} \subseteq f(\mathcal{F})$, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $f[F] \subseteq U$. ☑

Una caracterización de los espacios Hausdorff mediante filtros se presenta a continuación en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.4. *X es Hausdorff si y sólo si todo filtro convergente en X lo hace a un único punto.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $\mathcal{F}$ filtro convergente en X, supongamos que $\mathcal{F}$ converge tanto a x como a y, con $x \neq y$, como X es Hausdorff existen $U \in \mathcal{U}_x$ y $V \in U_y$ tales que $U \cap V = \emptyset$, contradicción por que U y $V \in \mathcal{F}$.
$\Leftarrow$) Supongamos que X no es Hausdorff eso quiere decir que existen $x, y \in X$, y $x \neq y$ que no se pueden separar por abiertos, es decir $U \cap V \neq \emptyset$, para todo $U \in \mathcal{U}_x$ y para todo $V \in \mathcal{U}_y$. El conjunto $\mathcal{B} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{U}_y\}$ es base para un filtro $\mathcal{F}$ en X porque $(U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2)$ donde $(U_1 \cap U_2) \in \mathcal{U}_x$ y $(V_1 \cap V_2) \in \mathcal{U}_y$. Pero $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{F}$, por lo tanto $\mathcal{F}$ converge tanto a x como y. Imposible por hipótesis. Por lo tanto X tiene que ser Hausdorff. ☑

El siguiente teorema va a ser muy importante en el estudio de los siguientes capítulos.

Teorema 2.2.5. *Si $f, g : X \rightarrow Y$ son funciones continuas y Y es Hausdorff, entonces $A = \{x | f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.*

Demostración.
Debemos ver que $\overline{A} \subseteq A$. Sea $x \in \overline{A}$ por el teorema 2.2.1, existe un filtro $\mathcal{F}$ tal que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \rightarrow x$, como f y g son funciones continuas por el teorema 2.2.3 tenemos que $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x)$ y $g(\mathcal{F}) \rightarrow g(x)$.
Quiero observar que $f(\mathcal{F}) \rightarrow g(x)$ (ósea que $f(\mathcal{F})$ también contiene todas las vecindades de $g(x)$) y por lo tanto por el teorema 2.2.4 vamos a concluir, puesto que Y es Hausdorff que $f(x) = g(x)$, y por lo tanto $x \in A$. Para ver esto sea $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{g(x)}$, por ser g continua existe $V \in U_x \subseteq \mathcal{F}$ tal que $g(V) \subseteq U$, y como $A \cap V \subseteq A$ tenemos que:

$$f(A \cap V) = g(A \cap V) \subseteq g(V) \subseteq \mathcal{U},$$

como A y $V \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap V \in \mathcal{F}$, o sea $f(A \cap V) \in f(\mathcal{F})$, y como U es un super conjunto de $f(A \cap V)$ entonces $U \in f(\mathcal{F})$. O sea $f(\mathcal{F}) \rightarrow g(x)$. ☑

El anterior teorema nos dice que si dos funciones coinciden en un conjunto entonces también coinciden en su clausura, en particular si las funciones coinciden en un subconjunto denso entonces también lo harán en todo el conjunto. De esta observación se desprende el siguiente corolario.

Corolario 2.2.1. *Si $f, g : X \to Y$ son funciones continuas, Y es Hausdorff, y f y g coinciden en un conjunto denso D en X, entonces $f = g$.*

Demostración.
Por el teorema 2.2.5, como f, g coinciden en D, también lo harán en $\overline{D} = X$. ☑

A continuación presentaremos una caracterización de los espacios compactos mediante ultrafiltros.

Teorema 2.2.6. *X es un espacio compacto si y sólo si todo ultrafiltro en X converge.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea p un ultrafiltro en X que no converge, es decir $\forall x \in X$, $\exists U_x$ abierto en X tal que $U_x \notin p$; definamos $\mathcal{R} = \{U_x | x \in X\}$ que claramente es un recubrimiento abierto de X, por ser X compacto existen $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ tales que $\mathcal{R}_n = \{U_{x_i} | x_i \in X, \text{ para } i = 1, 2, \cdots, n\}$ es un subrecubrimiento abierto finito de X, es decir $X = \bigcup_{i=1}^{n}(U_{x_i})$, tomando complementos tenemos que $\emptyset = X - \bigcup_{i=1}^{n}(U_{x_i}) = \bigcap_{i=1}^{n}(X - U_{x_i})$, contradicción porque $X - U_{x_i} \in p$, $\forall\, i = 1, 2, \cdots, n$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{R}$ es un recubrimiento abierto de X que no admite un recubrimiento finito. Entonces $X - (U_1 \cup \cdots \cup U_n) \neq \emptyset$ para cada colección finita $\{U_1, \cdots, U_n\}$. Los conjuntos de la forma $X - (U_1 \cup \cdots \cup U_n)$ forman un filtro base (la intersección de dos de tales conjuntos es otro de la misma forma), generando un filtro $\mathcal{F}$. Ahora por el corolario 2.1.1, $\mathcal{F}$ esta contenido en algún ultrafiltro $\mathcal{F}^*$, por hipótesis $\mathcal{F}^*$ converge digamos a x, pero $x \in U$ para algún $U \in \mathcal{R}$. Como U es vecindad de x, $U \in \mathcal{F}^*$. Pero, por construcción $X - U \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$; imposible porque $\mathcal{F}^*$ es un ultrafiltro. Por lo tanto $\mathcal{R}$ debe tener un subrecubrimiento finito. ☑

Teorema 2.2.7. *Todo subespacio compacto Y de un espacio Hausdorff X es cerrado.*

Demostración. Supongamos que $x \in \overline{Y} \setminus Y$, consideremos el conjunto $\mathcal{B} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}_x\}$ que es base para un filtro $\mathcal{F}$ en Y, porque $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y$, si U y $V \in \mathcal{U}_x$ entonces $U \cap V$ también. Por el colorario 2.1.1 existe un ultrafiltro $\mathcal{F}^*$ en Y tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$, donde por el teorema 2.2.6 $\mathcal{F}^* \to y$, con $y \in Y$; pero $\mathcal{F}^*$ es una base para un filtro en X que llamaremos $\mathfrak{F}$. Pero $\mathfrak{F} \to x$, y también $\mathfrak{F} \to y$, porque $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^* \subseteq \mathfrak{F}$ pero por el teorema 2.2.4 $x = y$. Contradicción porque $x \notin Y$. ☑

2.3. La topología de βX

En la siguiente sección definiremos una topología sobre el conjunto de todos los ultrafiltros en X y mostraremos algunas de las propiedades de dicho espacio.

Definición 2.3.1. Sea X un espacio topológico.

a) $\beta X = \{p : p \text{ es un ultrafiltro en } X\}$

b) Dado $A \subseteq X$, $\widehat{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}$

Definición 2.3.2. Sea X un conjunto y $a \in X$. Entonces $e(a) = \{A \subseteq X : a \in A\}$.

Es decir $e(a)$ es el ultrafiltro principal generado por a.

Veamos ahora algunas de las propiedades de los conjuntos $\widehat{A}$.

Lema 2.3.1. *Sean X un conjunto y $A, B \subseteq X$.*

a) $\widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$;

b) $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$;

c) $\widehat{X \setminus A} = \beta X \setminus \widehat{A}$;

d) $\widehat{A} = \emptyset$ *si y sólo si* $A = \emptyset$;

e) $\widehat{A} = \beta D$ *si y sólo si* $A = X$;

f) $\widehat{A} = \widehat{B}$ *si y sólo si* $A = B$.

Demostración.

a) $\Rightarrow$) Sea $p \in \widehat{A \cap B}$, es decir $A \cap B \in p$, y como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, tenemos que $A \in p$ y $B \in p$, entonces $p \in \widehat{A}$ y $p \in \widehat{B}$ y por lo tanto $p \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$.
$\Leftarrow$) Sea $p \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$, es decir $p \in \widehat{A}$ y $p \in \widehat{B}$, o sea $A \in p$ y $B \in p$, entonces $A \cap B \in p$, es decir $p \in \widehat{A \cap B}$.

b) $\Rightarrow$) Sea $p \in \widehat{A \cup B}$, es decir $A \cup B \in p$, supongamos que $A \notin p$ y $B \notin p$, entonces $X \setminus A \in p$ y $X \setminus B \in p$, o sea $(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B) \in p$ (contradicción). Por lo tanto $A \in p$ ó $B \in p$, es decir $p \in \widehat{A}$ ó $p \in \widehat{B}$ en conclusión $p \in \widehat{A} \cup \widehat{B}$.
$\Leftarrow$) Sea $p \in \widehat{A} \cup \widehat{B}$ o sea $p \in \widehat{A}$ ó $p \in \widehat{B}$, es decir $A \in p$ ó $B \in p$, pero $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, por lo tanto $A \cup B \in p$, entonces $p \in \widehat{A \cup B}$.

c) Sea $p \in (\widehat{X \setminus A}) \Leftrightarrow X \setminus A \in p \Leftrightarrow A \notin p \Leftrightarrow p \notin \widehat{A} \Leftrightarrow p \in \beta X \setminus \widehat{A}$.

d) $\Rightarrow$) Supongamos que $A \neq \emptyset$, esto quiere decir que existe $a \in X$ tal que $a \in A$, por lo tanto $A \in e(a)$, y en conclusión $e(a) \in \widehat{A}$, lo cual contradice la hipótesis.
$\Leftarrow$) Por la definición 2.1.1, inciso *c*) de filtro.

e) $\widehat{A} = \beta X$, tomando complementos, $\Leftrightarrow \beta X \setminus \widehat{A} = \emptyset$, aplicando el inciso *c*), $\Leftrightarrow \widehat{X \setminus A} = \emptyset$, aplicando el inciso *d*), $\Leftrightarrow X \setminus A = \emptyset$.

f) $\Rightarrow$) Supongamos que $A \neq B$, esto es equivalente a decir que $A \nsubseteq B$ ó $B \nsubseteq A$, supongamos también que es la primera no contenencia la que no se da, o sea que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$, esto implica que $e(a) \in \widehat{A}$, pero $e(a) \notin \widehat{B}$, es decir $\widehat{A} \neq \widehat{B}$. Lo cual contradice la hipótesis.

$\Leftarrow$) Es trivial.

☑

Como podemos observar en la lema anterior inciso *a*), la intersección finita de conjuntos de la forma $\widehat{A}$, es precisamente otro conjunto de la misma forma y además todo ulfiltro pertenece a algún conjunto de ésta forma. En consecuencia el conjunto $\{\widehat{A},\, A \subseteq X\}$ forma una base para una topología en βX. O sea cuando hablemos de la topología de βX, estaremos hablando de la topología generada por estos conjuntos.

El siguiente teorema describe algunas de las propiedades topológicas básicas de βX.

Teorema 2.3.1. *Sea X un conjunto cualquiera.*

a) *βX es un espacio compacto y Hausdorff.*

b) *Los conjuntos de la forma $\widehat{A}$ son los únicos abiertos y cerrados de βX.*

c) *Para todo $A \subseteq X$, $\widehat{A} = \overline{e[A]}$.*

d) *La función e es inyectiva y $e[X]$ es un subconjunto denso de βX.*

e) *Si U es un conjunto abierto de βX entonces $\overline{U}$ es también abierto.*

Demostración.

a) Supongamos que p y q, son elementos diferentes de βX. Si $A \in p \setminus q$, entonces $X \setminus A \in q$. Es decir $\widehat{A}$ y $\widehat{X \setminus A}$ son abiertos disyuntos de βX que contienen a p y q respectivamente. O sea βX es Hausdorff. Además los conjuntos de la forma $\widehat{A}$ son una base para los conjuntos cerrados debido a que $\widehat{D \setminus A} = \beta D \setminus \widehat{A}$. Para demostrar que βX es compacto sea $\mathcal{C}$ una familia de conjuntos cerrados en βX y $\mathcal{A}$ la familia de todos los conjunto de la forma $\widehat{A}$ que intervienen para formar algún cerrado de $\mathcal{C}$. Es claro que si $\mathcal{A}$ posee la P.I.F entonces $\mathcal{C}$ también y recíprocamente. Además $\bigcap \mathcal{C} = \bigcap \mathcal{A}$ por lo tanto basta demostrar que $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{B} = \{A \subseteq D : \widehat{A} \in \mathcal{A}\}$. Si $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{B})$ entonces existe algún $p \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \widehat{A}$ esto es $\bigcap \mathcal{F} \in p$, o sea $\mathcal{B}$ posee la P.I.F y por el teorema 2.1.3 existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro en X tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$. Esto es $\mathcal{U} \in \bigcap \mathcal{A}$, por lo tanto βX es compacto.

b) Por el lema 2.3.1 inciso *c)* todo conjunto de la forma $\widehat{A}$ es abierto y cerrado. Ahora supongamos que C es un conjunto cerrado y abierto de βX y sea $\mathcal{A} = \{\widehat{A} : A \subseteq X \text{ y } \widehat{A} \subseteq C\}$ como C es abierto, $\mathcal{A}$ es un recubrimiento abierto de C y como C es cerrado y βX es compacto entonces existe $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{A})$ tal que $C = \bigcup \mathcal{F}$. O sea por el teorema 2.3.1 inciso *b)*, C es de la forma $\widehat{E}$ para algún $E \subseteq X$.

c) Para todo $a \in A$, $e(a) \in \hat{A}$, o sea $e[A] \subseteq \hat{A}$ y por lo tanto $\overline{e[A]} \subseteq \hat{A}$. Para probar la otra contenencia sea $p \in \hat{A}$ y $\hat{B}$ vecindad de p, esto quiere decir que $A \in p$ y $B \in p$, y sea $a \in A \cap B$, entonces $e(a) \in e[A] \cap \hat{B}$, es decir $p \in \overline{e[A]}$, y por lo tanto $\hat{A} \subseteq \overline{e[A]}$.

d) Si $a, b \in X$ son distintos, $X \setminus a \in e(b) \setminus e(a)$, o sea $e(a) \neq e(b)$. Si $\hat{A}$ es un abierto básico no vacío, entonces $A \neq \emptyset$; sea $a \in A$ esto quiere decir que $e(a) \in e[X] \cap \hat{A}$, o sea $e[X] \cap \hat{A} \neq \emptyset$ por lo tanto $e[X]$ es denso un subconjunto denso de βX.

e) Si $U = \emptyset$ la proposición se cumple. Ahora supongamos que $U \neq \emptyset$. Sea $A = e^{-1}[U]$. Observaremos primero que $U \subseteq \overline{e[A]}$. Sea $p \in U$, y sea $\widehat{B}$ un abierto básico de p. O sea que $U \cap \widehat{B}$ es un conjunto abierto no vacío. Y por (*d*) se tiene que $U \cap \widehat{B} \cap e[X] \neq \emptyset$, esto quiere decir que existe $b \in B$ tal que $e(b) \in U$. O sea que $b \in A$ y por lo tanto $e(b) \in e[A] \cap \widehat{B}$.

Como $e[A] \subseteq U$, entonces $\overline{e[A]} \subseteq \overline{U}$ y también $\overline{U} \subseteq \overline{e[A]}$. En conlusión $\overline{U} = \overline{e[A]} = \widehat{A}$.

☑

Capítulo 3

La Compactificación de Stone-Čech

Debido a las importantes propiedades topológicas de los espacios que son a la vez compactos y Hausdorff, sobre todo cuando intervienen en funciones continuas (convergencia única, teorema de máximos y mínimos, teorema de continuidad uniforme, etc.), nace la necesidad de convertir cualquier espacio topológico en un espacio de este tipo, o sea *compactificarlo*. Presentaremos en este capítulo algunos ejemplos de compactificaciones y a su vez mostraremos que βD es un tipo especial de compactificación de un espacio discreto D, que llamaremos la Compactificación de Stone-Čech de D.

3.1. Compactificar

Para hablar compactificaciones primero definiremos qué es una inmersión de un espacio en otro.

Definición 3.1.1. Una *Inmersión* de un espacio topológico X en un espacio topológico Z, es una función $\varphi : X \to Z$ que define un homeomorfismo de X en $\varphi[X]$.

Ejemplo 3.1.1. La función idéntica $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ es una inmersión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Con $\mathbb{Q}$ subespacio de $\mathbb{R}$.

Sabiendo ya qué es una inmersión veamos ahora el concepto de compactificación.

Definición 3.1.2. Una *compactificación* de un espacio X es un par ordenado (φ, Z), donde Z es un espacio compacto Hausdorff y φ es una inmersión de X en Z, donde $\varphi[X]$ es denso en Z.

A pesar de que la función φ del ejemplo 3.1.1, es una inmersión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y de que es bien sabido que $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$, no es una compactificación de $\mathbb{Q}$ porque aunque $\mathbb{R}$ es Hausdorff, no es compacto.

Veamos algunos ejemplos de compactificación.

Ejemplo 3.1.2. El subespacio $Z = [0, 1]$, junto con la función idéntica es una compactificación del subespacio $X = [0, 1)$. Esta clase de compactificación se denomina compactificación *por un punto* o compactificación de *Alexandroff.*

Ejemplo 3.1.3. La compactificación de Alexandroff de $\mathbb{N}$ es el espacio $X = \{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$, junto con la función $\varphi(n) = 1/n$.

3.2. La Compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto

Todos los espacios completamente regulares (ver definición 1.4.5) tienen un tipo muy especial de compactificación llamada la compactificación de Stone-Čech, que goza de algunas propiedades importantes tales como maximalidad, unicidad y tal vez la más importante la propiedad de extensión universal, que se describirán a continuación. Cabe aclarar que está fuera de los alcances de este trabajo mostrar que todo espacio completamente regular tiene este tipo de compactificación (ver [2]); nuestro verdadero objetivo es ver que todo espacio discreto D (por ser completamente regular, ver ejemplo 1.4.3) la posee y además coincide con el espacio βD.

Definición 3.2.1. Sea X un espacio completamente regular. Una *compactificación de Stone-Čech de* X es un par (φ, Z) tal que

a) Z es un espacio compacto y Hausdorff,

b) φ es una inmersión de X en Z,

c) $\varphi[X]$ es denso en Z, y

d) Dado un espacio compacto Y y una función continua $f : X \to Y$ existe una función continua $g : Z \to Y$ tal que $g \circ \varphi = f$. (Es decir g es una extensión de f).

El inciso *d*) se conoce como “la propiedad de extensión universal” y es precisamente la que caracteriza esta compactificación.

Ejemplo 3.2.1. El espacio $[0,1]$ no es la compactificación de Stone-Čech de $(0,1]$ por que la función continua $f : (0,1] \to [-1,1]$, definida como $f(x) = \sin(1/x)$ no se puede definir en el punto $x = 0$.

El siguiente teorema nos dice que la compactificación de Stone-Čech es topológicamente única.

Teorema 3.2.1 (Unicidad de Stone-Čech). *Sea D completamente regular, y (φ_1, Z_1) y (φ_2, Z_2) dos compactificaciones de Stone-Čech de D, entonces Z_1 es homeomorfo a Z_2.*

Demostración.
Por ser Z_1 y Z_2 dos compactificaciones de Stone-Čech de D entonces se tiene que

$$\varphi_1 = g_2 \circ \varphi_2 \quad \text{y}, \tag{3.1}$$
$$\varphi_2 = g_1 \circ \varphi_1 \tag{3.2}$$

Reemplazando (3.1) en (3.2) tenemos que $\varphi_1 = g_2 \circ (g_1 \circ \varphi_1)$ y por asociatividad en la composición de funciones $\varphi_1 = (g_2 \circ g_1) \circ \varphi_1$ o sea $g_2 \circ g_1 = I_{\varphi_1[D]}$, es decir $g_2 \circ g_1$ coincide con la idéntica pero en el denso $\varphi_1[D]$, y por el corolario 2.2.1, coincide en todo Z_1, es decir $g_2 \circ g_1 = I_{Z_1}$. Análogamente $g_1 \circ g_2 = I_{Z_2}$. Lo que quiere decir que $g_2 = g_1^{-1}$, por lo tanto g_1 es biyectiva y además g_1 y g_2 son continuas, en conclusión Z_1 es homeomorfo a Z_2. ☑

Como consecuencia del anterior teorema hablaremos en adelante de “la” compactificación de Stone-Čech en lugar de “una” compactificación de Stone-Čech.
Ahora presentaremos el principal resultado de este trabajo.

Teorema 3.2.2 (Principal). *Sea D un espacio discreto. Entonces $(e, \beta D)$ es la compactificación de Stone-Čech de D.*

Demostración.
Por el teorema 2.3.1 tenemos que βD es compacto y Hausdorff, que $e[D]$ es un subconjunto denso de βD y además e es una inmersión de D en βD, porque e es inyectiva, continua y abierta, esto se tiene porque D es discreto y para todo $A \subseteq D$, $e[A] = \bigcup_{a \in A} \widehat{\{a\}}$ que es una unión de abiertos básicos.
Basta ver que se cumple la propiedad de extensión universal, para esto sea Y un espacio compacto, y $f : D \to Y$ una función continua. Estudiaremos la continuidad de las siguientes funciones necesarias para la

verificación de la propiedad.

i) $\beta f : \beta D \to \beta Y, \ \beta f(p) = f(p) = gen\{f[F] \,|\, F \in p\}, \ \forall p \in \beta D.$

Primero que todo debemos ver que βf está bien definida. $f(p)$ según el teorema 2.2.2 es un filtro, o sea $\forall p \in \beta D$ la función esta definida; falta ver si para todo $p \in \beta D, \ f(p)$ es efectivamente un ultrafiltro en Y. Sea $V \subseteq Y$ entonces pueden suceder dos cosas,

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}[V] \in p & \text{ó} & X \setminus f^{-1}[V] \in p \\ f[f^{-1}[V]] \in f(p) & & f[X \setminus f^{-1}[V]] \in f(p) \\ f[f^{-1}[V]] \subseteq V & & f[f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[V]] \in f(p) \\ & & f[f^{-1}[Y \setminus V]] \subseteq Y \setminus V \\ V \in f(p) & \text{ó} & Y \setminus V \in f(p). \end{array}$$

Lo que quiere decir que $f(p)$ es un ultrafiltro en Y, para todo $p \in \beta D$; y por lo tanto βf está bien definida.
Estudiaremos ahora su continuidad.

Sea $\widehat{W}$ abierto en βY,

$$\begin{aligned} \beta f^{-1}[\widehat{W}] &= \{p \in \beta X \mid \beta f(p) \in \widehat{W}\} \\ &= \{p \in \beta X \mid W \in \beta f(p)\} \\ &= \{p \in \beta X \mid \exists F \in p, \text{ donde } f[F] \subseteq W\} \\ &= \{p \in \beta X \mid \exists F \in p, \text{ donde } F \subseteq f^{-1}[W]\} \\ &= \widehat{f^{-1}[W]} \end{aligned}$$

Como $\widehat{f^{-1}[W]}$ es un abierto en βD entonces la función βf es continua.

ii) *lím* $: \beta Y \to Y$, que asigna a cada q en βY su respectivo límite.

Por ser Y compacto y además Hausdorff todo $q \in \beta Y$ convergerá y además lo hará de manera única en Y (por los teoremas 2.2.4 y 2.2.6). Por lo tanto la función *lím* está bien definida. Estudiaremos ahora su continuidad. Sea $p \in \beta Y$, y sea W abierto en Y, tal que *lím*$(p) \in W$. Y es regular, por ser compacto y Hausdorff (teorema 1.4.2), lo que quiere decir que existe V abierto en Y, tal que *lím*$(p) \in V$, $V \subseteq \overline{V} \subseteq W$ y además $V \in p$, o sea $p \in \widehat{V}$. Demostraremos que *lím*$[\widehat{V}] \subseteq W$. En efecto sea $q \in \widehat{V}$, $V \in q$, entonces por el teorema 2.2.1 *lím*$(q) \in \overline{V}$ y como $\overline{V} \subseteq W$, se tiene que *lím*$(q) \in W$. Por lo tanto la función *lím* es continua.

Considerando las cuatro funciones continuas e, f, βf y *lím* se forma el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\beta D \arrow[r, "\beta f"] & \beta Y \arrow[d, "lím"] \\
D \arrow[u, "e"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Vamos a demostrar que $g : \beta D \to Y$ la función que buscamos es precisamente la función $lím \circ \beta f$.

Como sabemos $lím \circ \beta f : \beta D \to Y$ es continua por serlo *lím* y βf, además $lím \circ \beta f \circ e(x) = lím \circ \beta f(e(x)) = lím \circ \beta f(\widehat{\{x\}}) = lím(\beta f(\widehat{\{x\}})) = lím \widehat{\{f(x)\}} = f(x)$, $\forall x \in D$. Por lo tanto $f = lím \circ \beta f \circ e$, o sea $g = lím \circ \beta f$ es la extensión de f que estábamos buscando. Por lo tanto el anterior diagrama queda

$$\begin{tikzcd}
\beta D \arrow[dr, "g = lím \circ \beta f"] & \\
D \arrow[u, "e"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Capítulo 4

El semigrupo S^* y el teorema de Hindman

En este capítulo presentaremos una aplicación de la compactificación de Stone-Čech del espacio discreto $\mathbb{N}$, visto a su vez como un semigrupo. La aplicación es la demostración de el teorema de Hindman: *Si pintamos con un número finito de colores los números naturales, existirá un número infinito de números naturales del mismo color cuya suma finita de estos números(diferentes) tiene ese mismo color.*
Para la demostración del teorema de Hindman necesitaremos algunas nociones de semigrupos y semigrupos semitopológicos a derecha, más específicamente prestaremos mayor atención en el semigrupo S^* (semigrupo de los ultrafiltros no principales en un semigrupo S). Lo interesante de la prueba es que es una prueba hecha sólo con nociones topológicas y algebraicas de un teorema que pertenece a la teoría combinatoria. Vemos una vez más como dos ramas de la matemática que aparentemente no tienen nada en común se relacionan solucionando problemas y explicando situaciones de una en la otra.

4.1. Extendiendo la operación a βS

Definición 4.1.1. Un *semigrupo* es una pareja $(S, \cdot)$, donde S es un conjunto y $\cdot$ es una operación binaria interna asociativa.

Se deja como ejercicio sencillo a los lectores verificar los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.1.1. $\mathbb{N}$, con la operación $+$ es un semigrupo.

Ejemplo 4.1.2. $\mathbb{R}$, con la operación . es un semigrupo.

Ejemplo 4.1.3. $X^X = \{f, f : X \to X\}$, con la operación composición de funciones es un semigrupo.

Veremos que la operación definida en un semigrupo discreto se puede extender a su compactificación de Stone-Čech. Identificaremos los elementos $s \in S$, con su correspondiente ultrafiltro principal $e(s)$, y diremos que $S \subseteq \beta S$, abusando un poco de la notación. Además notaremos al conjunto de los ultrafiltros no principales de S, $S^* = \beta S \setminus S$ y lo llamaremos *el centro* o *la corona* de βS.

Teorema 4.1.1. *Sea S un espacio discreto y sea $\cdot$ una operación binaria definida en S. Existe una operación binaria $* : \beta S \times \beta S \to \beta S$ que satisface las siguientes tres condiciones:*

(a) *Para todo $s, t \in S$, $s * t = s \cdot t$.*

(b) *Para todo $s \in S$, la función $\rho_s : \beta S \to \beta S$, donde $\rho_s(q) = s * q$ es continua.*

(c) *Para todo $q \in \beta S$, la función $\lambda_q : \beta S \to \beta S$, donde $\lambda_q(p) = p * q$ es continua.*

Demostración.
Primero definiremos $*$, en $S \times \beta S$. Para todo $s \in S$ definimos $l_s : S \to S \subseteq \beta S$ por $l_s(t) = s \cdot t = s * t$. Y por la propiedad de la extensión de βS, existe una única función continua $\rho_s : \beta S \to \beta S$ tal que $\rho_{s|S} = l_s$. Si $s \in S$, y $q \in \beta S$ definimos $s * q = \rho_s(q)$. Ahora extenderemos $*$ al resto de $\beta S \times \beta S$. Dado $q \in \beta S$ definiremos $r_q : S \to \beta S$ por $r_q(s) = s * q$ entonces existe una única función continua $\lambda_q : \beta S \to \beta S$ tal que $\lambda_{q|S} = r_q$. Para todo $p \in \beta S \setminus S$ definimos $p * q = \lambda_q(p)$, y observemos que si $s \in S$, $\lambda_q(s) = r_q(s) = s * q$. Así para todo p y $q \in \beta S$, $p * q = \lambda_q(p)$. ☑

Teorema 4.1.2. *La operación $*$ definida anteriormente en βS es asociativa.*

Demostración.
Debemos demostrar que para todo u, v y $w \in \beta S$ se tiene que $u * (v * w) = (u * v) * w$. Usaremos la continuidad de las funciones λ. Primero observemos que

$$u * (v * w) = \lambda_{v*w}(u)$$

y

$$(u * v) * w = \lambda_w(u * v) = \lambda_w(\lambda_v(u)) = \lambda_w \circ \lambda_v(u)$$

Asi por la continuidad de las funciones λ es suficiente ver que $\lambda_{v*w}(s_1) = \lambda_w \circ \lambda_v(s_1)$, para todo $s_1 \in S$ (porque dos funciones que coinciden en un

subconjunto denso son iguales).
Ahora si fijamos el $s_1 \in S$, tenemos que

$$\lambda_{v*w}(s_1) = s_1 * (v * w) = \rho_{s_1}(v * w) = \rho_{s_1} \circ \lambda_w(v),$$

y

$$\lambda_w \circ \lambda_v(s_1) = (s_1 * v) * w = \lambda_w(s_1 * v) = \lambda_w \circ \rho_{s_1}(v).$$

Como ρ_{s_1} es también continua, es suficiente mostrar que $\rho_{s_1} \circ \lambda_w(s_2) = \lambda_w \circ \rho_{s_1}(s_2)$, para todo $s_2 \in S$. pero,

$$\rho_{s_1} \circ \lambda_w(s_2) = s_1 * (s_2 * w),$$

y

$$\lambda_w \circ \rho_{s_1}(s_2) = (s_1 * s_2) * w.$$

Si fijamos s_2 y recalculamos, tenemos que

$$s_1 * (s_2 * w) = \rho_{s_1}(s_2 * w) = \rho_{s_1} \circ \rho_{s_2}(w),$$

y

$$(s_1 * s_2) * w = \rho_{s_1 * s_2}(w)$$

Solo basta ver por la continuidad de los ρ, que $\rho_{s_1} \circ \rho_{s_2}(s_3) = \rho_{s_1 * s_2}(s_3)$ para todo $s_3 \in S$, pero esto es fácil de ver porque S es un semigrupo

$$\rho_{s_1} \circ \rho_{s_2}(s_3) = \rho_{s_1}(\rho_{s_2}(s_3)) = \rho_{s_1}(s_2 * s_3) = s_1 * (s_2 * s_3) = (s_1 * s_2) * s_3 = \rho_{s_1 * s_2}(s_3).$$

Por todo lo anterior concluimos que $u * (v * w) = (u * v) * w$ para todo u, v y $w \in \beta S$. ☑

Gracias a los teoremas 4.1.1 y 4.1.2 el conjunto βS, junto con la operación $*$ es un semigrupo.
De ahora en adelante escribiremos $p \cdot q$ en lugar de $p * q$, para todo $p, q \in \beta S$. Como los puntos de βS son ultrafiltros en S, queremos saber cuales subconjuntos de S son miembros de $p \cdot q$. Primero definiremos unos conjuntos especiales.

Definición 4.1.2. Sea $(S, \cdot)$ un semigrupo, y sean $A \subseteq S$, $s \in S$, y $q \in \beta S$ definiremos, $s^{-1}A = \{t \in S : s \cdot t \in A\}$, y $[A]_q = \{s \in S : s^{-1}A \in q\}$.

Teorema 4.1.3. *Sea $(S, \cdot)$ un semigrupo y sea $A \subseteq S$.*

a) Para todo $s \in S$ y $q \in \beta S$, $A \in s \cdot q$ si y sólo si $s^{-1}A \in q$.

b) Para todo $p, q \in \beta S$, $A \in p \cdot q$ si y sólo si $[A]_q \in p$.

Demostración.

a) $\Rightarrow$) Sea $A \in s \cdot q$, o sea $A \in \rho_s(q)$, entonces $\widehat{A}$ es una vecindad de $\rho_s(q)$, por la continuidad de ρ_s, existe $B \in q$ tal que $\widehat{B}$ es vecindad de q, y además $\rho_s(\widehat{B}) \subseteq \widehat{A}$. Pero para todo $b \in B$, $s \cdot b \in \widehat{A}$, o sea $A \in s \cdot b$, entonces $s \cdot b \in A$, lo que quiere decir que $b \in s^{-1}A$, por lo tanto $B \subseteq s^{-1}A$. Y en conclusión $s^{-1}A \in q$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $A \notin s \cdot q$, entonces $S \setminus A \in s \cdot q$, y por la necesidad de este inciso tenemos que $s^{-1}(S \setminus A) \in q$, pero por hipótesis $s^{-1}A \in q$, o sea existe un $t \in S$, tal que $t \in s^{-1}(S \setminus A)$ y $t \in s^{-1}A$, es decir $s \cdot t \in S \setminus A$, y $s \cdot t \in A$, contradicción.

b) $\Rightarrow$) Sea $A \in p \cdot q$, o sea $A \in \lambda_q(p)$, entonces $\widehat{A}$ es una vecindad de $\lambda_q(p)$, por la continuidad de λ_q, existe $B \in p$, tal que $\widehat{B}$ es vecindad de p, y además $\lambda_q(\widehat{B}) \subseteq \widehat{A}$. Pero para todo $b \in B$, $b \cdot q \in \widehat{A}$, o sea $A \in b \cdot q$, y por el inciso (a), $b^{-1}A \in q$, lo que quiere decir que $B \subseteq [A]_q$, por lo tanto $[A]_q \in p$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $A \notin p \cdot q$, entonces $S \setminus A \in p \cdot q$, y por la necesidad de este inciso tenemos que $[S \setminus A]_q \in p$, pero por hipótesis $[A]_q \in p$, o sea existe un s, tal que $s \in [S \setminus A]_q$, y $s \in [A]_q$, es decir $s^{-1}(S \setminus A) \in q$, y $s^{-1}A \in q$ pero sabemos por la suficiencia del inciso (a), que esto lleva a una contradicción.

$\boxtimes$

4.2. Semigrupos semitopológicos a derecha

Definición 4.2.1. Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff con una operación binaria asociativa $*$. Diremos que X es un *semigrupo semitopológico a derecha* si para todo $x \in X$ la función $\lambda_x : X \to X$ definida por $\lambda_x(y) = y * x$, para todo $y \in X$ es continua.

Ejemplo 4.2.1. Si $(S, \cdot)$ es un semigrupo discreto entonces $(\beta S, *)$, es un semigrupo semitopológico a derecha, siendo $*$ la extensión de la operación $\cdot$ a βS, la función λ_x como se definió en el teorema 4.1.1.

Ahora prestaremos nuestra atención al conjunto S^* (que denominamos la corona de βS), precisamente porque son los ultrafiltros no principales en S los que nos permitirán demostrar el teorema de Hindman.
El conjunto S^* no siempre es un subsemigrupo del semigrupo βS, daremos a continuación unas condiciones necesarias y suficientes para que S^* sea un subsemigrupo.

Teorema 4.2.1. *Sea S un semigrupo discreto. Entonces S^* es un subsemigrupo de βS si y sólo si para todo $A \in \mathcal{P}_f(S)$ y para todo subconjunto infinito B de S existe $F \in \mathcal{P}_f(B)$ tal que $\bigcap_{x\in F} x^{-1}A$ es finito.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que existen A subconjunto finito y B subconjunto infinito de S, tal que para todo $F \in \mathcal{P}_f(B)$ se tiene que $\bigcap_{x\in F} x^{-1}A$ es infinito. Entonces el conjunto $\{x^{-1}A : x \in B\}$ tiene la propiedad de que cualquier intersección finita es un conjunto infinito. Entonces por el teorema 2.1.4 inciso (a) existirá $p \in S^*$ tal que $\{x^{-1}A : x \in B\} \subseteq p$. Escojamos por el teorema 2.1.4 inciso (b) un $q \in S^*$ tal que $B \in q$, entonces $[A]_p \in q$ y por el teorema 4.1.3 inciso (b) tenemos que $A \in q \cdot p$, y A es finito, por lo tanto por el teorema 2.1.2 $q \cdot p \in S$. Contradicción porque S^* es un subsemigrupo.

$\Leftarrow$) Sean $p, q \in S^*$ y supongamos que $q \cdot p = y \in S$ o sea $q \cdot p$ es el ultrafiltro principal generado por y. Sea $A = \{y\}$ y sea $B = [A]_p$, entonces $[A]_p \in q$ y para cada $F \in \mathcal{P}_f(B)$ se tiene que $\bigcap_{x\in F} x^{-1} \in p$, y por lo tanto $\bigcap_{x\in F} x^{-1}$ es infinito. ☑

El siguiente teorema muestra que siempre que S^* es un subsemigrupo también es un semigrupo semitopológico.

Teorema 4.2.2. *Sea S un semigrupo discreto. Si S^* es un subsemigrupo de βS, entonces S^* es un semigrupo semitopológico a derecha.*

Demostración.
La función $\lambda_{p|S^*}$, con $p \in S^*$ es continua porque la función λ_p es continua. S^* es Hausdorff porque todo subespacio de un espacio Hausdorff es Hausdorff. además S^* es cerrado porque $\beta S \setminus S^* = \bigcup_{s\in S} \widehat{\{s\}}$ es abierto porque es la unión arbitraria de abiertos básicos. Y S^* es compacto por el teorema 1.3.3. ☑

Como consecuencia inmediata de los teoremas 4.2.1 y 4.2.2 se tiene que $\mathbb{N}^*$ es un semigrupo semitopológico a derecha, porque para todo $A \subsetneq \mathbb{N}$ finito y para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^{-1}A = \{a-n \in \mathbb{N} : a \in A\}$ obviamente también es finito.

Presentaremos a continuación la definición de idempotente y un teorema que nos garantiza la existencia de dichos elementos.

Definición 4.2.2. Sea $(S, \cdot)$ un semigrupo y sea $x \in S$. Diremos que x es un elemento *idempotente* de S si y sólo si $x \cdot x = x$.

Teorema 4.2.3. *Todo semigrupo semitopológico a derecha X tiene un elemento idempotente.*

Demostración.
Aplicando el lema de Zorn a la colección

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado no vacío y } A * A = A\}$$

La familia $\mathcal{A}$ es no vacía porque $X \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}'$ es una cadena en $\mathcal{A}$, entonces $A = \bigcap \mathcal{A}'$ es no vacía por el teorema 1.3.1 y cerrada por el teorema 1.2.1. Si tomamos x, $y \in A$, para todo $B \in \mathcal{A}'$, x, $y \in B$, entonces $x * y \in B$, por lo tanto $x * y \in A$, lo que quiere decir que $A \in \mathcal{A}$. Por el lema de Zorn existe un elemento minimal A_m en $\mathcal{A}$. Mostraremos que A_m tiene un solo elemento.
Sea $x \in A_m$ y consideremos $A_m * x = \lambda_x[A_m]$. Este conjunto es cerrado (porque λ_x es continua y X es compacto y Hausdorff) y además es un subconjunto de A (porque $A_m * A_m \subseteq A_m$). Observemos que $A_m * x \in \mathcal{A}$; tomemos $y, z \in A_m$, entonces $(y * x) * (z * x) = (y * x * z) * x \in A_m * x$ (porque $y * x * z \in A_m$). Por lo tanto $A_m * x \in \mathcal{A}$, pero $A_m * x = A_m$ Por la minimalidad de A_m. En particular existirá un $y \in A_m$, tal que $y * x = x$. Ahora consideremos el conjunto $C = \{y \in A_m : y * x = x\}$ hemos observado anteriormente que C no es vacío, C es cerrado porque λ_x es continua y $C = \lambda_x^{-1}[\{x\}] \cap A_m$, o sea C es la intersección de dos cerrados de X. Si y, $z \in C$ entonces $(y * z) * x = y * (z * x) = y * x = x$, es decir $y * z$ esta en C, entonces $C \in \mathcal{A}$ y por la minimalidad de A_m se tiene que $C = A_m$, pero entonces en particular $x * x = x$ y otra vez por minimalidad $A_m = \{x\}$. ☑

Corolario 4.2.1. *Si S^* es un semigrupo entonces existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{U}$ en S tal que $\mathcal{U} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U}$.*

Demostración.
Consecuencia inmediata del teorema 4.2.2 y del teorema anterior. ☑

Proposición 4.2.1. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro idempotente en un semigrupo S, entonces para todo $C \in \mathcal{U}$, $[C]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$.*

Demostración.
Sea $C \in \mathcal{U}$, como $\mathcal{U}$ es idempotente entonces $C \in \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}$, pero por el teorema 4.1.3, inciso (b) se tiene que $[C]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$. ☑

4.3. El teorema de Hindman

Este teorema hace su aparición en 1971 como la conjetura de Graham y Rotshchild. En 1975 Neil Hindman presenta una prueba combinatoria muy complicada como el mismo lo menciona en [5] de este teorema llamado también el *teorema de las sumas finitas*. Seguidamente en 1977 Galvin y Glazer presentan una prueba sencilla y elegante que utiliza un poco de la estructura algebraica de $(\beta\mathbb{N}, +)$. Es precisamente esta demostración la que presentaremos a continuación*.

Teorema 4.3.1. *Sea $\mathcal{U}$ el ultrafiltro idempotente de $\mathbb{N}^*$ y $A \in \mathcal{U}$. Entonces A tiene un subconjunto infinito B, tal que toda suma finita de elementos de B pertenece a A.*

Demostración.
Construyamos una sucesión de elementos de $\mathcal{U}$ y una sucesión de números naturales de la siguiente manera. Sean $A_1 = A$ y escojamos $b_1 \in A_1 \cap [A_1]_{\mathcal{U}}$. Cuando tengamos A_n y $b_n \in A_n \cap [A_n]_{\mathcal{U}}$, entonces $A_{n+1} = A_n \cap (A_n - b_n)$ y escogeremos $b_{n+1} \in A_{n+1} \cap [A_{n+1}]_{\mathcal{U}}$, de tal manera que sea más grande que b_n, esto se puede hacer ya que A_n y $A_n - b_n \in \mathcal{U}$ porque $b_n \in A_n \cap [A_n]_{\mathcal{U}}$ y los elementos de $\mathcal{U}$ son subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Observemos además que

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_n < b_{n+1} < \cdots$$

y

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \cdots$$

Para finalizar hagamos $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para ver por ejemplo que $b_2 + b_5 + b_6 \in A$, observemos que $b_6 \in A_6 \subseteq A_5 - b_5$, es decir $b_5 + b_6 \in A_5 \subseteq A_4 \subseteq A_3 \subseteq A_2 - b_2$, es decir $b_2 + b_5 + b_6 \in A_2 \subseteq A$.
Más formalmente se establecerá por inducción sobre $|F|$, esto es si $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ y $r = \min F$, entonces $\sum_{n \in F} b_n \in A_r$. Si $|F| = 1$, entonces $\sum_{n \in F} b_n = b_r \in A_r$. Ahora asumamos que $|F| = k > 1$, y supongamos que la proposición se cumple para $k - 1$. Sea $H = F \setminus \{r\}$ y sea $s = \min H$. Entonces $\sum_{n \in H} b_n \in A_s \subseteq A_{r+1} \subseteq A_r - b_r$, es decir $b_r + \sum_{n \in H} b_n = \sum_{n \in F} b_n \in A_r \subseteq A$. ☑

Corolario 4.3.1 (Teorema de Hindman). *Si $\mathbb{N} = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n$, con $n \in \mathbb{N}$ entonces existe un $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ y un subconjunto infinito B de A_i, tal que toda suma finita de elementos de B pertenece a A_i.*

Demostración.
Por el teorema 2.1.1, existe un $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ tal que $A_i \in \mathcal{U}$, siendo $\mathcal{U}$ el ultrafiltro idempotente de $\mathbb{N}^*$. ☑

*En [5] se encuentra una demostración más general de este teorema.

Bibliografía

[1] Hindman, Neil, *Algebra in the Stone-Čech Compactification*, 1998, Cáps. 3-4.

[2] Munkres, James R, *Topología*, Prentice Hall, Madrid 2002, Cáps. 2-3.

[3] Willard, Stephen, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970, Cáps 4-6.

[4] Muñoz Quevedo, José M.*Introducción a la teoría de conjuntos*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1994, Cáp. 7.

[5] Hindman, Neil, *Algebra in βS and its applications to Ramsey Theory*, Math. Japonica 44, 1996, págs. 581-625. Disponible en el sitio web “http://members.aol.com/nhindman/reprint.html”