Retroacciones didácticas programadas en DGPAD para el reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia

Por:

Reynaldo Alonso Estévez Lizarazo

Director:

Luis ángel Pérez Fernández

Magíster en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de matemáticas

Maestría en educación matemática

Bucaramanga

2022

Dedicatoria

A mis abuelos, Gerarda y Simón que siempre me apoyaron sin importar las circunstancias y dificultades que trae la vida, desde que tengo razón estuvieron a mi lado, me inculcaron que con oración y fe en Dios y la perseverancia siempre se alcanzan los sueños.

Agradecimientos

Agradezco primero a Dios por darme salud y perseverancia para darme fuerzas culminar esta etapa académica.

A mi madre por brindarme su amor incondicional y apoyarme en cada etapa de mi vida.

A mi familia por estar apoyándome sin importar las circunstancias que pasamos.

A mi director Luis Ángel Pérez Fernández, por todo su apoyo incondicional tanto académico como personal, siempre motivándome para no desfallecer en el camino, mil gracias.

A Dr. Arnoldo Rafael Teherán más que un profesor es un amigo, siempre me ha brindado su apoyo incondicional.

A mis hijos que son el motor de mi vida.

A Sebastián Báez, mi querido amigo de aventuras que siempre ha estado ahí sin importar las circunstancias.

A mis evaluadores Dr. Jorge Enrique Fiallo, Dr. Martín Acosta, gracias por sus aportes contribuyeron a mi proceso de aprendizaje.

A mis profesores, por las enseñanzas y aportes, verdaderamente en mi formación académica.

A Sandra e Ingrid, son personas maravillosas me han enseñado que con voluntad y trabajo duro se logran las cosas, gracias por su apoyo incondicional.

A todos los profesores de la Escuela de Matemáticas, en los momentos más difíciles de mi vida me alentaron.

A claudia Garavito, por todo su apoyo.

A Cristian y Johana mis compañeros de maestría, por todo su apoyo y buenos momentos.

A todos los que me han ayudado. Mil gracias.

Contenido

pág.

Introducción 11

1. Problemática 13

2. Antecedentes 14

3. Teoría de las Situaciones Didácticas 17

3.1 Aprendizaje por adaptación 17

3.2 Situación adidáctica y situación didáctica 18

3.3 Medio adidáctico 21

4. Problema de investigación 22

5. Objetivo 24

6. Metodología de investigación 24

6.1 Ingeniería didáctica 24

6.2 Población de estudio 26

7. Análisis preliminar 26

7.1 Análisis epistemológico. 29

7.2 Análisis cognitivo. 29

7.3 Análisis didáctico 31

8. Análisis a Priori 37

8.1 Análisis del diseño 37

8.2 Actividad 1 42

8.2.1 Primera secuencia 43

8.2.2 Diseño de la primera secuencia 43

8.3 Segunda secuencia. 50

8.3.1 Diseño de la segunda secuencia. 50

8.4 Diseño tarea de ayuda. 55

8.4.1 Análisis de la tarea de ayuda 59

8.5 Tercera secuencia. 60

8.5.1 Diseño de la tercera secuencia. 61

8.6 Actividad 2 65

8.6.1 Primera secuencia 65

8.7 Segunda secuencia 73

8.7.1 Diseño de la secuencia. 73

9. Análisis a posteriori 77

9.1 Actividad 1. 78

9.2 Análisis de la primera secuencia. 78

9.3 Análisis de la segunda secuencia. 94

9.4 Análisis de la tarea de ayuda 119

9.5 Análisis de la tercera secuencia 126

9.6 Actividad 2. 144

9.6.1 Primera secuencia. 144

9.7 Segunda secuencia. 162

10. Conclusiones 220

Referencias bibliográficas. 226

Apéndices 229

Lista de Figuras

Figura 1. Razón menor que cero 27

Figura 2. Razón mayor que cero 27

Figura 3. Proporción de la homotecia 28

Figura 4. Imágenes prototípicas 30

Figura 5. Libro vamos a aprender 32

Figura 6. Situación cotidiana 33

Figura 7. Definición de homotecia 33

Figura 8. Ejemplo 34

Figura 9. Ejemplo 2 35

Figura 10. Ejercicios 36

Figura 11. Figuras homotéticas. 37

Figura 12. Figuras homotéticas 2. 40

Figura 13. Posición 1. 43

Figura 14. Posición 2. 43

Figura 15. Secuencia 1. 44

Figura 16. Consigna del botón tarea. 45

Figura 17. Retroacción continuar 1. 46

Figura 18. Retroacción continuar 2. 46

Figura 19. Retroacción continuar 3. 46

Figura 20. Retroacción continuar 4. 46

Figura 21.Retroacción continuar 5. 46

Figura 22. Retroacción continuar 6. 47

Figura 23. Retroacción continuar 7. 47

Figura 24. Retroacción continuar 8. 48

Figura 25. Retroacción continuar 9. 48

Figura 26. Retroacción continuar 10. 48

Figura 27. Secuencia 2. 51

Figura 28. Consigna del botón tarea. 51

Figura 29. Retroacción de verificar. 52

Figura 30. Retroacción continuar 1. 52

Figura 31. Retroacción continuar 2. 53

Figura 32. Tarea de ayuda. 56

Figura 33. Consigna botón tarea. 57

Figura 34. Retroacción continuar 1. 57

Figura 35. Retroacción continuar 2. 57

Figura 36. Retroacción continuar 3. 58

Figura 37. Retroacción continuar 4. 58

Figura 38. Retroacción bandas. 58

Figura 39. Retroacción continuar 5. 58

Figura 40. Retroacción continuar 6. 59

Figura 41. Secuencia 3. 61

Figura 42. Consigna botón tarea. 62

Figura 43. Consigna botón verificar. 62

Figura 44. Retroacción continuar 1. 63

Figura 45. Retroacción continuar 2. 63

Figura 46. Retroacción continuar 3. 64

Figura 47. Tarea de inicio. 66

Figura 48. Consigna del botón tarea 66

Figura 49. Retroacción continuar 1. 67

Figura 50. Retroacción continuar 2. 67

Figura 51. Tarea 2. 68

Figura 52. Consigna botón tarea. 70

Figura 53. Retroacción continuar 1. 70

Figura 54. Retroacción continuar 2. 71

Figura 55. Secuencia 2. 74

Figura 56. Consigna botón tarea. 74

Figura 57. Retroacción continuar. 75

Figura 58. Retroacción verificar 1 75

Figura 59. Retroacción verificar 2 75

Figura 60. Ejemplo proporcionalidad. 218

Lista de Apéndices

Apéndices A. Actividad 1. 229

Apéndices B. Actividad 2 292

Apéndices C. Actividad 2 refuerzo 324

Resumen

Título: Retroacciones didácticas programadas en DGPad para el reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia*

Autor: Reynaldo Alonso Estevez Lizarazo**

Palabras clave: Retroacciones didácticas, Teoría de las situaciones didácticas, Razón de homotecia, DGPad-Colombia.

Descripción:

En esta investigación empleamos la Teoría de las Situaciones Didácticas, para desarrollar una micro ingeniería didáctica con el fin de producir aprendizaje por adaptación de la homotecia, en particular, de la relación de proporcionalidad entre las distancias de punto homotéticos al centro; usando como base el diseño en un software no libre de una investigación previa y adaptándolo a las potencialidades y limitaciones del software DGPad-Colombia, utilizado como medio para gestionar un modelo teórico de interacción del alumno con este. En la adaptación presentada se articulan las *retroacciones didácticas*, las *retroacciones matemáticas* y los registros gráfico y numérico; con el objetivo de superar las limitaciones y dificultades reportadas en otras investigaciones, relativas a la enseñanza y el aprendizaje de la homotecia. Basados en la metodología de la Ingeniería Didáctica. Presentamos como resultados un análisis preliminar del diseño donde se definen las variables didácticas, un análisis a priori que propone algunas hipótesis sobre el funcionamiento de las *retroacciones didácticas* y las acciones por parte del alumno en su interacción con el medio y los conocimientos que ellos construyen gracias al desarrollo de las situaciones. Un análisis a posteriori resultado de la experimentación con una pareja de alumnos de novenos grado, donde contrastamos las hipótesis planteadas en el análisis a priori y ratificamos la identificación de los roles de las *retroacciones didácticas* descritos en una investigación previa: gestión de tareas, automatizar actos de devolución, promover el proceso de validación y explicitar propiedades que no son fácilmente perceptibles. En efecto, logramos favorecer el reconocimiento de la razón de homotecia, gracias este último rol.

---

*Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Director: Luis ángel Pérez Fernández. Magíster en Educación Matemática

Abstract

Title: Didactic retroactions programmed in DGPad for the perceptual recognition of the homothetic ratio*

Author: Reynaldo Alonso Estevez Lizarazo**

Key words: Didactic retroactions, Theory of didactic Situations, Homothetic , DGPad-Colombia.

Description:

In this research, the Theory of Didactic Situations is used to develop a didactic micro-engineering in order to produce learning by adaptation of homothetic, in particular, of the proportionality relation between homothetic point distances to the center; using as a basis the design in a non-free software of a previous research and adapting it to the potentialities and limitations of the DGPad-Colombia software, used as a *milieu* to manage a theoretical model of student interaction with it. In the presented adaptation, the didactic retroactions, the mathematical retroactions and the graphic and numerical registers are articulated; with the objective of overcoming the limitations and difficulties reported in other investigations, related to the teaching and learning of homothety.

Based on the methodology of Didactic Engineering. We present as results a preliminary analysis of the design where the didactic variables are defined, an a priori analysis that proposes some hypotheses about the functioning of the didactic retroactions and the actions on the part of the student in their interaction with the *milieu* and the knowledge that they build thanks to the development of the situations. An a posteriori analysis resulting from experimentation with a pair of ninth graders, where we contrast the hypotheses raised in the a priori analysis and ratify the identification of the roles of didactic retroactions described in a previous research: task management, automation of retroactions acts, promotion of the validation process and explicitness of properties that are not easily perceptible. Indeed, we succeeded in favoring the recognition of homothetic, thanks to the latter role.

---

*Degree Work

** Science Faculty. School of Mathematics. Master in Mathematics Education. Director: Luis Angel Perez Fernandez. Master in Mathematics Education

Introducción

Desde 1976, el programa de las matemáticas modernas provocó el abandono de la geometría de las figuras y las construcciones, generando dificultades en la educación básica y media. Por ejemplo, las transformaciones en el plano empezaron a estudiarse algebraicamente y de manera opcional. Debido a los resultados negativos que tuvo la adopción de este programa, en Colombia se desarrolló la Renovación Curricular. Como resultado, el Ministerio de Educación Nacional (1998) publica los lineamientos de matemáticas, donde se enfatiza en la geometría activa como postura de enseñanza. En esta apuesta, la geometría de las figuras vuelve a tomar protagonismo gracias a la influencia de las calculadoras y los programas de geometría dinámica que han venido en constante crecimiento.

Desde la perspectiva de la geometría euclidiana clásica, mediada por el software de geometría dinámica (SGD), proponemos ideas teóricas y empíricas para la enseñanza de la homotecia en noveno grado, teniendo en cuenta algunas investigaciones realizadas alrededor de este concepto. Por ejemplo, Lemonidis (1990,1991) resalta que la enseñanza y aprendizaje de la homotecia son per se un reto didáctico. Él sugiere considerar aspectos figurales que juegan un papel importante en las dificultades cognitivas que presentan los alumnos para reconocer la homotecia y sus propiedades, así como la necesidad de articular los registros de representación gráfico y numérico. Además, en la literatura se resaltan dos dificultades generales concernientes a este concepto. En primer lugar, los alumnos no perciben la razón de homotecia en una configuración dos figuras homotéticas con el centro oculto y con menos problema la identificación de puntos homólogos y su alineación con el centro de homotecia.

Desde el punto de vista didáctico, nos interesa continuar estudiando los roles de las retroacciones didácticas, identificados por Pérez (2017), usando DGPad como medio, en la perspectiva de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD). En particular, estamos interesados en determinar de qué manera la articulación de las retroacciones matemáticas y didácticas que ofrece DGPad, contribuyen al reconocimiento de la razón de homotecia en una configuración dinámica con el centro oculto. Como resultado, proponemos una ingeniería didáctica en la que se articulan las retroacciones didácticas y matemáticas para favorecer el reconocimiento perceptivo de la relación de proporcionalidad entre las distancias de cada par de puntos homotéticos al centro. En el diseño estas retroacciones favorecen el proceso de validación, el proceso de devolución y además juegan un papel importante para explicitar o hacer más fácil de percibir propiedades que obedecen a objetos geométricos que no son explícitos en las configuraciones.

También logramos constatar muchos de los resultados obtenidos por Pérez (2017). Uno de estos es que las retroacciones didácticas permiten automatizar actos de devolución. Actividad que está a cargo del profesor, pero que, al automatizarlas en el medio, facilitan la gestión de la clase y de las actividades.

El documento está organizado de la siguiente manera: en primer lugar proponemos las problemáticas en las cuales se enmarca nuestro trabajo; luego exponemos los antecedente que justifican y dan soporte a la investigación; continuamos exponiendo de manera breve los elementos fundamentales de la TSD que consideraremos pertinentes; a continuación planteamos el problema de investigación; posteriormente exponemos de manera breve la ingeniería didáctica como metodología de investigación, el análisis a priori y el análisis a posteriori, finalizando con las conclusiones y citamos las referencias bibliográficas.

1. Problemática

Esta investigación busca contribuir a dos problemáticas: la primera surge de una investigación desarrollada por el grupo EDUMAT-UIS, mediante una tesis de maestría en educación matemática (Pérez ,2017) y la segunda nace del programa computadores para educar, del ministerio de educación nacional de Colombia, implementado en el año 2013. A continuación, exponemos estas dos problemáticas.

Pérez, (2017), distingue dos tipos de retroacciones que ofrece el software Cabri Elem (matemáticas y didácticas), a la luz de la teoría de las situaciones didácticas (TSD); estudió las posibilidades de aprendizaje que las últimas ofrecen cuando se ponen en funcionamiento en situaciones adidácticas; logrando identificar cuatro roles de estas: gestión y articulación de las tareas, favorecer el proceso de devolución, promover el proceso de validación y por último, explicitar o resaltar propiedades que no son fácilmente perceptibles. En el análisis a posteriori de la ingeniería didáctica que propuso, en la que se articulan retroacciones matemáticas y didácticas, se muestran como resultados de investigación; que, en una configuración dinámica de dos figuras homotéticas con el centro oculto, los alumnos logran reconocer perceptivamente la alineación de los puntos homotéticos y el centro, luego de desarrollar las tareas. Sin embargo, no logran percibir la relación de proporcionalidad entre las distancias de cada par de puntos homotéticos al centro, ni coordinar estas dos propiedades. En consecuencia, sugirió investigar cómo las retroacciones didácticas podrían favorecer el reconocimiento perceptivo de la proporcionalidad de las distancias de dos puntos homólogos al centro y qué actividades proponer para esto.

Por otra parte, mediante el programa del gobierno nacional: computadores para educar (2013), que tenía como meta dar equidad social y acceso a las tecnologías a los estudiantes y

educadores del todo el país, se dotó a los colegios con tabletas. Sin embargo, la mayoría de los profesores no están capacitados y tampoco cuentan con actividades de clase para el buen uso de estas herramientas tecnológicas.

Creemos que podemos contribuir a estas dos problemáticas, considerando que Eric Hackenholz desarrolló en Francia un software de geometría dinámica, pensado principalmente para dispositivos táctiles; y que en Colombia se está construyendo una adaptación de este, llamada DGPad-Colombia; logrando que en DGPad se puedan programar retroacciones didácticas que atiendan a las necesidades del contexto Colombiano. Hecho que nos motiva a indagar sobre el potencial de las retroacciones didácticas que ofrece DGPad para diseñar situaciones adidácticas que fomenten el reconocimiento de propiedades relativas a la homotecia.

2. Antecedentes

En Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN) propone a través de los Lineamientos Curriculares (1998), que debemos adoptar la postura de la enseñanza de la geometría desde una perspectiva activa, donde el alumno "hace cosas": moverse, dibujar, construir, producir. Además, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), en el pensamiento espacial para los grados sexto a séptimo; en cuanto a transformaciones, sugiere: "Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte." (p.84). Sin embargo, Garcés (2012) señala que en los textos escolares y en los currículos de matemáticas solo se contemplan las transformaciones rígidas. Es decir, aunque el MEN recomienda la enseñanza de la homotecia, esto no se da en las aulas, como lo confirman

Ortiz y Ángulo (2010), Castro (2012), Pérez (2017), Castro, Jaramillo y Obregón (2019), entre otros. Estos investigadores coinciden en que, el exiguo tratamiento de la enseñanza de la homotecia ha sido principalmente estático y/o algebraico.

Pese al abandono de la enseñanza de la homotecia en el aula, hay algunas investigaciones relacionadas con este concepto, de las cuales mencionaremos algunos aportes importantes para el desarrollo de nuestro trabajo. En primer lugar, señalamos las dificultades identificadas en la enseñanza y el aprendizaje de la homotecia, reportadas en la literatura y por último, las propuestas que apuntan a la superación de dichas dificultades.

En el contexto nacional, lo poco que se enseña de la homotecia, ha tenido un enfoque principalmente algebraico; este fenómeno también se ha dado a nivel internacional, debido la influencia del programa de las matemáticas modernas, en donde la homotecia se enseña como una aplicación lineal en conexión con la idea general de isomorfismos en espacios vectoriales, sin considerar aspectos figurales (Lemonidis, 1991). Este autor, por un lado, resalta que: las concepciones geométricas evolucionan a través de tres etapas imprescindibles; la primera es el estudio de relaciones intrafigurales sin tener en cuenta la idea de transformación de una figura en otra; la segunda es la consideración de la transformación como una aplicación del plano en sí mismo; y por último tratar la transformación como un solo objeto. Por otro lado, señala que en los libros de texto, en el caso particular de la homotecia, se ha omitido la primera de etas tres etapas, provocando dificultades en su enseñanza.

En cuanto al aprendizaje de la homotecia, Lemonidis (1991), Gonzales y Arias (2017) y Pérez (2017), muestran que identificar puntos homólogos, el centro de homotecia y la alineación de un punto y su homotético con el centro, representan dificultades cognitivas. En particular, Lemonidis (1991) resalta que en las configuraciones homotéticas donde las figuras tienen simetría

interna como, círculos, elipses, cuadrados, y polígonos regulares que su número de lados sea par, esta dificultad se agudiza ya que admiten una segunda homotecia. Además, Guacaneme (2001), Ortega (2017), Pérez (2017) y Castro, Jaramillo, Obregón, (2019), indican que las dificultades cognitivas asociadas a la proporcionalidad obstaculizan el aprendizaje de las homotecias. Otro hecho que genera dificultad en el aprendizaje de la homotecia, señalado por Lemonidis (1991), es la falta de articulación de los registros gráfico y numérico.

Algunos trabajos han aportado ideas para la superación de las dificultades mencionadas anteriormente, a través del uso de SGD. Galleguillos y Candía (2011) y Pérez (2017) concluyen que el SGD favorece el reconocimiento de la alineación de puntos homotéticos y el centro, gracias a la posibilidad de percibir esta propiedad de manera continua mediante el arrastre. Además, Ortiz (2017) expone que las acciones y retroacciones que ofrece el SGD juegan un papel importe en la resolución de tareas que conciernen a la homotecia. En esa dirección, Pérez (2017) distingue dos tipos de retroacciones: matemáticas y didácticas; las primeras son aquellas que corresponden a la teoría matemática y la segundas son las que permiten programar algunos SGD, que no corresponden a la teoría matemática, pero que enriquecen la interacción del alumno con el software, por ejemplo; bloquear, mover y ocultar objetos; mostrar textos, etc. En este trabajo distinguen cuatro roles para las retroacciones didácticas: gestión y articulación de las tareas, favorecer el proceso de devolución, promover el proceso de validación y por último, explicitar o resaltar propiedades que no son fácilmente perceptibles. Pérez (2017) propone una secuencia didáctica que articula estos dos tipos de retroacciones en una configuración dinámica de dos figuras homotéticas con el centro oculto; con ella, lograron que los alumnos reconocieran perceptivamente la alineación de los puntos homotéticos y el centro. Sin embargo, no lograron que percibieran la

relación de proporcionalidad entre las distancias de cada par de puntos homotéticos al centro, mucho menos coordinar estas dos propiedades.

Teniendo en cuenta las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de la homotecia y las propuestas que apuntan a superarlas, reportadas en la literatura y expuestas anteriormente, parte de nuestro trabajo será tomar como base la secuencia diseñada en Cabri LM por Pérez (2017), rediseñarla en DGPad y proponer una nueva secuencia didáctica que articule retroacciones didácticas y matemáticas, para favorecer el reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia.

3. Teoría de las Situaciones Didácticas

Guy Brousseau en su Teoría de las Situaciones Didácticas propone un modelo para la interacción entre alumno, profesor y saber, como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos a través del aprendizaje por adaptación.

3.1 Aprendizaje por adaptación

Brousseau (1993.p.) lo concibe de la siguiente manera:

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta en las repuestas nuevas que son prueba de aprendizaje.

De acuerdo con Brousseau, el alumno construye su conocimiento interactuando con un medio, donde el abandono y refuerzo de sus acciones son evidencias elementales de aprendizaje; mientras que la anticipación de acciones y la formulación son pruebas más robustas del conocimiento, como propone Margolinas (2009).

Describimos la interacción del alumno con el medio de la siguiente manera:

Intención: el alumno debe tener la intención de resolver el problema y por ende, de actuar.

Acción: el alumno tiene que realizar acciones sobre el medio en búsqueda de la solución a la situación.

Retroacciones: son las consecuencias de las acciones del alumno sobre el medio, que deben ser reconocidas e interpretadas.

Interpretación: es necesario que el alumno interprete las retroacciones que ofrece el medio.

Validación: luego de la interpretación decide si su acción permitió lograr o no, su objetivo.

Por otra parte, la TSD distingue el conocimiento y el saber, siendo el primero contextualizado, producido por el alumno mediante la interacción con un medio; y el segundo descontextualizado e institucional. Además, postula que el saber no puede transmitirse de manera directa del profesor al alumno sino mediante el aprendizaje por adaptación, para ello la TSD define las situaciones adidácticas y didácticas.

3.2 Situación adidáctica y situación didáctica

Brousseau (2007, p.31) define la situación adidáctica de la siguiente manera:

> *Los problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben lograr, por su propio movimiento, que actúe, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer… el alumno no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que*

> *encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada situación adidáctica.*

Podríamos caracterizar a la situación adidáctica como aquella que provoca aprendizaje por adaptación, usada por el profesor como una herramienta para que el alumno desarrolle los conocimientos que le dan sentido al saber que él quiere enseñarle; distinguiéndola de la situación didáctica que involucra la interacción del profesor, alumno y saber, definida por Margolinas (2009) de la siguiente manera:

> *La situación didáctica, es una situación que se da generalmente en la clase, entre un profesor y uno o más alumnos, alrededor de un saber que se enseña. De otra parte, la situación didáctica sólo concierne al sistema didáctico en sentido estricto, y no al conjunto del sistema de enseñanza, aunque los fenómenos que se dan en clase no son independientes de él; además, en la situación didáctica, las intenciones de enseñar y aprender son claras. Es así como la situación se rige por el contrato didáctico, conjunto de obligaciones implícitas frente al saber, entre el profesor y los alumnos.*

Margolinas sugiere que una parte de la situación didáctica deber ser vivida como adidáctica. Es decir, el profesor debe proporcionar momentos de la clase para que el alumno construya sus conocimientos mediante el desarrollo de situaciones adidácticas.

A continuación, exponemos el papel que juegan el alumno y el profesor en situación adidáctica.

El alumno debe tener cierto comportamiento en la situación adidáctica, para que permanezca el carácter adidáctico, Brousseau (1986) caracteriza este comportamiento así:

> *El alumno sabe perfectamente que el problema fue escogido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que ese conocimiento está totalmente justificado por la lógica interna de la situación y que él puede construirlo sin apelar a razones didácticas (p.49).*

Margolinas (2009) argumenta que para que este hecho se dé, el alumno debe comportarse como sujeto matemático. Es decir, que, en la interacción con el medio, ponga en juego solamente lo que es matemáticamente pertinente en la situación. Esto implica que el alumno actúe autónomamente en función de una intención generada por la situación, provocando retroacciones por parte del medio, las cuales debe reconocer e interpretar para realizar la validación. Sadovsky (2005) la define de la siguiente manera:

> *Efectivamente, la lectura de las retroacciones del medio en términos de "distancia" a la finalidad buscada, habilita al sujeto para conocer la pertinencia de sus decisiones, incorporando la aceptación o el rechazo de las mismas con la consiguiente evolución de los conocimientos (p.16).*

Sadovsky también nos advierte que las lecturas de las retroacciones no son mecánicas, sino que suponen una confrontación entre la anticipación y la constatación.

En cuanto al profesor, su rol en la situación adidáctica es crucial, aunque en el aprendizaje por adaptación no se le considera. Como lo señala Margolinas (2009), el profesor no deja de participar en la situación adidáctica; por el contrario, como se evidenció en las grabaciones de las clases del Centro de Observación y la Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas, basadas en las situaciones de Brousseau, los docentes participan activamente.

Brousseau (1987) llama Devolución:

> *No basta con "comunicar" un problema a un alumno para que el problema se convierta en su problema y que él se sienta el único responsable de resolverlo. No basta tampoco que el alumno acepte responsabilidad para que el problema que resuelve sea un problema "universal", libre de presupuestos subjetivos. Llamamos "devolución" a la actividad por la cual el profesor trata de lograr esos dos resultados (p.39).*

Es decir, el objetivo de la devolución es que el estudiante se haga cargo de la responsabilidad matemática de la situación y que siga la lógica interna de esta. En este sentido, las intervenciones del profesor deben apuntar únicamente a esa finalidad.

Entendemos la devolución y la validación como dos procesos que involucran todos los elementos de la interacción con el medio, y en los que este último juega un papel importante.

3.3 Medio adidáctico

Brousseau (2007) define el medio como un sistema que el profesor debe modelar con el fin de obtener el aprendizaje deseado:

> *En esta perspectiva, son los comportamientos de los alumnos lo que revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema. Lo que necesita modelizar, pues, es el medio. Así, un problema o un ejercicio no pueden considerarse como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio que "responde al sujeto" siguiendo algunas reglas (p. 16).*

De acuerdo con Acosta, Rueda y Blanco (2010), el medio debe tener las siguientes características:

1. Ser exterior al alumno: el alumno debe reconocerle una existencia objetiva.
2. Ser material: el alumno puede interactuar con él por medio de acciones.
3. No debe tener ninguna intención: no debe ser percibido como una persona.
4. Reaccionar: las acciones del alumno tienen efectos reconocibles.
5. Imponer restricciones a la acción: no cualquier acción es posible.

Todas estas características son imprescindibles para que se dé el aprendizaje por adaptación deseado. Margolinas (2009) sostiene que el alumno debe reconocer en el medio características matemáticas que son pertinentes para la situación. Por ende, el medio debe incorporar estas características.

Consideramos que podríamos modelar en DGPad un potencial medio didáctico, dadas las posibilidades de programar retroacciones didácticas además de las retroacciones matemáticas que ya trae incorporadas. Dotándolo de las características teóricas mencionadas previamente.

4. Problema de investigación

Nuestro trabajo tiene como propósito determinar de qué manera el uso de las retroacciones didácticas, favorece el reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia. Para este fin se tendrá como referente teórico la teoría de situaciones didácticas, se utilizará DGPad como medio material en donde se programarán tareas que involucren estas retroacciones para favorecer el aprendizaje por adaptación. Concretamos nuestro problema en la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo articular las retroacciones matemáticas y didácticas para favorecer el reconocimiento preceptivo de la relación de proporcionalidad de las distancias de cada par de

puntos homotéticos al centro, en una configuración de dos figuras homotéticas con el centro oculto?

5. Objetivo

Diseñar situaciones adidácticas que articulen las retroacciones didácticas y matemáticas que ofrece DGPad para favorecer el reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia y proponer una ingeniería didáctica diseñada a la luz de TSD.

6. Metodología de investigación

En este trabajo utilizaremos la ingeniería didáctica como metodología de investigación, la cual tiene como objetivo mejorar los modos de adquirir el saber por parte del alumno y se caracteriza por el registro de los estudios de caso, mediante la confrontación de un análisis a priori y un análisis a posteriori.

6.1 Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica como metodología de investigación en didáctica de las matemáticas, surgió a comienzos de los años ochenta. Según artigué (1995, p.36) “se caracteriza por ser un esquema basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza”.

Artigue (1995, p.37) propone cuatro etapas de la ingeniería didáctica:

Análisis preliminar: hace referencia a los conocimientos teóricos y didácticos generales y específicos del campo de estudio. Y se distinguen tres dimensiones, la primera es la dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego. Para nuestra investigación el saber en juego es la homotecia. La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza, y por último la dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza alrededor de la homotecia.

Rios (2007) define el análisis preliminar de la siguiente manera “en esta fase se constituye el diseño de la ingeniería, la cual va a actuar sobre un determinado número de variables del sistema: las variables macro-didácticas o globales, y las variables micro-didácticas o locales”. Artigue (1995, p.43) indica que tanto unas como otras pueden ser en sí variables generales o dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza. Pero en el segundo se refiere especialmente a la organización y la gestión de la secuencia de clase.

para la elaboración de nuestras actividades y la identificación de las variables didácticas en juego, se llevará a cabo el análisis preliminar desde las dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva, a la luz de los antecedentes presentados. Por ejemplo, tendremos en cuenta dos aspectos generales señalados en la literatura: cómo evolucionan las concepciones geométricas y las dificultades cognitivas de los estudiantes para identificar puntos homólogos, el centro de homotecia y la alineación de un punto y su homotético con el centro. Propondremos tareas para atender a tales dificultades, poniendo en juego las retroacciones didácticas ofrecidas por DGPad.

Análisis a priori: está comprendido por una parte descriptiva y una predictiva; se centra en las características de una situación adidáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de llevar a los alumnos, en donde se analiza lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y validación de las que él dispone, artigué (1995.p, 45). En nuestro caso particular, esta fase consiste en predecir qué tipos de acciones puede realizar el alumno en el medio, qué retroacciones se ofrecerán y cómo estas deben articularse en las tareas a diseñar, para favorecer el reconocimiento preceptivo de la razón de homotecia.

Experimentación: es el momento en el cual se ejecuta lo planeado en la ingeniería didáctica, y la observación de las producciones de los alumnos durante de esta ejecución, mediante el estudio

de casos. Haremos la experimentación con cuatro alumnos de noveno grado, que desarrollarán en pareja las tareas propuestas y registraremos la observación mediante capturas de pantalla y audio.

Análisis a posteriori: se basa en la confrontación entre el análisis a priori y las realizaciones de los alumnos durante la experimentación. Se tiene en cuenta esta confrontación para refinar el análisis a priori, estudiando el funcionamiento del medio, las acciones de los alumnos y las retroacciones; corroborando o rechazando las hipótesis planteadas. La confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori es entonces lo que constituye la validación de la ingeniería didáctica y determina los resultados de la investigación (artigue, 1995).

6.2 Población de estudio

Con base en los antecedentes expuestos y los medios para la validación, propuestos por la ingeniería didáctica; se llevará a cabo un pilotaje, con una pareja de estudiantes regulares de noveno grado. Esta pareja ha recibido formación en geometría sin SGD, hecho que no afecta el desarrollo de la experimentación, pero sí facilitaría el uso de algunas herramientas de construcción por parte de los alumnos cuando quieran formular el conocimiento. Por este motivo el profesor deberá instruir a los estudiantes en el uso de alguna herramienta que ellos deseen emplear. El papel del profesor lo llevará a cabo el investigador.

7. Análisis preliminar

A continuación, expondremos tanto el análisis preliminar desde las dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva.

Definición de homotecia.

Sea o un punto en el plano y r un número real. Si P y P´ son dos puntos en el plano, tales que: O, P y P´ están alineados y $\frac{\text{op}'}{\text{op}} = r$; entonces decimos que P´ es homotético de P respecto a O con razón r. Convenimos que $\frac{\text{OP}'}{\text{OP}} > 0$ si P y P´ están al mismo lado de o, y que $\frac{\text{op}'}{\text{op}} < 0$ sí P y P´ están a lados opuestos de O.

Si o, p, p´ son puntos en el plano.

Figura 1

Razón menor que cero

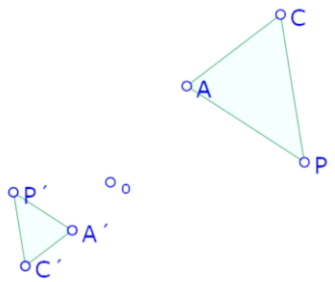
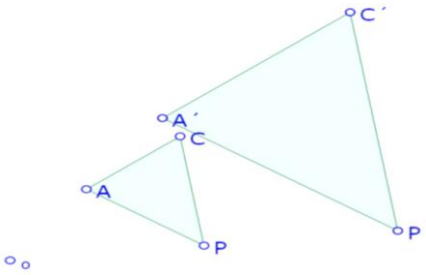


Figura 2

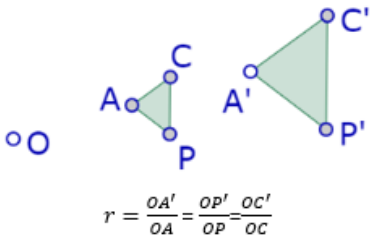
Razón mayor que cero



De la definición anterior se deduce que las distancias de dos puntos y sus homotéticos al centro de homotecia son proporcionales. Por lo tanto, la recta que pasa por dos puntos es paralela a la recta que pasa por los homotéticos de estos. En La Figura 3,

Figura 3

Proporción de la homotecia



Decimos que dos figuras son homotéticas si cada punto de una es homotético de un punto de la otra. Llamaremos a cada par de puntos homotéticos, homólogos o correspondientes.

En una configuración homotética las distancias de dos puntos y sus homotéticos al centro de homotecia son proporcionales. Por lo tanto, los lados de la figura inicial son paralelos a los lados correspondientes de la figura homotética. En la Figura 3, AC ∥ A'C', CP ∥ C'P' y AP ∥ A'P'. Recíprocamente, con el paralelismo podemos obtener la relación de proporcionalidad mediante el teorema fundamental de la proporcionalidad: si una recta paralela a un lado de un triángulo corta los otros dos, entonces los divide proporcionalmente. Con este teorema los estudiantes pueden garantizar la relación de proporcionalidad sin concebir el aspecto numérico. Sin embargo, en las actividades a desarrollar buscaremos centrar la atención en el aspecto numérico, de modo que los alumnos utilicen la relación de proporcionalidad y no el paralelismo para resolver las tareas propuestas. Atendiendo lo sugerido por Lemonidis (1991): se deben articular los registros gráfico y numérico.

7.1 Análisis epistemológico.

La homotecia es definida formalmente por Michel Chasles en el siglo XIX. El término se compone de dos elementos de origen griego: el prefijo homo (similar), y tesis (posición). Esto es, la correspondencia entre dos figuras de la misma forma y orientación; antes de él se hablaba de ‘figuras semejantes’ y ‘semejantemente colocadas’ (lados paralelos). No obstante, las componentes de la homotecia se han estudiado desde la antigüedad. Por ejemplo, en la antigua Grecia las razones eran tratadas como comparaciones entre magnitudes netamente geométricas (longitudes, superficies y volúmenes) prescindiendo del trabajo aritmético como suma y producto de razones, ya entre los siglos XVI y XVII se utilizó por los pintores renacentistas para representar el espacio y utilizaron razones negativas, Euler define centro de similitud y poco a poco se expresa la homotecia como una aplicación de una figura en otra a partir de un centro de similitud. Ya entre el siglo XVIII y XIX se presenta como una aplicación lineal o afín independiente del aspecto figural.

Lemonidis (1990) resalta cómo en la enseñanza de la homotecia ha habido tres momentos, el primero se enfoca en el aspecto figural, en el segundo se hace énfasis en la geometría afín, influenciado por el movimiento de las matemáticas modernas y el tercero, la enseñanza actual donde se sugiere retomar el aspecto figural e incluir el componente numérico.

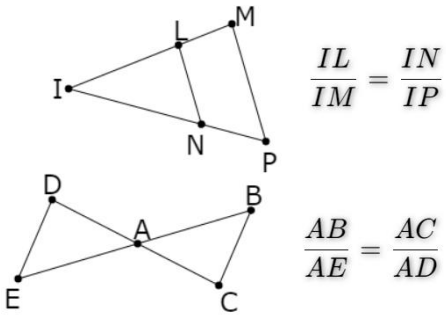
7.2 Análisis cognitivo.

Lemonidis (1990) reporta que: en configuraciones prototípicas, como se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, los alumnos reconocen las relaciones de p roporcionalidad de figuras semejantes. Por el contrario, en una configuración no típica, la igualdad de razones la realizan de manera equivocada. En esa dirección, Guacaneme (2001) y

otros reportan que las dificultades asociadas al aprendizaje del concepto de proporcionalidad obstaculizan el de la noción de homotecia.

Figura 4

Imágenes prototípicas



Por otro lado, Lemonidis (1991) señala que involucrar los aspectos figural y numérico en la homotecia mejora el reconocimiento perceptivo en los estudiantes de la relación de proporcionalidad, también mejora la identificación del centro de homotecia en una configuración homotética y la determinación de puntos homólogos.

Lamon (2005) define el pensamiento proporcional como la habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades. En ese sentido, Modestou y Gagatsis (2010) define tres características cognitivas del razonamiento proporcional: razonamiento por analogías, solucionar problemas rutinarios de proporcionalidad y conciencia metacognitiva de la linealidad. El primero se refiere a la capacidad de los alumnos para reconocer relaciones entre las variaciones de las magnitudes, generalizar dichas relaciones y aplicarlas en situaciones análogas. El segundo concierne a las habilidades para

encontrar la cuarta proporcional. Por último, la conciencia metacognitiva de la linealidad atiende a la capacidad de los alumnos para determinar cuándo una situación es de proporcionalidad directa.

Situándonos en el razonamiento por analogías, entre las relaciones que establecen los alumnos entre las variaciones de las magnitudes, se encuentran las aditivas y las multiplicativas. Al respecto, Fernández y Llinares (2012) reportan que los estudiantes tienen dificultades para distinguir situaciones proporcionales de situaciones con estructura aditiva debido a problemas para coordinar aditiva o multiplicativamente los datos de la situación.

El arrastre continuo en la pantalla permite observar las propiedades invariantes y facilita al estudiante reconocer los puntos homólogos y su alineación con el centro (Bustamante y Candia (2011) y Pérez (2017)).

7.3 Análisis didáctico

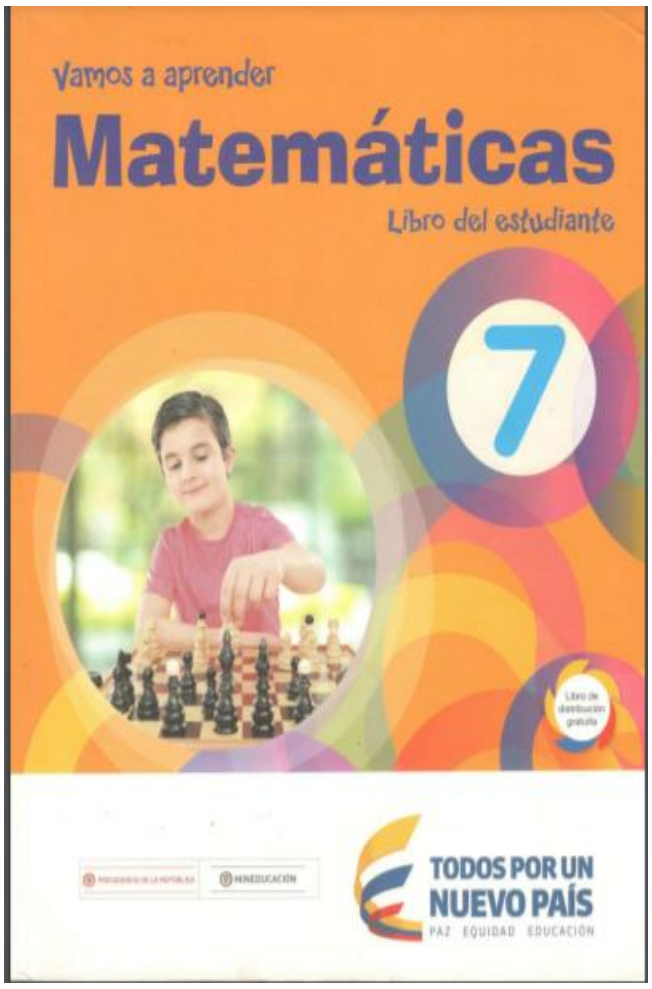
Realizamos una revisión de los Derechos Básicos de aprendizajes DBA (aprendizajes mínimos que deben lograr los alumnos en cada grado escolar), publicados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en el 2015; una de sus finalidades es actualizar los Estándares Básicos de Competencias (EBC). Se consultaron también los libros de texto *Vamos a aprender,* desde el grado 6 hasta el 10 de la editorial SM, distribuido por el gobierno nacional en los colegios públicos desde el año 2017. Por último, examinamos el libro *Caminos del saber* de la editorial Santillana, utilizado en algunas instituciones privadas de la ciudad de Bucaramanga. A continuación, presentamos una descripción y un análisis de la búsqueda.

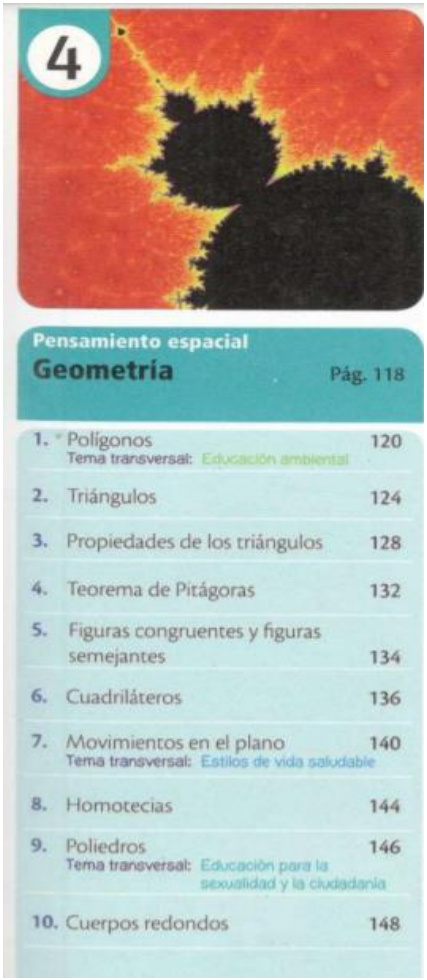
Encontramos que la noción de homotecia no se encontraba ni en los DBA ni en el libro *caminos del saber*. Por el contrario, en el libro *vamos a aprender* sí encontramos esta noción en el

grado séptimo, abordada de una manera superficial desde una perspectiva numérica, considerándola una trasformación en el plano. En la Figura 5 se muestra la portada del libro y en el pensamiento que se ubica esta noción.

Figura 5

Libro vamos a aprender





En este libro presenta, a modo de introducción, un ejemplo de una situación que los estudiantes viven muy frecuentemente, la ampliación de una figura. Luego explica cómo obtener una figura homotética de otra (ver Figura 6).

Figura 6

Situación cotidiana

Analiza

Natalia escribió en una hoja la letra inicial de su nombre, como se muestra en la Figura 4.125.

N

Figura 4.125

- Si Natalia amplió su dibujo en la fotocopiadora al 120%, ¿qué crees que observó al comparar las dos hojas?

Conoce

Al comparar la fotocopia con el original, Natalia observó que obtuvo una letra N semejante a la que había dibujado en el papel, es decir, con la misma forma pero con diferente tamaño (en este caso más grande, ya que amplió su dibujo al 120%).

Esta transformación recibe el nombre de **homotecia**.

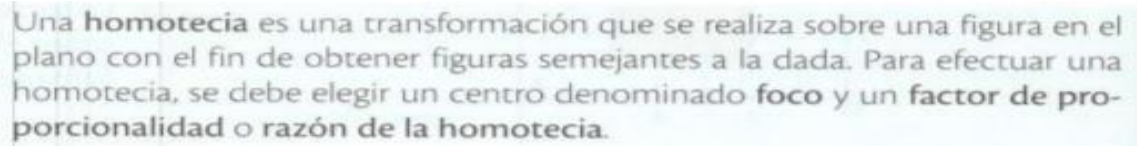
Figura

Para encontrar la imagen de una figura aplicando esta transformación, se zan rayos desde un punto O, a cada uno de los vértices de la figura y se h sobre los rayos las imágenes de cada punto. (Figura 4.126).

Después de presentar la situación cotidiana a manera de ejemplo, se define la homotecia como una trasformación de una figura en el plano cartesiano, que devuelve una figura semejante a la inicial.

Figura 7

*Definición de homotecia***.**

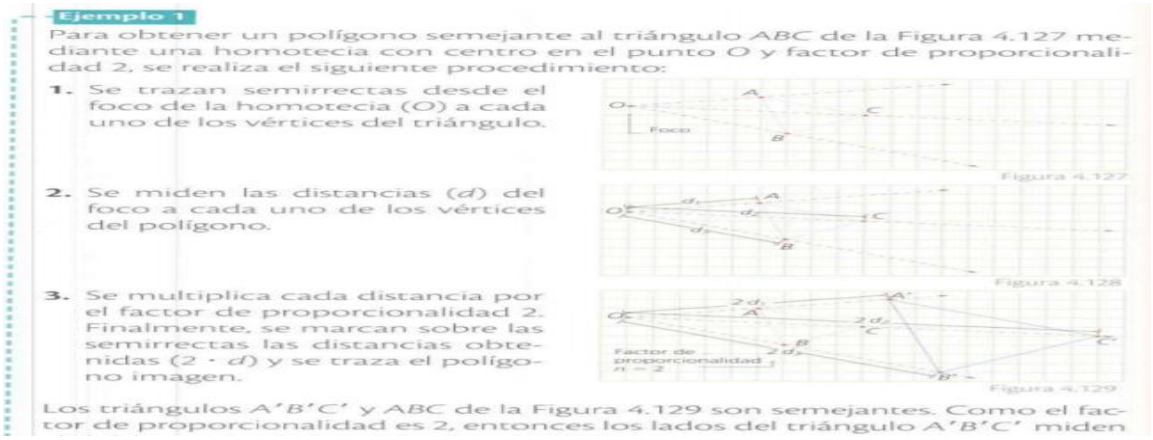


Una **homotecia** es una transformación que se realiza sobre una figura en el plano con el fin de obtener figuras semejantes a la dada. Para efectuar una homotecia, se debe elegir un centro denominado **foco** y un **factor de proporcionalidad** o **razón de la homotecia**.

Se sigue con ejemplos prototípicos de ampliación de una figura, donde se utiliza un factor positivo mayor que 1, al igual que en los ejemplos anteriores (ver Figura 7). Consideramos que lo anterior propicia en el alumno la concepción de la homotecia como una ampliación de una figura.

Figura 8

Ejemplo



Ejemplo 1

Para obtener un polígono semejante al triángulo ABC de la Figura 4.127 mediante una homotecia con centro en el punto O y factor de proporcionalidad 2, se realiza el siguiente procedimiento:

1. Se trazan semirrectas desde el foco de la homotecia (O) a cada uno de los vértices del triángulo.

Figura 4.127

2. Se miden las distancias (d) del foco a cada uno de los vértices del polígono.

Figura 4.128

3. Se multiplica cada distancia por el factor de proporcionalidad 2. Finalmente, se marcan sobre las semirrectas las distancias obtenidas ($2 \cdot d$) y se traza el polígono imagen.

Figura 4.129

Los triángulos $A'B'C'$ y ABC de la Figura 4.129 son semejantes. Como el factor de proporcionalidad es 2, entonces los lados del triángulo $A'B'C'$ miden

En el segundo ejemplo se sigue realizando el manejo analítico en el plano cartesiano, mostrando que para obtener una figura homotética basta con multiplicar las coordenadas de cada punto de la figura inicial por el factor de proporcionalidad.

Figura 9

Ejemplo 2

Ejemplo 2

Observa cómo se aplica al triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(2, 1)$ y $C(5, 1)$, una homotecia con centro en el punto $(0, 0)$ y factor de proporcionalidad 2.

Como la razón de homotecia es 2 y el foco está en $(0, 0)$, basta con multiplicar las coordenadas de cada vértice del $\triangle ABC$ por 2 para obtener las coordenadas de los vértices del triángulo semejante.

$$A' = (2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = (4, 6)$$
$$B' = (2 \cdot 2, 2 \cdot 1) = (4, 2)$$
$$C' = (2 \cdot 5, 2 \cdot 1) = (10, 2)$$

En la Figura 4.130 se observa el triángulo ABC y su imagen $\triangle A'B'C'$ mediante la homotecia.

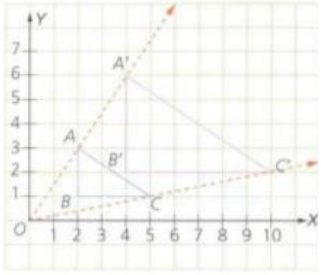
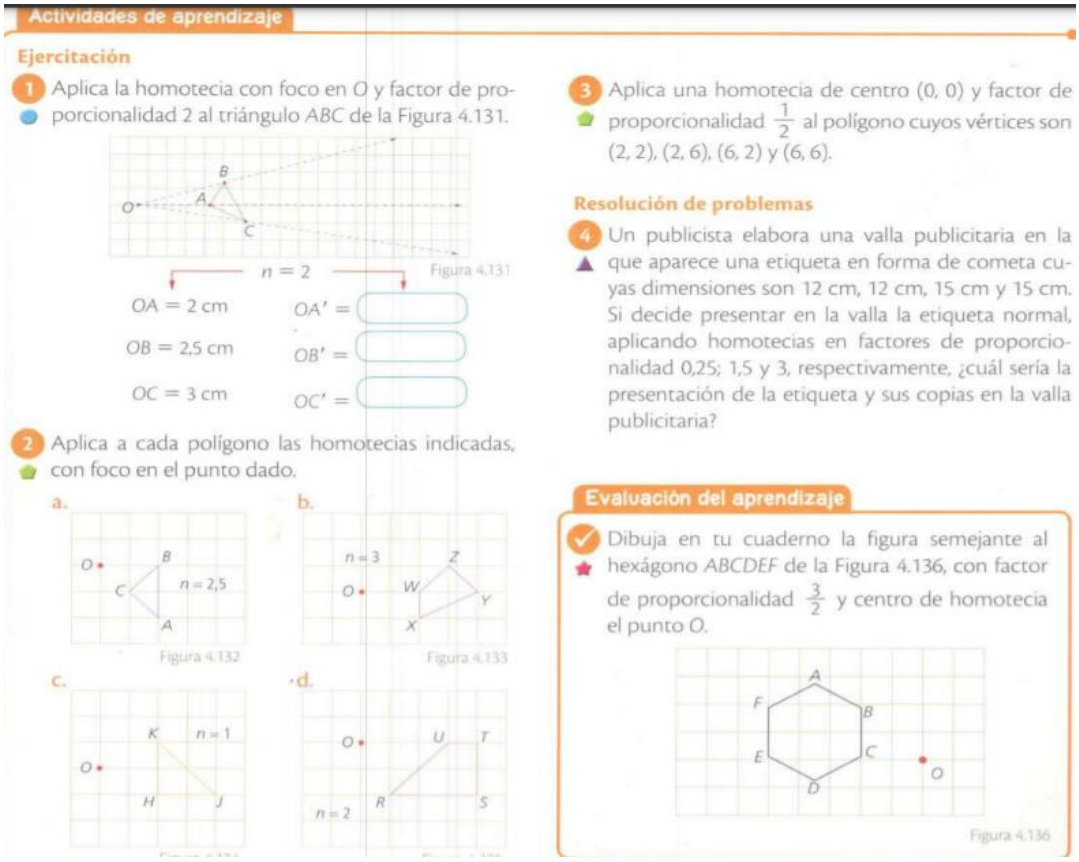


Figura 4.130

En los problemas sugeridos se sigue la misma línea, ejercicios numéricos en el plano donde se da el centro de homotecia, la figura inicial y la razón de proporcionalidad. En todos estos problemas la razón de homotecia considerada es mayor que uno, excepto en dos problemas que utilizan factor de homotecia entre 0 y 1.

Figura 10

Ejercicios



Los resultados de esta revisión son coherentes con los presentados en los antecedentes, los cuales señalan que la noción de homotecia es un concepto poco enseñado en las aulas de clase; y si se enseña hay poca o nula articulación de los registros gráfico y numérico. Por ejemplo, este libro de texto trata la homotecia como una trasformación en el plano cartesiano, utilizando en su mayoría razones de homotecia mayores e iguales a 1, no se hace énfasis en la alineación que hay entre los puntos homólogos y el centro, no se consideran las razones negativas y en pocos ejercicios las razones consideradas se encuentran entre cero y uno. En general los problemas consisten en obtener la homotecia de un punto multiplicando las coordenadas de este por números enteros

mayores que 1, prescindiendo de relaciones figurales como el paralelismo, la relación de proporcionalidad como comparación de magnitudes. Por lo tanto, consideramos que no movilizan las propiedades más estructurales de la homotecia. Por otra parte, no se realizan tareas en donde se deba hallar el centro de homotecia ya que los ejemplos se realizan con centro en el origen. Por consiguiente, atendiendo a la literatura vamos a proponer tareas que atiendan los aspectos que hemos mencionado que no se han tomado en cuenta, como lo son el articular los aspectos figural y numérico, el reconocimiento del centro de homotecia y cómo encontrarlo perceptivamente, anticipación de una figura que se va a mover; esto implica reconocer la relación de proporcionalidad o el paralelismo, al hacer énfasis en lo numérico usando como herramientas las retroacciones matemáticas y didácticas que ofrece el SGD esperamos que se prestará atención a la proporcionalidad.

8. Análisis a Priori

A continuación, exponemos el análisis de las actividades elaboradas y su diseño, a la luz de la Teoría de las Situaciones Didácticas, con el propósito de que los alumnos reconozcan y usen dos propiedades fundamentales de la homotecia, para afrontar distintas situaciones adidácticas que pongan en juego estas propiedades, de modo que se construyan conocimientos relativos a estas.

8.1 Análisis del diseño

En la primera actividad realizada por Pérez (2017), los alumnos lograron reconocer y usar perceptivamente el centro de homotecia y la alineación de los puntos homólogos con el centro. Esto es, las tareas de la primera actividad favorecen el ciclo de interacción intención-acción-retroacción-interpretación-validación, promoviendo el aprendizaje por adaptación de dos propiedades fundamentales de la homotecia: el reconocimiento del centro y de la alineación de

éste con cada par de puntos homotéticos. Sin embargo, en una segunda actividad, los estudiantes no lograron reconocer y utilizar perceptivamente la relación de proporcionalidad; a pesar de que el centro de homotecia (lugar donde se superponen todas las figuras) se encontraba visible, no lo utilizaron. Tampoco lograron anticipar en qué lugar queda la imagen cuando la preimagen se mueve.

En este diseño jugarán un papel importante las retroacciones didácticas, definidas por Pérez (2017), programadas en el SGD con el fin de favorecer el ciclo de interacción sujeto-medio que propone la TSD. Con la ayuda de las retroacciones didácticas buscamos que los estudiantes reconozcan y utilicen, en primer lugar, la alineación de los puntos homólogos y el centro y, en segundo lugar, la razón de homotecia. Estas, en general, serán ejecutadas por medio de la programación de botones, en los cuales los alumnos hacen clic, dependiendo de la tarea y el momento en que se encuentren. Por ejemplo, mostrar un mensaje en la pantalla, ocultar objetos o hacerlos visibles, habilitar el movimiento algunos objetos que permanecían fijos (inertes, en el lenguaje de DGPad). También programaremos retroacciones didácticas aprovechando el dinamismo y las características de la interfaz de DGPad. Por ejemplo, asignando estilos a los objetos (color, tamaño, grosor de los trazos, etiquetas de los puntos, medidas de longitud, etc.), restringiendo el movimiento de objetos en la pantalla, cambiando la posición de un punto de manera pseudo aleatoria, etc.

De acuerdo con las ideas del párrafo anterior, nuestro diseño tendrá como base el realizado por Pérez (2017). Como la primera actividad de su trabajo se desarrolló como se esperaba durante el pilotaje, en concordancia con el respectivo análisis a priori, la propondremos en DGPad lo más fielmente posible, entendiendo que la interfaz y el funcionamiento de DGPad tienen muchas diferencias con Cabri Elem. Por lo tanto, no podremos replicar las tareas exactamente igual y habrá

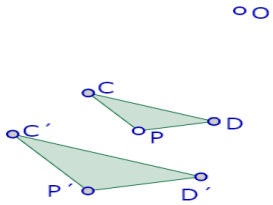
algunos cambios que creemos no implican ningún cambio en el funcionamiento teórico y la estructura general de la propuesta por Pérez. Como la segunda actividad propuesta por el mismo autor no funcionó completamente como se esperaba, en el favorecimiento del reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia, pero aportó muchos avances importantes, realizaremos una restructuración de esta actividad teniendo en cuenta los resultados de Pérez y las sugerencias de Lemonidis (1991). Principalmente, buscamos articular los registros gráfico y numérico.

Otro de los cimientos sobre los que se construye este diseño, además de las retroacciones didácticas, es el hecho de que DGPad es un software de geometría dinámica. Por lo cual, tiene una característica que describimos a continuación y cómo la usaremos para estructurar las actividades.

En el SGD, particularmente en DGPad, las construcciones son tales que algunos objetos dependen de otros precedentes, permitiendo modificar (arrastrando) los objetos iniciales con el ratón y percibiendo instantáneamente estas alteraciones en la pantalla, tanto de los objetos que se manipulan con el ratón, como de los objetos que dependen de ellos, conservando tanto las relaciones que se han solicitado con herramientas de construcción como las propiedades que son consecuencias teóricas de otras presentes. A este tipo de retroacciones Pérez (217) las define como retroacciones matemáticas, para discriminarlas de las retroacciones didácticas expuestas en párrafos precedentes. Esta dependencia es útil para nosotros porque queremos que los alumnos generen una relación de causalidad entre cada figura y su homotética. Por ejemplo, gracias a este hecho, podemos obtener la siguiente configuración, que será la misma para cada par de figuras homotéticas que aparezcan en las actividades:

Figura 11.

Figuras homotéticas.



En ella se presentan dos triángulos (ΔPDC y ΔP'D'C') homotéticos con respecto a un punto (O) cuya razón de homotecia es un número real, de modo que: el centro de homotecia es libre (se puede arrastrar con el ratón por cualquier lugar de la pantalla), el triángulo PDC se puede trasladar arrastrando el punto P, el triángulo P'D'C' se mueve al mover el triángulo PDC, de modo que ambos triángulos permanecen homotéticos respecto a O.

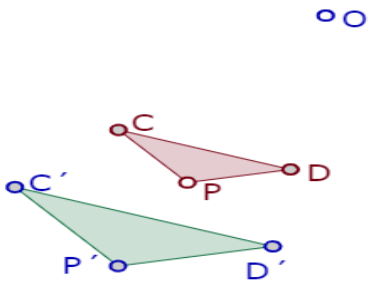
Nótese que hemos usado los términos arrastrar y mover, que tienen significados distintos en el contexto de los SGD; con el primero nos referimos a la posibilidad de manipular directamente con el ratón y cambiar su posición de un objeto en la pantalla; estos puntos los podemos identificar porque DGPad los deja sin relleno, como los puntos O y P de la figura anterior (los llamaremos puntos libres). Usamos el término mover, para aludir a la posibilidad de cambiar la posición o simplemente alterar un objeto al arrastrar otros de los cuales depende; en el caso de los puntos que no se dejan arrastrar, aparecen con relleno gris, como los D, C, D', P' y C' de la figura anterior (a estos los llamaremos puntos de intersección). Entre los puntos que se pueden arrastrar, algunos podrían estar construidos sobre otro objeto, de modo que el arrastre está restringido a dicho objeto. La posibilidad de arrastrar un punto libre, la podemos abolir temporal o permanentemente mediante el uso de retroacciones didácticas. En DGPad, cuando a un punto libre se le ha bloqueado

el arrastre, se le llama *inerte*. A diferencia de los puntos de intersección, los puntos inertes no se pueden mover, aunque sean libres.

Valiéndonos de este hecho, llamaremos preimagen en cada par de figuras homotéticas, a la figura que se puede mover al arrastrar uno de sus vértices, imagen a cada figura homotética de una preimagen, puntos homólogos o correspondientes a los puntos homotéticos. Además, en muchas ocasiones, al centro de homotecia; a la alineación entre los puntos homotéticos y el centro y; a la relación de proporcionalidad entre las distancias de los puntos homólogos al centro, les llamaremos simplemente centro, alineación y la relación de proporcionalidad, respectivamente; con el fin de facilitar la lectura. Entendiendo que, en cada configuración, la imagen se mueve al mover la preimagen, arrastrando uno de sus vértices. En cada una de las tareas de las actividades propuestas aparecen figuras homotéticas y en todas identificamos las preimágenes con el color rojo y las imágenes con el color verde (ver Figura 12).

Figura 12

Figuras homotéticas 2



Las actividades están compuestas por secuencias de tareas que se repiten con diferente centro y razón de homotecia. También con distintos tipos de figuras con el objetivo promover la identificación de las propiedades de la homotecia, comunes en cada configuración. Por ejemplo,

dependencia, puntos homotéticos, conservación de la forma, alineación, relación de proporcionalidad, entre otras. También involucraremos figuras con y sin simetrías internas, rectilíneas y curvadas; teniendo en cuenta las sugerencias de otras investigaciones, donde se resalta la dificultad que representa reconocer la correspondencia de los puntos homotéticos, cuando las figuras presentan simetrías centrales o axiales.

Con el fin de promover el diálogo y la formulación verbal del conocimiento, se propone el desarrollo de las tareas en parejas. Por lo tanto, parte del rol del profesor es garantizar que los dos alumnos de la pareja asuman un rol activo e intercambien sus opiniones.

8.2 Actividad 1

Buscamos que los alumnos puedan identificar las siguientes propiedades: la dependencia entre cada par de figuras homotéticas y el centro y su unicidad. Es posible que los alumnos discriminen las configuraciones con razón mayor que cero de las configuraciones con razón menor que cero, entendiendo que en las primeras las figuras se mueven en el mismo sentido, mientras que en las segundas lo hacen en sentidos contrarios. Aunque esto último no sea un objetivo, esperamos que los alumnos empiecen a relacionarse con ambas configuraciones. A continuación, exponemos el diseño detalladamente y su análisis.

Figura 13

Posición 1

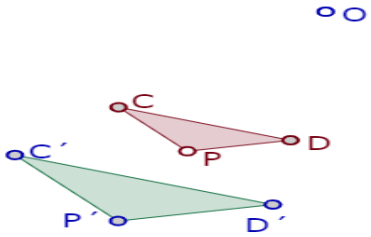
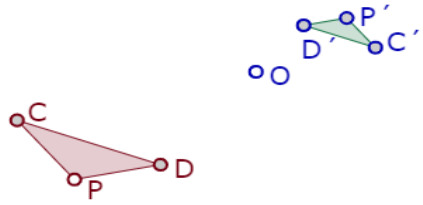


Figura 14

Posición 2



8.2.1 Primera secuencia

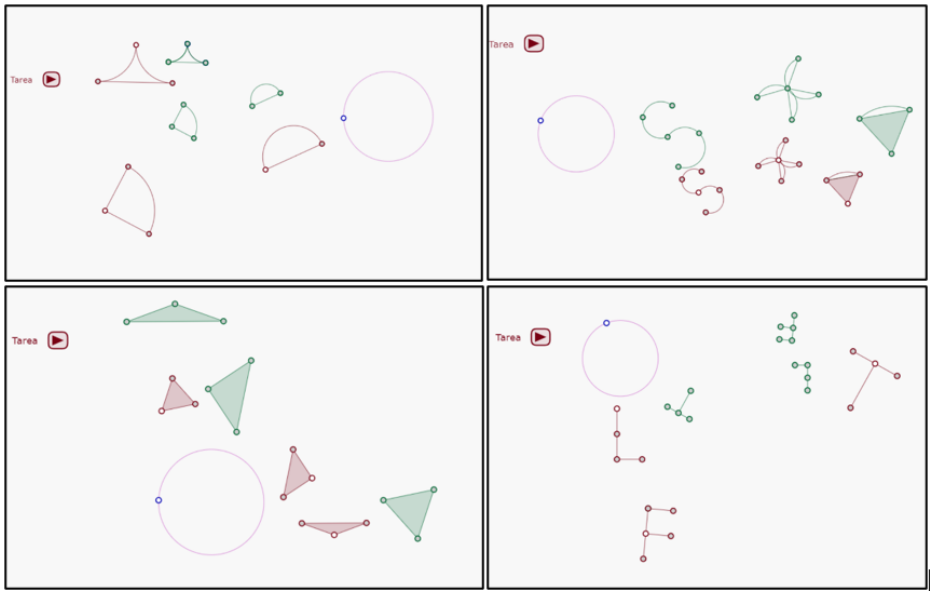
Buscamos que los alumnos puedan identificar las siguientes propiedades: la dependencia entre cada par de figuras homotéticas y el centro y su unicidad. Es posible que los alumnos discriminen las configuraciones con razón mayor que cero de las configuraciones con razón menor que cero, entendiendo que en las primeras las figuras se mueven en el mismo sentido, mientras que en las segundas lo hacen en sentidos contrarios. Aunque esto último no sea un objetivo, esperamos que los alumnos empiecen a relacionarse con ambas configuraciones. A continuación, exponemos el diseño detalladamente y su análisis.

8.2.2 Diseño de la primera secuencia.

La secuencia consiste en cuatro tareas que se repiten en cuatro series, modificando las figuras homotéticas, la posición del centro y la razón de homotecia (0.5, 1.5, -1.5 y -0.5).

Figura 15

Secuencia 1



Para las cuatro tareas se presentan un círculo en una posición distinta al centro de homotecia, con un punto libre en él inicialmente inerte y visible; tres figuras rojas (preimágenes) y sus tres homotéticas verdes (imágenes), respecto a un centro que permanece oculto y cambia en cada serie; un botón *Tarea*, que muestra la consigna correspondiente, cada vez que se haga clic en él y; un botón *Continuar* que inicialmente está oculto pero que se muestra y oculta según la tarea y el momento.

- La primera tarea consiste en meter las figuras rojas dentro del círculo que se encuentra fijo.
- La segunda tarea consiste en meter las figuras verdes dentro del círculo que permanece fijo.
- La tercera consiste en meter todas las figuras en el círculo que permanece fijo (esta tarea es imposible).

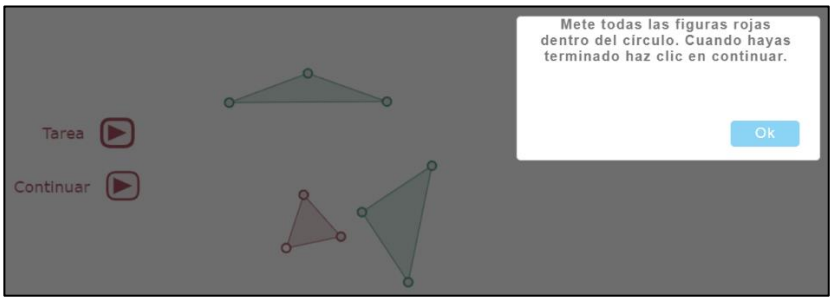
- La cuarta tarea consiste en mover el círculo y las figuras para meterlas en él. Por supuesto esta vez se habilita el movimiento del círculo, quitándole la condición de inerte al punto en él. Por lo tanto, esta sí es posible resolverla.

Las dos primeras tareas se proponen para que adviertan la dependencia entre dos figuras homotéticas. Esto es, las rojas se mueven arrastrando uno de sus vértices y las verdes solo se mueven cuando se muevan las rojas. Luego en la tercera y cuarta tarea, esperamos que los alumnos identifiquen el centro de homotecia y comprendan que es único.

Funcionamiento del diseño: La secuencia debe iniciarse haciendo clic en el botón *Tarea* y la retroacción muestra el botón *Continuar* y la consigna en la pantalla.

Figura 16

Consigna del botón tarea



Al hacer clic en el botón *Continuar* se muestra el mensaje de la Figura 17 a la izquierda, si la tarea no ha sido resuelta, continuando con la tarea y el mensaje de la Figura 18 a la derecha, si la tarea ha sido resuelta, pasando a la segunda tarea.

Figura 17

Retroacción continuar 1

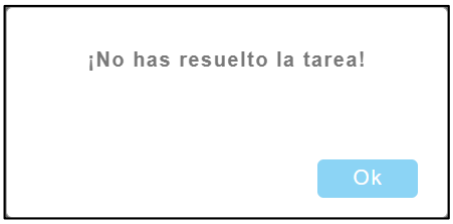
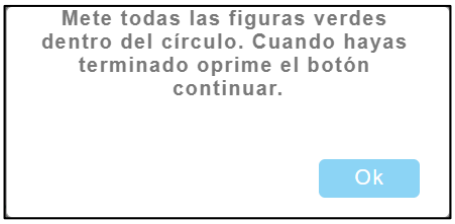


Figura 18

Retroacción continuar 2



En esta segunda tarea, al presionar botón *Continuar* nuevamente, muestra el mensaje de la Figura 19 a la izquierda, si la tarea no ha sido resuelta, continuando con la tarea y el mensaje de la Figura 20 a la derecha, si la tarea ha sido resuelta, pasando a la tercera tarea.

Figura 19

Retroacción continuar 3

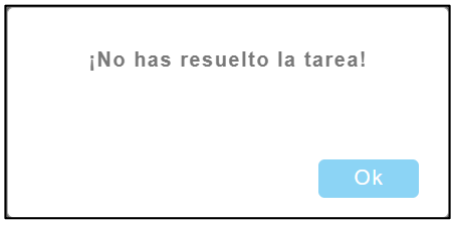
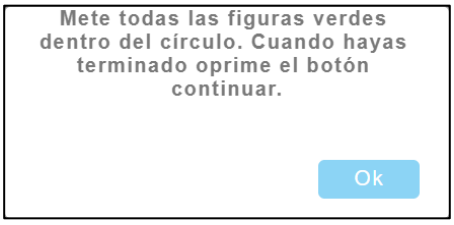


Figura 20

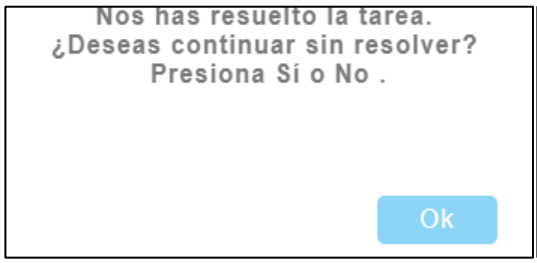
Retroacción continuar 4

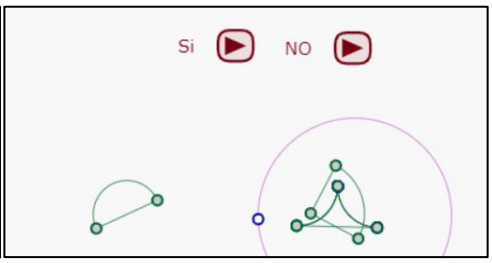


Una vez en la tercera tarea, al presionar botón *Continuar* se muestra el mensaje de la Figura 21 a la izquierda. Al presionar *Ok*, se hacen visibles los botones *Sí* y *No*.

Figura 21

Retroacción continuar 5





Si se hace clic en el botón No, la retroacción oculta los dos botones y muestra el mensaje que aparece en Figura 21 de la izquierda, de modo que se puede continuar intentando resolver la tarea. Si se hace clic en el botón *Sí,* se muestra el recuadro para escribir por qué desea continuar sin resolver la tarea, como lo muestra la Figura 23Figura 23 de la derecha.

Figura 22

Retroacción continuar 6

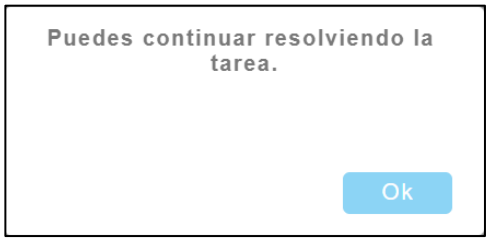
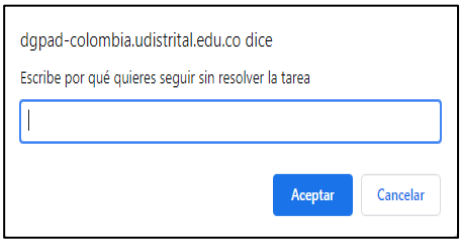


Figura 23

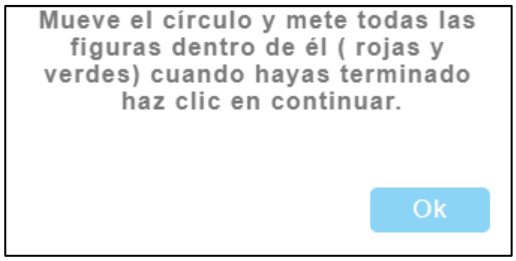
Retroacción continuar 7



Después de escribir la justificación en el recuadro y presionar *ok*, aparece la consigna que se muestra en la Figura 24.

Figura 24

Retroacción continuar 8



En esta cuarta y última tarea de la secuencia, al presionar el botón *Continuar* se muestra el mensaje de la Figura 25 Figura 25 a la izquierda, si la tarea no ha sido resuelta, continuando con la tarea y el mensaje de la Figura 26Figura 26 a la derecha, si la tarea ha sido resuelta, dando por concluida esta primera secuencia.

Figura 25

Retroacción continuar 9.

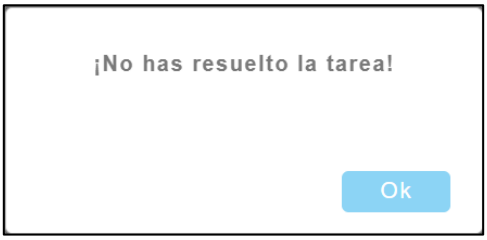
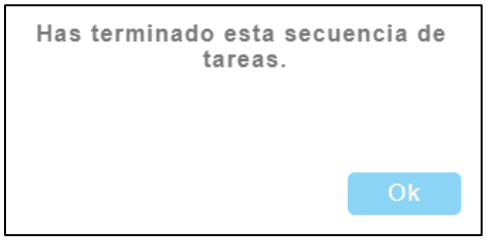


Figura 26

Retroacción continuar 10.



Análisis de las tareas

En las dos primeras tareas de esta secuencia esperamos que los alumnos encuentren que los únicos puntos que permiten el arrastre son tres (un vértice de cada figura roja) y que, al mover cada figura roja, arrastrando el vértice que lo permite, las figuras verdes también se mueven. Por lo tanto, esperamos que resuelvan la primera tarea arrastrando un vértice de las figuras rojas para meter estas en el círculo y durante el desarrollo de la segunda tarea abandonen la estrategia de

intentar mover las figuras verdes directamente y las metan al círculo arrastrando un vértice de las rojas, después de invalidar varios intentos.

Con la tercera tarea de esta secuencia buscamos que los alumnos constaten que el lugar donde se superponen las figuras es único. Esto porque cuando intenten meter las rojas notarán que las verdes quedan por fuera y viceversa. Luego intentarán juntar las figuras logrando conseguirlo en un único lugar. Como el círculo no está ubicado en esa posición, se espera que comprendan que la tarea es imposible de resolver. Así pues, se espera que luego de muchos intentos invalidados, abandonen la acción del arrastre, hagan clic en el botón *Continuar* y decidan avanzar sin resolverla explicando el por qué, mediante la retroacción didáctica que muestra un recuadro donde podrán formular el conocimiento esperado.

El propósito de la cuarta tarea es que confirmen la unicidad del lugar donde se superponen las figuras, ya que esperamos que los alumnos superpongan las figuras y luego lleven el círculo a esta posición (recuerde que en esta tarea se permite arrastrar el punto que mueve el círculo). Se sugiere que el profesor pregunte a los alumnos si es posible superponer las figuras en otra posición distinta, para que ratifiquen y formulen que el punto donde se superponen todas las figuras es único.

Al repetir las tareas con otras razones, esperamos que abandonen la acción de intentar arrastrar las figuras verdes e intentar meter todas dentro del círculo en la tercera tarea; que se refuerce la acción de arrastrar un vértice de las figuras rojas para mover las verdes y adviertan que en las diferentes secuencias las figuras son distintas, de distinto tamaño relativo y forma. También es posible que reconozcan las dos configuraciones correspondientes a la razón mayor y menor que cero. Sin embargo, si no lo hacen conforme interactúen con el medio en la siguiente secuencia deberán lograrlo para resolver la tarea.

8.3 Segunda secuencia.

Esta secuencia está compuesta por una sola tarea que se repite cuatro veces, con diferentes razones y posición del centro de homotecia, incluye una tarea de ayuda que analizaremos posteriormente. Tiene como propósito que los alumnos identifiquen la alineación de los puntos homotéticos con el centro de homotecia en una configuración de tres pares de figuras homotéticas y que anticipen la posición del centro de homotecia utilizando dicha alineación.

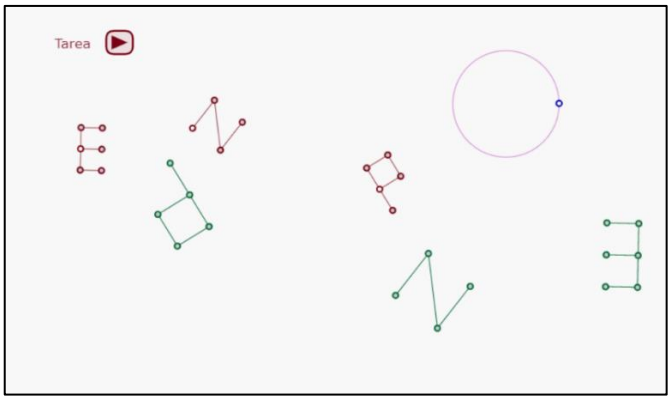
Usamos como base la cuarta tarea de la secuencia anterior y se desarrolla en dos momentos. En el primero se impide el movimiento de las preimágenes (figuras rojas) y se habilita el movimiento del círculo. A esta retroacción didáctica la llamaremos fomentadora de anticipación. Cuando el alumno ubique el círculo en la posición donde cree que las figuras se superponen debe hacer clic en un botón, cuya retroacción didáctica llamaremos fomentadora de validación. Esta consiste en permitir el movimiento de las preimágenes y bloquear el movimiento del círculo, con el fin de que los alumnos puedan validar sus acciones; de allí el nombre que le hemos asignado a la retroacción.

8.3.1 Diseño de la segunda secuencia.

La configuración inicial muestra un círculo en distinta posición a la del centro de homotecia, con un punto libre en él que se deja arrastrar; tres figuras rojas (preimágenes) que no se pueden mover y sus tres homotéticas verdes (imágenes), respecto a un centro que permanece oculto y cambia en cada serie; un botón *Tarea*, que muestra la consigna correspondiente, cada vez que se haga clic en él. Ver Figura 27.

Figura 27

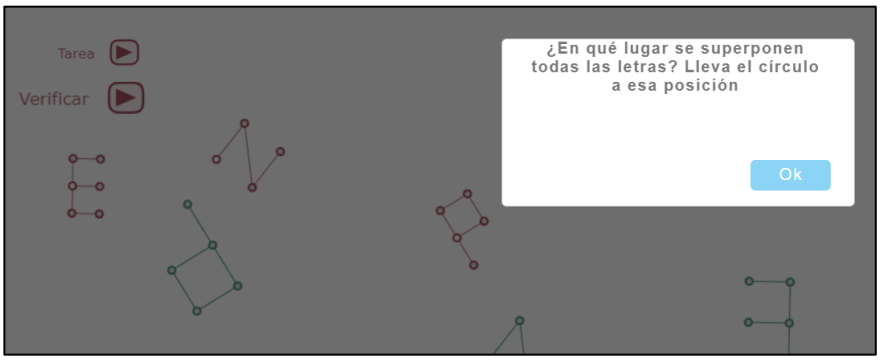
Secuencia 2



Al abrir la tarea, se habilita la retroacción fomentadora de anticipación y para empezar el alumno debe presionar el botón *Tarea,* cuya retroacción consiste en mostrar el botón *Verificar* y la consigna, como se muestra en la Figura 28.

Figura 28

Consigna del botón tarea

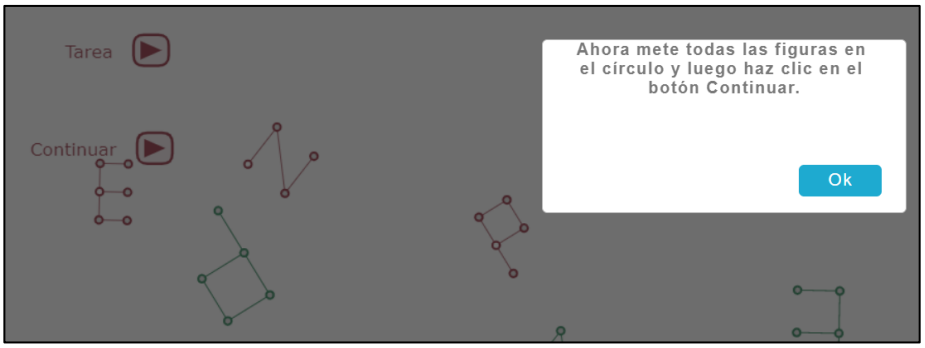


Al presionar el botón *verificar*, este se oculta, se muestra el botón *Continuar*, se ejecuta la retroacción fomentadora de validación y se muestra la consigna, como se muestra en la Figura 29.

Figura 29

Figura 29

Retroacción de Verificar.

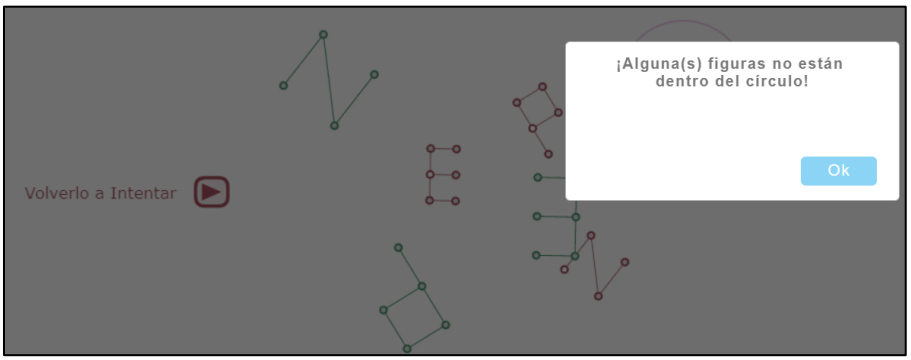


Al hacer clic en el botón *Continuar,* hay dos posibilidades:

En primer lugar, si no todas las letras quedan dentro del círculo, se mostrará un mensaje y el botón *Volver a intentar*. Como se muestra en la Figura 30.

Figura 30

Retroacción continuar 1

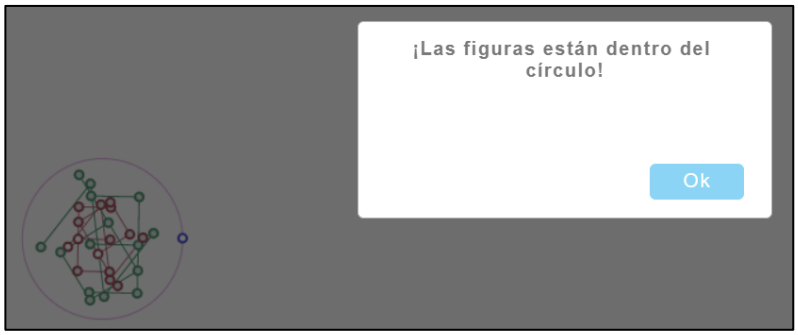


Al hacer clic en el botón *Volver a intentar* se reinicia la tarea, cambiando de manera pseudoaleatoria la posición del centro de homotecia, para que el alumno no resuelva la tarea por simple memorización de su posición.

En segundo lugar, si todas las letras quedan dentro del círculo, se muestra el mensaje que se muestra en la imagen y se repite la tarea con el centro en otra posición y otra razón de homotecia.

Figura 31

Retroacción continuar 2



Análisis de la segunda secuencia.

En esta tarea, en el momento de la anticipación, aunque las letras no se dejan mover, estimamos que los alumnos tratarán de arrastrar los vértices con que se pueden mover las letras rojas, para superponerlas con las verdes y luego llevar el círculo a esa posición. Como estos vértices están inertes, se espera que invaliden esta acción, la abandonen luego de algunos intentos y comprendan que deben arrastrar el círculo sin mover las letras para resolver la tarea. Si ubican el círculo en cualquier parte de la pantalla distinta a la posición del centro de homotecia, al hacer clic sobre el botón *Verificar* se activará la retroacción fomentadora de validación y meterán las figuras rojas en el círculo y las verdes no quedarán en el círculo con muy alta probabilidad. Podrán invalidar esta estrategia porque ya no podrán mover el círculo. Tampoco funcionará la estrategia de memorizar la posición donde las figuras se superponen, porque con cada intento esta cambiará, como habíamos comentado antes.

Una estrategia que se vale de los conocimientos construidos durante el desarrollo de las tareas previas y de esta, consiste en centrar la atención en las distancias entre cada pareja de letras homólogas. Una de las propiedades de la homotecia es que entre más cerca estén la imagen y su

preimagen, más cerca están del lugar de donde se superponen. No obstante, el uso de esta propiedad es insuficiente porque no tiene en cuenta ni la alineación, ni la proporcionalidad. De modo que esperamos que la invaliden por falta de precisión, lo que provocaría muchos intentos sin éxito.

Como es muy poco probable que los alumnos resuelvan la tarea sin identificar la alineación, cuando la identifiquen pueden emerger distintas estrategias para garantizarla. Entre las más intuitivas está, a simple vista, imaginar dos rectas sobre dos pares de letras correspondientes y su intersección, luego ubicar el círculo en esta posición. Esta estrategia podría funcionarles con márgenes de errores que podrían provocar más de un intento. Sin embargo, más allá de la precisión, no deja de ser válida. La segunda estrategia consiste en usar algún objeto rectilíneo como una regla, una libreta e incluso, el brazo o los dedos; ubicarlos sobre la pantalla de modo que el borde recto del objeto utilizado quede sobre las letras correspondientes. Consideramos que esta estrategia es válida y más precisa que la anterior. La tercera consiste en utilizar una herramienta de DGPad que permita construir un objeto rectilíneo, como un segmento, un rayo o una recta. Como es posible que aún no identifiquen los puntos homotéticos, no esperamos que tracen la recta por dos puntos correspondientes, sino que la dispongan en la pantalla y la ajusten a simple vista hasta que quede sobre las letras. Cualquiera de estas tres estrategias corresponde a la formulación del conocimiento de la alineación y esperamos que resuelvan las tareas utilizando únicamente alguna de estas tres. Si no resulta así, se debe ajustar el tamaño del círculo y posiblemente de las letras para que la tarea sea soluble únicamente a partir del uso de la alineación y, por ende, de su reconocimiento perceptivo.

Dadas las ideas previas, tenemos elementos suficientes para concluir que, si los alumnos llevan a cabo muchos intentos infructíferos para resolver la tarea, es porque no han identificado

preceptivamente la alineación de los puntos homólogos y el centro. En ese momento el profesor debe proponerles la tarea de ayuda. Que no reconozcan la alineación es bastante probable, dado que, según los resultados de investigaciones previas, reportados en el análisis preliminar; a los alumnos se les dificulta reconocer esta propiedad incluso en configuraciones dinámicas como las presentadas en estas tareas. Sin embargo, uno de los resultados obtenidos por Pérez (2017), durante el desarrollo de esta tarea, los alumnos podrían utilizar la retroacción fomentadora de validación, para mover las letras e intentar encontrar relaciones entre estas y el lugar donde se superponen. Por ejemplo, una vez habilitado el movimiento de las letras, pueden superponer una pareja y arrastrar las otras, facilitando la visualización de la alineación. En efecto, ese es precisamente el fundamento de la tarea de ayuda que analizaremos a continuación.

Al repetir la tarea con diferentes razones, esperamos que los alumnos discriminen las configuraciones con razón mayor y menor que cero. También esperamos que abandonen las estrategias que no corresponden con el uso de la alineación, ya sea a simple vista, mediante objetos fuera de la pantalla o mediante herramientas de construcción. En caso de que el alumno indague sobre las posibilidades que ofrece DGPad para trazar rectas, el profesor puede indicarle cómo trazar rectas, sin decirle qué recta construir o por qué puntos construirlas.

8.4 Diseño tarea de ayuda.

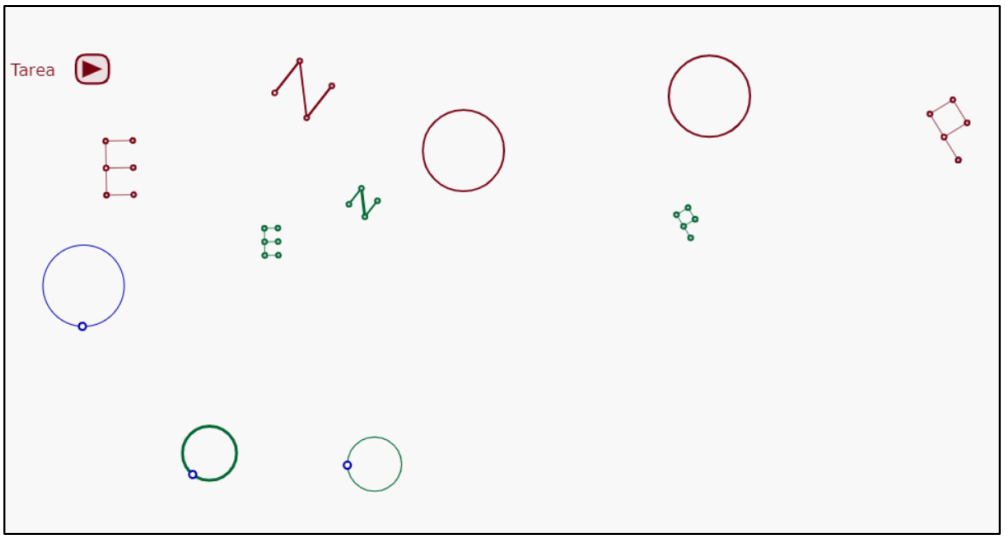
Como mencionamos al final del análisis de la tarea de anticipación, superponer un par de letras hace explícito el centro de homotecia. Si además se permite a los alumnos arrastrar las otras dos parejas, mientras un par permanecen superpuestas, la alineación se hace más evidente. Esta será la base del diseño de la tarea de ayuda. Empezaremos solicitando a los alumnos superponer

un par de letras y en el segundo momento se les solicitará arrastrar las demás letras para meterlas en círculos que se encuentran en posición distinta al centro de homotecia. Luego se hará énfasis en la disposición de las letras, mostrando dos rectángulos que se superponen con las letras alineadas. Se espera que gracias a esta retroacción se perciba la alineación y puedan resolver la tarea anticipación usando este conocimiento.

Al abrir la tarea, se presenta la configuración que se muestra en la En ella hay cinco círculos (2 rojos, 2 verdes y 1 azul), los rojos permanecen fijos y los verdes y el azul se pueden mover arrastrando el punto libre que se observa sobre cada uno, todos están en distinta posición a la del centro de homotecia; tres figuras rojas de las cuales solo se puede mover la E roja arrastrando su punto libre; tres figuras verdes, homotéticas de las rojas respecto a un centro que permanece oculto y; el botón *Tarea,* que muestra la consigna correspondiente, cada vez que se haga clic en él.

Figura 32

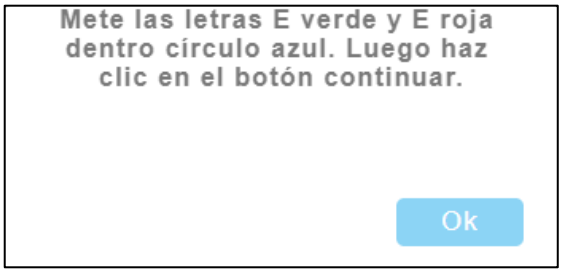
Tarea de ayuda



Funcionamiento de la tarea de ayuda: al hacer clic en el botón tarea, se muestra la consigna: *mete las letras E verde y E roja dentro círculo azul. Luego haz clic en botón Continuar* (ver Figura 33).

Figura 33

consigna botón Tarea.



Al hacer clic en el botón *Continuar*, se ejecutan dos posibles retroacciones, dependiendo de si la tarea está resuelta o no. Si las letras E están dentro del círculo azul, se muestra el mensaje de la Figura 35 de la derecha (primer caso). De lo contrario se mostrará el mensaje de la Figura 34 de la izquierda (segundo caso). A continuación, expondremos qué sucede en ambos casos.

Figura 34

Retroacción Continuar 1

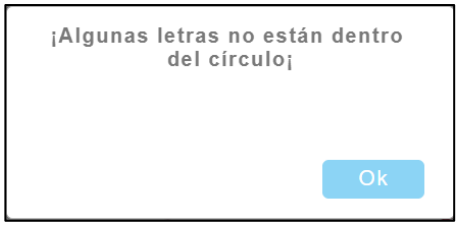
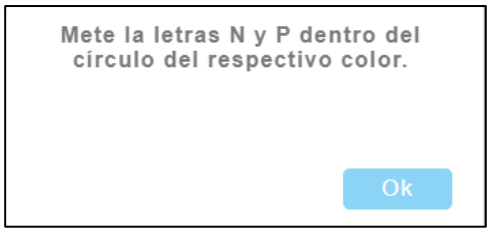


Figura 35

Retroacción Continuar 2



Primer caso (las letras E están dentro del círculo): si hace clic en el botón *Continuar* y las letras están dentro de los círculos correspondientes, se muestra el mensaje de la Figura 36 a la izquierda y se ejecuta la retroacción que muestra los rectángulos sobre las letras alineadas. Como se muestra en la Figura 38.

De lo contrario, se muestra el mensaje de la Figura 37 Figura 37 a la derecha.

Figura 36

Retroacción Continuar 3

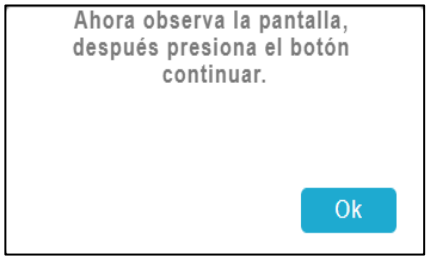


Figura 37

Retroacción Continuar 4

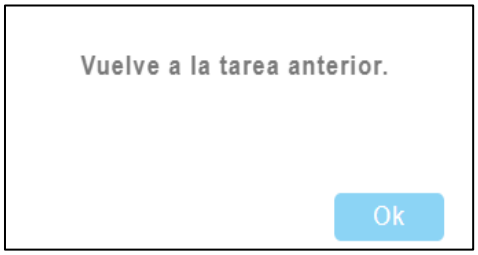
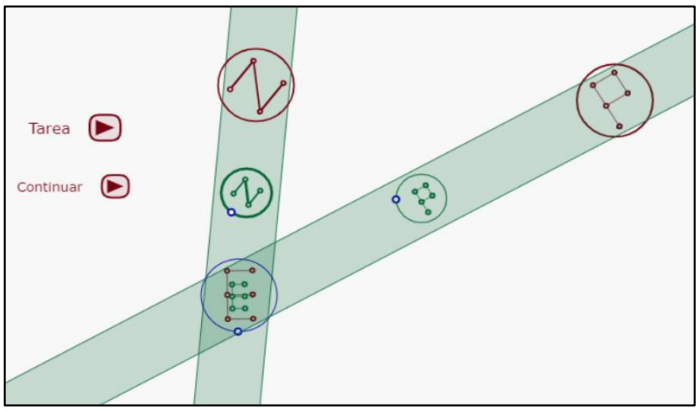


Figura 38

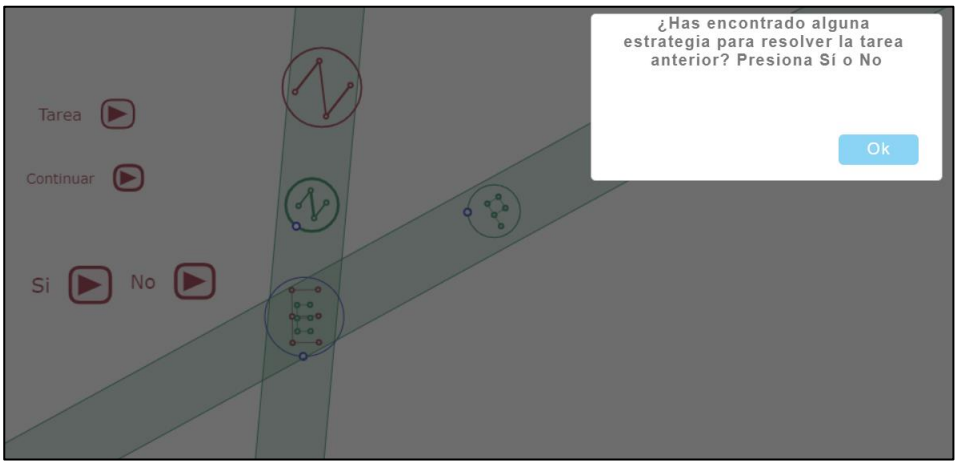
Retroacción bandas



Al volver a hacer clic en *Continuar,* en el caso que las letras estén todas dentro de los círculos correspondientes, se muestran el mensaje que aparece en la Figura 39 y se muestras los botones *Sí* y *No.*

Figura 39

Retroacción continuar 5



Al presionar el botón *Sí* se muestra el mensaje de la Figura 37Figura 37 de la derecha

Segundo caso (las letras E no están dentro del círculo): se muestra el mensaje de la Figura 40Figura 40 y se reinicia la tarea de ayuda.

Figura 40

Retroacción Continuar 6

8.4.1 Análisis de la tarea de ayuda

Esperamos que los alumnos metan las letras E dentro del círculo sin problemas y presionen botón *Continuar*, dado que tanto estas letras como el círculo azul se pueden mover arrastrando los puntos que lo permiten. Si intenten mover los círculos verdes y rojos hacia las letras N y P para que cada una quede dentro del círculo de su respectivo color. Como los círculos rojos permanecen fijos, invalidarán esta acción. Por lo tanto, creemos que moverán las letras N y P rojas arrastrando uno de sus puntos, hasta que queden dentro de los círculos rojos, luego llevarán los círculos verdes

a hacia la posición de cada letra verde correspondiente. Como la tarea estará resuelta, aparecerán los rectángulos que se superponen con las figuras alineadas. Es importante que los alumnos reflexionen sobre esta configuración, en tanto que centra la atención en la posición donde se superponen las letras y su relación con las otras dos parejas que están en posiciones distintas al centro de homotecia. Por eso se programó la retroacción que los invita observar la figura, con el fin de automatizar un acto de devolución.

Es posible que una vez desaparezcan los rectángulos, los alumnos intenten mover nuevamente las letras. La N y la P rojas lo permitirán mientras que las E verde y roja permanecerán superpuestas y dentro del círculo azul. Esto aumentará las posibilidades de que los alumnos tomen conciencia de la alineación, propiedad necesaria para anticipar la posición del centro de homotecia sin mover las figuras.

Según análisis y los resultados de Pérez (2017), esta retroacción no genera un efecto topacio. De acuerdo con esta idea, consideramos que los alumnos deben hacer un proceso de reflexión en la tarea de anticipación, en la que deben reconocer esta configuración, la cual no es explícita. Por lo tanto, consideramos que no estarían resolviendo el problema porque se les haya ofrecido la solución o dado instrucciones sobre qué acciones realizar.

8.5 Tercera secuencia.

En la segunda secuencia es suficiente tratar las figuras de manera global para resolver las tareas, en efecto ellos podrían formular el conocimiento adquirido diciendo que las letras están alineadas. Sin embargo, queremos que pasen de la concepción global de la figura a reconocer su carácter puntual. Esto es, que puedan observar que las figuras están constituidas por puntos y que, a cada punto de la preimagen, le corresponde un punto en la imagen.

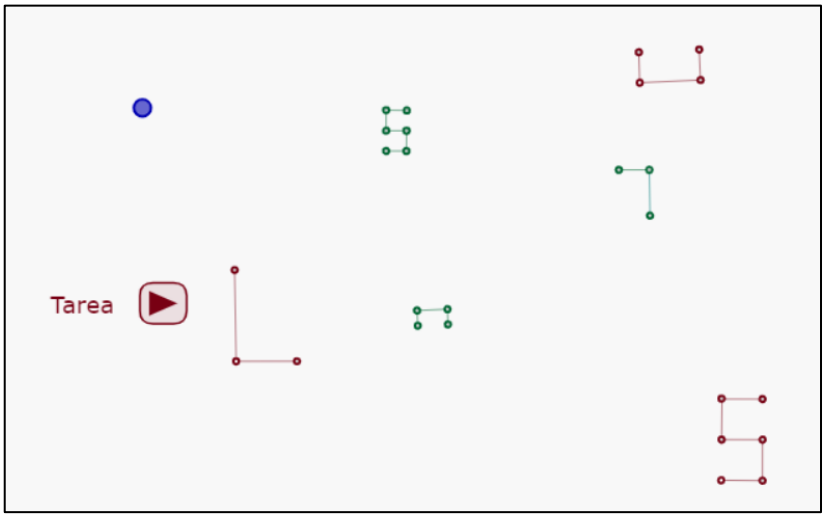
Se propone nuevamente la tarea de anticipación de la segunda secuencia, pero esta vez cambiaremos el círculo por un punto. Se repite cuatro veces y con distintas razones de homotecia. La tarea tiene dos momentos, uno donde se exige precisión, pero poca y otro donde se exige bastante precisión, de modo que solo sea posible resolver la tarea reconociendo los puntos homotéticos en cada par de figuras y utilizando la alineación de estos con el centro. Se incluye una figura con simetría interna, aumentando la dificultad para identificar los puntos correspondientes, como propuso Lemonidis (1991).

8.5.1 Diseño de la tercera secuencia.

Al inicio aparecerán un punto azul libre, claramente visible y distinguible por su tamaño, en posición distinta a la del centro de homotecia; tres figuras rojas (preimágenes) que no se pueden mover y sus tres homotéticas verdes (imágenes), respecto a un centro que permanece oculto y cambia en cada serie; un botón *Tarea,* que muestra la consigna correspondiente, cada vez que se haga clic en él. Ver Figura 41

Figura 41

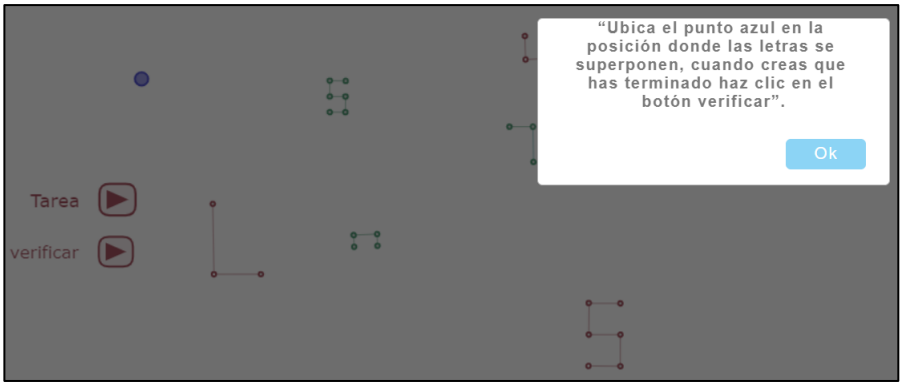
Secuencia 3



Funcionamiento de la secuencia: cuando se haga clic en el botón *Tarea* mostrará la consigna, y se hará visible el botón *Verificar*, como se aprecia en la Figura 42.

Figura 42

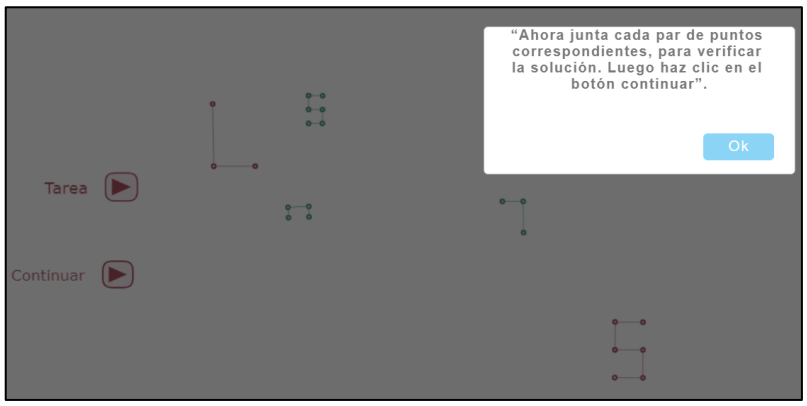
Consigna botón Tarea



Al hacer clic en el botón *Verificar*, este se oculta, muestra el botón *Continuar* y la consigna. Ver Figura 43.

Figura 43

consigna botón Verificar



Hacer clic en el botón *Continuar* genera dos posibilidades. Si el punto no fue ubicado con la precisión requerida, se muestra el mensaje de la Figura 44 Figura 44 y el botón *Volver a intentar* y al hacer clic en este se reinicia la tarea. Si el punto fue ubicado con suficiente precisión, se

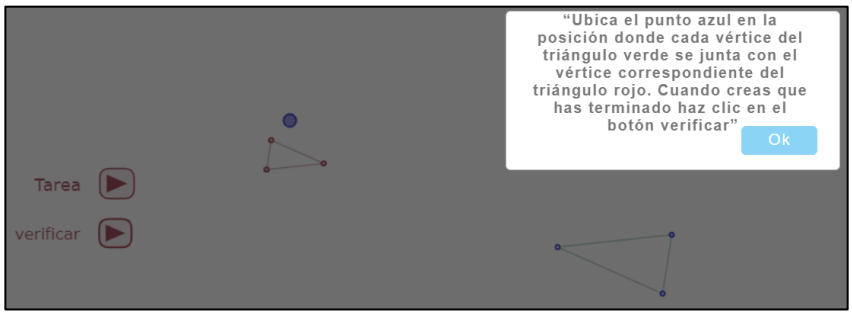
muestra el mensaje de la Figura 45 y se pasa al segundo momento, donde se repite la tarea con mayor exigencia en la precisión, pero se cambian las letras por dos triángulos isósceles y homotéticos, en los que se es posible que les cueste un poco más por su simetría.

Figura 44

Retroacción continuar 1

Figura 45

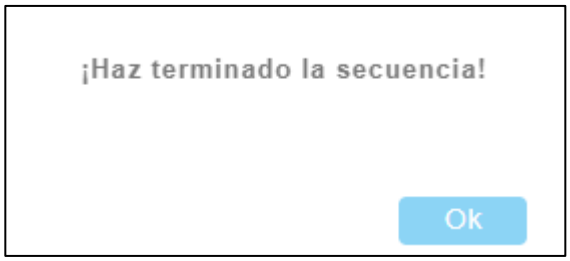
Retroacción continuar 2



En el este segundo momento, se repiten la tarea exactamente igual que en el momento anterior, excepto porque al resolver la tarea ubicando el punto con bastante precisión, al presionar el botón *continuar* la retroacción muestra el siguiente mensaje (ver Figura 46Figura 46)

Figura 46

Retroacción continuar 3



Análisis tercera secuencia.

Esta tarea se divide en dos momentos, con el primero buscamos que los alumnos refuercen el uso perceptivo de la alineación para anticipar la posición del centro de homotecia. Mientras que en la segunda parte buscamos que los alumnos manifiesten la necesidad de trazar una recta, dado que la precisión requerida será tal que los ajustes perceptivos no serán suficientes para garantizarla. Cuando el alumno exprese la necesidad de dibujar o construir una recta, el profesor puede intervenir para mostrar cómo construir rectas, sin decirles por dónde trazarlas. A continuación, los alumnos deberán identificar los puntos homólogos porque si trazan las rectas sobre las figuras correspondientes, pero no sobre los puntos homotéticos, la precisión se perderá y deberán abandonar esa estrategia. Gracias a las retroacciones didácticas que tiene programadas el botón verificar, ellos podrán validar sus estrategias y abandonar aquellas en las que no identifiquen los puntos homólogos. Reiteramos que en esta tarea la intervención del profesor es casi que necesaria para que el alumno utilice las herramientas de construcción, porque gracias a esta se puede garantizar que reconozca perceptivamente la posición puntual del centro de homotecia.

Al repetir la tarea con diferentes razones, se espera que refuercen la acción de identificar los puntos correspondientes para construir dos rectas a través de dos pares de estos y ubicar el punto en la intersección de tales rectas.

8.6 Actividad 2

Entre los resultados de Pérez (2017) se encuentra que, aunque las retroacciones didácticas programadas para esta segunda actividad favorecieron la construcción de conocimientos relativos a la homotecia, no fueron suficientes para que los alumnos lograran el reconocimiento perceptivo de la relación de proporcionalidad entre las distancias de cada par de puntos homotéticos al centro. Consideramos que una alternativa sería replantear la actividad, programando retroacciones didácticas que incorporen tanto aspectos figurales como numéricos, teniendo en cuenta que Lemonidis (1991), en su análisis cognitivo de la homotecia, sugiere que el diálogo entre los registros gráfico y numérico juega un papel importante en el diseño de tareas relacionadas con la relación de proporcionalidad en configuraciones homotéticas.

En concordancia con las ideas previas, proponemos dos secuencias para esta actividad. La primera tiene como propósito que los alumnos identifiquen perceptivamente la relación de proporcionalidad. Con la segunda buscamos que los alumnos utilicen tanto la alineación como la relación de proporcionalidad para anticipar perceptivamente la posición de una figura cuando su preimagen es llevada a otra posición.

8.6.1 Primera secuencia

Está constituida por dos tareas, la primera es de introducción, consiste en meter dos pares de triángulos homotéticos en un círculo y representar con un punto la posición donde se superponen, con el propósito de que los alumnos tengan presente el centro de homotecia durante las siguientes tareas. La segunda consiste en meter parejas de triángulos homotéticos en círculos mientras el centro y las distancias de tres pares de puntos homólogos se hacen explícitos, con el

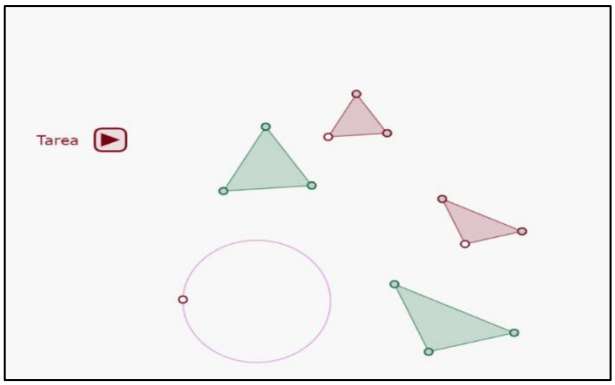
fin de promover el reconocimiento de la relación de proporcionalidad entre dichas distancias. Las tareas se repiten cuatro veces cada una cambiando la razón y la posición del centro de homotecia

Diseño de la secuencia

En la tarea de introducción se muestran cuatro triángulos: dos rojos y dos verdes, un círculo y el botón *Tarea* que muestra la consigna al hacer clic en él. Los triángulos verdes son homotéticos de los rojos con respecto a un punto que permanece oculto, los triángulos rojos y el círculo se dejan mover arrastrando los vértices libres. Ver Figura 47Figura 47

Figura 47

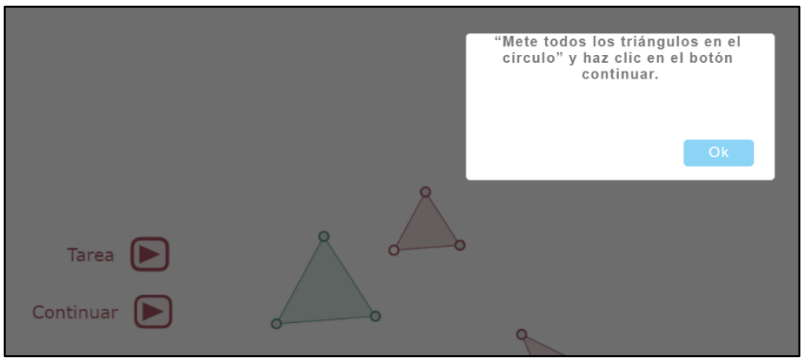
Tarea de inicio



Cuando los alumnos hagan clic en el botón *Tarea* se muestra la consigna y el botón *Continuar* (ver Figura 48).

Figura 48

Consiga del botón tarea



Cuando hagan clic en el botón *Continuar*, habrá dos opciones de retroacción: en primer lugar, si los triángulos no están dentro del círculo, mostrará el mensaje de la Figura 49 y el botón *Volver a intentar*, que reinicia la tarea al hacer clic en él. En segundo lugar, si los triángulos están dentro del círculo, muestra el centro de homotecia inerte, claramente visible por su tamaño. También se muestra el mensaje *"en las próximas tareas este punto estará visible y es donde todas las figuras se superponen" (*ver Figura 50).

Figura 49

Retroacción continuar 1

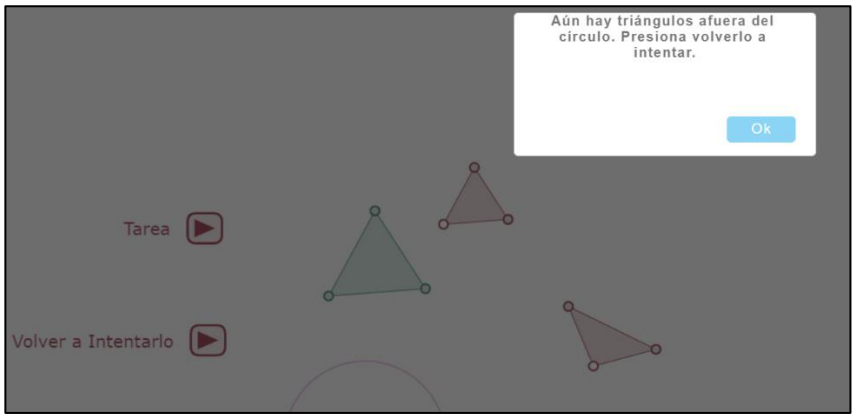
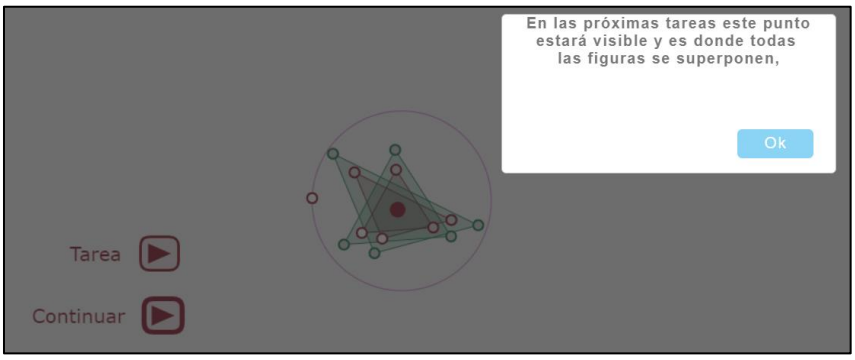


Figura 50

Retroacción continuar 2

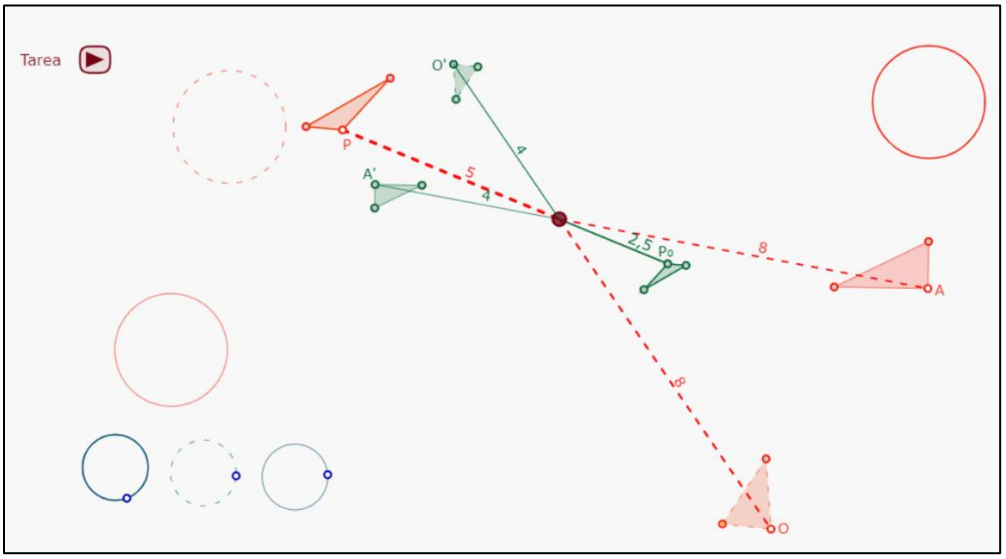


Una vez los alumnos presionen ok, podrán explorar la configuración moviendo los triángulos y luego avanzar a la siguiente tarea.

La segunda tarea inicia con la configuración mostrada a continuación, en la Figura 51:

Figura 51

Tarea 2



Se muestran tres triángulos rojos, tres triángulos verdes, tres círculos rojos, tres círculos verdes, un punto vinotinto grande e inerte, tres segmentos rojos que van de un vértice de cada triángulo rojo al punto vinotinto y sus medidas, tres segmentos verdes que van de un vértice de cada triángulo verde al punto vinotinto con sus medidas y, por último, el botón *Tarea.*

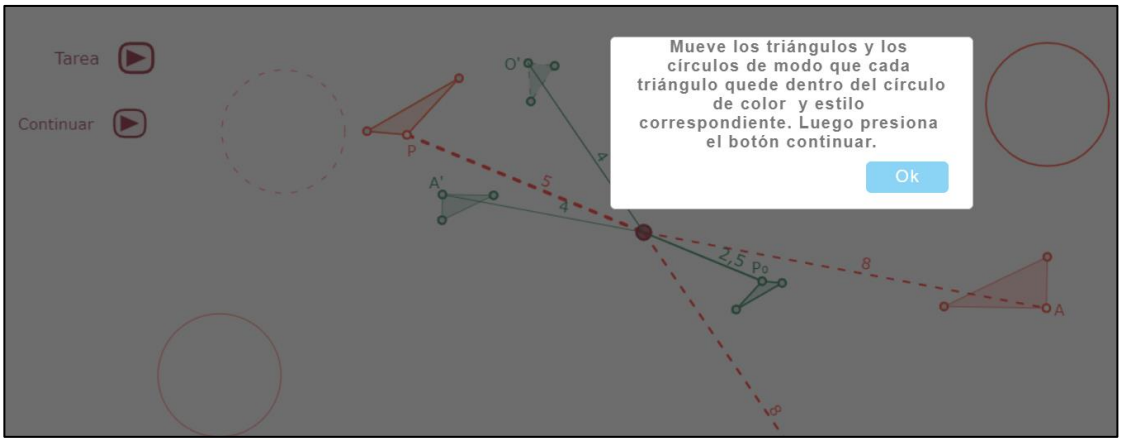
Los triángulos verdes, por supuesto son homotéticos de los rojos respecto al punto vinotinto. Cada triángulo rojo tiene un estilo distinto (uno es punteado, otro es continuo con trazo delgado y el otro continuo con trazo grueso), los triángulos homotéticos tienen el estilo correspondiente. Así mismo, para cada triángulo hay un círculo con color y estilo correspondiente. Los vértices de los que parten los segmentos rojos son los puntos que se dejan arrastrar y permiten mover los triángulos. Los segmentos verdes son los homotéticos de los segmentos rojos. Los puntos libres están etiquetados (A, O y P) y sus correspondientes también están etiquetados (A', O' y P'). Los seis segmentos que van hasta el centro de homotecia tienen visible su longitud.

Se han incorporado dos retroacciones didácticas fundamentales en esta tarea. La primera consiste en las etiquetas visibles de los tres puntos que se dejan arrastrar y los segmentos homotéticos con sus medidas visibles. La segunda retroacción didáctica hace que los tres puntos rojos que se dejan arrastrar, vértices de cada una de las preimágenes, se desplazan sobre una nube de puntos cuya distancia al centro de homotecia (punto vinotinto) es entera, de modo que los segmentos rojos tienen medida entera y representan las distancias de los puntos que se arrastran al centro de homotecia. La nube de puntos está distribuida de tal manera que las distancias no superen las 20 unidades y estén lo suficientemente cerca unos de otros, para que no se pierda la sensación de continuidad al arrastrar cada uno de los tres puntos.

Funcionamiento de la segunda tarea: como todas las demás, se empieza haciendo clic en el botón *Tarea*, el cual muestra el botón *Continuar* y un mensaje como se muestra en la Figura 52.

Figura 52

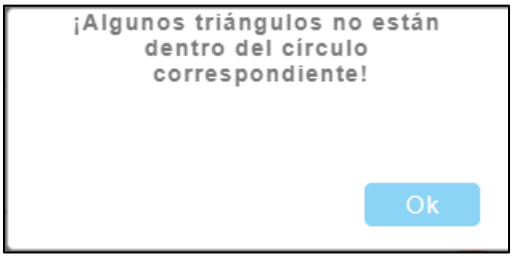
Consigna botón tarea



Cuando hagan clic en el botón *Continuar*, hay dos posibles retroacciones. La primera es mostrar el mensaje de la Figura 53Figura 53 y el botón *Volver a intentar*, si no todos los triángulos están dentro de los círculos correspondientes. Al hacer clic en *Volver a intentar* se reinicia la tarea.

Figura 53

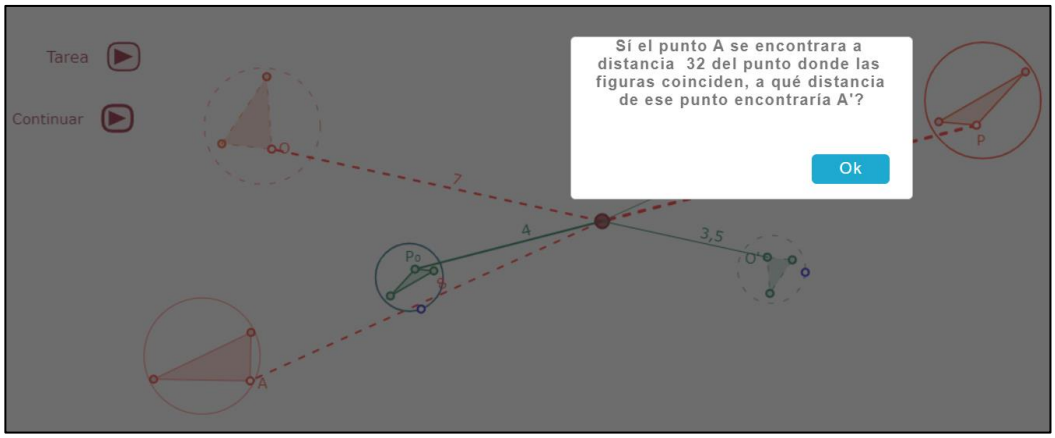
Retroacción continuar 1



La segunda retroacción del botón *Continuar* corresponde al caso en el que los triángulos sí están dentro de los círculos correspondientes. Se plantea una pregunta a los alumnos mediante un mensaje emergente (ver Figura 54): *"¿si el punto a se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría a'?".* La tarea concluye cuando los alumnos respondan a esta pregunta y la discutan con el profesor.

Figura 54

Retroacción continuar 2



Análisis de la secuencia.

Esperamos que los alumnos resuelvan la tarea de inicio rápidamente ya que solo necesitan hacer ajustes perceptivos, porque todas las figuras se pueden mover y el círculo también. También esperamos que esa tarea les permita centrar la atención en el punto en la segunda tarea. En esta última, consideramos que el movimiento discreto de los puntos que se dejan arrastrar podría causar un poco de ruido al principio, pero lo ignorarán seguidamente porque no tiene ninguna relación con la intención: meter los triángulos en los círculos correspondientes. De modo que no interrumpe el ciclo de interacción con el medio. Creemos que los alumnos no tendrán dificultades para identificar cuál círculo corresponde a cada triángulo, principalmente porque el botón *Continuar* les ofrece una retroacción que les permitirá validar. Una vez hayan identificado la correspondencia entre los círculos y los triángulos, podrán resolver la tarea por simples ajustes visuales, de modo que es posible que quieran avanzar ignorando por completo los segmentos, sus longitudes y la relación de proporcionalidad entre estos. Por eso la importancia de la retroacción didáctica en la que se pregunta: "*¿Si el punto A se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras*

coinciden, a qué distancia de ese punto se encontraría A'?" Como los puntos no se pueden situar a distancia mayor que 20 del centro de homotecia, deberán encontrar una relación entre las longitudes, que les permita anticipar la distancia de A' al punto donde las figuras coinciden. En este sentido, la exploración mediante el arrastre será fundamental. Ahora bien, para facilitar los cálculos mentales que permitan relacionar las medidas, se hace importante que estas sean enteras, permitiendo que la retroacción didáctica juegue un rol importante para el reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia. Cuando los alumnos tengan una estrategia de anticipación, el profesor podría sugerir aplicarla a las distintas configuraciones posibles dentro de la pantalla, de modo que puedan validarlas ellos mismos, sin que el profesor les diga si acertaron o no.

Entre las estrategias para relacionar las distancias de los puntos homólogos al centro, podrían emerger estrategias aditivas. Por ejemplo, considerar que la longitud de un segmento imagen será la suma o diferencia de la longitud del segmento preimagen y una cantidad fija. Creemos que este tipo de estrategias serán invalidadas gracias a la retroacción didáctica que ofrece el botón *Verificar*, ya que al mover las letras es muy poco probable que funcione para las dos parejas restantes, probabilidad que disminuye al cambiar la posición del centro de homotecia.

Las estrategias que esperamos validen, refuercen y formulen los alumnos son aquellas que recurren a relaciones multiplicativas. Por ejemplo, que utilicen ideas como determinar cuántas veces cabe un segmento en su homotético o viceversa y, que utilicen esta noción de razón para determinar la cuarta proporcional que se solicita. Esperamos que empleen expresiones como la mitad, el doble, una y media. Incluso en términos de otros significados de la razón como porcentajes. Algunos alumnos podrían utilizar la regla de tres, que corresponde también a un tipo de razonamiento proporcional, aunque dado el contexto geométrico, esta idea podría no emerger fácilmente. Las dificultades cognitivas asociadas a este tipo de estrategias, cuyas características

son razonamientos por analogías y de conciencia metacognitiva lineal, de acuerdo con Modestou y Gagatsis (2010), como propusimos en el análisis preliminar; esperamos sean superadas gracias a que las razones son bastante simples (0.5, -0.5, 1.5 y -1.5) y que, las distancias de los puntos preimágenes que se dejan arrastrar al centro de homotecia son enteras.

Al repetir la tarea con distinta razón de homotecia, se espera que reconozcan la relación de proporcionalidad en las configuraciones de razón positiva y las de razón negativa. También que refuercen la estrategia de comparar las longitudes para encontrar la razón de homotecia.

8.7 Segunda secuencia

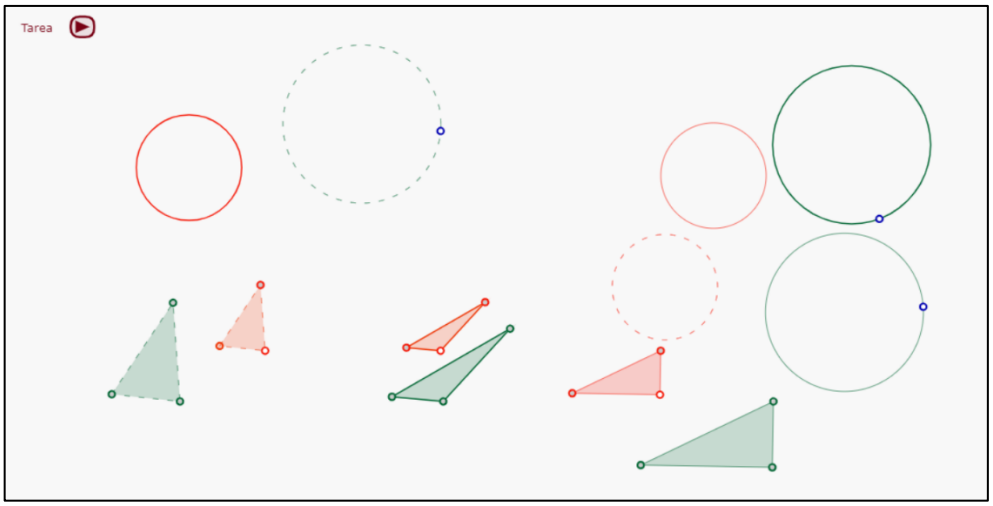
Esta secuencia consta de una sola tarea, cuyo propósito es que los alumnos, en una configuración de figuras homotéticas, anticipen la posición en la que quedará la imagen, cuando la preimagen cambie de posición. Para resolver esta tarea es necesario que los alumnos utilicen los conocimientos construidos en la primera actividad y en la primera secuencia de esta segunda actividad: el reconocimiento de puntos homólogos y su alineación con el centro y la razón de homotecia.

8.7.1 Diseño de la secuencia.

Tomamos como base la misma configuración inicial de la tarea de la primera secuencia, esta vez sin los segmentos que mostraban las distancias al centro, sin las etiquetas y con el centro de homotecia oculto (ver Figura 55Figura 55).

Figura 55

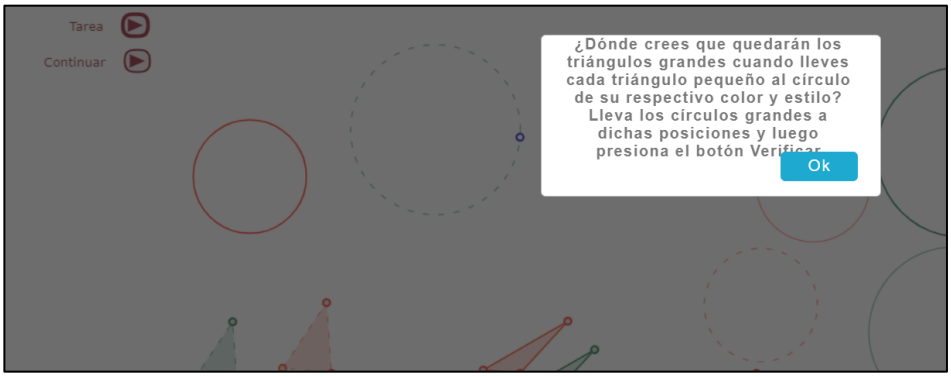
Secuencia 2



Inicialmente las figuras no se pueden mover, mientras que los círculos verdes sí, los rojos permanecen fijos. Se inicia la tarea haciendo clic en el botón *Tarea*, el cual muestra la consigna y el botón *Continuar* (ver Figura 56Figura 56).

Figura 56

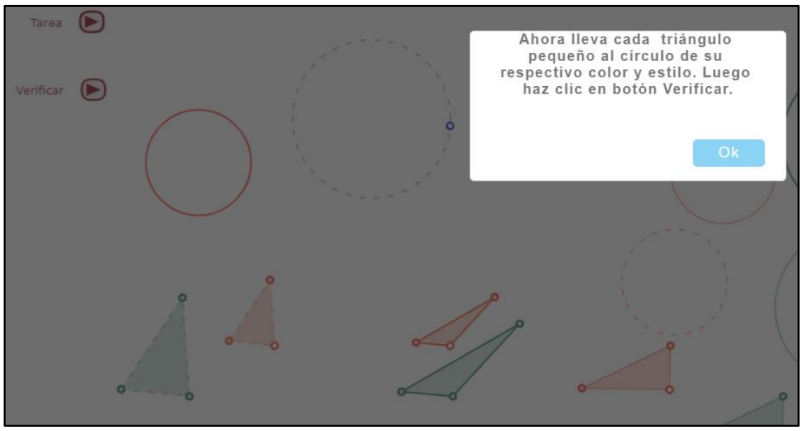
Consigna botón tarea



Al hacer clic en *Continuar*, *este* se oculta, se muestra el botón *Verificar* y se ejecuta la retroacción fomentadora de validación (ver Figura 57Figura 57).

Figura 57

Retroacción continuar



Al hacer clic en el botón *verificar* se tienen dos posibilidades: la primera, si los triángulos no quedan dentro de los círculos correspondientes, se muestra el mensaje de la Figura 58 en la izquierda y el botón *volver a intentar*, que reinicia la tarea, con el centro de homotecia en otra posición. La segunda posibilidad es si los triángulos están dentro de los círculos correspondientes, entonces la tarea está resuelta y se muestra el mensaje en la Figura 59 a la derecha.

Figura 58

Retroacción verificar 1

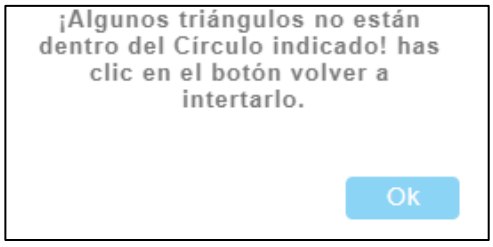
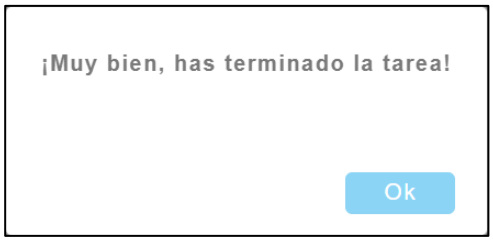


Figura 59

Retroacción verificar 2



Análisis de la secuencia.

Entre las acciones más esperadas está el que intenten mover los triángulos o los círculos preimagen para resolver la tarea. Como los triángulos y los círculos preimagen no se pueden

mover, esperamos que comprendan que la tarea consiste en mover los círculos, anticipando la posición donde quedarán los triángulos antes de moverlos.

Luego, es factible que ubiquen los círculos arbitrariamente, sin considerar ninguna relación con los triángulos. La retroacción fomentadora de validación les permitirá invalidar esta estrategia. Tampoco funcionará la estrategia de intentar memorizar la posición solución de las figuras porque esta cambia de manera pseudoaleatoria, gracias a las retroacciones del botón *Volver a intentar*.

Otra estrategia que invalidarán gracias la retroacción fomentadora de validación es suponer que lo que se traslade el triángulo preimagen se trasladará el triángulo imagen. Esta estrategia no garantiza la alineación. Por lo tanto, será infructífera e invalidada.

Luego de emplear estrategias que no obedecen a las propiedades de la homotecia, o antes, es posible que empiecen a usar estas de manera insuficiente. Por ejemplo, poner cada pareja de círculos alineados con el centro, prescindiendo de la relación de proporcionalidad. También podrían usar es garantizar la relación de proporcionalidad dejando de lado la alineación. Esta estrategia también será invalidada al intentar meter todos los triángulos dentro de los círculos correspondientes.

Sabemos que es muy poco probable, que resuelvan la tarea prescindiendo de las propiedades fundamentales de la homotecia, estudiadas durante el desarrollo de todas las tareas. Por lo tanto, consideramos que la única estrategia ganadora es: identificar los puntos homotéticos, trazar dos rectas por dos pares de estos, obtener el centro con la intersección de las dos rectas y luego utilizar ese centro, para mediar la distancia de la preimagen y poner un punto en la recta, del lado apropiado respecto al centro, medir la distancia al centro, ajustarlo o construirlo para que la razón entre estas dos distancias sea la misma que deja cualquier otro par de puntos homotéticos.

Consideramos que esta última estrategia emerge como consecuencia del desarrollo de la primera secuencia.

9. Análisis a posteriori

A continuación, confrontamos el análisis a priori con el desarrollo efectivo de las actividades, mediante una reflexión teórica de la experimentación. Las tareas fueron realizadas conjuntamente por un joven y una adolescente, estudiantes que cursan noveno grado en el colegio panamericano de Floridablanca. La recolección de datos se realizó grabando, con cámara de video, la pantalla del computador y el audio.

Como evidencias y datos para el análisis, expondremos fragmentos de las transcripciones de los videos obtenidos en la experimentación (se presentan completas en capítulo de anexos), mediante tablas a tres columnas. En la primera enumeramos las intervenciones de los alumnos y el profesor (de aquí en adelante, utilizaremos estos números entre paréntesis para referenciar la línea correspondiente); en la segunda se indica el sujeto que habla o realiza las acciones mencionadas (usaremos los seudónimos maría y Carlos para los alumnos y p para el profesor); en la tercera columna se mostrará lo que el sujeto dice y, las acciones serán descritas entre paréntesis cuadrados “[]”. Además, las interpretaciones del investigador, cuando se requieran para aclarar las transcripciones, irán dentro de paréntesis redondos “()”, si es necesario, en esta misma columna se anexará una evidencia gráfica.

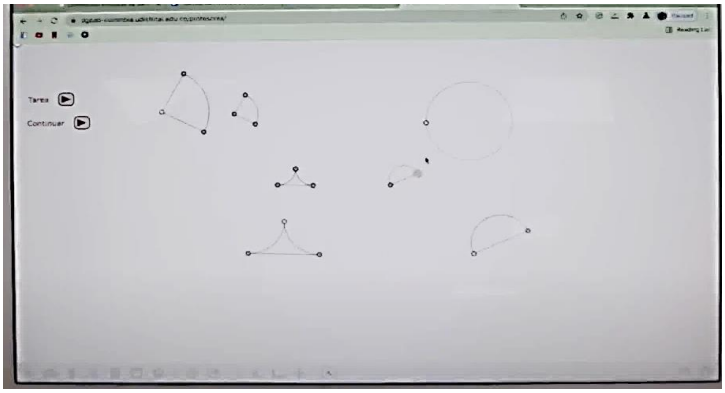
9.1 Actividad 1.

La primera actividad está compuesta por tres secuencias, las cuales analizaremos individualmente y finalizaremos con un análisis conjunto.

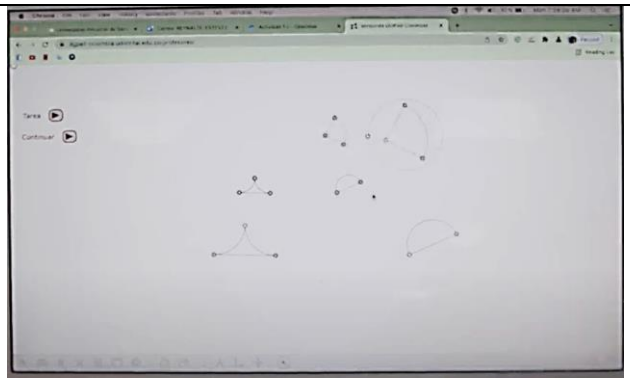
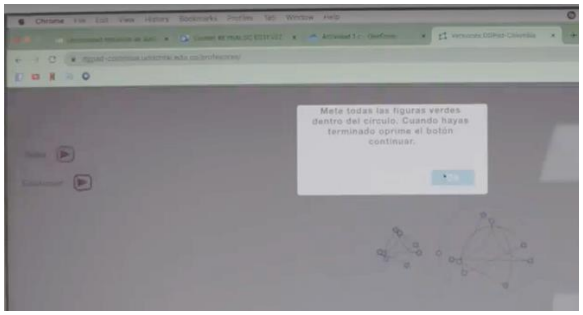
9.2 Análisis de la primera secuencia.

Los conocimientos que los alumnos alcanzaron gracias al desarrollo de esta secuencia fueron: no cualquier figura se puede arrastrar, solo las figuras rojas lo permiten; estas a su vez, se dejan arrastrar por solo uno de sus puntos y, para mover las figuras verdes se deben arrastrar las rojas. Esto es, entendieron que hay dependencia entre las figuras verdes y rojas, pero sin comprender dicha relación. Por último, el lugar donde las figuras se superponen es único. A continuación, exponemos las evidencias de estos hechos y una algunas reflexiones particulares.

No	Sujeto	Descripción
1	Carlos	[lee la tarea]. Mete todas las figuras rojas dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*…toca mover.



5	Carlos	Toca ir moviéndolas como ir agarrándolas todas.

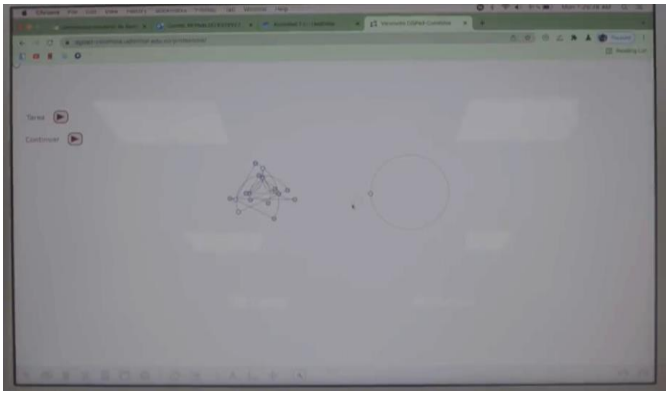
		
7	Carlos	Con ese, con ese [refiriéndose al punto que permite arrastrar una de las figuras rojas].
8	María	[mete las figuras rojas dentro del círculo y resuelve la tarea].
9	María	[hace clic en botón *Tarea*, (inicia la segunda tarea donde la razón de homotecia es 1.5) y lee la consigna] mete todas las figuras verdes dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón continuar. 
10	María	[intenta arrastrar las figuras verdes, luego arrastra las figuras rojas, pero no por el punto libre].

11	Carlos	El que es como blanco [efectivamente, en DGPad el color blanco de un punto indica que es libre. Es decir, se deja arrastrar].

13	María	[sigue intentando resolver la tarea, pero sin conseguir mover las figuras verdes].
14	Carlos	El de arriba [señala la pantalla indicando el punto que se deja arrastrar].

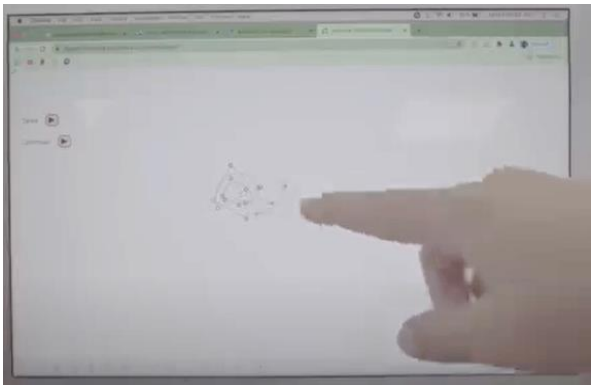
15	María	¡ah! Ok ya entendí [arrastra los triángulos rojos hasta meter los verdes en el círculo].
17	María	[hace clic en el botón *continuar*, aparece la consigna: mete todas las figuras dentro del círculo (verdes y rojas). Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*].

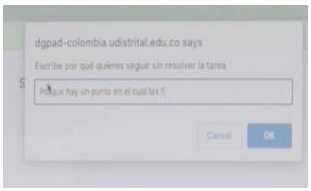
21	Carlos	Pero después para juntarlas con el círculo, ahí sí no sé cómo, porque el círculo no se deja mover.

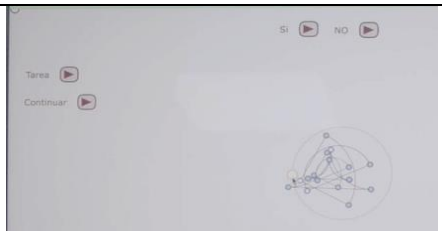


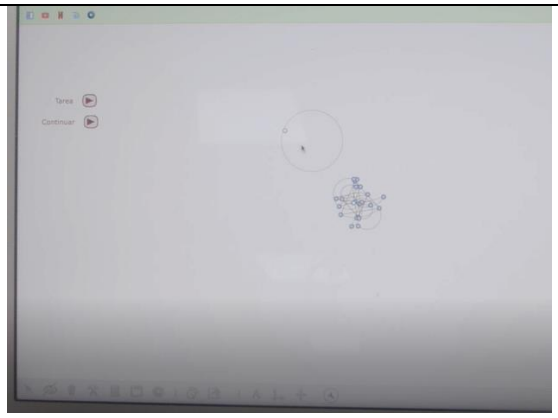
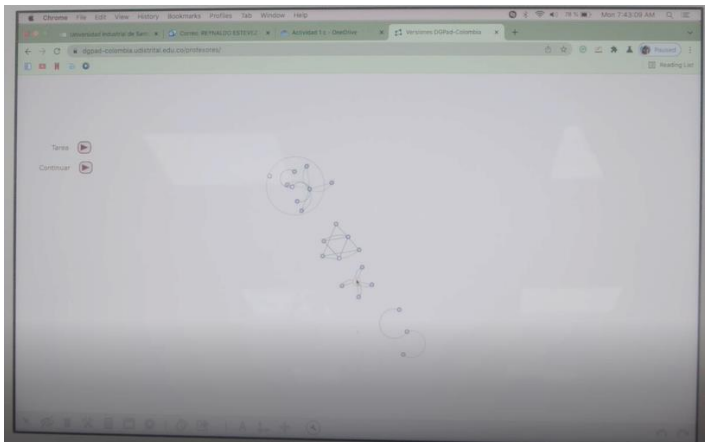
27	María	[continúa arrastrando la pantalla para tratar de meter todas las figuras en el círculo].

28	Carlos	Profesor… ¿si no sabemos qué hacer? ¿cómo hacerlo?
29	P	¿no saben qué hacer?
30	Carlos	Sabemos cómo juntarlas, pero no cómo mover el círculo.
31	P	¿o sea, que no va a poder meter las figuras?
32	Carlos	No todas, podemos meter un color y un color.
33	María	Cuando metemos se mueven.
34	María	[lleva todas las figuras al lugar que se superponen].

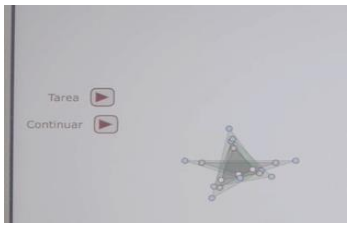
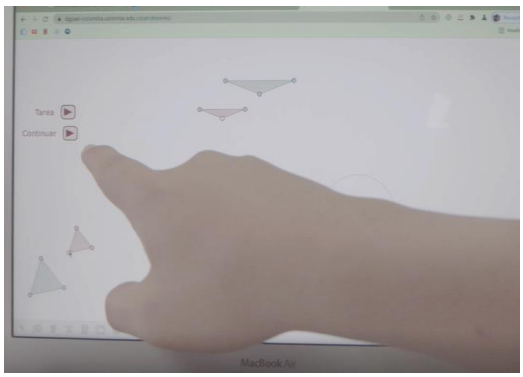
35	Carlos	Ese es el punto en donde están juntas todas. 
36	P	¡ah! Hay un punto en donde se juntas todas. ¿no hay otro lugar en donde ellas se juntan?
37	Carlos	No, solo en ese lugar.
38	P	¿entonces el círculo debe estar allí?
39	Carlos	Sí.
40	María	Sí.
41	Carlos	Pero no hay manera de moverlo.
42	P	Presione *continuar* a ver.
43	María	[presiona el botón *continuar*, aparece el siguiente mensaje: “no has resuelto la tarea, ¿deseas continuar?” Y se muestra los dos botones *sí* y *no*].
44	P	¿desean continuar entonces sin resolverla?
45	Carlos	Sí, porque no sabemos cómo resolverla.
47	María	Sí [presiona el botón *sí* aparece un recuadro donde se le pide que escriba por qué desea continuar sin resolver la tarea].

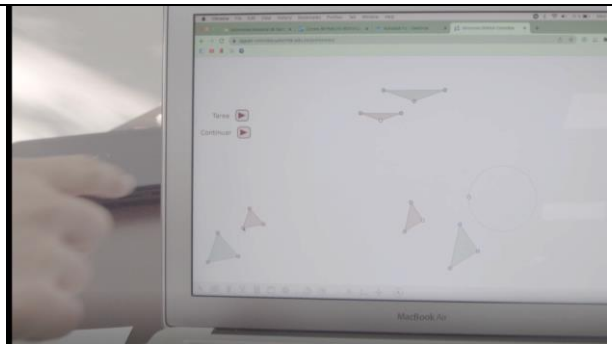
		¿quieres escribirlo tú, por qué...?
49	Carlos	Porque hay un punto donde las figuras, las dos figuras… 
58	María	[escribe en el recuadro lo siguiente: llegamos a un punto en el que las figuras estaban una sobre otra, pero no están dentro del círculo y no había o no encontramos manera de mover el círculo ya que, si la figura se movía, no quedarían una sobre otra].
59	Carlos	Pero igual no nos saca de la tarea.
60	P	…ehh… ¿ya le dieron *sí*?
61	María	Sí.
62	Carlos	Sí.
63	P	Ok creo que ya puede mostrar la tarea, qué dice.
64	María	[presiona el botón *continuar* y aparece la siguiente consigna: mueve el círculo y mete todas las letras dentro de él (rojas y verdes). Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*].
65	Carlos	Ahora sí, el objetivo era ese, que no se podía mover.
66	María	[llevó el círculo al lugar donde se superponen todas las figuras] (por un error en la programación los botones *si* y *no,* no se ocultaron).

		
67	Carlos	Terminamos.
68	P	[abre el siguiente archivo con razón de homotecia -0.5].
69	María	[hace clic en el botón *tarea* y aparece la consigna: mete todas las figuras rojas dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic botón *continuar*].
70	Carlos	Creo que es igual al del círculo blanco [refiriéndose al punto que deja arrastrar las figuras].
71	María	[mete las letras rojas dentro del círculo, hace clic en el botón continuar y lee la consigna]. Mete todas las figuras verdes dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*.
72	Carlos	[intentó arrastrar las figuras verdes sin éxito].
73	Carlos	Pero también se mueven con el punto blanco.
74	María	¡ah! Ya [dejó de intentar agarrar las figuras verdes y arrastró las figuras rojas para solucionar la tarea].
75	María	[hace clic en el botón *tarea* y aparece la consigna: mete todas las figuras rojas dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic botón *continuar*].
78	María	Para que estén en el mismo punto. [arrastra las figuras hasta superponerlas].

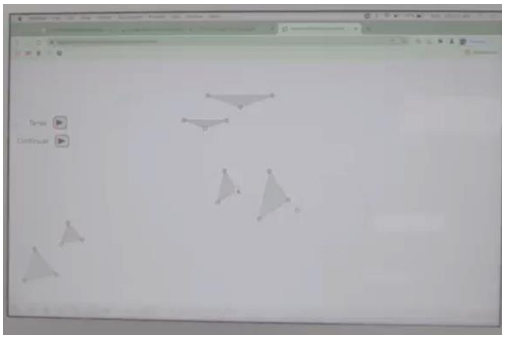
		
79	Carlos	Pero de pronto no deja mover el círculo.
80	María	No deja.
81	Carlos	Espera y si metemos una y una, o sea, una roja y una verde.
82	María	[intenta realizar lo sugerido por su compañero]
		
83	María	[hace clic en el botón *continuar* y aparece el mensaje: mete todas las figuras verdes dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*].
84	Carlos	Otra vez, esa tarea.

85	María	[hace clic en el botón *tarea* y aparece la consigna: mete todas las figuras rojas dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic botón *continuar*].
86	María	Bueno, si fuera a meter ambas, hay un punto donde… no se puede mover el círculo.
87	Carlos	¿y si hay otro punto? No, espera, tendría que ser en el mismo lugar.
88	María	Pero no en donde está el círculo.
92	María	[arrastra las figuras hasta superponerlas]
94	María	[hace clic en el botón *continuar* y aparece el mensaje: mete todas las figuras verdes dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*].
97	P	[abre un archivo con razón de homotecia 1.5, que los devuelve a la primera tarea].
98	María	[hace clic en botón *tarea* y lee la consigna] mete todas las figuras rojas dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*. [lleva las figuras rojas al círculo].
99	María	[hace clic en botón *tarea* y lee la consigna] mete todas las figuras verdes dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*. [lleva las figuras rojas al círculo].

100	María	[hace clic en el botón *continuar* y lee la consigna] mueve el círculo y mete todas las letras dentro de él (rojas y verdes). Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*.
101	María	[arrastra todas las figuras hasta superponerlas] 
102	Carlos	[hace clic en el botón *continua*r] dale *sí* es igual a la tarea anterior.
103	P	Les voy a hacer una pregunta. Arrastre las figuras y déjelas separadas. ¿ustedes podrían decir en dónde se juntan en esa posición?
104	Carlos	[señala con la mano un lugar de la pantalla], acá, acá. 
105	María	Acá, acá [señala con la mano otro lugar de la pantalla, diferente al señalado por Carlos].

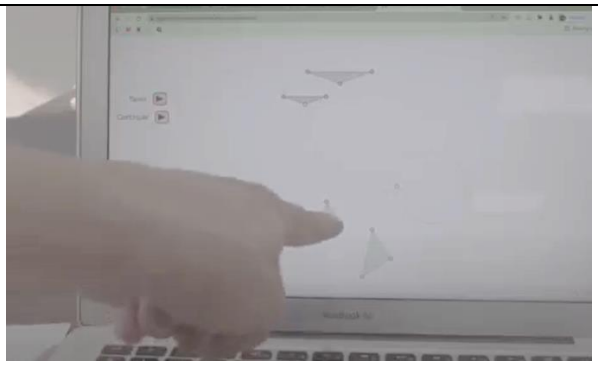
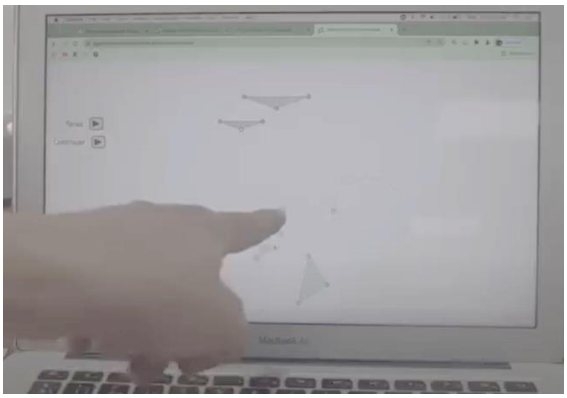
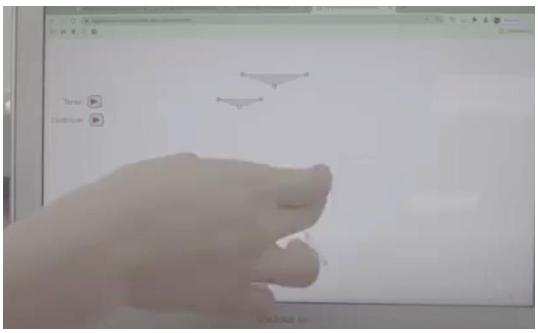
		
106	P	¿por qué allá? O ¿por qué acá? [señala con la mano las posiciones que maría y Carlos habían indicado].
107	Carlos	Profesor, porque eso tiene un movimiento por dentro.
109	María	Es como si tuviera un movimiento fijo, en el cual cuando tú tienes… está fijo… se mueve y está el punto… cuando está cerca se acercan y cuando se alejan… o sea, como uno queda a más distancia del otro [utiliza sus manos para tratar de exponer su idea]

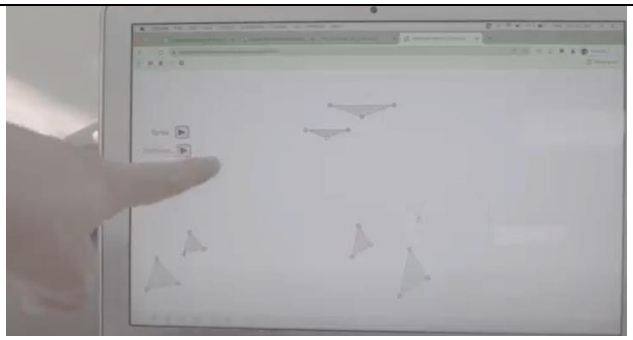
110	Carlos	Tiene como una barbita, no los puedes mover como quieres, sino que depende de este [arrastra por la pantalla una de las figuras iniciales].



111	María	[arrastra una pareja de triángulos hasta el lugar donde se superponen].
112	María	Porque tiene más distancia este.

113	P	¿pero este punto no lo puede mover donde quiera?

		
114	Carlos	O sea, el rojo sí.
116	Carlos	El verde no se puede mover por sí solo, depende del movimiento del rojo.
117	P	¡ah! Entiendo, ok. Si yo coloco el rojo por acá [señala un punto pantalla], en dónde quedaría el verde.
		
118	María	Como por acá.
		
119	P	¿por qué acá? [señala con la mano el lugar en la pantalla]

		
120	P	¿y si lo pusiera acá?
121	Carlos	Quedaría un poco más encima.
122	María	Acá.
123	P	Ok. La siguiente tarea consiste en encontrar el lugar en donde se superponen las figuras.
124	Carlos	Esta [arrastrando un par de figuras hasta el lugar donde quedan superpuestas].

125	P	Exactamente.
126	Carlos	Por eso profe, acá es donde se ponen todas juntas y toca ponerlas dentro del círculo y el círculo no se deja mover.
127	María	Dale continuar.
128	Carlos	Entonces continuamos sin resolver

En las líneas 1-15 se evidencia que los alumnos rápidamente identificaron que cada figura tiene un vértice de color blanco que permite arrastrarla y otros de color gris que no se dejan arrastrar. Permitiéndoles resolver sin problemas la primera tarea, donde debían meter los triángulos rojos en el círculo. Esto a su vez les condujo a deducir que, al arrastrar las figuras rojas, las verdes se movían y; en consecuencia, les ayudó a resolver la segunda tarea, donde debían meter las letras verdes en el círculo.

En las filas 18-48 se comprueba que, en la tercera tarea, los alumnos abandonaron la estrategia de intentar arrastrar el círculo, entendiendo que la tarea no era posible resolverla, porque el círculo estaba en una posición distinta al lugar donde las figuras se superponen y no se dejaba arrastrar. Decidieron presionar el botón *Continuar* y se ejecutó la retroacción que solicita al alumno si desea continuar sin haber resuelto la tarea, ofreciendo dos opciones: *Sí* y *No.* En efecto, los alumnos seleccionaron *sí,* inmediatamente, activando la retroacción que solicita escribir el por qué

desean continuar sin resolver la tarea. A continuación, los alumnos formularon: "*llegamos a un punto en el que las figuras estaban una sobre otra, pero no están dentro del círculo y no había o no encontramos manera de mover el círculo ya que, si la figura se movía, no quedarían una sobre otra*" (58). Además, gracias a esta última retroacción, que impide el movimiento del círculo, los alumnos entendieron que la ubicación donde se superponen todas las figuras es única (35-37).

Para la cuarta tarea, ya habían comprendido que debían mover el círculo y esto hicieron, luego de superponer las letras, aunque en principio pensaron que no se podía mover. Pero, al ver un punto sobre él, no dudaron en intentar arrastrarlo para resolver la tarea. Esto se evidencia en las líneas (64-66).

Los resultados obtenidos concuerdan con los de Pérez (2017): en primer lugar, los alumnos reconocieron la unicidad del centro de homotecia. Es decir, en el contexto de la tarea, el lugar donde se superponen todas las figuras es único. En segundo lugar, coincidieron en que las figuras verdes dependen de las rojas. Esto es, una figura se puede arrastrar y su homotética no, pero esta última se mueve al arrastrar la primera.

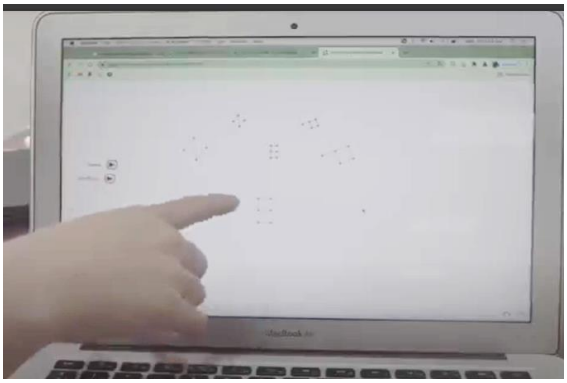
No encontramos evidencias de que los alumnos en esta primera secuencia distinguieran los dos tipos de movimientos de cada par de figuras homotéticas con respecto al centro (en el mismo sentido cuando la razón es mayor que cero o en sentidos contrarios cuando es menor que cero). Pero, sí formulan que la distancia entre las figuras correspondientes depende de la distancia de estas al lugar donde se superponen, pero sin compresión de tal dependencia.

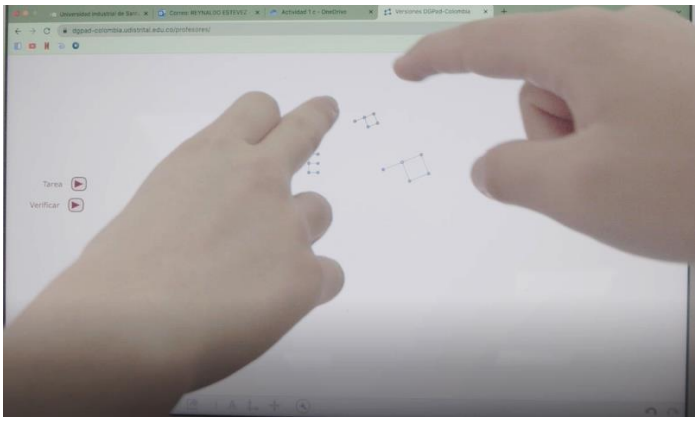
9.3 Análisis de la segunda secuencia.

Antes de iniciar el análisis, es preciso recordar que la tarea de esta secuencia consiste en anticipar la posición del centro de homotecia. Para favorecer dicha anticipación, la tarea se programó en dos momentos: en el primero se impide el arrastre de las figuras y se habilita el arrastre del círculo. Luego, en el segundo, para favorecer la validación se bloquea el movimiento del círculo y se habilita el movimiento de las figuras. En adelante, a la retroacción que impide el arrastre de las figuras le llamaremos de anticipación y a la retroacción que habilita el arrastre de las figuras la llamaremos de validación.

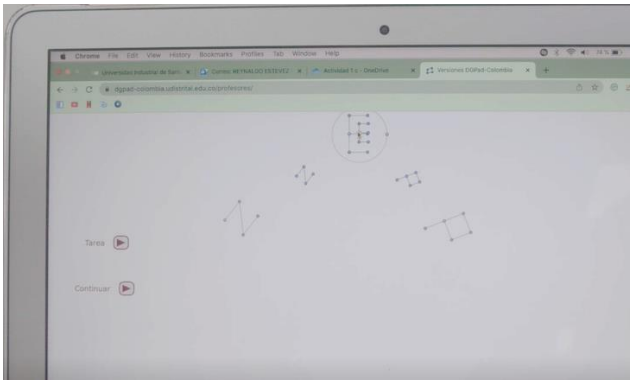
En esta secuencia de tareas los alumnos formularon que, el lugar donde se superponen las figuras depende de la posición de estas. Las retroacciones de anticipación y validación surtieron los efectos esperados. Esto es, favorecieron el reconocimiento de la alineación de cada par de figuras homotéticas y el centro, la anticipación del lugar donde se superponen y la validación. A continuación, las evidencias y el análisis.

129	Carlos	[abre el archivo de la segunda secuencia con razón de homotecia 0.5, lee la tarea] ¿en qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón *verificar*.
130	María	Ok, entonces toca moverlas.
133	María	[intenta arrastras varios puntos].
134	P	¿ya miró en qué consiste la tarea? ¿qué hay que hacer?
135	Carlos	Pues mover el círculo.
136	María	Pero primero tenemos que ver cómo se mueven.

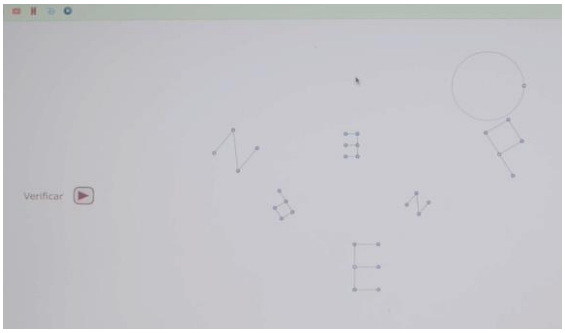
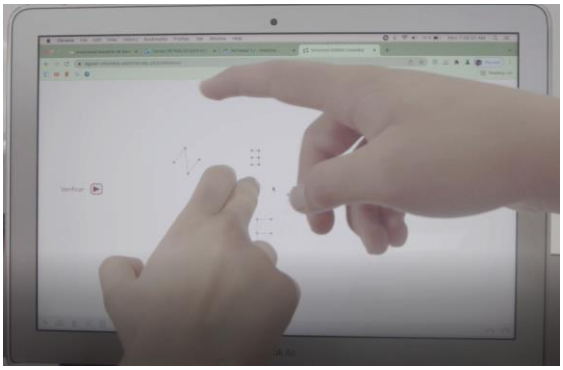
137	Carlos	Es que dependen del movimiento de las figuras.
138	P	¿entonces si no las pueden mover no pueden saber en dónde se juntan?
139	María	Sí.
140	P	¿será que no?
141	Carlos	Pues sabemos que por lo anteriores que se juntan por acá [señalando con la mano el lugar de la pantalla]. 
142	Carlos	No, pero es otro tipo, el movimiento varia profesor.
144	Carlos	No sé cómo habría manera.
145	P	Pongan el círculo en la posición donde deberían estar y presionan *verificar*.
147	Carlos	De pronto por acá [señala con la mano el lugar de la pantalla y arrastra el círculo hasta esa posición]

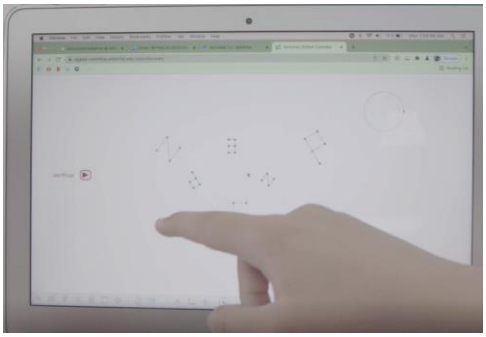


148	Carlos	Por acá, sí [hace clic en el botón *verificar* y lee la consigna] ahora mete todas las letras en el círculo y luego haz clic en el botón *continuar*.
149	P	¿presionaron *verificar*, y si estuvo ahí?
150	Carlos	Arrastra el par de letras e y las mete dentro del círculo.
151	P	¿y ahora por qué saben que es allá?
152	Carlos	Profesor por la distancia de entre las letras. Si estaba acá… si la letra estaba por acá [señalando la parte baja de la pantalla con el apuntador] la distancia es mayor, si las letras grandes están en la parte superior, la distancia es corta. Entonces tiene sentido que fuera por acá.

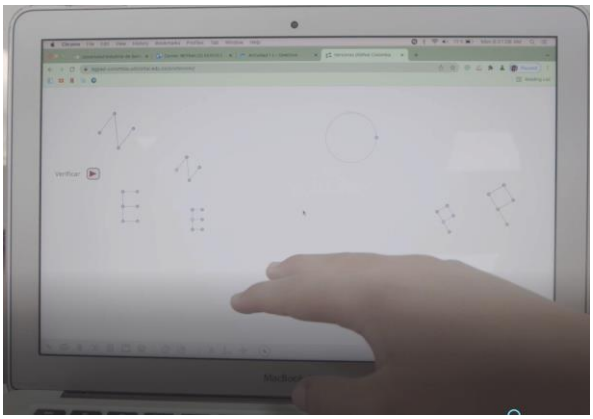


153	Carlos	Tenía sentido que entre más fuera subiendo se fueran juntando.

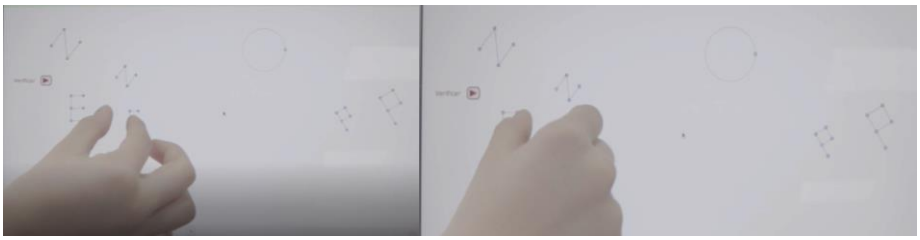
155	Carlos	Ya listo [abre un archivo con razón de homotecia -1.5 y lee la consigna] ¿en qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón *verificar*.
156	María	[lee la consigna]
158	María	De este sería por acá [señala el lugar con el apuntador]. 
159	Carlos	No, porque todas las letras se juntan en el mismo.
160	P	¡ah! Todas las letras se juntan en el mismo punto.
161	Carlos	O sea, que el movimiento es diferente, pero se juntan en el mismo lugar. Espere, entonces la distancia es como similar.
162	María	Esta es como así [señalando con la mano el lugar de la pantalla en donde cree que se juntan las letras]. 

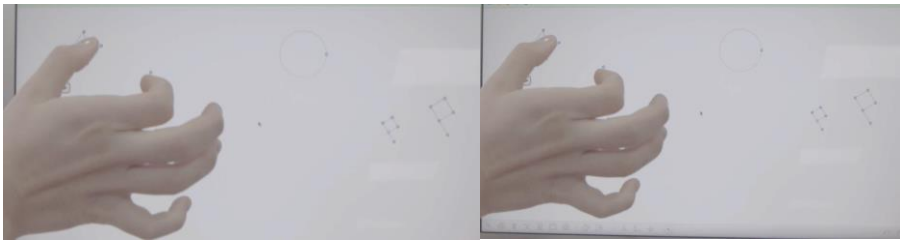
163	Carlos	No, es por acá [señalando con la mano el lugar de la pantalla]. No, espere, yo creo que es por acá [señalando con la mano el lugar de la pantalla]. Porque la distancia es mayor entre estos dos, y son los que están más lejos la letra grande [señala las letras p]. 
164	María	[arrastra el círculo a la posición donde le indicó Carlos].
166	María	[lleva el círculo a esa posición, hace clic el botón *verificar* y aparece el siguiente mensaje: ahora mete todas las letras en el círculo y luego haz clic en el botón *continuar*].
167	María	[superpone todas las figuras].
168	Carlos	¡ah! No, nos quedó mal. Profesor, nos quedó mal. No nos dejó continuar. Pusimos en círculo mal y no nos dejó continuar.
174	María	[hace clic en el botón *continuar*, aparece el mensaje: ¡algunas figuras no están dentro del círculo! Haz clic en el botón *volverlo a intentar*].
175	Carlos	¡ah! Listo, vuelve a aparecer la tarea. ¡ah! Es parecida a la anterior.
76	María	[lleva el círculo a la posición solución de la tarea anterior, da clic en el botón *continua*r y empieza a superponer las letras].
180	María	[metió todas las figuras en el círculo].

181	María	Listo, bien, otra tarea [abre un archivo con razón de homotecia 1.5].
182	María	[lee la consigna] ¿en qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón *verificar*.
183	P	¿cuál es la estrategia que están usando para encontrar el punto?
184	Carlos	Eh… pues, el primero fue más simple porque todos estaban en una posición similar. Se notaba que la letra e estaba por acá [señala con la mano en la pantalla] y la distancia era mayor a la otra. En cambio, las que estaban a otros lados era menor. Entonces pudimos referir o predecir que el círculo iba acá [señala el mismo lugar que señaló anteriormente].



186	Carlos	Pero desde la anterior están más disparejas las posiciones, es más complejo cómo saber.
187	P	¿usted tenía una idea ahorita? [le pregunta a maría].
188	María	Ahora yo pienso que era acá porque si esto se mueve [señala la letra e con la mano], esto se mueve alrededor la letra verde e [replicando su movimiento con la mano en la pantalla] entonces se moverían así [mostrando con sus movimientos de las manos].

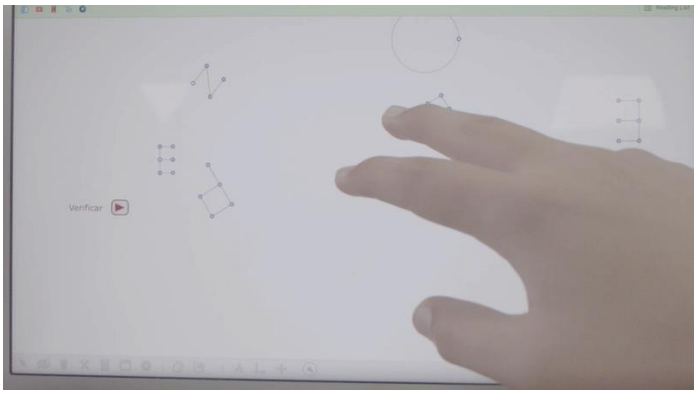




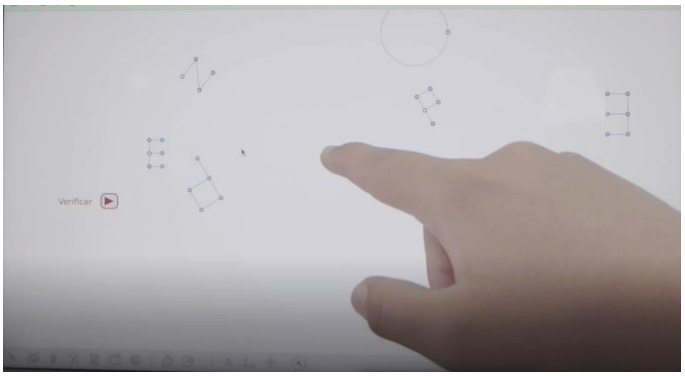
189	P	Entonces sería en donde está el cursor.
190	María	Más o menos, sí, pero no sé. Por acá [arrastra el círculo hasta esa posición]

191	Carlos	Yo pienso que eso entre más lo movamos, más se aleja, pero llega a un punto que es como la mitad y se empieza ir al otro lado. Yo creo también que es por acá [ajusta un poco más la posición del círculo].

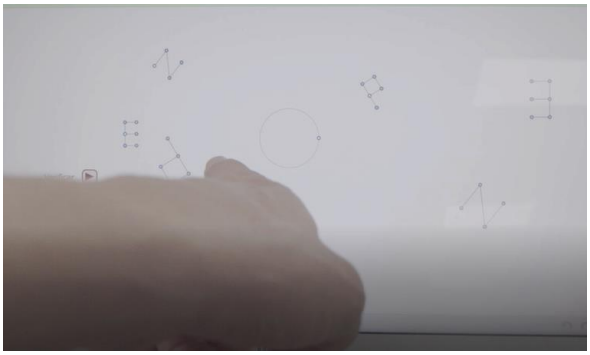
192	María	Sí, presiona el botón *verificar*.
193	Carlos	Acá, es como el que se acerca y el siguiente es el que se empieza a alejar.
194	Carlos	[superpone las figuras y quedan dentro del círculo, hace clic en el botón *continuar*, aparece el mensaje: ¡las figuras están dentro del círculo!]
196	Carlos	[abre un archivo con razón de homotecia -1.5 y lee la consigna] ¿en qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón *verificar*. Igual también debe ser por acá [señalando en la pantalla].

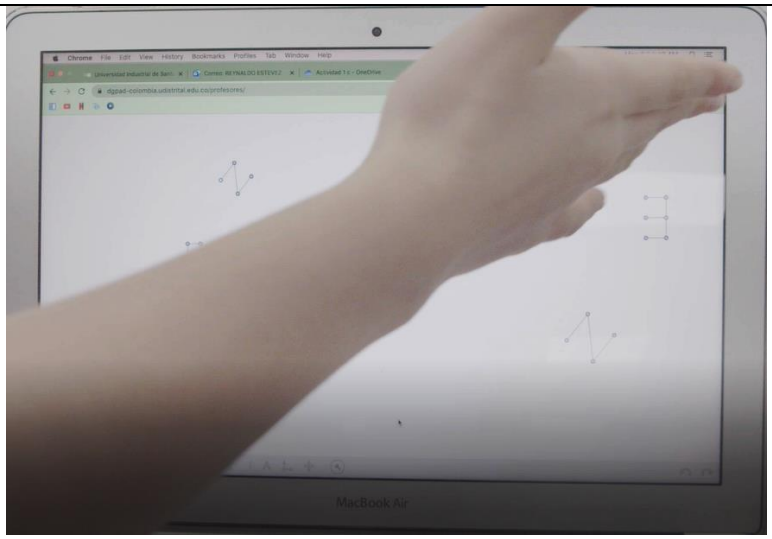


197	Carlos	Porque todas están muy lejos. Yo creo que es por acá [señalando en la pantalla]

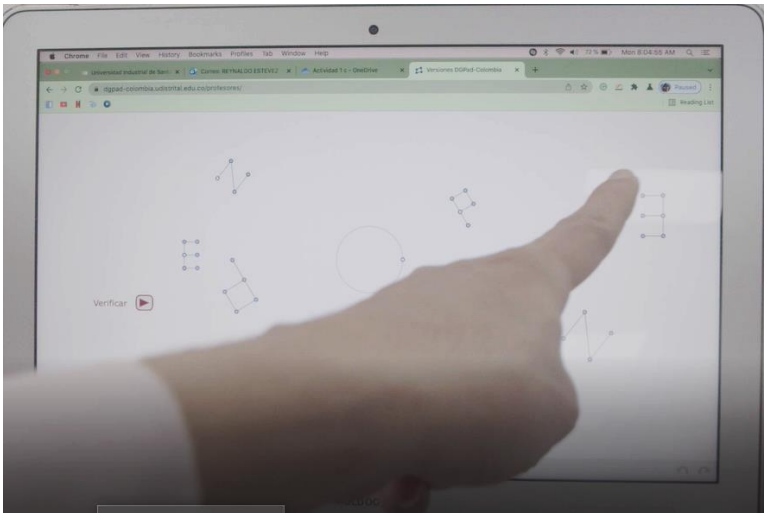


198	P	¿por qué? ¿cuál estrategia utilizó?
199	Carlos	Profesor porque lo que hicimos en la anterior. Esas letras empiezan ambas juntas entonces si uno mueve una para acá, entonces una letra se está yendo para otro lado.
200	P	¿para el otro lado? ¿siempre se movían en sentidos contrarios?
201	Carlos	Se mueven en sentidos contrarios hasta que llegan al centro y ahí se juntan, entre uno más mueve se alejan, pero uno las va acercando a ese punto central, se empiezan a juntar y después si uno se pasa entonces se mueven al otro lado.
202	P	A mí me dio la sensación de que las figuras se mueven en el mismo sentido
203	María	O sea, las figuras si se mueven en el mismo sentido, pero cambia sus distancias de una a otra.
204	Carlos	Varía, o sea, entre más lejos estén de ese punto central más lejos están las otras letras.
205	María	Pero sí, se mueven en la misma dirección.
206	Carlos	Pero también varía.

207	P	¿pero siempre varían en esa misma dirección del punto central?
208	P	Es decir, si yo desplazo esta p para acá [señalando con la mano el lugar de la pantalla]
209	P	Esta se debería desplazar para acá [señalando con la mano en la pantalla] 
210	María	No, debería… pues dependiendo de dónde esté el círculo… eh… dependiendo dónde esté el punto, iría de para allá o de para acá [expone mientras indica con las manos]

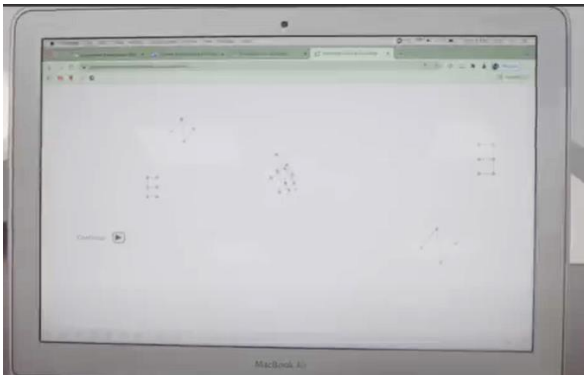


211	P	¡ah! Ok, y en este caso hacia donde iría la p si yo moviera esta para acá. ¿en dónde iría esta? [señalando con la mano el lugar de la pantalla]

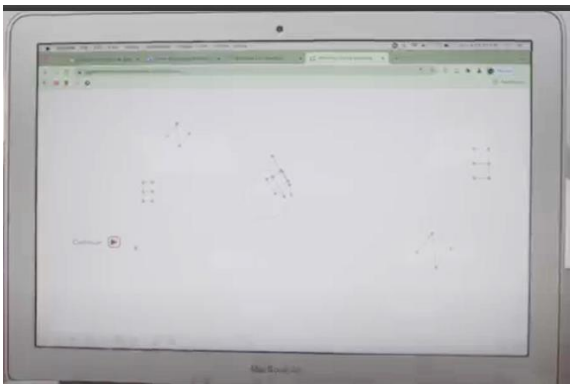


212	Carlos	Es que yo digo profesor, que se empezarían a juntar porque suben del punto central, ahí sí es como una línea.
213	P	¡ah! Como una línea

214	Carlos	En el que hay un punto como un cero entonces se mueven como los números negativos, se están alejando cada vez más, pero entre más se acerca a ese punto cero, se van acercando más las letras.
215	María	¿pero si es por acá? [llevando el círculo a una parte de la pantalla]
216	Carlos	¿por qué?
217	María	¿por qué? No sé.
218	P	Discutan entre los dos.
219	Carlos	Verifiquemos ahí para ver el movimiento.
220	María	[da clic en el botón *continuar* y lee la consigna] ahora mete todas las letras en el círculo y luego haz clic en el botón *continuar*.
221	Carlos	Yo creo que acá se empezarían a juntar.

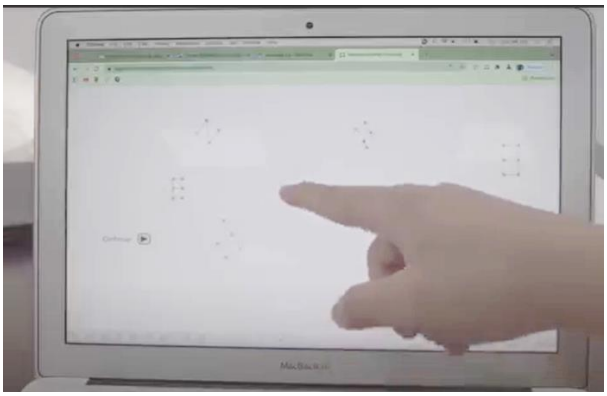


222	Carlos	Pero igual fallamos lo pusimos muy abajo.

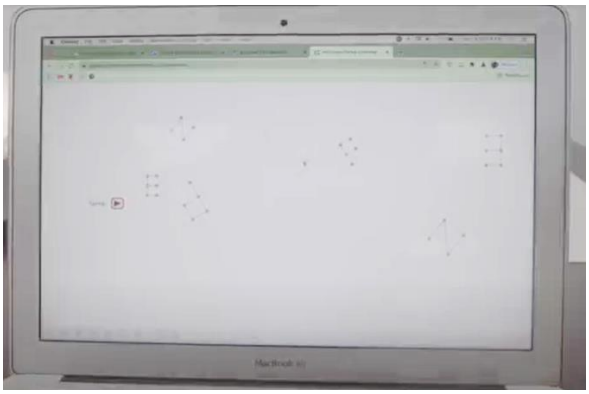


223	María	Pero entonces ven, miremos si esta la mandamos para allá [arrastra la letra p por diferentes lugares de la pantalla]

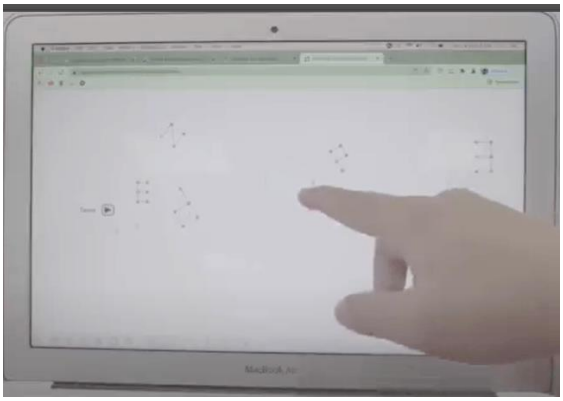
224	María	Y mira, se empiezan a juntar. Cada vez que se empiezan a juntar en ese punto [señalándolo con la mano en la pantalla].



225	Carlos	Espera, volver a intentar y colocarlo más arriba como por acá.



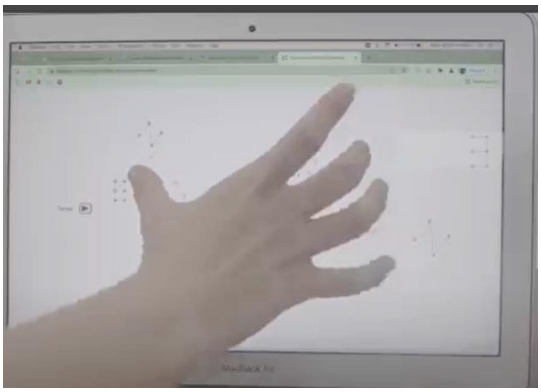
228	Carlos	Creo que tipo acá o acá.



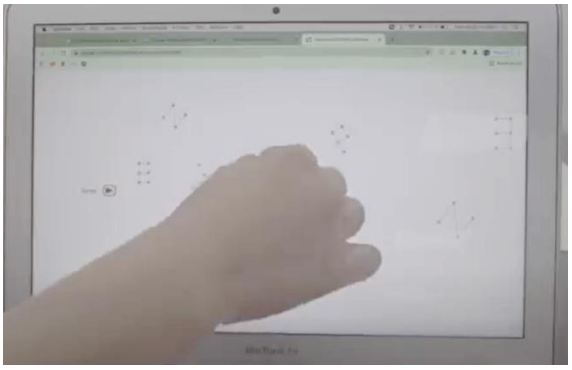
232	Carlos	Quedó por fuera, fallamos por poco la posición del círculo.

233	Carlos	[hace clic en el botón *volver a intentar*] profesor, están iguales en la misma posición, de pronto, no sé, el círculo.
237	P	¿encontraron una estrategia mejor? ¿al final qué discutieron?
238	María	Yo digo que acá, porque esto [señalando con la mano el lugar de la pantalla].

239	María	Es como la mitad de… [mide la distancia abriendo su mano en la pantalla]. No, mentiras, no puede ser la mitad porque debería estar [gestiona su estrategia con la mano]



240	María	Solo me fijo en este [señalando con la mano las letras p].

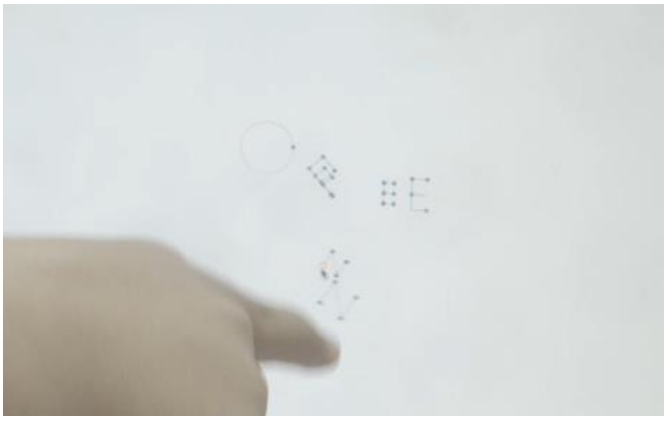


241	P	Usted entendió la idea de maría [le pregunta a Carlos]

242	Carlos	Sí profesor, más o menos, que no siempre es la misma distancia profesor, no siempre es la mitad de las letras. Dependiendo de las distancias de las letras. A ver, si mueve la letra pequeña un poco, la letra grande se mueve más, no va a ser como un punto entre las dos sino más cerca a la grande, no sé.
243	P	Bueno se nos agotó el tiempo, pero estas ideas las vamos a seguir discutiendo, porque me parece interesante, ya están buscando una estrategia para buscar ese punto y de eso se trata [termina la sesión].
244	P	[inicia otra sesión]. Yo les tenía unas preguntas… ¿se acuerdan que ustedes ayer decían que las figuras se movían de alguna manera?
249	María	Había un puntito blanco.
250	Carlos	Ajá, que tenían las esquinas rellenadas, entonces cuatro de las esquinas, digo tres de un cuadrado eran como grises y una era blanca, entonces podías mover la blanca.
251	P	¿pero ahí no las puedes mover cierto?
252	María	No, porque nos están pidiendo otras cosas.
253	María	[abre un archivo con razón positiva, hace clic en el botón *tarea* y lee la consigna] ¿en qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón *verificar*. No

254	Carlos	Ahí se mueve el círculo.
255	P	¿luego de verificar las pueden mover?
256	María	Sí señor, ahora sí toca meterlas todas.
257	P	Ahora sí, muévalas todas.
258	María	Entonces de donde esté el punto [intenta meter todas las letras en el círculo]
259	P	No se preocupe por meterlas, sino por moverlas, ustedes me decían que estaban tratando de encontrar una forma de poder encontrar esa posición, donde poner el círculo.
260	Carlos	Sí.
261	P	Entones sepárelas y solo mueva una sola letra.
262	María	¿cómo así?, ¡ah! Ya.
263	P	Y quiero que observen el movimiento ustedes y me digan… ¡ah!, tengo esta idea así. Es ese el propósito de la actividad.
264	María	[arrastra por diferentes lugares de la pantalla una figura].

265	Carlos	Bueno, entonces yo lo que digo es que hay como un punto, no tiene que ser en el centro (se refiere al punto medio entre ambas figuras), en que las letras la grande y la pequeña se juntan, entonces en donde uno más se aleja de ese círculo con la letra entonces las letras se alejan entre ellas por ejemplo [señalando con la mano el lugar de la pantalla].



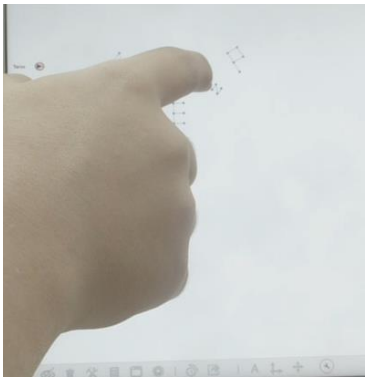
266	Carlos	Pues entre uno más se acerque a ese punto, más se juntan.
268	María	[arrastra el círculo hasta la posición que cree es la solución].
272	María	[superpone las figuras].

273	Carlos	[hace clic en el botón *continuar* y lee la consigna] ¡las figuras están dentro del círculo!
276	P	No vamos a repetir toda la actividad [les muestra un archivo que habían trabajado la sesión anterior, con razón de homotecia menor que cero]. Quiero que muevan las letras y me digan si tiene el mismo comportamiento de las de ahorita.
277	María	Esa es la misma tarea [lee la consigna] ¿en qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón verificar.
278	Carlos	Pon verificar [le dice a maría].
279	María	[hace clic el botón *verificar*].
280	Carlos	[lee la consigna] ahora mete todas las letras en el círculo y luego haz clic en el botón *continuar*.
281	María	[arrastra las letras] se mueve en opuesto.
282	Carlos	Sí, como movimientos opuestos el del círculo, o sea, el del punto central de la letra. El trayecto cuando llegas al punto, lo mueves para acá y la letra se mueve para el opuesto.
283	P	¿ustedes dicen central porque están en el centro de las figuras?

284	Carlos	Porque es lo misma analogía de ayer, es una línea.
285	P	¿una línea?
286	Carlos	Entonces si uno lo mueve, si mueve la letra por acá, con el otro se hacía más larga la distancia.
287	P	Podría señalarlo en la pantalla.
288	Carlos	Sí. Por ejemplo, esa es la posición [señala con la mano el punto en la pantalla].
289	P	Bueno, por ejemplo, si yo moviera la n hacia la esquina para dónde se movería esta.
290	Carlos	En este caso hacia la izquierda, porque el movimiento es distinto al anterior.
291	María	Porque antes se iban las dos se alejaban iban juntas.
292	Carlos	Iban una y una
293	P	¿en el mismo sentido?
294	María	Sí.

295	P	Por ejemplo, ahí… ¿dónde deberían ubicar el círculo?
296	María	Aquí [arrastra el círculo]

297	P	¿allí?
298	Carlos	Sí.
299	P	Piénsenlo bien, discútanlo.
300	María	Mueve el círculo.
301	P	Por ejemplo, ahí.
302	Carlos	[responde señalando en la pantalla].



303	María	Aquí [arrastra el círculo hasta esa posición]
304	Carlos	Más o menos, sí.
305	P	¿allí? Piénsenlo bien.
306	María	[arrastra el círculo hasta donde Carlos le indica].

307	María	[superpone las figuras fuera del círculo, pero cerca].
308	Carlos	Fallamos por poco
309	María	[hace clic en el botón *volver a intentarlo* y se reinicia la tarea].
310	María	[señala con el apuntador la posición que considera solución].
311	Carlos	[señala con la mano el mismo lugar que maría].
312	María	Verifica la solución y es correcta.

Inicialmente los alumnos formularon que el lugar donde se superponen las figuras depende de la distancia entre estas. Conocimiento alcanzado durante el desarrollo de la primera secuencia y reiterado en esta, la segunda.

Carlos por su parte, resolvió la tarea con razón 0.5, con una idea poco precisa: entre más cerca estén las letras más cerca del lugar donde se superpone estarán. Carlos expuso su idea como

sigue: “profesor por la distancia de entre las letras. Si estaba acá… si la letra estaba por acá, la distancia es mayor, si las letras grandes están en la parte superior, la distancia es corta. Entonces tiene sentido que fuera por acá” (152). Consideramos que la estrategia contiene aspectos perceptivos que no fueron explícitos, principalmente porque no basta con esta idea para resolver la tarea. Veamos cómo al repetir la tarea, los alumnos formularon más conocimientos.

Al pasar a la tarea con razón -0.5, maría intentó anticipar la posición del centro de homotecia, considerando el par de letras e; asumiendo que la razón era mayor que cero, señaló su solución con el cursor: “de este sería por acá” (158), indicando una posición que se encuentra al mismo lado de ambas letras e. Carlos, por el contrario, teniendo en cuenta que el lugar donde se superpone cada par de letras es el mismo, propuso: “no, porque todas las letras se juntan en el mismo” (159). Finalmente, ambos lograron anticipar la posición del centro de homotecia sin una estrategia clara. En este momento el profesor intervino con un acto de devolución, fundamental para que intentaran explicitar la estrategia: “¿cuál es la estrategia que están usando para encontrar el punto?” (183). La respuesta por parte de Carlos no fue muy clara: “pues, el primero fue más simple porque todos estaban en una posición similar. Se notaba que la letra E estaba por acá y la distancia era mayor a la otra. En cambio, las que estaban a otros lados era menor. Entonces pudimos referir o predecir que el círculo iba acá” (184). Sin embargo, es la primera evidencia de que distingue las configuraciones con razón mayor y menor que cero. Por su parte maría propuso: “ahora yo pienso que era acá porque si esto se mueve, esto se mueve alrededor la letra verde entonces se moverían así” (188). Sus gestos con la mano evidencian que su estrategia consistió en imaginar una figura dirigiéndose hacia la otra en línea recta, lo que conduce a una utilización indirecta de la alineación de las figuras con el centro, no porque reconociera esta propiedad claramente, sino porque su interés era superponer las letras.

Al cambiar a razón -1.5, se hizo más evidente que discriminaron las tareas con razón negativa de las otras y, en menor grado, el uso de la alineación; aunque en principio no lo manifestaron claramente. Por ejemplo, en la fila 197 señaló acertadamente la posición del centro de homotecia con la mano, mientras el profesor en un acto de devolución solicitó que exponga su estrategia (198). En consecuencia, Carlos propuso: "profesor porque lo que hicimos en la anterior. Esas letras empiezan ambas juntas entonces si uno mueve una para acá, entonces una letra se está yendo para otro lado" (199). Prosiguió diciendo: "se mueven en sentidos contrarios hasta que llegan al centro y ahí se juntan" (201). Luego de que el profesor empezó a preguntar hacia dónde se movería la p roja al mover la p verde a los lugares señalados por él en la pantalla (208-211), Carlos sugirió: "es que yo digo profesor, que se empezarían a juntar porque suben del punto central, ahí sí es como una línea" (212). "en el que hay un punto como un cero entonces se mueven como los números negativos, se están alejando cada vez más, pero entre más se acerca a ese punto cero, se van acercando más las letras" (214). Fue la primera vez que formularon la alineación verbalmente; asociando además cada figura con un número de dicha recta y el cero con el punto donde se superponen. Este conocimiento se reforzó conforme repitieron las tareas, así como la formulación de este.

En la siguiente sesión, el profesor retomó la tarea de anticipación y propuso algunas preguntas relativas al movimiento de las figuras y a la estrategia que usaron para anticipar la posición del centro de homotecia (244-312). Consideramos que esta disertación entre los alumnos y el profesor permite corroborar algunos hechos importantes. En primer lugar, que formularon verbalmente la dependencia entre las figuras, cómo identificaban los puntos que se pueden arrastrar y los que no. Así como la relación entre las distancias de las figuras al centro. Por ejemplo, cuando maría dijo: "*había un puntito blanco*" (249) y Carlos complementó "*ajá, que tenían las*

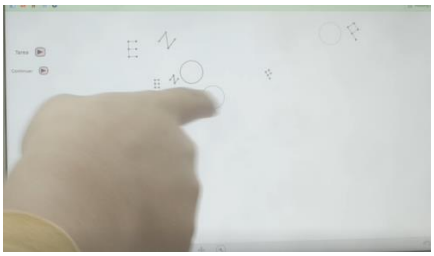
esquinas rellenadas, entonces cuatro de las esquinas, digo tres de un cuadrado eran como grises y una era blanca, entonces podías mover la blanca" (250), da cuenta de que reconocen la dependencia entre las figuras y que no cualquiera de sus vértices se deja arrastrar. Cuando Carlos manifestó que, "*entonces yo lo que digo es que hay como un punto, no tiene que ser en el centro, en que las letras la grande y la pequeña se juntan, entonces en donde uno más se aleja de ese círculo con la letra entonces las letras se alejan entre ellas por ejemplo*" (265), da cuenta del reconocimiento del centro de homotecia y su relación con las distancias entre las figuras y sus distancias a este. Siendo este un primer paso para que reconozcan la relación de proporcionalidad entre esas distancias. También se vuelve a formular verbalmente la alineación: "*porque es lo misma analogía de ayer, es una línea*" (284).

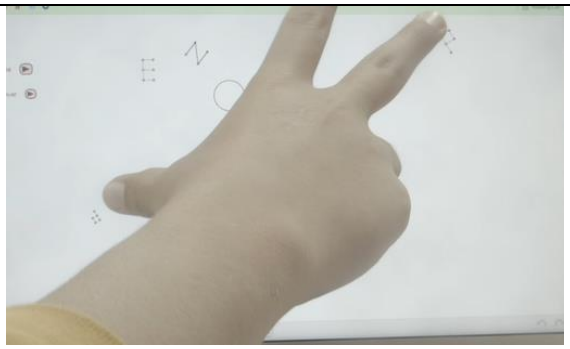
En el desarrollo de estas tareas jugaron un papel muy importante tanto los actos de devolución del profesor como las retroacciones didácticas. En primer lugar, la retroacción fomentadora de anticipación, que inicialmente impide el movimiento de las letras y permite el movimiento del círculo, favoreció la necesidad de refinar la estrategia para encontrar el lugar donde se superponen las figuras y por ende condujo al reconocimiento de la alineación de cada par de figuras homotéticas y el centro. En segundo lugar, la retroacción fomentadora de validación, que habilitaba el arrastre de las figuras y bloqueaba el arrastre del círculo, no solo la usaron para validar, como se esperaba. También les ofreció un espacio para experimentar y encontrar una relación entre las figuras y el centro de homotecia, mediante el arrastre y observación continua del movimiento.

9.4 Análisis de la tarea de ayuda

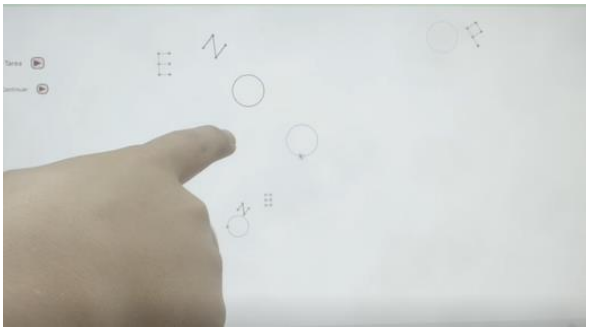
Por motivos de programación de DGPad durante el desarrollo de la tarea de anticipación, no se pudo programar un dispositivo que ofreciera la tarea de ayuda de manera directa. De modo que el profesor la sugirió cuando consideró necesario. Esta tiene dos momentos: en el primero se les pide meter un par de letras E dentro de un círculo, con el objetivo de resaltar la posición del centro de homotecia y, en el segundo se les solicita meter las letras N y P en los círculos del color correspondiente. A continuación, para hacer énfasis en la alineación entre cada par de figuras homotéticas y el lugar donde se superponen, se muestran dos bandas a lo largo del centro de homotecia y cada par de figuras homólogas no superpuestas. A continuación, presentamos los datos experimentales:

313	P	¡fantástico! Vamos a hacer una cosa [les abre otro archivo]. Esta es una tarea de ayuda, en ella van a buscar una estrategia para buscar el punto donde deben poner el círculo, ese punto que hemos buscado en la tarea anterior [abre la tarea de ayuda, con razón 1.5].
314	Carlos	[Hace clic en el botón *tarea* y lee la consigna] mete las letras E verde y E roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón *continuar*.
315	María	[lee la consigna] mete las letras E verde y e roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón *continuar*.
316	P	Si olvidan la tarea, saben que tiene que presionar otra vez el botón *tarea*.
317	María	[empieza a realizar la tarea y arrastra el círculo por la pantalla].
318	Carlos	No, acá de pronto [señala con la mano en la pantalla el lugar].

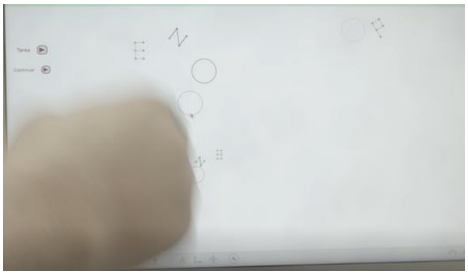
319	Carlos	Porque quedan alineados.
320	P	¿cómo? ¿qué dijo?
321	Carlos	De pronto por acá, porque dan alineados. 
322	P	¿deben quedar alineados?
323	Carlos	Ajá, porque si lo pones acá, el trayecto no debe ser el mismo.
324	P	¿está de acuerdo? [le pregunta a maría].
325	María	Sí, de acuerdo.
326	María	[hace clic en el botón *continuar* y lee la consigna] ¡algunas letras no están dentro del círculo!
331	María	[abre un nuevo archivo con razón -0.5 y lee la consigna] mete las letras E verde y E roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón *continuar*.
332	Carlos	Estas son las que se mueven opuestas, deben ser de las que quedan alineadas [mostrando la alineación con sus manos en la pantalla]



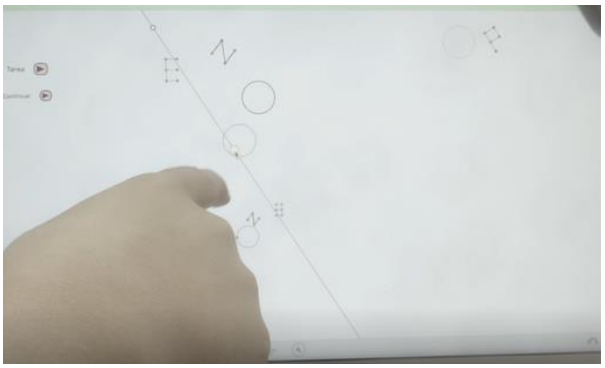
333	Carlos	O sea, que todas quedan en la mitad de ambos trayectos [señalando con la mano el lugar de la pantalla, la segunda posición]

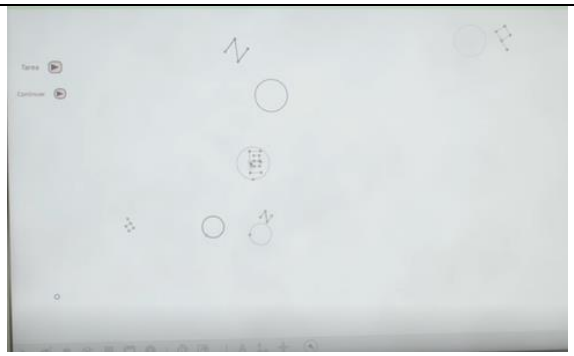
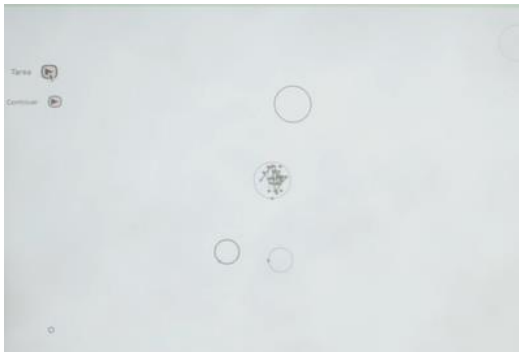


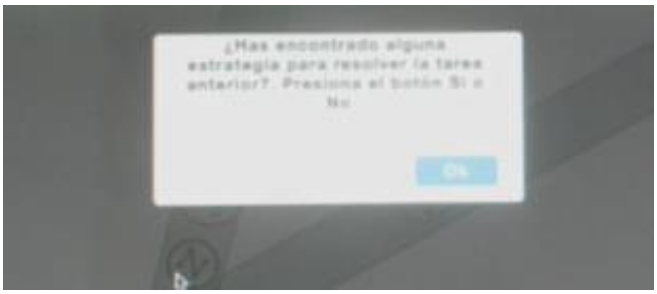
334	Carlos	Por acá todos como cruzan por el círculo. Sí.
335	María	¿en dónde está?
336	Carlos	Yo digo por acá, porque puedes pasar una línea y pasa por acá [señala en la pantalla].



337	María	[lleva el círculo a una posición señalada por Carlos].
338	P	¿quieren pasar una línea?

339	Carlos	Sí, profesor.
340	P	Aquí hay una herramienta, para construir rectas, seleccione el apuntador. Listo ahora tóquelo ahí está la segunda opción sin soltarlo.
341	María	[selecciona la herramienta *construir/mover*]
342	P	Allí. Y haga clic en el punto donde quiera trazar una línea.
343	María	[construye un punto y hace clic en él, seleccionando *recta* en la paleta de herramientas emergente].
344	Carlos	Que pase por la E, que pase por la N y la P, ponerlo en una posición donde se cruzan las rectas [le dice a maría].
345	María	[construye una recta y la ajusta hasta que quede sobre las letras E y ubica el círculo sobre la recta]… ¿bueno y entonces? [borra la recta que había construido]. 
346	P	¿no le gustó la idea de la línea?
347	Carlos	No profesor, creo que lo podemos ver sin la recta.
348	María	Sí, sí.
349	Carlos	[superpone las letras e y arrastra el círculo hasta esa posición].

		
350	Carlos	[hace clic en el botón *continuar* y lee la consigna] ahora mete las letras N y P dentro de los círculos de su respectivo color.
353	P	Presione el botón tarea, porque está mal interpretando la tarea [superpusieron las figuras y las metieron en uno de los círculos]. 
354	P	¿ahora no lo muestra?
355	Carlos	No profesor.
356	P	Vuelvan abrir el archivo.
357	Carlos	[abre el archivo hace clic en el botón *continuar*, lee la consigna] mete las letras E verde y e roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón *continuar*.
370	María	Miremos cuál es el que llega a ese.

371	P	Podría explicar nuevamente la estrategia que está utilizando para ubicar el círculo.
372	Carlos	Entonces da igual, como el movimiento de las letras… pero la idea es que, si uno tiene que mover el círculo para poner ambas deben estar alineadas todas, o sea, que todas tengan una línea recta que llegue al círculo. [mete las letras en los círculos de su respectivo color].
373	P	¿y por qué no mete la p en el círculo verde?
374	Carlos	Porque dice el respectivo color.
375	P	Por eso, la P verde la podría meter en el círculo verde.
376	Carlos	No, porque el rojo no se deja mover.
377	Carlos	[presiona el botón *continuar* y lee la consigna] ¿has encontrado alguna estrategia para resolver la tarea anterior? Presiona el botón *sí* o *no*. 
378	Carlos	[presiona ok y se muestra las bandas que aparecen en la imagen]

		[observa la pantalla y dice]: es lo mismo que estaba diciendo, como una línea recta.
379	P	¿usted ve una línea recta?
380	Carlos	Sí.
381	María	Sí.

María inició arrastrando el círculo azul por la pantalla (317), seguramente porque pensó que las letras e, que debía meter en dicho círculo, no se podían arrastrar. También Carlos pensó lo mismo, evidenciado cuando expresó: *"acá de pronto. Porque quedan alineados"* (318, 319). Esto es, trató de anticipar la posición donde las figuras se superponen, formulando una vez más la alineación, sin intentar arrastrar las letras. Ante la pregunta del profesor: *¿deben quedar alineados?* (322), Carlos responde afirmativamente (323) y maría dice estar de acuerdo (325).

Luego de que el profesor les indicó cómo construir una recta, maría dibujó una y la ajustó hasta que quedara sobre el par de letras E, pero no sobre puntos homólogos (340-345). Esto es, hasta este momento los alumnos reconocían la alineación de manera global, pero no puntualmente. Sin embargo, al percatarse de que las letras E se podían arrastrar, borraron la recta y abandonaron esta idea (345-349).

Al concluir este primer momento (meter el par de letras E dentro del círculo azul), rápidamente metieron los otros dos pares de figuras dentro de los círculos de su respectivo color y al presionar el botón *Continuar,* se ejecutó la retroacción didáctica que muestra las bandas verdes. Ante esta retroacción, Carlos exclamó: "*es lo mismo que estaba diciendo, como una línea recta*" (378).

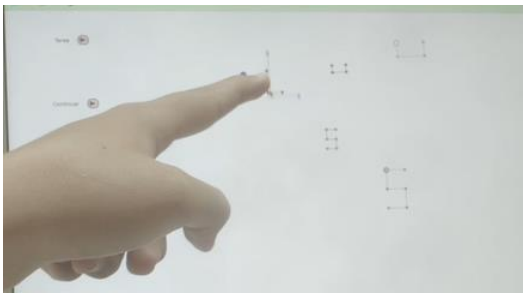
Con esta tarea se logró que los alumnos reforzaran su estrategia de anticipación de la posición del centro homotecia y formularan la alineación utilizando la herramienta recta.

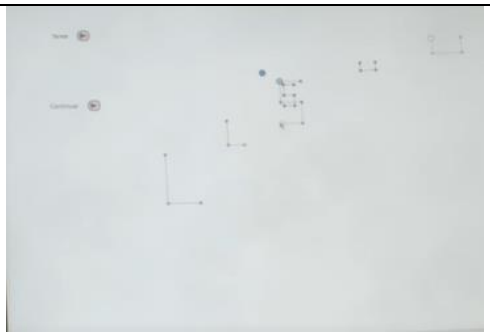
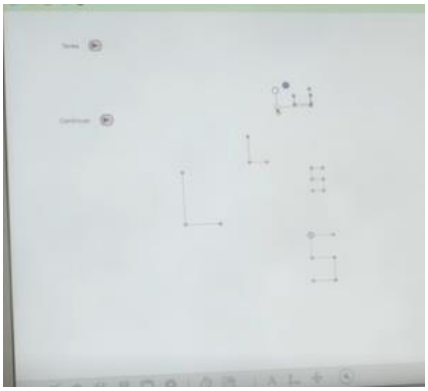
9.5 Análisis de la tercera secuencia

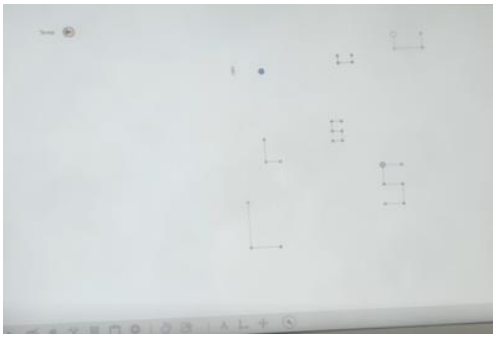
Esta secuencia consta de una sola tarea, en la que esperamos que los alumnos no traten las figuras de manera holística, sino que, sean consideradas puntualmente. Esto es, la figura está constituida por puntos, cada uno tiene un correspondiente (homotético) y estos a su vez, están alineados con el centro de homotecia. Con este propósito, para esta tarea se exige una precisión tal que sea imprescindible utilizar pares de puntos homotéticos y su alineación con el centro para resolverla. Por ello, en lugar de pedir meter las figuras dentro de un círculo, se solicita ubicar un punto azul en el lugar donde se superponen. A continuación, exponemos los datos experimentales.

382 P [abre la tarea de la tercera secuencia, razón positiva].

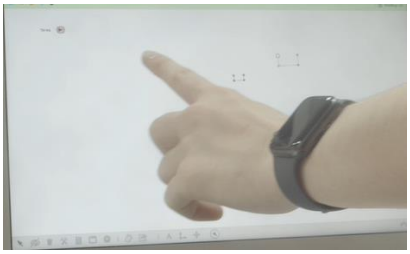
383	Carlos	[lee la consigna] ubica el punto azul en la posición donde las letras se superponen, cuando creas que has terminado haz clic en el botón verificar.
385	Carlos	Sí, por eso, que esta letra quede por dentro de esta (refriéndose a que las letras s quedarían superpuestas) [lleva el punto azul donde cree que es la solución].
386	Carlos	[hace clic en el botón verificar] pero uno mueve acá [superponiendo las letras L]… está mal.
387	P	Podría juntar otro par de puntos de las letras L, no solo ese par.
388	María	No.
389	Carlos	Sí.
390	P	¿en dónde se juntan los otros?

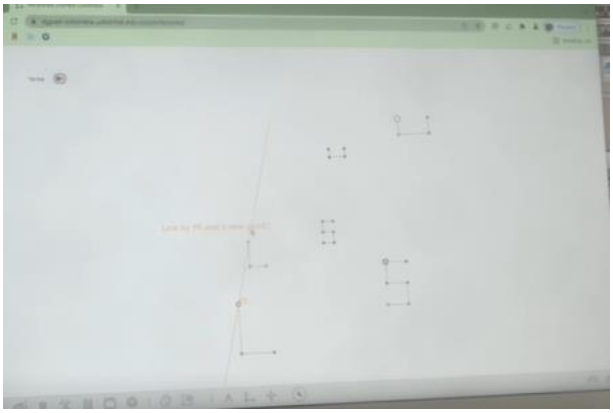
391	Carlos	Aquí juntando otros puntos de las letras.
392	P	¿en lugares distintos?
393	Carlos	Pero se juntan otro par de puntos.
394	P	¿pero en lugares distintos de donde se juntaban el otro par?
395	Carlos	Claro porque está juntando.
396	P	Ponga el dedo en la pantalla donde se junta un par de puntos de esta figura.
397	Carlos	Estos dos (un par de puntos correspondientes de las letras L) se juntan acá [señalando con la mano el lugar de la pantalla] 
398	P	Ahora junte los otros.
399	Carlos	[arrastra las figuras hasta que se juntan diferentes puntos] ¡ah! ¡no! Sí es el mismo.
400	P	¿la C o la S?
401	Carlos	[arrastra por la pantalla las letras S hasta que uno de sus puntos se superpone].

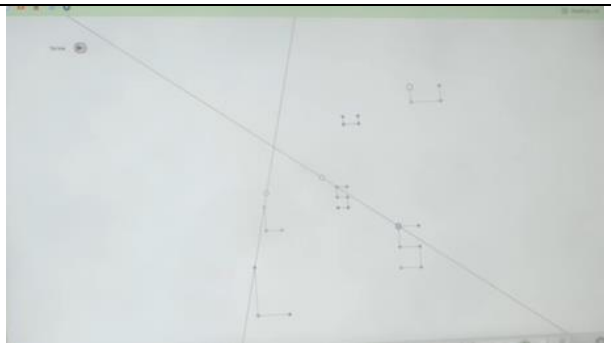
		
402	P	¿es otro punto?
403	Carlos	No, es el mismo [arrastra la letra s para superponer diferentes pares de puntos correspondientes de esta].
404	Carlos	Y es igual con este [refiriéndose a la letra C. Ubica el punto en una posición cercana a la solución, pero no con la precisión requerida. Luego arrastra la C hasta superponer un par de puntos correspondientes de esta]. 
407	Carlos	[hace clic el botón continuar y lee la consigna] se junta cada par de puntos correspondientes en el lugar donde ubicaste el punto azul?, si no es así presiona el botón *volverlo a intentar*.
408	Carlos	[presiona el botón *volver a intentar* y lee la consigna] ubica el punto azul en la posición donde las letras se superponen, cuando creas que has terminado haz clic en el botón *verificar*.

409	Carlos	[coloca el punto donde cree que es la solución]. 
410	Carlos	Como ponerlas más pegadas [hace clic en el botón *continuar*].
411	Carlos	Te parece [entregándole el ratón a maría, para que resuelva la tarea].
412	Carlos	*Verificar* [sugiere a maría hacer clic en el botón *verificar*].
413	María	[hace clic en el botón *verificar* y aparece la consigna] ahora junta cada par de puntos correspondientes, para verificar la solución. Luego haz clic en el botón *continuar* [arrastra las letras L hasta superponerlas].

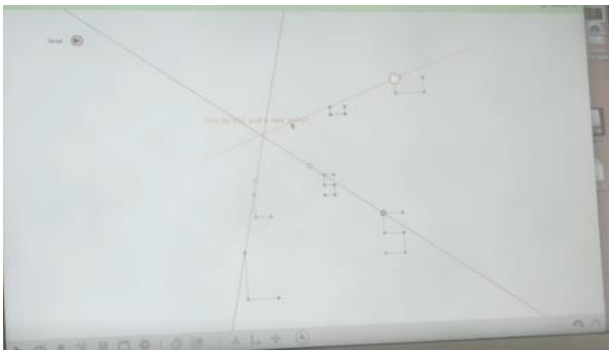
414	María	[hace clic en el botón *continuar*, aparece la consigna: ¿se juntan cada par de puntos correspondientes en el lugar donde ubicaste el punto verde? Si no es así presiona el botón *volver a intentarlo*]
415	María	[arrastra las letras S].
416	Carlos	Sí, más pegada [refiriéndose que les faltó más precisión].
418	Carlos	Sí profesor, acá varía, porque antes era más fácil, porque el círculo era de mayor tamaño.
420	Carlos	En cambio, acá es un punto, es como más preciso.
421	P	¿cómo podría mejorar esa precisión?
422	Carlos	Trazando las líneas.
423	María	[sigue arrastrando las letras cerca de donde se superponen]
424	P	¿trazando las líneas? Ya saben cómo hacerlo.
425	Carlos	Sí profesor.
426	P	Debería maría manejar el ratón.
427	María	[toma el ratón y empieza a mover las figuras en la pantalla].
428	Carlos	Las figuras se mueven en diagonal, es distinto.
429	María	Es por aquí [señala con el puntero y lleva el punto a esa posición].

430	Carlos	Acá no es tan fácil, no están tan alineadas, no es tan fácil.
431	P	¿no están alineadas?
432	Carlos	No creo que salga el punto si sale entre los dos.
433	María	[intenta mover las figuras, pero no se dejan].
434	P	Para poderlos mover tiene que presionar *verificar*.
435	María	¡ah! Ok [presiona el botón *verificar* y lee la consigna]. Ahora junta cada par de puntos correspondientes, para verificar la solución. Luego haz clic en el botón *continuar*.
436	Carlos	El de acá [indicándole cuál es el punto que se deja arrastrar]
437	María	Hace clic en *volver a intentarlo*.
438	Carlos	[toma el ratón y empieza a buscar la solución. María le da indicaciones señalando con el dedo en la pantalla].
		
439	P	¿por dónde quiere pasar la recta? Si quiere pasar la recta por un punto…

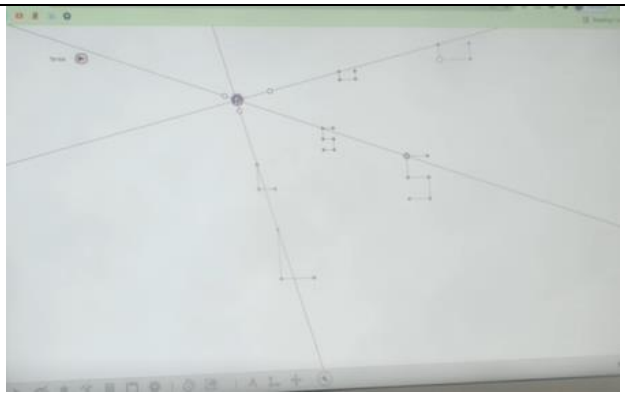
440	Carlos	La idea que tenía era pasarla por las figuras.
442	Carlos	O sea, no están alineadas.
443	P	¡ah! No.
444	Carlos	Uno puede trazar por acá o de pronto…
445	P	Allí está la herramienta recta, seleccione un punto y no la suelte.
446	Carlos	[construye una recta por un punto de la l imagen y otro punto libre, ajustándola hasta que pase por el punto correspondiente de la L preimagen]. 
447	P	¿por qué la traza allí?
448	Carlos	Porque conecto ambos puntos en las mismas figuras [construye una recta por un punto de la S imagen y otro punto libre, ajustándola hasta que pase por el punto correspondiente de la S preimagen].



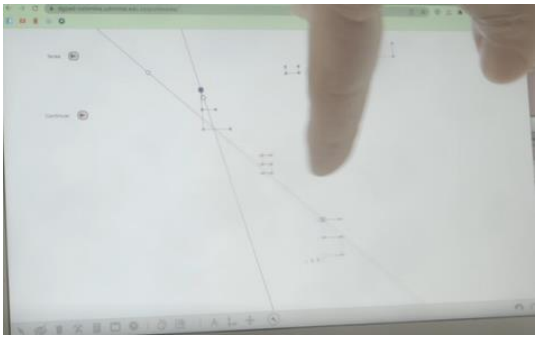
449	Carlos	Pues se supone que en el lugar donde se cruzan, ahí debería ir el punto [construye una recta por un punto de la c imagen y otro punto libre, ajustándola hasta que pase por el punto correspondiente de la c preimagen].



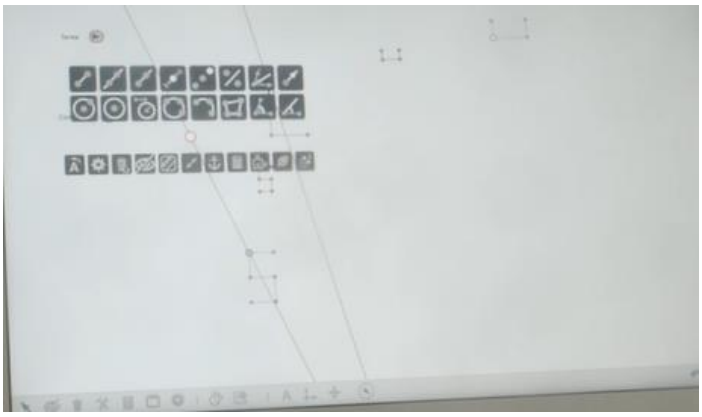
450	Carlos	Ubica el punto azul donde se intersecan las rectas. [la solución es correcta, pero hubo un error en la programación que no permitió la validación, dado que el botón correspondiente no se hizo visible].



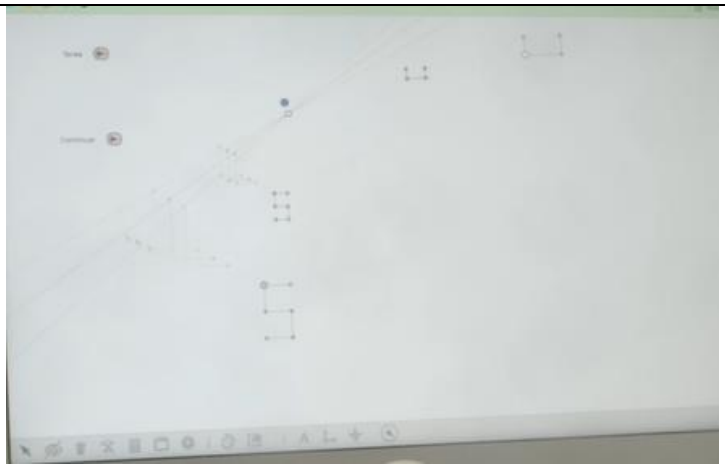
451	Carlos	[se corrigió el error, se reinició la tarea, construye una recta por un punto de la S imagen y otro punto libre, ajustándola hasta que pase por el punto correspondiente de la S preimagen. También construye otra que pasa por un par de puntos correspondientes de las letras L, hace clic en el botón *verificar* y lee la consigna] ahora junta cada par de puntos correspondientes, para verificar la solución. Luego haz clic en el botón *continuar*.
452	P	Pero qué pasa cuando mueve la figura.
453	Carlos	También se mueve la línea [arrastra una letra s].
454	P	Ahí. ¿qué pasó? [mostrándole con la mano el lugar de la pantalla].

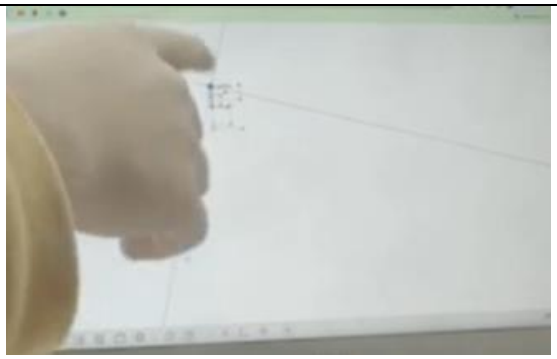


455	Carlos	Pues que la línea se movió con el punto que yo puse entonces ya no está conectando ambos puntos [la recta no permanecía sobre dos puntos homotéticos de las letras s al arrastrar la figura].
456	P	¿cómo sería para conectar ambos puntos?
457	Carlos	Conectar la línea.
458	P	¡ah! Ok, hágalo.
459	Carlos	[construye un punto nuevo, traza una recta por él y un punto de la S imagen y la arrastra para ajustarla hasta que quede sobre el punto correspondiente de la letra s preimagen].
460	P	Pero no con ese punto, porque cuando vuelva a mover la letra se desconecta.
461	Carlos	[mueve la S preimagen y la recta no permanece sobre ella].



462	P	¿la otra figura no se sale?
463	Carlos	[mueve la l preimagen y permanece sobre dos puntos correspondientes].

		
465	Carlos	[construye una recta que pasa por dos puntos homólogos y al arrastrar permanece unida a esos dos puntos].
466	P	Arrastre a ver… ahora sí [complementa luego de que Carlos arrastra las figuras y la recta resiste el arrastre].
467	P	¿cuáles serían sus conclusiones?
469	P	…de las tareas, cómo encontramos el punto donde las figuras se superponen y en donde cada par de puntos correspondientes coinciden.
470	Carlos	Entonces, como las letras son las mismas lo que varía es el tamaño entonces si tienes una S, la esquina de la derecha… puedes conectar una línea de ese punto a la de otra letra y entonces haces lo mismo con las otras letras, juntar una esquina con la otra esquina de la otra letra que es más pequeña, la S con la S la P con la P y la C con la C y el punto donde todas las líneas se cruzan. [señala con la mano en la pantalla]

		
471	P	¿tiene alguna idea para complementar lo de Carlos?
472	María	Pues basado en la estrategia de la línea cuando tenemos las figuras tenemos que trazar una línea por punto y punto, no es necesario de trazarla con los tres solo con dos nos traza el punto exacto en donde se entre cruzan, entonces cuando la línea es trazada con ambos puntos la grande y pequeña y cuando se llevan al punto se superponen ambas.
473	Carlos	Si lo conectas a esa misma esquina de cada letra si está justo en esa esquina sin importar a donde muevas las letras, sin importar la distancia en el lugar que se superponen, es ese punto.
474	P	Vamos a abrir un archivo, a ver si esto de los puntos correspondientes es claro.
475	María	Abre un archivo de la primera secuencia.
476	P	Cuál punto corresponde a este.

477	Carlos	…eh… este [señala el punto correspondiente en la pantalla]
478	María	[señala con el ratón otro punto].
479	P	Y el que señaló maría.
480	Carlos	Este [el punto correspondiente].
481	P	Y este de esta figura.
482	Carlos	Este [señalándolo correctamente].
483	Carlos	Izquierda con izquierda, derecha con derecha
484	P	Ok, fantástico cambia de archivo donde se [cambia la razón de homotecia]. En este cuál le corresponde [señalándole el punto en la pantalla]
485	Carlos	Este [señala con la mano en la pantalla].

486	Carlos	Pero en ese las dimensiones son iguales.
487	P	¿cómo así las dimensiones?
488	Carlos	Es que no me acuerdo cómo se dice ese triángulo que todas las dimensiones son iguales, no se varíen.
489	P	¿Usted es capaz de hacer corresponder otro par de puntos? ensaye a ver.
490	Carlos	De pronto, creo, con ese que es equilátero.
491	P	¿podría otro par de puntos que no sea, los que señaló? [le pregunta a Carlos]
492	Carlos	[traza una recta que pasa por dos puntos no homólogos, arrastra los triángulos].

493	P	¡ah! No es el punto donde se superponen. ¿cuál es el punto donde se superponen?
494	María	Aquí [señala con la mano el lugar de la pantalla]
495	Carlos	[traza dos rectas por los puntos homólogos] ahí está el punto.
496	P	Ahí coinciden las tres figuras, o se puede coincidir cualquier par de puntos del mismo triángulo.
497		Sí, sí se puede, no que sean distintos.
498	P	¿y el otro par?
499	Carlos	Sí se puede, o sea, que sea el mismo punto de la misma figura el de la izquierda con izquierda, el de la derecha con la derecha y el de arriba con el de arriba. Y los que no corresponden si lo puedes juntar, pero no en ese punto [refiriéndose al centro de homotecia].
500	P	De acuerdo, desafortunadamente se nos agotó el tiempo [se da por terminada la sesión y la primera actividad].

como en las tareas anteriores los alumnos trataban la figura de manera global, en esta empezaron haciendo lo mismo y ubicaron el punto a ojo, con poca precisión (382-385). Carlos invalidó la acción superponiendo un par de puntos correspondientes de las letras l en un lugar

distinto de dónde habían puesto el punto azul, pero cerca (386). El profesor, mediante un acto de devolución, preguntó: *¿podría juntar otro par de puntos de las letras l, no solo ese par?* (387). Pregunta que los motivó a superponer otros pares de puntos homotéticos y percatarse de que cualquier par de puntos homotéticos coinciden en un único punto (390-404). Hacen un segundo intento buscando más precisión visualmente, pero sin éxito, aunque efectivamente lograron mayor precisión, pero no la suficiente para resolver la tarea (405-416). Carlos entendió que debían ser más preciso que antes, esto se evidenció claramente al decir que *"antes era más fácil, porque el círculo era de mayor tamaño. En cambio, acá es un punto, es como más preciso"* (418, 420). Nuevamente el profesor intervino mediante otro acto de devolución que favoreció la formulación: "*¿cómo podría mejorar esa precisión?"* Carlos respondió: "*trazando las líneas".* Esto sin duda constituye la formulación del conocimiento, consecuencia no solo de un acto de devolución, sino también al diseño puntual de la tarea en el que las retroacciones didácticas de anticipación y validación provocan tanto la necesidad de una estrategia precisa como la posibilidad de validarla, así como la posibilidad de experimentar luego del invalidar la estrategia.

La idea de trazar rectas, propuesta por Carlos, no se llevó a cabo porque cedió el ratón a maría, por sugerencia del profesor (426). Es claro que el profesor buscaba la interacción de ambos alumnos con el medio. No obstante, esta intervención constituyó una interrupción de una acción del alumno, más que un acto de devolución.

Cuando maría tomó el ratón, no tenía una idea concreta para resolver la tarea. Intuyó la posición del centro de homotecia sin una estrategia evidente conduciéndola al error. Presionó el botón *Volver intentarlo* y Carlos retomó su idea. Dibujó dos rectas y las ajustó hasta que cada una pasara por un par de puntos homólogos de un par de figuras distintas. A continuación, el profesor les preguntó: *¿por qué la traza allí?* (447), a lo cual Carlos respondió: "*porque conecto ambos*

puntos. S*e supone que el lugar donde se cruzan ahí debería ir el punto"* (448, 449). Carlos finalmente ubicó el punto donde las rectas se cortaban, siendo esta la solución más precisa posible a la tarea. Sin embargo, por errores en la programación el botón *Verificar* no se hizo visible, impidiendo la validación y el avance en el desarrollo de la tarea. El profesor reinició la tarea y Carlos usó nuevamente la estrategia que estaba desarrollando antes del error en la programación y presionó el botón *Verificar* habilitando el movimiento de las figuras. El profesor le pidió que arrastrara las figuras por la pantalla y, en consecuencia, dado que las rectas esta vez fueron ajustadas a ojo, se desligaron los vértices del triángulo de las rectas ya trazadas. Carlos corrige rápidamente la construcción de modo que resista el arrastre, sin percatarse de que la solución seguía siendo válida, dado que la posición del centro de homotecia no varía al mover las figuras.

Por solicitud del profesor, al terminar esta tarea, los alumnos obtuvieron conclusiones conjuntamente. Estas se resumen en las siguientes ideas: solo los puntos homólogos se superponen; para encontrar el lugar donde las figuras se superponen, trazan rectas por puntos correspondientes y la intersección de dichas rectas es el punto buscado. Con el fin de corroborar este hecho, el profesor les propone retomar tareas de secuencias anteriores, donde les pide señalar los puntos correspondientes a los que él señala. En cada caso, los alumnos indican correctamente los puntos homólogos, aun en los casos en que las figuras tienen simetrías, de las que sabemos se dificulta un poco más identificar los puntos homólogos, de acuerdo con Lemonidis 1991.

Concluimos que los alumnos identifican los puntos homólogos y la alineación de estos con el centro de homotecia. Las intervenciones del profesor constituyeron en casi todos los casos, actos de devolución, ya que favorecieron la formulación del conocimiento. Carlos explicitó la alineación verbalmente y utilizó la herramienta recta para resolver la tarea. Por otra parte, la retroacción fomentadora de validación y el solicitar mayor precisión cambiando el círculo por un punto, no

solo permitieron que los alumnos validaran sus acciones, sino también que emergiera una estrategia de solución. En tanto que, el círculo les permitía un margen de error tal que, considerar las figuras globalmente era suficiente. En cambio, con el punto y permitir arrastrar las figuras para validar, se hizo énfasis en los puntos correspondientes, única manera de lograr la precisión requerida.

El segundo momento de esta tarea, en el que se exige aún más precisión, no se realizó porque el investigador no lo consideró necesario, teniendo en cuenta que fue suficiente el primer momento para que los alumnos reconocieran el carácter puntual del lugar donde se superponen las figuras y los puntos homólogos. Además, la alineación la garantizaron utilizando la herramienta recta y trazándola por puntos homotéticos.

9.6 Actividad 2.

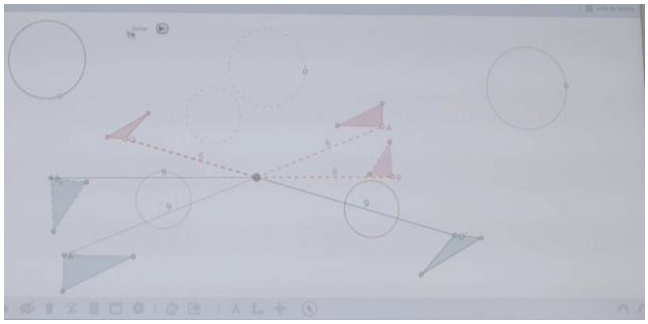
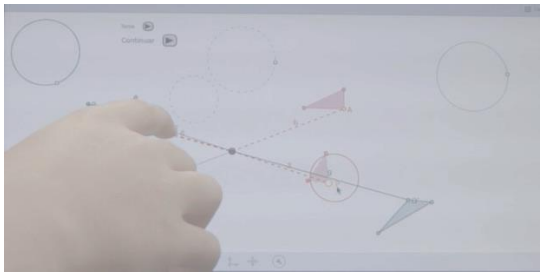
Esta actividad está compuesta por dos secuencias, las cuales analizaremos individualmente y finalizaremos con un análisis conjunto.

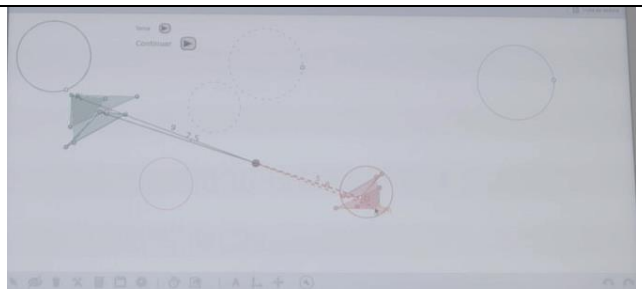
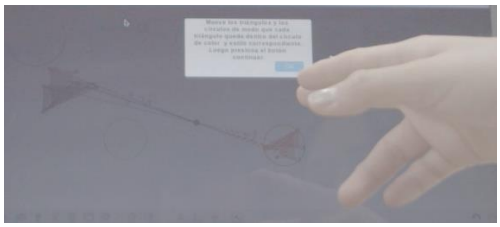
9.6.1 Primera secuencia.

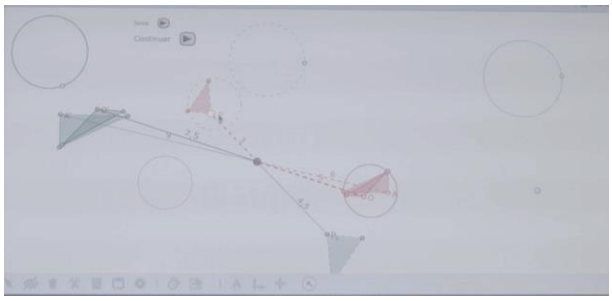
Está constituida por dos tareas, la primera consiste en meter dos pares de triángulos homotéticos en un círculo, con el fin de representar con un punto la posición donde se superponen (el centro de homotecia). La segunda consiste en meter parejas de triángulos homotéticos en círculos mientras el centro y las distancias de tres pares de puntos homólogos se hacen explícitos, con el fin de promover el reconocimiento de la relación de proporcionalidad entre dichas distancias. A continuación, se muestran los datos experimentales.

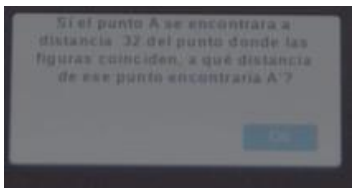
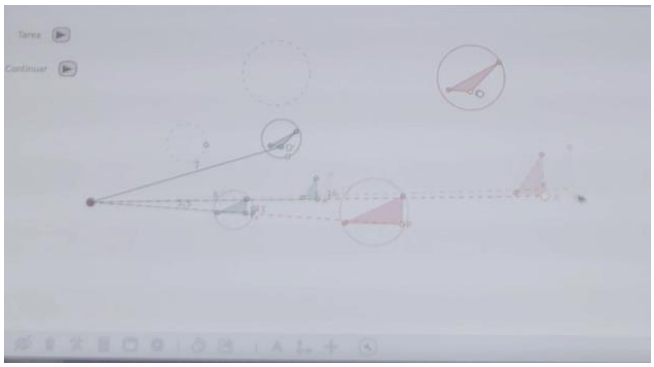
No	Sujeto	Descripción

2	María	[abre el archivo con razón positiva y lee la consigna] mete todos los triángulos en el círculo y luego haz clic en el botón *continuar*.
4	Carlos	¿pero podemos mover el círculo? [preguntándole a maría].
5	María	[introduce solo un par de triángulos preimágenes en el círculo].
6	María	No se pueden meter todos.
7	Carlos	Hagamos lo de las líneas.
8	María	¡ah no! Mira, podemos arrastrar las figuras donde se superponen y luego arrastramos el círculo.
9	María	[hace clic en el botón *continuar* lee la consigna] en las próximas tareas el este punto estará visible y es donde todas las figuras se superponen.
10	P	¿qué decía el texto?
11	María	Que en donde está el punto vinotinto se superponían las figuras. O sea, queda una sobre otra.

13	María	[abre la segunda tarea con razón -1.5]. 
14	María	[hace clic en el botón *tarea* y lee la consigna] mueve todos los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de color y estilo correspondiente. Luego presiona el botón *continuar*.
15	María	Listo, entonces para el verde, verde para el rojo, rojo eso es lo que pienso
16	Carlos	Pero los rojos deben quedar en este [señalando con la mano un círculo rojo] y los puntos con los puntos.
17	Carlos	Así, pero voy a meter este para ubicarme [mete un triángulo rojo punteado en el círculo rojo continuo]. 
18	Carlos	¡ah! Ya me ubiqué [intenta meter un par de triángulos rojos en uno de los círculos rojos]

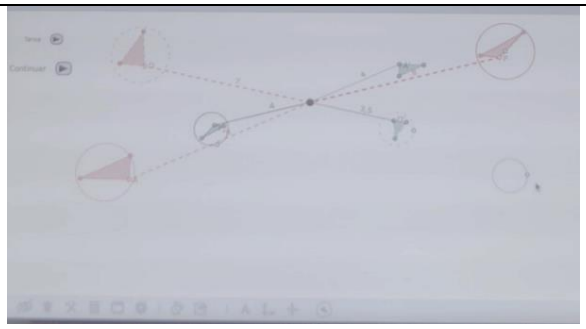
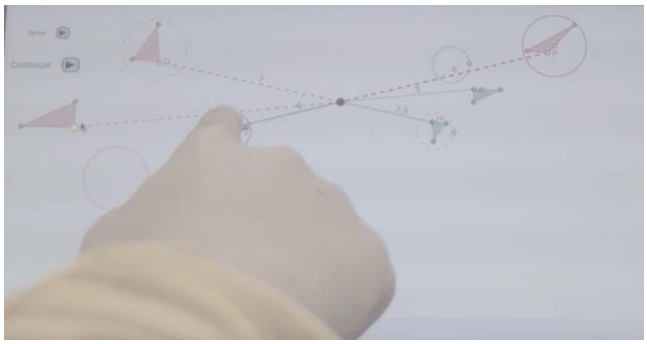
		
19	María	Pero sigo sin entender la tarea. [vuelve y a oprimir el botón *tarea* lee la consigna] mueve todos los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de color y estilo correspondiente. Luego presiona el botón *continuar*.
20	P	¿qué entendieron de la tarea?
21	María	Lo que entiendo es que hay que mover los triángulos y los círculos para que quede dentro, o sea, como cada círculo en cada triángulo entonces primero se me ocurrió [señala con la mano el punto de la pantalla]… 
22	María	Me olvidé de este punto [señalando con la mano el centro de homotecia]

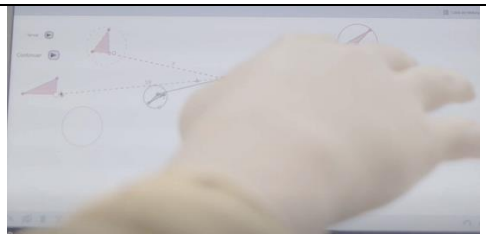
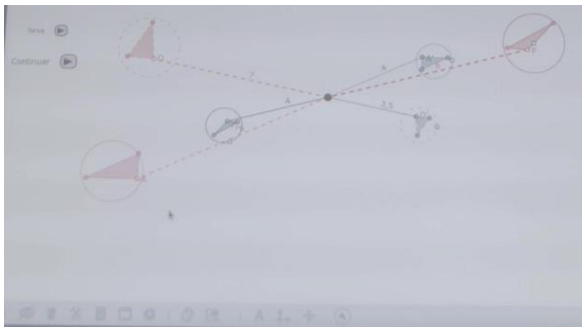
23	María	Probablemente podría poner una figura y luego se ubicaría en otra, pero me acordé de que estaba este punto [señalando con la mano el centro de homotecia]
24	P	¿y eso del color y estilo correspondiente cómo lo interpreta?
25	Carlos	Pues que hay algunos que la línea es más oscura entonces el verde oscuro con el verde oscuro, verde claro con verde claro y el de líneas con el otro [empieza a ubicar los triángulos en donde cree que deberían ubicarse].
26	P	Por el ejemplo… ¿ese iría ahí? [le pregunta a Carlos, luego de que lleva un triángulo al rojo al círculo respectivo].
27	Carlos	Acá. 
28	Carlos	Tiene puntos donde se frena, entonces debería ir ahí.
29	Carlos	No, lo puedo mover tan fluido es como si tuviera puntos en donde sí se mueve.
33	Carlos	[Abre un archivo con razón 0.5, hace clic en el botón Tarea, aparece la siguiente consigna: Mueve todos los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de color y estilo correspondiente. Luego presiona el botón Continuar]. Es igual a la anterior.

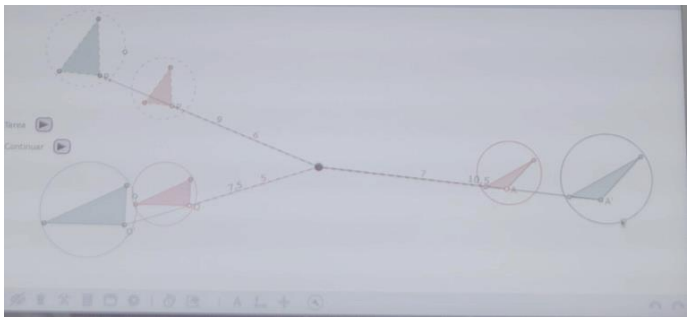
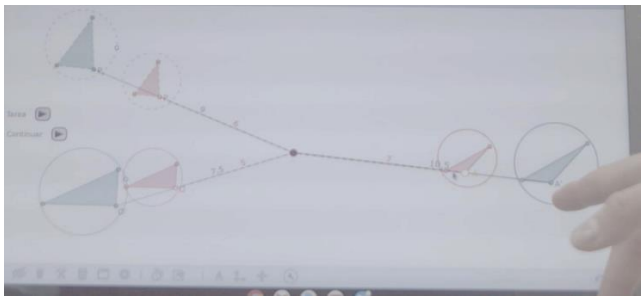
34	María	Movemos ese ahí porque el borde de ese triángulo es como espaciado [se refiere al triángulo punteado].
35	Carlos	Es igual que el del círculo.
36	María	Exacto, digamos este es más grueso y este es más delgado. Y ponemos los círculos en donde corresponden.
37	María	[mete cada triangulo en el círculo correspondiente, hace clic en el botón continuar y aparece la consigna: si el punto a se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría a’] 
41	Carlos	A treinta y dos [mueve el punto por la pantalla]. No igual no llega (la tarea está diseñada de modo que no sea posible ubicar a a esa distancia del centro de homotecia). 
42	Carlos	¡ah!16 porque esa es la mitad.

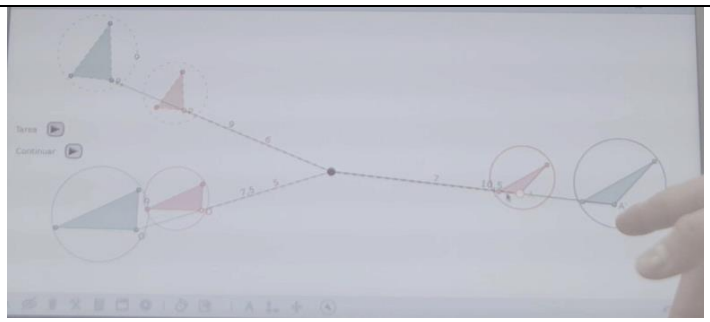
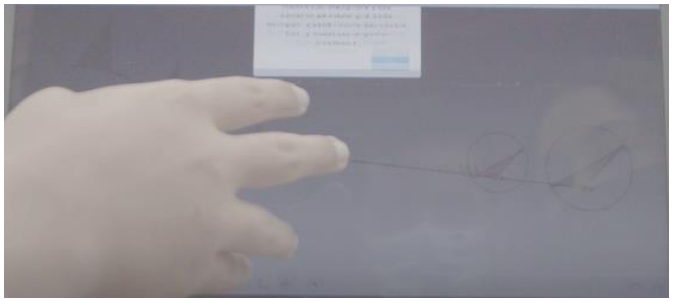
43	María	No mira [señalándole con la mano un valor en la pantalla], porque acá esto se puede sumar.
44	Carlos	Por eso es a la mitad porque cuando vas en doce este es seis, [señalando con la mano el valor en la pantalla]
45	María	Por eso tenemos cuatro, ocho y doce [señalando con la mano el valor de la pantalla].
46	María	Porque son dos [señalando con la mano el centro de homotecia] porque es al punto vinotinto.

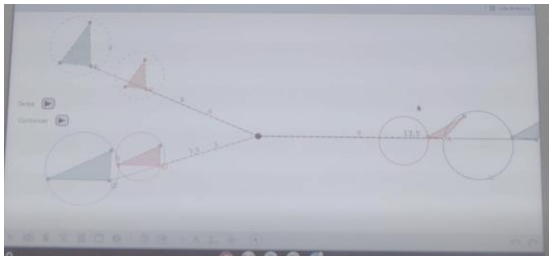
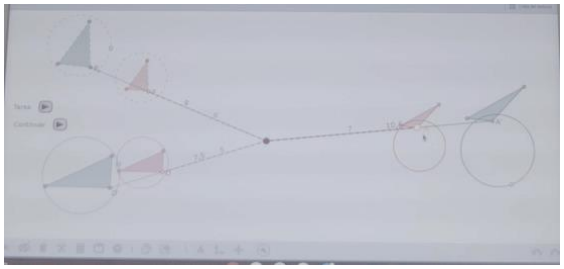
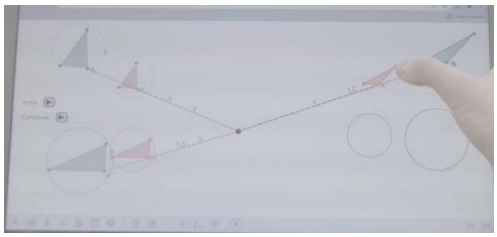
47	Carlos	Sí, esa es la distancia [vuelve a oprimir el botón continuar y vuelve a leer la consigna] sí el punto a se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría a'? [continúa diciendo] el punto a que es este triángulo sea distancia 32 [haciendo referencia la distancia que hay de ese punto al centro de homotecia]
60	Carlos	Del punto donde se superponen al punto a, y el otro es del punto donde se superponen al punto a', entonces el punto a' la distancia es la mitad del punto a, entonces si el punto a es cuatro a' es dos y si a esta en 32 entonces a' es 16.
61	María	[arrastra el punto a para intentar ubicarlo a distancia 32 del centro de homotecia].
62	Carlos	Ahí no creo que se deje hasta 32.
63	P	Ya pueden continuar con la siguiente.
64	Carlos	[abre un nuevo archivo con razón -0.5 y lee la consigna: mueve todos los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de color y estilo correspondiente. Luego presiona el botón continuar].
65	María	[mete los triángulos en los círculos correspondientes].

		
66	P	¿si a estuviera a distancia 24 del punto donde se superponen entonces a qué distancia estaría a' del punto donde se superponen?
67	María	Doce.
68	P	¿doce? ¿y en este caso?
69	Carlos	En este creo que es distinto
70	P	¿es distinto?
71	Carlos	No, es igual, pero antes ambos se movían en la misma dirección, antes estaba como en la misma línea por ejemplo por acá estaba a' [señalando con la mano la posición en la pantalla] 
72	Carlos	Pero ahora están como en lados opuestos.

		
73	María	Pero aun así la distancia es la misma así estén en direcciones opuestas.
74	Carlos	en direcciones opuestas, pero es la misma distancia, la mitad.
75	P	¿pero ahora no están en la misma línea?
76	Carlos	Sí, están en la misma línea, pero se mueven en direcciones opuestas
77	P	¿opuestas con respecto a qué?
78	Carlos	Con respecto al punto que se superponen
79	María	Digamos que antes esto estaba encima de esto.
80	Carlos	Sí, porque tu movías el punto a hacia acá, y el punto a' también.
81	Carlos	Pero ahora se mueve en la dirección opuesta.
82	P	Entonces, si a estuviera a 32…
83	Carlos	A' está a 16 pero en dirección opuesta, o sea, no en misma dirección en la línea, sí en la misma línea, pero no en la misma dirección.
		
85	Carlos	[abre el archivo con razón 1.5 y lee la consigna] mueve todos los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del

		círculo de color y estilo correspondiente. Luego presiona el botón continuar.
86		[resuelve la tarea, hace clic en el botón continuar y lee la consigna]. Si el punto a se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría a']
87	Carlos	El punto a es este. 
88	María	Qué tal si lo pones aquí [señalando el lugar en la pantalla] 
89	María	Listo, ahí suéltalo y arrastra el verde.
90	Carlos	Acá no lo mueve [la figura verde no se deja arrastrar]

		
91	Carlos	acá el punto a' va a estar en una distancia de cincuenta. ¿no? Una distancia de ciento cincuenta (al parecer se refiere al 150%) que ha recorrido el  punto a porque es la mitad más.
92	Carlos	Entonces a es siete y la mitad de siete es 3.5 y el punto a está más 3.5.
93	P	¿maría entendió la pregunta? Si el punto a se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría a', o del lugar que se superponen. Por ejemplo, ahí a está a distancia siete y a' está a distancia 10.5, entonces usted puede mover a y la pregunta es: si el punto a se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría a'.
94	María	Yo diría que por la mitad.

95	P	¿la mitad? Por ejemplo, allí el punto está a 9 entonces la mitad es 4.5. A' está a 4.5. ¿dónde está a'? No lo veo [a' no aparece en la pantalla] 
96	María	[arrastra a tal que a' se muestre en la pantalla]. 
97	María	Es que no entiendo.
98	Carlos	En este caso el movimiento es distinto y las distancias son distintas en ambos puntos, entonces el punto a' está más lejos y es más la mitad del otro punto. En este caso el punto es 8 y la mitad es 4 entonces la suma es doce, entonces si es 32 la mitad es 16 el otro es 48, cómo un cincuenta por ciento más.
99	María	O sea, como esto que falta [señalando con la mano en la pantalla el segmento que hay entre a y a´] 

100	Carlos	La distancia del punto a es 8 y el otro está en 12, entonces ahí es como si se estuviera moviendo un cincuenta por ciento más de distancia, o sea, en 32 se mueve la mitad más entonces le sumas 16 a 32,
101	María	¡ah! ¡sí! ¡sí!
102	P	¿y si estuviera a distancia seis? ¿sí a estuviera a distancia 6 a que distancia estaría a'? ¿quién está más lejos a o a'?
103	Carlos	A'.
104	P	¿sí a estuviera a distancia 6 a que distancia estaría a'?
105	Carlos	Entonces el punto de a en cualquier momento… [arrastra a por la pantalla hasta llevarlo a 6] …y el otro es 9, porque le sumas la mitad de la distancia del otro punto, así es con todos los casos.
106	María	Sí.
107	Carlos	Cuando está en cuatro le sumas dos, cuando esté en cinco le sumas 2.5.
108	María	¡ah! Ya entendí.
109	P	Y eso es a lo que usted se refería a un ciento cincuenta por ciento [le dice a Carlos]
110	Carlos	Es un ciento cincuenta por ciento.
111	P	¿de qué otra manera podríamos decir eso?
112	Carlos	…um… el cincuenta por ciento más. Es la mitad de la distancia del punto a más la distancia.
113	María	Sí.
114	P	Qué tal una vez y media del otro.

115	Carlos	Multiplicar por uno punto cinco el otro… ¡ah!
116	María	Sí.

En la primera tarea, se evidencia que, aunque maría en principio no sabía que el círculo se podía mover (5,6), no tuvo dificultad para meter los dos pares de letras dentro de este y reconocer el punto vinotinto como el lugar donde las figuras se superponen. Hecho que podemos corroborar con la afirmación de maría: *"que en donde está el punto vinotinto se superponían las figuras. O sea, queda una sobre otra" (11)*.

Como podremos constatar en el desarrollo del resto de la actividad, los alumnos tuvieron en cuenta este punto casi desde el principio de la realización de la primera secuencia, de modo que creemos que tiene un efecto positivo el representar inicialmente el centro de homotecia como un lugar único en la pantalla para facilitar su identificación y luego, a medida que se exige precisión en las tareas, hacer énfasis en que dicho lugar es puntual y representarlo como tal.

En la segunda tarea, como lo esperábamos, hubo tres hechos al principio que debemos resaltar. En primer lugar, que la tarea para los alumnos no era completamente clara al iniciar (17 y 23). No obstante, la retroacción didáctica que muestra los triángulos y los círculos correspondientes con estilos distintos y los triángulos preimágenes en color rojo, con sus imágenes en color verde, jugó un papel importante para favorecer la devolución, ya que los alumnos comprendieron rápidamente que para cada triángulo había un círculo que corresponde en color y estilo. Esto se comprueba cuando Carlos dice: *"hay algunos que la línea es más oscura entonces el verde oscuro con el verde oscuro, verde claro con verde claro y el de líneas con el otro" (25).* El segundo hecho a resaltar es que la retroacción didáctica que muestra los segmentos que van de un vértice de cada triángulo preimagen hasta el centro de homotecia, sus homólogos y sus medidas

fue ignorada por completo y no la consideraron al resolver la tarea. Solo fue tenida en cuenta cuando se ejecutó la retroacción didáctica que mostraba el texto: "*Si el punto A se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría A*'*"* (37). Esto es, la retroacción favoreció que los alumnos centraran la atención en las distancias de los puntos homólogos al centro, puesto que, de no haber hecho la pregunta hubieran resuelto la tarea a ojo, sin reflexionar sobre la configuración, prescindiendo de ideas importantes para afrontar la tarea de anticipación. El tercer hecho inicial que habíamos previsto en el análisis a priori es que los alumnos notaron que el vértice que permite arrastrar las preimágenes de manera discreta, pero por toda la pantalla, no se comportaba exactamente igual que el de la primera actividad. Esta retroacción didáctica no causó ningún efecto adverso en el desarrollo de la tarea por parte de los alumnos, en tanto que no perturbó su intención en la situación adidáctica. Muy por el contrario, permitió que pudieran establecer relaciones numéricas entre los puntos homotéticos y el centro. Esto lo confirmaremos posteriormente en el análisis de la segunda secuencia. De hecho, como ruido, solo encontramos un comentario por parte de Carlos: *"tiene puntos donde se frena… no lo puedo mover tan fluido es como si tuviera puntos en donde sí se mueve"* (28 y 29).

Una vez que comprendieron la tarea, María la resolvió metiendo primero los triángulos rojos en los correspondientes círculos rojos, posiblemente comprendiendo implícitamente que los círculos rojos no se podían mover, luego llevó los círculos verdes a las posiciones donde quedaron los triángulos correspondientes (34-36). Luego, al presionar el botón *Continuar*, se mostró la siguiente pregunta: "*Si el punto A se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría A*'*"* (37). Carlos inmediatamente intentó arrastrar el punto A, hasta que quedara a 32 unidades del centro de homotecia (41). También María intentó hacer lo mismo al repetir la tarea con razón menor que cero (61). Sin

embargo, como la tarea está diseñada para que se mueva por toda la pantalla, pero solo abarcando distancias enteras hasta 20 unidades, no lograron su objetivo. Estas dos retroacciones didácticas funcionaron como esperábamos, en primer lugar, porque los alumnos entendieron rápidamente que debían anticipar su acción y para ello tenían que encontrar alguna relación entre las distancias de los puntos homólogos al centro, abandonando la estrategia de arrastrar para encontrar la distancia del punto imagen en función de su preimagen. En segundo lugar, porque el lograr que las distancias fueran enteras sin perder la idea de la continuidad en el movimiento de los vértices de los triángulos, favoreció que ellos operaran numéricamente con mayor facilidad, logrando encontrar la relación de proporcionalidad sin acudir al *efecto topacio.*

Al proponerles la tarea con razón -0.5 (64), maría metió los triángulos dentro de los círculos correspondientes sin problema alguno y el profesor intervino: *¿si a estuviera a distancia 24 del punto donde se superponen entonces a qué distancia estaría a' del punto donde se superponen?* (66) seguidamente maría responde: "*doce".* Rápidamente se dieron cuenta que la razón era la misma que en la tarea anterior (0.5), pero en direcciones opuestas respecto al centro de homotecia. Esto lo corroboramos en sus afirmaciones. Carlos por ejemplo propuso: *"es igual, pero antes ambos se movían en la misma dirección"* (71). *"ahora están como en lados opuestos"* (72). María por su parte expresó: *"pero aun así la distancia es la misma así estén en direcciones opuestas" (73). "digamos que antes esto estaba encima de esto"* (79). Esto último obedece a que cuando la razón es positiva, los segmentos que muestran las distancias están superpuestos, mientras que cuando la razón es negativa, no se superponen. El profesor vuelva a intervenir en lo que consideramos que es un acto de devolución que favorece la formulación: *"¿opuestas con respecto a qué?"* (77). *"con respecto al punto que se superponen"* (78), responde Carlos. Ellos en la

primera actividad ya habían formulado que había dos configuraciones distintas y acá lo reiteran, entendiendo que dichas configuraciones atienden a las mismas propiedades.

Cuando se propuso la tarea con razón 1.5 (85), sin ninguna dificultad metieron los triángulos dentro de los círculos correspondientes. Luego de activarse la retroacción que pregunta por la distancia a la que quedaría A' del lugar donde las figuras se superponen, según la de A, Carlos no tuvo mayores dificultades para encontrar la razón, mientras que María sí; sesgada posiblemente porque la relación en los dos archivos previos había sido 1 a 2. Carlos sugirió: *"Acá el punto A' va a estar en una distancia de cincuenta. ¿No? Una distancia de ciento cincuenta que ha recorrido el Punto A porque es la mitad más… Entonces A es siete y la mitad de siete es 3.5 y el punto a está más 3.5*" (91 y 92). El profesor interviene preguntándole a maría para devolverle el problema: *"¿maría entendió la pregunta?"* (93). Ella respondió *"yo diría que por la mitad… es que no entiendo" (94 y 97).* En este momento Carlos intentó ayudarle a maría, formulando nuevamente su conocimiento. Él tenía bastante claro cuál era la razón de homotecia en esa configuración y lo expone de dos maneras. Primeramente, en términos porcentuales: *"la distancia del punto a es 8 y el otro está en 12, entonces ahí es como si se estuviera moviendo un cincuenta por ciento más de distancia, o sea, en 32 se mueve la mitad más entonces le sumas 16 a 32… es un ciento cincuenta por ciento"* (100 y 110). En segundo lugar, lo expresa en términos aditivos y multiplicativos *"le sumas la mitad de la distancia del otro punto, así es con todos los casos… multiplicar por uno punto cinco el otro… cuando está en cuatro le sumas dos, cuando esté en cinco le sumas 2.5"* (105 y 107). María finalmente manifiesta entender (110, 113 y 116).

Está claro que explicitar las distancias de los puntos homotéticos al centro no es suficiente para que los alumnos identifiquen la razón de homotecia, aun cuando una de ellas es entera y la razón es sencilla (1/2, -1/2, 3/2 y -3/2). El arrastre de las figuras, el percibir continuamente las

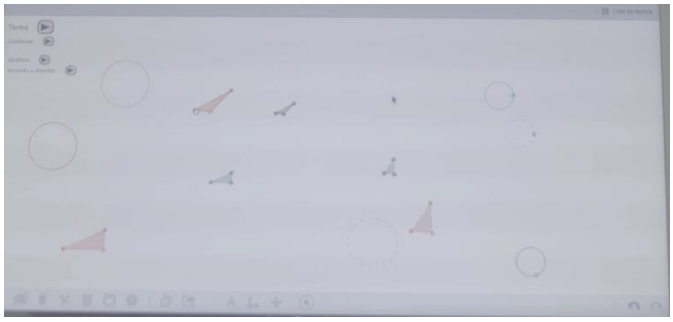
distancias de puntos homotéticos al centro conforme se arrastran y el indagar por la dependencia entre estas magnitudes, favorece el reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia. Consideramos que una de las razones por las que maría no reconoció la razón tan rápido como Carlos, fue porque él interactuó más con el medio. Posiblemente el profesor debió fortalecer más el proceso de devolución con maría durante el desarrollo de la situación adidáctica.

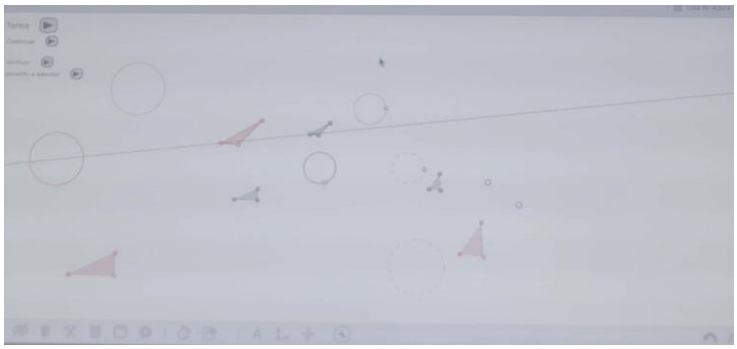
Concluimos que en general los resultados son coherentes con lo que esperábamos, de acuerdo con el análisis a priori. En primer lugar, los alumnos reconocieron perceptivamente la razón de homotecia y la utilizaron para anticipar la distancia del punto imagen al centro, según la distancia de la preimagen al mismo. En segundo lugar, la retroacción que limita el movimiento de los puntos preimágenes a través de distancias al centro de homotecia enteras no causó ruido en los alumnos y permitió que se reconociera la relación de proporcionalidad, gracias a la facilidad para operar con los números enteros y las razones propuestas.

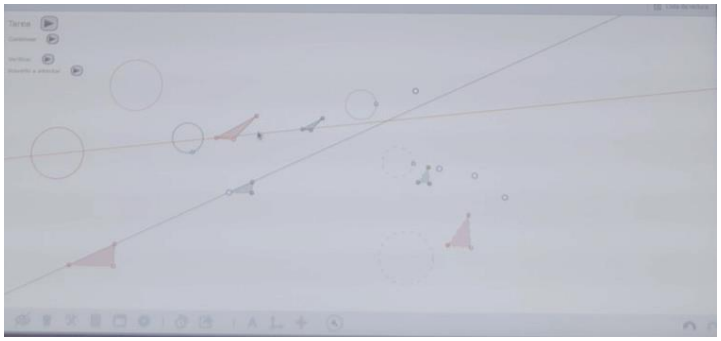
9.7 Segunda secuencia.

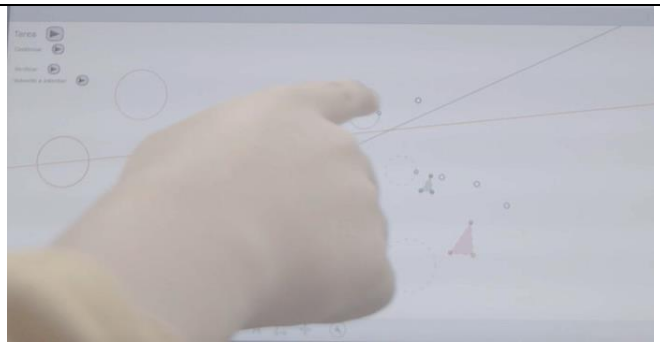
Esta secuencia consta de una sola tarea, que consiste en anticipar la posición de la imagen cuando la preimagen cambie de ubicación. Al igual que en la tarea de anticipación de la primera actividad, en esta utilizamos las retroacciones de anticipación y validación con el mismo propósito. Las evidencias y sus respectivos análisis los mostraremos en dos partes. La primera parte se encuentra completa en el apéndice b, que presentamos a continuación y la segunda en el apéndice c, la cual presentamos más adelante.

117	Carlos	[abre la tarea de anticipación con razón positiva y lee la consigna] ¿dónde crees que quedarán los triángulos verdes cuando lleves cada triángulo

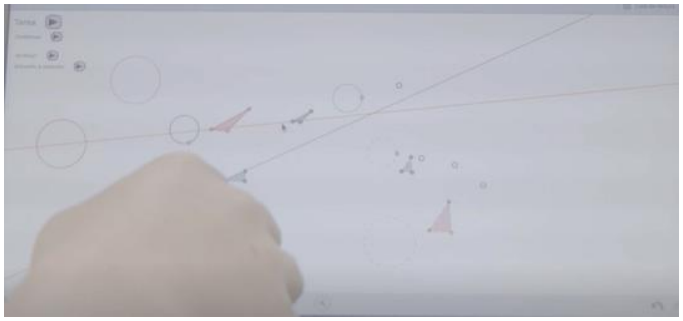
		rojo al círculo de su respectivo color y aspecto? Lleva los círculos verdes a dichas posiciones y luego presiona el botón *continuar*.
118	Carlos	¿cómo es que se hacían las líneas?
119	P	¿es la misma tarea?
120	Carlos	La tarea es como mover los círculos de las figuras pequeñas, que son las verdes, a la posición que creemos. Después, que movamos los triángulos grandes a su círculo respectivo.
121	Carlos	Yo creo que es juntar, es como hacer una línea entre cada triángulo y el que es igual.
122	P	Una línea por qué.
123	Carlos	Pensé que no me dejaba mover los triángulos, se supone. Yo creería que se hace lo de la vez pasada, con una línea no solamente podemos ver el punto en donde se superponen sino también en donde quedaría el otro triangulo, como decir el rojo a su respectivo círculo.
124	Carlos	Nos está pidiendo que movamos estos [refiriéndose a los triángulos rojos y lo señala en la pantalla con el apuntador] 
125	Carlos	¿se pueden hacer líneas?

126	P	Pueden hacer lo que quieran, desde que activen la herramienta de construcción.
127	María	¿para qué la línea?
128	Carlos	Porque te acuerdas que con el otro punto pondríamos donde se superponen.
129	María	Sí, pero de todas maneras lo que nos están pidiendo, es lo de los círculos.
130	Carlos	No sé si los círculos, pues intentar… ¿no? O se poder ver en dónde quedan… la otra es trazar una línea del centro del círculo a un punto del triángulo que le corresponde, creo que a base del triángulo grande podemos ver en donde queda el pequeño.
132	Carlos	La primera sería así [traza una recta por dos puntos homólogos y coincidencialmente pasa por el círculo fijo], pero no me ayuda, no están las distancias. 
133	P	Por ejemplo, en dónde se superponen las figuras.
134	Carlos	Necesitaría hacer otra línea. De un punto del triángulo grande y al mismo punto del triángulo pequeño.

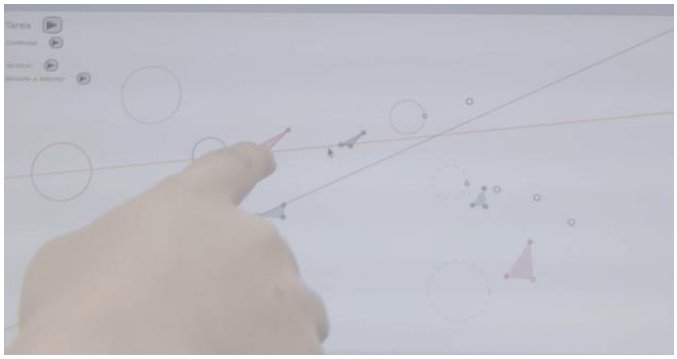
135	María	[construye un punto nuevo, traza una recta por él y un punto de un triángulo rojo y la ajusta hasta que quede sobre el punto correspondiente del triángulo verde].
140	María	Sí, seria por acá para este [señala con el apuntador]. 
141	P	¿cómo calculó?
142	María	A tanteo.
143	P	¿pero cómo?
144	María	Van a avanzar, pero se van a alejar a la mitad.
145	P	¿la mitad?
146	María	De la distancia [señalando la distancia en la pantalla].
147	P	¿de la distancia entre los dos triángulos?
148	Carlos	El triángulo verde se mueve la mitad de la distancia de como se está moviendo el rojo a base del punto donde se superponen, acá por ejemplo [señala con la mano el punto de la pantalla].



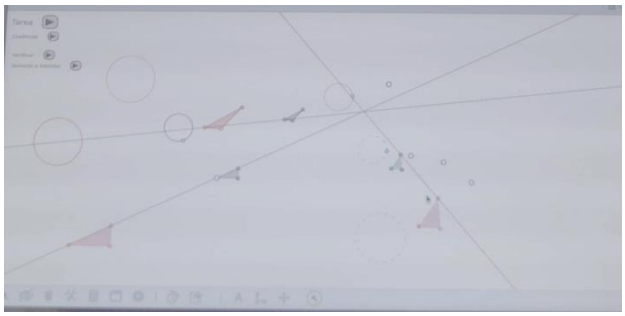
149	Carlos	Si este estuviera a diez [refiriéndose a un punto del triángulo rojo], este estuviera a cinco [refiriéndose al punto homotético del triángulo rojo]

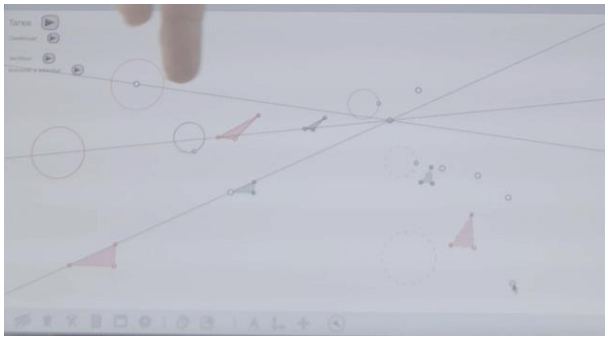
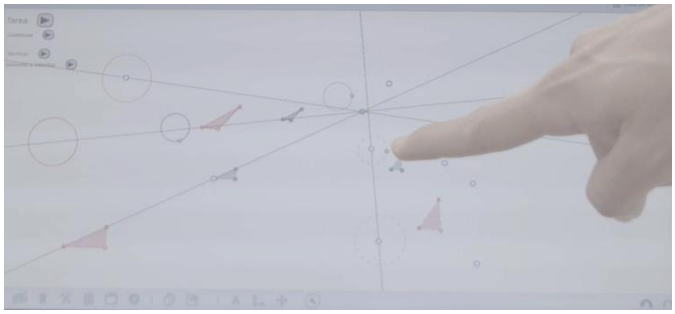


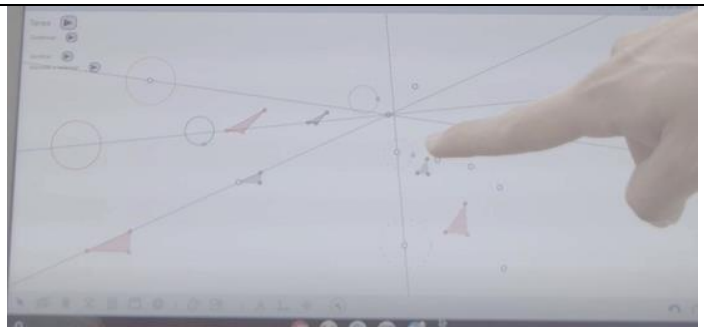
150	P	A diez de dónde.
151	Carlos	Digamos que este es diez [señalando con la mano un punto del triángulo rojo] este estuviera a cinco [refiriéndose al punto homotético del triángulo rojo] de acá.



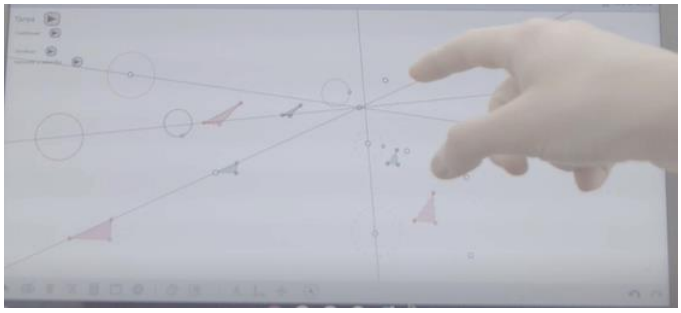
152	P	De ahí a dónde.

153	Carlos	De acá al punto donde se superponen.
155	Carlos	Si acá es treinta o veinticinco. Sería la mitad.
156	Carlos	Más o menos, por eso podemos inferir… [traza una recta que pasa por dos puntos homotéticos]. Pero acá no lo cruza [refiriéndose que la recta no pasa por el centro del círculo del color y estilo que le corresponde] 
157	P	¿qué paso? ¿no lo cruza?
158	Carlos	Que nosotros… solo cruza a un círculo, debería… pues debería, pero uno infiere igual si uno traza una línea por la mitad de este círculo.
159	P	¿cuál es el problema? ¿por qué trazó esa línea?
160	Carlos	Porque, ahí están entre los triángulos que están fijos, pero necesitamos encontrar la posición si ponemos el triángulo rojo en dónde quedaría el verde.
163	Carlos	Porque ahí tenemos claro que la distancia entre ambos triángulos…
164	P	Usted podría explicar eso a maría
165	Carlos	Sí, es como el primer ejercicio. El triángulo rojo está al doble de la distancia del punto donde se superponen que el verde. Entonces… el verde es cinco y el rojo está en diez.

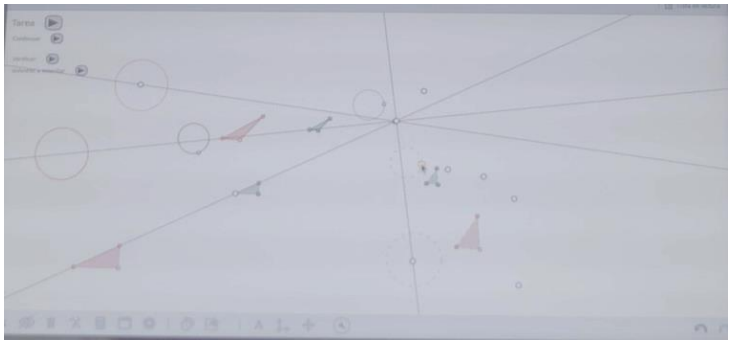
166	P	Mi pregunta es que usted traza una recta entre los dos triángulos y funcionó [señala con la mano la recta intermedia de la imagen]. 
167	Carlos	Pero, porque quedó coincidencialmente con estos dos (los dos triángulos y los dos círculos estaban casi alineados).
168	P	¿y esta no?
169	Carlos	Esta no, por eso estoy trazando una por medio de los círculos. 
170	María	Pero igualmente a simple vista este se puede mover por acá. Entonces, si colocas al rojo acá el verde iría acá. Porque acá está el punto… sería por la mitad.
171	P	¿pero este lo puede mover? [señalando un punto del triángulo verde].

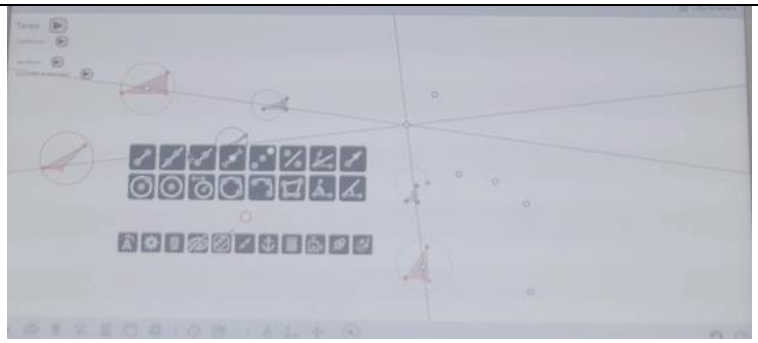


172	María	Sí, por eso, pero eso es la mitad desde este punto [señalando con la mano el punto donde se superponen todas las figuras] porque vamos a mover este acá entonces este queda acá.

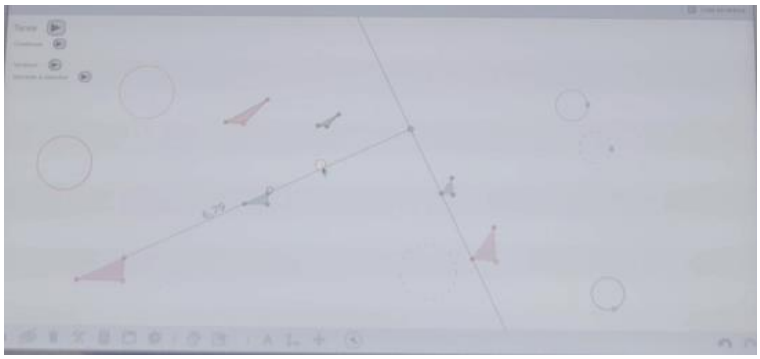


173	P	Arrástrelos.
174	Carlos	Todavía no se puede, a no mentiras, sí.
175	Carlos	Por acá.
176	P	No será…
177	Carlos	Es que es la mitad del rojo.
178	P	¿es la mitad?
179	Carlos	Yo creo que es más abajo, igual el rojo es de mayor tamaño del verde.
180	P	¡ah!
181	Carlos	Se va a ver más pequeño, pero es la mitad.
182	P	Falta el otro.

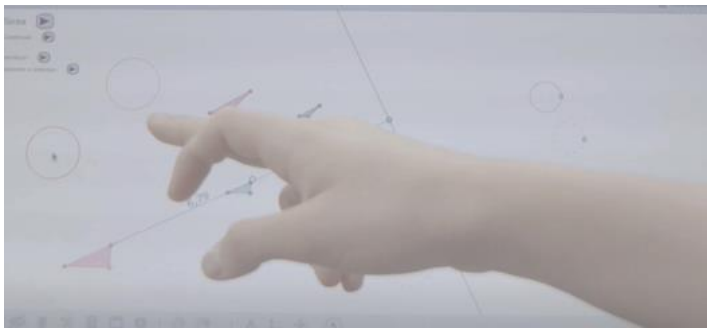
183	Carlos	Entonces por acá debería ser por acá [ubica el círculo cerca de la posición solución]. 
184	Carlos	[hace clic en el botón *continuar* lee la consigan] ahora lleva cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color y estilo. [continúa diciendo] haz clic en botón *verificar*.
185	Carlos	Fallamos por un poquito.
186	María	Sí.
187	P	¿cómo podríamos mejorar la precisión?
188	Carlos	¿no hay una regla?
189	María	Yo creo que se puede.
190	Carlos	Si hubiera una herramienta de regla, simplemente todo esto fue al ojo.
191	Carlos	Y por eso es muy fácil fallar.
192	P	Dibuje un segmento y mostrar su longitud.
193	Carlos	[ubica un punto en la pantalla y hace clic en este para activar la lista de herramientas] este.



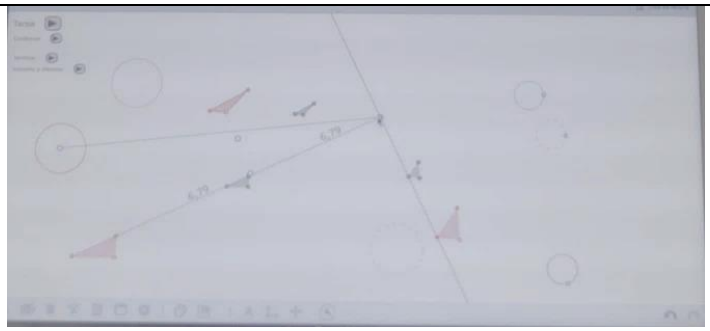
194	P	No el siguiente.
195	Carlos	¡ah! Ok,
196	P	Ahora toque el segmento, luego la reglita y arrastre los puntos.
197	Carlos	Podemos reiniciar la tarea.
198	P	Vuélvala abrir.
199	Carlos	Reinicia la tarea con la misma razón. [lee la consigna] ¿dónde crees que quedarán los triángulos verdes cuando lleves cada triángulo rojo al círculo de su respectivo color y aspecto? Lleva los círculos verdes a dichas posiciones y luego presiona el botón *continuar*. [luego traza un segmento con extremos en dos puntos homotéticos].
200	María	Ahí.
201	Carlos	Es la distancia entre ambos [selecciona la herramienta regla para que se observe la distancia entre los puntos seleccionados]
202	P	Qué distancia va a medir.
203	María	Seis entonces, es la mitad.
204	Carlos	No, porque antes este estaba a diez y este a cinco.
205	Carlos	O la otra es conectar al punto donde se interceptan.

206	María	Primero hacer las líneas y luego sí lo hacemos.
207	Carlos	[encuentra el punto donde se superponen todas las figuras trazando dos rectas por puntos homotéticos]… ¿cómo oculto las rectas profesor?
208	P	En el ojito. Pero necesita mostrarlas otra vez.
209	Carlos	Entonces si hacemos otro hasta acá, un segmento que vaya del punto del triángulo verde al punto donde se superponen [traza el segmento y hace visible su longitud].
210	P	Oculte la recta y ahora sí. 
211	Carlos	Es igual.
212	P	Pero mire en donde empiezan.
213	Carlos	¡ah sí! Acá está, a 6.69 y al otro también. Entonces el punto más alejado está al doble.
214	Carlos	Ahí comprobamos que es el doble.
215	P	Si necesitan ocultar o borrar ese segmento lo pueden hacer, si no, pueden seguir trabajando.
216	María	Entonces sería 14.9.

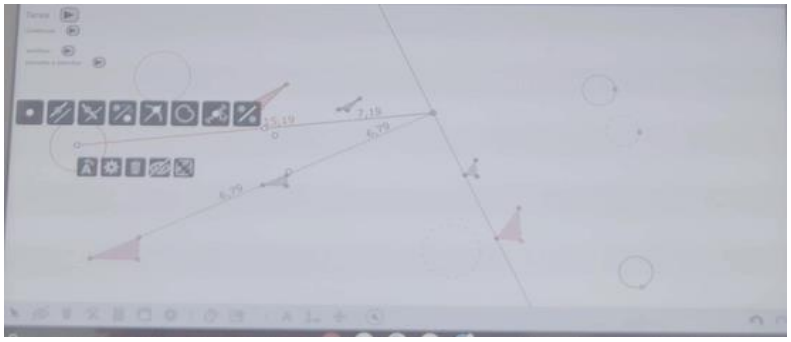
217	Carlos	Pero si… ahora cómo utilizamos esto, cuando vayamos a mover los triángulos, tenemos el punto donde se superponen. Pero, cómo hacemos acá [señala un círculo rojo].



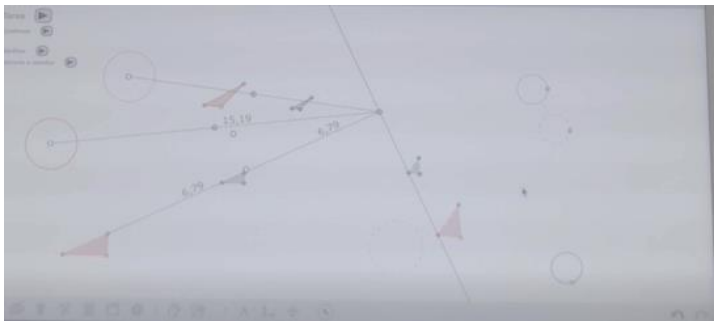
218	María	Va a ser la mitad.
219	Carlos	Del centro.
220	María	Es como la mitad de esto [refiriéndose a la mitad de la distancia del centro del círculo y al punto donde se superponen]
221	Carlos	[traza un segmento desde el centro del círculo hasta el punto donde se superponen, y muestra la distancia].



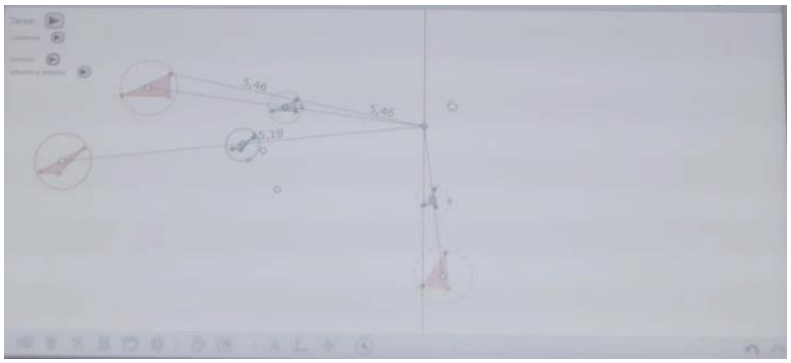
222	Carlos	Entonces la mitad es 7.7 pero igual no se puede ver.
223	P	¿qué necesita?
224	Carlos	Calcular en dónde va a ser la mitad. Sabemos cuál es la distancia, pero no sabemos poner un punto en la mitad.
225	María	Pon un punto sobre el segmento y haces otro al punto de intersección.
226	Carlos	[realiza lo que dijo maría y muestra la distancia].
227	P	Hay otra estrategia. Toque el segmento grande. ¿cuál de esas herramientas le sirve para hallar el punto medio?
228	Carlos	[toca el segmento y se muestran algunas herramientas] la mitad de estas herramientas no las entiendo.



229	Carlos	¡ah! Punto medio. Sí, es más fácil [traza los puntos medios de los dos segmentos que van del centro del cada círculo rojo al centro de homotecia].

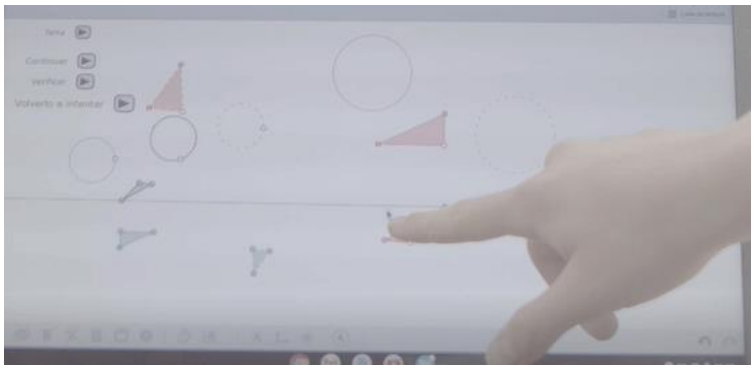


230	Carlos	Ya… [hace clic en el botón *verificar* y lee la consigna] ¡muy bien, has terminado la tarea!]

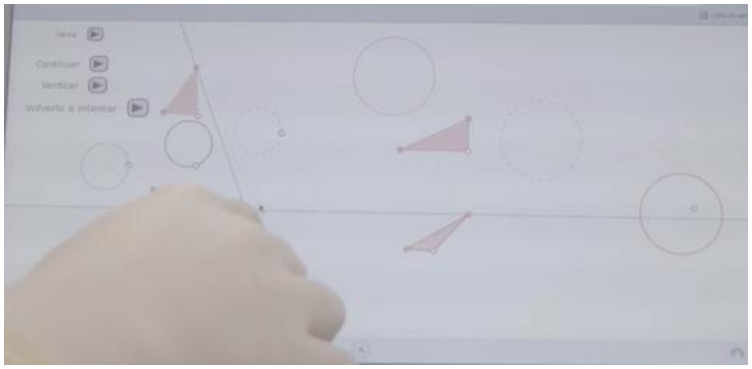


231	P	Listo, abra otro archivo.
232	María	[abre un archivo con razón -0.5, hace clic en el botón *tarea*, lee la consigna] ¿dónde crees que quedarán los triángulos verdes cuando lleves cada triángulo rojo al círculo de su respectivo color y aspecto? Lleva los círculos verdes a dichas posiciones y luego presiona el botón *continuar*.
233	Carlos	Primero traza una línea por dos puntos iguales.
234	Carlos	Es ese.

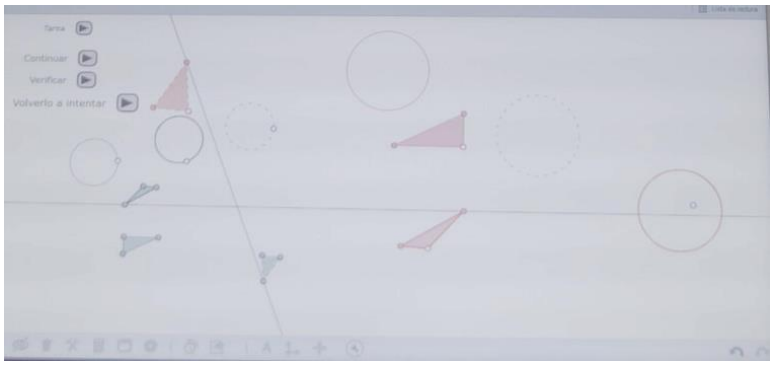
235	María	[traza una recta y la ajusta hasta que quede sobre dos puntos homotéticos]. Si observamos la figura, este punto es el mismo que este, lo que pasa es que la figura está al revés.



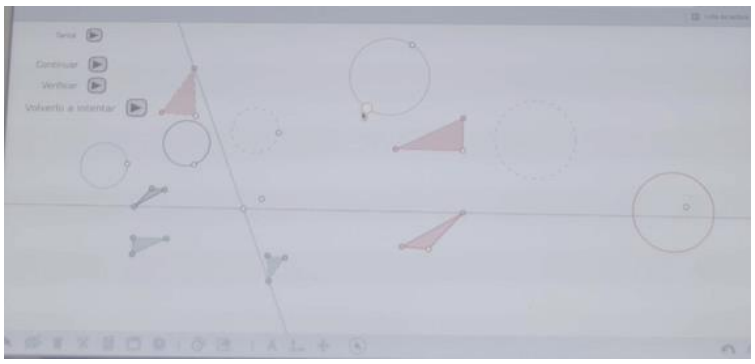
236	Carlos	Eso se puede explicar por grados. Este está rotado. No sé cómo explicarlo.
237	Carlos	Acá está la figura y la otra está volteada.
238	María	Eso tiene un nombre, pero no me acuerdo.
239	María	Otra línea con el mismo punto, pero de otra.
240	P	¿cualquier punto sirve?
241	Carlos	Mientras sea el mismo punto del otro triángulo… entonces, acá encontramos la intersección.

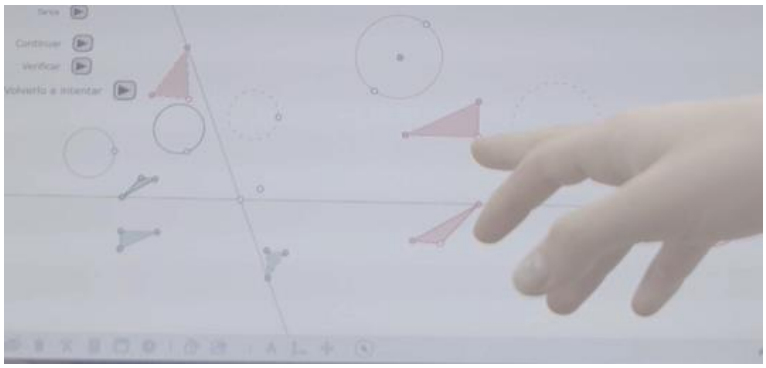


242	P	¿y si yo usara cualquier otro punto de los otros?
243	María	No.
244	Carlos	Sí, es lo mismo, si es el mismo punto en el otro triángulo, sí.
245	María	No.
246	Carlos	[entonces le muestra cuál punto es homotético con el otro y cuál no].
247	María	Por eso.
249	Carlos	Primero encontramos, como lo hicimos antes, el punto donde todos se superponen.



250	Carlos	Ahora encontrar el centro del círculo. ¡ah! Pero con dos puntos lo encuentro y estos deben ser opuestos para que dé el centro exacto [traza el punto medio de dos puntos sobre el círculo para obtener el centro del mismo].



251	Carlos	También toca analizar el movimiento entre ambas.
252	María	¿se pueden mover?
253	Carlos	No.
254	María	Entonces este [mostrando con la mano un punto de un triángulo rojo que se deja arrastrar] 
255	Carlos	No, porque lo que nos pide es mover los círculos, pero igual ahí se puede poner regla.
256	P	Puede utilizar la herramienta segmento.
257	Carlos	Creo que está claro, acá es como el otro, el doble de distancia y se mueve en direcciones contrarias.
258	P	Lastimosamente se nos agotó el tiempo seguiremos en una próxima sección. Se finaliza la experimentación.

En el primer archivo, donde la razón era 0.5, iniciaron presionando el botón *Tarea* para saber en qué consiste y la retroacción mostró la consigna: ¿dónde crees que quedarán los triángulos verdes cuando lleves cada triángulo rojo al círculo de su respectivo color y aspecto? Lleva los círculos verdes a dichas posiciones y luego presiona el botón *Continuar* (117). Acto seguido, Carlos sugirió trazar rectas para encontrar el punto donde se superponen las figuras (118 y 123),

exponiendo además su interpretación de la tarea: *es como mover los círculos de las figuras pequeñas, que son las verdes, a la posición que creemos. Después, que movamos los triángulos grandes a su círculo respectivo… creo que es juntar, es como hacer una línea entre cada triángulo y el que es igual* (120 y 121). María le preguntó: *¿para qué la línea?... Lo que nos están pidiendo, es lo de los círculos* (127 y 129). Ante esta inquietud Carlos respondió: *es trazar una línea del centro del círculo a un punto del triángulo que le corresponde, creo que a base del triángulo grande podemos ver en donde queda el pequeño* (130). Él insistió en encontrar primero el lugar donde las figuras se superponen trazando rectas, hecho que permite inferir su conocimiento. Esto es, los puntos correspondientes están alineados con el lugar donde se superponen. Además, intuyó que ese punto es importante para resolver la tarea, aunque no sea claro el por qué. Por su parte maría, en principio manifestó algunas dudas a su compañero, pero propone muy pocas ideas que permitan comprobar si comprende completamente o no en qué consiste la tarea. En este momento el profesor pudo o tal vez debió intervenir para que la intención en la situación adidáctica fuera expuesta, elemento fundamental en la interacción del alumno con el medio. No obstante, el profesor siguiendo la idea de Carlos, preguntó dónde se superponen las figuras (133), provocando que los alumnos nuevamente formularan la alineación utilizando la herramienta recta, trazando a ojo dos rectas que pasaran por dos pares de puntos homotéticos (134 y 135). Una vez trazadas las rectas se hizo evidente el centro de homotecia y maría calculó a ojo la posición donde la imagen del triángulo rojo quedaría y colocó el círculo imagen allí, en la *"mitad"* entre el círculo preimagen y el centro de homotecia, que casualmente estaba sobre una de las rectas (140). Para ese primer círculo, esa era la posición solución. Ante la pregunta del profesor, de cómo la encontró (141), maría respondió: *"al tanteo… van a avanzar, pero se van a alejar a la mitad… de la distancia"* (142, 145 y 146). Carlos acompañó la idea proponiendo: *"el triángulo verde se mueve la mitad de*

la distancia de cómo se está moviendo el rojo a base del punto donde se superponen… si estuviera a diez, este estuviera a cinco" (148 y 149). Cuando el profesor preguntó *"a diez de dónde",* Carlos respondió *"del punto donde se superponen".*

Las líneas precedentes sugieren que los alumnos entendieron en qué consiste la tarea. Además, muestran cómo se pusieron en juego los conocimientos adquiridos durante las situaciones adidácticas previas, su formulación a través de herramientas de construcción y mediante el intercambio de ideas, acompañadas de oportunas intervenciones del profesor que constituyeron actos de devolución en la mayoría de los casos.

Para ubicar el segundo círculo, Carlos tomó el ratón y construyó una recta por un par de puntos homotéticos del par de triángulos correspondientes al círculo que debía ubicar (156). Esta vez, a diferencia del primer círculo anticipado, la recta no queda sobre el círculo fijo (donde quedará la preimagen), pero inmediatamente reconoció el error en su estrategia: "*solo cruza a un círculo, debería… pues debería, pero uno infiere igual si uno traza una línea por la mitad de este círculo… porque, ahí están entre los triángulos que están fijos, pero necesitamos encontrar la posición si ponemos el triángulo rojo en dónde quedaría el verde"* (158 y 160). Una vez invalida la acción anterior, cambia la estrategia y traza una recta por los centros del círculo fijo y su correspondiente, el que debe ubicar (169). María en ese momento le sugiere dónde ubicar el círculo y propone una estrategia perceptiva: *"pero igualmente a simple vista este se puede mover por acá. Entonces, si colocas al rojo acá el verde iría acá. Porque acá está el punto… sería por la mitad"* (170). Carlos se suma a esta estrategia y arrastra el círculo y lo ajusta a ojo para que la recta pase por el centro de homotecia y el círculo libre quede a la *"mitad"* entre el lugar donde las figuras se superponen y el círculo fijo (183). La estrategia utilizada para trazar la recta es ligeramente distinta a la que habíamos contemplado en el análisis a priori: trazar primero la recta por el centro del

círculo fijo y el centro de homotecia. Sin embargo, ambas obedecen a la misma idea, garantizar la alineación. Por otra parte, la estrategia utilizada para determinar la distancia a la que debían ubicar el círculo del centro de homotecia corresponde con una de las esperadas, ajustarla a simple vista.

Al presionar el botón *continuar*, se ejecutó la retroacción que mostraba el texto: *ahora lleva cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color y estilo. Luego haz clic en el botón verificar*. Como el círculo no lo habían colocado con la suficiente precisión, los dos triángulos no quedaron completamente dentro de los círculos correspondientes, pero sí muy cerca (185 y 186). El profesor mediante un acto de devolución preguntó: *¿cómo podríamos mejorar la precisión?* (187). Carlos respondió: *"si hubiera una herramienta de regla, simplemente todo esto fue al ojo… por eso es muy fácil fallar"* (190 y 191). El profesor en ese momento sugirió dibujar un segmento y mostrar su longitud (192), explicándoles cómo hacerlo (193-196). Carlos reinició la tarea y esta vez empezó a resolverla trazando un segmento entre un par de puntos homotéticos y mostrando su longitud (199). No estaba muy seguro de esta estrategia, de modo que se dirigió a maría: *"la otra es conectar al punto donde se interceptan"* (205). Ella le respondió: *"primero hacer las líneas y luego sí lo hacemos"* (206). Tal vez este cambio de ideas obedezca a haber recordado que la razón la habían calculado con las distancias de los puntos homotéticos al centro. Seguidamente Carlos construyó el centro de homotecia trazando dos rectas, como lo había hecho antes; ocultó una de ellas y dibujó dos segmentos, uno con extremos en el centro de homotecia y un vértice de dos uno de triángulos y el otro su homotético. Hizo visible las medidas de ambos segmentos agregó: *"ahí comprobamos que es el doble"*. Seguidamente preguntó: *"ahora cómo utilizamos esto, cuando vayamos a mover los triángulos, tenemos el punto donde se superponen. Pero, cómo hacemos acá"* (217). Tenía claro que debía hallar la relación entre las distancias de dos puntos correspondientes al centro de homotecia, pero dudaba cómo utilizar esta relación para resolver la

tarea. María sugirió: *"es como la mitad de esto"* mientras señalaba el círculo fijo y el centro de homotecia (220). Carlos, atendiendo a la idea de maría, construyó un segmento con extremos en el centro de un círculo fijo y el centro de homotecia y mostró su longitud, la cual era algo más de 15 unidades (221). Siguió diciendo: *"entonces la mitad es 7.7 pero igual no se puede ver"* (222). "*¿qué necesita?"* (223), preguntó el profesor. *"calcular en dónde va a ser la mitad. Sabemos cuál es la distancia, pero no sabemos poner un punto en la mitad"* (224), respondió Carlos. Se deduce que sabía cuál debería ser la distancia del centro del círculo libre al centro de homotecia, pero no sabía dónde ubicarlo para que quedara a esa distancia, con la precisión suficiente para resolver la tarea. María sugirió una estrategia perceptiva que les daría la solución*: "pon un punto sobre el segmento y haces otro al punto de intersección"* (225). Él llevó a cabo la estrategia, construyó el segmento sugerido por maría y mostró su longitud. No obstante, antes de que validaran la acción el profesor intervino, mediante lo que consideramos fue una interrupción a las acciones autónomas de los alumnos y por lo tanto no constituyó un acto de devolución: *"hay otra estrategia. Toque el segmento grande. ¿cuál de esas herramientas le sirve para hallar el punto medio?"* (227). Carlos sin dudarlo hizo lo sugerido por el profesor y exclamó: "*¡ah! Punto medio. Sí, es más fácil" (*229). Con esta herramienta de construcción encontró las posiciones solución de los centros de los círculos libres y resolvió la tarea (229). Luego, al presionar el botón *Verificar*, se ejecutó la retroacción de verificación y validaron la acción metiendo los triángulos en los círculos correspondientes.

A pesar de que el profesor interrumpió la interacción de los alumnos con el medio (227), lo sugerido no fue una acción completamente distinta a la de maría, se trataba de la misma idea, solo que la de ella era de carácter numérico, mientras que la propuesta por el profesor era de

carácter geométrico. Por lo tanto, estimamos que la validación de esta acción también valida indirectamente la estrategia truncada de los alumnos, afortunadamente.

María tomó el ratón y empezó a resolver la tarea con razón -0.5 (232). Ella sin ninguna dificultad identificó dos puntos homotéticos y entendió que esta es la configuración donde las figuras aparecen a lados contrarios del lugar donde se superponen, pero que las propiedades son las mismas. Por lo tanto, recurrió a la misma estrategia usada para encontrar el centro de homotecia: *"si observamos la figura, este punto es el mismo que este, lo que pasa es que la figura está al revés"* (235). En ese momento el profesor les preguntó: "*¿cualquier punto sirve?"* (240). Carlos replicó: *"mientras sea el mismo punto del otro triángulo".*

En el párrafo anterior, comprobamos que identifican, no solo que los puntos correspondientes, también que solo estos están alineados con el lugar donde se superponen las figuras. En otras palabras, cada vez se adaptan más al medio, conforme interactúan con él.

Carlos continuó formulando la estrategia con la que pretenden resolver la tarea: *"primero encontramos, como lo hicimos antes, el punto donde todos se superponen… ahora encontrar el centro del círculo. ¡ah! Pero con dos puntos lo encuentro y estos deben ser opuestos para que, dé el centro exacto"* (249 y 250). Observa la figura, intercambia algunas palabras con maría y concluye: *"creo que está claro, acá es como el otro, el doble de distancia y se mueve en direcciones contrarias".*

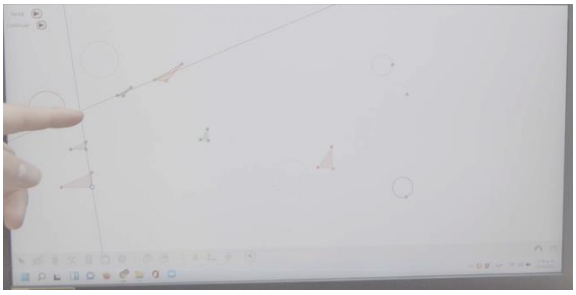
En este momento el tiempo disponible para la sesión se agotó y se suspendió el desarrollo de la situación adidáctica. A pesar de esto, hasta este momento es claro que los alumnos cuentan con una estrategia para resolver las tareas: encontrar el centro de homotecia trazando dos rectas por dos pares de puntos correspondientes, medir las distancias entre estos dos puntos y el centro de homotecia, para determinar numéricamente la razón de homotecia y luego ubicar el círculo libre

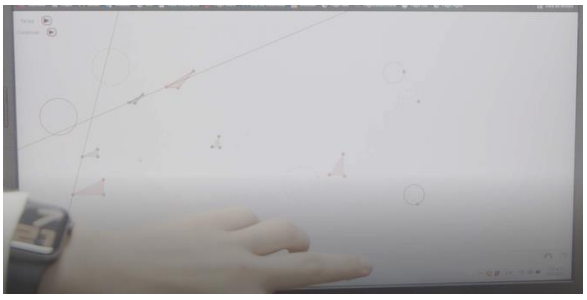
alineado con el círculo fijo y a la distancia tal que la razón corresponda con la de los triángulos. Esta es precisamente una de la estrategia solución prevista en el análisis a priori.

Continuamos exponiendo la segunda parte de las evidencias de esta secuencia, que se encuentran completas en los anexos, en el apéndice c. Terminamos con el análisis de esta última parte del pilotaje.

No	Sujeto	Descripción
1	P	Vamos a repasar la última actividad que hicimos (nueva sesión).
2	Carlos	[abre el archivo, hace clic en el botón *tarea* y lee la consigna: "¿dónde crees que quedarán los triángulos verdes cuando lleves cada triángulo rojo al círculo de su respectivo color y aspecto? Lleva los círculos verdes a dichas posiciones y luego presiona el botón verificar"].
3	María	Ok entonces cómo fue que hicimos unas líneas.
4	Carlos	El mismo punto de cada triangulo, entonces donde se intersecan.
5	María	¡ah sí! [construye una recta que pasa por un par de puntos homotéticos].
6	P	Creo que ahí puso un punto, selecciónelo y arrástrelo [intenta construir una segunda recta haciendo clic sobre un punto inerte y agregó un punto nuevo].
8	P	Ese no se deja seleccionar, ese sí [los puntos inertes no permiten construir objetos seleccionándolos directamente].
9	María	[construye otra recta por dos puntos homólogos]
10	P	¿Por qué va ese con ese? [le pregunta a maría].
11	María	Porque son del mismo grosor.

12	P	No, digo…
13	María	O sea, el punto.
14	P	…digo el triángulo rojo tiene tres puntos, tres vértices. ¿cómo supo que era ese el punto?
15	María	¡ah! Pues, podemos observar que la figura no está invertida, están en la misma posición en vez de estar rotada. Entonces podemos observar de dos tiene una punta de donde la seleccioné es igual en la pequeña, digamos si yo seleccioné este va a ser este, si este, este [señalando con el apuntador cada par de puntos homotéticos]
16	María	Y ahorita es más fácil porque no están invertidas ni nada.
17	P	¿hay casos en los quedan invertidos?
18	María	Si hay casos.
19	Carlos	Lo de la distancia, lo del segmento.
20	P	Iba a trazar otra recta.
21	María	Sí, pero va a quedar acá, no tiene sentido (sabe que la tercera recta concurre con las otras dos).
22	Carlos	Si, ya lo tenemos.
23	María	Es esta [la herramienta segmento]… y después cómo…

24	Carlos	Lo trazas al punto de donde se superpone.
25	María	Ah, bueno [construye el segmento de un punto del triángulo rojo al punto donde se superponen].
26	Carlos	Cómo es que se mira la distancia.
27	P	Pero primero, qué quisieron hacer ahí.
28	María	Lo de las medidas.
29	Carlos	Lo que hicimos arriba.
30	P	Y ese punto que colocaron arriba.
31	Carlos	Ese punto fue sin querer.
32	María	[borra el punto] trata de arrastrar este punto acá (pretende un punto en la intersección de las dos rectas). 
33	P	¿quieren poner un punto allí? Cuando se resalten las dos en amarillo pueden hacer clic y colocar el punto (así se construye la intersección de dos rectas en DGPad). ¿eso era lo que querían?
34	Carlos	Es que acá no se ve bien.
35	P	¿qué no se ve bien?
36	Carlos	La distancia, es que no estoy seguro si marca.
37	María	Todo.

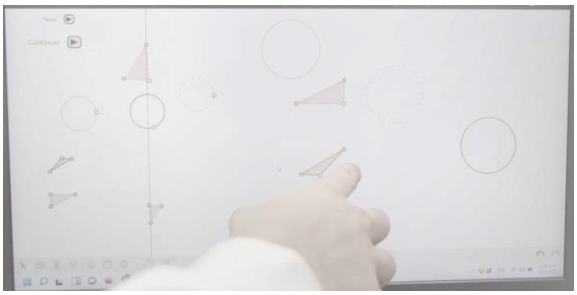
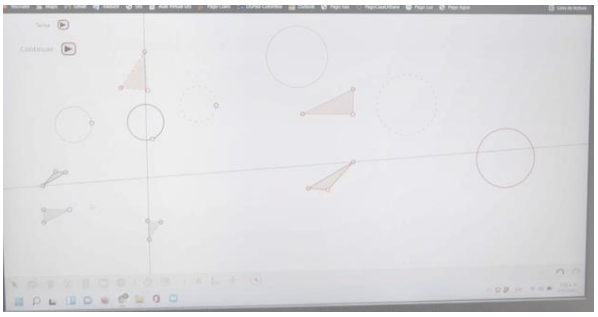
38	P	¿lo colocaron? El punto que querían. Si quiere, borre ese punto [había construido un punto nuevo sin querer].
39	Carlos	Sí, [corrige y construye la recta que pasa por un par de puntos homotéticos].
40	P	¿de dónde a dónde?
41	Carlos	Del punto donde se superponen a cada triangulo y ahí determinamos.
42	P	¿a cada triángulo?
43	Carlos	Sí, porque pues acá al ojo se nota que es el doble. De acá puede ser 10 y al triángulo verde sería cinco.
44	Carlos	Sí, pues igual para cada uno son diferentes.
45	P	¿esa relación cambia?
46	Carlos	En los ejercicios.
47	María	No, si medimos esto a simple vista, decimos que es la mitad. 
48	P	O sea, que cambia en otro archivo

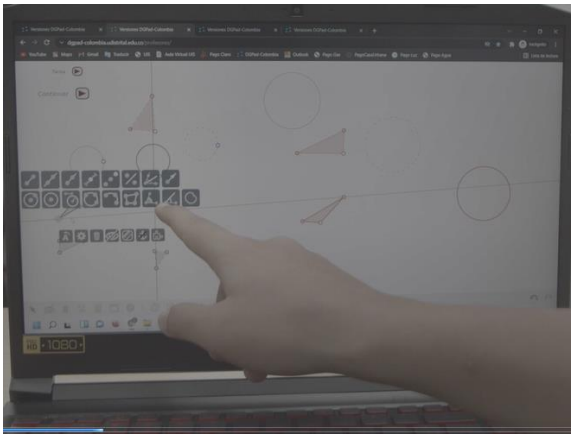
49	Carlos	Ajá, en otro archivo.
50	María	¿por qué lo vas a poner ahí? [le dice a Carlos]
51	Carlos	Es para que no se crucen [construye un segmento del centro de homotecia a un vértice de un triángulo que no está sobre las dos rectas ya construidas].
52	Carlos	Ahí hay cuatro con once y luego hacíamos esto… ash...
53	P	¿qué pasó?
54	Carlos	Mejor hacerlo en el mismo punto de donde hicimos la línea.
55	P	¿es mejor o es necesario?
56	Carlos	Es necesario.
57	María	Sí, porque ahí está más cerca.
58	Carlos	No sé, si se puede hacer zoom con el ratón (los números correspondientes a las longitudes de los segmentos y demás objetos estaban superpuestos y querían evitar esto).
59	P	Creo que se puede arrastrar el texto haciendo clic, seleccione la primera opción de texto, allí sin soltarlo.
60	Carlos	No.
61	P	Otra vez, sin soltarlo.

62	María	Perdón yo me acuerdo de que podíamos borrar.
63	P	Ahí, arrástrelo hacia arriba.
64	Carlos	Bueno, ahí se nota de este punto del triángulo al punto donde se superponen es 2.06 y el otro es de 4.12. Entonces, la distancia de este punto al punto donde se superponen es el doble que este punto al que se superponen, esa relación se va a mantener igual da igual en donde esté cada triángulo.
65	P	Ok.
66	Carlos	Y a base de eso, podemos medir en dónde va a quedar el triángulo verde cuando uno mueva el triángulo rojo. Acá lo que hacemos es poner otro punto [ubica un punto aproximadamente en el centro del círculo rojo].
67	María	¿qué estás haciendo?
68	Carlos	¿dónde marcar la intersección?
69	María	¡ah ok! Yo creo que ahí, un poquito…
70	P	Ahí quedó en la intersección con la recta.
71	María	Pero un simple punto.
72	Carlos	Usualmente lo hacíamos al ojo.
73	P	Puede ponerlo en cualquier parte.
74	María	Por eso como el punto que hacías con el clic.
77	Carlos	Si lo hacemos con punto medio es exacto [ubica dos puntos sobre el círculo, construye el punto medio de estos y los ajusta para encontrar el centro del círculo]. Que quede en la misma posición de un círculo, si queda acá y luego acá. O sea, estamos tratando de trazar una línea de diámetro.

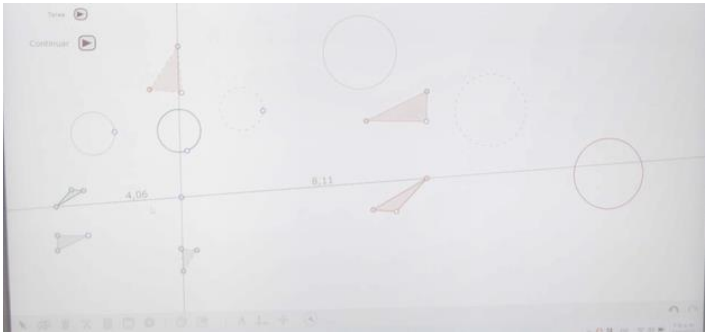
78	P	¡ah! El diámetro.
79	Carlos	Obviamente acá la línea no es perfecta [indicando que el punto que encontraron no es exactamente el centro del círculo] no tenemos una herramienta para que sea una regla o algo.
80	P	Bien.
81	Carlos	Pero igual ahí quedó más o menos en el centro… y luego hacíamos otra de segmento o punto medio, creo, de acá a acá [construye el punto medio del centro del círculo y el centro de homotecia]… y ahí va el otro círculo.
82	María	Entonces movemos.
83	Carlos	No sé si toca hacerlo con todos los círculos, yo creo que sí, [ubica un punto en el centro del otro círculo rojo y encuentra el punto medio de ese centro y el punto donde se superponen las figuras].
84	María	¡ah! Ok, ya me acordé.
85	Carlos	Así encontramos la posición.
86	María	¿cuál es la tarea?
87	Carlos	Movemos los círculos, este va acá porque va en par con el otro de línea punteada. La idea es que quede en lo más en el centro, o sea, que ese punto lo más en el centro del círculo posible [arrastra los círculos verdes a hasta esos puntos]

88	Carlos	[hace clic en el botón *continuar* y lee la consigna] ahora lleva cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color y estilo, haz clic en botón *verificar*. [arrastra los triángulos rojos a los círculos respectivos y los triángulos verdes quedan dentro de los círculos correspondientes]. Igual este queda muy preciso [hace clic en el botón *verificar* y lee la consigna] ¡muy bien has terminado la tarea!
89	P	Vamos a la otra pestaña [allí está abierto el archivo con la misma tarea, razón de homotecia -1.5 y centro distinto].
90	Carlos	[hace clic en el botón *tarea* y lee la consigna] ¿dónde crees que quedarán los triángulos verdes cuando lleves cada triángulo rojo al círculo de su respectivo color y aspecto? Lleva los círculos verdes a dichas posiciones y luego presiona el botón *verificar*.
91	María	…entonces…
92	Carlos	Primero las líneas entre triángulos iguales. Por ejemplo, en este pasa lo que dijo maría, los triángulos no están en la misma dirección, sino que están rotados. Este está al revés del otro.
93	María	Pero entonces observando la figura se puede reconocer.

94	P	¿ustedes dicen que se puede reconocer en la figura qué punto va con cuál?
95	María	Sí profesor, para mí, en mi caso, yo pienso es específicamente uno que es la punta, aunque también se reconocería este es más a simple vista que la punta. 
96	P	Es aguda.
97	María	Más aguda.
98	Carlos	Este es como ochenta y cinco grados y este de acá se nota más, pon un punto sobre la intersección solo haz dos [sugiere a maría].
99	María	[construye dos rectas por dos pares de puntos homotéticos]. 
100	P	¿por qué solo con dos?
101	María	Pues ya sabemos este punto y, si los conectamos aun así vamos a saber…
102	Carlos	La otra línea se va a trazar igual.
104	María	¿cuál es que usamos?

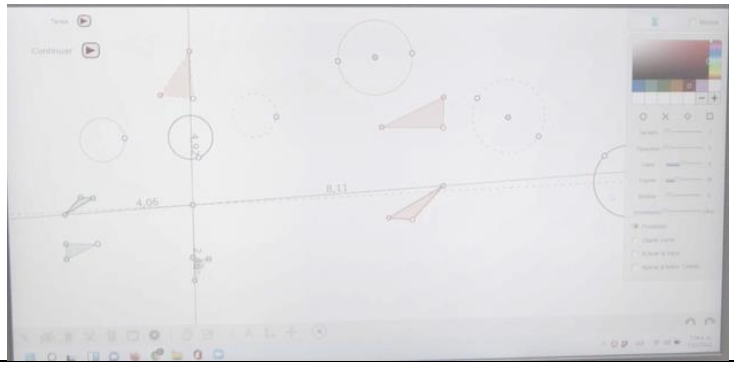
105	Carlos	Pon un punto acá [señala la intersección de las rectas]. 
106	María	¡ah! Ok.
107	P	Ese lo puede borrar haciendo clic en él y aparece la canasta [había construido un punto sin querer].
108	Carlos	Ahora la de los círculos. ¡ah! ¡no! Primero el de las distancias. Y acá también es distinto como el movimiento de los triángulos. A simple vista se ve que sigue siendo el doble. Del rojo al punto que se superponen, del verde al punto, lo que pasa es que ahora están en direcciones opuestas. Pues, el verde puede estar a cinco y el rojo debe estar a diez.
109	Carlos	¿cuál es el que usas?
110	P	Carlos ¿usted está de acuerdo?
111	María	Sí, estoy de acuerdo.
112	P	Como está la recta y el segmento, cuando le dé clic aparecen los dos (maría hizo clic sobre dos objetos superpuestos).
113	Carlos	Segmento [le indica a maría que debe seleccionar la opción segmento]
114	María	Ok.

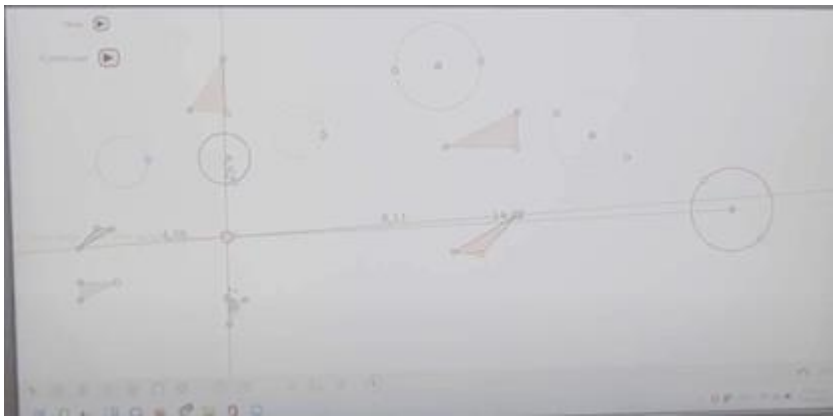
115	Carlos	Y la regla abajo a la derecha y ahora punto medio.
116	P	¿punto medio?
117	Carlos	Si para haber el punto sobre esa línea y hacer otro segmento.
118	María	Pero esta es acá
119	Carlos	¡ah! Ok.
120	María	Entonces voy a hacer lo mismo… y se nota que es el doble.

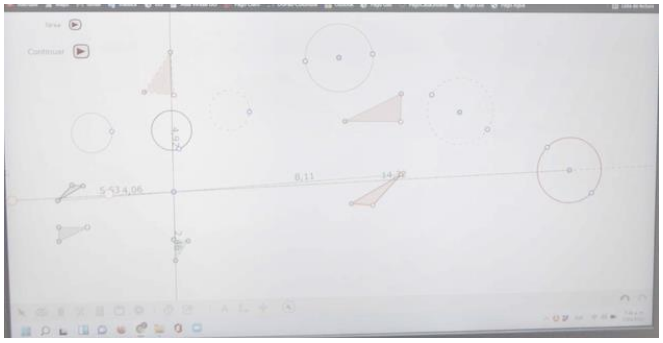
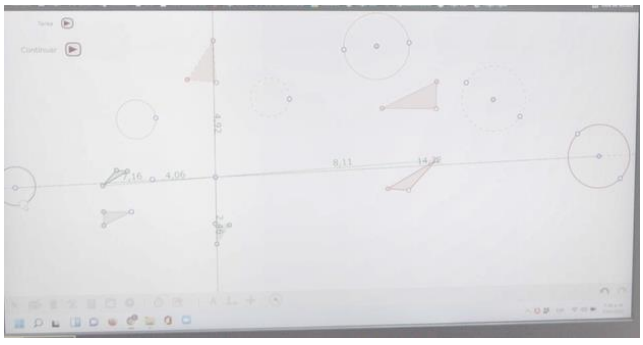


121	Carlos	No sabemos cómo se mueven las figuras.
122	María	Sí.
123	Carlos	Sí, se mueven en dirección opuesta, aunque están así, creo que se mueven en direcciones opuestas. Si pones el punto donde se superponen en la mitad, pero…
124	P	¿pero ahí está en la mitad?
125	Carlos	Sí, sí, por eso de acá a acá va a ser el doble de acá a acá, lo que pasa es que este antes debería estar acá (en caso de que la razón sea positiva).
126	Carlos	Ahora se mueven en direcciones opuestas.
127	P	A ver si lo podemos decir de otra manera. ¿podemos decir que los dos triángulos están a lados contrarios del punto donde se superponen?

128	Carlos	Sí, y se mueven en direcciones opuestas,
129	María	Sí porque si no estos, si se movieran en la misma dirección se podría decir que estuvieran al lado.
130	Carlos	Este estaría por acá o este estaría por acá [señalando posiciones opuestas al punto donde se superponen]
131	Carlos	Así era en el otro ejercicio.
132	P	Creo que ahí hay un punto que no corresponde, pero está bien.
133	Carlos	Borra eso [le indica a Carlos que borre el punto sobrante]
134	María	[construye dos rectas que pasan por dos pares de puntos homólogos, encuentra el centro de homotecia].
135	Carlos	Ahora los puntos en la mitad de los círculos rojos.
136	Carlos	Primero hago esto y luego lo otro [ubica puntos los centros de los círculos, con la misma estrategia de antes].
137	María	Y entonces…
138	Carlos	Ahora trazas una línea, no espera, sí.
139	P	¿cómo una línea?
140	Carlos	Trazas una línea.
141	María	en el anterior. Una línea del centro a acá y hallamos la mitad.
142	Carlos	Pues sí, pero sería luego marcar de acá a acá [del centro homotecia al centro de un círculo rojo]. Esa distancia, porque antes era en la misma dirección. Entonces, de donde está, lo que podemos hacer es espichar (hacer clic en) este punto [el punto donde se superponen todas las figuras] y la segunda.

143	María	Listo
144	Carlos	Ahora que pase por este punto, de pronto. Borra esta [una recta que se había trazado mal]… listo.
145	María	Sí.
146	Carlos	Pero borraste el punto [el punto donde se superponen las rectas].
147	Carlos	Dale acá [señala el comando deshacer].
148	Carlos	¿no se pueden marcar con otro color?
149	P	Sí claro, ahí en la ruedita (herramienta *propiedades*) y dele más abajo.
150	Carlos	[presiona el botón propiedades y cambia el color del punto] y ya. 
151	P	Seleccione construir otra vez.
152	Carlos	Entonces ahora sería medir la distancia. [construye un segmento del punto donde se superponen las figuras al centro del círculo] ahora en la reglita, sería 14.2, entonces no se puede… no, no… sí, ya.

153	Carlos	[construye un segmento que va del punto donde se superponen las figuras un triángulo verde].
		
154	María	Ahí no entiendo por qué lo pusiste ahí [Carlos había construido un segmento del vértice del triángulo verde al punto donde se superponen].
155	P	Puede ocultar la recta sin borrarla.
156	Carlos	¿ah sí?
157	P	Sí, haciendo clic en ella y oprimir el ojito.
158	María	Sí, en el ojito.
159	Carlos	Listo ya, entonces acá ya está ese punto.
160	P	María preguntaba por qué ese punto.

161	Carlos	Sí, porque ahí lo vamos moviendo para ir midiendo la distancia, pero nos quedamos sin espacio. 
162	P	Con clic derecho hacia la derecha no tanto, creo yo [sugiere para mover la página].
163	Carlos	Pues es llegar a siete con dos, pues ahí lo podemos arrastrar hasta la mitad de la distancia de acá al otro punto.
164	María	¡ah! Ok.
165	Carlos	Y ahí podemos poner el círculo… así. 
166	Carlos	Y es hacer el mismo proceso para los otros, de acá a acá [construye un segmento de un vértice de un triángulo rojo al punto donde se superponen todas las figuras]
167	María	Sigo [agarra el ratón]… entonces sería la mitad.

168	Carlos	¡ah! No, espere la hicimos con la herramienta que no era [necesita una recta y utilizó segmento]

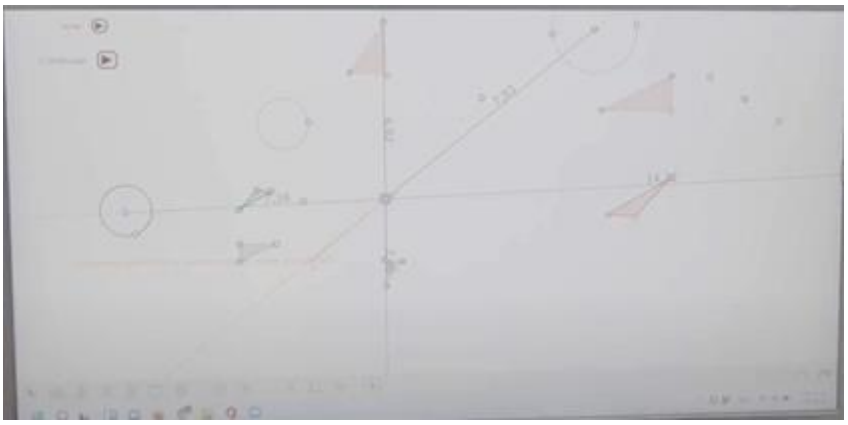
169	Carlos	Si quieres borra eso.
170	P	¿por qué eso no?
171	Carlos	Porque esa hace de acá a acá y la otra línea si sigue derecho. (necesitan prolongar el segmento hacia el otro lado del centro de homotecia).
172	María	¡ah! Ok.
173	Carlos	Y es necesario eso porque al ojo no se puede hacer.
174	María	Sería esta [señala la herramienta recta].
175	Carlos	Sí esa, la segunda.
176	P	Qué diferencia hay entre esas dos herramientas
177	María	Que la otra solo nos dice la medida de acá a acá.
178	Carlos	[traza una línea entre ambos puntos]
179	María	Esta sigue derecho.
180	Carlos	Y es necesario porque el otro punto lo necesitamos marcar por fuera de esa línea.

181	María	Va a estar en esta línea donde vamos que ubicar el círculo. El triángulo va a estar ubicado en alguna parte de esta línea, entonces vamos a medir la mitad de esto [refiriéndose la distancia del centro de homotecia al vértice del triángulo rojo].

182	María	Esto y vamos a sacar la mitad.
183	Carlos	Vas a hacer el otro punto, seleccionas y haces la primera y, en la línea espichas y seleccionas el segmento ahí sí la recta.
184	María	[construye un segmento del centro del círculo al punto donde se superponen las figuras y muestra la longitud segmento].

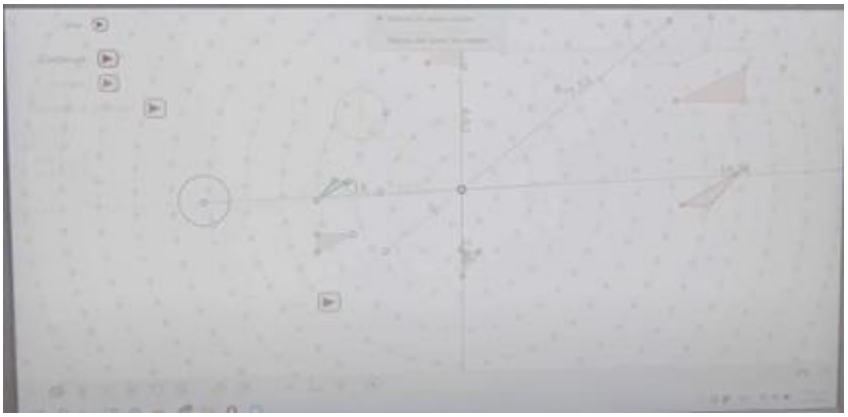
185	María	¡ah! Ok, listo siete cincuenta y tres.
186	Carlos	La otra debe…

187	María	La otra debe ser tres veintisiete.
188	Carlos	Ser tres veintiséis.
189	P	¿será? Porque con 3.5 da siete,
190	Carlos	Tres con setenta y seis, no, sí más o menos. Porque no muestra más de dos decimales.
191	P	¿qué quiere hacer maría?
192	María	Quiero trazar un punto.
193	Carlos	Oprima el punto en cualquiera de los dos y lo trazas en donde quede.
194	María	[construye un segmento sobre una de las rectas, desde del centro de homotecia hasta otro punto en el lado opuesto].



195	Carlos	Ahí… y ahora pon la regla.
196	María	Sí.
197	María	[muestra las coordenadas del punto y hace clic en deshacer]
198	P	Deshacer no sirve, vuelva a la regla. Y rehacer.
199	María	[hace clic en rehacer]

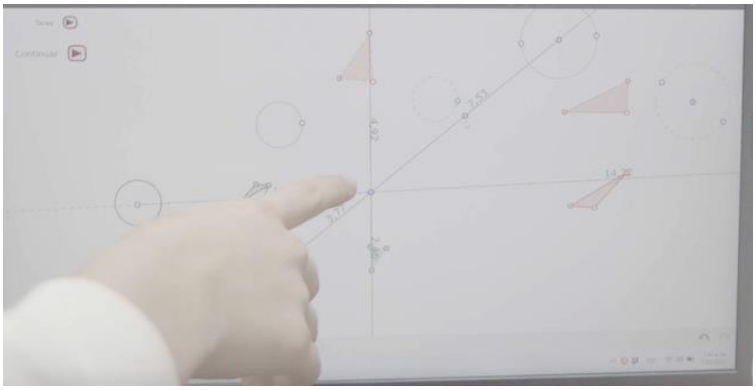
200	Carlos	¿por qué la borró?
201	P	No la borró, la ocultó, hay un error de la interfaz, si quiere presione el ojito.
202	María	¡ah! Bueno, dale [entregándole el ratón a Carlos].
203	Carlos	¿no se puede poner a visualizar todo?
204	P	Sí, la recta… en el ojito.
205	Carlos	[hace clic en la herramienta *ocultar/mostrar*].



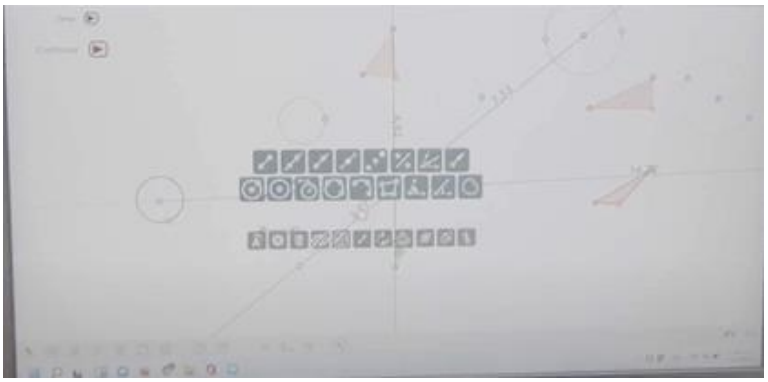
206	P	… y haga clic en la recta… eso, en la primerita.
207	Carlos	[hace visible la recta]
208	Carlos	Y el segmento también, entonces ahora segmento [muestra la longitud del segmento], ponemos los números y quede tres con sesenta y seis.

209	María	Ajá.
210	María	Yo creo que más.
211	P	¿seguro? ¿no debe ser más?
212	Carlos	No porque tres con setenta y uno sería siete con setenta y dos.
213	P	¡ah! Ok.
214	Carlos	Entonces seria tres con cincuenta y seis, más o menos.
215	P	¿qué dibujó maría en la pantalla?
216	María	La esta.
217	P	¿el círculo?
218	María	Sí.
219	P	Ahí pueden dibujar círculos, tengo una idea. ¿les parece? Se las voy a compartir… trace el punto medio [señala en la pantalla]. (se refiere al punto medio del centro del círculo rojo y el centro de homotecia).
220	P	Ahora si necesitamos un círculo ¿qué círculo necesitamos?
221	Carlos	La mitad.
222	P	¿en dónde quedará el centro?

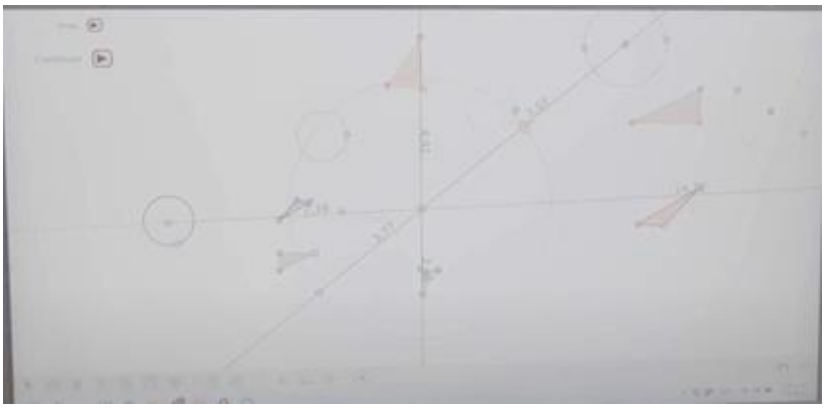
223	María	Aquí [señalando el punto donde todas las figuras se superponen].



224	María	[hace clic en el punto y despliega el menú de herramientas]

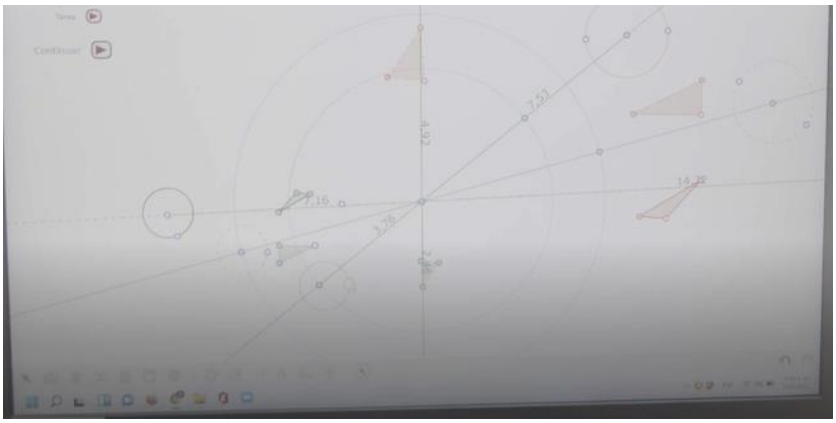


225	P	Ahí, exactamente. ¿cuál de esas le sirve? [hay tres opciones de círculo disponibles].

226	María	la primera. [construye un círculo con centro en el lugar donde se superponen  las figuras y un punto sobre la recta].
227	P	Ese… sí, ahí. Puede colocarlo en el lugar que quiera... No, en ese que se puede mover. Arrastre el punto un poco hacía la derecha, este [señalándolo en la pantalla]
228	Carlos	¡ah! Ok. Sí, ya te entendí [construye el segmento entre el centro de homotecia y la intersección del círculo y la recta y muestra su longitud]. Dio la mitad, pasemos al otro.
229	María	¿no es mejor primero moverlo? ¿qué hacemos?

230	Carlos	Acá no tocaría marcar distancia, pues después lo marcaríamos, pero creo que técnicamente lo podemos hacer así.
231		[construye el punto medio de la distancia entre el centro del círculo y el punto donde se superponen, construye un círculo con centro donde se superponen las figuras y ese punto].

232	María	¿pero ahí en dónde estaría?
233	P	¿hace falta algo?
234	Carlos	La línea.
235	María	No, porque la línea quedaría entre las figuras.
236	Carlos	No, porque acá quedaría el punto.
237	P	¿qué paso?
238	Carlos	No, yo pensé que era entre las figuras.
239	P	Y por qué no entre las figuras.
240	María	No porque vamos a mover las figuras, van a llegar allá.
241	Carlos	Quedaría por acá.
242	María	En el centro.

243	Carlos	No, más abajo. No, espera.
244	María	Acá [señala con la mano donde debe ir el círculo verde]
		
245	Carlos	Continuar [hace clic en el botón *continua*r y lee la consiga: "ahora lleva cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color y estilo" has clic en botón *verificar*].
246	María	Listo, verdes.
247	Carlos	No, rojos. Los verdes no se dejan mover.
248	María	¡ah! Sí.
249	Carlos	Listo terminamos.

En las filas 1-18, se muestra cómo los alumnos recuerdan, sin problemas, la estrategia que estaban usando para resolver la tarea de anticipación. María en este repaso con la razón de homotecia 0.5, resalta que para ella es más fácil identificar los puntos correspondientes cuando la razón es mayor que cero, al tiempo que los identifica correctamente en la configuración presentada: *"podemos observar que la figura no está invertida, están en la misma posición en vez de estar rotada. Entonces podemos observar de dos tiene una punta de donde la seleccioné es igual en la pequeña, digamos si yo seleccioné este va a ser este, si este, este".* Además, formula un conocimiento que

no había sido formulado explícitamente con anterioridad, cuando el profesor le preguntó por una tercera recta que intentó trazar (20): *"sí, pero va a quedar acá, no tiene sentido"* (21). Reconoce que basta trazar dos rectas, porque al trazar cualquier otra por cualquier par de puntos homólogos, dicha recta concurre con las dos previas. A continuación, María deduce a simple vista que la imagen dista del centro, la mitad que la preimagen (47). Carlos inconforme con la estimación a ojo, dibuja dos segmentos homotéticos y muestra sus medidas, como lo habían hecho en la sesión anterior y concluye que: *"bueno, ahí se nota de este punto del triángulo al punto donde se superponen es 2.06 y el otro es de 4.12. Entonces, la distancia de este punto al punto donde se superponen es el doble que este punto al que se superponen, esa relación se va a mantener igual da igual en donde esté cada triángulo… y a base de eso, podemos medir en dónde va a quedar el triángulo verde cuando uno mueva el triángulo rojo"* (64 y 66). Además, remarca que *"si lo hacemos con punto medio es exacto"* (77). Finalmente, al ejecutarse la retroacción fomentadora de validación, mete los triángulos dentro de los círculos correspondientes y concluye diciendo: *"este queda muy preciso"* (88), resaltando el nivel de precisión que ofrece usar la herramienta punto medio para calcular lo que ellos llaman "la mitad". Esto desde el punto de vista de la TSD es un refuerzo de las acciones, que constituyen la maduración del conocimiento gracias a la adaptación al medio.

Ahora veamos cómo afrontaron la tarea con razón -0.5. En las filas 90-99 de la transcripción, maría formula nuevamente su estrategia para identificar los puntos correspondientes, que consiste en identificar en ambos triángulos el ángulo más agudo. Ella lo expresa como sigue: *"yo pienso es específicamente uno que es la punta, aunque también se reconocería este es más a simple vista que la punta"* (95). En este caso, se evidencia una de las reflexiones hechas en el análisis preliminar, gracias a los aportes de Lemonidis (1991). Esto es, en

las configuraciones homotéticas con figuras que no tienen simetrías, es más fácil identificar los puntos homólogos que en figuras con simetrías internas, como en un triángulo isósceles, las letras c y s de la tercera secuencia de la primera actividad, incluso en círculos (dos círculos siempre son homotéticos y algunas configuraciones tienen dos centros de homotecia, conocidos como centros de similitud), entre otras. Más adelante, el profesor solicita identificar puntos correspondientes en uno de los archivos donde hay figuras con simetría, corroboraremos que se les dificulta un poco más, aunque los identifiquen finalmente.

De las líneas 99 a 120, usan nuevamente la estrategia que habían usado previamente para construir el centro de homotecia. Una vez obtenido este, maría se conforma con la estimación de la razón a simple vista y dice: *"se nota que es el doble"* (120). Carlos propone, de acuerdo con ella: *"de acá a acá va a ser el doble de acá a acá, lo que pasa es que este antes debería estar acá… ahora se mueven en direcciones opuestas"* (125 y 126). Ellos intentan usar la misma estrategia que usaron cuando la razón era 0.5 pero, se encuentran con un obstáculo. Construir el punto medio no es suficiente, porque lo necesitan ubicar al lado opuesto. Esto es, construir el punto medio y luego su simétrico respecto al centro de homotecia. Luego de dibujar algunos segmentos y calcular algunas distancias infructíferamente, a Carlos se le ocurre trazar primero una recta por el centro de homotecia y centro del círculo libre, poner un punto sobre ella, al lado contrario del círculo, mide la distancia y lo ajusta hasta que mida la mitad del otro segmento (152-161). Esta es una estrategia válida que habíamos contemplado en el análisis a priori, consiste en usar el arrastre para ajustar las distancias, valiéndose de la medida que ofrece DGPad, ubicando un punto sobre la recta que garantice la alineación del centro de homotecia con los puntos correspondientes.

En las filas 167- 218. María procede anticipar la ubicación del tercer círculo, tratando de replicar la estrategia que han estado usado antes: dibujar el segmento que va del centro de

homotecia al centro del círculo fijo, construir su punto medio, luego dibujar otro segmento en dirección opuesta y hacer que la medida sea igual a la distancia del punto medio trazado al centro de homotecia. El profesor interviene y les sugiere utilizar la herramienta círculo (219). Pregunta: "*¿qué círculo necesitamos? ¿dónde quedará el centro?*" (220 y 222). María sugiere que su centro sea el lugar donde se superponen las figuras (223) y continúa construyendo un círculo con el centro indicado, que pase por punto medio construido previamente. Carlos interrumpe a maría diciendo: *"¡ah! Ok. Sí, ya te entendí"* (228). Marca la otra intersección del círculo con la recta que se encuentra al otro lado del centro de homotecia, agregando que: *"acá no tocaría marcar distancia, pues después lo marcaríamos, pero creo que técnicamente lo podemos hacer así"* (230). Sabe que el círculo le garantiza que las distancias sean iguales y por lo tanto no necesita usar la medida que ofrece DGPad. María, de acuerdo con Carlos, señala que el círculo debe quedar en la intersección del círculo con la recta y lo lleva a esa posición (244). Al presionar el botón *continuar* y la retroacción fomentadora de validación activa el movimiento de los triángulos y validan su estrategia (245-249).

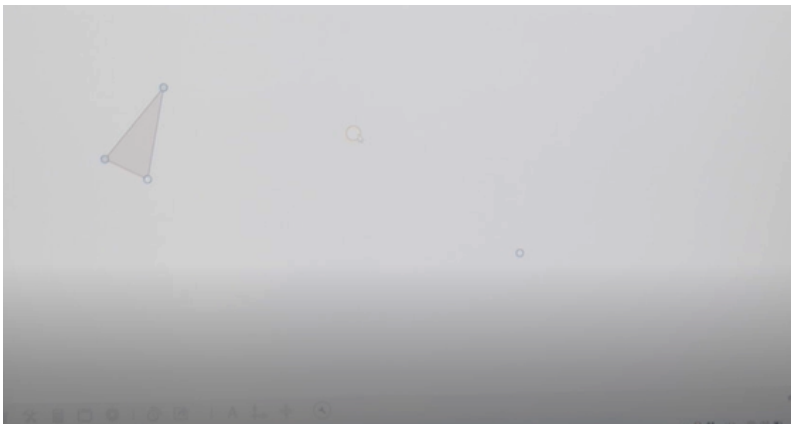
Del desarrollo de esta secuencia, podemos concluir que los alumnos siempre utilizaron la alineación para construir el punto donde las figuras se superponen, formulando este conocimiento mediante el uso de la herramienta recta; utilizaron la posibilidad que ofrece DGPad para medir segmentos y garantizar numéricamente la relación entre las distancias de los puntos homotéticos al centro; gracias a algunas intervenciones del profesor, que podrían estar en el límite entre un acto de devolución y el efecto topacio, los alumnos utilizaron la herramienta punto medio y la herramienta círculo, para garantizar esa relación geométricamente, prescindiendo de lo numérico. Todas estas estrategias son coherentes con lo que habíamos propuesto en el análisis a priori y dan

cuenta del funcionamiento teórico de las retroacciones didácticas, que vale la pena analizar en conjunto con la primera secuencia y lo haremos más adelante.

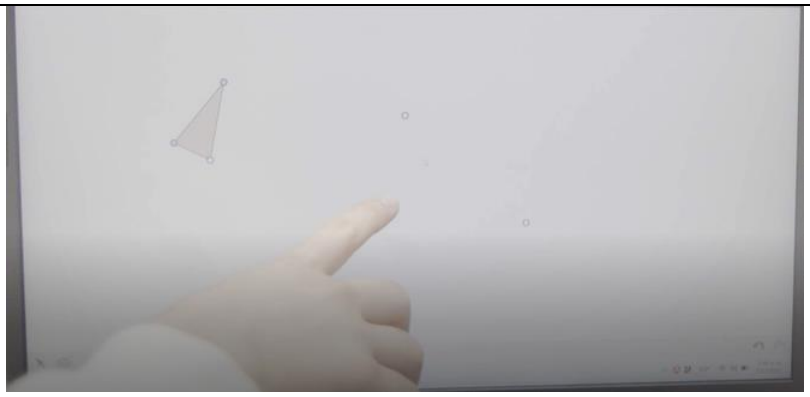
Dado que las razones de homotecia propuestas son bastante limitadas, se decidió hacer una reflexión adicional con los alumnos para indagar sobre las dos propiedades fundamentales: la alineación y la razón de homotecia. Las cuales implican identificar el centro de homotecia y los puntos correspondientes en cada par de figuras. Las evidencias de esta reflexión la presentamos a continuación y se encuentra completa en el apéndice c de los anexos, como continuación de las evidencias presentadas anteriormente.

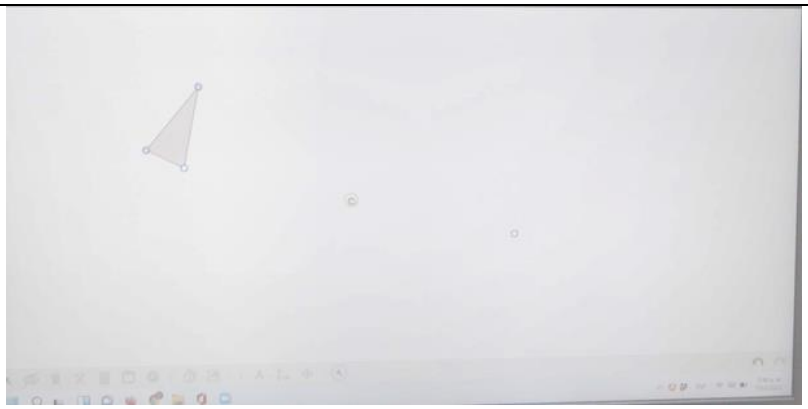
Reflexión adicional de los alumnos y el profesor.

250	Carlos	Esa relación variaba en los ejercicios porque se mueven en la misma dirección, pero en el anterior se movían en direcciones opuestas.
251	P	Vamos a suponer que se mueven en la misma dirección. Entonces, si este es el triángulo rojo y este es el vértice del triángulo verde que corresponde. ¿podría estar aquí?

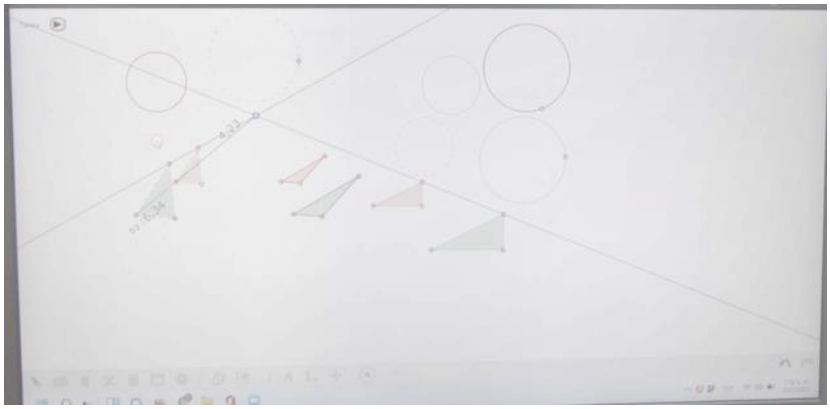


252	María	Yo lo pondría por aquí [señalando con la mano el lugar de la pantalla]

		
253	P	¿por qué por aquí?
254	Carlos	Trazar un punto medio.
255	P	¿ese punto siempre era la mitad?
256	María	Pero este es [señalando con la mano el hipotético centro de homotecia]...
257	Carlos	En los ejercicios que se movían a la misma dirección siempre era la mitad, entonces trazo el punto medio y tiene que estar ahí [ubica el punto donde encuentra el punto medio].

		
258	P	¿pero siempre era la mitad?
259	María	Sí, pues siempre nos dio la mitad… ¿no era?
260	P	[abre un archivo donde la razón de homotecia es -0.5]. Allí por ejemplo… ¿es la mitad?
261	Carlos	Si, ahí sigue siendo la mitad del que se mueve, o sea, la mitad de la distancia del punto donde se superponen solo que ahora es en direcciones opuestas.
262	P	¿qué tal este? [abre otro archivo con razón de homotecia 1.5]. Ahí, por ejemplo.
263	Carlos	Tocaría trazar la línea.
264	Carlos	Sí, para que no se cruce con la recta.
266	Carlos	No, acá no es la mitad es como un sesenta y seis por ciento.
267	P	O sea, que esa relación podría cambiar.
268	Carlos	O sea, que acá es seis y el otro es nueve.
269	P	Yo les preguntaba ahorita que, si tenía este vértice… ¿en dónde debería estar este? ¿por qué no podría estar por acá? [ubica un punto en la pantalla como

		un hipotético punto correspondiente de un vértice del triángulo rojo, que no está alineado con el centro de homotecia y el vértice del triángulo].



270	Carlos	Porque no cumple lo del movimiento, no cumple esa relación.
271	P	¿cuál relación?
272	María	La relación que los puntos siempre van alineados.
273	Carlos	Tiene que haber siempre… se puede trazar una línea entre ambos puntos y el punto donde se superponen todas las figuras.
274	María	Si estuviera aquí [señalando el punto construido por el profesor]
275	Carlos	La línea sería hacia arriba.
276	María	Entonces si va para arriba el punto donde se superponen sería diferente, no sería ese.
277	P	De acuerdo entonces vamos a ver, si yo tengo aquí… quiero hacer algo rápidamente, [realiza la construcción de un triángulo]. Lo pueden mover como quieran… y voy a poner aquí el punto donde se superponen, cada par de puntos correspondientes, le voy a colocar color rojo, digamos que voy a buscar el compañero de este [señala un vértice del triángulo]… ¿podría estar

		acá? [ubica un punto que no está alineado con el vértice y el hipotético centro de homotecia].
278		
279	Carlos	No.
280	P	¿en dónde iría?
281	Carlos	En una línea recta.
282	P	Entonces, voy a trazar una semirrecta para quede siempre en este lado [construye una semirrecta con origen en el punto donde se superponen las figuras y un vértice del triángulo rojo. Luego, arrastra el hipotético punto imagen del vértice del triángulo hasta la semirrecta]. Si el compañero está aquí, entonces en dónde estarán los compañeros de este y este [señala los otros dos vértices del triángulo].

283	María	Pues podemos medir. Pero no, porque la figura es más pequeña.
284	Carlos	La relación…
285	P	¿qué relación van a buscar?
286	Carlos	La relación de este punto acá en comparación de este punto acá (hace referencia a la distancia que hay entre el par de puntos correspondientes al centro de homotecia).
287	María	¿y si pasa primero una línea acá?
288	Carlos	No, primero tenemos que hallar la relación. Porque ahí no es la mitad. Toca hacer un segmento [traza un segmento entre el punto donde se superponen las figuras y el punto homotético dado].
289	P	¿el segmento va a hasta ese punto?
290	Carlos	No, el primero de acá a acá y el segundo de acá a acá [construye el otro segmento homotético del inicial]. Pero acá no va a cumplir con la relación, ahí no sé. Nada que ver… hay que hacer una proporción.
291	P	Ahí la relación es cualquiera

292	Carlos	Sí, no cumple la de la mitad, la de sesenta y seis por ciento, profesor ahí no sé cómo se utiliza esa proporción.
293	P	¿es una proporción?
294	Carlos	O sea, es la relación entre ambos, no sé cómo se puede utilizar para colocar los demás puntos.
295	P	Entiendo, se nos agotó el tiempo. Vamos a dejar hasta aquí. Muchas gracias.

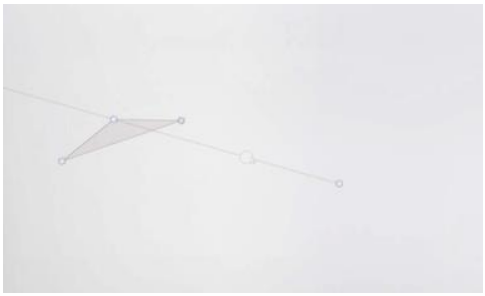
En las líneas 252-261, se muestra que el profesor dibujó un triángulo, un punto que representa el lugar donde las figuras se superponen y un tercer punto que representa un punto correspondiente a uno de los triángulos, ubicado de tal manera que no quede alineado con el hipotético centro de homotecia y algún vértice del triángulo (251). Tanto Carlos como maría inicialmente consideraban que el punto debía ser el punto medio de un vértice del triángulo y el lugar donde se superponen porque según ellos "siempre había sido la mitad" (257 y 259). De modo que el profesor abre un archivo de la tarea de anticipación donde la razón es 1.5 (262) y Carlos reconoce que la razón no es 0.5. Él sugiere que *"no es la mitad es como un sesenta y seis por ciento"* (266). Aquí claramente intercambió la imagen con la preimagen, dado que, si la razón es 3/2, su recíproca es 2/3 y esto se da si se consideran como preimágenes los triángulos verdes y no los rojos, como fue en cada tarea de las dos actividades. El profesor vuelve plantear la situación anterior: "*yo les preguntaba ahorita que, si tenía este vértice… ¿en dónde debería estar este? ¿por qué no podría estar por acá?".* Ubicando un punto en la pantalla como un hipotético punto correspondiente de un vértice del triángulo rojo, que no está alineado con el centro de homotecia y el vértice del triángulo (269). Esta vez, los alumnos sí formularon lo que se esperaba. Carlos por ejemplo dijo: *"porque no cumple lo del movimiento, no cumple esa relación"* (270). Y ante la

pregunta del profesor: *"¿cuál relación?"* (271). María respondió: *"la relación que los puntos siempre van alineados"* (272). Esto muestra que aun cuando la configuración es estática y no ofrece muchos elementos perceptivos, los alumnos reconocen que los puntos no están alineados, una manifestación clara del conocimiento de la alineación, madurado durante el desarrollo de las dos actividades.

Posteriormente, la reflexión se centra en la relación de proporcionalidad entre las distancias de los puntos homotéticos al centro. El profesor presenta la figura mostrada en la imagen y agrega: *"si el compañero está aquí, entonces en dónde estarán los compañeros de este y este".*

Figura 60.

Ejemplo proporcionalidad.



Esto es, se tiene la imagen de uno de los vértices y pregunta por la imagen de los otros dos, ubicando el punto arbitrariamente, para que la razón no sea ninguna de las ya trabajadas. María sugiere medir (283) y Carlos exclama: "*la relación*" (284). *"¿qué relación van a buscar?"* (285), pregunta el profesor. Carlos responde: *"la relación de este punto acá en comparación de este punto acá… porque ahí no es la mitad. Toca hacer un segmento"* (286 y 287). Considera medir las distancias de los dos puntos homotéticos dados al centro para compararlos y así conocer la posición del otro punto. Seguidamente agrega: *"pero acá no va a cumplir con la relación, ahí no sé. Nada que ver… hay que hacer una proporción… no cumple la de la mitad, la de sesenta y seis*

por ciento, profesor ahí no sé cómo se utiliza esa proporción" (290 y 292). El profesor le pregunta: *"¿es una proporción?"* (293) y Carlos responde: "*o sea, es la relación entre ambos, no sé cómo se puede utilizar para colocar los demás puntos".* En este momento se agotó el tiempo y se dio por concluida la experimentación. Sin embargo, esta última parte de la reflexión entre el profesor y los alumnos muestra claramente que al menos Carlos tiene claro que la razón podría ser cualquiera, no solo 0.5 o 1.5, aunque hasta el momento no tenga claridad de cómo garantizar esa misma relación para encontrar los otros dos puntos. La reconoce perceptivamente y este era un objetivo fundamental de nuestro trabajo. Por parte de maría, dada su poca participación en esta última discusión, no hubo evidencias fuertes de que identificara la relación de proporcionalidad en esta configuración, pero sí las identificó en las configuraciones presentadas en las dos actividades.

Reiteramos que la interacción de los alumnos con el medio es fundamental para ir construyendo los conocimientos necesarios para resolver las tareas y finalmente reconocer la relación de proporcionalidad. Posiblemente, si maría hubiera participado más en el desarrollo de las situaciones adidácticas propuestas, principalmente en estas últimas, contaríamos con más evidencias de la formulación del conocimiento por parte de ella, conocimiento que se hizo evidente en muchos momentos. Pero, fue más notoria la participación de Carlos. Sería interesante reflexionar sobre este hecho e indagar cómo el profesor pudo gestionar de mejor manera la participación de los alumnos y sus intervenciones. Cuestión que escapa a los objetivos de nuestro trabajo y por eso lo planteamos como una inquietud.

En cuanto a las retroacciones didácticas resaltamos que la retroacción que permitía mover los puntos por manteniendo de distancias al centro enteras, sin perder completamente la sensación de continuidad, funcionó como esperábamos. En primer lugar, porque no interrumpió ni distrajo a los alumnos de la interacción con el medio y, en segundo lugar, porque favoreció que operaran

fácilmente las longitudes enteras y encontraran la relación entre estas numéricamente. En este sentido, también la retroacción didáctica que mostraba los segmentos con las longitudes explícitas fue clave para que entendieran la importancia del centro de homotecia para reconocer y estimar la relación de proporcionalidad entre las distancias de los puntos homotéticos al centro. En efecto, cuando se les pidió anticipar la posición de la imagen en términos de la posición de la preimagen, lo primero que hicieron fue encontrar el punto donde las figuras se superponen. Aquí también jugaron un papel importante las retroacciones didácticas de anticipación y validación, porque permitió gestionar la tarea de modo que los alumnos comprendieran las tareas y tuvieran la necesidad de utilizar las dos propiedades fundamentales de la homotecia para anticipar y a la vez, que pudieran mover en un segundo momento, los triángulos para validar sus acciones. En otras palabras, favorecieron tanto el proceso de devolución, como el proceso de validación. Otras retroacciones funcionaron como gestoras de los momentos de la interacción, como las programadas en los botones *tarea, continuar, verificar, volver a intentarlo* y algunas consignas que se mostraban en función de las acciones.

10. Conclusiones

El uso del software de geometría dinámica (SGD), a pesar de ser una potencial herramienta para la enseñanza de la geometría, su implementación efectiva en el aula ofrece muchas dificultades a los profesores que intentan usarlo. Muchas de estas dificultades podríamos plantearlas mediante algunas preguntas como: ¿qué características del SGD fomentan el aprendizaje y de qué manera? ¿qué tipo de tareas se pueden proponer mediante en el SGD para enseñar geometría en la educación básica y media? ¿qué elementos teóricos permiten justificar, pensar y elaborar esas tareas? ¿qué rol juega el profesor en la clase con SGD? Etc. Consideramos

que la teoría de las situaciones didácticas (TSD), nos ofrece elementos para intentar aportar ideas que atiendan a estos interrogantes. Para ello concebimos una tarea en el SGD como un modelo teórico en el que las relaciones entre los cuatro actores principales: alumno, saber, profesor y el SGD se explican mediante dicho modelo. Para construir este modelo, consideramos el SGD como medio con el que interactúan los alumnos. Este presupuesto conlleva a otros interrogantes. Por ejemplo, una de las características fundamentales del medio, según la TSD son las retroacciones que este ofrece y las acciones mediante las cuales el alumno interactúa con él. En este sentido, podemos preguntarnos qué tipo de retroacciones ofrece el SGD, cómo las podemos caracterizar, qué papel juegan en las situaciones y cómo favorecen el aprendizaje.

En esta dirección, Pérez (2017) desarrolló algunos avances en los que consideramos pertinentes seguir indagando. En su trabajo de investigación distingue dos tipos de retroacciones que ofrece el SGD, cuando este se usa como medio: las retroacciones matemáticas y las retroacciones didácticas. Hecha esta distinción, describió cuatro roles de las retroacciones didácticas (gestión de tareas, automatizar actos de devolución, promover el proceso de validación y explicitar propiedades que no son fácilmente perceptibles), mediante un diseño para la enseñanza de la homotecia, usando Cabri Elem como medio. En él puso en juego muchas retroacciones didácticas que favorecieron el aprendizaje por adaptación. Sin embargo, encontró que el diseño no fue suficiente para que los alumnos reconocieran la relación de proporcionalidad entre las distancias de cada par de puntos homotéticos al centro. Decidimos abrazar esta idea y con base en el diseño de Pérez, intentar dar respuesta a la pregunta ¿cómo articular las retroacciones matemáticas y didácticas para favorecer el reconocimiento preceptivo de la relación de proporcionalidad de las distancias de cada par de puntos homotéticos al centro, en una configuración de dos figuras homotéticas con el centro oculto?

Para atender a este interrogante decidimos acoger, además del diseño de Pérez, las sugerencias de otros investigadores como Lemonidis (1991), Guacaneme (2001) y Garcés (2012), en las que se plantea la necesidad de involucrar los registros numérico y geométrico en la enseñanza de la homotecia. Considerando que la primera actividad del trabajo de Pérez se desarrolló como se esperaba durante el pilotaje, en concordancia con el respectivo análisis a priori, la propusimos en DGPad lo más fielmente posible, entendiendo que la interfaz y el funcionamiento de este programa tiene muchas diferencias con Cabri Elem. Como la segunda actividad propuesta por el mismo autor no funcionó completamente como se esperaba, en el favorecimiento del reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia, pero aportó muchos avances importantes, realizamos una restructuración de esta actividad articulando los registros gráfico y numérico.

Como resultados de la adaptación que hicimos de la primera actividad, obtuvimos que el diseño no alteró el funcionamiento teórico de las tareas. Esto es, pudimos constatar que las retroacciones didácticas funcionaron como esperábamos. Por ejemplo, el bloqueo del movimiento del círculo en las tres tareas iniciales de la primera secuencia, favorecieron el reconocimiento perceptivo de la unicidad del centro de homotecia. En la segunda secuencia, el bloqueo del movimiento de las letras favoreció la anticipación y formulación del reconocimiento global de la alineación entre cada par de figuras homotéticas al centro y luego el desbloqueo del movimiento de las letras ofreció a los alumnos un instrumento para encontrar y validar estrategias perceptivas. Por último, en la tercera secuencia, la retroacción que exigía cada vez mayor precisión en la ubicación del punto que debían colocar en el lugar donde las figuras se superponen, fomentó que los alumnos consideraran la figura de manera puntual y no globalmente como en las secuencias anteriores. Este conocimiento fue formulado por los alumnos no solo verbalmente a través de expresiones como "*los puntos correspondientes están en una línea*", sino también a través del uso

de la herramienta recta, construyéndolas a través de puntos correspondientes. En consecuencia, ratificamos que las retroacciones didácticas programadas fungieron como gestoras de las tareas, gracias a las retroacciones que ofrecían los botones emergentes; constituyeron actos de devolución, en tanto que al llegar a la tarea de anticipación, los alumnos al inicio no comprendían la tarea, pero luego de interactuar con el medio haciendo clic en los botones *Continuar*, *Verificar* y *Volver* a intentarlo, comprendieron la consigna y en consecuencia, adquirieron la intención que deseábamos; por último las retroacciones que mostraban mensajes emergentes constituyeron actos de devolución automatizados.

En cuanto a la segunda actividad, en la primera secuencia logramos usar las retroacciones didácticas para hacer que los puntos se muevan por toda la pantalla a través de longitudes enteras, mostrar los segmentos que están entre el centro de homotecia y puntos homotéticos, de modo que se facilitó a los alumnos operar numéricamente para obtener la relación de proporcionalidad de manera más fácil. Esto es, confirmamos uno de los roles de las retroacciones didácticas identificados por Pérez (2017): facilitar el reconocimiento de propiedades que no son fácilmente perceptibles. Así mismo, se pudieron usar las retroacciones didácticas para bloquear estrategias de ajuste visual y lograr que encontraran relaciones geométricas y las usaran para resolver las tareas. Finalmente, los alumnos formularon el conocimiento construido a partir de la interacción con el medio, a través de herramientas de construcción. Por ejemplo, usaron la herramienta recta para garantizar la alineación. Utilizaron la herramienta círculo para garantizar distancias iguales. Todas estas circunstancias son evidencias del conocimiento construido, gracias a la gestión de las tareas a través de retroacciones didácticas. En la segunda secuencia, donde debían anticipar la posición de la imagen, cuando la preimagen cambiara de ubicación, se evidenció que los alumnos reconocían que el lugar donde las figuras se superponen era imprescindible para anticipar la

posición de la imagen y que debían encontrar una relación entre las distancias de los puntos homotéticos a dicho lugar puntual. Por este motivo, lo primero que hicieron fue construir el centro de homotecia y los segmentos homotéticos para mostrar sus longitudes y lograr replicar la configuración de la primera secuencia. Consideramos que se debió ofrecer la misma configuración que en la primera secuencia, pero bloqueando el movimiento de los triángulos, para que anticiparan, más allá de que los alumnos resolvieron la tarea y lograron reforzar algunas estrategias de secuencias anteriores.

Respecto a la segunda actividad, es pertinente considerar otras variantes que exploten la potencialidad de los registros numérico y gráfico. Por ejemplo, utilizar otras razones diferentes a las propuestas, buscando estrategias de diseño que simplifiquen la complejidad que representa el limitado espacio disponible en la pantalla del computador, como una forma de lograr generalidad; pasar de distancias enteras a distancias al centro de homotecia a distancias no enteras. También se podría considerar una tercera secuencia que favorezca la aparición de estrategias geométricas para obtener la relación de proporcionalidad, por ejemplo, utilizando rectas paralelas. Esto se podría lograr proponiendo exploraciones que deriven en un hecho geométrico que de sentido al Teorema Fundamental de la Proporcionalidad.

En relación con la experimentación, debemos agregar que fue un error grabar la pantalla del computador con una cámara externa, debió acompañarse con la grabación mediante un programa que realice video mediante capturas sucesivas de pantalla, logrando mayor nitidez en las evidencias, que desafortunadamente no ofrecieron la claridad que deseábamos. Así mismo, debimos estudiar con mayor cuidado el rol del profesor, para anticipar posibles intervenciones que serían necesarias y otras inoportunas, dado que podrían derivar en efectos topacio. Dado que entre las evidencias presentadas en el análisis a posteriori, encontramos que las intervenciones del

profesor son fundamentales, no solo para gestionar la participación de los alumnos, de modo que la interacción de ellos con el medio sea equilibrada, sino también para gestionar actos de devolución. En este sentido, muchas intervenciones pudieron automatizarse mediante el uso de retroacciones didácticas. Por ejemplo, en la cuarta secuencia de la primera actividad podría preguntársele al alumno si existe otro lugar donde las figuras se superpongan, de modo que ellos puedan formular mediante la escritura en un cuadro de texto, que ese lugar es único. También en la segunda actividad, se podría programar una retroacción didáctica que solicite a los alumnos escribir la estrategia que usan para anticipar.

Por último, referente a la posibilidad que tienen o no los profesores de diseñar actividades como las propuestas en este trabajo, dado que DGPad-Colombia es libre y de fácil uso en cualquier navegador, incluso sin conexión a Internet, los profesores podrían intentar diseñar tareas, gracias a que la programación que ofrece el software tiene un lenguaje sencillo, basado en piezas de rompecabezas. Sin embargo, somos conscientes de la complejidad que implica el diseño de tareas en DGPad-Colombia, no solo por la programación, sino también por lo que implica una reflexión teórica sobre las posibilidades de diseño. No obstante, esperamos que estas ideas logren fomentar un uso más extendido, razonado y pertinente del software de geometría dinámica.

Referencias bibliográficas.

Acosta, M., Acosta, Ricardo., Ortiz, L., & Perdomo, A. (2012). *Los caminos del saber matemáticas*. Editorial Santillana.

Acosta, M., Monroy, L. & Rueda, G. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando cabri como medio, Universidad Industrial de Santander.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En. Gómez.P. (ed), ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo editorial Iberoamérica. Bogotá. Colombia.

Brosseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathé, recherches en didactique des mathématiques,.7, (2), 33-115, ed. La pensé sauvege, grenoble.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Libros del zorzal. Buenos aires. Argentina.

Castro, A. Jaramillo, J & obregón, I. (2019). Una aproximación al concepto de homotecia a partir de la noción de proporcionalidad geométrica en séptimo grado. Tesis de pregrado no publicada Universidad del Valle, sede pacífico. Buenaventura.

Garcés, J. (2012). El aprendizaje de homotecias mediante el uso de recursos tecnológicos en la enseñanza media secundaria. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Bucaramanga. Bucaramanga.

Galleguillos, J., & Candia, L. (2011). Uso de herramienta interactivas en el aprendizaje de homotecias. Ciaem, xiii, 1-13.

González, Y., & Arias, I. (2017). Análisis didáctico del concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje en octavo año de la educación general básica en costa rica.

Guacaneme, E. A, (2001). Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas. Doctoral disertación, Universidad del Valle, Cali.

Lamon, S. J. (2005). Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lemonidis, C. (1990). Une analyse de la complexité cognitive de la notion d'homothétie. Pedagogies. Cahiers du laboratoire de pédagogie expérimentale de l'universite de louvain. No.1, 71-79, bruxelles.

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d'une experience d'enseignement d'homothétie. Recherches en didactique des mathétiques, 2.3 (11), 295-324.

Llinnares

Margolinas, C. (2009). La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander ediciones.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia: MEN. Recuperado el 9 de febrero de 2018, de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares. Bogotá, Colombia: MEN. Recuperado el 13 de febrero de 2018, de https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article- 339975.html.

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Vamos a aprender matemáticas*. Ediciones SM.s.a.

Obando,G., Vasco, C., & Arboleda, L. (2014). enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte.

Ortiz, J., & Angulo, J. (2010). La homotecia, un tema casi olvidado en la enseñanza de la educación matemática en buenaventura: una propuesta desde el punto de vista algebraico. Asocolme, 692-703.

Pérez, L, (2017). Situaciones adidácticas para la enseñanza de la homotecia usando Cabri Elem como medio. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

Ríos, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. Revista omnia.13 (2).

Sadovsky, P (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En Alagia, H. Bressan y A. Sadovsky, P. Reflexiones teóricas para la educación matemática. Libro.

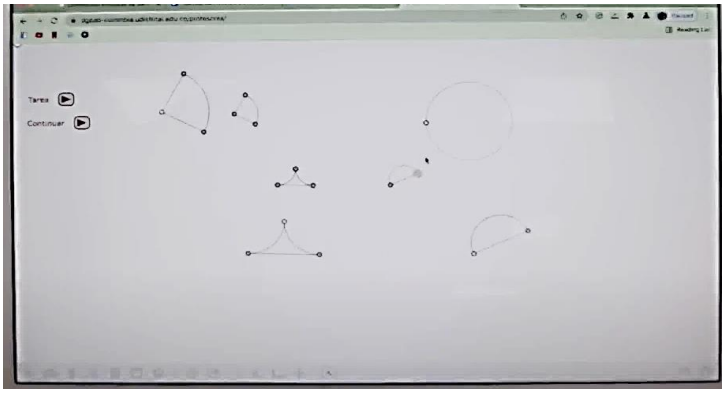
Verdú, F., & Llinares, Salvador. (2012). características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria.

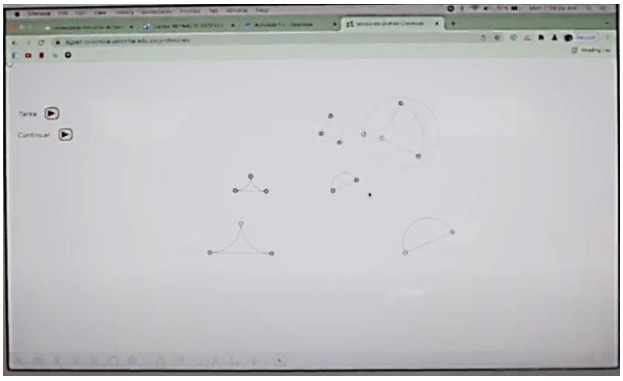
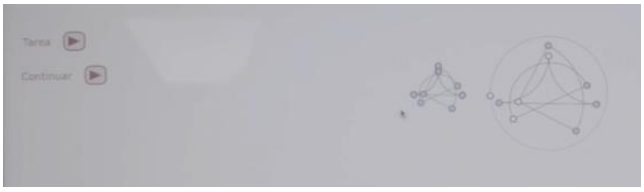
Apéndices

En este apartado presentamos la transcripción completa de las actividades con una pareja de noveno grado del Colegio Panamericano de Floridablanca. Donde estos alumnos no habían utilizado DGPad-Colombia donde se realizó una pequeña instrucción del funcionamiento de este SGD para la utilización de algunas herramientas básicas de construcción. La recolección de datos se realizó grabando, con cámara de video la pantalla dl computador y el audio.

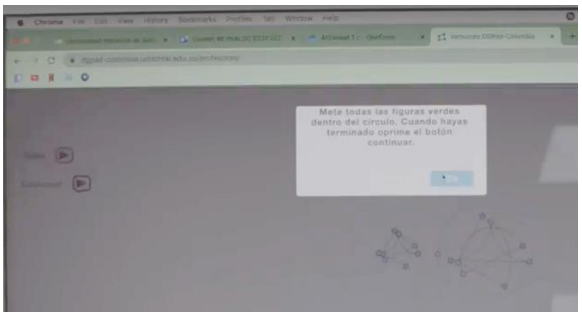
Los resultados del pilotaje de la experimentación los expondremos mediante tablas a tres columnas. En la primera enumeramos las intervenciones de los alumnos y el profesor (de aquí en adelante, en la segunda se indica el sujeto que habla o realiza las acciones mencionadas (usaremos los seudónimos María y Carlos para los alumnos y P para el profesor); en la tercera columna se mostrará lo que el sujeto dice y, las acciones serán descritas entre paréntesis cuadrados "[]".

Apéndices A. Actividad 1.

No	Sujeto	Descripción
1	Carlos	[lee la tarea]. Mete todas las figuras rojas dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*…toca mover. 
2	María	esta… o … entonces.

3	P	Si no es clara la tarea pueden volver hacer clic en el botón *tarea*, para saber en qué consiste la tarea.
4	María	Ok
5	Carlos	Toca ir moviéndolas como ir agarrándolas todas. 
6	María	¡uyy! [intentó arrastrar uno de los puntos de las figuras que no permite esta acción. Por ende, movió toda la pantalla y no las figuras].
7	Carlos	Con ese, con ese [refiriéndose al punto que permite arrastrar una de las figuras rojas].
8	María	[mete las figuras rojas dentro del círculo y resuelve la tarea]. 

Se presentó un error de programación, se corrigió y se retomó en la segunda tarea de la secuencia.

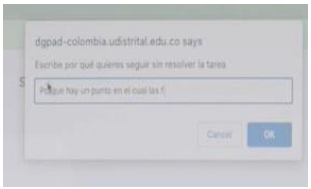
9	María	[hace clic en botón *tarea*, (inicia la segunda tarea donde la razón de homotecia es 1.5) y lee la consigna] mete todas las figuras verdes dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón continuar. 
10	María	[intenta arrastrar las figuras verdes, luego arrastra las figuras rojas pero no por el punto libre].
11	Carlos	El que es como blanco [efectivamente, en DGPad el color blanco de un punto indica que es libre. Es decir, se deja arrastrar].
12	P	Desactiven este botón (construir/mover) y traten de no arrastrar la pantalla.
13	María	[sigue intentando resolver la tarea, pero sin conseguir mover las figuras verdes].

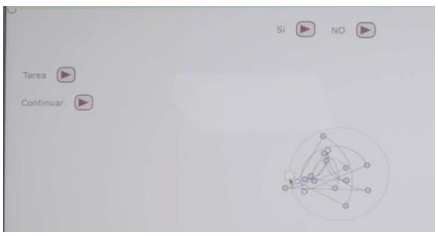
14	Carlos	El de arriba [señala la pantalla indicando el punto que se deja arrastrar].
15	María	¡ah! Ok ya entendí [arrastra los triángulos rojos hasta meter los verdes en el círculo].
16	Carlos	Sí, sí, creo que continuar
17	María	[hace clic en el botón *continuar*, aparece la consigna: mete todas las figuras dentro del círculo (verdes y rojas). Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*].
18	Carlos	O sea, que queden ambas.
19	María	¡ah! Ok.
20	Carlos	Es como moverlas.
21	Carlos	Pero después para juntarlas con el círculo, ahí sí no sé cómo, porque el círculo no se deja mover.

22	Carlos	¡ah! Espera, los otros lados deben ser para algo.
23	María	No, si se mueven no quedan abajo.
24	P	Ya metieron los vértices.
25	María	Sí, señor.
26	Carlos	Sí, señor.
27	María	[continúa arrastrando la pantalla para tratar de meter todas las figuras en el círculo].
28	Carlos	Profesor… ¿si no sabemos qué hacer? ¿cómo hacerlo?
29	P	¿no saben qué hacer?
30	Carlos	Sabemos cómo juntarlas pero no cómo mover el círculo.
31	P	¿o sea, que no va a poder meter las figuras?

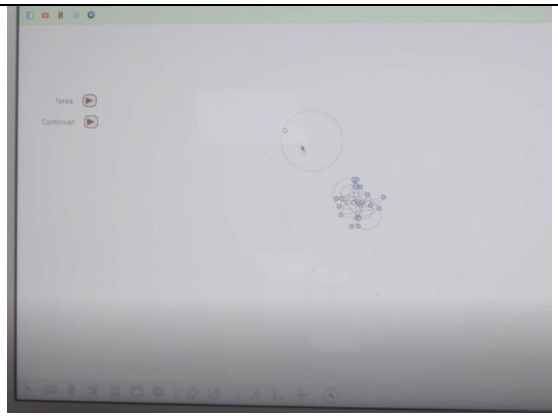
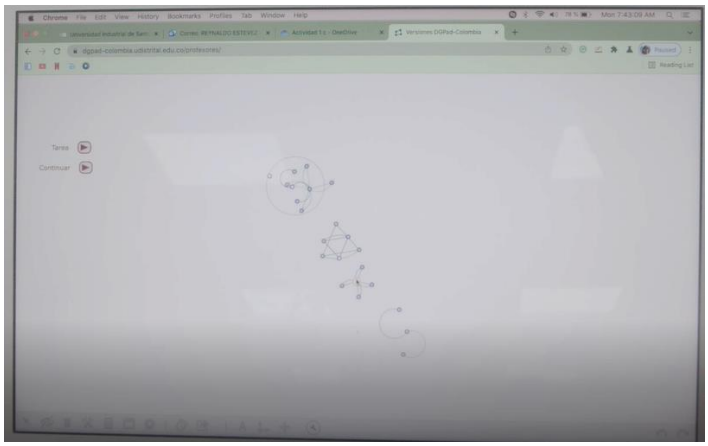
32	Carlos	No todas, podemos meter un color y un color.
33	María	Cuando metemos se mueven.
34	María	[lleva todas las figuras al lugar que se superponen].
35	Carlos	Ese es el punto en donde están juntas todas.

36	P	¡ah! Hay un punto en donde se juntas todas. ¿no hay otro lugar en donde ellas se juntan?
37	Carlos	No, solo en ese lugar.
38	P	¿entonces el círculo debe estar allí?
39	Carlos	Sí.
40	María	Sí.
41	Carlos	Pero no hay manera de moverlo.
42	P	Presione *continuar* a ver.
43	María	[presiona el botón *continuar*, aparece el siguiente mensaje: “no has resuelto la tarea, ¿deseas continuar?” Y se muestra los dos botones *sí* y *no*].
44	P	¿desean continuar entonces sin resolverla?

45	Carlos	Sí, porque no sabemos cómo resolverla.
46	P	Ahí aparecen dos opciones.
47	María	Sí [presiona el botón *sí* aparece un recuadro donde se le pide que escriba por qué desea continuar sin resolver la tarea]. ¿quieres escribirlo tú, por qué...?
48	P	Se pueden poner de acuerdo para escribir la respuesta.
49	Carlos	Porque hay un punto donde las figuras, las dos figuras… 
50	María	…las figuras de ambos colores...
51	María	…ehhh… una sobre otra.
52	Carlos	…están entrelazadas una sobre otra. Pero el círculo no se puede mover…el círculo.
53	María	Uyyy. [se borró lo escrito en la pantalla], sí quieres escribes en el papel y luego yo lo escribo acá.
54	Carlos	…llegamos a un punto en el que las figuras…
55	María	…estaban una sobre otra.
56	Carlos	Sí.
57	Carlos	Pero el círculo… no estaban dentro del círculo, no encontramos manera de mover el círculo.

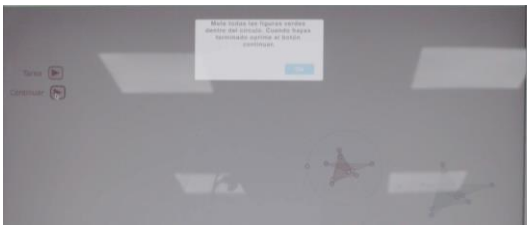
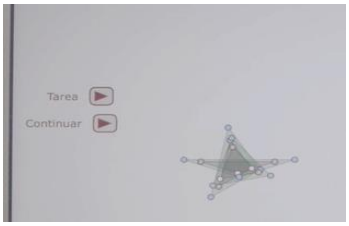
58	María	[escribe en el recuadro lo siguiente: llegamos a un punto en el que las figuras estaban una sobre otra, pero no están dentro del círculo y no había o no encontramos manera de mover el círculo ya que, si la figura se movía, no quedarían una sobre otra].
59	Carlos	Pero igual no nos saca de la tarea.
60	P	…ehh… ¿ya le dieron *sí*?
61	María	Sí.
62	Carlos	Sí.
63	P	Ok creo que ya puede mostrar la tarea, qué dice.
64	María	[presiona el botón *continuar* y aparece la siguiente consigna: mueve el círculo y mete todas las letras dentro de él (rojas y verdes). Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*].
65	Carlos	Ahora sí, el objetivo era ese, que no se podía mover.
66	María	[llevó el círculo al lugar donde se superponen todas las figuras] (por un error en la programación los botones *si* y *no*, no se ocultaron). 
67	Carlos	Terminamos.
68	P	[abre el siguiente archivo con razón de homotecia -0.5].

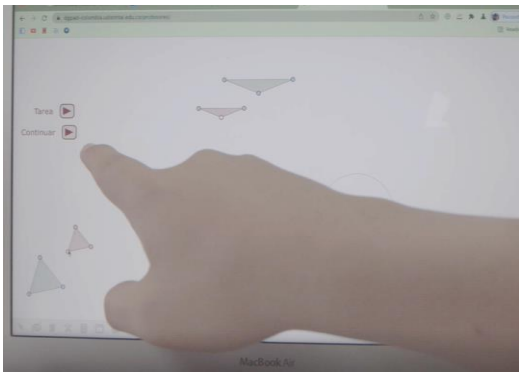
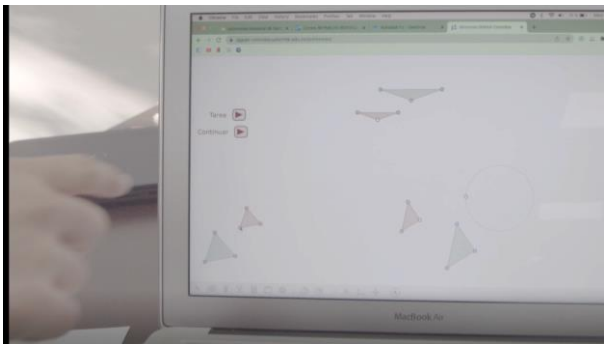
69	María	[hace clic en el botón *tarea* y aparece la consigna: mete todas las figuras rojas dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic botón *continuar*].
70	Carlos	Creo que es igual al del círculo blanco [refiriéndose al punto que deja arrastrar las figuras].
71	María	[mete las letras rojas dentro del círculo, hace clic en el botón continuar y lee la consigna]. Mete todas las figuras verdes dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*.
72	Carlos	[intentó arrastrar las figuras verdes sin éxito].
73	Carlos	Pero también se mueven con el punto blanco.
74	María	¡ah! Ya [dejó de intentar agarrar las figuras verdes y arrastró las figuras rojas para solucionar la tarea].
75	María	[hace clic en el botón *tarea* y aparece la consigna: mete todas las figuras rojas dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic botón *continuar*].
76	P	Si pueden hablar genial.
77	María	[hace clic en el botón *tarea*] verdes y rojas dentro del círculo.
78	María	Para que estén en el mismo punto. [arrastra las figuras hasta superponerlas].

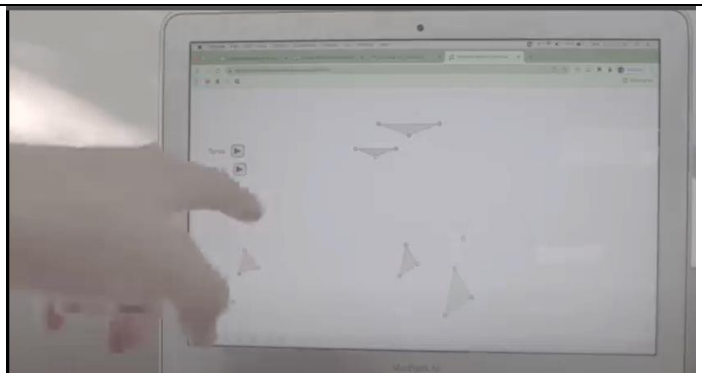
		
79	Carlos	Pero de pronto no deja mover el círculo.
80	María	No deja.
81	Carlos	Espera y si metemos una y una, o sea, una roja y una verde.
82	María	[intenta realizar lo sugerido por su compañero] 
83	María	[hace clic en el botón *continuar* y aparece el mensaje: mete todas las figuras verdes dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*].
84	Carlos	Otra vez, esa tarea.

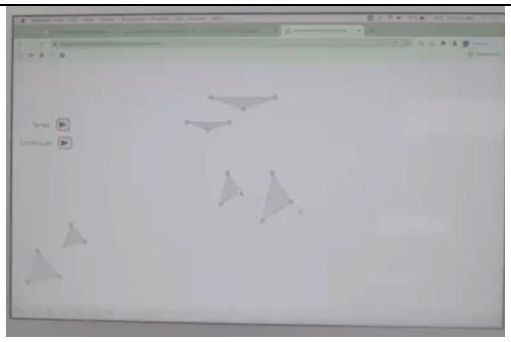
Se presentó una falla en la programación, se corrigió y se reinició la tarea.

85	María	[hace clic en el botón *tarea* y aparece la consigna: mete todas las figuras rojas dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic botón *continuar*].
86	María	Bueno, si fuera a meter ambas, hay un punto donde… no se puede mover el círculo.
87	Carlos	¿y si hay otro punto? No, espera, tendría que ser en el mismo lugar.
88	María	Pero no en donde está el círculo.
89	Carlos	Profesor… ¿le podemos poner un punto al círculo para que se pueda mover?
90	P	…ehhh…
91	Carlos	No se puede mover, la tarea pide…
92	María	[arrastra las figuras hasta superponerlas]
93	P	No creo que se mueva.
94	María	[hace clic en el botón *continuar* y aparece el mensaje: mete todas las figuras verdes dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*].
95	Carlos	Otra vez el error.
96		Se presenta un error en la programación.
97	P	[abre un archivo con razón de homotecia 1.5, que los devuelve a la primera tarea].

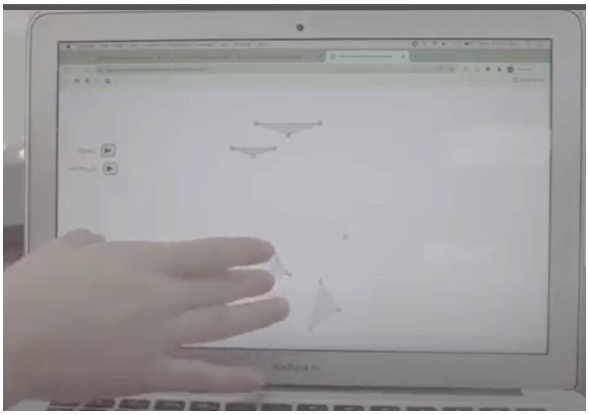
98	María	[hace clic en botón *tarea* y lee la consigna] mete todas las figuras rojas dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*. [lleva las figuras rojas al círculo]. 
99	María	[hace clic en botón *tarea* y lee la consigna] mete todas las figuras verdes dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*. [lleva las figuras rojas al círculo].
100	María	[hace clic en el botón *continuar* y lee la consigna] mueve el círculo y mete todas las letras dentro de él (rojas y verdes). Cuando hayas terminado haz clic en el botón *continuar*.
101	María	[arrastra todas las figuras hasta superponerlas] 
102	Carlos	[hace clic en el botón *continua*r] dale *sí* es igual a la tarea anterior.

103	P	Les voy a hacer una pregunta. Arrastre las figuras y déjelas separadas. ¿ustedes podrían decir en dónde se juntan en esa posición?
104	Carlos	[señala con la mano un lugar de la pantalla], acá, acá. 
105	María	Acá, acá [señala con la mano otro lugar de la pantalla, diferente al señalado por Carlos]. 
106	P	¿por qué allá? O ¿por qué acá? [señala con la mano las posiciones que maría y Carlos habían indicado].

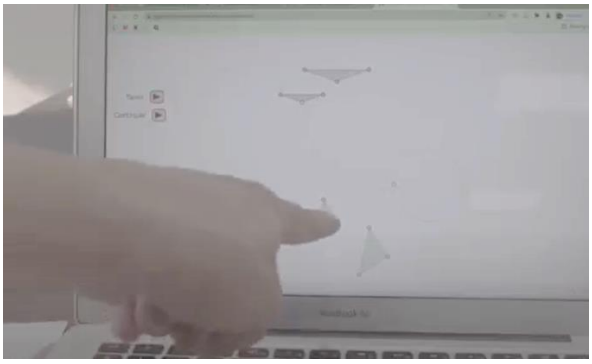
		
107	Carlos	Profesor, porque eso tiene un movimiento por dentro.
108	P	¡antes de moverla! ¡antes de moverla!
109	María	Es como si tuviera un movimiento fijo, en el cual cuando tú tienes… está fijo… se mueve y está el punto… cuando está cerca se acercan y cuando se alejan… o sea, como uno queda a más distancia del otro [utiliza sus manos para tratar de exponer su idea]
110	Carlos	Tiene como una barbita, no los puedes mover como quieres, sino que depende de este [arrastra por la pantalla una de las figuras iniciales].



111	María	[arrastra una pareja de triángulos hasta el lugar donde se superponen].
112	María	Porque tiene más distancia este.

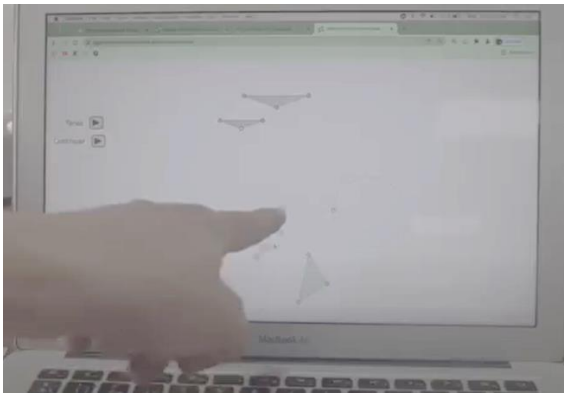


113	P	¿pero este punto no lo puede mover donde quiera?

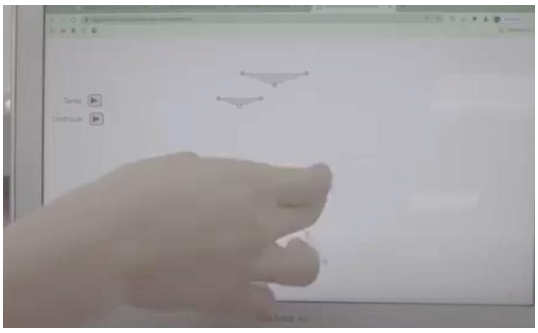


114	Carlos	O sea, el rojo sí.
115	P	¡ah!
116	Carlos	El verde no se puede mover por sí solo, depende del movimiento del rojo.

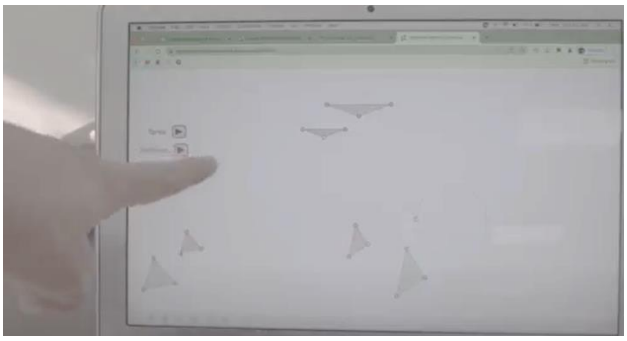
117	P	¡ah! Entiendo, ok. Si yo coloco el rojo por acá [señala un punto pantalla], en dónde quedaría el verde.



118	María	Como por acá.



119	P	¿por qué acá? [señala con la mano el lugar en la pantalla]



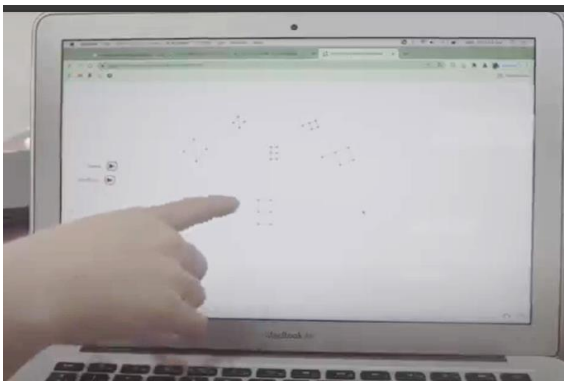
120	P	¿y si lo pusiera acá?

121		Quedaría un poco más encima.
122	María	Acá.
123	P	Ok. La siguiente tarea consiste en encontrar el lugar en donde se superponen las figuras.
124	Carlos	Esta [arrastrando un par de figuras hasta el lugar donde quedan superpuestas].
125	P	Exactamente.
126	Carlos	Por eso profe, acá es donde se ponen todas juntas y toca ponerlas dentro del círculo y el círculo no se deja mover.
127	María	Dale continuar.

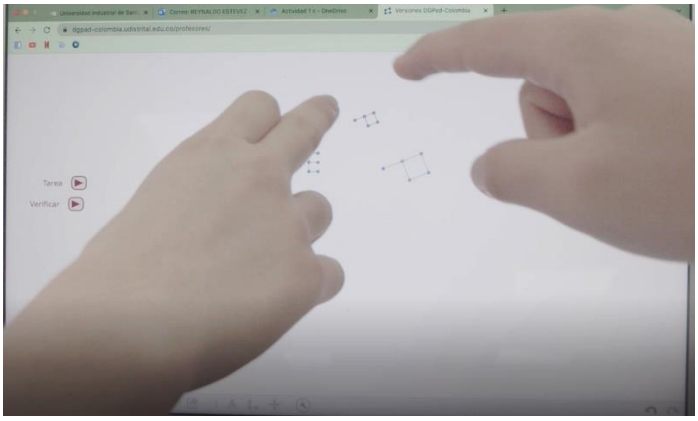
128	Carlos	Entonces continuamos sin resolver

Se presentó una falla en la programación que impidió el arrastre el círculo. El profesor decide continuar con la segunda secuencia.

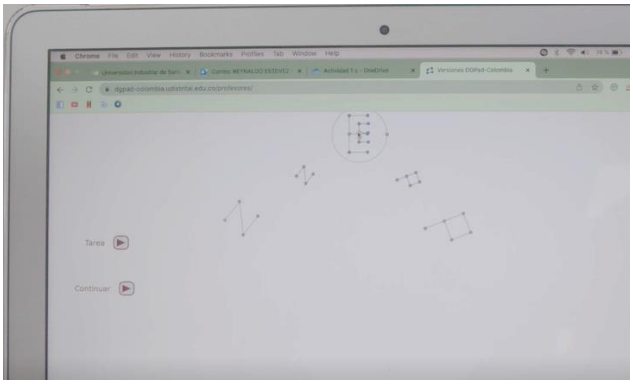
129	Carlos	[abre el archivo de la segunda secuencia con razón de homotecia 0.5, lee la tarea] ¿en qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón *verificar*.
130	María	Ok, entonces toca moverlas.
131	Carlos	[rota una figura por error en la construcción, pero no se deja arrastrar].
132	Carlos	Con ese rotas, con este creo que es.
133	María	[intenta arrastras varios puntos].
134	P	¿ya miró en qué consiste la tarea? ¿qué hay que hacer?
135	Carlos	Pues mover el círculo.
136	María	Pero primero tenemos que ver cómo se mueven.
137	Carlos	Es que dependen del movimiento de las figuras.
138	P	Entonces si no las pueden mover no pueden saber en dónde se juntan.
139	María	Sí.
140	P	¿será que no?
141	Carlos	Pues sabemos que por lo anteriores que se juntan por acá [señalando con la mano el lugar de la pantalla].

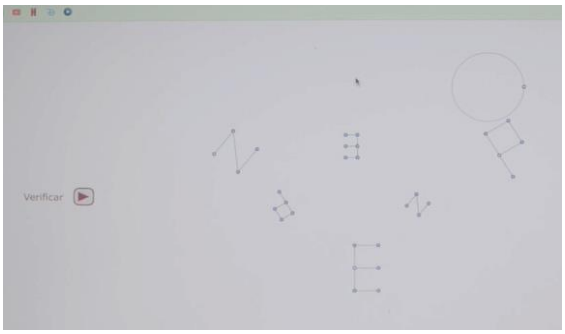


142	Carlos	No, pero es otro tipo, el movimiento varia profesor.
143	P	¡ah! Ya.
144	Carlos	No sé cómo habría manera.
145	P	Pongan el círculo en la posición donde deberían estar y presionan *verificar*.
146	María	Bueno mira que acá está lejos. ¡ah! Espérate, M y N.
147	Carlos	De pronto por acá [señala con la mano el lugar de la pantalla y arrastra el círculo hasta esa posición]



148	Carlos	Por acá, sí [hace clic en el botón *verificar* y lee la consigna] ahora mete todas las letras en el círculo y luego haz clic en el botón *continuar*.

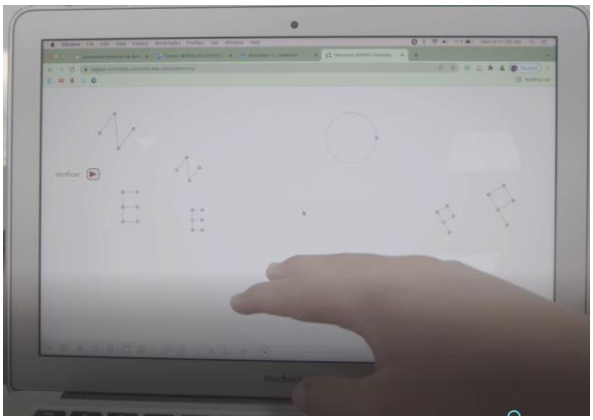
149	P	¿presionaron *verificar*, y si estuvo ahí?
150	Carlos	Arrastra el par de letras e y las mete dentro del círculo.
151	P	¿y ahora por qué saben que es allá?
152	Carlos	Profesor por la distancia de entre las letras. Si estaba acá… si la letra estaba por acá [señalando la parte baja de la pantalla con el apuntador] la distancia es mayor, si las letras grandes están en la parte superior, la distancia es corta. Entonces tiene sentido que fuera por acá. 
153	Carlos	Tenía sentido que entre más fuera subiendo se fueran juntando.
154	P	¿tiene sentido?
155	Carlos	Ya listo [abre un archivo con razón de homotecia -1.5 y lee la consigna] ¿en qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón *verificar*.
156	María	[lee la consigna]
157	Carlos	Es la misma.
158	María	De este sería por acá [señala el lugar con el apuntador].



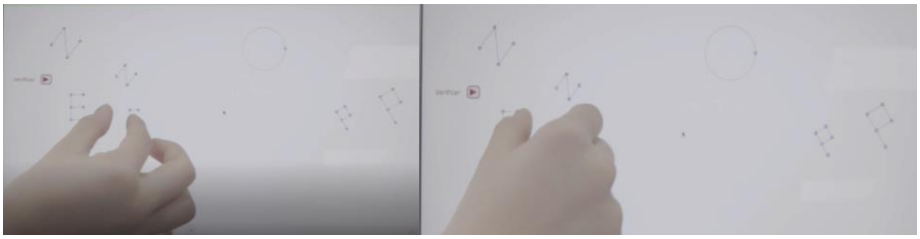
159	Carlos	No, porque todas las letras se juntan en el mismo.
160	P	¡ah! Todas las letras se juntan en el mismo punto.
161	Carlos	O sea, que el movimiento es diferente, pero se juntan en el mismo lugar. Espere, entonces la distancia es como similar.
162	María	Esta es como así [señalando con la mano el lugar de la pantalla en donde cree que se juntan las letras].

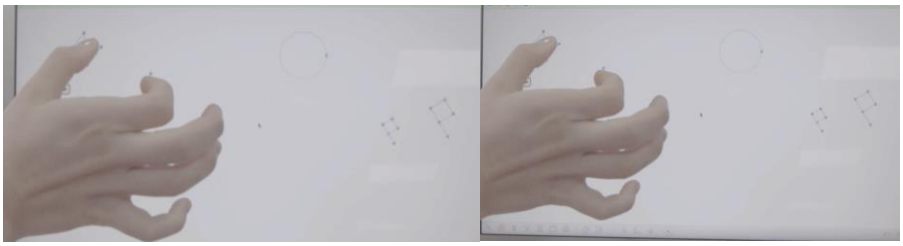
163	Carlos	No, es por acá [señalando con la mano el lugar de la pantalla]. No, espere, yo creo que es por acá [señalando con la mano el lugar de la pantalla]. Porque la distancia es mayor entre estos dos, y son los que están más lejos la letra grande [señala las letras P].

164	María	[arrastra el círculo a la posición donde le indicó Carlos].
165	Carlos	No, más a la izquierda.
166	María	[lleva el círculo a esa posición, hace clic el botón *verificar* y aparece el siguiente mensaje: ahora mete todas las letras en el círculo y luego haz clic en el botón *continuar*].
167	María	[superpone todas las figuras].
168	Carlos	¡ah! No, nos quedó mal. Profesor, nos quedó mal. No nos dejó continuar. Pusimos en círculo mal y no nos dejó continuar.
169	P	Sí, exactamente.
170	Carlos	Pero ya no ¿se reinicia?
171	P	Pues dígale continuar.
172	Carlos	Ahora nos pide juntar las letras.
173	P	Exactamente.
174	María	[hace clic en el botón *continuar*, aparece el mensaje: ¡algunas figuras no están dentro del círculo! Haz clic en el botón *volverlo a intentar*].
175	Carlos	¡ah! Listo, vuelve a aparecer la tarea. ¡ah! Es parecida a la anterior.

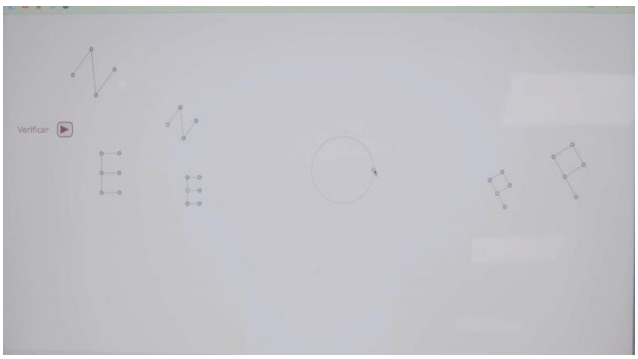
176	María	[lleva el círculo a la posición solución de la tarea anterior, da clic en el botón *continua*r y empieza a superponer las letras].
177	Carlos	No, más a la izquierda.
178	María	No, creo que ahí está bien.
179	Carlos	De pronto alcanza.
180	María	[metió todas las figuras en el círculo].
181	María	Listo, bien, otra tarea [abre un archivo con razón de homotecia 1.5].
182	María	[lee la consigna] ¿en qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón *verificar*.
183	P	¿cuál es la estrategia que están usando para encontrar el punto?
184	Carlos	Eh… pues, el primero fue más simple porque todos estaban en una posición similar. Se notaba que la letra E estaba por acá [señala con la mano en la pantalla] y la distancia era mayor a la otra. En cambio, las que estaban a otros lados era menor. Entonces pudimos referir o predecir que el círculo iba acá [señala el mismo lugar que señaló anteriormente]. 
185	P	¡ah! Ok.

186	Carlos	Pero desde la anterior están más disparejas las posiciones, es más complejo cómo saber.
187	P	¿usted tenía una idea ahorita? [le pregunta a maría].
188	María	Ahora yo pienso que era acá porque si esto se mueve [señala la letra E con la mano], esto se mueve alrededor la letra verde E [replicando su movimiento con la mano en la pantalla] entonces se moverían así [mostrando con sus movimientos de las manos].



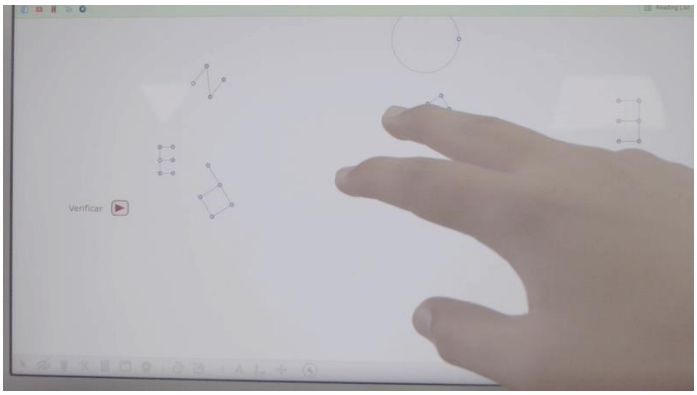


189	P	Entonces sería en donde está el cursor.
190	María	Más o menos, sí, pero no sé. Por acá [arrastra el círculo hasta esa posición]

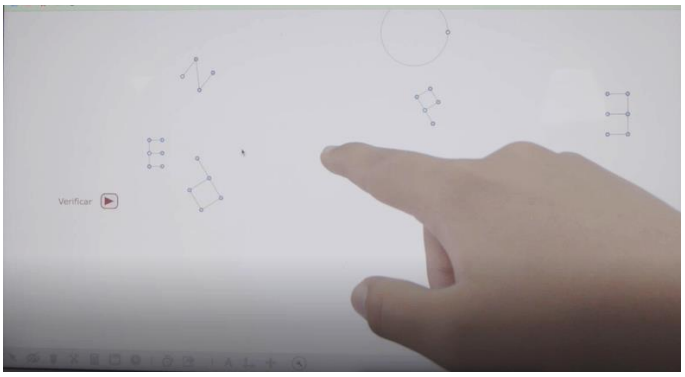


191	Carlos	Yo pienso que eso entre más lo movamos, más se aleja, pero llega a un punto que es como la mitad y se empieza ir al otro lado. Yo creo también que es por acá [ajusta un poco más la posición del círculo].

192	María	Sí, presiona el botón *verificar*.
193	Carlos	Acá, es como el que se acerca y el siguiente es el que se empieza a alejar.
194	Carlos	[superpone las figuras y quedan dentro del círculo, hace clic en el botón *continuar*, aparece el mensaje: ¡las figuras están dentro del círculo!]
195	Carlos	Listo, siguiente tarea.
196	Carlos	[abre un archivo con razón de homotecia -1.5 y lee la consigna] ¿en qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón *verificar*. Igual también debe ser por acá [señalando en la pantalla].

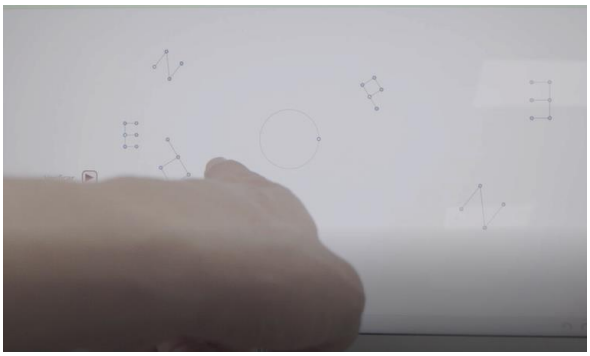


197	Carlos	Porque todas están muy lejos. Yo creo que es por acá [señalando en la pantalla]

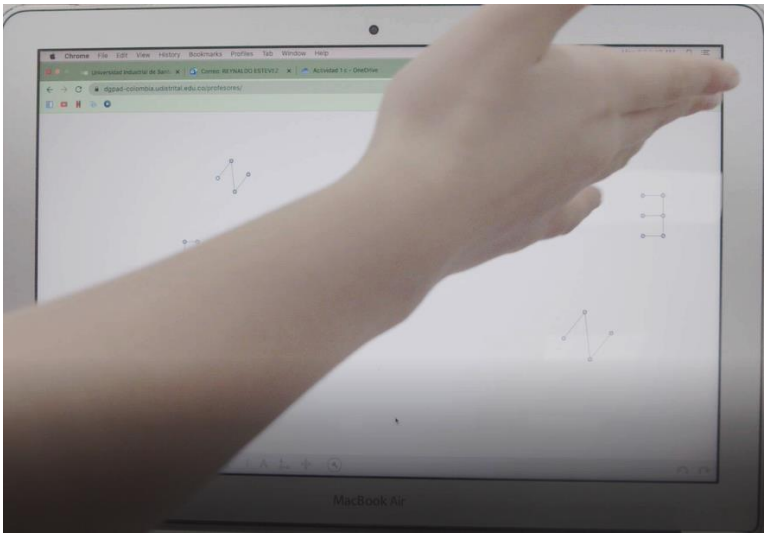


198	P	¿por qué? ¿cuál estrategia utilizó?
199	Carlos	Profesor porque lo que hicimos en la anterior. Esas letras empiezan ambas juntas entonces si uno mueve una para acá, entonces una letra se está yendo para otro lado.
200	P	¿para el otro lado? ¿siempre se movían en sentidos contrarios?
201	Carlos	Se mueven en sentidos contrarios hasta que llegan al centro y ahí se juntan, entre uno más mueve se alejan, pero uno las va acercando a ese punto central, se empiezan a juntar y después si uno se pasa entonces se mueven al otro lado, y señala un punto en la pantalla.

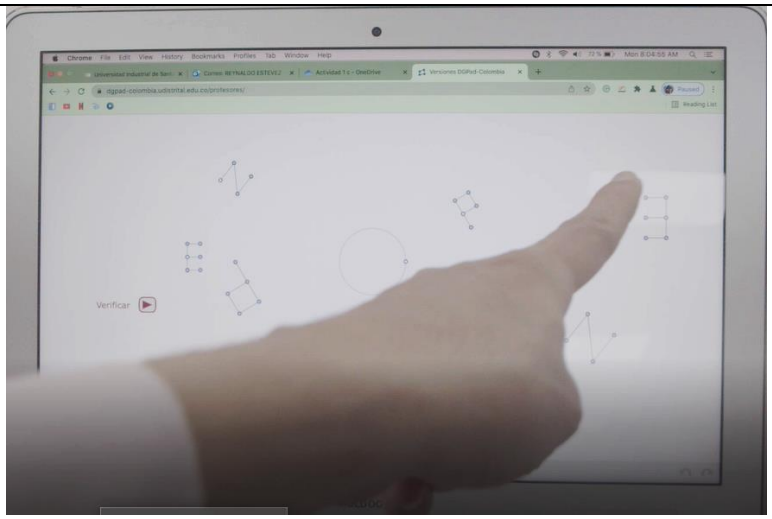
202	P	A mí me dio la sensación de que las figuras se mueven en el mismo sentido
203	María	O sea, las figuras si se mueven en el mismo sentido, pero cambia sus distancias de una a otra.
204	Carlos	Varía, o sea, entre más lejos estén de ese punto central más lejos están las otras letras.
205	María	Pero sí, se mueven en la misma dirección.
206	Carlos	Pero también varía.
207	P	¿pero siempre varían en esa misma dirección del punto central?
208	P	Es decir, si yo desplazo esta p para acá [señalando con la mano el lugar de la pantalla]
209	P	Esta se debería desplazar para acá [señalando con la mano en la pantalla]



210	María	No, debería… pues dependiendo de dónde esté el círculo… eh… dependiendo dónde esté el punto, iría de para allá o de para acá [expone mientras indica con las manos]

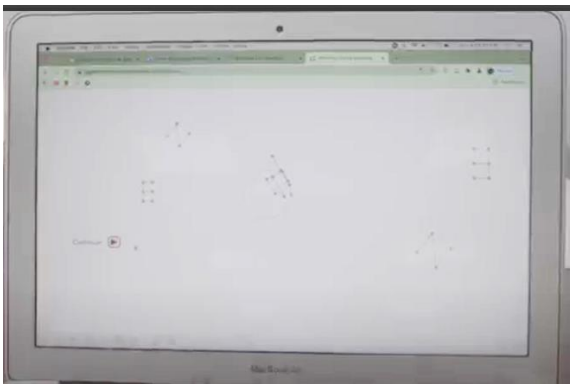


211	P	¡ah! Ok, y en este caso hacia donde iría la p si yo moviera esta para acá. ¿en dónde iría esta? [señalando con la mano el lugar de la pantalla]

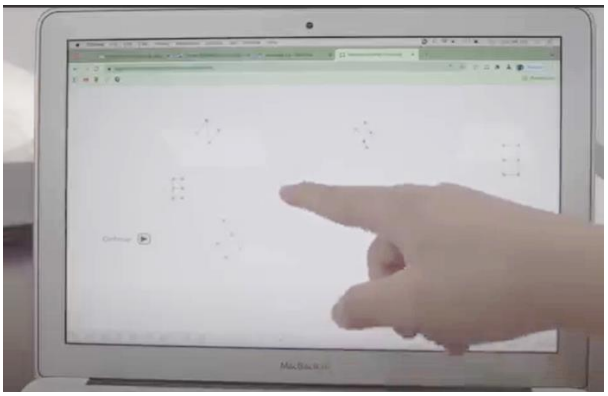


212	Carlos	Es que yo digo profesor, que se empezarían a juntar porque suben del punto central, ahí sí es como una línea.
213	P	¡ah! Como una línea
214	Carlos	En el que hay un punto como un cero entonces se mueven como los números negativos, se están alejando cada vez más, pero entre más se acerca a ese punto cero, se van acercando más las letras.
215	María	¿pero si es por acá? [llevando el círculo a una parte de la pantalla]
216	Carlos	¿por qué?
217	María	¿por qué? No sé.
218	P	Discutan entre los dos.
219	Carlos	Verifiquemos ahí para ver el movimiento.
220	María	[da clic en el botón *continuar* y lee la consigna] ahora mete todas las letras en el círculo y luego haz clic en el botón *continuar*.
221	Carlos	Yo creo que acá se empezarían a juntar.

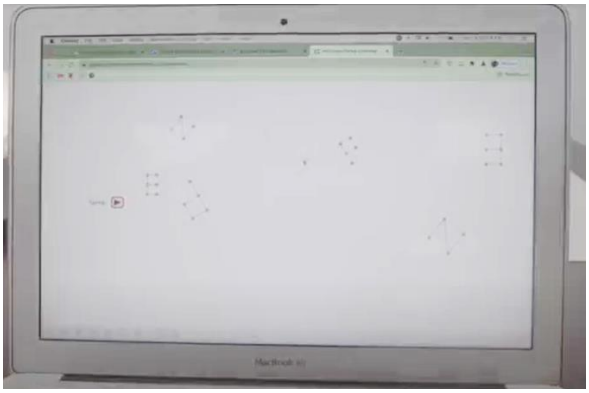
222	Carlos	Pero igual fallamos lo pusimos muy abajo.



223	María	Pero entonces ven, miremos si esta la mandamos para allá [arrastra la letra p por diferentes lugares de la pantalla]
224	María	Y mira, se empiezan a juntar. Cada vez que se empiezan a juntar en ese punto [señalándolo con la mano en la pantalla].

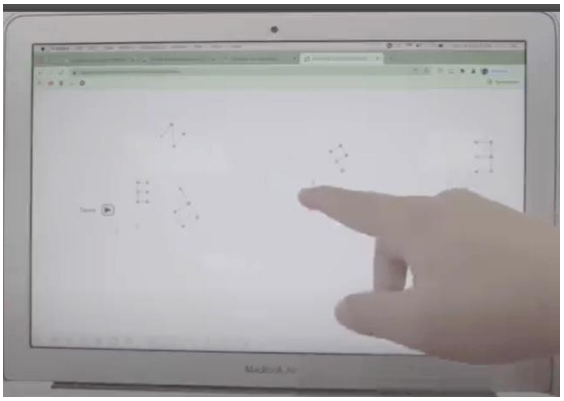


225	Carlos	Espera, volver a intentar y colocarlo más arriba como por acá.



226	María	No, más al lado.
227	Carlos	No, porque ahorita nos quedaba para acá por encima [señalando con la mano el lugar de la pantalla]

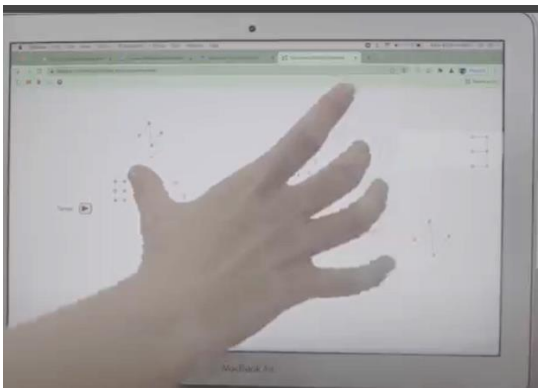
228	Carlos	Creo que tipo acá o acá.



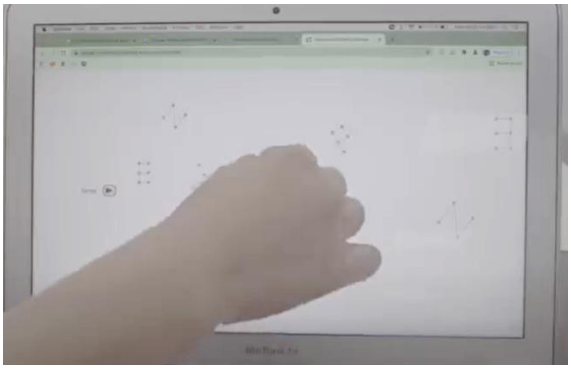
229	P	¿el círculo cambió de lugar?
230	Carlos	No profe, lo movimos después de colocar volver a intentar.
231	P	Sí, pero al oprimir *volver a intentar*… ¿no cambian? ¿quedan igual?
232	Carlos	Quedó por fuera, fallamos por poco la posición del círculo.
233	Carlos	[hace clic en el botón *volver a intentar*] profesor, están iguales en la misma posición, de pronto, no sé, el círculo.
234	María	Ahí colocando el círculo en una posición en la pantalla.
235	Carlos	No creo espera [arrastra el círculo a otra posición], por acá, ahí sí.
236	María	Sí.
237	P	¿encontraron una estrategia mejor? ¿al final qué discutieron?

238	María	Yo digo que acá, porque esto [señalando con la mano el lugar de la pantalla].

239	María	Es como la mitad de… [mide la distancia abriendo su mano en la pantalla]. No, mentiras, no puede ser la mitad porque debería estar [gestiona su estrategia con la mano]



240	María	Solo me fijo en este [señalando con la mano las letras P].



241	P	Usted entendió la idea de maría [le pregunta a Carlos]
242	Carlos	Sí profesor, más o menos, que no siempre es la misma distancia profesor, no siempre es la mitad de las letras. Dependiendo de las distancias de las letras. A ver, si mueve la letra pequeña un poco, la letra grande se mueve más, no va a ser como un punto entre las dos sino más cerca a la grande, no sé.
243		Bueno se nos agotó el tiempo, pero estas ideas las vamos a seguir discutiendo, porque me parece interesante, ya están buscando una estrategia para buscar ese punto y de eso se trata [termina la sesión].
244	P	[inicia otra sesión]. Yo les tenía unas preguntas… ¿se acuerdan que ustedes ayer decían que las figuras se movían de alguna manera?
245	Carlos	Sí.
246	María	Sí.
247	P	Las pueden mover allí. Por ejemplo, para moverla. ¿cómo hacían?
248	Carlos	Es que había… había…
249	María	Había un puntito blanco.

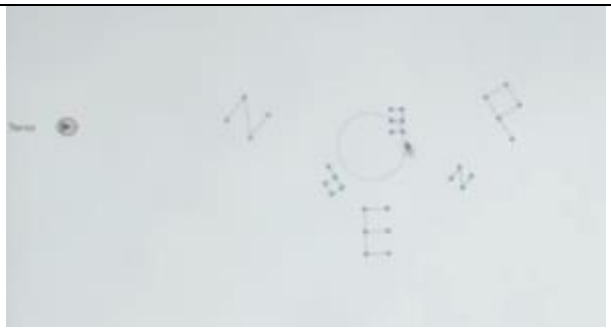
250	Carlos	Ajá, que tenían las esquinas rellenadas, entonces cuatro de las esquinas, digo tres de un cuadrado eran como grises y una era blanca, entonces podías mover la blanca.
251	P	¿pero ahí no las puedes mover cierto?
252	María	No, por qué nos están pidiendo otras cosas.
253	María	[abre un archivo con razón positiva, hace clic en el botón *tarea* y lee la consigna] ¿en qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón *verificar*. No
254	Carlos	Ahí se mueve el círculo.
255	P	¿luego de verificar las pueden mover?
256	María	Sí señor, ahora sí toca meterlas todas.
257	P	Ahora sí, muévalas todas.
258	María	Entonces de donde esté el punto [intenta meter todas las letras en el círculo]

259	P	No se preocupe por meterlas, sino por moverlas, ustedes me decían que estaban tratando de encontrar una forma de poder encontrar esa posición, donde poner el círculo.
260	Carlos	Sí.
261	P	Entones sepárelas y solo mueva una sola letra.
262	María	¿cómo así?, ¡ah! Ya.
263	P	Y quiero que observen el movimiento ustedes y me digan… ¡ah!, tengo esta idea así. Es ese el propósito de la actividad.
264	María	[arrastra por diferentes lugares de la pantalla una figura].

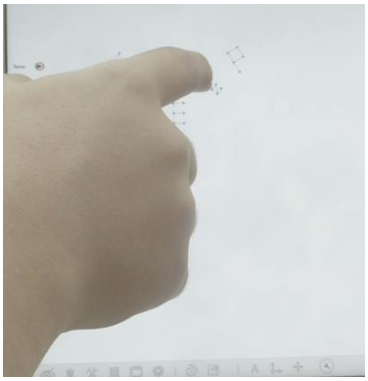
265	Carlos	Bueno, entonces yo lo que digo es que hay como un punto, no tiene que ser en el centro (se refiere al punto medio entre ambas figuras), en que las letras la grande y la pequeña se juntan, entonces en donde uno más se aleja de ese círculo con la letra entonces las letras se alejan entre ellas por ejemplo [señalando con la mano el lugar de la pantalla].
266	Carlos	Pues entre uno más se acerque a ese punto, más se juntan.
267	P	Ok.
268	María	[arrastra el círculo hasta la posición que cree es la solución].
269	Carlos	Más a la izquierda [le dice a maría].
270	Carlos	Pero mira.
271	Carlos	¡ah! Vale. Es que se juntan bastante rápido.
272	María	[superpone las figuras].

273	Carlos	[hace clic en el botón *continuar* y lee la consigna] ¡las figuras están dentro del círculo!
274	Carlos	Ya profe.
275	María	Listo profe.
276	P	No vamos a repetir toda la actividad [les muestra un archivo que habían trabajado la sesión anterior, con razón de homotecia menor que cero]. Quiero que muevan las letras y me digan si tiene el mismo comportamiento de las de ahorita.
277	María	Esa es la misma tarea [lee la consigna] ¿en qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón verificar.
278	Carlos	Pon verificar [le dice a maría].
279	María	[hace clic el botón *verificar*].
280	Carlos	[lee la consigna] ahora mete todas las letras en el círculo y luego haz clic en el botón *continuar*.
281	María	[arrastra las letras] se mueve en opuesto.
282	Carlos	Sí, como movimientos opuestos el del círculo, o sea, el del punto central de la letra. El trayecto cuando llegas al punto, lo mueves para acá y la letra se mueve para el opuesto.
283	P	¿ustedes dicen central porque están en el centro de las figuras?
284	Carlos	Porque es lo misma analogía de ayer, es una línea.
285	P	¿una línea?

286	Carlos	Entonces si uno lo mueve, si mueve la letra por acá, con el otro se hacía más larga la distancia.
287	P	Podría señalarlo en la pantalla.
288	Carlos	Sí. Por ejemplo, esa es la posición [señala con la mano el punto en la pantalla].
289	P	Bueno, por ejemplo, si yo moviera la N hacia la esquina para dónde se movería esta.
290	Carlos	En este caso hacia la izquierda, porque el movimiento es distinto al anterior.
291	María	Porque antes se iban las dos se alejaban iban juntas.
292	Carlos	Iban una y una
293	P	¿en el mismo sentido?
294	María	Sí.
295	P	Por ejemplo, ahí… ¿dónde deberían ubicar el círculo?
296	María	Aquí [arrastra el círculo]

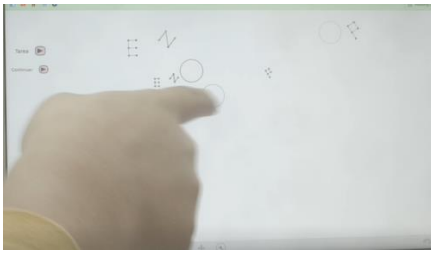


297	P	¿allí?
298	Carlos	Sí.
299	P	Piénsenlo bien, discútanlo.
300	María	Mueve el círculo.
301	P	Por ejemplo, ahí.
302	Carlos	[responde señalando en la pantalla].



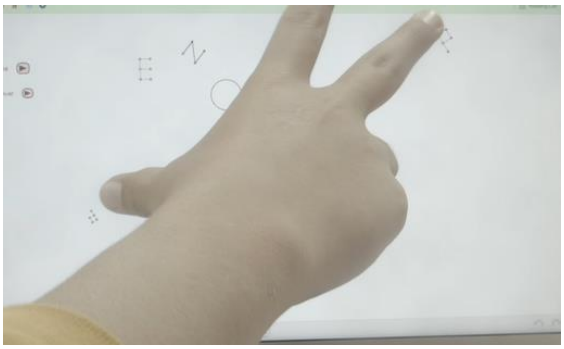
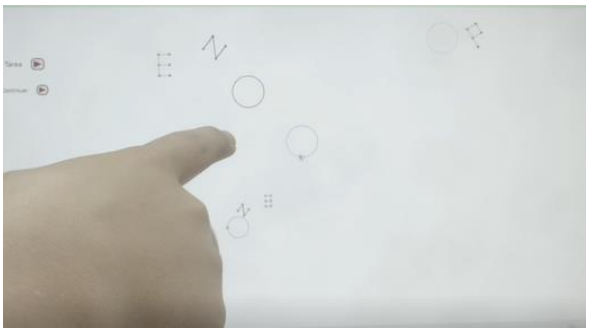
303	María	Aquí [arrastra el círculo hasta esa posición]
304	Carlos	Más o menos, sí.
305	P	¿allí? Piénsenlo bien.
306	María	[arrastra el círculo hasta donde Carlos le indica].
307	María	[superpone las figuras fuera del círculo, pero cerca].
308	Carlos	Fallamos por poco

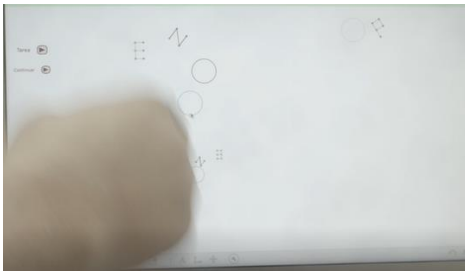
309	María	[hace clic en el botón *volver a intentarlo* y se reinicia la tarea].
310	María	[señala con el apuntador la posición que considera solución].
311	Carlos	[señala con la mano el mismo lugar que maría].
312	María	Verifica la solución y es correcta.
313	P	¡fantástico! Vamos a hacer una cosa [les abre otro archivo]. Esta es una tarea de ayuda, en ella van a buscar una estrategia para buscar el punto donde deben poner el círculo, ese punto que hemos buscado en la tarea anterior [abre la tarea de ayuda, con razón 1.5].
314	Carlos	[Hace clic en el botón *tarea* y lee la consigna] mete las letras E verde y E roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón *continuar*.
315	María	[lee la consigna] mete las letras E verde y E roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón *continuar*.
316	P	Si olvidan la tarea, saben que tiene que presionar otra vez el botón *tarea*.

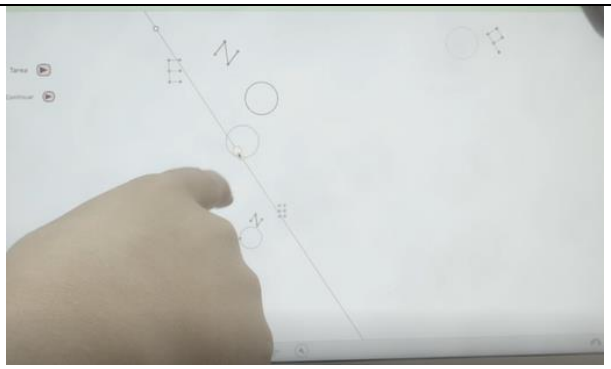
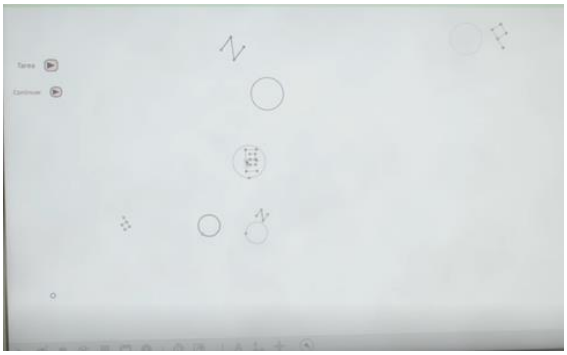
317	María	[empieza a realizar la tarea y arrastra el círculo por la pantalla].
318	Carlos	No, acá de pronto [señala con la mano en la pantalla el lugar].
319	Carlos	Porque quedan alineados.
320	P	¿cómo? ¿qué dijo?
321	Carlos	De pronto por acá, porque dan alineados. 
322	P	¿deben quedar alineados?
323	Carlos	Ajá, porque si lo pones acá, el trayecto no debe ser el mismo.
324	P	¿está de acuerdo? [le pregunta a maría].
325	María	Sí, de acuerdo.
326	María	[hace clic en el botón *continuar* y lee la consigna] !algunas letras no están dentro del círculo!
327	P	Hay que meter qué cosas.
328	Carlos	E roja y E verde.
329	María	Trata de arrastras las letras E, pero no se arrastran.

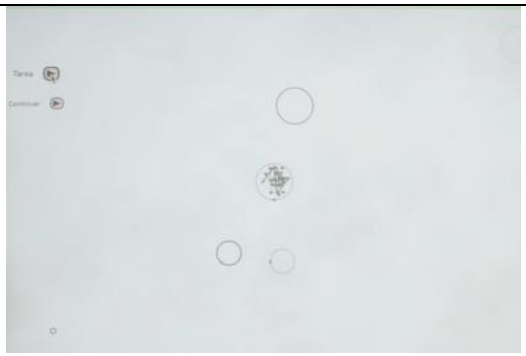
330	P	No se deja arrastrar ninguna E, creo que tienen que oprimir el botón *continuar*.

Se presentó un error en la programación y se reinició esta tarea.

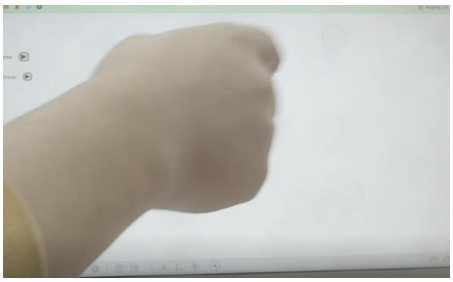
331	María	[abre un nuevo archivo con razón -0.5 y lee la consigna] mete las letras E verde y E roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón *continuar*.
332	Carlos	Estas son las que se mueven opuestas, deben ser de las que quedan alineadas [mostrando la alineación con sus manos en la pantalla] 
333	Carlos	O sea, que todas quedan en la mitad de ambos trayectos [señalando con la mano el lugar de la pantalla, la segunda posición] 

334	Carlos	Por acá todos como cruzan por el círculo. Sí.
335	María	¿en dónde está?
336	Carlos	Yo digo por acá, porque puedes pasar una línea y pasa por acá [señala en la pantalla]. 
337	María	[lleva el círculo a una posición señalada por Carlos].
338	P	¿quieren pasar una línea?
339	Carlos	Sí, profesor.
340	P	Aquí hay una herramienta, para construir rectas, seleccione el apuntador. Listo ahora tóquelo ahí está la segunda opción sin soltarlo.
341	María	[selecciona la herramienta *construir/mover*]
342	P	Allí. Y haga clic en el punto donde quiera trazar una línea.
343	María	[construye un punto y hace clic en él, seleccionando *recta* en paleta de herramientas emergente].
344	Carlos	Que pase por la E, que pase por la N y la P, ponerlo en una posición donde se cruzan las rectas [le dice a maría].
345	María	[construye una recta y la ajusta hasta que quede sobre las letras E y ubica el círculo sobre la recta]… ¿bueno y entonces? [borra la recta que había construido].

		
346	P	¿no le gustó la idea de la línea?
347	Carlos	No profesor, creo que lo podemos ver sin la recta.
348	María	Sí, sí.
349	Carlos	[superpone las letras E y arrastra el círculo hasta esa posición].
		
350	Carlos	[hace clic en el botón *continuar* y lee la consigna] ahora mete las letras N y P dentro de los círculos de su respectivo color.
351	P	¿pero sí leyó la tarea?
352	Carlos	Sí, profesor.
353	P	Presione el botón tarea, porque está mal interpretando la tarea [superpusieron las figuras y las metieron en uno de los círculos].

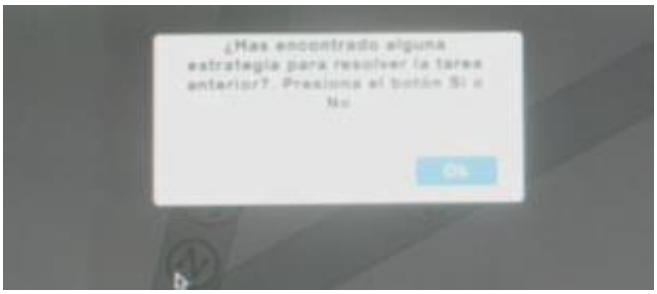
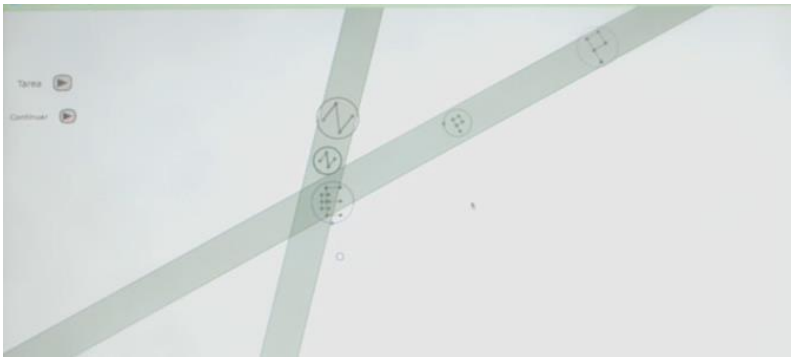


354	P	¿ahora no lo muestra?
355	Carlos	No profesor.
356	P	Vuelvan abrir el archivo.
357	Carlos	[abre el archivo hace clic en el botón *continuar*, lee la consigna] mete las letras E verde y E roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón *continuar*.
358	P	Ahí, es meter las letras E verde y e roja dentro del círculo.
359	Carlos	Sí, mete las letras E verde y E roja dentro del círculo.
360	P	Ahora sí.
361	Carlos	Todavía no profesor,
362	Carlos	[hace clic el botón *continuar*, lee la consigna] ahora mete las letras N y P dentro de los círculos de su respectivo color.
363	P	¿qué dice?
364	María	Dentro del respectivo color, así.
365	Carlos	Roja con rojo.

366	Carlos	Más bien mueve la P hacía el círculo [ya que algunos círculos no se dejan arrastrar tienen que llevar la letra hasta el círculo]. Entonces intenta poner la P en este [señala el lugar en la pantalla]. 
367	Carlos	¡ah! No, queda muy lejos.
368	María	[arrastra las figuras y los círculos hasta meter las letras N y P en los círculos correspondientes].

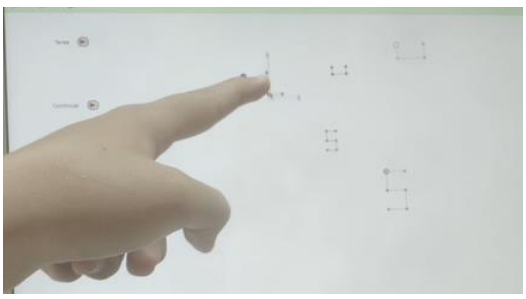
Se presentó un error en la programación, se corrigió y se reinició la tarea.

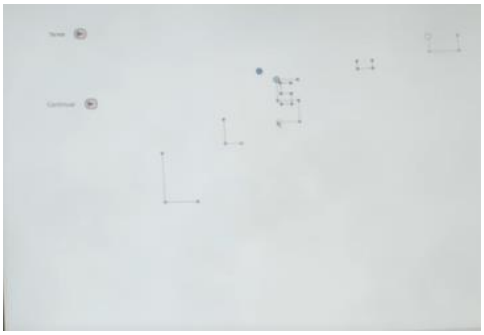
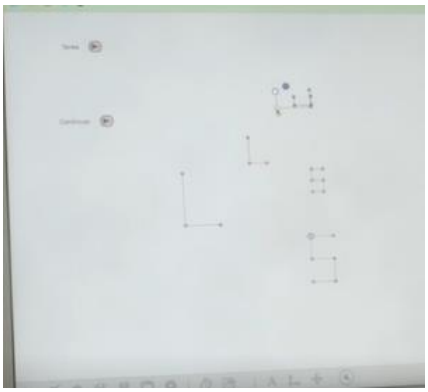
369	Carlos	Reinicia la tarea.
370	María	Miremos cuál es el que llega a ese.
371	P	Podría explicar nuevamente la estrategia que está utilizando para ubicar el círculo.
372	Carlos	Entonces da igual, como el movimiento de las letras… pero la idea es que, si uno tiene que mover el círculo para poner ambas deben estar alineadas todas, o sea, que todas tengas una línea recta que llegue al círculo. [mete las letras en los círculos de su respectivo color].
373	P	¿y por qué no mete la P en el círculo verde?

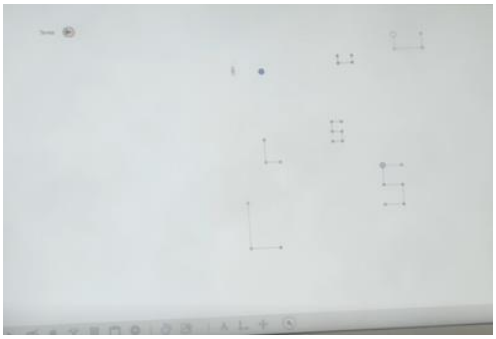
374	Carlos	Porque dice el respectivo color.
375	P	Por eso, la P verde la podría meter en el círculo verde.
376	Carlos	No, porque el rojo no se deja mover.
377	Carlos	[presiona el botón *continuar* y lee la consigna] ¿has encontrado alguna estrategia para resolver la tarea anterior? Presiona el botón *sí* o *no*. 
378	Carlos	[presiona ok y se muestra las bandas que aparecen en la imagen]  [observa la pantalla y dice]: es lo mismo que estaba diciendo, como una línea recta.
379	P	¿usted ve una línea recta?
380	Carlos	Sí.
381	María	Sí.
382	P	[abre la tarea de la tercera secuencia, razón positiva].

383	Carlos	[lee la consigna] ubica el punto azul en la posición donde las letras se superponen, cuando creas que has terminado haz clic en el botón *verificar*.
384	P	La tarea dice que ubicar el punto donde las letras se superponen, fantástico.
385	Carlos	Sí, por eso, que esta letra quede por dentro de esta (refriéndose a que las letras s quedarían superpuestas) [lleva el punto azul donde cree que es la solución].
386	Carlos	[hace clic en el botón *verificar*] pero uno mueve acá [superponiendo las letras L]… está mal.

387	P	Podría juntar otro par de puntos de las letras L, no solo ese par.
388	María	No.
389	Carlos	Sí.
390	P	¿en dónde se juntan los otros?
391	Carlos	Aquí juntando otros puntos de las letras.
392	P	¿en lugares distintos?
393	Carlos	Pero se juntan otro par de puntos.
394	P	¿pero en lugares distintos de donde se juntaban el otro par?
395	Carlos	Claro porque está juntando.
396	P	Ponga el dedo en la pantalla donde se junta un par de puntos de esta figura.
397	Carlos	Estos dos (un par de puntos correspondientes de las letras L) se juntan acá [señalando con la mano el lugar de la pantalla]



398	P	Ahora junte los otros.
399	Carlos	[arrastra las figuras hasta que se juntan diferentes puntos] ¡ah! ¡no! Sí es el mismo.
400	P	¿la C o la S?
401	Carlos	[arrastra por la pantalla las letras s hasta que uno de sus puntos se superpone]. 
402	P	¿es otro punto?
403	Carlos	No, es el mismo [arrastra la letra S para superponer diferentes pares de puntos correspondientes de esta].
404	Carlos	Y es igual con este [refiriéndose a la letra C. Ubica el punto en una posición cercana a la solución, pero no con la precisión requerida. Luego arrastra la C hasta superponer un par de puntos correspondientes de esta]. 

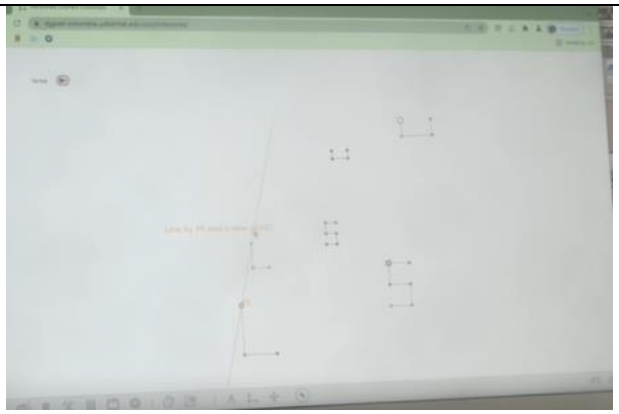
405	Carlos	¿tenemos que volver a intentarlo?
406	P	Sí, claro.
407	Carlos	[hace clic el botón *continuar* y lee la consigna] se junta cada par de puntos correspondientes en el lugar donde ubicaste el punto azul?, si no es así presiona el botón *volverlo a intentar*.
408	Carlos	[presiona el botón *volver a intentar* y lee la consigna] ubica el punto azul en la posición donde las letras se superponen, cuando creas que has terminado haz clic en el botón *verificar*.
409	Carlos	[coloca el punto donde cree que es la solución]. 
410	Carlos	Como ponerlas más pegadas [hace clic en el botón *continuar*].
411	Carlos	Te parece [entregándole el ratón a maría, para que resuelva la tarea].
412	Carlos	*Verificar* [sugiere a maría hacer clic en el botón *verificar*].

413	María	[hace clic en el botón *verificar* y aparece la consigna] ahora junta cada par de puntos correspondientes, para verificar la solución. Luego haz clic en el botón *continuar* [arrastra las letras l hasta superponerlas].
414	María	[hace clic en el botón *continuar*, aparece la consigna: ¿se juntan cada par de puntos correspondientes en el lugar donde ubicaste el punto verde? Si no es así presiona el botón *volver a intentarlo*]
415	María	[arrastra las letras S].
416	Carlos	Sí, más pegada [refiriéndose que les faltó más precisión].
417	P	¿qué podrían hacer para mejorar la precisión, piénsenlo?
418	Carlos	Sí profesor, acá varía, porque antes era más fácil, porque el círculo era de mayor tamaño.
419	P	¡ah! Ok.

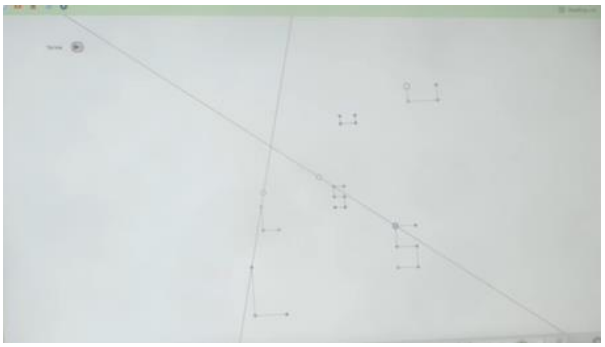
420	Carlos	En cambio, acá es un punto, es como más preciso.
421	P	¿cómo podría mejorar esa precisión?
422	Carlos	Trazando las líneas.
423	María	[sigue arrastrando las letras cerca de donde se superponen]
424	P	¿trazando las líneas? Ya saben cómo hacerlo.
425	Carlos	Sí profesor.
426	P	Debería maría manejar el ratón.
427	María	[toma el ratón y empieza a mover las figuras en la pantalla].
428	Carlos	Las figuras se mueven en diagonal, es distinto.
429	María	Es por aquí [señala con el puntero y lleva el punto a esa posición].

430	Carlos	Acá no es tan fácil, no están tan alineadas, no es tan fácil.
431	P	¿no están alineadas?
432	Carlos	No creo que salga el punto si sale entre los dos.
433	María	[intenta mover las figuras, pero no se dejan].
434	P	Para poderlos mover tiene que presionar *verificar*.

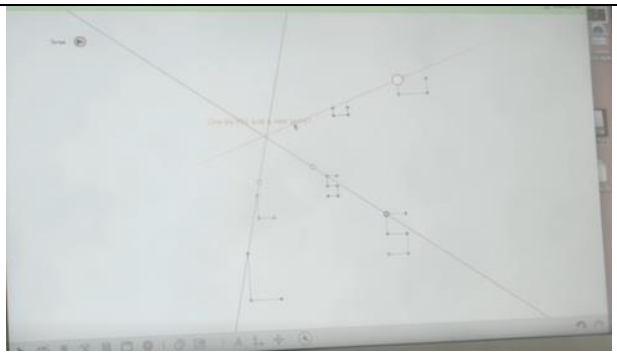
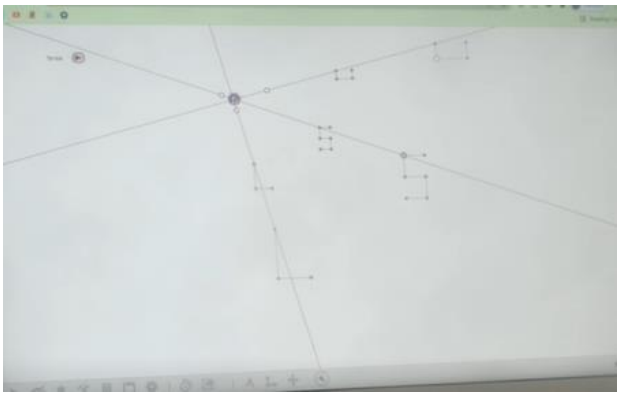
435	María	¡ah! Ok [presiona el botón *verificar* y lee la consigna]. Ahora junta cada par de puntos correspondientes, para verificar la solución. Luego haz clic en el botón *continuar*.
436	Carlos	El de acá [indicándole cuál es el punto que se deja arrastrar]
437	María	Hace clic en *volver a intentarlo*.
438	Carlos	[toma el ratón y empieza a buscar la solución. María le da indicaciones señalando con el dedo en la pantalla].
439	P	¿por dónde quiere pasar la recta? Si quiere pasar la recta por un punto…
440	Carlos	La idea que tenía era pasarla por las figuras.
441	P	Ok.
442	Carlos	O sea, no están alineadas.
443	P	¡ah! No.
444	Carlos	Uno puede trazar por acá o de pronto…
445	P	Allí está la herramienta recta, seleccione un punto y no la suelte.
446	Carlos	[construye una recta por un punto de la L imagen y otro punto libre, ajustándola hasta que pase por el punto correspondiente de la L preimagen].



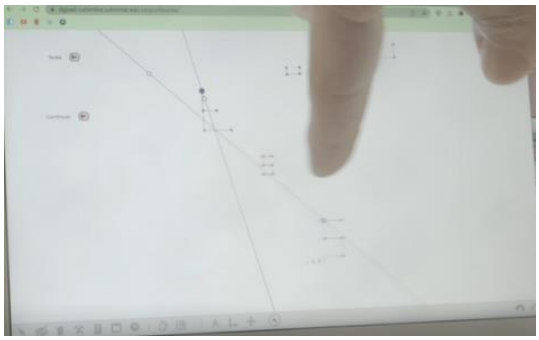
447	P	¿por qué la traza allí?
448	Carlos	Porque conecto ambos puntos en las mismas figuras [construye una recta por un punto de la S imagen y otro punto libre, ajustándola hasta que pase por el punto correspondiente de la S preimagen].



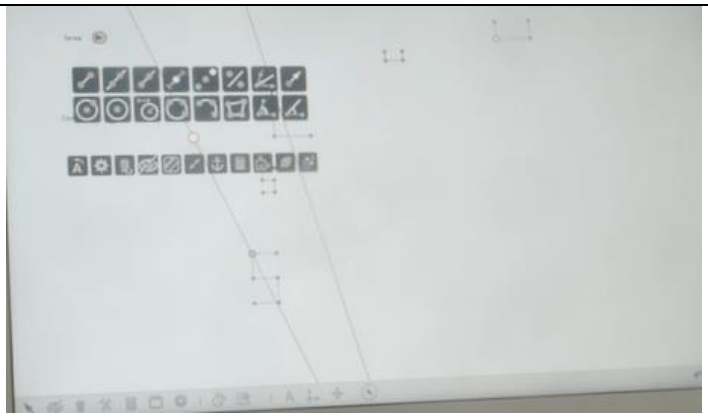
449	Carlos	Pues se supone que en el lugar donde se cruzan, ahí debería ir el punto [construye una recta por un punto de la C imagen y otro punto libre, ajustándola hasta que pase por el punto correspondiente de la C preimagen].

		
450	Carlos	Ubica el punto azul donde se intersecan las rectas. [la solución es correcta, pero hubo un error en la programación que no permitió la validación, dado que el botón correspondiente no se hizo visible].
		
451	Carlos	[se corrigió el error, se reinició la tarea, construye una recta por un punto de la S imagen y otro punto libre, ajustándola hasta que pase por el punto correspondiente de la S preimagen. También construye otra que pasa por un par de puntos correspondientes de las letras L, hace clic en el botón *verificar* y lee la consigna] ahora junta cada par de puntos correspondientes, para verificar la solución. Luego haz clic en el botón *continuar*.
452	P	Pero qué pasa cuando mueve la figura.

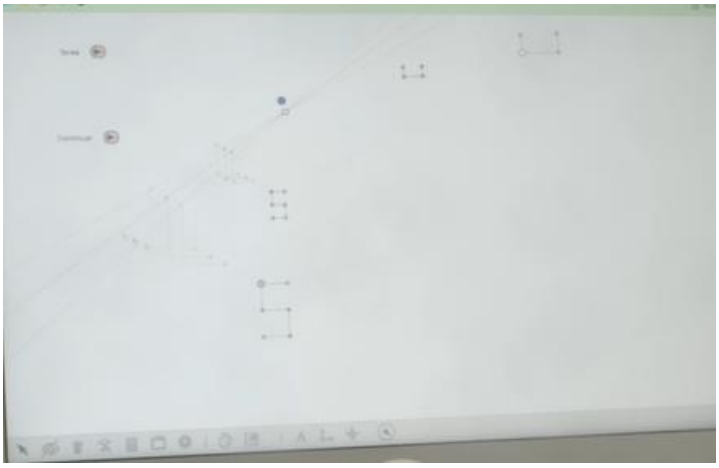
453	Carlos	También se mueve la línea [arrastra una letra S].
454	P	Ahí. ¿qué pasó? [mostrándole con la mano el lugar de la pantalla].



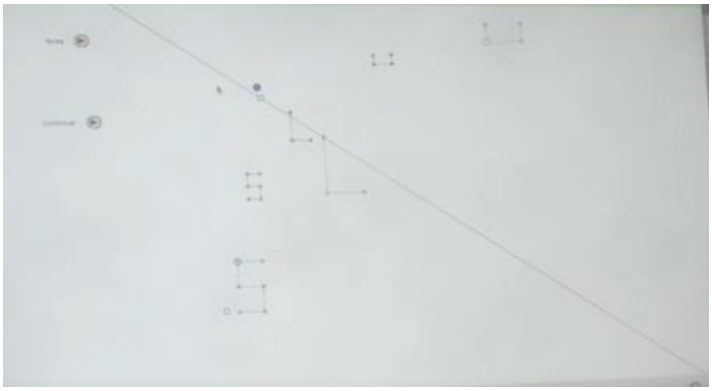
455	Carlos	Pues que la línea se movió con el punto que yo puse entonces ya no está conectando ambos puntos [la recta no permanecía sobre dos puntos homotéticos de las letras S al arrastrar la figura].
456	P	¿cómo sería para conectar ambos puntos?
457	Carlos	Conectar la línea.
458	P	¡ah! Ok, hágalo.
459	Carlos	[construye un punto nuevo, traza una recta por él y un punto de la S imagen y la arrastra para ajustarla hasta que quede sobre el punto correspondiente de la letra S preimagen].
460	P	Pero no con ese punto, porque cuando vuelva a mover la letra se desconecta.
461	Carlos	[mueve la S preimagen y la recta no permanece sobre ella].

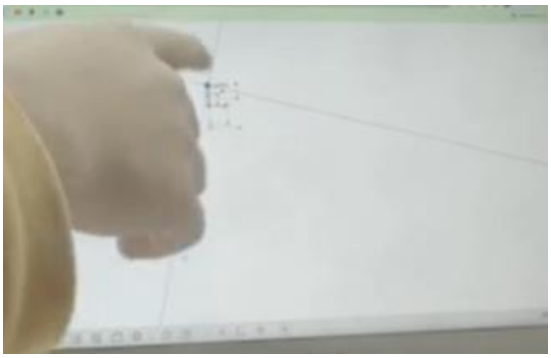


462	P	¿la otra figura no se sale?
463	Carlos	[mueve la l preimagen y permanece sobre dos puntos correspondientes].



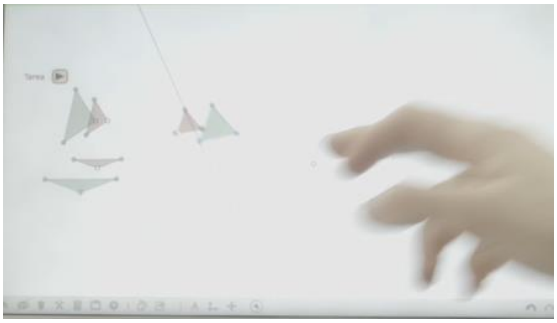
464	Carlos	En este va siempre con la recta.



465	Carlos	[construye una recta que pasa por dos puntos homólogos y al arrastrar permanece unida a esos dos puntos].
466	P	Arrastre a ver… ahora sí [complementa luego de que Carlos arrastra las figuras y la recta resiste el arrastre].
467	P	¿cuáles serían sus conclusiones?
468	Carlos	Espere profesor que se me perdió el punto.
469	P	…de las tareas, cómo encontramos el punto donde las figuras se superponen y en donde cada par de puntos correspondientes coinciden.
470	Carlos	Entonces, como las letras son las mismas lo que varía es el tamaño entonces si tienes una S, la esquina de la derecha… puedes conectar una línea de ese punto a la de otra letra y entonces haces lo mismo con las otras letras, juntar una esquina con la otra esquina de la otra letra que es más pequeña, la S con la S la P con la P y la C con la C y el punto donde todas las líneas se cruzan. [señala con la mano en la pantalla] 
471	P	¿tiene alguna idea para complementar lo de Carlos?
472	María	Pues basado en la estrategia de la línea cuando tenemos las figuras tenemos que trazar una línea por punto y punto, no es necesario de trazarla

		con los tres solo con dos nos traza el punto exacto en donde se entre cruzan, entonces cuando la línea es trazada con ambos puntos la grande y pequeña y cuando se llevan al punto se superponen ambas.
473	Carlos	Si lo conectas a esa misma esquina de cada letra si está justo en esa esquina sin importar a donde muevas las letras, sin importar la distancia en el lugar que se superponen, es ese punto.
474	P	Vamos a abrir un archivo, a ver si esto de los puntos correspondientes es claro.
475	María	Abre un archivo de la primera secuencia.
476	P	Cuál punto corresponde a este.
477	Carlos	…eh… este [señala el punto correspondiente en la pantalla]
478	María	[señala con el ratón otro punto].
479	P	Y el que señaló maría.
480	Carlos	Este [el punto correspondiente].
481	P	Y este de esta figura.
482	Carlos	Este [señalándolo correctamente].
483	Carlos	Izquierda con izquierda, derecha con derecha

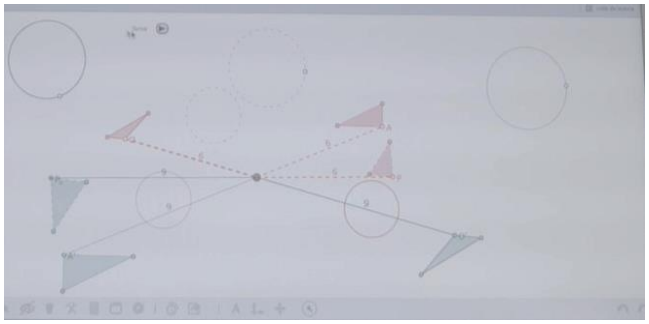
484	P	Ok, fantástico cambia de archivo donde se [cambia la razón de homotecia]. En este cuál le corresponde [señalándole el punto en la pantalla]
485	Carlos	Este [señala con la mano en la pantalla].
486	Carlos	Pero en ese las dimensiones son iguales.
487	P	¿cómo así las dimensiones?
488	Carlos	Es que no me acuerdo cómo se dice ese triángulo que todas las dimensiones son iguales, no se varíen.
489	P	¿Usted es capaz de hacer corresponder otro par de puntos? ensaye a ver.
490	Carlos	De pronto, creo, con ese que es equilátero.
491	P	¿podría otro par de puntos que no sea, los que señaló? [le pregunta a Carlos]

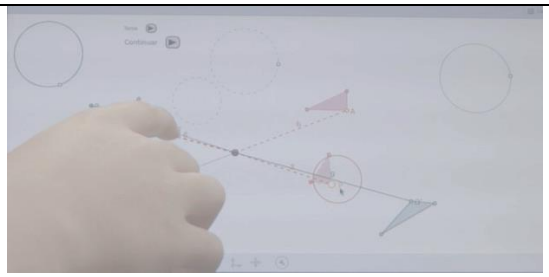
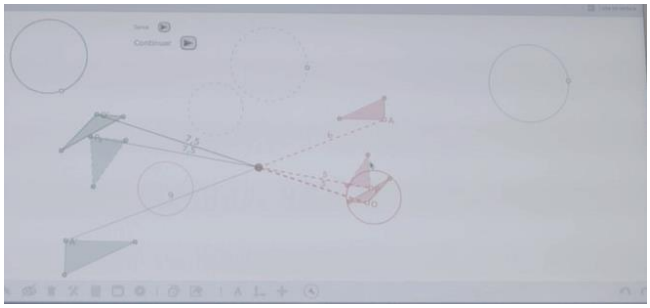
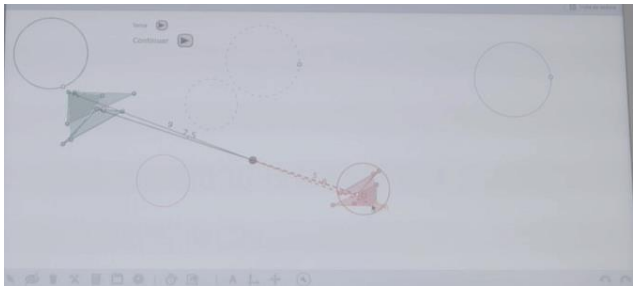
492	Carlos	[traza una recta que pasa por dos puntos no homólogos, arrastra los triángulos].
493	P	¡ah! No es el punto donde se superponen. ¿cuál es el punto donde se superponen?
494	María	Aquí [señala con la mano el lugar de la pantalla] 
495	Carlos	[traza dos rectas por los puntos homólogos] ahí está el punto.
496	P	Ahí coinciden las tres figuras, o se puede coincidir cualquier par de puntos del mismo triángulo.
497		Sí, sí se puede, no que sean distintos.
498	P	¿y el otro par?
499	Carlos	Sí se puede, o sea, que sea el mismo punto de la misma figura el de la izquierda con izquierda, el de la derecha con la derecha y el de arriba con

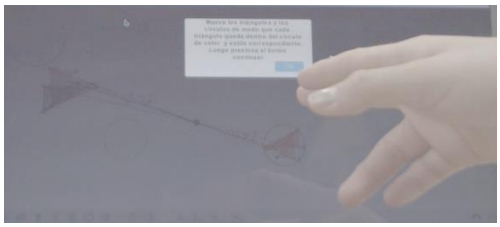
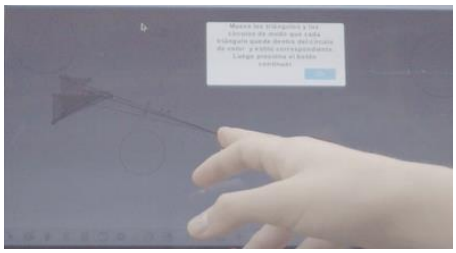
		el de arriba. Y los que no corresponden si lo puedes juntar, pero no en ese punto [refiriéndose al centro de homotecia].
500	P	De acuerdo, desafortunadamente se nos agotó el tiempo [se da por terminada la sesión y la primera actividad].

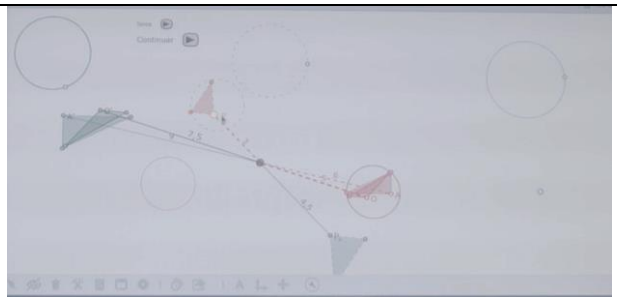
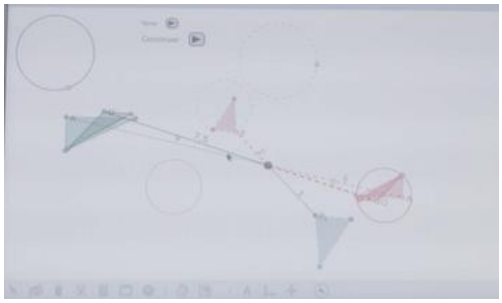
Apéndices B. Actividad 2

No	Sujeto	Descripción
1	P	Empecemos, abra el siguiente archivo.
2	María	[abre el archivo con razón positiva y lee la consigna] mete todos los triángulos en el círculo y luego haz clic en el botón *continuar*.
3	María	[empieza a realizar la tarea]
4	Carlos	Pero podemos mover el círculo [preguntándole a maría].
5	María	[introduce solo un par de triángulos en el círculo].
6	María	No se pueden meter todos.
7	Carlos	Hagamos lo de las líneas.
8	María	¡ah no! Mira, podemos arrastrar las figuras donde se superponen y luego arrastramos el círculo.

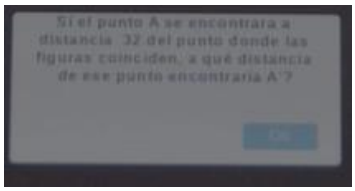
9	María	[hace clic en el botón *continuar* lee la consigna] en las próximas tareas el este punto estará visible y es donde todas las figuras se superponen.
10	P	¿qué decía el texto?
11	María	Que en donde está el punto vinotinto se superponían las figuras. O sea, queda una sobre otra.
12	P	Cambie de pestaña para que abra otro archivo.
13	María	[abre la segunda tarea con razón -1.5]. 
14	María	[hace clic en el botón *tarea* y lee la consigna] mueve todos los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de color y estilo correspondiente. Luego presiona el botón *continuar*.
15	María	Listo, entonces para el verde, verde para el rojo, rojo eso es lo que pienso
16	Carlos	Pero los rojos deben quedar en este [señalando con la mano el círculo] y los puntos con los puntos.

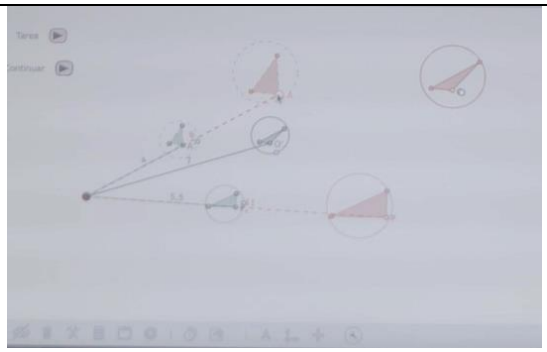
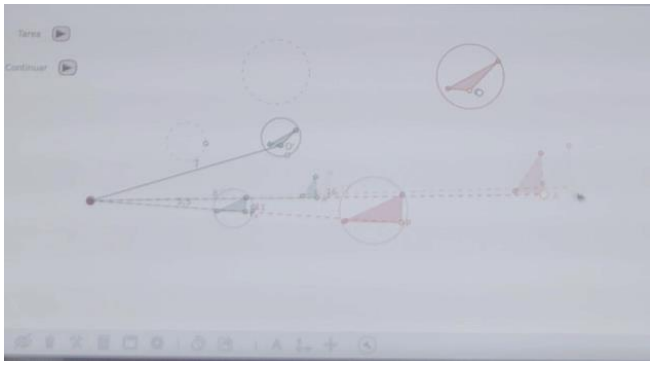
		
17	Carlos	Así, pero voy a meter este para ubicarme [mete un triángulo en el círculo respectivo].
		
18	Carlos	¡ah! Ya me ubiqué [mete un triángulo al círculo de su respectivo color y forma]
		
19	María	Pero sigo sin entender la tarea. [vuelve y a oprimir el botón *tarea* lee la consigna] mueve todos los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de color y estilo correspondiente. Luego presiona el botón *continuar*.
20	P	¿qué entendieron de la tarea?

21	María	Lo que entiendo es que hay que mover los triángulos y los círculos para que quede dentro, o sea, como cada círculo en cada triángulo entonces primero se me ocurrió [señala con la mano el punto de la pantalla]… 
22	María	Me olvidé de este punto [señalando con la mano el centro de homotecia] 
23	María	Probablemente podría poner una figura y luego se ubicaría en otra, pero me acordé que estaba este punto [señalando con la mano el centro de homotecia]
24	P	¿y eso del color y estilo correspondiente cómo lo interpreta?
25	Carlos	Pues que hay algunos que la línea es más oscura entonces el verde oscuro con el verde oscuro, verde claro con verde claro y el de líneas con el otro, [empieza a ubicar los triángulos en donde cree que deberían ubicarse]
26	P	Por el ejemplo… ¿ese iría ahí? [le pregunta a Carlos, luego de que lleva un triángulo al rojo al círculo respectivo].
27	Carlos	Acá.

		
28	Carlos	Tiene puntos donde se frena, entonces debería ir ahí.
		
29	Carlos	No, lo puedo mover tan fluido es como si tuviera puntos en donde sí se mueve.
30	María	[toma el ratón y empieza arrastrar las figuras].
31	Carlos	Ese es como más oscuro le dice a maría [le señala el círculo donde debe ir el triángulo].

Se presentó un error en la programación que no dejó avanzar al segundo momento de esta tarea, se decide abrir otro archivo con la misma tarea.

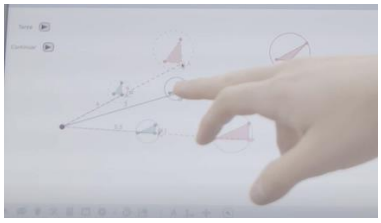
32	P	Abran un nuevo archivo.
33	Carlos	[Abre un archivo con razón 0.5, hace clic en el botón Tarea, aparece la siguiente consigna: Mueve todos los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de color y estilo correspondiente. Luego presiona el botón Continuar]. Es igual a la anterior.
34	María	Movemos ese ahí porque el borde de ese triángulo es como espaciado [se refiere al triángulo punteado].
35	Carlos	Es igual que el del círculo.
36	María	Exacto, digamos este es más grueso y este es más delgado. Y ponemos los círculos en donde corresponden.
37	María	[mete cada triangulo en el círculo correspondiente, hace clic en el botón *continuar* y aparece la consigna: si el punto a se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría a'] 
38	Carlos	¿cuál es el punto a?
39	Carlos	Este es el a [pone el cursor sobre el punto a].

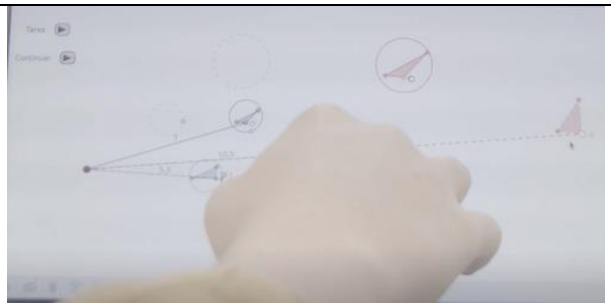
		
40	María	Ajá y este es a' [lo señala con el dedo] y también…
41	Carlos	A treinta y dos [mueve el punto por la pantalla]. No igual no llega (la tarea está diseñada de modo que no sea posible ubicar a a esa distancia del centro de homotecia). 
42	Carlos	¡ah!16 porque esa es la mitad.
43	María	No mira [señalándole con la mano un valor en la pantalla], porque acá esto se puede sumar.

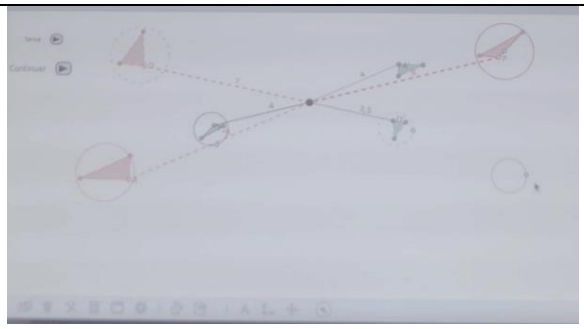
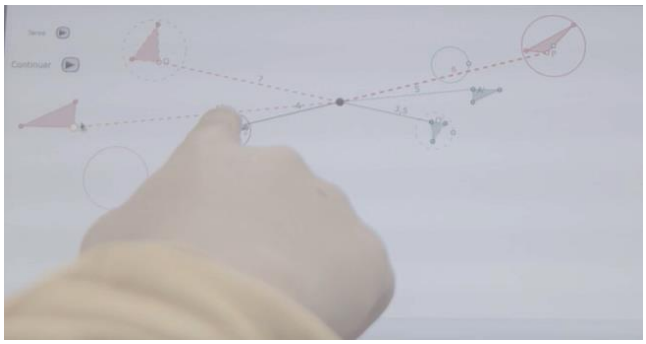
44	Carlos	Por eso es a la mitad porque cuando vas en doce este es seis, [señalando con la mano el valor en la pantalla]
45	María	Por eso tenemos cuatro, ocho y doce [señalando con la mano el valor de la pantalla].

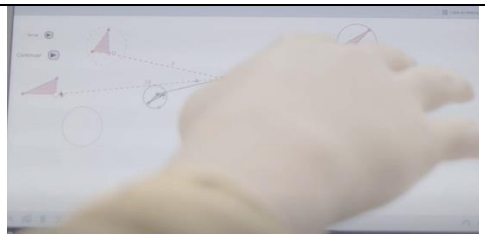
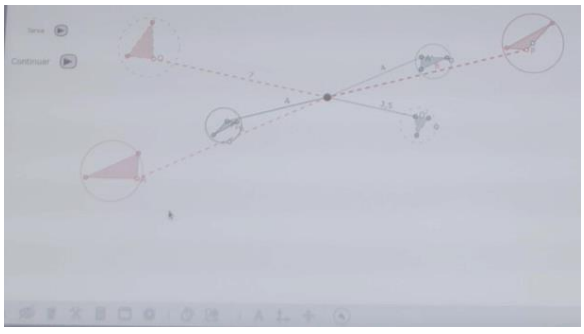
46	María	Porque son dos [señalando con la mano el centro de homotecia] porque es al punto vinotinto.

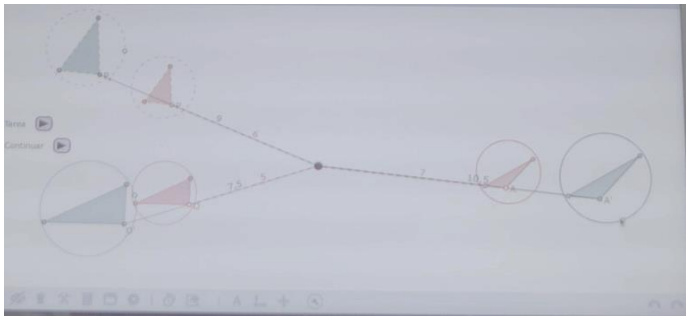
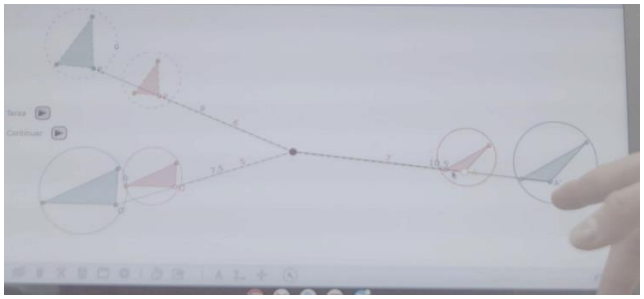
47	Carlos	Sí, esa es la distancia [vuelve a oprimir el botón *continuar* y vuelve a leer la consigna] sí el punto a se encontrará a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría a'? [continúa diciendo] el

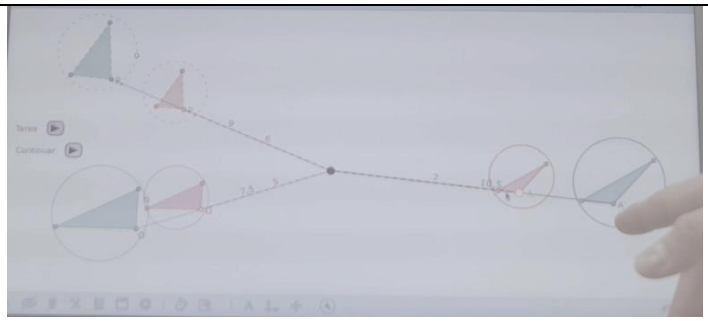
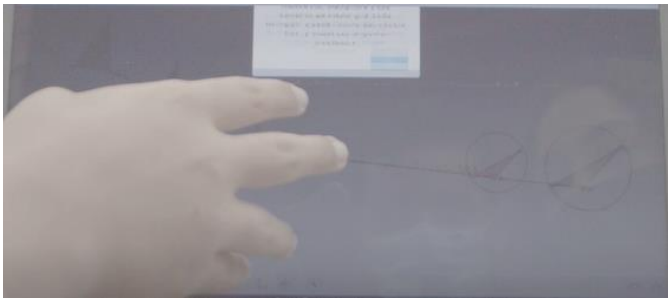
		punto a que es este triángulo sea distancia 32 [haciendo referencia la distancia que hay de ese punto al centro de homotecia]
48	P	¿es la figura o es el punto?
49	Carlos	Es el punto el que está por debajo del triángulo el que está por acá [señala con la mano en la pantalla].
50	Carlos	Ahí lo marca como punto a, entonces dice que está a distancia 32 pero acá aparece [con el apuntador mostrando la distancia en la que está el punto a al punto vino tinto]
51	Carlos	No sé si se refiere totalmente al punto a. Este es el punto a [lo señala con el apuntador]
52	María	Pero aquí también está el punto a señalando el punto en la pantalla [señala a’] 
53	P	Acerque el cursor al segmento que tiene ese número y él le dice en amarillo cuál es.
54	Carlos	Arrastra el punto a.
55	P	¿si ve cómo aparece resaltado en amarillo?
56	Carlos	Sí, pero la distancia [señala con la mano el segmento de la pantalla]

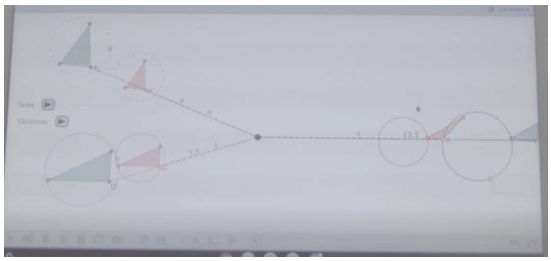
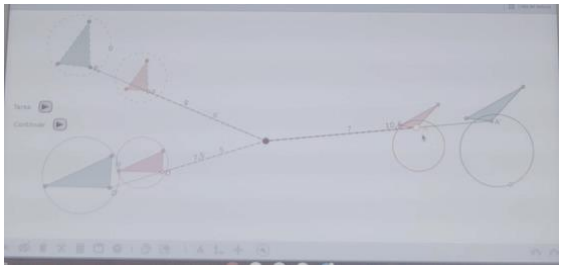
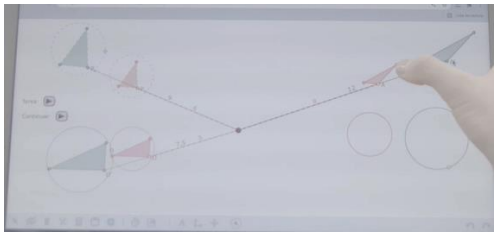
		
57	P	Ahora acerque el cursor al segmento. ¿si ve que se pone en amarrillo? ¿cuál es la distancia?
58	Carlos	De la línea.
59	P	¿de cuál?
60	Carlos	Del punto donde se superponen al punto a, y el otro es del punto donde se superponen al punto a', entonces el punto a' la distancia es la mitad del punto a, entonces si el punto a es cuatro a' es dos y si a esta en 32 entonces a' es 16.
61	María	[arrastra el punto a para ubicarlo a distancia 32 del centro de homotecia].
62	Carlos	Ahí no creo que se deje hasta 32.
63	P	Ya pueden continuar con la siguiente.
64	Carlos	[abre un nuevo archivo con razón -0.5 y lee la consigna: mueve todos los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de color y estilo correspondiente. Luego presiona el botón *continuar*].
65	María	[mete los triángulos en los círculos correspondientes].

		
66	P	¿si a estuviera a distancia 24 del punto donde se superponen entonces a qué distancia estaría a' del punto donde se superponen?
67	María	Doce.
68	P	¿doce? ¿y en este caso?
69	Carlos	En este creo que es distinto
70	P	¿es distinto?
71	Carlos	No, es igual, pero antes ambos se movían en la misma dirección, antes estaba como en la misma línea por ejemplo por acá estaba a' [señalando con la mano la posición en la pantalla] 
72	Carlos	Pero ahora están como en lados opuestos.

		
73	María	Pero aun así la distancia es la misma así estén en direcciones opuestas.
74	Carlos	en direcciones opuestas, pero es la misma distancia, la mitad.
75	P	¿pero ahora no están en la misma línea?
76	Carlos	Sí, están en la misma línea, pero se mueven en direcciones opuestas
77	P	¿opuestas con respecto a qué?
78	Carlos	Con respecto al punto que se superponen
79	María	Digamos que antes esto estaba encima de esto.
80	Carlos	Sí, porque tu movías el punto a hacia acá, y el punto a' también.
81	Carlos	Pero ahora se mueve en la dirección opuesta.
82	P	Entonces, si a estuviera a 32…
83	Carlos	A' está a 16 pero en dirección opuesta, o sea, no en misma dirección en la línea, sí en la misma línea, pero no en la misma dirección. 
84	P	Pasemos al siguiente [sugiere abrir otro archivo con la misma tarea diferente razón de homotecia].

85	Carlos	[abre el archivo con razón 1.5 y lee la consigna] mueve todos los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de color y estilo correspondiente. Luego presiona el botón *continuar*.
86		[resuelve la tarea, hace clic en el botón *continuar* y lee la consigna] si el punto a se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría a'?]
87	Carlos	El punto a es este. 
88	María	Qué tal si lo pones aquí [señalando el lugar en la pantalla] 
89	María	Listo, ahí suéltalo y arrastra el verde.
90	Carlos	Acá no lo mueve [la figura verde no se deja arrastrar]

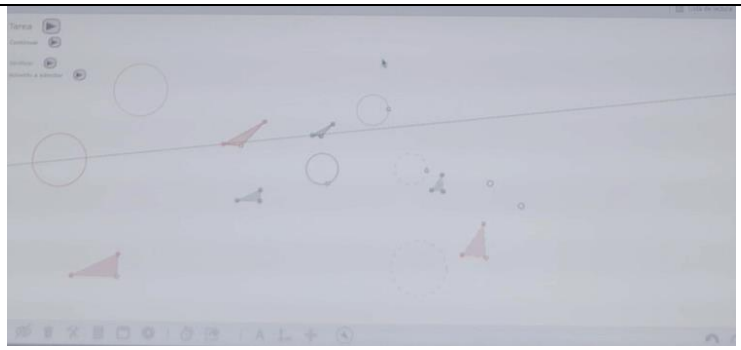
		
91	Carlos	acá el punto a' va a estar en una distancia de cincuenta. ¿no? Una distancia de ciento cincuenta (al parecer se refiere al 150%) que ha recorrido el punto a  porque es la mitad más.
92	Carlos	Entonces a es siete y la mitad de siete es tres punto cinco y el punto a está más tres punto cinco.
93	P	¿maría entendió la pregunta? Si el punto a se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría a', o del lugar que se superponen. Por ejemplo, ahí a está a distancia siete y a' está a distancia diez coma cinco, entonces usted puede mover a y la pregunta es: si el punto a se encontrara a distancia 32 del punto donde las figuras coinciden, a qué distancia de ese punto encontraría a'.
94	María	Yo diría que por la mitad.

95	P	¿la mitad? Por ejemplo, allí el punto está a 9 entonces la mitad es cuatro punto cinco. A' está a cuatro punto cinco. ¿dónde está a'? No lo veo [a' no aparece en la pantalla] 
96	María	[arrastra a tal que a' se muestre en la pantalla]. 
97	María	Es que no entiendo.
98	Carlos	En este caso el movimiento es distinto y las distancias son distintas en ambos puntos, entonces el punto a' está más lejos y es más la mitad del otro punto. En este caso el punto es 8 y la mitad es 4 entonces la suma es doce, entonces si es 32 la mitad es 16 el otro es 48, cómo un cincuenta por ciento más.
99	María	O sea, como esto que falta [señalando con la mano en la pantalla el segmento que hay entre a y a´] 

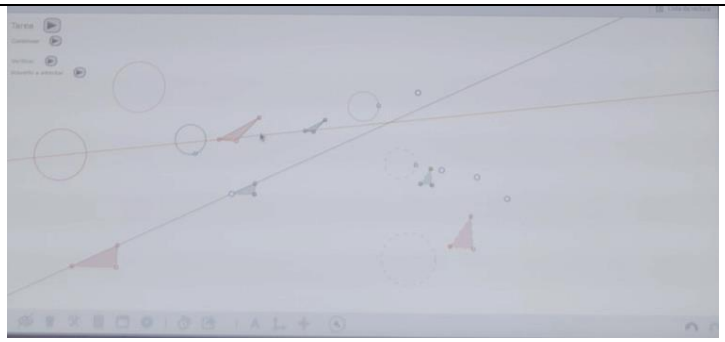
100	Carlos	La distancia del punto a es 8 y el otro está en 12, entonces ahí es como si se estuviera moviendo un cincuenta por ciento más de distancia, o sea, en 32 se mueve la mitad más entonces le sumas 16 a 32,
101	María	¡ah! ¡sí! ¡sí!
102	P	¿y si estuviera a distancia seis? ¿sí a estuviera a distancia 6 a que distancia estaría a'? ¿quién está más lejos a o a'?
103	Carlos	A'.
104	P	¿sí a estuviera a distancia 6 a que distancia estaría a'?
105	Carlos	Entonces el punto de a en cualquier momento… [arrastra a por la pantalla hasta llevarlo a 6] …y el otro es 9, porque le sumas la mitad de la distancia del otro punto, así es con todos los casos.
106	María	Sí.
107	Carlos	Cuando está en cuatro le sumas dos, cuando esté en cinco le sumas dos punto cinco.
108	María	¡ah! Ya entendí.
109	P	Y eso es a lo que usted se refería a un ciento cincuenta por ciento [le dice a Carlos]
110	Carlos	Es un ciento cincuenta por ciento.
111	P	¿de qué otra manera podríamos decir eso?
112	Carlos	…um… el cincuenta por ciento más. Es la mitad de la distancia del punto a más la distancia.
113	María	Sí.

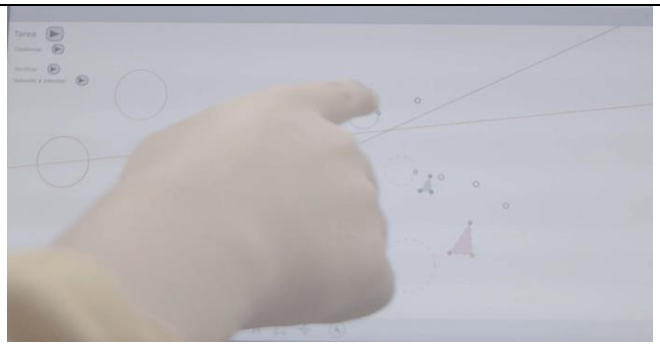
114	P	Qué tal una vez y media del otro.
115	Carlos	Multiplicar por uno punto cinco el otro… ¡ah!
116	María	Sí.
117	Carlos	[abre la tarea de anticipación con razón positiva y lee la consigna] ¿dónde crees que quedarán los triángulos verdes cuando lleves cada triángulo rojo al círculo de su respectivo color y aspecto? Lleva los círculos verdes a dichas posiciones y luego presiona el botón *continuar*.
118	Carlos	¿cómo es que se hacían las líneas?
119	P	¿es la misma tarea?
120	Carlos	La tarea es como mover los círculos de las figuras pequeñas, que son las verdes, a la posición que creemos. Después, que movamos los triángulos grandes a su círculo respectivo.
121	Carlos	Yo creo que es juntar, es como hacer una línea entre cada triángulo y el que es igual.
122	P	Una línea por qué.
123	Carlos	Pensé que no me dejaba mover los triángulos, se supone. Yo creería que se hace lo de la vez pasada, con una línea no solamente podemos ver el punto en donde se superponen sino también en donde quedaría el otro triangulo, como decir el rojo a su respectivo círculo.
124	Carlos	Nos está pidiendo que movamos estos [refiriéndose a los triángulos rojos y lo señala en la pantalla con el apuntador]

125	Carlos	¿se pueden hacer líneas?
126	P	Pueden hacer lo que quieran, desde que activen la herramienta de construcción.
127	María	¿para qué la línea?
128	Carlos	Porque te acuerdas que con el otro punto pondríamos donde se superponen.
129	María	Sí, pero de todas maneras lo que nos están pidiendo, es lo de los círculos.
130	Carlos	No sé si los círculos, pues intentar… ¿no? O se poder ver en dónde quedan… la otra es trazar una línea del centro del círculo a un punto del triángulo que le corresponde, creo que a base del triángulo grande podemos ver en donde queda el pequeño.
131	P	Es que ese punto no lo puede seleccionar [refiriéndose a un punto que intentó seleccionar Carlos sin éxito].
132	Carlos	La primera sería así [traza una recta por dos puntos homólogos y coincidencialmente pasa por el círculo fijo], pero no me ayuda, no están las distancias.

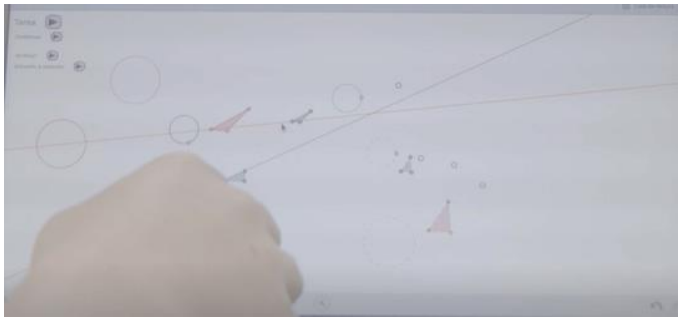


133	P	Por ejemplo, en dónde se superponen las figuras.
134	Carlos	Necesitaría hacer otra línea. De un punto del triángulo grande y al mismo punto del triángulo pequeño.
135	María	[construye un punto nuevo, traza una recta por él y un punto de un triángulo rojo ajusta hasta que quede sobre el punto correspondiente del triángulo verde].
136	Carlos	Esa no es.
137	P	¿por qué no es esa?
138	Carlos	Porque cuando movamos en triangulo, la línea no va a pasar por el otro punto, en las anteriores ese punto donde se interseccionan era donde iba el punto vinotinto, a base de eso yo creo que uno puede estimar que las distancias del punto grande. Es el doble de las del punto del triángulo verde, entonces es como el primer ejercicio que es la mitad.
139	P	¿usted está de acuerdo maría?
140	María	Sí, seria por acá para este [señala con el apuntador].

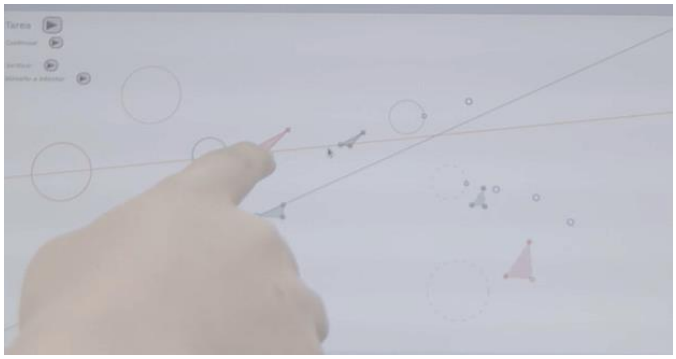
		
141	P	¿cómo calculó?
142	María	A tanteo.
143	P	¿pero cómo?
144	María	Van a avanzar, pero se van a alejar a la mitad.
145	P	¿la mitad?
146	María	De la distancia [señalando la distancia en la pantalla].
147	P	¿de la distancia entre los dos triángulos?
148	Carlos	El triángulo verde se mueve la mitad de la distancia de como se está moviendo el rojo a base del punto donde se superponen, acá por ejemplo [señala con la mano el punto de la pantalla].



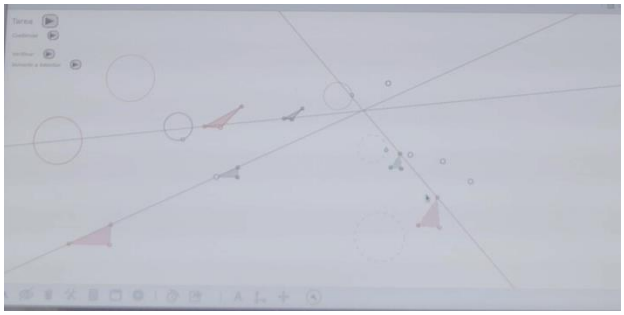
149	Carlos	Si este estuviera a diez [refiriéndose a un punto del triángulo rojo] este estuviera a cinco [refiriéndose al punto homotético del triángulo rojo]

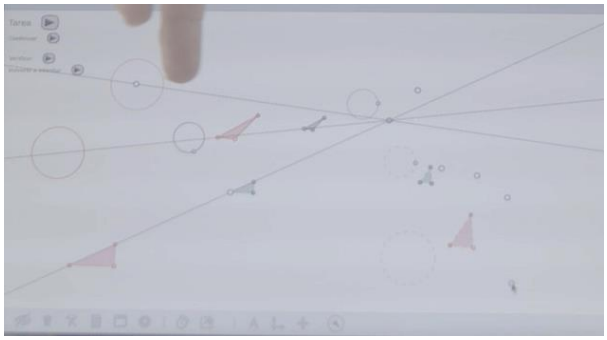
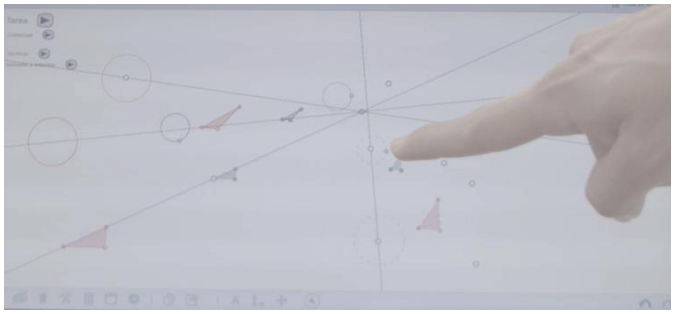


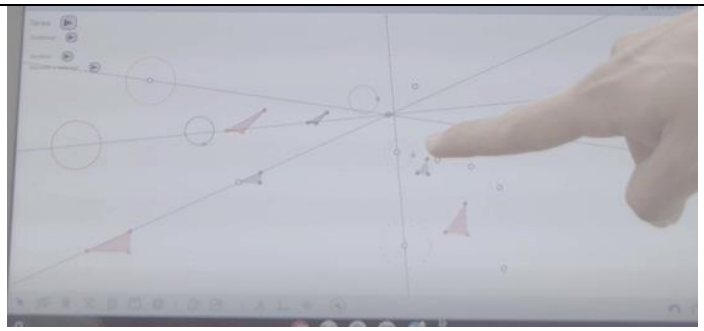
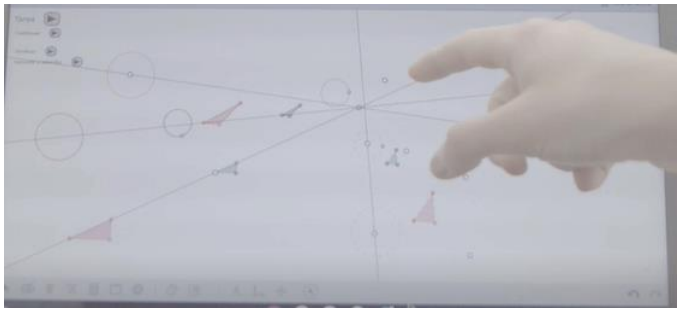
150	P	A diez de dónde.
151	Carlos	Digamos que este es diez [señalando con la mano un punto del triángulo rojo] este estuviera a cinco [refiriéndose al punto homotético del triángulo rojo] de acá.



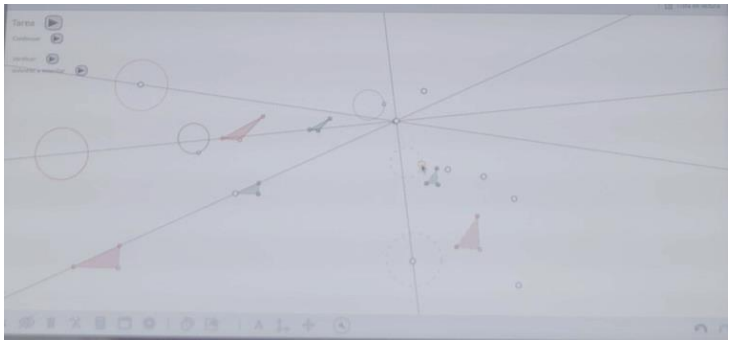
152	P	De ahí a dónde.

153	Carlos	De acá al punto donde se superponen.
154	P	¡ah!
155	Carlos	Sí, acá es treinta o veinticinco. Sería la mitad.
156	Carlos	Más o menos, por eso podemos inferir… [traza una recta que pasa por dos puntos homotéticos]. Pero acá no lo cruza [refiriéndose que la recta no pasa por el centro del círculo del color y estilo que le corresponde] 
157	P	¿qué paso? ¿no lo cruza?
158	Carlos	Que nosotros… solo cruza a un círculo, debería… pues debería, pero uno infiere igual si uno traza una línea por la mitad de este círculo.
159	P	¿cuál es el problema? ¿por qué trazó esa línea?
160	Carlos	Porque, ahí están entre los triángulos que están fijos, pero necesitamos encontrar la posición si ponemos el triángulo rojo en dónde quedaría el verde.
161	P	¡ah!
162	Carlos	Yo creo que es como mejor trazar… ¿cómo borro estas líneas?
163	Carlos	Porque ahí tenemos claro que la distancia entre ambos triángulos…
164	P	Usted podría explicar eso a maría

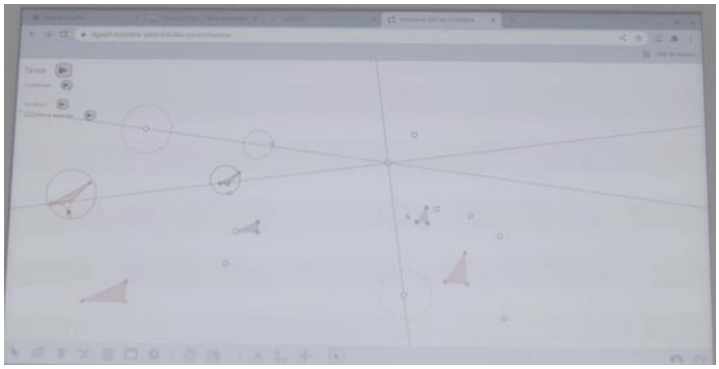
165	Carlos	Sí, es como el primer ejercicio. El triángulo rojo está al doble de la distancia del punto donde se superponen que el verde. Entonces… el verde es cinco y el rojo está en diez.
166	P	Mi pregunta es que usted traza una recta entre los dos triángulos y funcionó [señala con la mano la recta intermedia de la imagen]. 
167	Carlos	Pero, porque quedó coincidencialmente con estos dos (los dos triángulos y los dos círculos estaban casi alineados).
168	P	¿y esta no? 
169	Carlos	Esta no, por eso estoy trazando una por medio de los círculos.
170	María	Pero igualmente a simple vista este se puede mover por acá. Entonces, si colocas al rojo acá el verde iría acá. Porque acá está el punto… sería por la mitad.
171	P	Pero este lo puede mover [señalando un punto del triángulo verde].

		
172	María	Sí, por eso, pero eso es la mitad desde este punto [señalando con la mano el punto donde se superponen todas las figuras] porque vamos a mover este acá entonces este queda acá. 
173	P	Arrástrelos.
174	Carlos	Todavía no se puede, a no mentiras, sí.
175	Carlos	Por acá.
176	P	No será…
177	Carlos	Es que es la mitad del rojo.
178	P	¿es la mitad?
179	Carlos	Yo creo que es más abajo, igual el rojo es de mayor tamaño del verde.
180	P	¡ah!
181	Carlos	Se va a ver más pequeño, pero es la mitad.
182	P	Falta el otro.

183	Carlos	Entonces por acá debería ser por acá [ubica el círculo cerca de la posición solución].

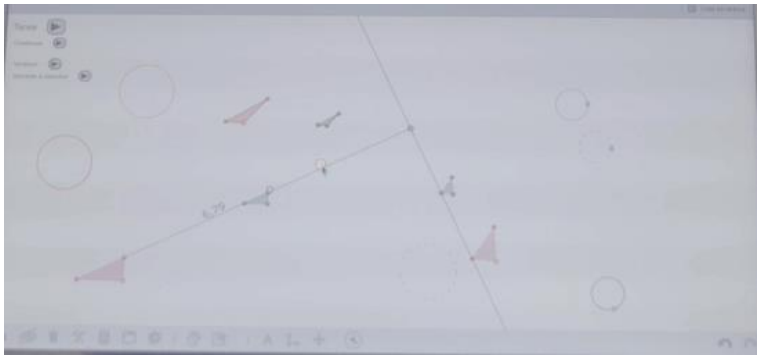


184	Carlos	[hace clic en el botón *continuar* lee la consigan] ahora lleva cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color y estilo. [continúa diciendo] haz clic en botón *verificar*.
185	Carlos	Fallamos por un poquito.
186	María	Sí.



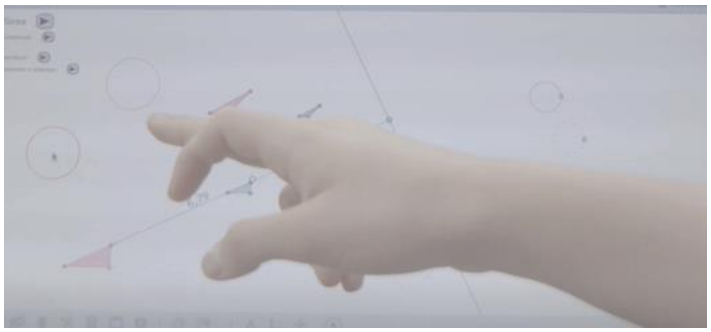
187	P	¿cómo podríamos mejorar la precisión?
188	Carlos	No hay una regla.
189	María	Yo creo que se puede.
190	Carlos	Si hubiera una herramienta de regla, simplemente todo esto fue al ojo.
191	Carlos	Y por eso es muy fácil fallar.

192	P	Dibuje un segmento y mostrar su longitud.
193	Carlos	[ubica un punto en la pantalla y hace clic en este para activar la lista de herramientas] este.
194	P	No el siguiente.
195	Carlos	¡ah! Ok,
196	P	Ahora toque el segmento, luego la reglita y arrastre los puntos.
197	Carlos	Podemos reiniciar la tarea.
198	P	Vuélvala abrir. [lee la consigna] ¿dónde crees que quedarán los triángulos verdes cuando lleves cada triángulo rojo al círculo de su respectivo color y aspecto? Lleva los círculos verdes a dichas posiciones y luego presiona el botón *continuar*.
199	Carlos	[traza un segmento por dos puntos homotéticos]
200	María	Ahí.
201	Carlos	Es la distancia entre ambos [selecciona la herramienta regla para que se observe la distancia entre los puntos seleccionados]
202	P	Qué distancia va a medir.
203	María	Seis entonces, es la mitad.

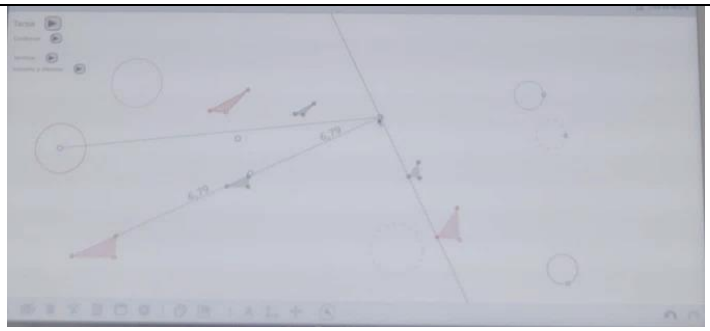
204	Carlos	No, porque antes este estaba a diez y este a cinco.
205	Carlos	O la otra es conectar al punto donde se interceptan.
206	María	Primero hacer las líneas y luego sí lo hacemos.
207	Carlos	Encuentra el punto donde se superponen todas las figuras… ¿cómo oculto las rectas profesor?
208	P	En el ojito. Pero necesita mostrarlas otra vez.
209	Carlos	Entonces si hacemos otro hasta acá, un segmento que vaya del punto del triángulo verde al punto donde se superponen [traza el segmento y hace visible su longitud].
210	P	Oculte la recta y ahora sí. 
211	Carlos	Es igual.
212	P	Pero en mire en donde empiezan.
213	Carlos	¡ah sí! Acá está, a 6.69 y al otro también. Entonces el punto más alejado está al doble.
214	Carlos	Ahí comprobamos que es el doble.
215	P	Si necesitan ocultar o borrar ese segmento lo pueden hacer, si no, pueden seguir trabajando.

216	María	Entonces sería 14.9.

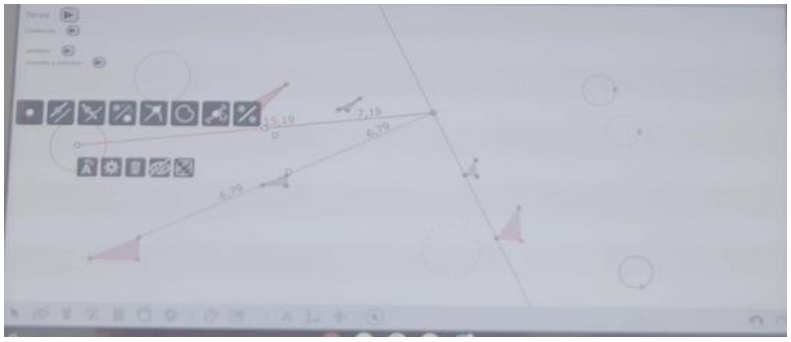
217	Carlos	Pero si… ahora cómo utilizamos esto, cuando vayamos a mover los triángulos, tenemos el punto donde se superponen. Pero, cómo hacemos acá [señala un círculo rojo].



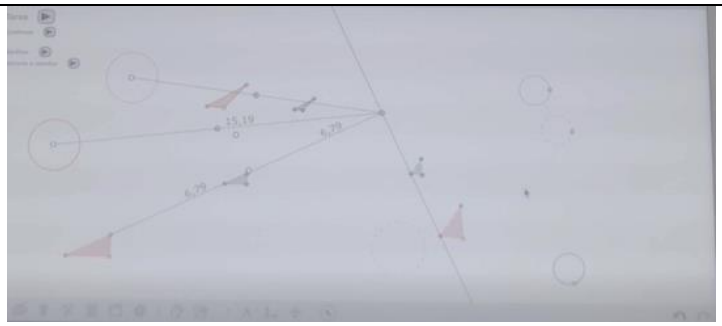
218	María	Va a ser la mitad.
219	Carlos	Del centro.
220	María	Es como la mitad de esto [refiriéndose a la mitad de la distancia del centro del círculo y al punto donde se superponen]
221	Carlos	[traza un segmento desde el centro del círculo hasta el punto donde se superponen, y muestra la distancia].



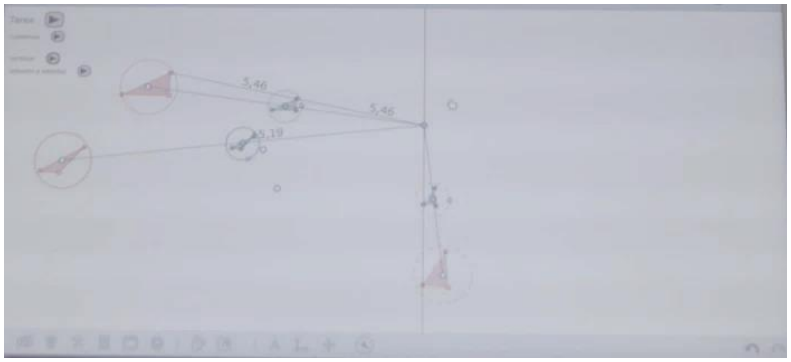
222	Carlos	Entonces la mitad es 7.7 pero igual no se puede ver.
223	P	¿qué necesita?
224	Carlos	Calcular en dónde va a ser la mitad. Sabemos cuál es la distancia, pero no sabemos poner un punto en la mitad.
225	María	Pon un punto sobre el segmento y haces otro al punto de intersección.
226	Carlos	[realiza lo que dijo maría y muestra la distancia].
227	P	Hay otra estrategia. Toque el segmento grande. ¿cuál de esas herramientas le sirve para hallar el punto medio?
228	Carlos	[toca el segmento y se muestran algunas herramientas] la mitad de estas herramientas no las entiendo.



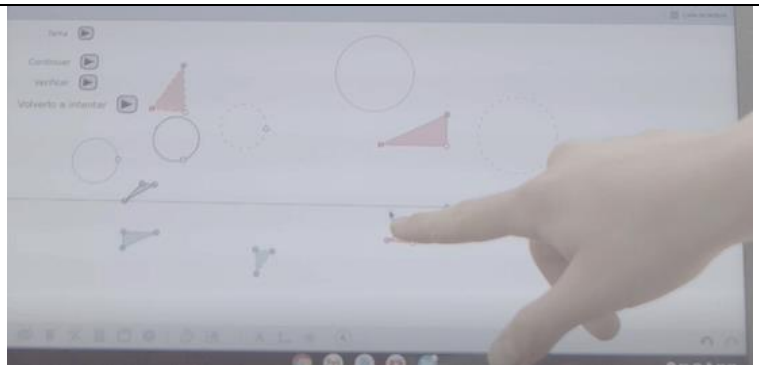
229	Carlos	¡ah! Punto medio. Sí, es más fácil [traza los puntos medios de los dos segmentos que van del centro del cada círculo rojo al centro de homotecia].



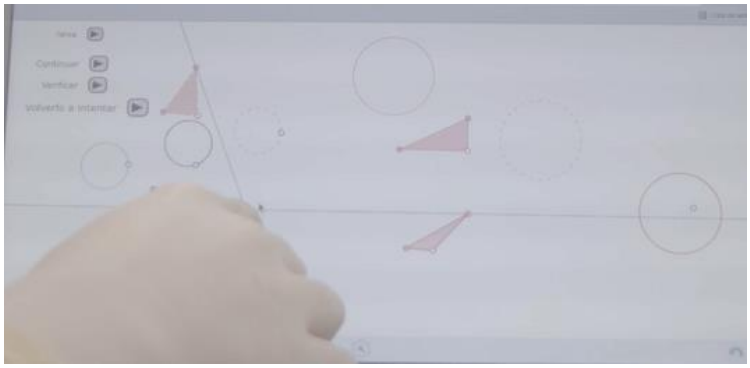
230	Carlos	Ya… [hace clic en el botón *verificar* y lee la consigna] ¡muy bien, has terminado la tarea!]



231	P	Listo, abra otro archivo.
232	María	[abre un archivo con razón -0.5, hace clic en el botón *tarea*, lee la consigna] ¿dónde crees que quedarán los triángulos verdes cuando lleves cada triángulo rojo al círculo de su respectivo color y aspecto? Lleva los círculos verdes a dichas posiciones y luego presiona el botón *continuar*.
233	Carlos	Primero traza una línea por dos puntos iguales.
234	Carlos	Es ese.
235	María	[traza una recta y la ajusta hasta que quede sobre dos puntos homotéticos]. Si observamos la figura, este punto es el mismo que este, lo que pasa es que la figura está al revés.

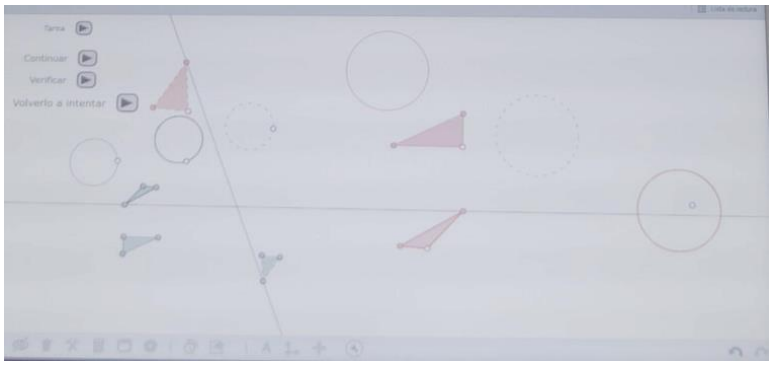


236	Carlos	Eso se puede explicar por grados. Este está rotado. No sé cómo explicarlo.
237	Carlos	Acá está la figura y la otra está volteada.
238	María	Eso tiene un nombre, pero no me acuerdo.
239	María	Otra línea con el mismo punto, pero de otra.
240	P	¿cualquier punto sirve?
241	Carlos	Mientras sea el mismo punto del otro triángulo… entonces, acá encontramos la intersección.

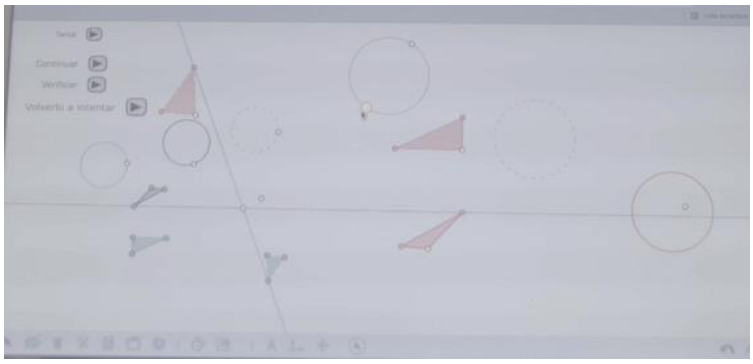


242	P	¿y si yo usara cualquier otro punto de los otros?
243	María	No.
244	Carlos	Sí, es lo mismo, si es el mismo punto en el otro triángulo, sí.
245	María	No.

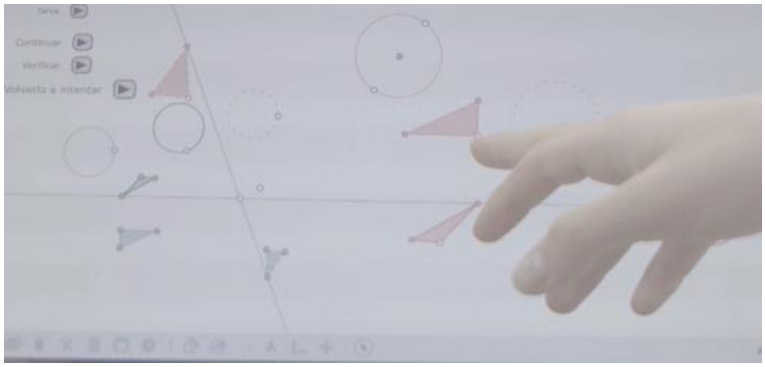
246	Carlos	[entonces le muestra cuál punto es homotético con el otro y cuál no].
247	María	Por eso.
248	P	Ok.
249	Carlos	Primero encontramos, como lo hicimos antes, el punto donde todos se superponen.



250	Carlos	Ahora encontrar el centro del círculo. ¡ah! Pero con dos puntos lo encuentro y estos deben ser opuestos para que dé el centro exacto [traza el punto medio de dos puntos sobre el círculo para obtener el centro del mismo].



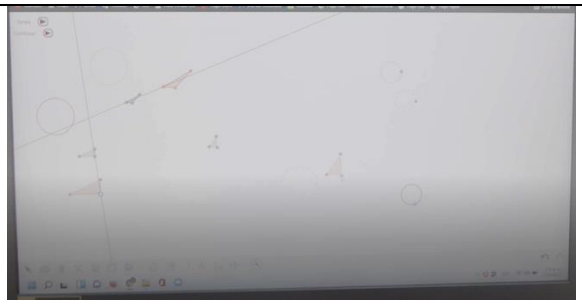
251	Carlos	También toca analizar el movimiento entre ambas.
252	María	¿se pueden mover?
253	Carlos	No.

254	María	Entonces este [mostrando con la mano un punto de un triángulo rojo que se deja arrastrar] 
255	Carlos	No, porque lo que nos pide es mover los círculos, pero igual ahí se puede poner regla.
256	P	Puede utilizar la herramienta segmento.
257	Carlos	Creo que está claro, acá es como el otro el doble de distancia y se mueve en direcciones contrarias.
258	P	Lastimosamente se nos agotó el tiempo seguiremos en una próxima sección. Se finaliza la experimentación.

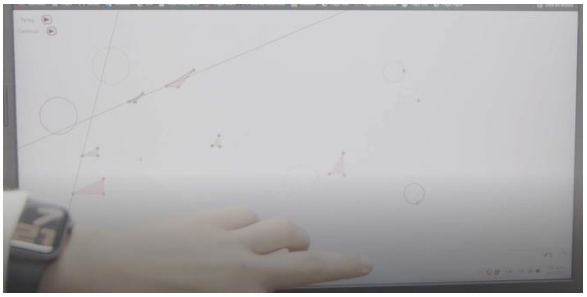
Apéndices C. Actividad 2 refuerzo

No	Sujeto	Descripción
1	P	Vamos a repasar la última actividad que hicimos (nueva sesión).
2	Carlos	[abre el archivo, hace clic en el botón *tarea* y lee la consigna: "¿dónde crees que quedarán los triángulos verdes cuando lleves cada triángulo rojo al círculo de su respectivo color y aspecto? Lleva los círculos verdes a dichas posiciones y luego presiona el botón verificar"].

3	María	Ok entonces cómo fue que hicimos unas líneas.
4	Carlos	El mismo punto de cada triangulo, entonces donde se intersecan.
5	María	¡ah sí! [construye una recta que pasa por un par de puntos homotéticos].
6	P	Creo que ahí puso un punto, selecciónelo y arrástrelo [intenta construir una segunda recta haciendo clic sobre un punto inerte y agregó un punto nuevo].
7	María	[borra el punto]
8	P	Ese no se deja seleccionar, ese sí [los puntos inertes no permiten construir objetos seleccionándolos directamente].
9	María	[construye otra recta por dos puntos homólogos]
10	P	¿Por qué va ese con ese? [le pregunta a maría].
11	María	Porque son del mismo grosor.
12	P	No, digo…
13	María	O sea, el punto.
14	P	…digo el triángulo rojo tiene tres puntos, tres vértices. ¿cómo supo que era ese el punto?
15	María	¡ah! Pues, podemos observar que la figura no está invertida, están en la misma posición en vez de estar rotada entonces podemos observar de dos tiene una punta de donde la seleccioné es igual en la pequeña, digamos si yo seleccioné este va a ser este, si este, este [señalando con el apuntador cada par de puntos homotéticos]

		
16	María	Y ahorita es más fácil porque no están invertidas ni nada.
17	P	¿hay casos en los quedan invertidos?
18	María	Si hay casos.
19	Carlos	Lo de la distancia, lo del segmento.
20	P	Ibas a trazar otra recta.
21	María	Sí, pero va a quedar acá no tiene sentido (sabe que la tercera recta concurre con las otras dos).
22	Carlos	Si, ya lo tenemos.
23	María	Es esta [la herramienta segmento]… y después cómo…
24	Carlos	Lo trazas al punto de donde se superpone.
25	María	A bueno [construye el segmento de un punto del triángulo rojo al punto donde se superponen.
26	Carlos	Cómo es que se mira la distancia.
27	P	Pero primero, qué quisieron hacer ahí.
28	María	Lo de las medidas.
29	Carlos	Lo que hicimos arriba.
30	P	Y ese punto que colocaron arriba.

31	Carlos	Ese punto fue sin querer.
32	María	[borra el punto] trata de arrastrar este punto acá (pretende un punto en la intersección de las dos rectas).
33	P	¿quieren poner un punto allí? Cuando se resalten las dos en amarillo pueden hacer clic y colocar el punto (así se construye la intersección de dos rectas en DGPad). ¿eso era lo que querían?
34	Carlos	Es que acá no se ve bien.
35	P	¿qué no se ve bien?
36	Carlos	La distancia, es que no estoy seguro si marca.
37	María	Todo.
38	P	¿lo colocaron? El punto que querían. Si quiere, borre ese punto [había construido un punto nuevo sin querer].
39	Carlos	Sí, [corrige y construye la recta que pasa por un par de puntos homotéticos].

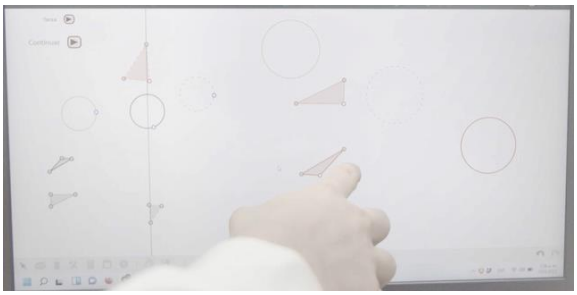
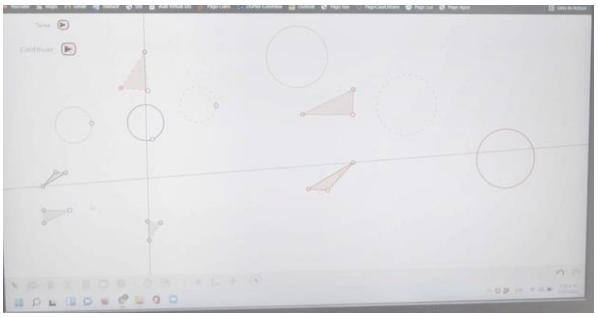
40	P	¿de dónde a dónde?
41	Carlos	Del punto donde se superponen a cada triangulo y ahí determinamos.
42	P	¿a cada triángulo?
43	Carlos	Sí, porque pues acá al ojo se nota que es el doble. De acá puede ser 10 y al triángulo verde sería cinco.
44	Carlos	Sí, pues igual para cada uno son diferentes.
45	P	¿esa relación cambia?
46	Carlos	En los ejercicios.
47	María	No, si medimos esto a simple vista, decimos que es la mitad. 
48	P	O sea, que cambia en otro archivo
49	Carlos	Ajá, en otro archivo.
50	María	¿por qué lo vas a poner ahí? [le dice a Carlos]
51	Carlos	Es para que no se crucen [construye un segmento del centro de homotecia a un vértice de un triángulo que no está sobre las dos rectas ya construidas].

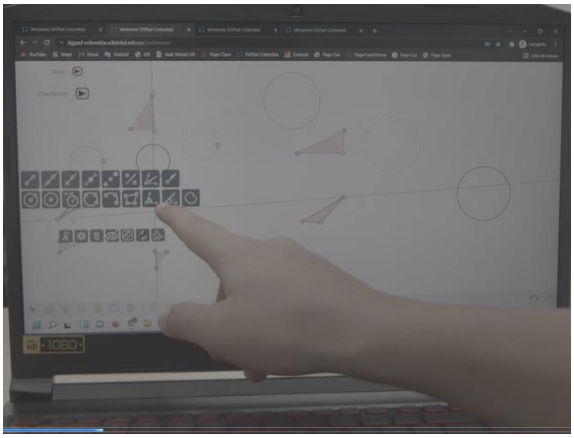
52	Carlos	Ahí hay cuatro con once y luego hacíamos esto… ash...
53	P	¿qué pasó?
54	Carlos	Mejor hacerlo en el mismo punto de donde hicimos la línea.
55	P	¿es mejor o es necesario?
56	Carlos	Es necesario.
57	María	Sí, porque ahí está más cerca.
58	Carlos	No sé, si se puede hacer zoom con el ratón (los números correspondientes a las longitudes de los segmentos y demás objetos estaban superpuestos y querían evitar esto).
59	P	Creo que se puede arrastrar el texto haciendo clic, seleccione la primera opción de texto, allí sin soltarlo.
60	Carlos	No.
61	P	Otra vez, sin soltarlo.
62	María	Perdón yo me acuerdo de que podíamos borrar.
63	P	Ahí, arrástrelo hacia arriba.
64	Carlos	Bueno, ahí se nota de este punto del triángulo al punto donde se superponen es 2.06 y el otro es de 4.12. Entonces, la distancia de este punto al punto

		donde se superponen es el doble que este punto al que se superponen, esa relación se va a mantener igual da igual en donde esté cada triángulo.
65	P	Ok.
66	Carlos	Y a base de eso, podemos medir en dónde va a quedar el triángulo verde cuando uno mueva el triángulo rojo acá lo que hacemos es poner otro punto [ubica un punto aproximadamente en el centro del círculo rojo].
67	María	¿qué estás haciendo?
68	Carlos	¿dónde marcar la intersección?
69	María	¡ah ok! Yo creo que ahí, un poquito…
70	P	Ahí quedó en la intersección con la recta.
71	María	Pero un simple punto.
72	Carlos	Usualmente lo hacíamos al ojo.
73	P	Puede ponerlo en cualquier parte.
74	María	Por eso como el punto que hacías con el clic.
75	Carlos	Sí, sí, lo ponemos completamente en la parte opuesta ahí podemos ver si es exacto, ¡ah! No espere [presiona en el teclado ctrl z].
76	P	Ctrl z acá no sirve.
77	Carlos	Si lo hacemos con punto medio es exacto [ubica dos puntos sobre el círculo, construye el punto medio de estos y los ajusta para encontrar el centro del círculo]. Que quede en la misma posición de un círculo, si queda acá y luego acá. O sea, estamos tratando de trazar una línea de diámetro.
78	P	¡ah! El diámetro.

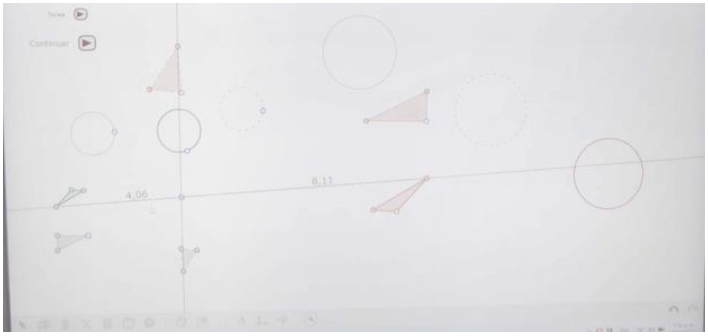
79	Carlos	Obviamente acá la línea no es perfecta [indicando que el punto que encontraron no es exactamente el centro del círculo] no tenemos una herramienta para que sea una regla o algo.
80	P	Bien.
81	Carlos	Pero igual ahí quedó más o menos en el centro… y luego hacíamos otra de segmento o punto medio, creo, de acá a acá [construye el punto medio del centro del círculo y el centro de homotecia]… y ahí va el otro círculo.
82	María	Entonces movemos.
83	Carlos	No sé si toca hacerlo con todos los círculos, yo creo que sí, [ubica un punto en el centro del otro círculo rojo y encuentra el punto medio de ese centro y el punto donde se superponen las figuras].
84	María	¡ah! Ok, ya me acordé.
85	Carlos	Así encontramos la posición.
86	María	¿cuál es la tarea?
87	Carlos	Movemos los círculos, este va acá porque va en par con el otro de línea punteada. La idea es que quede en lo más en el centro, o sea, que ese punto lo más en el centro del círculo posible [arrastra los círculos verdes a hasta esos puntos]

88	Carlos	[hace clic en el botón *continuar* y lee la consigna] ahora lleva cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color y estilo, haz clic en botón *verificar*. [arrastra los triángulos rojos a los círculos respectivos y los triángulos verdes quedan dentro de los círculos correspondientes]. Igual este queda muy preciso [hace clic en el botón *verificar* y lee la consigna] ¡muy bien has terminado la tarea!
89	P	Vamos a la otra pestaña [allí está abierto el archivo con la misma tarea con razón de homotecia y centros distintos].
90	Carlos	[hace clic en el botón *tarea* y lee la consigna] ¿dónde crees que quedarán los triángulos verdes cuando lleves cada triángulo rojo al círculo de su respectivo color y aspecto? Lleva los círculos verdes a dichas posiciones y luego presiona el botón *verificar*.
91	María	…entonces…
92	Carlos	Primero las líneas entre triángulos iguales. Por ejemplo, en este pasa lo que dijo maría, los triángulos no están en la misma dirección, sino que están rotados. Este está al revés del otro.
93	María	Pero entonces observando la figura se puede reconocer.

94	P	¿Ustedes dicen que se puede reconocer en la figura qué punto va con cuál?
95	María	Sí profesor, para mí, en mi caso, yo pienso es específicamente uno que es la punta, aunque también se reconocería este es más a simple vista que la punta. 
96	P	Es aguda.
97	María	Más aguda.
98	Carlos	Este es como ochenta y cinco grados y este de acá se nota más, pon un punto sobre la intersección solo haz dos [sugiere a maría].
99	María	[construye dos rectas por dos pares de puntos homotéticos]. 
100	P	¿por qué solo con dos?
101	María	Pues ya sabemos este punto y, si los conectamos aun así vamos a saber…
102	Carlos	La otra línea se va a trazar igual.
103	María	Ajá, sí.
104	María	¿cuál es que usamos?

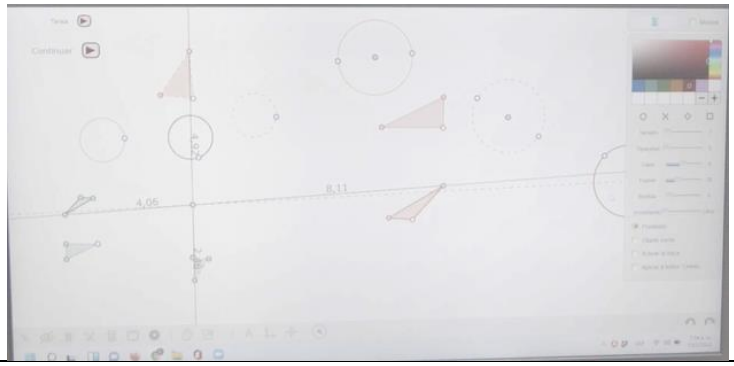
105	Carlos	Pon un punto acá [señala la intersección de las rectas]. 
106	María	¡ah! Ok.
107	P	Ese lo puede borrar haciendo clic en él y aparece la canasta [había construido un punto sin querer].
108	Carlos	Ahora la de los círculos. ¡ah! ¡no! Primero el de las distancias. Y acá también es distinto como el movimiento de los triángulos. A simple vista se ve que sigue siendo el doble. Del rojo al punto que se superponen, del verde al punto, lo que pasa es que ahora están en direcciones opuestas. Pues, el verde puede estar a cinco y el rojo debe estar a diez.
109	Carlos	¿cuál es el que usas?
110	P	Carlos ¿usted está de acuerdo?
111	María	Sí, estoy de acuerdo.
112	P	Como está la recta y el segmento, cuando le dé clic aparecen los dos (maría hizo clic sobre dos objetos superpuestos).
113	Carlos	Segmento [le indica a maría que debe seleccionar la opción segmento]
114	María	Ok.

115	Carlos	Y la regla abajo a la derecha y ahora punto medio.
116	P	¿punto medio?
117	Carlos	Si para haber el punto sobre esa línea y hacer otro segmento.
118	María	Pero esta es acá
119	Carlos	¡ah! Ok.
120	María	Entonces voy a hacer lo mismo… y se nota que es el doble.

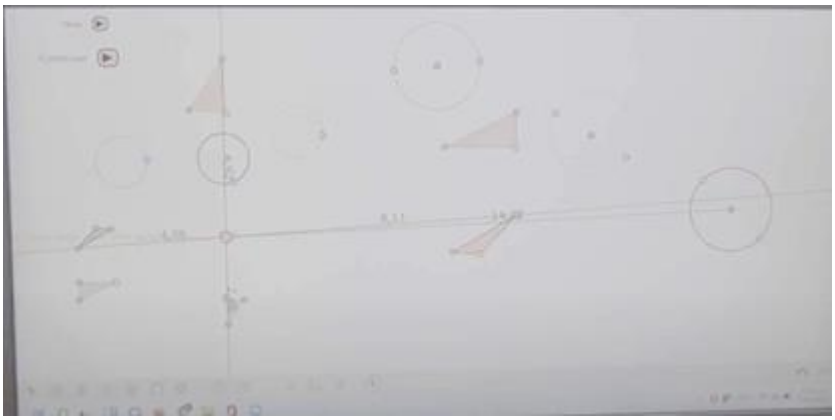


121	Carlos	No sabemos cómo se mueven las figuras.
122	María	Sí.
123	Carlos	Sí, se mueven en dirección opuesta, aunque están así, creo que se mueven en direcciones opuestas. Si pones el punto donde se superponen en la mitad, pero…
124	P	¿pero ahí está en la mitad?
125	Carlos	Sí, sí, por eso de acá a acá va a ser el doble de acá a acá, lo que pasa es que este antes debería estar acá (en caso de que la razón sea positiva).
126	Carlos	Ahora se mueven en direcciones opuestas.
127	P	A ver si lo podemos decir de otra manera. ¿podemos decir que los dos triángulos están a lados contrarios del punto donde se superponen?

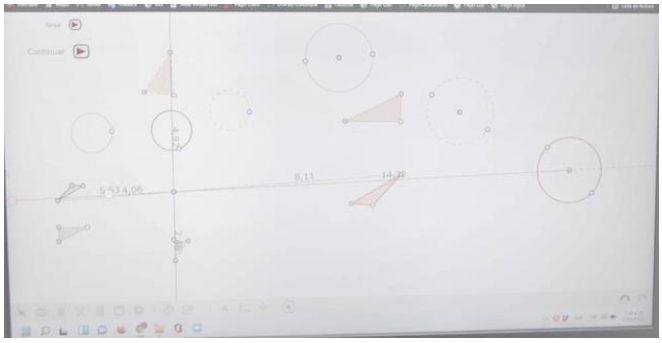
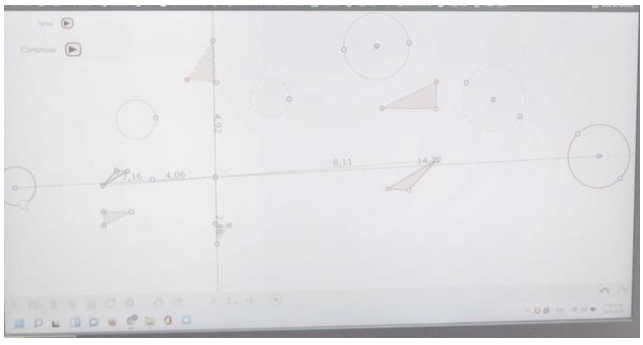
128	Carlos	Sí, y se mueven en direcciones opuestas,
129	María	Sí porque si no estos, si se movieran en la misma dirección se podría decir que estuvieran al lado.
130	Carlos	Este estaría por acá o este estaría por acá [señalando posiciones opuestas al punto donde se superponen]
131	Carlos	Así era en el otro ejercicio.
132	P	Creo que ahí hay un punto que no corresponde, pero está bien.
133	Carlos	Borra eso [le indica a Carlos que borre el punto sobrante]
134	María	[construye dos rectas que pasan por dos pares de puntos homólogos, encuentra el centro de homotecia].
135	Carlos	Ahora los puntos en la mitad de los círculos rojos.
136	Carlos	Primero hago esto y luego lo otro [ubica puntos los centros de los círculos, con la misma estrategia de antes].
137	María	Y entonces…
138	Carlos	Ahora trazas una línea, no espera, sí.
139	P	¿cómo una línea?
140	Carlos	Trazas una línea.
141	María	en el anterior. Una línea del centro a acá y hallamos la mitad.
142	Carlos	Pues sí, pero sería luego marcar de acá a acá [del centro homotecia al centro de un círculo rojo]. Esa distancia, porque antes era en la misma dirección. Entonces, de donde está, lo que podemos hacer es espichar (hacer clic en) este punto [el punto donde se superponen todas las figuras] y la segunda.

143	María	Listo
144	Carlos	Ahora que pase por este punto, de pronto. Borra esta [una recta que se había trazado mal]… listo.
145	María	Sí.
146	Carlos	Pero borraste el punto [el punto donde se superponen las rectas].
147	Carlos	Dale acá [señala el comando deshacer].
148	Carlos	¿no se pueden marcar con otro color?
149	P	Sí claro, ahí en la ruedita (herramienta *propiedades*) y dele más abajo.
150	Carlos	[presiona el botón propiedades y cambia el color del punto] y ya.
		
151	P	Seleccione construir otra vez.
152	Carlos	Entonces ahora sería medir la distancia. [construye un segmento del punto donde se superponen las figuras al centro del círculo] ahora en la reglita, sería 14.2, entonces no se puede… no, no… sí, ya.

153	Carlos	[construye un segmento que va del punto donde se superponen las figuras un triángulo verde].



154	María	Ahí no entiendo por qué lo pusiste ahí [Carlos había construido un segmento del vértice del triángulo verde al punto donde se superponen].
155	P	Puede ocultar la recta sin borrarla.
156	Carlos	¿ah sí?
157	P	Sí, haciendo clic en ella y oprimir el ojito.
158	María	Sí, en el ojito.
159	Carlos	Listo ya, entonces acá ya está ese punto.
160	P	María preguntaba por qué ese punto.

161	Carlos	Sí, porque ahí lo vamos moviendo para ir midiendo la distancia, pero nos quedamos sin espacio. 
162	P	Con clic derecho hacia la derecha no tanto, creo yo [sugiere para mover la página].
163	Carlos	Pues es llegar a siete con dos, pues ahí lo podemos arrastrar hasta la mitad de la distancia de acá al otro punto.
164	María	¡ah! Ok.
165	Carlos	Y ahí podemos poner el círculo… así. 
166	Carlos	Y es hacer el mismo proceso para los otros, de acá a acá [construye un segmento de un vértice de un triángulo rojo al punto donde se superponen todas las figuras]
167	María	Sigo [agarra el ratón]… entonces sería la mitad.

168	Carlos	¡ah! No, espere la hicimos con la herramienta que no era [necesita una recta y utilizó segmento]

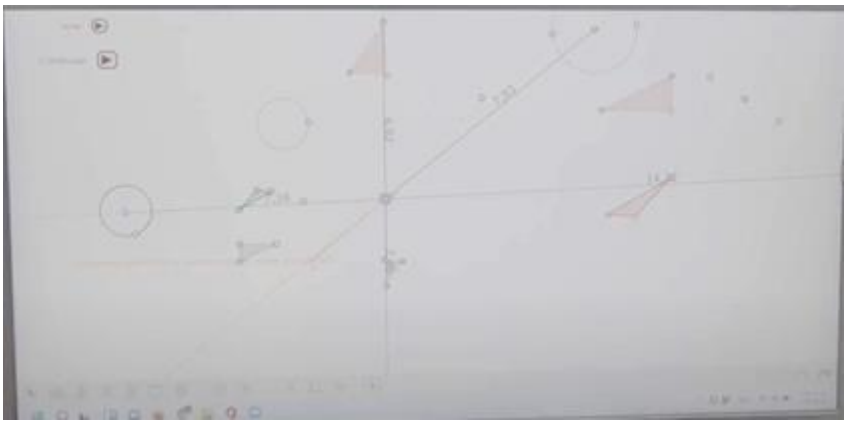
169	Carlos	Si quieres borra eso.
170	P	¿por qué eso no?
171	Carlos	Porque esa hace de acá a acá y la otra línea si sigue derecho. (necesitan prolongar el segmento hacia el otro lado del centro de homotecia).
172	María	¡ah! Ok.
173	Carlos	Y es necesario eso porque al ojo no se puede hacer.
174	María	Sería esta [señala la herramienta recta].
175	Carlos	Sí esa, la segunda.
176	P	Qué diferencia hay entre esas dos herramientas
177	María	Que la otra solo nos dice la medida de acá a acá.
178	Carlos	[traza una línea entre ambos puntos]
179	María	Esta sigue derecho.
180	Carlos	Y es necesario porque el otro punto lo necesitamos marcar por fuera de esa línea.

181	María	Va a estar en esta línea donde vamos que ubicar el círculo. El triángulo va a estar ubicado en alguna parte de esta línea, entonces vamos a medir la mitad de esto [refiriéndose la distancia del centro de homotecia al vértice del triángulo rojo].

182	María	Esto y vamos a sacar la mitad.
183	Carlos	Vas a hacer el otro punto, seleccionas y haces la primera y, en la línea espichas y seleccionas el segmento ahí sí la recta.
184	María	[construye un segmento del centro del círculo al punto donde se superponen las figuras y muestra la longitud segmento].

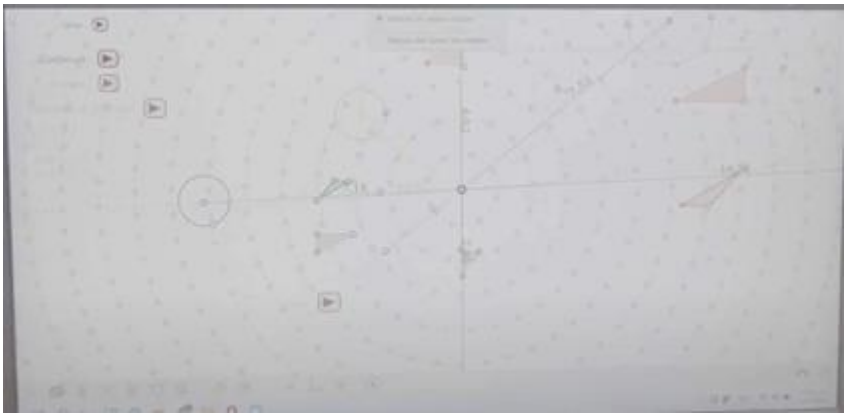
185	María	¡ah! Ok, listo siete cincuenta y tres.
186	Carlos	La otra debe…

187	María	La otra debe ser tres veintisiete.
188	Carlos	Ser tres veintiséis.
189	P	¿será? Porque con tres cinco da siete,
190	Carlos	Tres con setenta y seis, no, sí más o menos. Porque no muestra más de dos decimales.
191	P	¿qué quiere hacer maría?
192	María	Quiero trazar un punto.
193	Carlos	Oprima el punto en cualquiera de los dos y lo trazas en donde quede.
194	María	[construye un segmento sobre una de las rectas, desde del centro de homotecia hasta otro punto en el lado opuesto].



195	Carlos	Ahí… y ahora pon la regla.
196	María	Sí.
197	María	[muestra las coordenadas del punto y hace clic en deshacer]
198	P	Deshacer no sirve, vuelva a la regla. Y rehacer.
199	María	[hace clic en rehacer]

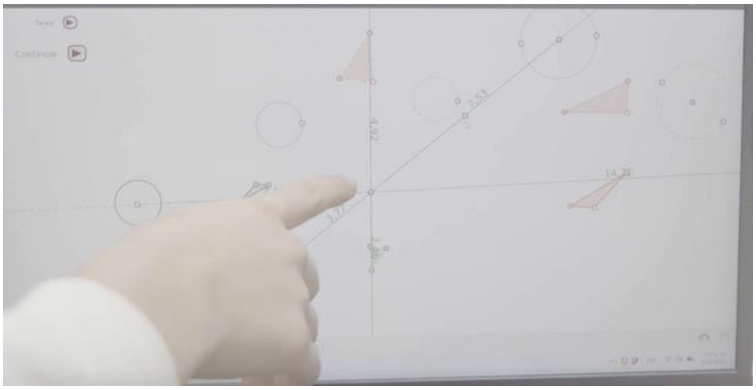
200	Carlos	¿por qué la borró?
201	P	No la borró, la oculto, hay un error de la interfaz, si quiere presione el ojito.
202	María	¡ah! Bueno, dale [entregándole el ratón a Carlos].
203	Carlos	¿no se puede poner a visualizar todo?
204	P	Sí, la recta… en el ojito.
205	Carlos	[hace clic en la herramienta *ocultar/mostrar*].



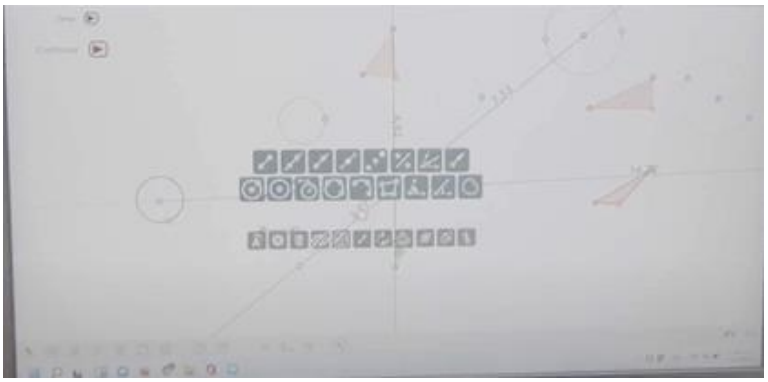
206	P	… y haga clic en la recta… eso, en la primerita.
207	Carlos	[hace visible la recta]
208	Carlos	Y el segmento también, entonces ahora segmento [muestra la longitud del segmento], ponemos los números y quede tres con sesenta y seis.

209	María	Ajá.
210	María	Yo creo que más.
211	P	¿seguro? ¿no debe ser más?
212	Carlos	No porque tres con setenta y uno sería siete con setenta y dos.
213	P	¡ah! Ok.
214	Carlos	Entonces seria tres con cincuenta y seis, más o menos.
215	P	¿qué dibujó maría en la pantalla?
216	María	La esta.
217	P	¿el círculo?
218	María	Sí.
219	P	Ahí pueden dibujar círculos, tengo una idea. ¿les parece? Se las voy a compartir… trace el punto medio [señala en la pantalla]. (se refiere al punto medio del centro del círculo rojo y el centro de homotecia).
220	P	Ahora si necesitamos un círculo ¿qué círculo necesitamos?
221	Carlos	La mitad.
222	P	¿en dónde quedará el centro?

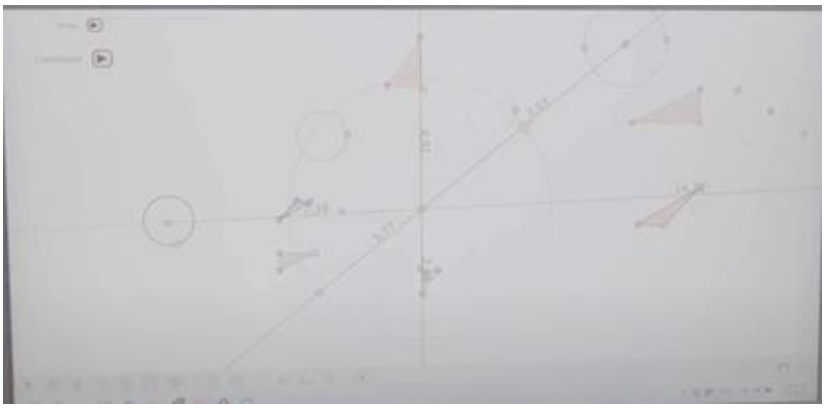
223	María	Aquí [señalando el punto donde todas las figuras se superponen].



224	María	[hace clic en el punto y despliega el menú de herramientas]



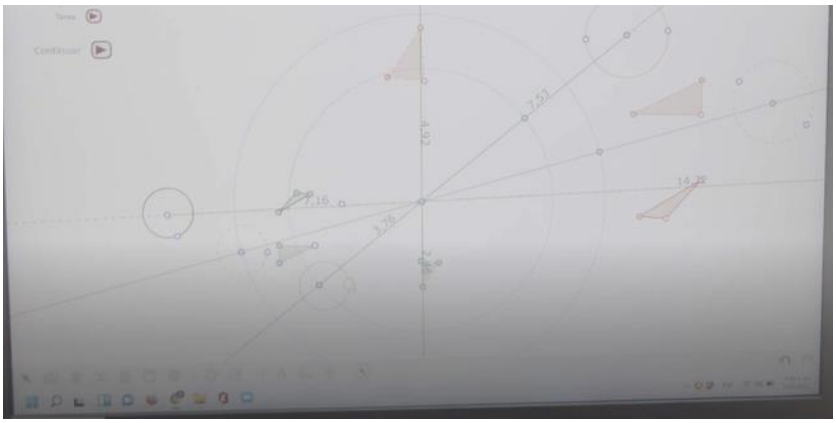
225	P	Ahí, exactamente. ¿cuál de esas le sirve? [hay tres opciones de círculo disponibles].

226	María	la primera. [construye un círculo con centro en el lugar donde se superponen  las figuras y un punto sobre la recta].
227	P	Ese… sí, ahí. Puede colocarlo en el lugar que quiera... No, en ese que se puede mover. Arrastre el punto un poco hacía la derecha, este [señalándolo en la pantalla]
228	Carlos	¡ah! Ok. Sí, ya te entendí [construye el segmento entre el centro de homotecia y la intersección del círculo y la recta y muestra su longitud]. Dio la mitad, pasemos al otro.
229	María	¿no es mejor primero moverlo? ¿qué hacemos?

230	Carlos	Acá no tocaría marcar distancia, pues después lo marcaríamos, pero creo que técnicamente lo podemos hacer así.
231		[construye el punto medio de la distancia entre el centro del círculo y el punto donde se superponen, construye un círculo con centro donde se superponen las figuras y ese punto].

232	María	¿pero ahí en dónde estaría?
233	P	¿hace falta algo?
234	Carlos	La línea.
235	María	No, porque la línea quedaría entre las figuras.
236	Carlos	No, porque acá quedaría el punto.
237	P	¿qué paso?
238	Carlos	No, yo pensé que era entre las figuras.
239	P	Y por qué no entre las figuras.
240	María	No porque vamos a mover las figuras, van a llegar allá.
241	Carlos	Quedaría por acá.
242	María	En el centro.

243	Carlos	No, más abajo. No, espera.
244	María	Acá [señala con la mano donde debe ir el círculo verde]

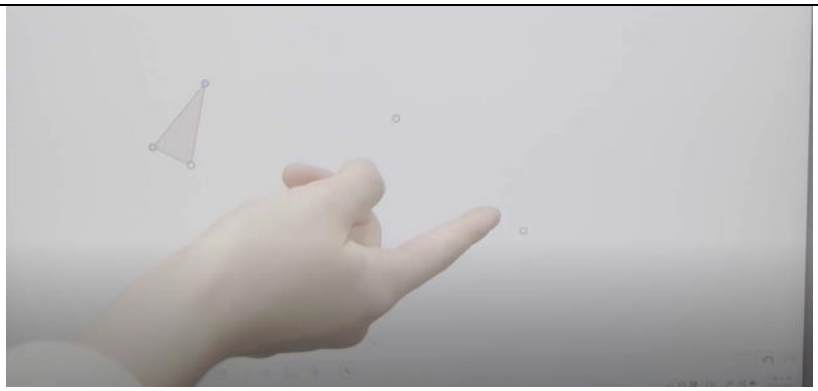
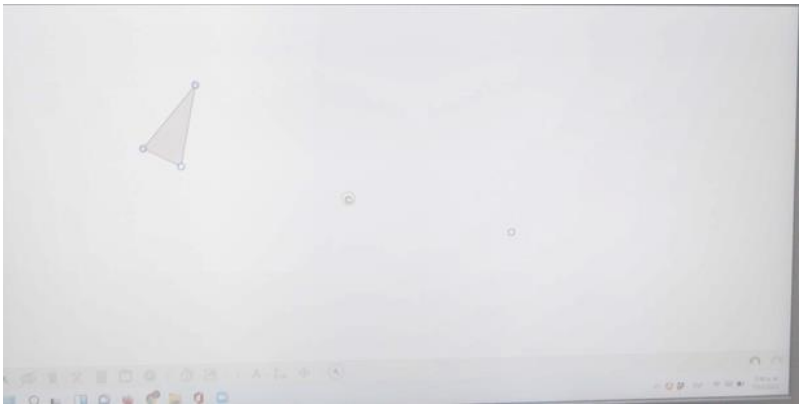


245	Carlos	Continuar [hace clic en el botón *continua*r y lee la consiga: “ahora lleva cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color y estilo” has clic en botón *verificar*].
246	María	Listo, verdes.
247	Carlos	No, rojos. Los verdes no se dejan mover.
248	María	¡ah! Sí.
249	Carlos	Listo terminamos.

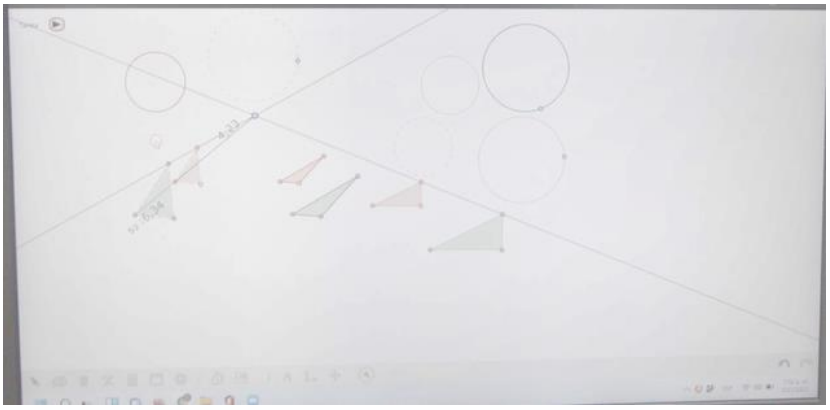
Hubo un momento corto en el que la grabación se pausó por accidente. Sin embargo, se retomó rápidamente.

250	Carlos	Esa relación variaba en los ejercicios porque se mueven en la misma dirección, pero en el anterior se movían en direcciones opuestas.

251	P	Vamos a suponer que se mueven en la misma dirección. Entonces, si este es el triángulo rojo y este es el vértice del triángulo verde que corresponde. ¿podría estar aquí?
252	María	Yo lo pondría por aquí [señalando con la mano el lugar de la pantalla]
253	P	¿por qué por aquí?
254	Carlos	Trazar un punto medio.
255	P	¿ese punto siempre era la mitad?
256	María	Pero este es [señalando con la mano el hipotético centro de homotecia]...

		
257	Carlos	En los ejercicios que se movían a la misma dirección siempre era la mitad, entonces trazo el punto medio y tiene que estar ahí [ubica el punto donde encuentra el punto medio].
		
258	P	¿pero siempre era la mitad?
259	María	Sí, pues siempre nos dio la mitad… ¿no era?
260	P	[abre un archivo donde la razón de homotecia es -0.5]. Allí por ejemplo… ¿es la mitad?
261	Carlos	Si, ahí sigue siendo la mitad del que se mueve, o sea, la mitad de la distancia del punto donde se superponen solo que ahora es en direcciones opuestas.
262	P	¿qué tal este? [abre otro archivo con razón de homotecia 1.5]. Ahí, por ejemplo.

263	Carlos	Tocaría trazar la línea.
264	Carlos	Sí, para que no se cruce con la recta.
265	María	Um…
266	Carlos	No, acá no es la mitad es como un sesenta y seis por ciento.
267	P	O sea, que esa relación podría cambiar.
268	Carlos	O sea, que acá es seis y el otro es nueve.
269	P	Yo les preguntaba ahorita que, si tenía este vértice… ¿en dónde debería estar este? ¿por qué no podría estar por acá? [ubica un punto en la pantalla como un hipotético punto correspondiente de un vértice del triángulo rojo, que no está alineado con el centro de homotecia y el vértice del triángulo].

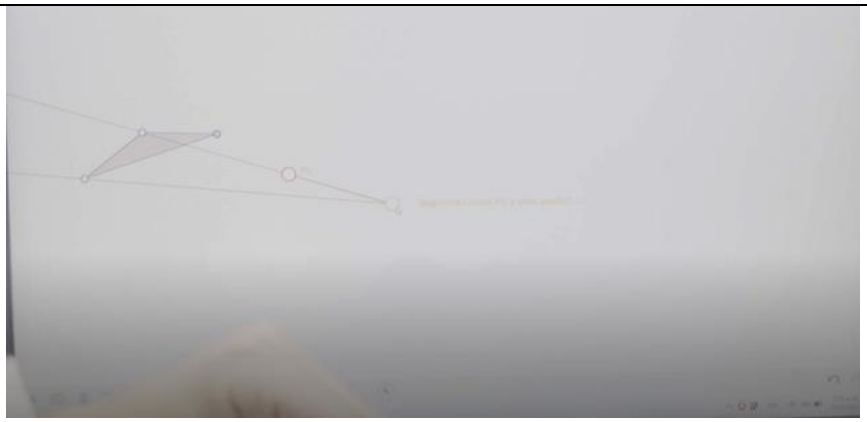


270	Carlos	Porque no cumple lo del movimiento, no cumple esa relación.
271	P	¿cuál relación?
272	María	La relación que los puntos siempre van alineados.
273	Carlos	Tiene que haber siempre… se puede trazar una línea entre ambos puntos y el punto donde se superponen todas las figuras.
274	María	Si estuviera aquí [señalando el punto construido por el profesor]

275	Carlos	La línea sería hacia arriba.
276	María	Entonces si va para arriba el punto donde se superponen sería diferente, no sería ese.
277	P	De acuerdo entonces vamos a ver, si yo tengo aquí… quiero hacer algo rápidamente, [realiza la construcción de un triángulo]. Lo pueden mover como quieran… y voy a poner aquí el punto donde se superponen, cada par de puntos correspondientes, le voy a colocar color rojo, digamos que voy a buscar el compañero de esté [señala un vértice del triángulo]… ¿podría estar acá? [ubica un punto que no está alineado con el vértice y el hipotético centro de homotecia].
278		
279	Carlos	No.
280	P	¿en dónde iría?
281	Carlos	En una línea recta.
282	P	Entonces, voy a trazar una semirrecta para quede siempre en este lado [construye una semirrecta con origen en el punto donde se superponen las figuras y un vértice del triángulo rojo. Luego, arrastra el hipotético punto imagen del vértice del triángulo hasta la semirrecta]. Si el compañero está

		aquí, entonces en dónde estarán los compañeros de este y este [señala los otros dos vértices del triángulo].

283	María	Pues podemos medir. Pero no, porque la figura es más pequeña.
284	Carlos	La relación…
285	P	¿qué relación van a buscar?
286	Carlos	La relación de este punto acá en comparación de este punto acá (hace referencia a la distancia que hay entre el par de puntos correspondientes al centro de homotecia).
287	María	¿y si pasa primero una línea acá?
288	Carlos	No, primero tenemos que hallar la relación. Porque ahí no es la mitad. Toca hacer un segmento [traza un segmento entre el punto donde se superponen las figuras y el punto homotético dado].

		
289	P	¿el segmento va a hasta ese punto?
290	Carlos	No, el primero de acá a acá y el segundo de acá a acá [construye el otro segmento homotético del inicial]. Pero acá no va a cumplir con la relación, ahí no sé. Nada que ver… hay que hacer una proporción.
291	P	Ahí la relación es cualquiera
292	Carlos	Sí, no cumple la de la mitad, la de sesenta y seis por ciento, profesor ahí no sé cómo se utiliza esa proporción.
293	P	¿es una proporción?
294	Carlos	O sea, es la relación entre ambos, no sé cómo se puede utilizar para colocar los demás puntos.
295	P	Entiendo, se nos agotó el tiempo. Vamos a dejar hasta aquí. Muchas gracias.