

DISEÑO Y MODELAMIENTO COMPUTACIONAL DE UNA TOBERA
AEROSPACIAL TIPO PLUG EN CONDICIONES DE PRESIÓN ATMOSFÉRICA
DECRECIENTE

HENRY LIZCANO RUIZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA
2023

DISEÑO Y MODELAMIENTO COMPUTACIONAL DE UNA TOBERA
AEROSPACIAL TIPO PLUG EN CONDICIONES DE PRESIÓN ATMOSFÉRICA
DECRECIENTE

HENRY LIZCANO RUIZ

Director:
MANUEL DEL JESUS MARTÍNEZ
Ph.D. Ingeniero Mecánico

Codirector:
JULIÁN GUSTAVO RODRÍGUEZ FERREIRA
Ph.D. Ingeniero Electrónico

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA
2023

Índice general

Índice general	3
Índice de cuadros	6
Índice de figuras	7
Introducción	10
1 Marco teórico	13
1.1 Características de las toberas plug.....	13
1.1.1 Ventajas de las toberas plug	14
1.1.2 Desventajas.....	15
1.2 Metodologías para diseño de toberas plug	16
1.2.1 Abanico de expansión.....	16
1.2.2 Variables en el diseño de toberas plug	17
1.3 Flujo compresible	19
1.3.1 Flujo isentrópico de un gas ideal	19
1.3.1.1 Efectos de la variación en el área de la sección transversal de flujo.....	20
1.3.1.2 Flujo en conductos convergentes-divergentes.....	22
1.3.2 Ondas de choque.....	24
1.3.2.1 Ondas de choque normales.....	24
1.3.2.2 Ondas de choque oblicuas	25
1.4 Método de volúmenes finitos	27
1.4.1 Ecuaciones de conservación	28
1.4.1.1 Conservación de masa.....	28
1.4.1.2 Conservación de momento lineal	29
1.4.1.3 Conservación de la energía	30
1.4.2 Discretización	32
1.4.2.1 Discretización del dominio.....	32
1.4.2.2 Discretización de las ecuaciones	32
1.4.2.3 Esquema de diferencia central.....	34
1.4.2.4 Esquema de diferencia contra el viento (<i>upwind</i>)	35
1.5 Modelos de turbulencia	36
1.5.1 Modelos de turbulencia para las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS)	36

1.5.1.1	Descomposición de Reynolds	37
1.5.1.2	Ecuaciones para flujos compresibles.....	37
1.5.2	Simulación de grandes remolinos (LES)	38
1.5.3	Simulación numérica directa (DNS)	38
1.5.4	Modelo <i>SST k-ω</i>	39
1.6	Tipos de Mallas computacionales	40
1.6.1	Mallas estructuradas	40
1.6.1.1	Tipos de mallas estructuradas	41
1.6.1.2	Técnicas de generación de malla.....	41
1.6.2	Mallas no estructuradas	42
1.6.2.1	Generación de mallas estructuradas	42
1.6.2.1.1	Técnica de frente de avance.....	42
1.6.2.1.2	Método de triangulación de Delaunay	43
2	Metodología	45
2.1	Datos numéricos y parámetros geométricos.....	46
2.2	Diseño del contorno de la tobera Plug.....	46
2.3	Simulación CFD	47
2.3.1	Pre-proceso	47
2.3.1.1	Mallado.....	48
2.3.2	Solución.....	49
2.3.2.1	Propiedades del fluido.....	49
2.3.2.2	Solver	49
2.3.2.3	Modelo de turbulencia.....	50
2.3.2.4	Condiciones de frontera	50
2.3.2.5	Discretización.....	50
2.3.2.6	Convergencia.....	51
2.3.3	Post-proceso	51
2.4	Validación.....	52
2.4.1	Datos.....	52
3	Resultados	53
3.1	Error computacional	53
3.2	Características de la malla	55

3.3	Simulación CFD	55
4	Análisis de resultados.....	62
4.1	Influencia de la NPR.....	62
4.2	Efecto de las ondas de choque en la presión de pared.....	63
5	Validación	64
5.1	Cálculo del empuje	64
5.2	Resultados tobera plug completa.....	64
5.3	Resultados tobera plug truncada.....	65
5.4	Flujo másico	67
	Conclusiones.....	68

Índice de cuadros

1	Coeficientes aW , aE y aP	35
2	Coeficientes aW , aE esquema upwind.	36
3	Parámetros geométricos de la tobera plug.	46
4	Error máximo proceso iterativo, tobera plug completa, NPR=11,84.	53
5	Error máximo proceso iterativo, tobera plug truncada al 40%, NPR=11,84.	53
6	Reporte de calidad de la malla usada.	55
7	% error relativo de Is para varias altitudes de la tobera plug completa.	65
8	% error relativo de Is para varias altitudes de la tobera plug truncada al 40%.	66

Índice de figuras

1	Comparación de la tobera ideal con toberas tipo campana y plug o aerospike [6].	11
2	Perfil de una tobera plug o aerospike [11].	14
3	Flujo de estela abierta en tobera plug truncada [12].	15
4	Flujo de estela cerrada en tobera plug truncada [12].	16
5	Abanico de expansión en el borde de la carcasa [15].	17
6	Contorno de tobera plug [14].	18
7	(a) Conducto divergente. (b) Conducto convergente. [16].	21
8	Flujo isentrópico de un gas ideal con $k=1.4$. [16].	23
9	(a) Onda de choque normal. (b) Onda de choque normal sobre una línea de corriente a-b.	24
10	Flujo a través de una onda de choque oblicua. [17].	26
11	Soluciones para ondas de choque oblicuas. [18].	27
12	Volumen de control alrededor del nodo P. [21].	33
13	Tipos de mallas estructuradas. [27].	41
14	Generación de triángulos usando un punto nuevo. (a) Punto frontal existente. (b) Método de frente de avance. La línea punteada es el frente actual. [30].	43
15	Ilustración del algoritmo de Bowyer/Watson en la triangulación de Delaunay. [30].	44
16	Esquema de la metodología del presente trabajo.	45
17	Contorno de la tobera plug completa.	47
18	Simulación CFD.	48
19	Malla estructurada cerca de la pared de la tobera.	49
20	Task Page de Fluent para configurar la discretización.	51
21	Error computacional tobera plug completa con varios NPR.	54
22	Error computacional tobera plug truncada al 40% con varios NPR.	54
23	Estructura de flujo en la tobera plug con $P_a = 101.325 [kPa]$, NPR=11.84. (a) longitud total; (b) truncada al 40%, Contorno de número de Mach.	56
24	Estructura de flujo en la tobera plug con $P_a = 71.325 [kPa]$, NPR=16.82. (a) longitud total; (b) truncada al 40%, Contorno de número de Mach.	57
25	Estructura de flujo en la tobera plug con $P_a = 31.325 [kPa]$, NPR=38.31. (a) longitud total; (b) truncada al 40%, Contorno de número de Mach.	58
26	Estructura de flujo en la tobera plug con $P_a = 13250 [kPa]$, NPR=90,6. (a) longitud total; (b) truncada al 40%, Contorno de número de Mach.	59
27	Presión estática sobre la pared de la tobera p_w , con con $P_a = 101.325 [kPa]$, NPR=11.84. (a) longitud total; (b) truncada al 40%.	60
28	Presión estática sobre la pared de la tobera p_w , con con $P_a = 51,325 [kPa]$, NPR=23,38. (a) longitud total; (b) truncada al 40%.	61
29	Desempeño de la tobera plug completa.	65
30	Desempeño de la tobera plug truncada al 40%.	66
31	Flujo másico a través de la tobera plug.	67

RESUMEN

TÍTULO: DISEÑO Y MODELAMIENTO COMPUTACIONAL DE UNA TOBERA AEROSPAZIAL TIPO PLUG EN CONDICIONES DE PRESIÓN ATMOSFÉRICA DECRECIENTE¹

AUTOR: Henry Lizcano Ruiz²

PALABRAS CLAVE: Mecánica de fluidos, CFD, flujo compresible, tobera plug.

DESCRIPCIÓN:

Las toberas son dispositivos que permiten aprovechar la energía mecánica de los gases en expansión, una clase de tobera es la Plug o aerospike, cuyo rendimiento para alta presión atmosférica es mejor en comparación con los otros tipos de tobera en términos de empuje. Si la tobera Plug pudiera mantener su empuje mientras asciende a través de la atmósfera, es decir, mientras la presión atmosférica está disminuyendo, sería una alternativa diferente a la tobera de campana tradicional. Para tal fin se diseña y modela computacionalmente una tobera plug que opere en condiciones de presión atmosférica decreciente. Usando el modelo de turbulencia *Menter SST k- ω* se simula numéricamente el flujo en una tobera plug, con parámetros geométricos preestablecidos y se analiza el efecto del truncamiento sobre la misma. De esta forma se evaluará el desempeño de la tobera plug, a partir del empuje entregado por la tobera con diferentes grados de truncamiento, así como en condiciones de presión atmosférica decreciente. A partir del diseño de la geometría de la tobera plug y usando el software de CFD ANSYS FLUENT para modelar el flujo supersónico con las respectivas condiciones de frontera como presión y temperatura en la cámara de combustión, se evalúa el empuje desarrollado por la tobera plug.

¹ Trabajo de grado Maestría

² Facultad de Ingenierías Físico Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Manuel Del Jesús Martínez Ph.D. Codirector: Julián Gustavo Rodríguez Ferreira. Ph.D.

ABSTRACT

TITLE: COMPUTATIONAL DESIGN AND MODELING OF A PLUG NOZZLE UNDER CONDITIONS OF DECREASING ATMOSPHERIC PRESSURE³

AUTHOR: Henry Lizcano Ruiz⁴

KEY WORDS: Fluid mechanics, CFD, compressible flow, plug nozzle.

DESCRIPTION:

The nozzles are devices that allow the mechanical energy of expanding gases to be harnessed, one type of nozzle is the Plug or aerospike, whose performance for high atmospheric pressure is better compared to the other types of nozzle in terms of thrust. If the Plug nozzle could maintain its thrust while rising through the atmosphere, i.e. while the atmospheric pressure is decreasing, it would be a different alternative to the traditional bell nozzle. For this purpose, a plug nozzle that operates in conditions of decreasing atmospheric pressure is computationally designed and modeled. Using the *Menter SST k- ω* turbulence model, the flow in a plug nozzle is numerically simulated, with pre-established geometric parameters, and the effect of truncation on it is analyzed. In this way, the performance of the plug nozzle will be evaluated, based on the thrust delivered by the nozzle with different degrees of truncation, as well as in conditions of decreasing atmospheric pressure. Starting from the design of the geometry of the plug nozzle and using the ANSYS FLUENT CFD software to model the supersonic flow with the respective boundary conditions such as pressure and temperature in the combustion chamber, the thrust developed by the plug nozzle is evaluated.

³ M.Sc. Thesis

⁴ Faculty of Physical-Mechanical Engineering. School of Mechanical Engineering. Director: Manuel Del Jesús Martínez Ph.D. Co-director: Julián Gustavo Rodríguez Ferreira Ph.D.

Introducción

La tobera plug pertenece a la clase de toberas que por su geometría son compensadas por altura, esto es que los gases en expansión se adaptan al área de la sección transversal de la tobera. Debido a esto, gran parte de la energía mecánica de los gases en expansión es aprovechada por el cohete. La configuración geométrica de la tobera plug permite a baja presión atmosférica y en una pequeña porción del área transversal de la tobera el direccionamiento del chorro de gases por la pared de la tobera. A medida que el cohete asciende a través de la atmósfera, implicando dicho ascenso una disminución de la presión atmosférica, los gases del chorro se expanden, aumentando la proyección del chorro de gases sobre la sección transversal de la tobera [1].

La tobera plug dirige el flujo de gases a la pared de la misma, la pared ordena el flujo y disminuye la turbulencia, esta característica y su adaptación a la altura la posicionan como un dispositivo altamente eficiente en la propulsión aeroespacial [2]. En condiciones de presión atmosférica a nivel del mar, ocurre el fenómeno de sobre expansión, que es la contracción del chorro de gases en expansión. La sobre expansión ocurre cuando la presión atmosférica es mayor que la presión de salida en la tobera. Mientras el cohete asciende a través de la atmósfera, la presión atmosférica disminuye, lo que genera la sub expansión [3]. Cuando la presión atmosférica es menor que la presión de salida en la tobera, se presenta un flujo sub expandido, este fenómeno genera que el chorro de gases se expanda más allá de los límites del área transversal de la tobera, generando pérdidas de empuje.

Esta clase de tobera se desarrolló en la década de 1960 y 1970, recientemente su importancia ha aumentado debido a que los vehículos aeroespaciales modernos necesitan mejorar su capacidad de carga útil [4]. La tobera plug se puede describir como una tobera tipo campana invertida, ya que el flujo de gases no es dirigido a través del interior de la campana, si no por su parte externa. En la tobera plug, la pared exterior no existe, el límite exterior al flujo de gases es el aire a su respectiva presión atmosférica, por ello cuando los gases del chorro se expanden la tobera plug permite una adaptación continua a la presión atmosférica correspondiente. Si se desea un alto rendimiento de la tobera plug, se debe elegir una relación de área y de presión de diseño lo más alta posible. La Figura 1, muestra la comparación entre la tobera plug o también llamada aerospike y la tobera tipo campana, los mejores resultados para el coeficiente de empuje se alcanzan para la tobera ideal, que se representa con la línea continua gruesa, es el máximo empuje posible alcanzado por una tobera. Es evidente que la tobera plug tiene el mejor rendimiento, en cualquier altura en comparación con el tipo campana, de acuerdo a la Figura 1. Se han estudiado diferentes niveles de truncamiento para la tobera plug, en la mayoría de estudios se recomienda un truncamiento del 40%, debido a que no disminuye significativamente el número de Mach máximo alcanzado en la tobera. Otra alternativa sería aumentar la relación de área para alcanzar valores de empuje mayores,

pero, el flujo másico y el número de Mach máximo en la tobera cambiarían significativamente [5].

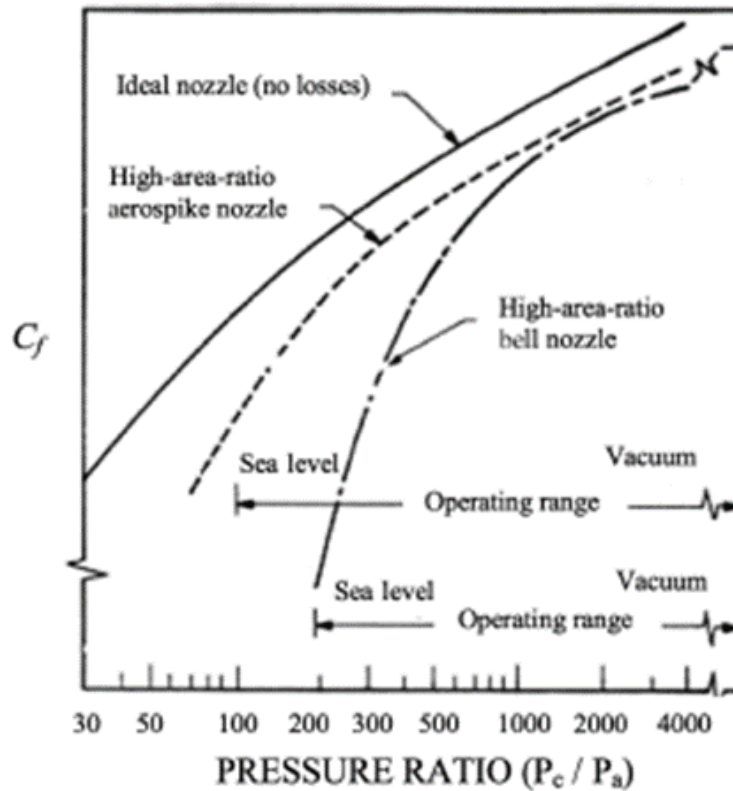


Figura 1: Comparación de la tobera ideal con toberas tipo campana y plug o aerospike [6].

El truncamiento de la tobera genera una reducción en su tamaño y, por ende, en el peso de la misma, circunstancia que se puede aprovechar para aumentar la carga útil del cohete, lo cual mejora el rendimiento del sistema. Incluso el truncamiento en la tobera podría ser mayor, casi como si tuviera solo un cuarto de la longitud total, en este caso la pérdida de empuje se deriva de una sensible disminución de presión sobre la base de la tobera [7].

Las ondas de choque producen importantes efectos sobre el flujo, tales como la recirculación generada por la re compresión del flujo, la desaceleración y el calentamiento del flujo, efectos que son producidos por las ondas de choque. La aparición de las ondas de choque lleva a la desaceleración de un flujo supersónico a uno subsónico, lo cual genera pérdidas de energía. Se ha estudiado este efecto y se ha demostrado que la NPR (relación de presión de la tobera), que es la relación entre la presión de estancamiento del flujo (P_{0j}) y la presión atmosférica (P_a), afecta directamente el comportamiento de la capa límite del flujo y el impacto de la sobre expansión en la superficie del borde de la carcasa de tobera, lugar donde se generan los abanicos de onda [8]. Las ondas de choque aumentan la presión en la pared de tobera,

pudiéndose identificar varios importantes puntos de análisis, en los cuales se genera recirculación del flujo y la aparición de perfiles de presión irregulares aguas abajo [9].

1 Marco teórico

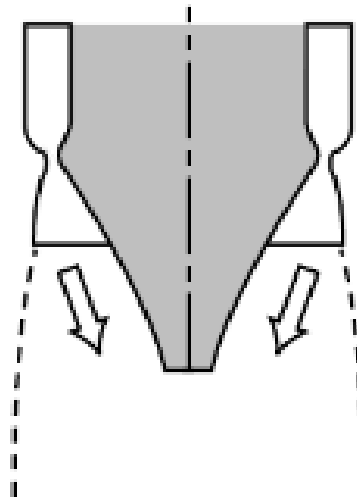
El marco teórico del presente trabajo tiene los siguientes tópicos:

- Características de las toberas plug: a diferencia de las toberas convencionales en forma de campana, que funcionan de manera óptima a una altitud específica, las toberas plug permiten que la expansión del flujo se ajuste automáticamente, mejorando así los coeficientes de empuje.
- Metodologías para diseño de toberas plug: diferentes tipos de enfoques con sus respectivas ecuaciones para el dimensionamiento de toberas plug, que de acuerdo a parámetros iniciales de diseño producen las curvas del contorno de una tobera plug que optimice el empuje entregado por la misma.
- Flujo compresible: flujo en el que la densidad del fluido varía significativamente en respuesta a un cambio en la presión, Los efectos de la compresibilidad generalmente se consideran significativos si el número de Mach del flujo excede 0.3 antes de que ocurra una compresibilidad significativa.
- Método de volúmenes finitos: El método de volumen finito (FVM) es una técnica de discretización de ecuaciones diferenciales parciales, especialmente aquellas que surgen de leyes físicas de conservación. FVM utiliza una formulación integral de volumen del problema con un conjunto de volúmenes de partición finita para discretizar las ecuaciones.
- Modelos de turbulencia: Los modelos de turbulencia en dinámica de fluidos computacional CFD son métodos para incluir el efecto de la turbulencia en la simulación de flujos. La mayoría de las simulaciones requieren un modelo de turbulencia ya que los flujos turbulentos predominan en la naturaleza y en los flujos industriales es decir en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería.
- Tipos de mallas computaciones: existen dos tipos principales de mallas computaciones, las estructuradas y las no estructuradas, el primer tipo se construyen en el dominio de solución de ecuaciones diferenciales parciales, mientras el segundo tipo el dominio es dividido de acuerdo a algoritmos de optimización en figuras geométricas.

1.1 Características de las toberas plug

La tobera plug es la configuración fundamental para obtener empuje de un flujo en chorro supersónico en expansión libre o no confinada [10]. Esta tobera no presenta pared externa si no interna, es decir el flujo de gases estará entre la pared o superficie interna y el aire atmosférico que actúa como pared externa (ver Figura 2). La aplicación de esta tobera a la propulsión de cohetes se concibió a mediados de la década de 1940, la principal característica de esta tobera es su interacción con el ambiente externo que puede evitar la separación del

flujo, fenómeno que afecta a una tobera tipo campana convencional. Dicho beneficio surge de la generación de un abanico de expansión en el borde de la carcasa principal y su influencia en el comportamiento de la presión a lo largo de la pared [6].



Aerospike nozzle

Figura 2: Perfil de una tobera plug o aerospike [11].

La característica clave de la tobera plug es que, a medida que el vehículo de lanzamiento asciende durante su trayectoria, la disminución de la presión ambiental permite que aumente la relación efectiva del área de la tobera del motor de cohete.

1.1.1 Ventajas de las toberas plug

La tobera plug tiene un rendimiento general un 90 % mejor que la tobera convencional en forma de campana. La eficiencia a bajas altitudes es mucho mayor porque la presión atmosférica restringe la expansión de los gases de escape. Un vehículo que utiliza una tobera plug también ahorra entre un 25 y un 30 % más de combustible en altitudes bajas [22]. En altitudes elevadas, la tobera aerodinámica puede expandir el escape del motor a una relación de área de tobera efectiva mayor que su contraparte tipo campana.

El diseño plug es adecuado para el vuelo de una sola etapa en órbita. (SSTO), en el cual el vehículo aeroespacial puede alcanzar su órbita sin necesidad de desprender etapas o tanques de combustible [22]. Otras ventajas son que la tobera plug hace un mejor uso del área de la base y tiene una mayor eficiencia de empuje y, por lo tanto, un impulso específico promedio más alto.

1.1.2 Desventajas

El cuerpo de la tobera induce calor, y enfriarlo significa que el rendimiento se reduce junto con la presión que el flujo ejerce contra la tobera. Otro problema es el peso, que como se mencionó anteriormente se puede resolver mediante el truncamiento. El truncamiento de la tobera trae consigo un comportamiento de flujo y rendimiento diferente en comparación con la boquilla de tapón de longitud completa. A relaciones de presión más bajas se establece un flujo de estela abierta, con un nivel de presión prácticamente igual a la presión ambiental (ver figura 3).

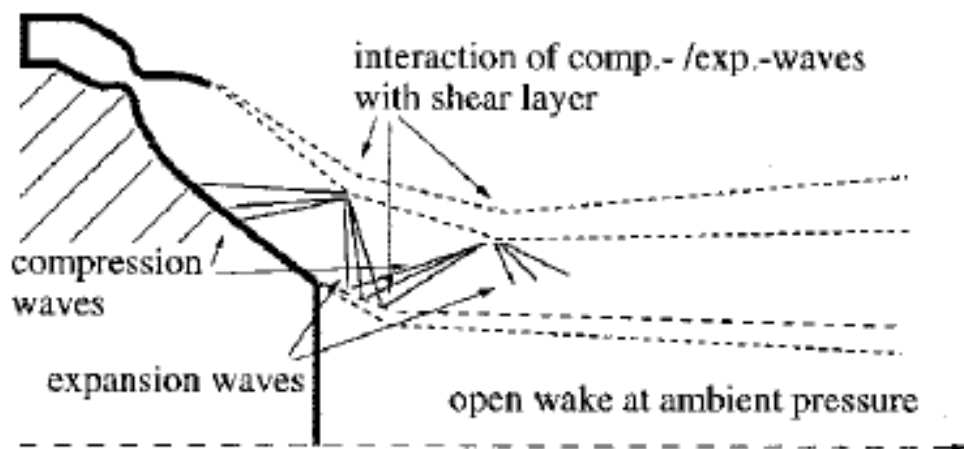


Figura 3: Flujo de estela abierta en tobera plug truncada [12].

A una determinada relación de presión cercana a la relación de presión de diseño de la tobera plug de longitud completa, el flujo base cambia repentinamente de comportamiento y se vuelve en forma de estela cerrada, caracterizada por una presión base constante que ya no está influenciada por la presión ambiental (ver figura 4). Los análisis indican que toberas plug más cortas, es decir con truncamientos altos desencadenan un cambio más temprano en el flujo de estela en relaciones de presión por debajo de la relación de presión de diseño. En el punto de transición, la presión dentro de la estela se acerca a un valor que está por debajo de la presión ambiental, y el área de base total induce un empuje negativo [12]. Esta pérdida de empuje depende del porcentaje de truncamiento y del tamaño total del área base. Los datos experimentales publicados y las simulaciones numéricas revelan una pérdida de empuje cada vez mayor para cuerpos de toberas más cortas, debido a que aumenta el área de base total.

Más allá del punto de transición, la presión dentro de la estela cerrada permanece constante. A estas presiones ambientales más bajas, la presión base es más alta que la presión ambiental, lo que da como resultado una contribución de empuje positiva del área base total.

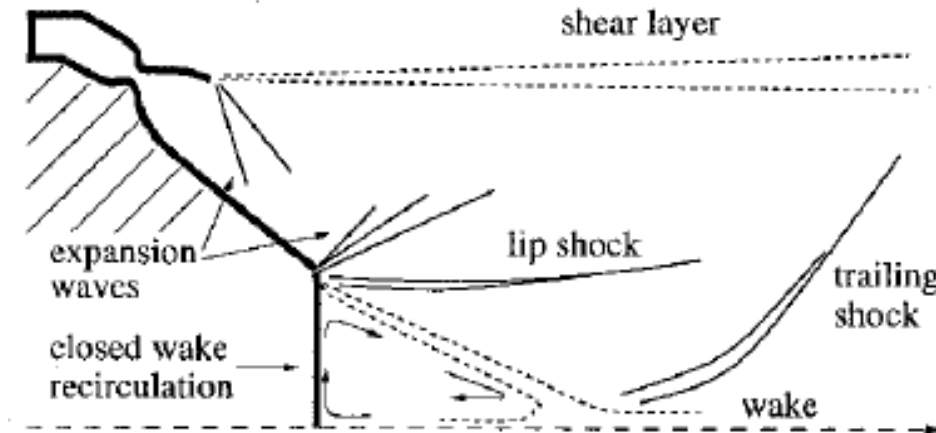


Figura 4: Flujo de estela cerrada en tobera plug truncada [12].

Finalmente, el desempeño es más difícil de evaluar debido al campo de flujo complejo y la turbulencia involucrada. La capacidad de compensación de altitud de las toberas plug circulares y lineales para presiones ambientales altas es indiscutible. Debido a que las toberas plug pierden esta capacidad para relaciones de presión por encima de la relación de presión de diseño, esta última debe elegirse lo más alta posible [22].

1.2 Metodologías para diseño de toberas plug

En la década de 1960, Rao desarrolló un método para diseñar el contorno de toberas plug, dicho método proporciona el empuje máximo considerando constantes determinados parámetros tales como la longitud de la tobera y la presión ambiental [13]. En esta metodología el gas se considera no viscoso y el proceso de expansión como flujo isoentrópico, utilizando el método de características se desarrolla el contorno de la tobera plug, y se utilizan multiplicadores de Lagrange para resolver las integrales de los diferentes parámetros de flujo. Angelino desarrolló otro método que es una aproximación simple, se asume que las ondas de expansión están ocurriendo en el borde de la cubierta de la tobera. Para este método se debe definir la relación de área ϵ , área de la garganta At , y la relación de calores específicos del gas γ , para poder calcular el contorno de la tobera [14]. Para desarrollar el presente trabajo se eligió el método de Angelino.

1.2.1 Abanico de expansión

Cuando los gases que provienen de la cámara de combustión pasan a través de la garganta de la tobera, en el borde de la carcasa de la tobera se genera un abanico de expansión debido a

la propagación de las ondas supersónicas (ver figura 5), cada línea de ese abanico representa una velocidad de flujo supersónico diferente, por tanto todas las partículas del flujo que estén sobre dicha línea tendrán la misma velocidad supersónica y por ende el mismo número de Mach [15].

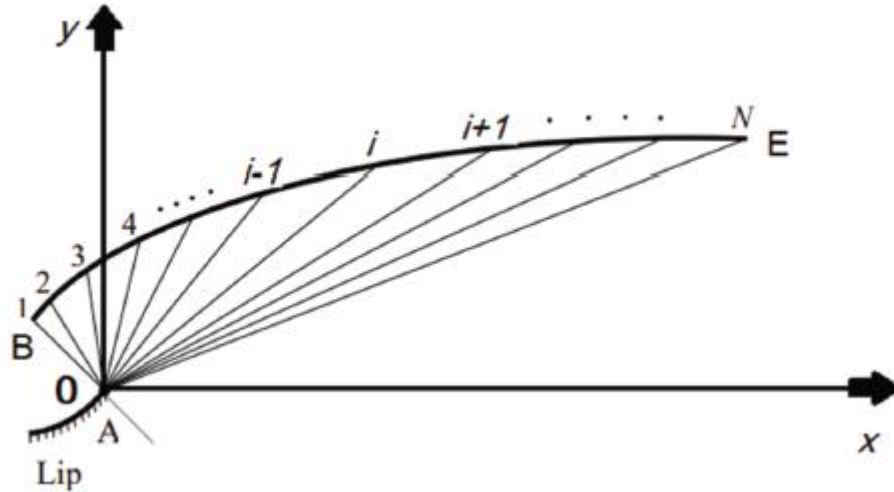


Figura 5: Abanico de expansión en el borde de la carcasa [15].

Como se aprecia en la figura 5, cada línea de expansión supersónica se intercepta con la curva de diseño de la tobera plug, asignándole a cada punto un número de Mach, lo que genera la discretización necesaria para diseñar la curva de la tobera.

1.2.2 Variables en el diseño de toberas plug

El ángulo de Mach, μ , el cual es formado por las ondas de propagación sónicas con la velocidad de propagación supersónica de las partículas en movimiento, así mismo la función de Prandtl-Meyer, v , cuya interpretación física sería el ángulo necesario a expandir un flujo con $Ma=1$ para obtener un determinado número de Mach se pueden apreciar en la Figura 6, así como también se observan las coordenadas radiales y axiales de diseño para el contorno de la tobera plug.

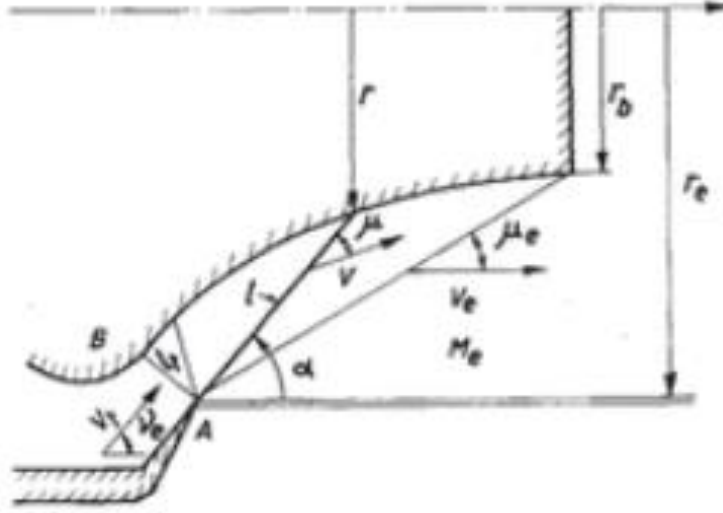


Figura 6: Contorno de tobera plug [14].

Se considera que el flujo es paralelo a la salida de la tobera, el ángulo del impulsor viene dado por la Ecuación 1.

$$\theta_t = v(Mae) \quad (1)$$

Donde Mae , es el número de Mach a la salida de la tobera, y v es la función de Prandtl-Meyer, la cual es definida por la Ecuación 2.

$$v(Ma) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (Ma^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{Ma^2 - 1} \quad (2)$$

Donde γ , representa el coeficiente isentrópico del gas, como se puede ver la función de Prandtl-Meyer es función principalmente del número de Mach, el cual a su vez es función de la posición axial (eje de la tobera). El área de la garganta viene dada por la Ecuación 3.

$$A_t = \frac{\pi(r_e^2 - r_t^2)}{\cos\theta_t} \quad (3)$$

Donde r_e , es el radio de salida y r_t , es el radio de la garganta. El área de salida de la tobera es definida por la Ecuación 4.

$$A_e = \pi(r_e^2 - r_b^2) \quad (4)$$

En la Ecuación 4, r_b , representa el radio en la base de la tobera. La relación de áreas (área de salida/área de garganta) es dada por la Ecuación 5.

$$\varepsilon = \frac{A_e}{A_t} \quad (5)$$

La coordenada radial de la tobera plug definida por la Ecuación 6.

$$r^2 = r_e^2 - (r_e^2 - r_t^2) \frac{A \sin(\mu + \theta)}{A_t \sin\mu \cos\theta_t} \quad (6)$$

En la Ecuación 6, A/A_t , representa la relación de áreas entre la sección transversal de un punto en el eje de la tobera y la garganta, dicha relación es dada por la Ecuación 7. μ , el ángulo de Mach, dado por la Ecuación 8 y θ , es definido con la Ecuación 9.

$$\frac{A}{A_t} = \frac{1}{Ma} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (7)$$

$$\mu = \sin^{-1} \left(\frac{1}{Ma} \right) \quad (8)$$

$$\theta = \theta_t - \nu \quad (9)$$

Como se puede apreciar todas variables para el diseño de toberas plug son función del número de Mach, por ello para diseñar el contorno de la tobera plug se debe definir o plantear la distribución del número de Mach a lo largo de la tobera. Se escogió la Metodología desarrollada por Angelino porque considera el abanico de expansión de las ondas sónicas que según la bibliografía consultada es el parámetro común en el contorno del número de Mach.

1.3 Flujo compresible

A medida que la velocidad de un flujo aumenta su densidad varía, por ello para valores de números de Mach superiores a 0.3 se considera tratar al flujo como compresible [16]. La variación de la densidad del fluido para flujos compresibles requiere atención a la densidad y otras relaciones de propiedades del fluido. La ecuación de estado del fluido, a menudo sin importancia para los flujos incompresibles, es vital en el análisis de los flujos compresibles. Además, las variaciones de temperatura para flujos compresibles suelen ser significativas y, por lo tanto, la ecuación de energía es importante.

1.3.1 Flujo isentrópico de un gas ideal

Para empezar a comprender los fenómenos de ocurren en las toberas convergentes divergentes que para este caso de estudio son las toberas plug, se debe comprender el flujo isentrópico de un gas ideal. Como su nombre lo indica ocurre cuando la entropía entre los diferentes estados del flujo no cambia, además se debe precisar que para simplificar el análisis se contempla que el flujo será en estado estable, unidimensional y con viscosidad constante. El flujo unidimensional se refiere al flujo que involucra distribuciones uniformes de las propiedades del fluido sobre cualquier área de sección transversal del flujo.

A partir de las relaciones termodinámicas de los gases ideales se puede expresar el cambio de entropía entre dos estados mediante la Ecuación 10 y la Ecuación 11.

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (10)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (11)$$

Como se dijo anteriormente en flujo isentrópico la variación de entropía es cero, por ello las dos ecuaciones anteriores se igualan a cero y al combinarlas se obtiene la relación entre temperatura, densidad y presión para flujo isentrópico en la Ecuación 12.

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k = \frac{p_2}{p_1} \quad (12)$$

Donde k , es la relación de calores específicos $\left(\frac{c_p}{c_v}\right)$, de la anterior ecuación se puede obtener la Ecuación 13.

$$\frac{p}{\rho^k} = cte \quad (13)$$

La Ecuación 13 es característica de los procesos isentrópicos en gases ideales. No se puede lograr un flujo isentrópico con fluidos reales debido a la fricción. Sin embargo, el estudio de las características del flujo isentrópico es útil porque ayuda a comprender los fenómenos reales del flujo compresible [16].

1.3.1.1 Efectos de la variación en el área de la sección transversal de flujo

Para el flujo incompresible, la densidad del fluido permanece constante y la velocidad del flujo de una sección a otra varía inversamente con el área de la sección transversal. Sin embargo, cuando el flujo es compresible, la densidad, el área de la sección transversal y la velocidad del flujo pueden variar de una sección a otra. Aplicando la segunda ley de Newton a una partícula de fluido y despreciando las fuerzas de cuerpo y la viscosidad, y reacomodando los términos se obtiene la Ecuación 14 [16].

$$\frac{dp}{\rho V^2} \left(1 - \frac{V^2}{\frac{dp}{d\rho}}\right) = \frac{dA}{A} \quad (14)$$

Como se considera flujo isentrópico, la velocidad del sonido c , está relacionada con la variación de la presión respecto a la densidad de un gas ideal mediante la Ecuación 15.

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (15)$$

Combinando la Ecuación 14 y 15, con la definición del número de Mach dada por la Ecuación 16, se obtiene la Ecuación 17.

$$Ma = \frac{V}{c} \quad (16)$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dA}{A} \frac{1}{(1 - Ma^2)} \quad (17)$$

De la Ecuación 17 se concluye que cuando el flujo es subsónico ($Ma < 1$), velocidad y los cambios de área de sección son en direcciones opuestas. En otras palabras, el aumento de área está asociado con el flujo subsónico a través de un conducto divergente. Cuando el flujo es supersónico ($Ma > 1$), la velocidad y el área varían en la misma dirección. Es decir, en flujo supersónico el aumento del área genera un aumento en la velocidad del flujo.

Si se rescribe la Ecuación 17, en términos de la densidad en lugar de la velocidad, se obtiene la Ecuación 18, que establece la relación entre densidad y área.

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dA}{A} \frac{Ma^2}{(1 - Ma^2)} \quad (18)$$

De la anterior ecuación se concluye que si el flujo es supersónico la densidad y el área varían en la misma dirección, es decir en un conducto divergente la densidad del gas aumentará. El comportamiento mostrado por la Ecuación 17 se puede observar en la Figura 7, para un flujo subsónico y supersónico en ductos divergentes (parte a) y convergentes (parte b).

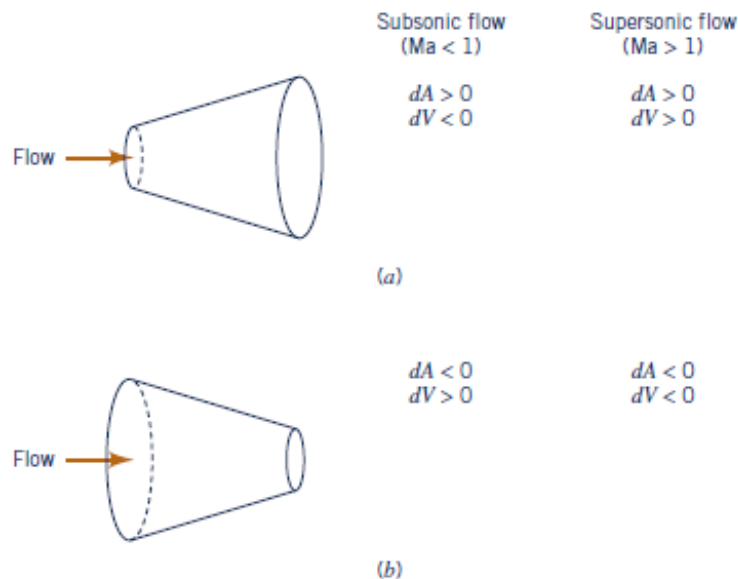


Figura 7: (a) Conducto divergente. (b) Conducto convergente. [16].

1.3.1.2 Flujo en conductos convergentes-divergentes

Usando las ecuaciones del comportamiento del flujo isentrópico se puede describir el comportamiento de dicho flujo cuando atraviesa una sección convergente y otra divergente. Es importante establecer primero el estado de estancamiento, el cual se puede definir como la energía de flujo que tiene un fluido cuando se encuentra en reposo, es decir cuando su velocidad es cero. Dicho estado de estancamiento es importante porque es el que permite en virtud de su energía en reposo el flujo de una corriente. El estado de estancamiento está asociado con una velocidad de flujo cero y un valor de entropía que corresponde a la entropía del fluido que fluye. El subíndice 0 se utiliza para designar el estado de estancamiento. Por lo tanto, la temperatura y la presión de estancamiento son T_0 y p_0 , entonces la entalpía de estancamiento es dada por la Ecuación 19.

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \quad (19)$$

Usando la ecuación de movimiento para flujo estable sin fricción y las relaciones para gases ideales en flujo isentrópico se puede expresar la relación de la temperatura de un flujo respecto a la temperatura de estancamiento con la Ecuación 20.

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \left[\frac{k-1}{2}\right] Ma^2} \quad (20)$$

Combinando la Ecuación 12 y definiendo como estado 1 el estancamiento con la Ecuación 20, se relaciona la presión de flujo con la presión de estancamiento mediante la Ecuación 21.

$$\frac{p}{p_0} = \left\{ \frac{1}{1 + \left[\frac{k-1}{2}\right] Ma^2} \right\}^{k/(k-1)} \quad (21)$$

Para relacionar la densidad de flujo con la densidad de estancamiento se utiliza la Ecuación 20 con la 21 y la 12 a través de la Ecuación 22.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left\{ \frac{1}{1 + \left[\frac{k-1}{2}\right] Ma^2} \right\}^{1/(k-1)} \quad (22)$$

La Ecuación 17 indica que la máxima aceleración del flujo ($dV/dA \approx \infty$), ocurre cuando el número de Mach es igual a 1, esta condición a su vez implica que el área sea mínima y el punto donde el área es mínima en una tobera convergente divergente es en la garganta. El estado en el cual el número de Mach de un flujo isentrópico es uno ($Ma=1$) en la garganta de una tobera convergente-divergente se conoce como estado crítico y se denota como $()^*$.

Combinando la Ecuación 20 y la 22 con las relaciones termodinámicas para el estado crítico se puede relacionar el área de flujo con la crítica es decir con el área de la garganta mediante la Ecuación 23.

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left\{ \frac{1 + \left[\frac{k-1}{2} \right] Ma^2}{1 + \left[\frac{k-1}{2} \right]} \right\}^{(k+1)/[2(k-1)]} \quad (23)$$

Las Ecuaciones 20, 21 y 22 indican que, en una tobera convergente divergente la temperatura, presión y densidad en cualquier punto del flujo en la tobera disminuirá respecto a las condiciones iniciales de estancamiento, es decir, el flujo se enfría a medida que pasa por la tobera acelerándose (Mach va en aumento) y se expande. La Ecuación 23 muestra que en el estado crítico el área de flujo disminuye a medida que se acerca al valor de Mach uno (en la garganta), para posteriormente empezar a aumentar. El comportamiento descrito para el flujo isentrópico de un determinado gas puede verse en la Figura 8.

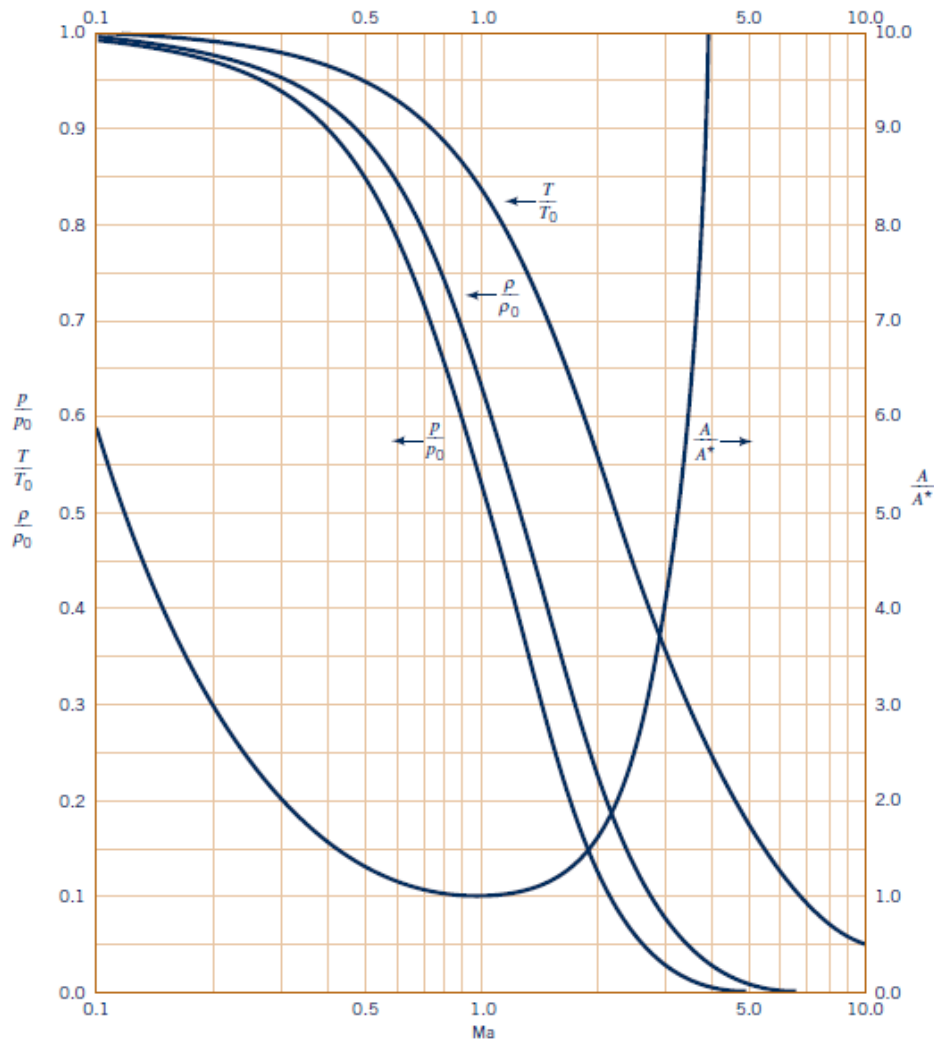


Figura 8: Flujo isentrópico de un gas ideal con $k=1.4$. [16].

1.3.2 Ondas de choque

Las ondas de choque son fenómenos producidos debido a la combinación o convergencia de varias ondas sónicas. Las ondas de choque pueden ser de dos tipos, normales y oblicuas. Las ondas de choque desaceleran un flujo supersónico a uno subsónico, generando un aumento de presión y temperatura en el flujo, por ello las ondas de choques son fenómenos asociados a gradientes altos que ocurren en zonas pequeñas y específicas. Los altos valores en los gradientes producidos por las ondas de choque generan altos esfuerzos viscosos y transferencia de calor, es decir, condiciones de no equilibrio dentro de la región de influencia de las ondas [18].

1.3.2.1 Ondas de choque normales

Las ondas de choque normales son representadas como una idealización de una discontinuidad en el flujo entre dos secciones cuyo estado es permanente. Las dos secciones son representadas en el espacio muy próximas (ver Figura 9 parte a), el paso entre los dos estados próximos se conoce como “salto” y la onda de choque normal es representada por una doble línea. Ya que las secciones en estado permanente de referencia pueden ser representadas suficientemente cerca de la onda de choque, el fenómeno no es exclusivo de conductos con sección transversal constante, es decir las ondas de choque son normales a las líneas de corriente entre las dos secciones de referencia (ver Figura 9 parte b) [18].

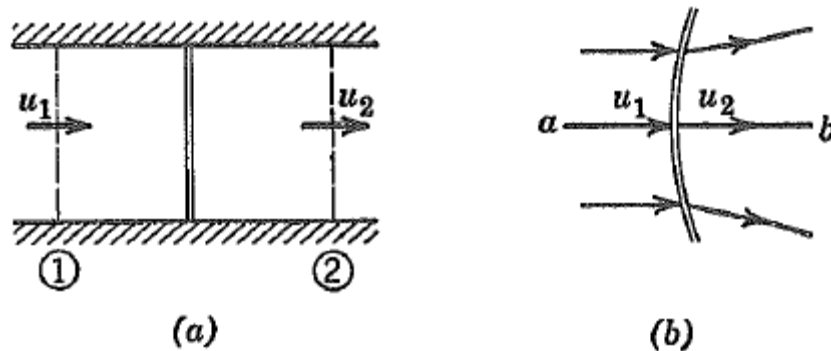


Figura 9: (a) Onda de choque normal. (b) Onda de choque normal sobre una línea de corriente a-b.

La relación de Prandtl-Meyer entre dos estados permanentes entre los cuales ocurre una onda de choque normal está dada por la Ecuación 24.

$$V_1 V_2 = a^{*2} \quad (24)$$

Donde a^* , representa la velocidad del estado crítico ($Ma=1$), utilizando la definición del número de Mach en la Ecuación 24 se obtiene la Ecuación 25, que establece el cambio de la velocidad en un flujo cuando se presenta una onda de choque normal.

$$Ma_2^* = \frac{1}{Ma_1^*} \quad (25)$$

La Ecuación 25 indica que cuando se presenta una onda de choque normal la velocidad cambia de supersónica a subsónica o viceversa, el fundamento que establece el sentido de dicho cambio de velocidad es la variación de entropía entre los dos estados de referencia que es proporcionada por la Ecuación 26 en función del número de Mach aguas arriba de la onda de choque normal.

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \frac{(Ma_1^2 - 1)^3}{3} \quad (26)$$

Si se asume que el flujo es adiabático la entropía no puede disminuir, lo que indica que $Ma_1 \geq 1$, es decir que en una onda de choque normal el flujo cambia de supersónico a subsónico.

La relación de velocidades que es inversa a la relación de densidades en una onda de choque está dada por la Ecuación 27, la relación de presiones por la Ecuación 28 y la relación de temperaturas por la Ecuación 29.

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2}{(\gamma - 1)Ma_1^2 + 2} \quad (27)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (Ma_1^2 - 1) \quad (28)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma - 1)\gamma Ma_1^2 + 1}{(\gamma + 1)^2} \frac{1}{Ma_1^2} (Ma_1^2 - 1) \quad (29)$$

De acuerdo a las Ecuaciones 27, 28 y 29 la densidad, presión y temperatura de flujo en una onda de choque aumentan, es decir la onda de choque comprime el flujo.

1.3.2.2 Ondas de choque oblicuas

Las ondas de choque oblicuas son producidas cuando un flujo supersónico es desviado un ángulo θ , más específicamente pueden ser generadas por el bloqueo del flujo con un cuerpo sólido ubicado a cierta distancia [17]. Si se define el ángulo de la onda β , el ángulo de deflexión θ (ver Figura 10) y la velocidad del sonido aguas arriba de la onda de choque oblicua como a_1 , la relación entre la componente normal de la velocidad de flujo a la onda de choque u_1 respecto a a_1 es dada por la Ecuación 30.

$$\frac{u_1}{a_1} = Ma_1 \sin\beta \quad (30)$$

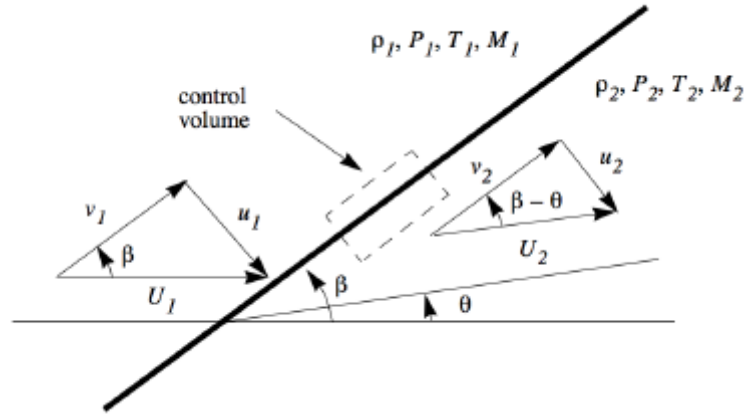


Figura 10: Flujo a través de una onda de choque oblicua. [17].

En cualquier lugar de la onda de choque oblicua ocurre u_1/a_1 , y si se reemplaza por $Ma_1 \sin\beta$ en las Ecuaciones 27, 28 y 29 se obtiene las correspondientes relaciones para las ondas de choque oblicuas:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2 \sin^2\beta}{(\gamma - 1)Ma_1^2 \sin^2\beta + 2} \quad (31)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma Ma_1^2 \sin^2\beta - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (32)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = 1 + \frac{2(\gamma - 1) Ma_1^2 \sin^2\beta - 1}{(\gamma + 1)^2} (\gamma Ma_1^2 \sin^2\beta + 1) \quad (33)$$

De acuerdo a las Ecuaciones 31, 32 y 33 las relaciones de las variables termodinámicas estáticas dependen de la velocidad normal de flujo respecto a la onda de choque oblicua. Del análisis de las ondas de choque normal se conoce que dicho componente de velocidad debe ser supersónico, $Ma_1 \sin\beta \geq 1$, lo que quiere decir que la mínima inclinación está dada por el número de Mach. La máxima inclinación de onda será $\beta = \pi/2$. Por tanto, el rango del ángulo de onda es:

$$\sin^{-1} \frac{1}{Ma_1} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \quad (34)$$

Si se conoce Ma_1 , se puede relacionar implícitamente θ y β mediante la Ecuación 35.

$$\tan\theta = 2 \cot\beta \frac{Ma_1^2 \sin^2\beta - 1}{Ma_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2} \quad (35)$$

El valor de la anterior ecuación es igual a cero en $\beta = \pi/2$ y $\beta = \sin^{-1}(1/Ma_1)$. Adentro de este rango de valores existe un máximo positivo. De acuerdo a la Figura 11 donde se

gráfica θ y β para varios valores de Ma_1 , para cada valor de Ma_1 existe un valor máximo de θ . Y se presenta una línea curva punteada que representa θ_{max} y otra línea curva continua que representa cuando número de Mach aguas abajo de la onda de choque Ma_2 , es igual a 1. En la solución para la onda de choque fuerte (líneas punteadas de las gráficas de θ vs β) que se da para valores de $\beta > \theta_{max}$ el flujo se convierte en subsónico. Para la solución de onda de choque débil (líneas continuas de las gráficas de θ vs β) el flujo permanece supersónico.

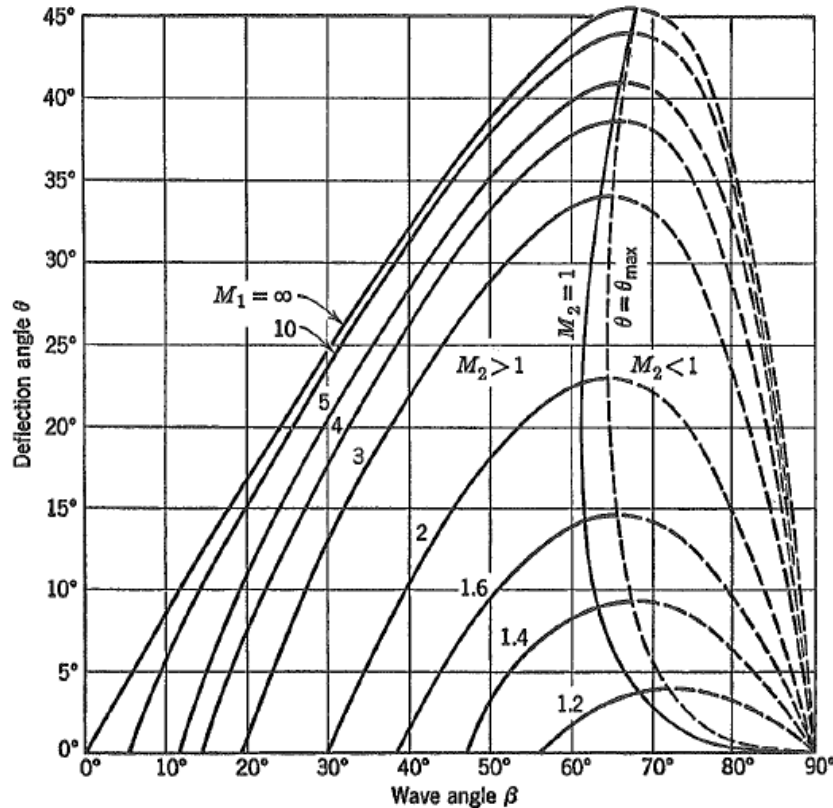


Figura 11: Soluciones para ondas de choque oblicuas. [18].

1.4 Método de volúmenes finitos

El método de volumen finito (FVM) es una técnica numérica que transforma las ecuaciones diferenciales parciales que representan leyes de conservación sobre volúmenes diferenciales en ecuaciones algebraicas discretas sobre volúmenes finitos o celdas. De forma análoga al método de diferencias finitas o elementos finitos, el primer paso en el proceso de solución es la discretización del dominio físico geométrico, que, en el FVM, se discretiza en elementos no superpuestos o volúmenes finitos. Posterior a ello las ecuaciones diferenciales parciales se discretizan transformándolas en ecuaciones algebraicas integrándolas sobre cada elemento del dominio físico discretizado. Luego se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas para

calcular los valores de la variable dependiente para cada uno de los elementos. Algunos de los términos de la ecuación de conservación se convierten en flujos de cara o superficie y se evalúan en las caras de volumen finito, ya que el flujo que ingresa a un volumen dado es idéntico al que sale del volumen adyacente, la FVM es estrictamente conservadora. Esta propiedad de conservación inherente del FVM lo convierte en el método de mayor preferencia en CFD [19].

1.4.1 Ecuaciones de conservación

Las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía originalmente son descritas de forma lagrangiana, es decir, siguiendo un pequeño grupo de partículas de fluido a través del espacio tiempo, pero debido a que en la mayoría de casos se necesita analizar las propiedades de un campo de flujo en una región específica o volumen de control, se usa la descripción euleriana. Por ello existe la necesidad de conocer el equivalente euleriano de una integral tomada sobre un volumen de fluido material en movimiento. Esto se puede lograr a través del teorema de transporte de Reynolds.

1.4.1.1 Conservación de masa

El principio de conservación de masa establece que, en ausencia de fuentes o sumideros, una región conservará su masa en un nivel local [20]. Es decir, la variación de la masa de un volumen de control indeformable con respecto al tiempo es igual a cero, según la Ecuación 36.

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{MV} = 0 = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}\right) dV \quad (36)$$

Si se asume que el régimen es permanente la derivada de la densidad con respecto al tiempo es igual a cero, de esta manera la Ecuación 37 establece la conservación de masa para volúmenes de control.

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (37)$$

De la anterior ecuación no se puede decir que la densidad del flujo ρ , es constante en el espacio porque la densidad es casi invariable en el caso de líquidos, y es una buena aproximación en gases a velocidades mucho menores que la del sonido, pero debido a que se trabaja con velocidades supersónicas el flujo es totalmente compresible y aún más teniendo en cuenta las ondas de choque. La consecuencia más importante en la dinámica de fluidos es que la ecuación de conservación de la masa (continuidad) ya no se puede usar para calcular la densidad [19].

1.4.1.2 Conservación de momento lineal

El principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal indica que, en ausencia de cualquier fuerza externa que actúe sobre un cuerpo, el cuerpo conserva su cantidad de movimiento total, es decir, el producto de su vector de masa y velocidad. Como la cantidad de movimiento es una cantidad vectorial, sus componentes en cualquier dirección también se conservarán. Para el volumen material de una sustancia, la segunda ley de movimiento de Newton afirma que el momento de este volumen específico puede cambiar solo en presencia de una fuerza neta que actúa sobre él, que podría incluir tanto fuerzas de superficie como fuerzas de cuerpo. Por lo tanto, al considerar el volumen material de fluido de masa m , densidad ρ y velocidad \mathbf{v} , la ecuación conservativa de cantidad de movimiento aplicando el teorema de transporte de Reynolds está dada por la Ecuación 38.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \mathbf{v}] + \nabla \cdot \{\rho \mathbf{v} \mathbf{v}\} = \mathbf{f} \quad (38)$$

Donde \mathbf{f} es la fuerza externa por unidad de volumen que actúa sobre el volumen de control, que a su vez está separada en dos partes una es \mathbf{f}_s que representa las fuerzas de superficie y otra \mathbf{f}_b que son las fuerzas de cuerpo. Las fuerzas de superficie son debidas a la presión y a los esfuerzos viscosos, estos dos últimos representados por el tensor total de esfuerzos $\boldsymbol{\Sigma}$, compuesto por el tensor de presión $P\mathbf{i}$ y el de esfuerzos cortantes $\boldsymbol{\tau}$, la Ecuación 39 muestra las partes del tensor total de esfuerzos.

$$\boldsymbol{\Sigma} = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (39)$$

Donde \mathbf{I} es el tensor identidad de (3×3) . Por tanto la fuerza de superficie que actúa sobre un elemento de área diferencial Ds y orientación \mathbf{n} , es $(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n})Ds$, que se puede integrar por toda la superficie del volumen de control y aplicar el teorema de divergencia para hallar las fuerzas de superficies mediante la Ecuación 40.

$$\mathbf{f}_s = \int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} dV = -\nabla p + [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] \quad (40)$$

Las fuerzas de cuerpo \mathbf{f}_b descartando la rotación del volumen de control son debidas a la gravedad, es decir:

$$\mathbf{f}_b = \rho \mathbf{g} \quad (41)$$

Substituyendo la fuerza externa \mathbf{f} en la Ecuación 38, la Ecuación general conservativa de la cantidad de movimiento es:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \mathbf{v}] + \nabla \cdot \{\rho \mathbf{v} \mathbf{v}\} = -\nabla p + [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g} \quad (42)$$

Asumiendo flujo en régimen permanente y reemplazando el tensor de esfuerzos cortantes en función de las tasas de deformación angulares en tres dimensiones dado por la Ecuación 43, la Ecuación 44 representa la conservación de momento para un volumen de control.

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$\nabla \cdot \{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (44)$$

Donde μ es la viscosidad dinámica del fluido, y se considera constante.

1.4.1.3 Conservación de la energía

La ecuación de la energía se deriva de la primera ley de la termodinámica, que establece que la tasa de cambio de energía específica e de una partícula fluida es igual a la tasa de adición de calor a la partícula fluida más la tasa de trabajo realizado sobre la partícula., según la Ecuación 45.

$$\rho \frac{De}{Dt} = \dot{Q} + \dot{W}_S \quad (45)$$

Siendo \mathbf{q} el vector flujo de calor dado por la Ecuación 46.

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (46)$$

Donde k es la conductividad térmica del fluido y T es la función escalar de distribución de temperatura espacial. La tasa total de adición de calor a la partícula es igual a:

$$\dot{Q} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (47)$$

La tasa de trabajo realizado sobre la partícula de fluido en el elemento por una fuerza superficial es igual al producto de la fuerza y el componente de velocidad en la dirección de la fuerza, de esta manera la tasa total de trabajo sobre la partícula de fluido por esfuerzos de superficie es dada por la Ecuación 48.

$$\begin{aligned} \dot{W}_S = & -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) \\ & + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \right. \\ & \left. + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (48)$$

Remplazando las Ecuaciones 47 y 48 en la 45, la tasa de cambio de energía en una partícula de fluido es igual a:

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} = & \nabla \cdot (k \nabla T) - \nabla \cdot (p\mathbf{v}) \\ & + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \right. \\ & \left. + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Si se recuerda que la energía específica e se puede expresar mediante la Ecuación 50.

$$e = i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \quad (50)$$

Donde i es la energía interna específica, remplazando la Ecuación 50 en la 49, y aplicando el teorema de transporte de Reynolds, la ecuación de la energía interna específica de un volumen de control es igual a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho i \mathbf{v}) \\ = & \nabla \cdot (k \nabla T) - \nabla \cdot (p\mathbf{v}) \\ & + \left[\tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} \right. \\ & \left. + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + S_i \end{aligned} \quad (51)$$

Donde S_i representa el término fuente de la energía interna específica en el volumen de control. Todos los efectos debidos a los esfuerzos viscosos pueden ser descritos por la función de disipación Φ dada por la Ecuación 52.

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (52)$$

De esta forma la ecuación de la energía interna específica de un volumen de control remplazando la Ecuación 52 en la 51 es:

$$\frac{\partial \rho i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho i \mathbf{v}) = \nabla \cdot (k \nabla T) - \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \Phi + S_i \quad (53)$$

La ecuación de la energía rara vez se resuelve en su forma completa y, dependiendo de la situación física, se pueden desarrollar varias versiones simplificadas. El término de disipación Φ no tiene valores significativos excepto para grandes gradientes de velocidad a velocidades supersónicas [19].

1.4.2 Discretización

La solución numérica de una ecuación diferencial parcial consiste en encontrar los valores de la variable dependiente ϕ en puntos específicos a partir de los cuales se puede construir su distribución sobre el dominio de interés. Estos puntos se denominan elementos de la malla o nodos de malla y resultan de la discretización de la geometría original en un conjunto de elementos discretos que no se superponen, un proceso conocido como mallado. Los nodos o variables resultantes se colocan en los centroides de las celdas o en los vértices, según el procedimiento de discretización adoptado [19]. En todos los métodos, la atención se centra en reemplazar la solución exacta continua de la ecuación diferencial parcial con valores discretos. Por lo tanto, la distribución de ϕ está discretizada, y es apropiado referirse a este proceso de convertir la ecuación gobernante en un conjunto de ecuaciones algebraicas para los valores discretos de ϕ como el proceso de discretización y los métodos específicos empleados para lograr esta conversión como el proceso de discretización.

1.4.2.1 Discretización del dominio

La discretización geométrica del dominio físico da como resultado una malla en la que finalmente se resuelven las ecuaciones de conservación. Esto requiere la subdivisión del dominio en celdas o elementos discretos que no se superponen y que llenan completamente el dominio computacional para producir un sistema de cuadrícula o malla. Esto se logra mediante una variedad de técnicas que dan como resultado una amplia gama de tipos de malla. Estas mallas se clasifican según varias características: estructura, ortogonalidad, bloques, forma de celda, disposición variable, etc.

1.4.2.2 Discretización de las ecuaciones

Como ya se vio en las ecuaciones de conservación el fenómeno de la convección y la difusión se presentan a la vez, es decir, en la naturaleza van ligados, por tanto, la Ecuación 54 representa la conservación de una variable específica de flujo ϕ .

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla\phi) + S_\phi \quad (54)$$

Donde $\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$ es el término transitorio, $\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\phi)$ es el convectivo, $\nabla \cdot (\Gamma \nabla\phi)$ el difusivo y S_ϕ es el término fuente. Si se considera régimen permanente y se integra sobre el volumen de control aplicando el teorema de divergencia, la Ecuación 55 representa el balance de flujo de ϕ en un volumen de control.

$$\int_S \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \phi) dS = \int_S \mathbf{n} \cdot (\Gamma \nabla \phi) dS + \int_V S_\phi dV \quad (55)$$

El proceso de difusión afecta la distribución de una cantidad transportada a lo largo de sus gradientes en todas las direcciones, mientras que la convección propaga su influencia solo en la dirección del flujo. Esta diferencia es crucial para escoger el esquema de discretización, sea diferencia central o *upwind* [21].

Realizando la discretización solo con flujo en la dirección x , y en ausencia de fuentes la ecuación de conservación de ϕ se reduce a:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (56)$$

Y la ecuación de continuidad a:

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad (57)$$

Si se considera el flujo unidimensional como en la Figura 12, y se adopta las convenciones de un nodo general P , los nodos vecinos son W y E y las caras o superficies del volumen de control como w y e .

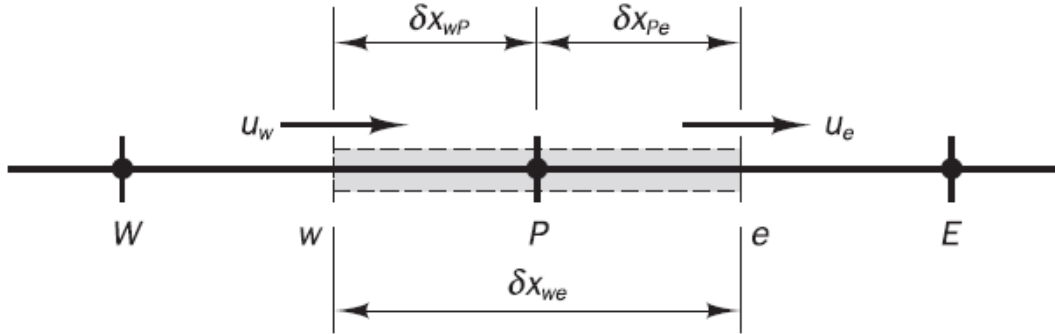


Figura 12: Volumen de control alrededor del nodo P. [21].

Integrando las Ecuaciones 56 y 57, es decir la de conservación y continuidad respectivamente se tiene:

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (58)$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (59)$$

Para obtener la discretización de las Ecuaciones 58 y 59, es necesario definir dos variables F y D para representar el flujo másico convectivo por unidad de área y la conductancia de difusión respectivamente en las caras o superficies del volumen de control así:

$$F = \rho u \text{ y } D = \frac{\Gamma}{\delta x} \quad (60)$$

Los valores de las superficies en la celda de las variables F y D se pueden escribir así:

$$F_w = (\rho u)_w \quad F_e = (\rho u)_e \quad (61)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \quad (62)$$

Si se asume que las de las superficies en la celda son iguales $A_w = A_e = A$, y se divide la Ecuación 58 por área y se reemplaza las Ecuaciones 61 y 62, la integral de la ecuación de conservación de convección y difusión se puede expresar:

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (63)$$

Y la integral de la ecuación de continuidad así:

$$F_e - F_w = 0 \quad (64)$$

Si se supone que, de algún modo el campo de velocidades es conocido, es decir se conocen los valores de F_e y F_w , se tendría que resolver la Ecuación 63 calculando el valor de la propiedad transportada ϕ en e y w , para ello se usan esquemas de discretización.

1.4.2.3 Esquema de diferencia central

La diferencia central se basa en realizar una interpolación lineal entre las celdas que contienen la cara o el área en la cual se requiere calcular el valor de la propiedad ϕ . De esta manera el valor de ϕ_e y ϕ_w será:

$$\phi_e = \frac{\phi_P - \phi_E}{2} \quad (65)$$

$$\phi_w = \frac{\phi_W - \phi_P}{2} \quad (66)$$

Si se sustituyen las Ecuaciones 65 y 66 en la 63 la ecuación de conservación de convección y difusión discretizada será:

$$\frac{F_e}{2} (\phi_P - \phi_E) - \frac{F_w}{2} (\phi_W - \phi_P) = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (67)$$

Reacomodando términos la Ecuación 67 se puede expresar así:

$$\left[\left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \quad (68)$$

Definiendo los coeficientes a_W , a_E y a_P mediante el Cuadro 1, la discretización de la ecuación de conservación de convección y difusión en diferencial central está dada por la Ecuación 69.

a_W	a_E	a_P
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_W + a_E + (F_e - F_w)$

Cuadro 1: Coeficientes a_W , a_E y a_P .

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (69)$$

Esto produce un conjunto de ecuaciones algebraicas que se resuelven para obtener la distribución de la propiedad transportada ϕ .

1.4.2.4 Esquema de diferencia contra el viento (*upwind*)

En un flujo fuertemente convectivo de w a e , el esquema de diferencia media central no es adecuado porque la superficie w de la celda debería recibir una influencia mucho más fuerte del nodo W que del nodo P . El esquema de diferenciación *upwind* o ‘celda donante’ tiene en cuenta la dirección del flujo al determinar el valor en la superficie de una celda: el valor de convección de ϕ en la cara de una celda se considera igual al valor en el nodo aguas arriba. Cuando el flujo es dirección positiva, $u_w > 0$, $u_e > 0$ ($F_w > 0$, $F_e > 0$), el esquema *upwind* establece:

$$\phi_w = \phi_W \text{ y } \phi_e = \phi_P \quad (70)$$

De tal forma que la ecuación discretizada de la conservación de convección y difusión de ϕ será:

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)]\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e\phi_E \quad (71)$$

Si el flujo tiene dirección negativa, $u_w < 0$, $u_e < 0$ ($F_w < 0$, $F_e < 0$) entonces el esquema toma:

$$\phi_w = \phi_P \text{ y } \phi_e = \phi_E \quad (72)$$

La ecuación discretizada de ϕ puede escribirse como:

$$[D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)]\phi_P = D_w\phi_W + (D_e - F_e)\phi_E \quad (73)$$

Las Ecuaciones 71 y 73 pueden escribirse en términos de los coeficientes a_W y a_E así:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (74)$$

El coeficiente central será:

$$a_p = a_w + a_E + (F_e - F_w) \quad (75)$$

Y los coeficientes vecinos dependiendo del caso se muestran en el cuadro 2.

	a_w	a_E
$F_w > 0, F_e > 0$	$D_w + F_w$	D_e
$F_w < 0, F_e < 0$	D_w	$D_e - F_e$

Cuadro 2: Coeficientes a_w , a_E esquema upwind.

1.5 Modelos de turbulencia

La turbulencia genera la aparición en el flujo de remolinos con una amplia gama de escalas de longitud y tiempo que interactúan de forma dinámicamente compleja. Debido a la importancia de evitar o promover la turbulencia en las aplicaciones de ingeniería, no sorprende que una cantidad sustancial de esfuerzo de investigación se dedique al desarrollo de métodos numéricos para capturar los efectos importantes debido a la turbulencia. Los métodos se pueden agrupar en tres categorías:

- Modelos de turbulencia para las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS).
- Simulación de grandes remolinos (LES).
- Simulación numérica directa (DNS).

1.5.1 Modelos de turbulencia para las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS)

La metodología se centra en el flujo medio y los efectos de la turbulencia en las propiedades del flujo medio. Antes de la aplicación de métodos numéricos, las ecuaciones de Navier-Stokes se promedian en el tiempo o se promedian en conjunto en flujos con condiciones de contorno dependientes del tiempo, esta metodología se denomina a su vez descomposición de Reynolds. Aparecen términos adicionales en las ecuaciones de flujo promediadas en el tiempo (o promediadas por Reynolds) debido a las interacciones entre varias fluctuaciones turbulentas. Estos términos adicionales se modelan con modelos de turbulencia clásicos. Entre los más conocidos se encuentran el modelo $k-\epsilon$ y el modelo de esfuerzos de Reynolds o esfuerzos cortantes [21]. Los recursos informáticos requeridos para cálculos de flujo razonablemente precisos son relativamente moderados, por lo que este enfoque ha sido el pilar de los cálculos de flujo de ingeniería durante las últimas décadas.

1.5.1.1 Descomposición de Reynolds

La descomposición de Reynolds define una propiedad de flujo φ en un determinado punto del campo, como la suma del promedio Φ de la propiedad en el tiempo, y el componente fluctuante variable en el tiempo $\varphi'(t)$ así: $\varphi(t) = \Phi + \varphi'(t)$. El promedio de la propiedad φ en el tiempo se define como:

$$\Phi = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi(t) dt \quad (76)$$

De acuerdo a la Ecuación 76 en teoría Δt debería aproximarse a infinito, pero sería razonable que el valor de Δt sea mayor a la escala de tiempo asociada con las variaciones más lentas (de los vórtices más grandes). El promedio de la fluctuación variable en el tiempo se define:

$$\overline{\varphi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi'(t) dt \equiv 0 \quad (77)$$

Se hace también necesario hallar el promedio del producto de las fluctuaciones de dos variables de flujo diferentes $\overline{\varphi'\psi'}$, que también es llamado el segundo momento y se expresa así:

$$\overline{\varphi'\psi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi'\psi' dt \quad (78)$$

Si las fluctuaciones de las velocidades en diferentes direcciones fueran independientemente aleatorias, entonces los valores de los segundos momentos de los componentes de las velocidades $\overline{u'v'}$, $\overline{u'w'}$, $\overline{v'w'}$ podrían ser cero, pero la turbulencia está asociada con la aparición de estructuras del flujo de vórtices y los componentes de velocidad inducidos son caóticos, pero no independientes, por lo que a su vez los segundos momentos son distintos de cero.

1.5.1.2 Ecuaciones para flujos compresibles

Si se aplica la descomposición de Reynolds a las Ecuaciones de continuidad, momento y energía o cualquier otra variable escalar de transporte φ y se definen las velocidades de flujo en las tres direcciones y la presión como: $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$, $u = U + u'$, $v = V + v'$, $w = W + w'$, $p = P + p'$. De tal forma que las Ecuaciones gobernantes para flujo compresible se pueden expresar como:

$$\textit{Continuidad} \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{U}}) = 0 \quad (79)$$

Momento

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{U}\tilde{U}) \\ = -\frac{\partial\bar{P}}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu\nabla\tilde{U}) + \left[-\frac{\partial(\bar{\rho}u'^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\bar{\rho}u'v')}{\partial y} - \frac{\partial(\bar{\rho}u'w')}{\partial z} \right] + S_{Mx} \end{aligned} \quad (80a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{V}\tilde{U}) \\ = -\frac{\partial\bar{P}}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu\nabla\tilde{V}) + \left[-\frac{\partial(\bar{\rho}u'v')}{\partial x} - \frac{\partial(\bar{\rho}v'^2)}{\partial y} - \frac{\partial(\bar{\rho}v'w')}{\partial z} \right] + S_{My} \end{aligned} \quad (80b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{W})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{W}\tilde{U}) \\ = -\frac{\partial\bar{P}}{\partial z} + \nabla \cdot (\mu\nabla\tilde{W}) + \left[-\frac{\partial(\bar{\rho}u'w')}{\partial x} - \frac{\partial(\bar{\rho}v'w')}{\partial y} - \frac{\partial(\bar{\rho}w'^2)}{\partial z} \right] + S_{Mz} \end{aligned} \quad (80c)$$

Variable escalar de transporte Φ

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{\Phi})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\Phi}\tilde{U}) = \nabla \cdot (\Gamma_{\Phi}\nabla\tilde{\Phi}) + \left[-\frac{\partial(\bar{\rho}u'\phi')}{\partial x} - \frac{\partial(\bar{\rho}v'\phi')}{\partial y} - \frac{\partial(\bar{\rho}w'\phi')}{\partial z} \right] + S_{\Phi} \quad (81)$$

En las Ecuaciones 79, 80 y 81 las velocidades promedio \tilde{U} , \tilde{V} , \tilde{W} y para $\tilde{\Phi}$ representan las velocidades promediadas de Favre. El promedio de Favre se usa en el flujo compresible para separar las fluctuaciones turbulentas del flujo medio.

1.5.2 Simulación de grandes remolinos (LES)

Esta forma de cálculo de turbulencia se encuentra entre los métodos DNS y RANS, tanto con respecto a la forma como al costo de cálculo. En particular, en LES se simula directamente el movimiento que transporta energía a gran escala, mientras que se modelan las escalas pequeñas (principalmente disipativas) [23]. El método implica un filtrado espacial de las ecuaciones de Navier Stokes antes de realizar los cálculos, en donde se escogen los remolinos más grandes y se rechazan los más pequeños. Si se resuelven las ecuaciones de flujo no estacionario ello demanda recursos informáticos en términos de almacenamiento y el volumen de cálculos son grandes.

1.5.3 Simulación numérica directa (DNS)

Este enfoque representa una simulación numérica directa, lo que corresponde a resolver computacionalmente las ecuaciones de Navier-Stokes usando suficiente resolución para

capturar todas las escalas físicas importantes, desde las más grandes hasta las disipativas. Esta metodología implica cálculos muy costosos en términos de recursos informáticos, por lo que no se utiliza para cálculos de flujo industrial.

1.5.4 Modelo SST $k-\omega$

En el presente trabajo el modelo de turbulencia escogido es el SST $k-\omega$, las RANS, categoría a la cual pertenece el modelo seleccionado permite el cálculo de las propiedades promedio en el campo de flujo. Algunos modelos RANS utilizados para calcular la turbulencia son el $k-\varepsilon$, $k-\omega$, y Spalart-Allmaras entre otros, estos modelos son ampliamente usados en aplicaciones aeroespaciales [24]. Menter (1992) señaló que los resultados del modelo $k-\varepsilon$ fueron mucho menos sensibles a los valores supuestos en la corriente libre (lejos de la capa límite), pero su desempeño cerca de la pared no es satisfactorio para las capas límite con gradientes de presión adversos. Esto lo llevó a sugerir un modelo híbrido usando:

- Una transformación del modelo $k-\varepsilon$ en un modelo $k-\omega$ en la región cercana a la pared
- El modelo estándar $k-\varepsilon$ en la región completamente turbulenta lejos de la pared.

El cálculo del esfuerzo de Reynolds y la ecuación de k son los mismos que en el modelo $k-\omega$ original de Wilcox, pero la ecuación de ε se transforma en una ecuación de ω sustituyendo de acuerdo a la Ecuación 82.

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k} \quad (82)$$

Donde ω es la frecuencia de turbulencia, ε es la tasa de disipación de energía cinética turbulenta por unidad de masa y k es la energía cinética turbulenta por unidad de masa dada por la Ecuación 83.

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (83)$$

Donde $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ y $\overline{w'^2}$ son los promedios del cuadrado de las fluctuaciones en las tres componentes de la velocidad. La ecuación de transporte de k es:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{v}) = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla(k) \right) + P_k - \beta^* \rho k \omega \quad (84)$$

El término μ_t hace referencia a la viscosidad de remolino o vórtice y está definido así:

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (85)$$

Y P_k es la producción de energía cinética de turbulencia dada por:

$$P_k = \left(2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \quad (86)$$

Donde S_{ij} es el tensor de deformación y δ_{ij} es el delta de Kronecker. El término $\sigma_k=1.0$, de la Ecuación 84 es una constante, así como $\beta^*=0.09$. La ecuación de transporte de ω es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\omega\mathbf{v}) \\ = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega,1}} \right) \nabla(\omega) \right) + \gamma_2 \left(2\rho S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho \omega \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) - \beta_2 \rho \omega^2 \\ + 2 \frac{\rho}{\sigma_{\omega,2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (87)$$

Donde las constantes dadas por Menter *et al.*, (2003) para optimizar el funcionamiento del modelo basado en datos experimentales son: $\sigma_{\omega,1}=2.0$, $\sigma_{\omega,2}=1.17$, $\gamma_2=0.44$, $\beta_2=0.083$.

El *SST k- ω* , es recomendado por estudios previos sobre separación de flujo en toberas de cohetes, en los resultados el modelo proporciona un cálculo razonable de la separación de capa límite y el efecto de las ondas de choque [25]. Se escogió el *SST k- ω* principalmente por ser el modelo más sugerido al haber presentado un óptimo desempeño en condiciones de gradientes de presión cero y en simulación de capa límite con gradiente de presión adverso [21], que son fenómenos presentes en las toberas aeroespaciales plug.

1.6 Tipos de Mallas computacionales

Los cálculos realizados por las ecuaciones de conservación y transporte ya discretizadas necesitan ser llevados a cabo sobre celdas formadas por un conjunto de puntos discretos. La distribución de dichos puntos discretos a lo largo del campo de flujo es llamada malla. La forma en la cual la malla es determinada se denomina generación de malla existiendo dos tipos de malla principalmente, las estructuradas y las no estructuradas. Dependiendo del tipo de malla escogida en un determinado caso puede generar o no una solución numérica adecuada [26].

1.6.1 Mallas estructuradas

Una malla estructurada se define como un conjunto de elementos hexaédricos (en 3D) o cuadriláteros (en 2D) con una conectividad implícita de los puntos de la malla. La generación de mallas estructuradas para geometrías complejas es una tarea que requiere mucho tiempo debido a la posible necesidad de dividir el dominio manualmente en varios bloques dependiendo de la naturaleza de la geometría [27].

1.6.1.1 Tipos de mallas estructuradas

Las mallas pueden ser cartesianas o curvilíneas (ajustadas al cuerpo), ver Figura 13. En la primera, las líneas de cuadrícula siempre son paralelas a los ejes de coordenadas. En la ajustada al cuerpo, las superficies de coordenadas se curvan para ajustarse a los límites. Existe una división alternativa en cuadrículas ortogonales y no ortogonales. En mallas ortogonales (por ejemplo, mallas cartesianas o polares) todas las líneas de malla se cruzan a 90° . Algunos flujos se pueden tratar como axisimétricos y, en estos casos, las ecuaciones de flujo se pueden expresar en términos de coordenadas polares (r, θ) , en lugar de coordenadas cartesianas (x, y) , con modificaciones no significativas.

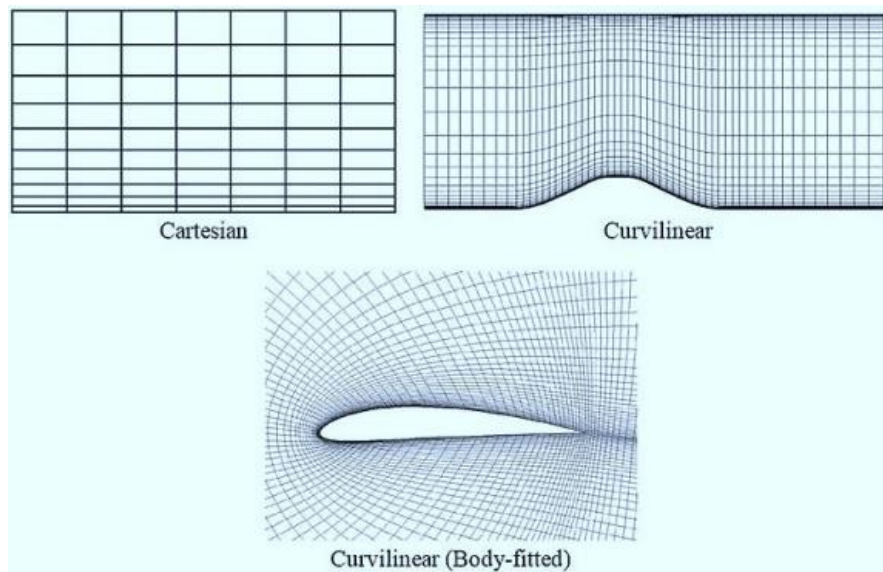


Figura 13: Tipos de mallas estructuradas. [27].

1.6.1.2 Técnicas de generación de malla

Los algoritmos empleados generalmente implican técnicas complejas de suavizado iterativo que intentan alinear elementos con límites o dominios físicos. Cuando se requieren límites no triviales, se pueden emplear técnicas de estructura de bloques que permiten al usuario dividir el dominio en bloques topológicos [28]. Las técnicas usadas para mallas estructuradas son:

- Variables complejas (solo en 2D): Las técnicas de variables complejas tienen la ventaja de que las transformaciones utilizadas son analíticas frente a aquellos métodos que son enteramente numéricos.
- Métodos algebraicos: interpolación transfinita (TFI): Se ha utilizado la interpolación transfinita para generar los puntos de la cuadrícula interiores a partir de las superficies límite. En 2D se puede inscribir una función de interpolación de Lagrange lineal.

- Métodos TDE: Al igual que los métodos algebraicos, los métodos de ecuaciones diferenciales también se utilizan para generar cuadrículas. La construcción de cuadrículas se puede realizar utilizando las tres clases de ecuaciones diferenciales parciales [27]. La generación de valores de campo de una función a partir de valores límite se puede hacer de varias maneras, por ejemplo, por interpolación entre los límites.

1.6.2 Mallas no estructuradas

Una malla no estructurada se define como un conjunto de elementos, comúnmente tetraedros (en 3D) y triángulos (en 2D), con una conectividad explícitamente definida. El proceso de generación de mallas no estructuradas implica dos pasos básicos: la creación de puntos y la definición de la conectividad entre estos puntos [29]. La flexibilidad y la automatización hacen que la malla no estructurada sea una opción favorable, aunque la precisión de la solución puede ser relativamente desfavorable en comparación con la malla estructurada debido a la presencia de elementos excesivamente distorsionados en regiones sensibles como las capas límite.

1.6.2.1 Generación de mallas estructuradas

La premisa básica es que, debido a la forma aleatoria en que los elementos pueden ensamblarse para llenar el espacio computacional, las técnicas de generación de mallas no estructuradas son inherentemente más automáticas y adecuadas para geometrías complejas que las mallas tradicionales estructuradas o estructuradas en bloques. Por lo tanto, el problema de la generación de mallas no estructuradas es en gran medida el diseño de algoritmos que sean automáticos, robustos y produzcan formas y distribuciones de elementos adecuadas para el solucionador de flujo [30]. Los principales métodos de generación de mallas no estructuradas son:

1.6.2.1.1 Técnica de frente de avance

Se genera una malla no estructurada agregando elementos individuales uno a la vez a un frente existente de elementos generados. La generación de una cuadrícula bidimensional comienza con una discretización de los límites de la geometría como un conjunto de bordes. Estos bordes forman el frente inicial que debe avanzar hacia el campo. Se selecciona un borde particular de este frente y se forma un nuevo triángulo con este borde como base uniendo los dos extremos del borde actual a un punto recién creado o a un punto existente en el frente. Luego, el borde actual se elimina del frente, ya que ahora es remplazado por el nuevo

triángulo (ver Figura 14). Una de las características críticas de tales métodos es la colocación de nuevos puntos. Al generar un nuevo triángulo, primero se coloca un nuevo punto en una posición determinada para dar como resultado un triángulo de tamaño y forma óptimos. Los parámetros que definen este triángulo óptimo en función de la posición del campo se obtienen mediante una función de campo prescrita [30].

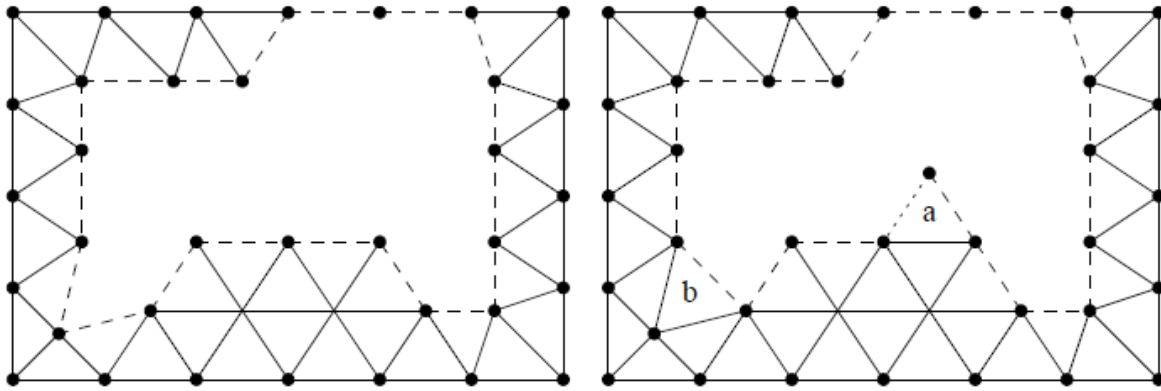


Figura 14: Generación de triángulos usando un punto nuevo. (a) Punto frontal existente. (b) Método de frente de avance. La línea punteada es el frente actual. [30].

1.6.2.1.2 Método de triangulación de Delaunay

Dado un conjunto de puntos en el plano, existen muchas triangulaciones posibles de estos puntos. Una construcción de Delaunay representa una triangulación única de estos puntos que exhibe una gran clase de propiedades bien definidas [31]. Esta propiedad establece que ningún triángulo en una triangulación de Delaunay puede contener un punto que no sean los tres vértices que forman dentro de su circunferencia. Por lo tanto, dada una triangulación inicial, se puede insertar un nuevo punto en la triangulación localizando y eliminando primero todos los triángulos existentes cuyos circuncírculos contienen el punto recién insertado. Luego se forma una nueva triangulación uniendo el nuevo punto a todos los vértices de los límites de la cavidad creada por la eliminación previa de los triángulos intersecados (ver Figura 15).

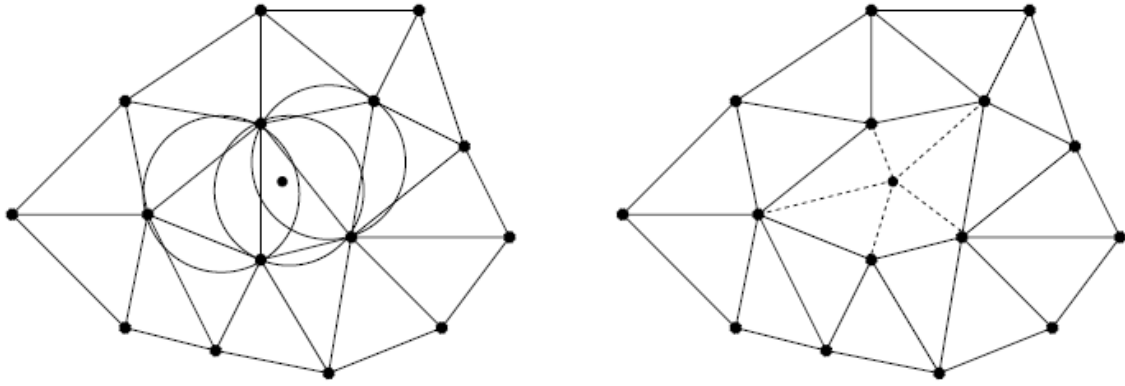


Figura 15: Ilustración del algoritmo de Bowyer/Watson en la triangulación de Delaunay. [30].

2 Metodología

El diseño y modelamiento computacional de la tobera plug está compuesto de varias etapas las cuales pueden visualizarse en forma general en la Figura 16.

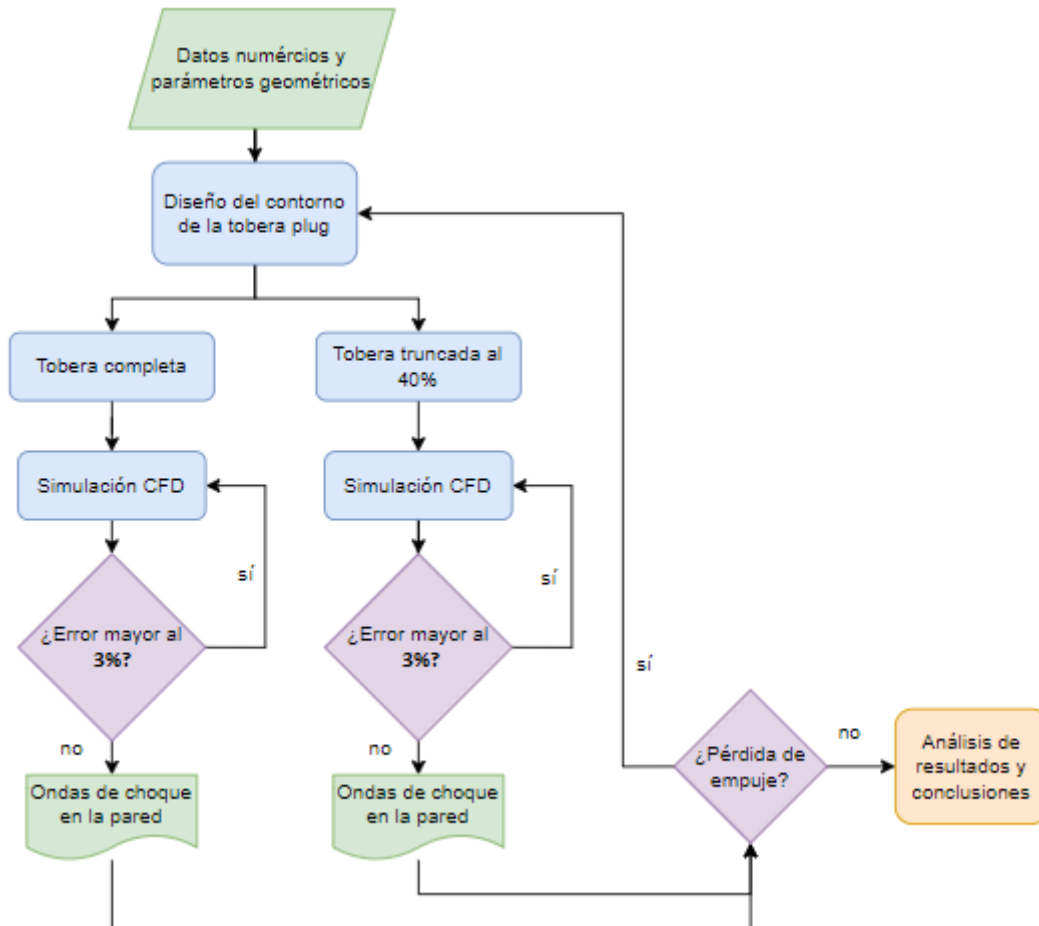


Figura 16: Esquema de la metodología del presente trabajo.

De acuerdo a esta metodología se realiza el diseño y modelamiento computacional de una tobera plug en condiciones de presión atmosférica decreciente, y el análisis del efecto de las ondas de choque sobre el flujo en la tobera.

Respecto del porcentaje de error computacional que se aprecia en el diagrama de flujo de la Figura 16, en simulaciones numéricas CFD consideran errores aceptables inferiores al 1% para flujo supersónico en toberas convergentes divergentes [32], en análisis de flujo supersónico en toberas con expansiones súbitas es inferior al 3,56% [33]. Por ello se elige un criterio de error máximo del 3%.

2.1 Datos numéricos y parámetros geométricos

Los datos numéricos del desempeño de la tobera plug se extrajeron de una simulación realizada a una tobera de longitud total y truncada anteriormente (Hagemann *et al.*, 1998) [12], así como los parámetros geométricos para el diseño del contorno de la tobera plug que se pueden ver en el Cuadro 3.

Parámetro	Valor
Presión en la cámara de combustión $p_c [MPa]$	1,2
Propelentes	Gas-oil/ácido nítrico
Relación de mezcla	2,5
Diámetro interno de Cámara de combustión $d_{c,inner} [m]$	0,19
Diámetro externo de la cámara de combustión $d_{c,outer} [m]$	0,34
Diámetro de salida de tobera $d_e [m]$	0,355
Diámetro den la base de tobera $d_b [m]$	0,147
Relación de área ε	10

Cuadro 3: Parámetros geométricos de la tobera plug.

2.2 Diseño del contorno de la tobera Plug

Aplicando la metodología para el diseño de toberas plug presentada anteriormente, se supone que el número de Mach en la garganta $Ma_t = 1$, se dan valores ascendentes al número de Mach con un incremento adecuado para obtener un contorno suave, y para cada valor de Mach se calcula los parámetros v , θ , μ , A/A_t , r y el correspondiente x , que establece la coordenada axial [34]. En la Figura 17 se puede apreciar el contorno de la tobera plug completa de acuerdo a los parámetros geométricos de diseño. Para suavizar aún más el contorno de la tobera se usan incrementos del número de Mach menores para obtener una curva más suave.

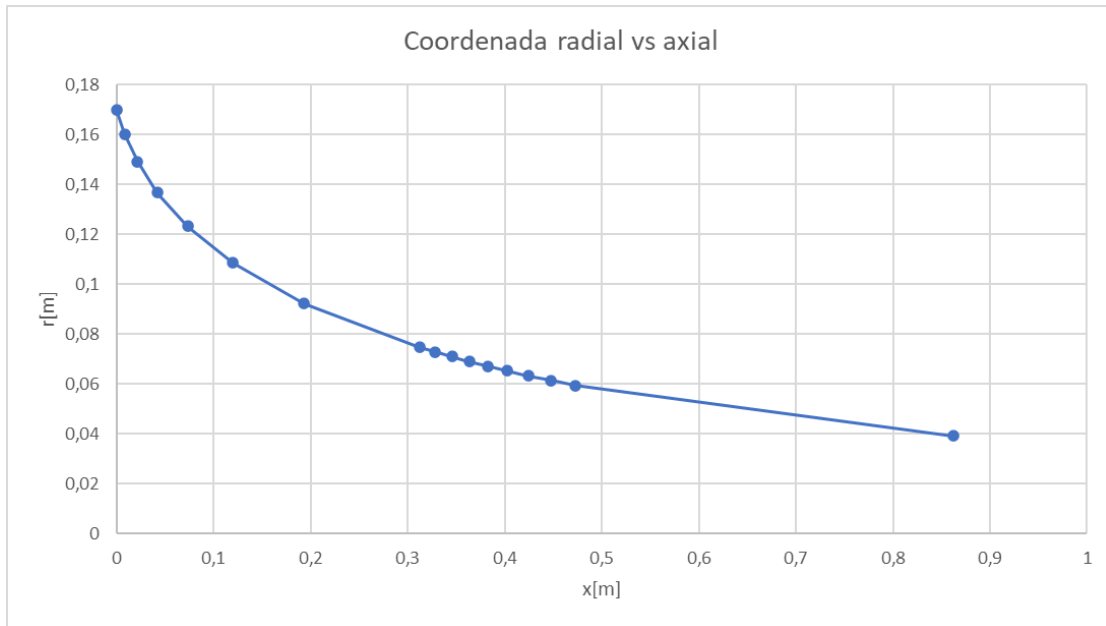


Figura 17: Contorno de la tobera plug completa.

2.3 Simulación CFD

En general la metodología de CFD contienen tres etapas principales: (1) El pre proceso, que se utiliza para ingresar la geometría del problema, generar la malla, definir los parámetros de flujo y las condiciones de contorno. (2) Un solucionador de flujo, que se utiliza para resolver las ecuaciones que gobiernan el flujo sujeto a las condiciones proporcionadas. (3) Un post proceso, cuya finalidad es manipular los datos y mostrar los resultados en un formato gráfico que sea fácil de leer [35]. En la Figura 18 puede verse la lógica usada para la simulación CFD de este trabajo.

2.3.1 Pre-proceso

El primer paso del pre-proceso es la creación de la geometría que se realizó en el módulo *Geometry* de Fluent. Dicho modulo permite crear el contorno de la tobera con todos los parámetros geométricos establecidos. Posteriormente se define el dominio físico sobre el cual se realizará el mallado, de acuerdo a simulaciones anteriores realizadas en CFD de toberas plug las dimensiones del dominio están en función del diámetro de salida de la tobera d_e [36]. Por lo anterior el dominio varió de $30d_e$ horizontalmente hasta $8d_e$ verticalmente.

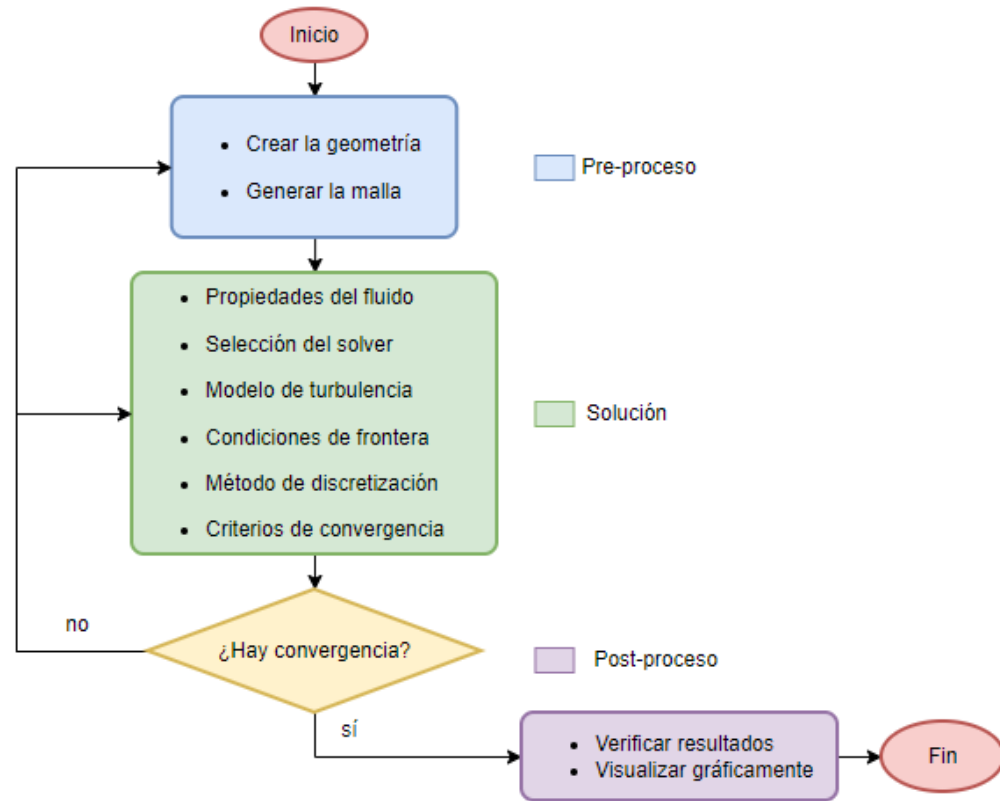


Figura 18: Simulación CFD.

2.3.1.1 Mallado

Se empleará una malla estructurada que es diseñada en Fluent en el módulo *Mesh*. La malla se realiza en dos etapas, en la primera Fluent elabora un mallado asistido dominado por cuadriláteros, posteriormente se realiza un refinado de la malla cerca de las paredes de la tobera para poder obtener suficientes datos de aquella zona, que es donde ocurren los mayores gradientes, de esta manera se puede obtener una mejor resolución en el contorno del número de Mach y la presión sobre la pared de la tobera. La función *Method* del *Mesh* de Fluent permite establecer la figura geométrica con la cual se va realizar el mallado, pudiéndose escoger cuadriláteros triángulos o una combinación de ellos. A partir del *Method* y el número de divisiones preestablecidas en cada uno de los bordes del dominio físico a mallar, se genera una malla que en la mayoría de casos no es muy refinada en zonas centrales, es decir lejos de los bordes, por ello se usa la función *Face Meshing* que nos permite controlar el espesor de la malla en dichas zonas. Se generaron diversas mallas estructuradas y de acuerdo a los resultados un modelo de malla con solución satisfactoria se muestra en la Figura 19. De esta manera se puede observar que la resolución de la malla va disminuyendo a medida que se aleja de la pared de la tobera.

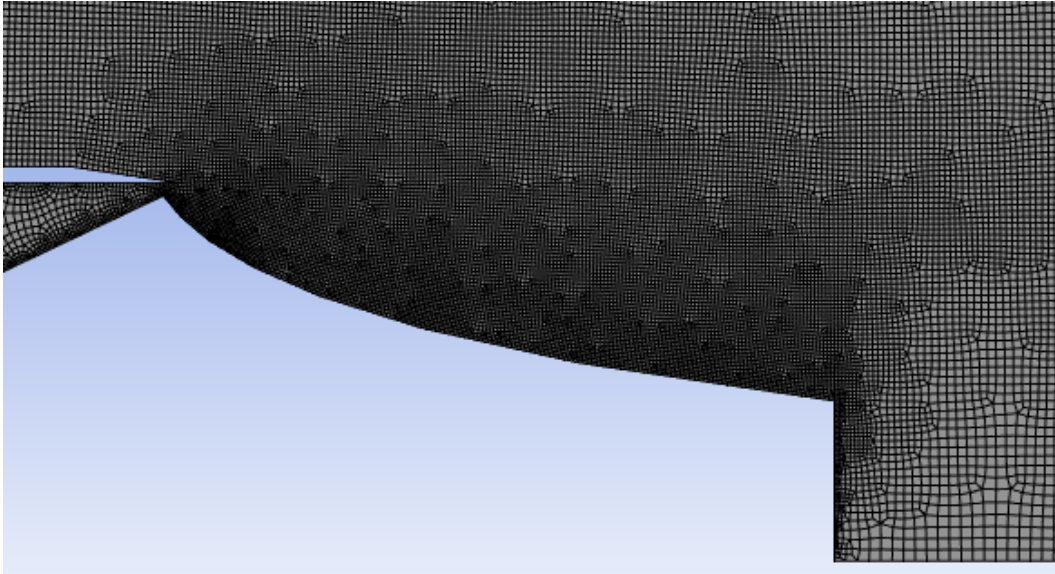


Figura 19: Malla estructurada cerca de la pared de la tobera.

2.3.2 Solución

En esta etapa de la metodología CFD se definen las propiedades físicas del flujo, la forma cómo se van a solucionar las ecuaciones de conservación, el modelo de turbulencia adecuado, las condiciones de frontera, así como el esquema de discretización y el criterio de convergencia. El módulo *setup* de Fluent permite la configuración de los parámetros de solución diferenciando varias categorías.

2.3.2.1 Propiedades del fluido

Como fluido se escogió aire, para calcular la densidad del aire se usará la ecuación de gas ideal. Para calcular la viscosidad del gas se usa el modelo de Sutherland de tres coeficientes [37]. La conductividad térmica y demás propiedades son calculadas en función de la temperatura.

2.3.2.2 Solver

El solver seleccionado es el algoritmo basado en densidad, ha mostrado ser eficiente para flujo compresible supersónico y transónico sin que existan zonas de extensión significativa de baja velocidad. El solver basado en densidad también ha demostrado calcular las propiedades de flujo adecuadamente en presencia de ondas de choque [38]. El algoritmo

basado en densidad resuelve la ecuación de continuidad, momento y energía simultáneamente, posterior a ello resuelve las otras ecuaciones escalares como la turbulencia de manera secuencial. De esta manera el campo de velocidades es calculado a partir de la ecuación de momento, la ecuación de continuidad se usa para calcular el campo de densidad y a partir de la ecuación de estado se calcula el campo de presiones [39].

2.3.2.3 Modelo de turbulencia

El modelo de turbulencia escogido fue el *SST k- ω* como ya se mencionó anteriormente, dicho modelo de turbulencia ha sido ampliamente usado y validado en aplicaciones aeroespaciales, y su buen desempeño en condiciones de gradientes de presión cero y en simulación de capa límite con gradiente de presión adverso. Fluent define por default los valores de las constantes del modelo *SST k- ω* , pero de ser necesario se pueden editar y también es posible habilitar los efectos de compresibilidad del modelo.

2.3.2.4 Condiciones de frontera

Existen dos condiciones de frontera, la primera es en la entrada del flujo y la segunda es en la salida. La condición de frontera especificada en la entrada es la presión en la cámara de combustión $p_c=1,2 \text{ MPa}$ y su temperatura $T_c = 1400 \text{ K}$, valores que serán constantes. La segunda condición de frontera establece la presión y temperatura en la salida, que será igual a la presión y temperatura atmosférica, por tanto, la presión ambiente disminuirá desde $p_a = 101,325 \text{ kPa}$ que es el valor a nivel del mar hasta valores cercanos a $p_a = 10 \text{ kPa}$. Dicha condición de presión atmosférica decreciente es en virtud del ascenso de la tobera por la atmósfera, la temperatura a la salida se considera constante $T_a = 300 \text{ K}$. Cada valor de presión atmosférica tendrá asociado una NPR, que es la relación entre la presión de estancamiento P_{0j} y p_a . P_{0j} se puede aproximar al valor de p_c , que como ya se mencionó será constante, por tanto, la NPR será p_c/p_a , y aumenta a medida que p_a disminuya.

2.3.2.5 Discretización

En el módulo *setup* de Fluent la sección *Solutions* permite establecer los parámetros para definir completamente el esquema de discretización y sus características como se ve en la Figura 20. La primera opción permite escoger la formulación del algoritmo basado en densidad, implícito o explícito. *Flux Type* es una característica del esquema de discretización y es la que posibilita corregir las fluctuaciones de dicho esquema de discretización y hallar correctamente los flujos, la primera opción es ROE-FDS y la segunda es AUSM, se escogió la segunda debido a su exactitud en presencia de ondas de choque [40]. En *Spatial*

Discretization se encuentra *gradient* que define la forma de calcular los gradientes, el escogido es Least Squares Cell-Based Gradient Evaluation debido a que tiene un bajo costo computacional y una precisión aceptable. *Flow*, *Turbulent Kinetic Energy* y *Specific Dissipation Rate* donde se elige el esquema de discretización, son calculados con *Second Order Upwind* debido a su mayor precisión respecto a los esquemas de primer orden.

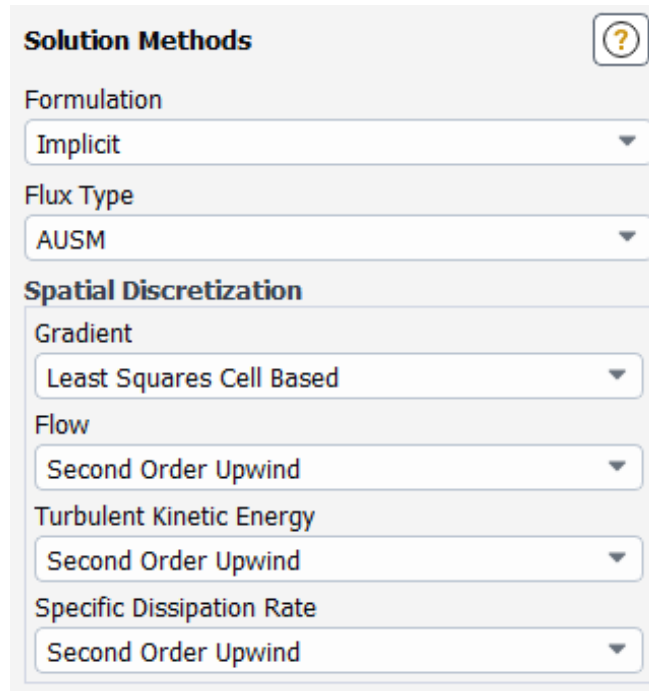


Figura 20: *Task Page* de Fluent para configurar la discretización.

2.3.2.6 Convergencia

La tolerancia de convergencia usada para las simulaciones fue de 10^{-5} que es recomendada por trabajos anteriores para flujo supersónico [41]. De esta manera se considera que el cálculo converge y la iteración finaliza cuando se cumplen los siguientes criterios de convergencia: los residuos de continuidad, velocidad en x, velocidad en y, energía, k y ω menores a 10^{-5} .

2.3.3 Post-proceso

En esta etapa se verifica el sentido físico de los resultados de acuerdo al comportamiento esperado para flujo compresible y el efecto producido por las ondas de choque. Posterior a ello se obtiene del módulo *Results* opción *graphics-contours* el contorno del número de Mach, este contorno permite visualizar gráficamente la distribución en el dominio físico del número de Mach del flujo. También se requiere obtener datos de la presión y el número de

Mach en la pared de la tobera para observar el efecto de las ondas de choque, para esto también en el módulo *Results* opción *Plots-XY Plot* se puede obtener los datos de presión y número de Mach en la pared de la tobera con su respectiva coordenada axial.

2.4 Validación

2.4.1 Datos

Los datos disponibles para llevar a cabo la validación de la simulación CFD del presente trabajo respecto de la simulación original son los de impulso específico versus altitud de vuelo. El impulso específico I_s , que es el impulso total por unidad de peso de propelente. Es una cantidad importante que permite evaluar del rendimiento de un sistema de propulsión de cohetes, similar en concepto al parámetro de millas por galón que se usa con los automóviles [42]. Un valor más alto de impulso específico significa un mejor rendimiento. Considerando un flujo másico constante de propelente la Ecuación 88 permite calcular el impulso específico entregado por la tobera.

$$I_s = \frac{F}{\dot{m}_p} \quad (88)$$

Donde F es el empuje proporcionado por la tobera y \dot{m}_p es el flujo másico de propelente. En el módulo *Results* opción *Reports* Fluent puede calcular la fuerza neta sobre la pared de la tobera y el flujo másico. La altitud de vuelo se puede calcular a partir de la presión atmosférica usando la ecuación barométrica así:

$$p_a(h) = p(0)e^{-\frac{Mgh}{kT_a}} \quad (89)$$

La fórmula barométrica relaciona la presión ambiental p_a con la altura h sobre el nivel del mar, con un gas ideal isotérmico de masa molecular M , la presión $p(0)$ es la presión absoluta a nivel del mar, g es la aceleración de la gravedad, k es la Constante de Boltzmann y T_a la temperatura. Aunque la Ecuación 89 es simple, a partir de una temperatura constante, se aplica razonablemente bien en la troposfera más baja, es decir, para altitudes de hasta 6 km, con un error inferior al 5%. También en la estratósfera, hasta 20 km con $T_a=217 K$ [43].

3 Resultados

3.1 Error computacional

La metodología de verificación del error utilizada es la simple. Se basa en el estudio de la evolución global o local de una variable debido al refinamiento de la malla. Las variables de análisis son el flujo másico \dot{m} que pasa a través de la tobera y la presión de salida p_e . El error computacional se analizó con una serie de valores de presión atmosférica decrecientes lo que tiene asociado una respectiva NPR como se mencionó en la sección 2.3.2.4. El cálculo del error de la simulación se halla mediante la Ecuación 90.

$$Err = \left| \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{\gamma_i} \right| * 100 \leq 3\% \quad (90)$$

Donde *Err* corresponde al porcentaje de error, γ es la variable en análisis, e *i* corresponde a la última iteración desarrollada, con una malla de número de celdas o volúmenes de control específicos.

En los Cuadros 4 y 5 se aprecia el análisis del error para la tobera plug completa y truncada al 40% respectivamente, para $p_a = 101,325 \text{ kPa}$ (NPR=11,84).

Iteración	Núm. celdas	$\dot{m}[\text{kg/s}]$	$p_e[\text{kPa}]$	Error máx.
1	20992	11,51923	24452,63	7,33%
2	54203	12,43021	26032,01	4,67%
3	85234	13,00264	27307,83	0,46%
4	97208	13,06262	27388,26	-

Cuadro 4: Error máximo proceso iterativo, tobera plug completa, NPR=11,84.

Iteración	Núm. celdas	$\dot{m}[\text{kg/s}]$	$p_e[\text{kPa}]$	Error máx.
1	22324	11,50471	24302,01	7,38%
2	56742	12,42161	25920,82	4,46%
3	87839	13,00153	27029,17	0,27%
4	99526	13,02749	27102,83	-

Cuadro 5: Error máximo proceso iterativo, tobera plug truncada al 40%, NPR=11,84.

Se calculo el respectivo error máximo disminuyendo la NPR, lo cual se puede apreciar en las Figuras 21 y 22 para la tobera completa y truncada al 40% respectivamente.

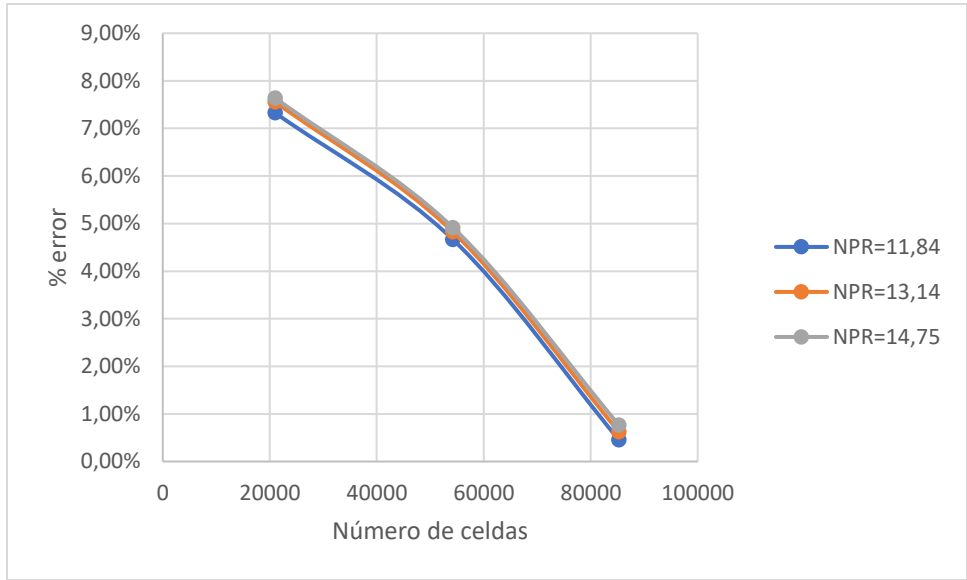


Figura 21: Error computacional tobera plug completa con varios NPR.

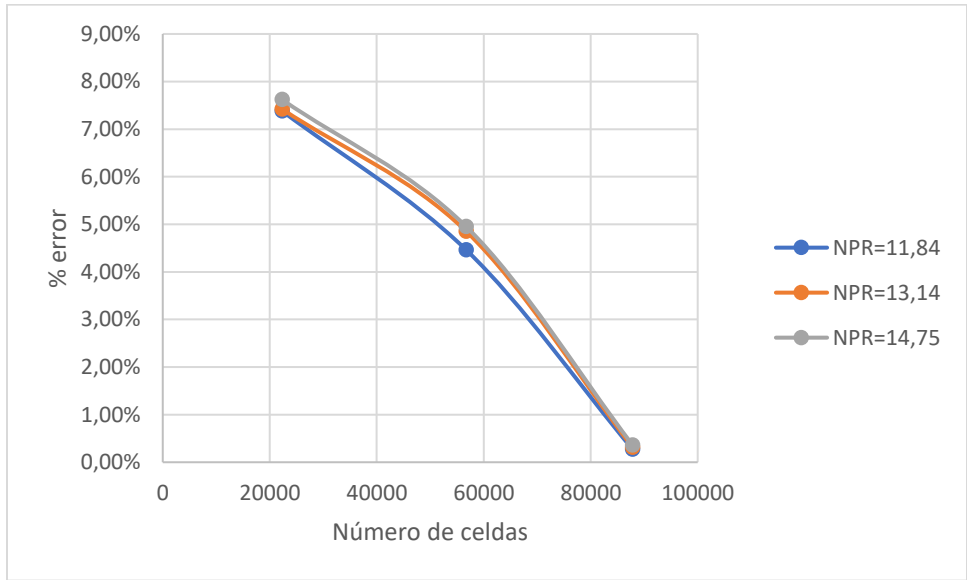


Figura 22: Error computacional tobera plug truncada al 40% con varios NPR.

Las Figuras 21 y 22 indican que la NPR no afecta significativamente el error computacional, lo cual lleva a concluir considerando también los Cuadros 4 y 5 que las mallas con 85234 celdas para las tobera plug completa y la malla con 87839 celdas para la tobera plug truncada al 40% tienen el mejor desempeño, por tanto se eligen para el desarrollo de la simulación CFD. El error computacional disminuye debido al refinamiento de la malla, en las regiones mas cercanas a la pared de la tobera, es decir se incrementa el número de volúmenes de control en dichas regiones. En las regiones escogidas para el refinamiento se presentan los

mayores gradientes de presión, debido a las ondas de choque y al brusco cambio de presión en la garganta de la tobera.

3.2 Características de la malla

De acuerdo a lo dicho en la sección 2.3.1.1 el módulo *Mesh* de Fluent elabora una malla estructurada de cuadriláteros de acuerdo al algoritmo de la función *Face Meshing*. El algoritmo de dicha función establece una clasificación de vértices, teniendo tres tipos de vértices así: finales, lados y esquinas. Los finales solo conectan una celda, los lados conectan dos celdas y las esquinas tres celdas, de esta manera se genera una malla proporcionada. Fluent cuenta con las opciones *Check* y *Quality* las cuales nos arrojan un informe del estado y calidad de la malla, dicha información se puede ver en el Cuadro 6.

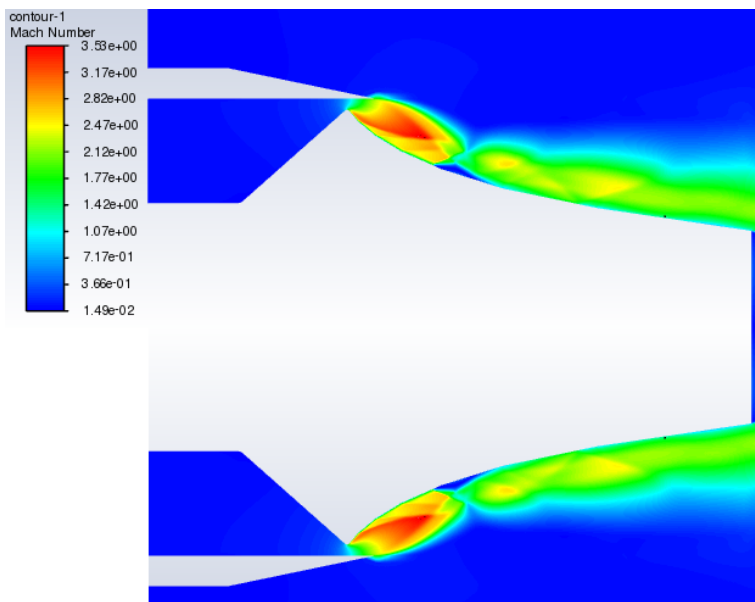
Parámetro	Valor
Ortogonalidad mínima	0,54
Oblicuidad máxima	0,71
Relación de aspecto máxima	4,51

Cuadro 6: Reporte de calidad de la malla usada.

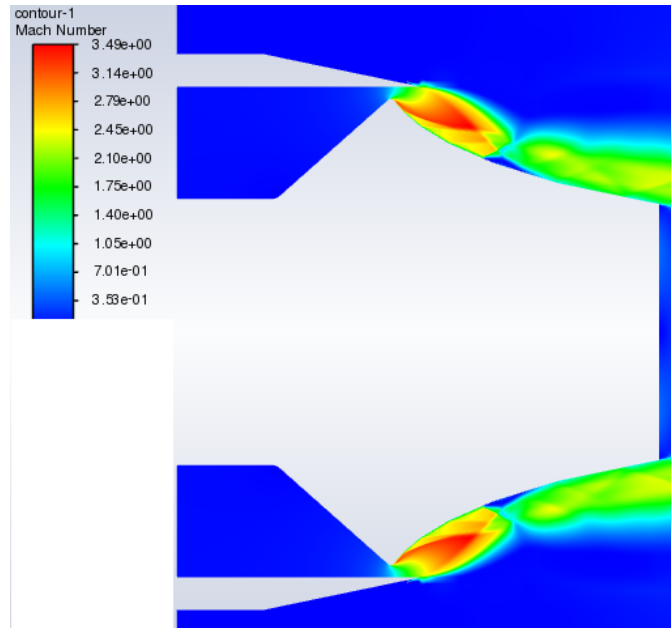
De acuerdo a los resultados del reporte de la malla del Cuadro 6, se puede concluir que la malla tiene la calidad adecuada para ejecutar la simulación CFD.

3.3 Simulación CFD

De acuerdo a la metodología CFD expuesta en la sección 2.3, se simuló el flujo en la tobera plug completa y troncada al 40%. La simulación se llevó a cabo en estado estable y la geometría es 2D axisimétrica. Se obtuvieron los siguientes resultados del contorno de número de Mach (ver Figuras 23, 24, 25, 26).

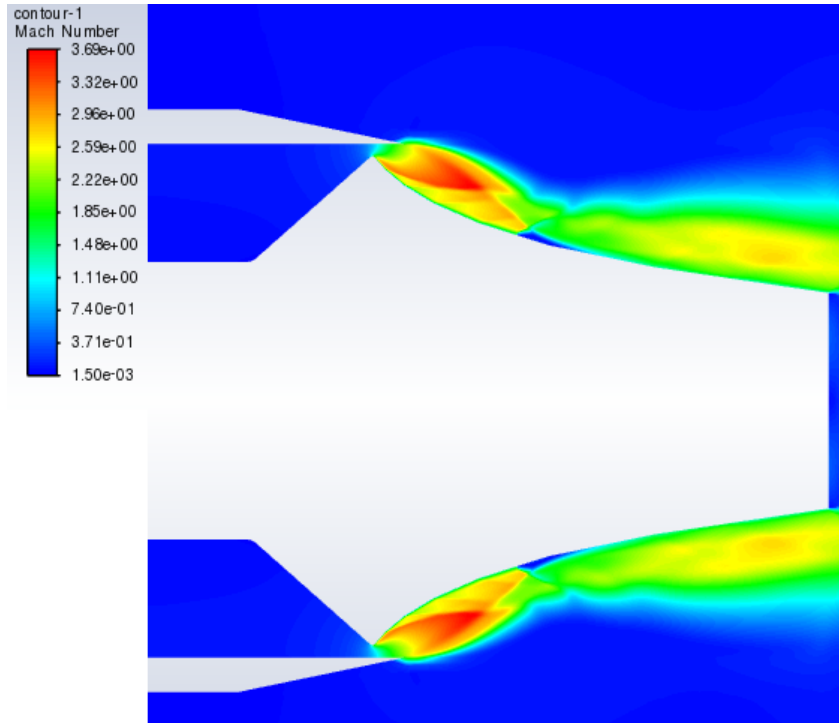


(a)

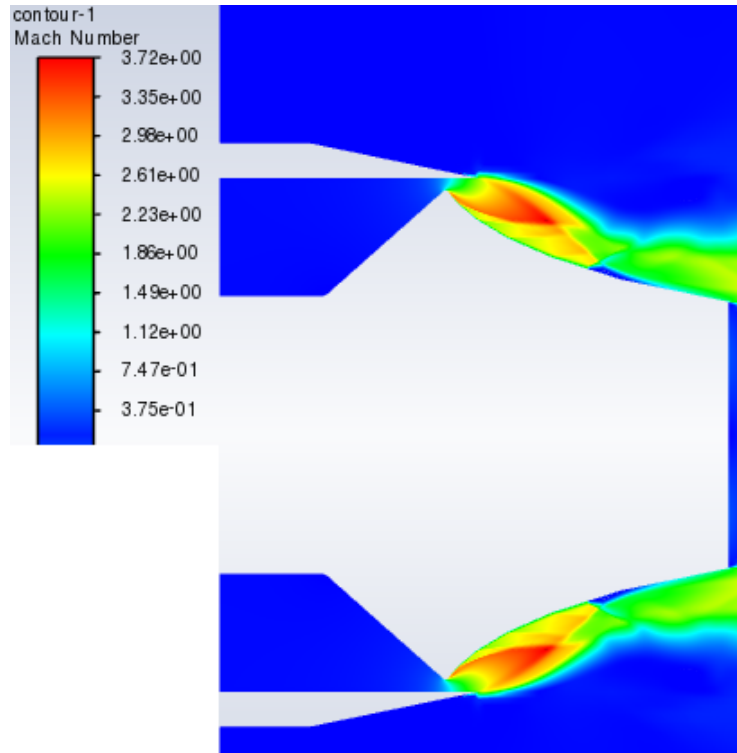


(b)

Figura 23: Estructura de flujo en la tobera plug con $P_a = 101.325 [kPa]$, NPR=11.84. (a) longitud total; (b) truncada al 40%, Contorno de número de Mach.

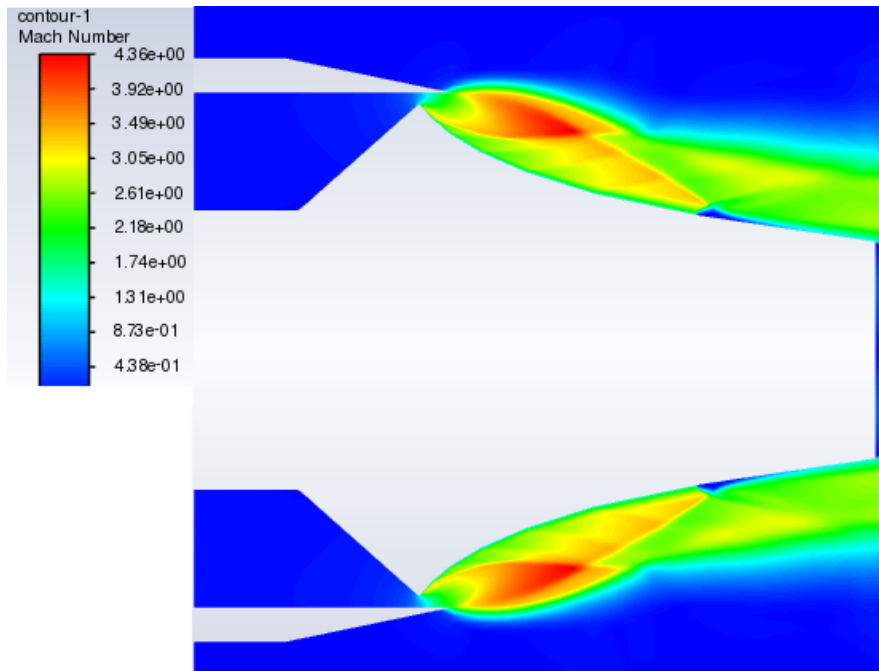


(a)

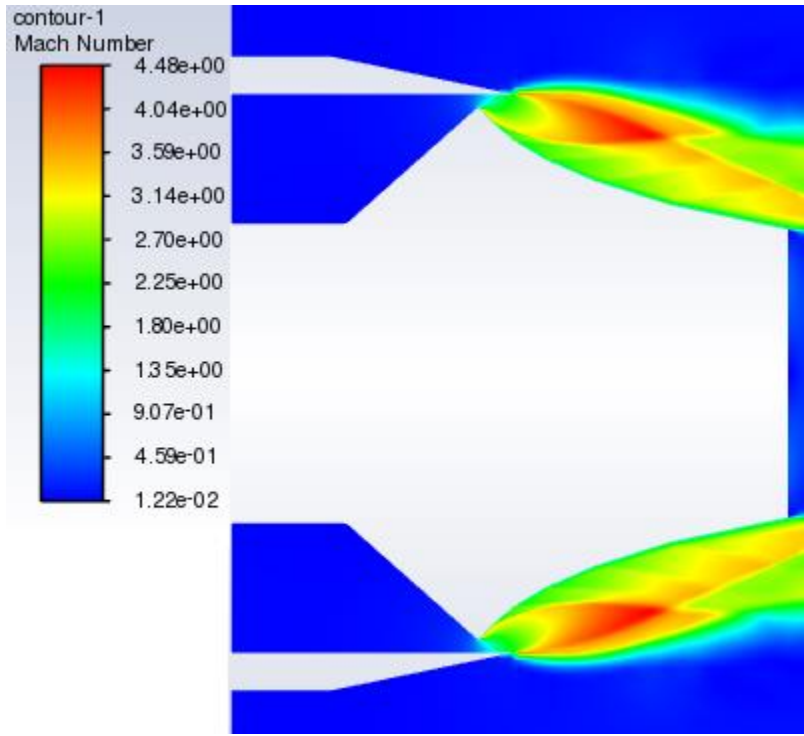


(b)

Figura 24: Estructura de flujo en la tobera plug con $P_a = 71.325 [kPa]$, $NPR=16.82$. (a) longitud total; (b) truncada al 40%, Contorno de número de Mach.

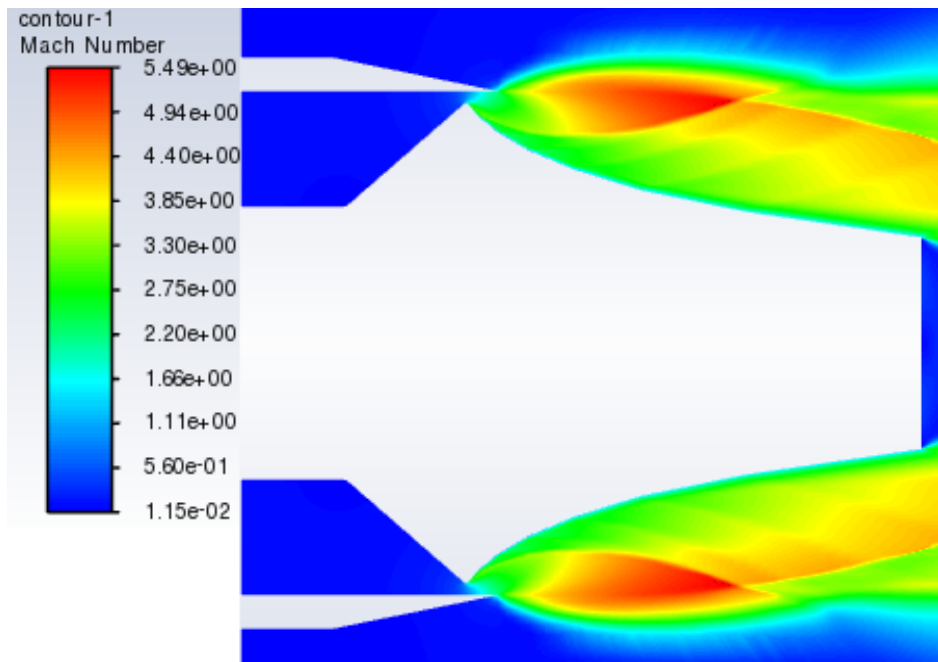


(a)

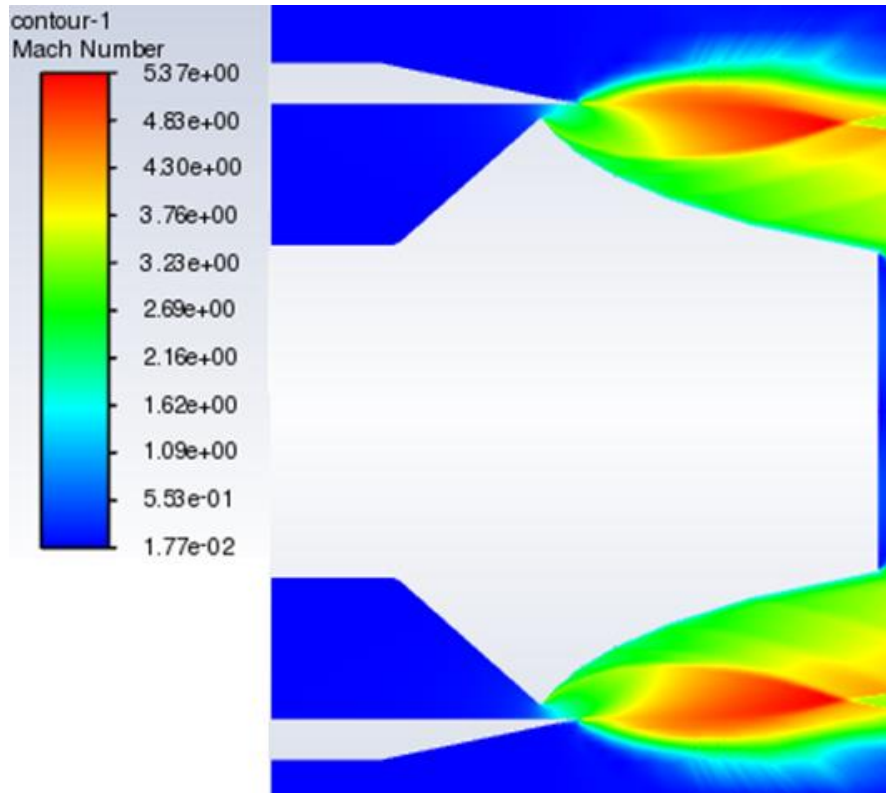


(b)

Figura 25: Estructura de flujo en la tobera plug con $P_a = 31.325 [kPa]$, $NPR=38.31$. (a) longitud total; (b) truncada al 40%, Contorno de número de Mach.



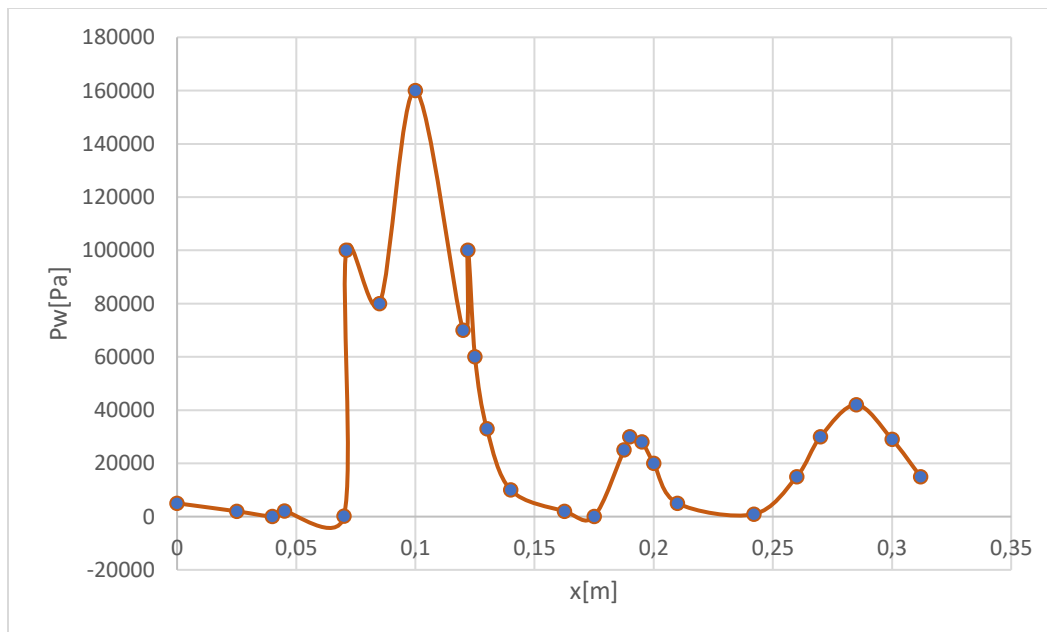
(a)

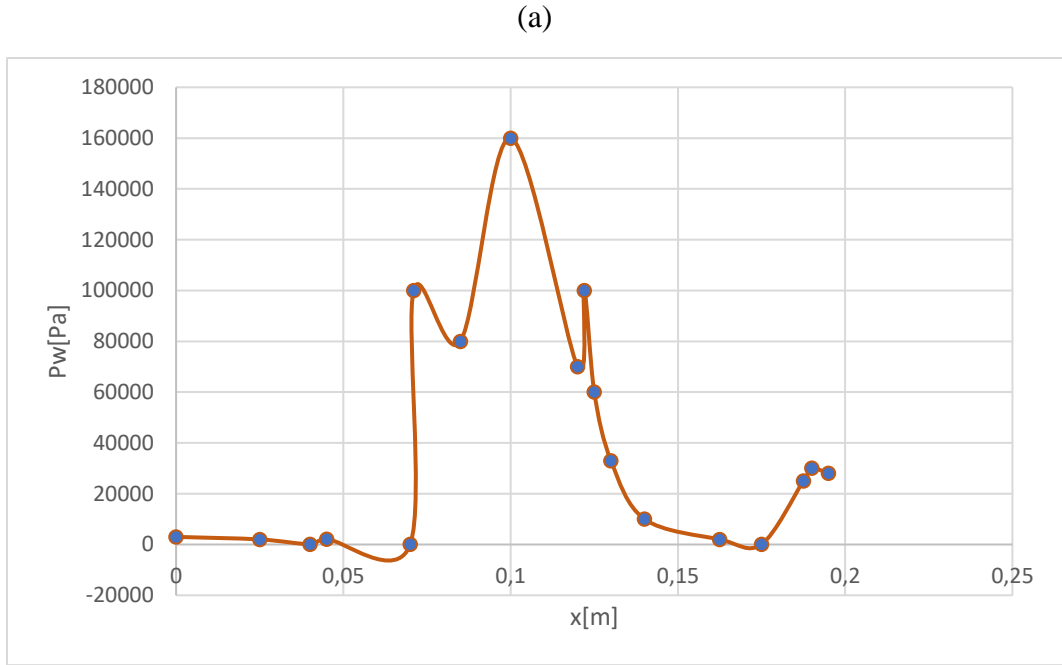


(b)

Figura 26: Estructura de flujo en la tobera plug con $P_a = 13250$ [kPa], $NPR=90,6$. (a) longitud total; (b) truncada al 40%, Contorno de número de Mach.

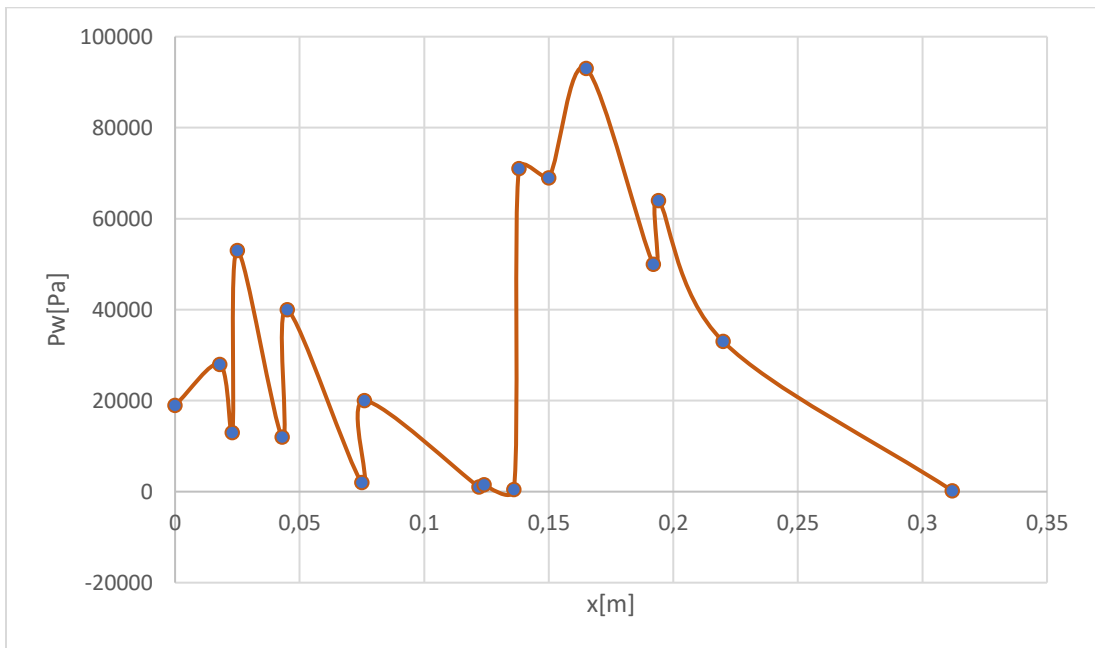
También se presenta el efecto de las ondas de choque sobre la pared de la tobera, lo que genera un perfil de presión irregular (ver Figuras 27 y 28).



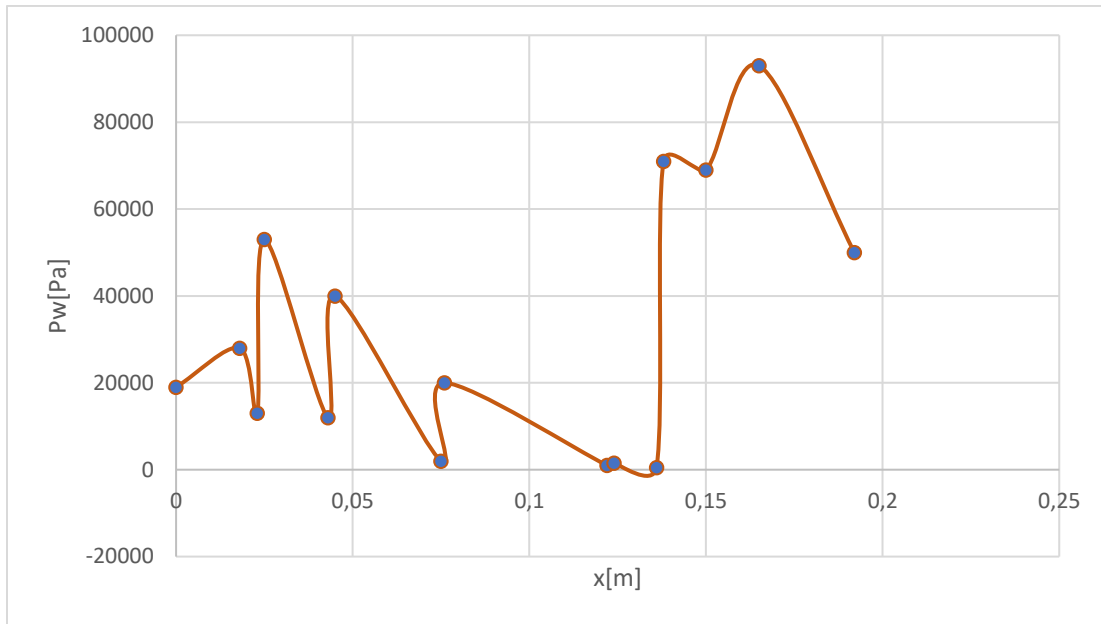


(b)

Figura 27: Presión estática sobre la pared de la tobera p_w , con con $P_a = 101.325 [kPa]$, NPR=11.84. (a) longitud total; (b) truncada al 40%.



(a)



(b)

Figura 28: Presión estática sobre la pared de la tobera p_w , con con $P_a = 51,325 [kPa]$, NPR=23,38. (a) longitud total; (b) truncada al 40%.

4 Análisis de resultados

4.1 Influencia de la NPR

La Figura 23 *a)*, muestra el contorno de número de Mach para la tobera plug de longitud completa y *b)*, truncada al 40%, a una presión atmosférica de 101,325 [kPa] o NPR = 11,84, en esta figura se pueden ver las características del flujo como las ondas de choque de expansión, y el abanico de sobre expansión. Se aprecia que las ondas de choque de expansión provenientes de la superficie de la tobera tienen mayor intensidad cerca de la garganta. En dicha zona también se aprecia la combinación con las ondas de choque que provienen del interior de la carcasa de la tobera y las ondas de menor intensidad generadas en la superficie de la tobera, lo cual produce ondas de compresión también de baja intensidad.

En la Figura 24 se visualiza como el abanico de sobre expansión se va moviendo desde el interior de la carcasa de la tobera hasta el borde de salida. Esto debido a que el aumento de la NPR implica la disminución de la presión atmosférica lo que genera que la zona de alto gradiente de velocidad se aleje de la garganta. Dicho efecto también trajo el aumento de la presión estática en dicha zona.

La zona de desprendimiento de la capa límite que genera recirculación, se puede diferenciar de las otras por presentar números de Mach < 1, y que están presentes en las Figuras 23, 24 y 25 *a)*. La principal causa de dicho desprendimiento es la reflexión de las ondas de choque de gran intensidad del interior de la carcasa de la tobera con ondas de choque normales producidas en la superficie de la tobera, en dicha reflexión se presenta un punto triple donde están presente las ondas incidentes y la reflejada.

Es muy similar el comportamiento del flujo en la tobera plug truncada al 40% respecto de la tobera plug de longitud completa, en términos de la estructura de flujo representada por el contorno del número de Mach. De acuerdo a lo anterior, la ubicación de la zona en la tobera para las dos configuraciones (completa y truncada), donde ocurre el desprendimiento de la capa límite es la misma respecto de la garganta, de acuerdo a las Figuras 23 y 24. Pero cerca de NPR = 38, el desprendimiento de la capa límite desaparece, debido a que la tobera truncada tiene menor longitud (ver Figura 25 *b)*), es decir el truncamiento en este caso específico (geometría de tobera) evitó la recirculación de flujo sobre la superficie de la tobera.

Otro efecto sobre el flujo en las dos configuraciones de tobera para valores de NPR > 50, es el fenómeno de la sub expansión en la entrada de la tobera de acuerdo a la Figura 26, generando que el chorro de flujo se expanda superando los límites de la tobera.

4.2 Efecto de las ondas de choque en la presión de pared

Las ondas de choque en todas sus variantes tienen un efecto sobre flujo, generan aumento de presión temperatura y densidad, y disminución de la velocidad (número de Mach). Por lo tanto, las ondas de choque aumentan la presión en la pared de la tobera p_w , en ciertas zonas, lo que genera una fluctuación de presión a lo largo de la pared de la tobera y por tanto perfiles de presión irregulares aguas abajo.

En las Figuras 27 y 28 con diferentes NPR se aprecia la fluctuación de la presión estática a lo largo de la pared de la tobera, para longitud completa *a*) y truncada al 40% *b*). A medida que la NPR aumenta trae consigo como se mencionó en la sección anterior, que el abanico de expansión se mueva hacia el borde de la carcasa de la tobera, generando también el desplazamiento de las ondas de choque internas de la carcasa. Esto a su vez provoca la disminución de la presión máxima en la zona de desprendimiento de la capa límite, debido a la disminución de la intensidad de las ondas de choque.

5 Validación

Los resultados obtenidos para realizar la validación son la fuerza neta ejercida sobre la tobera y el flujo másico a través de la misma. Como se mencionó en la sección 2.4.1 los datos disponibles de la simulación original son impulso específico y altitud de vuelo.

5.1 Cálculo del empuje

Para calcular el empuje F producido por la tobera usamos la Ecuación 84, la cual es similar a la usada en el cálculo del empuje de la mayoría de las toberas.

$$F = \dot{m}v_e + (p_e - p_a)A_e + F_b \quad (84)$$

Donde \dot{m} es el flujo másico, v_e , p_e y A_e son la velocidad, presión y área de salida, p_a es la presión atmosférica. Los dos primeros términos de la derecha de la Ecuación 84 son los más usados para el cálculo del empuje en toberas, y se pueden calcular con los datos obtenidos de la simulación CFD. El tercer término F_b es la fuerza debida a la distribución de presión estática sobre la superficie y la base de la tobera, dicho término también puede ser obtenido en el módulo *Results* opción *Reports-Forces*, Fluent integra por toda la superficie de la tobera la fuerza neta.

Fluent integra a través de la superficie de salida de la tobera y calcula el flujo másico, con la opción *Results-Reports-Surface integrals*.

5.2 Resultados tobera plug completa

Se realizó el cálculo del impulso específico entregado por la tobera plug completa, para un conjunto de valores decrecientes de presión atmosférica, y como se mencionó en la sección 2.4, cada valor de presión atmosférica está asociada a una altitud de vuelo h . De acuerdo a lo anterior se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 29, donde también se presentan los resultados de la simulación original. Los datos muestran muy poca diferencia entre los datos obtenidos en la simulación actual respecto de la original. En el Cuadro 7 se indican los porcentajes de errores relativos respecto de la simulación original del impulso específico I_s , obtenidos para diferentes altitudes de vuelo. Del Cuadro 7 se puede establecer que el porcentaje de error relativo máximo entre la simulación actual y la original es menor al 2,5%, lo que indica que la simulación llevada a cabo en el presente trabajo tiene un comportamiento muy similar a la simulación original. Y aunque han transcurrido varias décadas la solución del flujo supersónico a través de la tobera plug completa no muestra mayores variaciones, llevándola a cabo en un software CFD reciente.

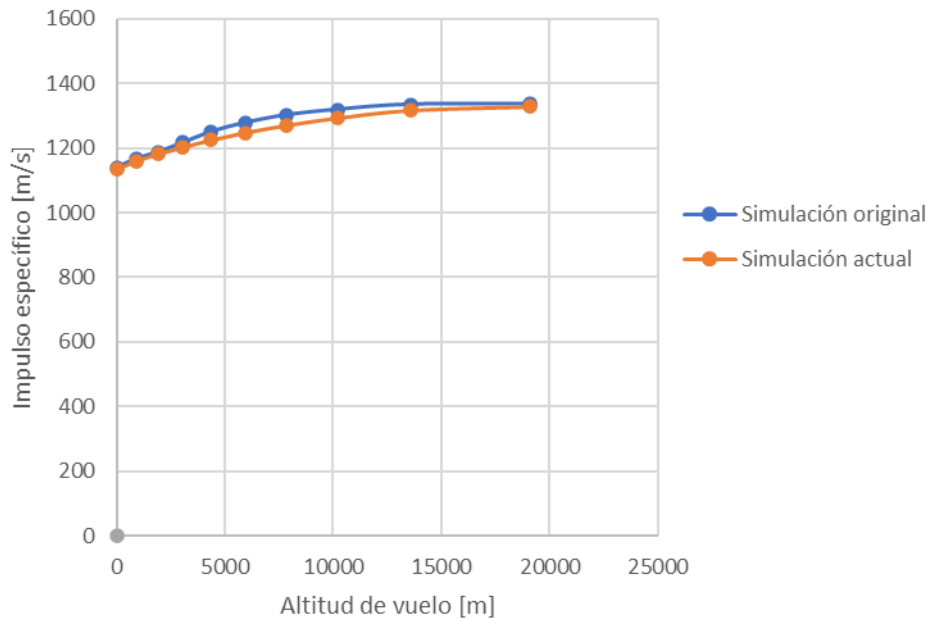


Figura 29: Desempeño de la tobera plug completa.

h[m]	% error
0	0,48
906,1	0,58
1917,4	0,54
3061,5	1,09
4378,7	2,06
5931,0	2,39
7820,7	2,45
10236,6	1,99
13589,7	1,39
19108,3	0,60

Cuadro 7: % error relativo de I_s para varias altitudes de la tobera plug completa.

5.3 Resultados tobera plug truncada

El cálculo del impulso específico para la tobera plug truncada al 40% se realizó con la misma metodología al de la tobera plug completa para varias altitudes de vuelo. Los resultados son mostrados en la Figura 30, y se evidencia que hay una diferencia considerable entre la simulación actual y la original a partir de una altitud de vuelo cercana a los 3060 [m]. La caída súbita del impulso específico en la tobera plug truncada, para la simulación original se debe a pérdidas producidas para valores de NPR cercanos a los de diseño, ello ocurre cuando el truncamiento es alto, lo que aumenta el área de la base, lugar donde se presentan presiones

inferiores a la atmosférica generando pérdida de empuje. El truncamiento de la tobera en la simulación original es del 20%, por ello en el presente trabajo se escogió un truncamiento del 40% para evitar pérdidas de empuje. De acuerdo a lo anterior la Figura 30 confirma que efectivamente el truncamiento del 40% previno la pérdida de empuje en la tobera plug truncada. El cuadro 8 muestra el porcentaje de error relativo de I_s entre la simulación actual y la original para la tobera plug truncada. Lo que indica que hay gran similitud entre las dos simulaciones hasta que se produce la reducción abrupta del impulso específico, causada por el elevado truncamiento de la simulación original.

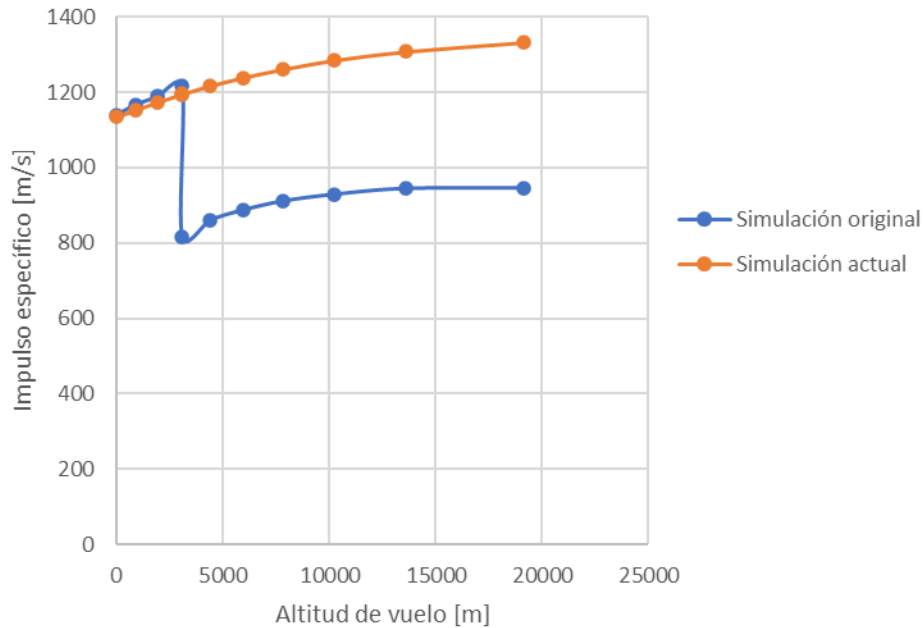


Figura 30: Desempeño de la tobera plug truncada al 40%.

h[m]	% error
0	0,48
906,1	1,19
1917,4	1,23
3061,5	1,79
4378,7	46,34
5931,0	41,29
7820,7	39,48
10236,6	38,26
13589,7	38,24
19108,3	38,39

Cuadro 8: % error relativo de I_s para varias altitudes de la tobera plug truncada al 40%.

5.4 Flujo másico

La Figura 31 muestra la variación del flujo másico \dot{m} para las dos configuraciones de tobera, a medida que aumenta la altitud de vuelo. La tobera plug completa presenta una disminución del 7,6% de \dot{m} respecto de su valor inicial, mientras que en la troncada al 40 % la reducción de \dot{m} es del 7%. La diferencia máxima relativa entre las dos configuraciones de tobera es menor a 1%.

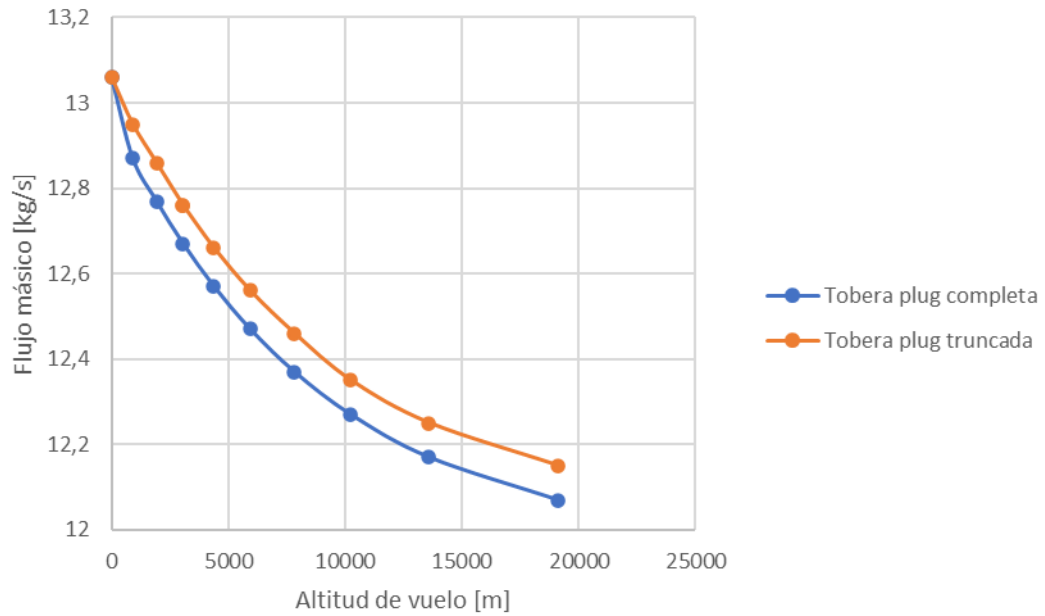


Figura 31: Flujo másico a través de la tobera plug.

Conclusiones

Los resultados obtenidos en esta investigación señalan que se puede diseñar una tobera plug truncada al 40% sin una disminución del impulso específico I_s durante el vuelo. Es decir, sin pérdidas de empuje en condiciones de presión atmosférica decreciente.

De acuerdo a lo anterior, el diseño de la geometría de la tobera plug truncada al 40%, con los parámetros geométricos propuestos, no presenta una caída del impulso específico a medida que asciende por la atmósfera, como se puede evidenciar en la Figura 30. El impulso específico entregado por la tobera plug completa es mayor a la truncada al 40% (ver Figura 30 y 31), pero la diferencia entre las dos configuraciones es menor al 3%.

La simulación fluidodinámica de las dos configuraciones de tobera plug, indica que la disminución de la presión atmosférica genera la transición de flujo sobre expandido a flujo sub expandido, según se aprecia de la Figura 23 a la 26. La disminución de la presión atmosférica también ocasiona que los abanicos de expansión sean desplazados hacia afuera de la carcasa de la tobera, lo que genera el desplazamiento de los picos máximos de presión en la pared de la tobera. Las ondas de choque afectan el comportamiento del flujo en la tobera, generando zonas de recirculación y perfiles de presión irregulares en la pared de la tobera.

Los resultados de la simulación fluidodinámica de la tobera truncada al 40% genera una mejora sustancial en el impulso específico proporcionado, respecto de la simulación original que empleó un truncamiento al 20% (ver Figura 30). Con la escogencia del truncamiento al 40% el impulso específico mejoro entre 38 y 45% con respecto del truncamiento al 20%. El truncamiento al 40% no afecta significativamente el flujo en la tobera plug. Primero se aprecia que la diferencia del flujo másico entre las dos configuraciones es menor al 2% de acuerdo a la Figura 31, segundo si se comparan los contornos de número de Mach, se observa que la diferencia de valores en el número de Mach está entre 2 y 4% en la zona de la salida de la garganta. Y tercero la zona de recirculación del flujo se presenta en la misma coordenada axial con tamaños similares para las dos configuraciones.

De acuerdo a lo anterior se considera que la tobera plug truncada al 40%, simulada en el presente trabajo es una alternativa adecuada para ser empleada en la propulsión de vehículos aeroespaciales, en términos de impulso específico y empuje entregados. Aprovechando un truncamiento al 40% que hacen al dispositivo más liviano sin socavar su capacidad de producir empuje.

Bibliografía

- [1] E. Besnard, H. Hu, T. Mueller, J. Garvey, “Design, Manufacturing and Test of a Plug Nozzle Rocket Engine”, *AIAA J. Air Transp.*, Vol. 2, No. 4038, pp. 1-9, (2002). Available: https://www.researchgate.net/publication/268048337_Design_Manufacturing_and_Test_of_a_Plug_Nozzle_Rocket_Engine
- [2] K. Chutkey, N. Bose, N. Balakrishnan, “Flowfield Analysis of Linear Plug Nozzle”, *Space and Ro J.*, Vol. 6, No. 49, pp. 1109-1119, (2012). Available: https://www.researchgate.net/publication/258671882_Flowfield_Analysis_of_Linear_Plug_Nozzle
- [3] V. Zmijanovic, A. Chpoun, B. Rasuo, “Flow separation modes and side phenomena in an overexpanded nozzle”, *FME. J.*, Vol. 40, No. 3, pp. 111-118, (2012). Available: https://www.researchgate.net/publication/236109409_Flow_separation_modes_and_side_phenomena_in_an_overexpanded_nozzle
- [4] S. Verma, “Performance Characteristics of an Annular Conical Aerospike Nozzle with Freestream Effect”, *J. Propul.*, Vol. 25, No. 3, pp. 783-794, (2009). Available: https://www.researchgate.net/publication/245435484_Performance_Characteristics_of_an_Annular_Conical_Aerospike_Nozzle_with_Freestream_Effect
- [5] N. Kumar, D. Antony, M. Gopalsamy, R. Krishnaraj, C. Viswanadh, “Design and Optimization of Aerospike nozzle using CFD”, IOP Conf. Ser.: Mater, Orlando, USA, pp. 2-30, (2017). Available: https://www.researchgate.net/publication/320438795_Design_and_Optimization_of_Aerospike_nozzle_using_CFD
- [6] Huzel, D. K., and Huang, D. H., “Design of Liquid Propellant Rocket Engines”, NASA Science and Technical Information Office, Washington D.C., pp. 89–95, (1967). Available: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19710019929>
- [7] Ruf, J. H., and McConnaughey, P. K., “The Plume Physics Behind Aerospike Nozzle Altitude Compensation and Slipstream Effect”, *AIAA J. Air Transp.*, pp. 2-7, (1997). Available: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.1997-3218>
- [8] M. He, “Numerical investigation of flow separation behavior in an over-expanded annular conical aerospike nozzle”, *Chin. J. Aeronaut.*, Vol. 34, pp. 2-18, (2015). Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1000936115001223>
- [9] P. Nair, A. Suryan, H. Kim, “Computational study on flow through truncated conical plug nozzle with base bleed”, *Propul. Power Res.*, Vol. 8, No. 2, pp. 108–120, (2019). Available: https://www.researchgate.net/publication/331535977_Computational_study_on_flow_through_truncated_conical_plug_nozzle_with_base_bleed
- [10] C. Aukerman, “Plug nozzles - the ultimate customer driven propulsion system,” *27th Joint Propulsion Conference*, Sacramento, USA, (1991).
- [11] Corda S, Neal B, Moes T, Cox T, Monaghan R, Voelker L, Corpening G, Larson R, “FLIGHT TESTING THE LINEAR AEROSPIKESR-71 EXPERIMENT (LASRE)”, *NASA Dryden Flight Research Center*, (1998). Available:

- https://www.researchgate.net/publication/2421935_Flight_testing_the_linear_aerospike_S_R-71_experiment_LASRE
- [12] G. Hagemann, H. Immich, T.V. Nguyen, G.E. Dumnov, “Advanced rocket nozzles”, *J. Propul.*, Vol. 14, No. 5, pp. 620–634, (1998). Available: https://www.researchgate.net/publication/224796963_Advanced_Rocket_Nozzles
- [13] G. V. R. Rao, “Exhaust nozzle contour for optimum thrust”, *J. Jet. Propul.*, Vol. 28, No. 6, pp. 377–382, (1958). Available: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/8.7324?journalCode=jjp#:~:text=A%20method%20for%20designing%20the,on%20the%20nozzle%20is%20maximized>
- [14] G. Angelino, “Approximation Method for Plug Nozzle Design”, *AIAA J. Air Transp.*, Vol. 2, No. 10, pp. 1834-1835, (1964). Available en: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/3.2682?journalCode=aiaaj>
- [15] Haif. S, Kbab. H, Bnekhedda. A, “Design and Numerical Analysis of a Plug Nozzle”, *Advances in Military Technology.*, Vol. 17, No. 1, pp. 17-32, (2022). Available: <https://doi.org/10.3849/aimt.01523>
- [16] B. R. Munson, T. H. Okiishi, W. W. Huebsch, A. P. Rothmayer, *Fundamentals of fluid mechanics*, 7th Edition, Wiley, Danvers, 2013.
- [17] B. J. Cantwell, *Fundamentals of Compressible Flow*. Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, 2022.
- [18] H. W. Liepman, A. Roshko, *Elements of gasdynamics*, Unabridged Dover, Mineola, 2001.
- [19] F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish, *The Finite Volume Method in Computational Fluids Dynamics*, Springer, Switzerland, 2016.
- [20] R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot, *Transport phenomena*, 2nd Edition, Wiley, USA, 2006.
- [21] H. K. Versteeg, W. Malalasekera, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*, 2nd Edition, Pearson Education, Harlow, 2007.
- [22] Deva Kowsik, V. Gopala (2013) "Thrust Force Analysis of Spike Bell Nozzle", *International Journal of Applied Research in Mechanical Engineering*: Vol. 2., No. 10, pp. 274-279, (2013). Available: <https://www.interscience.in/ijarme/vol2/iss4/10>
- [23] J. M. McDonough, *Introductory Lectures on Turbulence*. Departments of Mechanical Engineering and Mathematics, University of Kentucky, 2007.
- [24] S. Noori, A. Shahrokhi, “Flow Field Characteristics of an Aerospike Nozzle Using Different Turbulence Models”, *Iranian Aerospace Society*, Vol. 8, No. 2, pp. 127-133, (2011). Available: https://jast.ias.ir/article_51609_68de6b04dc42f782bf9106abfbe0ce93.pdf
- [25] K. C. Hunter, “Experimental, theoretical and computational investigation of separated nozzle flows”, *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Propulsion Conference*, Cleveland, USA, pp. 102-122, (1998).
- [26] J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1995.
- [27] I. Sadreghighi, “Structure Meshing for CFD”, *ResearchGate*, (2022). Available: <https://www.researchgate.net/publication/339295881>
- [28] S. J. Owen, *A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology*. Department of Civil and Environmental Engineering, Carnegie Mellon University, 2000.

- [29] I. Sadreghighi, “Unstructure Meshing for CFD”, *ResearchGate*, (2022). Available: https://www.researchgate.net/publication/339285304_Unstructured_Meshing_for_CFD
- [30] D. J. Mavriplis, “UNSTRUCTURED GRID TECHNIQUES”, *Annual Reviews Inc*, Vol. 1, No. 29, pp. 473-514, (1997). Available: https://home.gwu.edu/~chliang/mae286/Mavriplis_annurev.fluid.29.1.pdf
- [31] F. P. Preparata, M. I. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [32] C. Yen, H. Zhongxi, Z. Bingjie, G. Zheng, X. Boting, “Validation for Aerodynamic Performance on Over-Expanded State of Single Expansion Ramp Nozzle Configuration”, *Aerospace*, Vol. 9, No. 11, (2022). Available: <https://doi.org/10.3390/aerospace9110715>
- [33] A. Aabid, S. A. Khan, M. Baig, “Numerical Analysis of a Microjet-Based Method for Active Flow Control in Convergent-Divergent Nozzles with a Sudden Expansion Duct”, *Fluid Dynamics and Materials Processing*, Vol. 18, No. 6, (2022). Available: https://www.researchgate.net/publication/361184539_Numerical_Analysis_of_a_Microjet-Based_Method_for_Active_Flow_Control_in_Convergent-Divergent_Nozzles_with_a_Sudden_Expansion_Duct#pf18
- [34] S. Noori, A. Shahrokhi, “Flow Field Characteristics of an Aerospike Nozzle, Using Different Turbulence Models”, *JAST*, Vol. 8, No. 2, pp. 127-133, (2011). Available: https://jast.ias.ir/article_51609_68de6b04dc42f782bf9106abfbc0ce93.pdf
- [35] N. Ashgriz, J. Mostaghimi, *An Introduction to Computational Fluids Dynamics*, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Toronto, 2018.
- [36] P. P. Nair, A. Suryan, H. D. Kim, “Computational study on flow through truncated conical plug nozzle with base bleed”, *Propulsion and Power Research*, Vol. 8, No. 2, pp. 108-120, (2019). Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212540X19300112>
- [37] N. H. Zuraidi, S. A. Khan, A. Aabid, M. Baig, “Passive Control of Base Pressure in a Converging-Diverging Nozzle with Area Ratio 2.56 at Mach 1.8”, *Fluid Dynamics Materials Processing*, Vol. 19, No. 3, pp. 807-829, (2022). Available: https://www.researchgate.net/publication/363925478_Passive_Control_of_Base_Pressure_in_a_Converging-Diverging_Nozzle_with_Area_Ratio_256_at_Mach_18
- [38] Y. Luan, M. Olzmann, F. Magagnato, “Simulation of a Shock Tube with a Small Exit Nozzle”, *Journal of Thermal Science*, Vol. 27, No. 1, pp. 1-5, (2018). Available: https://www.researchgate.net/profile/Franco-Magagnato/publication/322833797_Simulation_of_a_shock_tube_with_a_small_exit_nozzle/links/5a743585aca2720bc0dc8405/Simulation-of-a-shock-tube-with-a-small-exit-nozzle.pdf
- [39] L. Mangani, W. Sanz, M. Darwish, “Comparing the performance and accuracy of a pressure-based and a density-based coupled solver”, *16th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, Honolulu, USA, (2016).
- [40] S. Phongthanapanich, K. Takayama, “A Comparison of the Roe’s FDS, HLLC, AUFS, and AUSMDV+ Schemes on Triangular Grids”, *Applied Science and Engineering Progress*, Vol. 12, No. 3, pp. 150–157, (2019), Available: https://www.researchgate.net/publication/334328305_A_Comparison_of_the_Roe's_FDS_HLLC_AUFS_and_AUSMDV_Schemes_on_Triangular_Grids

- [41] X. Jingshu, W. Qiao, C. Lizhou, K. Weichang, “Assessment of Different CFD Modeling and Solving Approaches for a Supersonic Steam Ejector Simulation”, *Atmosphere*, Vol. 13, No. 1, pp. 1-26, (2022). Available: https://www.researchgate.net/publication/357882651_Assessment_of_Different_CFD_Modeling_and_Solving_Approaches_for_a_Supersonic_Steam_Ejector_Simulation
- [42] G. P. Sutton, O. Biblarz, *Rocket Propulsion Elements*, 7th Edition, Wiley, Danvers, 2000.
- [43] M. Berberan, E. Bodunov, L. Pogliani, “On the barometric formula”, *Am. J. Phys*, Vol. 65, No. 5, pp. 404-412, (1997). Available: https://www.researchgate.net/publication/253750340_On_the_barometric_formula