

NO GAUSSIANIDAD PRIMORDIAL EN LA PERTURBACIÓN EN LA
CURVATURA EN EL ESCENARIO DEL CURVATÓN

FREDY FABIÁN PARADA BECERRA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2009

NO GAUSSIANIDAD PRIMORDIAL EN LA PERTURBACIÓN EN LA
CURVATURA EN EL ESCENARIO DEL CURVATÓN

FREDY FABIÁN PARADA BECERRA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR
YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA., PH. D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2009

Título : NO GAUSSIANIDAD PRIMORDIAL EN LA PERTURBACION EN LA CURVATURA EN EL ESCENARIO DEL CURVATON¹.

Autores : Parada Becerra, Fredy Fabián ².

Palabras Claves : Cosmología, Astrofísica, Inflación, Física de partículas.

Descripción : En el escenario inflacionario estándar un sólo campo escalar, llamado inflatón φ , es el responsable de solucionar los problemas clásicos de la cosmología (horizonte, planitud y reliquias no deseadas), así como también del origen de la estructura a gran escala observable en el Universo hoy en día. Esta doble misión para el campo del inflatón impone fuertes restricciones sobre los parámetros que definen los respectivos modelos inflacionarios, haciendo que algunos de estos buenos modelos sean incompatibles con los resultados observacionales.

Para rescatar los buenos modelos inflacionarios que fallan al momento de generar los niveles requeridos de perturbación primordial, el campo del inflatón se encargará de generar y controlar sólo inflación. La otra labor, la generación de la perturbación primordial en la curvatura ζ , es asignada a un campo escalar ligero débilmente acoplado σ diferente al inflatón. Este es el escenario del curvatón, donde la perturbación primordial en la curvatura original ζ_σ , asociada y producida por σ durante inflación es transformada gradualmente en la perturbación en la curvatura total ζ . El proceso de conversión inicia durante la época dominada por la radiación la cual es generada por el decaimiento del inflatón.

La ζ observada es altamente gaussiana, pero los experimentos satelitales actuales, como el Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) de la National Aeronautics and Space Administration (NASA), buscan una posible pequeña desviación de la gaussianidad exacta. En este trabajo de grado se estudia el biespectro $B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$ de ζ en el escenario del curvatón, cuya normalización f_{NL} da información acerca del nivel de no gaussianidad en ζ . Este estudio es realizado haciendo uso del formalismo δN . Se enuncia explícitamente la ventaja de este formalismo y se da una expresión para f_{NL} en el escenario del curvatón.

¹Trabajo de Grado

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez (Director).

Title : NON-GAUSSIANITY OF THE PRIMORDIAL PERTURBATION IN THE CURVATURE IN THE CURVATON MODEL¹.

Author : Parada Becerra, Fredy Fabián ².

Keywords : Cosmology, Astrophysics, Inflation, Particle Physics.

Description : In the standard inflationary scenario a single scalar field, named the inflaton, is responsible for the solution of the horizon, flatness, and unwanted relics problems, as well as for the origin of the large scale structure seen in the observable Universe. This double mission for the inflaton field imposes strong constraints on the parameters of the inflationary models, leading to big intrinsic difficulties at building successful and realistic models of inflation.

To rescue the well motivated inflationary models that fail at generating the required level of primordial perturbations, the inflaton field is left in charge of driving inflation only. The other task, the generation of the primordial perturbations, is assigned to a weakly coupled light field σ different from the inflaton. This is the curvaton scenario, where the original curvature perturbation ζ_σ , associated to and produced by σ during inflation, is gradually transformed into the total curvature perturbation ζ . The conversion process starts during the radiation dominated epoch that follows the reheating stage produced by the inflaton decay.

The observed ζ is highly gaussian, but the current satellite experiments, like NASA's WMAP, are looking for the possible small deviation from exact gaussianity. In this paper we study the bispectrum $B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$ of ζ in the curvaton scenario, whose normalisation f_{NL} gives information about the level of non gaussianity in ζ . This study will be performed by making use of the δN formalism. We will analyze the advantages of this formalism and give an expression for f_{NL} in the curvaton scenario.

¹Trabajo de Grado

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez (Director).

TABLA DE CONTENIDO

1. Introducción	1
2. Modelo cosmológico estándar	6
2.1. El paradigma inflacionario	6
2.2. Inflación e Inflatón	9
2.2.1. Inflación	9
2.2.2. Inflatón	9
2.3. Parámetros de Slow-Roll	11
2.4. Cosmología: desarrollo científico y tecnológico	13
3. El escenario del curvatón	16
3.1. Ecuación de evolución del campo σ	16
3.2. Espectro de perturbaciones del campo escalar curvatón σ	19
4. Perturbaciones cosmológicas	23
4.1. Perturbación en la curvatura	24
4.2. Perturbación en la curvatura comóvil	25
4.3. Perturbación en la curvatura en slices de densidad de energía uniforme	25
4.4. Perturbación en la curvatura en el escenario del curvatón	26
4.5. Dinámica inflacionaria y pos-inflacionaria	29
4.6. No gaussianidad primordial en la perturbación en la curvatura ζ	30
5. Formalismo δN	33
5.1. Estudios a primer y segundo orden	35
6. Obtención de la expresión para f_{NL} en base al formalismo δN	43
7. Nivel de no gaussianidad f_{NL} en el escenario del curvatón	47
8. Conclusiones	51

<i>TABLA DE CONTENIDO</i>	IV
A. Variación de la acción con respecto a (φ) .	53
B. Tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$	57
C. Ecuación de Keldin-Gordon debida a las fluctuaciones cuánticas del campo escalar curvatura σ	59
D. Evolución de fluidos no interactuantes	61
E. Integral de Fourier y espectro	62
F. Cálculo de la perturbación en la curvatura ζ	63
G. Obtención de las derivadas de N y parámetro f_{NL} con respecto al campo σ	65
BIBLIOGRAFÍA	67

LISTA DE FIGURAS

1.1. Mapas de niveles de no gaussianidad.	6
2.1. Geometría del Universo	7
2.2. Potencial $V(\varphi)$ del campo escalar del inflatón φ	13
3.1. Potencial cuadrático $V(\sigma)$ del curvatón σ	18
4.1. Evolución de las densidades de energía en el modelo de inflación. .	30
7.1. Nivel de no gaussianidad f_{NL} en el escenario del curvatón σ	50

CAPITULO 1

Introducción

Una de las ideas relevantes en cosmología moderna es representada por el paradigma inflacionario. Este período inflacionario se presenta en una época temprana del Universo mucho antes de la época de la nucleosíntesis primordial, y se define formalmente como un período de expansión acelerada. Tal período de inflación se puede obtener si la densidad de energía de nuestro Universo es dominada por la densidad de energía de vacío asociada con el potencial de un campo escalar φ llamado campo del inflatón. Este campo escalar presenta una solución elegante a los problemas de la cosmología estándar como lo es en el caso de los problemas de horizonte, planitud, y reliquias no deseadas (monopolos magnéticos, paredes de dominio, cuerdas cósmicas, etc); de hecho el escenario de inflación presentado por Alan Guth en 1981 [1] fue enfocado hacia la solución de estos problemas. Adicionalmente los modelos de inflación para nuestro Universo temprano y sus predicciones para la no gaussianidad primordial en la perturbación en la curvatura ζ son contrastados con los resultados observacionales provenientes de estructuras a gran escala (galaxias, cúmulos y supercúmulos de galaxias) y radiación cósmica de fondo (RCF).

Las anisotropías en la temperatura $\frac{\delta T}{T_0}$ de la RCF fueron detectadas por primera vez por el satélite explorador cósmico de fondo COBE [2]. Estas anisotropías están directamente relacionadas con las perturbaciones en la densidad de energía $\frac{\delta\rho}{\rho_0}$ en la poca de recombinación, que se originaron por la amplificación de las fluctuaciones cuánticas de campos escalares φ_i durante inflación [3, 4]

$$\left[\frac{\delta T}{T_0}\right]_k = \frac{1}{2} \left[\frac{aH}{k}\right]^2 \left[\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right]_k, \quad (1.1)$$

en donde a es el parámetro de expansión global, $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble y el subíndice k hace referencia a los modos de fourier de la perturbación .

Las perturbaciones en la densidad de energía en la época de recombinación pueden ser

cuantificadas por el invariante de gauge en la perturbación primordial en la curvatura ζ [3, 4]

$$\left[\frac{\delta\rho}{\rho_0} \right]_k = \frac{2}{5} \left[\frac{k}{aH} \right]^2 \zeta_k, \quad (1.2)$$

en lonjas planas, pudiéndose expresar en términos de las fluctuaciones en los campos. Por ejemplo en el caso más sencillo de un solo campo escalar φ presente durante inflación, la perturbación en la curvatura ζ es de la forma:

$$\zeta = -H_{inf} \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}_0}, \quad (1.3)$$

siendo H_{inf} el parámetro de Hubble durante inflación. La perturbación en la curvatura ζ es una cantidad conveniente para describir la perturbación primordial debido a que ésta es conservada en escalas de superhorizonte ($k \ll aH_{inf}$) en tanto la presión sea expresada únicamente en términos de la densidad de energía.

La última y más grandiosa confirmación del escenario inflacionario ha sido recientemente suministrada por los datos de la sonda Wilkinson de anisotropías en microondas WMAP [5, 6]. Gracias a WMAP se ha elaborado un mapa completo de las variaciones angulares en la temperatura de la RCF de precisión sin precedentes. Estos datos apuntan a la existencia de inflación como mecanismo subyacente en la generación de la perturbación en la curvatura ζ en escalas de superhorizonte [6].

El escenario del inflatón expone muy bien las propiedades de ζ , conduciendo a un espectro casi invariante de escala:

$$P_\zeta(k) \equiv A_\zeta^2 \left[\frac{k}{aH} \right]^{n_\zeta}, \quad (1.4)$$

el cual es definido por un promedio estadístico

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \rangle \equiv \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_\zeta(k), \quad (1.5)$$

en donde

$$P_\zeta = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\zeta \quad (1.6)$$

calculado para un ensamble de universos. La amplitud A_ζ y el índice espectral n_ζ en la ecuación (1.4)

$$A_\zeta \simeq \frac{-H_*}{\sqrt{8\epsilon\pi m_p}}, \quad (1.7)$$

$$n_\zeta = 2\eta_\varphi - 6\epsilon, \quad (1.8)$$

se expresan en función de los parámetros de slow-roll ϵ , η_φ y la masa reducida de planck $m_p = 2,436 \times 10^{18} GeV$

$$\epsilon \equiv - \left(\frac{\dot{H}_{inf}}{H_{inf}^2} \right), \quad (1.9)$$

$$\eta_\varphi \equiv \epsilon - \frac{\ddot{\varphi}_0}{H_{inf} \dot{\varphi}_0}, \quad (1.10)$$

que caracterizan el comportamiento inflacionario y satisfacen las condiciones de slow-roll $\epsilon \ll 1$ y $|\eta_\varphi| \ll 1$ [3, 7, 8]. La escala de energía de inflación dada por H_* (parámetro de Hubble a la salida del horizonte) no está completamente determinada en el escenario del inflatón a través de la amplitud del espectro en las perturbaciones A_ζ [9]

$$|A_\zeta| = \left| - \frac{H_*}{\sqrt{8\pi\epsilon} m_p} \right| = 5 \times 10^{-5}, \quad (1.11)$$

dado a que con respecto a ϵ sólo se conoce su cota superior $\epsilon \leq 0,01$ [9], luego la física del escenario del inflatón presenta las siguientes falencias: si se asume la cota superior de ϵ para el valor de la amplitud A_ζ se requeriría que el parámetro H_* fuese del orden de $H_* \approx 10^{14} GeV$, es decir nos encontramos en la escala de gran unificación y lamentablemente no se cuenta con una física experimental para este rango de energías.

Actualmente se espera que los aceleradores de partículas como es el caso del LHC puedan generar energías del orden de $10^3 GeV$, que es la escala de supersimetría, luego, la máxima escala de energía que contará con una física experimental verificable está en el rango de los TeV. Por lo tanto si se desea obtener $H_* \simeq 1 TeV$ para establecer una posible conexión entre cosmología (inflación) y física de partículas (supersimetría) se debe entonces reducir el valor de ϵ , lo cual conduce a otro problema que se denomina problema de ajuste fino, el cual consiste en que se tendría que reducir demasiado el parámetro ϵ , generando un potencial supremamente plano y esto abarca más complicaciones pues en física de partículas no son muy concebibles los potenciales extremadamente planos.

La doble misión para el escenario del inflatón (solucionar los problemas de la cosmología estándar y ser el responsable del origen de la estructura a gran escala presente en nuestro universo) [3] impone fuertes restricciones sobre los parámetros que definen los respectivos modelos inflacionarios, haciendo que algunos de estos buenos modelos sean incompatibles, o prácticamente incompatibles, con los resultados observacionales. Una solución alternativa se presenta si suponemos que durante inflación se encuentran presentes dos campos escalares; uno, el inflatón φ que se encargará de generar y controlar inflación, y el otro, un campo escalar que no domina la densidad de energía ρ , llamado curvatón σ [10, 11, 12, 13], se encargará de generar la perturbación primordial en la curvatura ζ que a su vez dará origen a la formación de la estructura a gran escala en el universo.

El escenario del curvatón describe muy bien las propiedades de ζ , con un espectro casi invariante de la forma:

$$P_\zeta(k) \equiv A_\zeta^2 \left(\frac{k}{aH_{inf}} \right)^{n_\zeta}, \quad (1.12)$$

en donde el índice espectral $n_\zeta = 2\eta_\sigma - 2\epsilon$ está en función de ϵ y η_σ tal que:

$$\eta_\sigma \equiv \frac{m_p^2}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_0^2} \approx \frac{m_\sigma^2}{3H_*^2} \ll 1, \quad (1.13)$$

siendo V el potencial del campo escalar, y su amplitud A_ζ es dada en términos de H_* , la componente no perturbada del campo del curvatón durante inflación σ_* y la densidad de energía del curvatón $\Omega_{dec} \equiv \frac{\rho_{\sigma_0}}{\rho_{total_0}}$ justo antes de que este decaiga

$$A_\zeta \simeq \frac{H_* \Omega_{dec}}{3\pi \sigma_*}. \quad (1.14)$$

La ventaja que se obtiene al introducir el curvatón radica en que su amplitud A_ζ no dependerá de los parámetros ϵ y η_σ , sino de H_* y los parámetros libres σ_* y Ω_{dec} , evitándose el problema de ajuste fino, pues no se está obligado a alterar la planitud del potencial para los modelos inflacionarios, permitiéndose manejar $H_* \simeq 10^3 GeV$ conservando la oportunidad de establecer una conexión entre la cosmología y la física de partículas.

Por lo tanto, para rescatar dichos modelos del ajuste fino requerido sobre los parámetros que los definen [14], se sugiere que el campo del inflatón sea únicamente encargado de generar y controlar inflación. La otra labor, la generación de estructuras a gran escala, es asignada a otro campo escalar ligero, no dominante durante inflación, σ llamado curvatón. En este escenario la perturbación en la curvatura original ζ_σ asociada y producida por σ durante inflación, es gradualmente transformada en la perturbación total de la curvatura ζ . El proceso de conversión inicia una vez el campo del curvatón σ empieza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial, durante la época post inflacionaria dominada por la radiación [11, 13].

El estudio de la no gaussianidad en la perturbación primordial en la curvatura en el escenario del curvatón, a través de la determinación teórica del parámetro no lineal f_{NL} empleando el formalismo δN , son el objetivo principal de este trabajo de grado. Aquí se presenta una muestra del estado del arte sujeto a la no gaussianidad; ambos, puntos de vista teórico y observacional, proveerán al lector los tópicos necesarios para calcular el nivel de no gaussianidad en el escenario del curvatón.

La no gaussianidad emerge como una clave observacional para discriminar entre los posibles escenarios competentes para la generación de la perturbación en la curvatura ζ , y es

también uno de los objetivos principales en las presentes y futuras misiones satelitales que exploran la RCF.

Esta herramienta observacional que proporciona información fundamental sobre el mecanismo elegido por la naturaleza para producir la formación de estructuras a gran escala observadas hoy en día, obedece a una desviación de una estadística gaussiana, es decir a la presencia de correladores de alto orden relacionados con las funciones de correlación de las anisotropías en la RCF. Es decir, estamos hablando de la función de correlación de n-puntos

$$\langle f(n_1)f(n_2)f(n_3)...f(n_n) \rangle, \quad (1.15)$$

asociada a una función de distribución de probabilidad $f(n)$, la cual es un simple patrón estadístico que determina la agrupación o distribución de las fluctuaciones en el planisferio celeste. Si las fluctuaciones son gaussianas entonces la función de correlación de dos puntos especifica todas las propiedades estadísticas de $f(n)$. Si es no gaussiana entonces es necesario una o más funciones de correlación de orden superior para determinar sus propiedades estadísticas. Por ejemplo, una función de correlación de tres puntos, o su transformada de fourier, el biespectro, es un indicador relevante de no gaussianidad en las perturbaciones cosmológicas. La importancia del biespectro radica en el hecho de que, posiblemente, representa el siguiente descriptor estadístico que puedan explorar los experimentos satelitales.

La primera comparación directa entre no gaussianidad inflacionaria y los datos observacionales fue presentada por el COBE DMR en el 2001, usando el biespectro angular y la función de correlación de tres puntos [15]. La no gaussianidad primordial es parametrizada a través de los correladores impares de ζ , siendo el correlador de tres puntos el primero en admitir la no gaussianidad. Tal correlador es parametrizado por el nivel de no gaussianidad f_{NL} el cual, de acuerdo al reporte del quinto año de resultados del WMAP, está en el rango de $-9 < f_{NL} < 111$ [5]. Datos futuros del satélite PLANCK [16] pretenden reducir aún más el valor de esta cota a un rango de $|f_{NL}| < 5$ en caso de que la no gaussianidad no sea detectada, permitiéndonos de esta forma, descartar entre los diferentes y muy buenos modelos inflacionarios predichos en física de partículas, acercándonos cada vez más a un modelo inflacionario ideal. La metodología más indicada para hallar el nivel de no gaussianidad involucra el desarrollo del formalismo δN [17], en donde el f_{NL} en el escenario del curvaton está dado en términos de la evolución local del Universo bajo consideración. En la figura 1,1 se muestran algunos ejemplos de gaussianidad y no gaussianidad en los mapas del cielo a través de la resolución angular del satélite PLANCK simulada por el método de coordenadas esféricas [18].

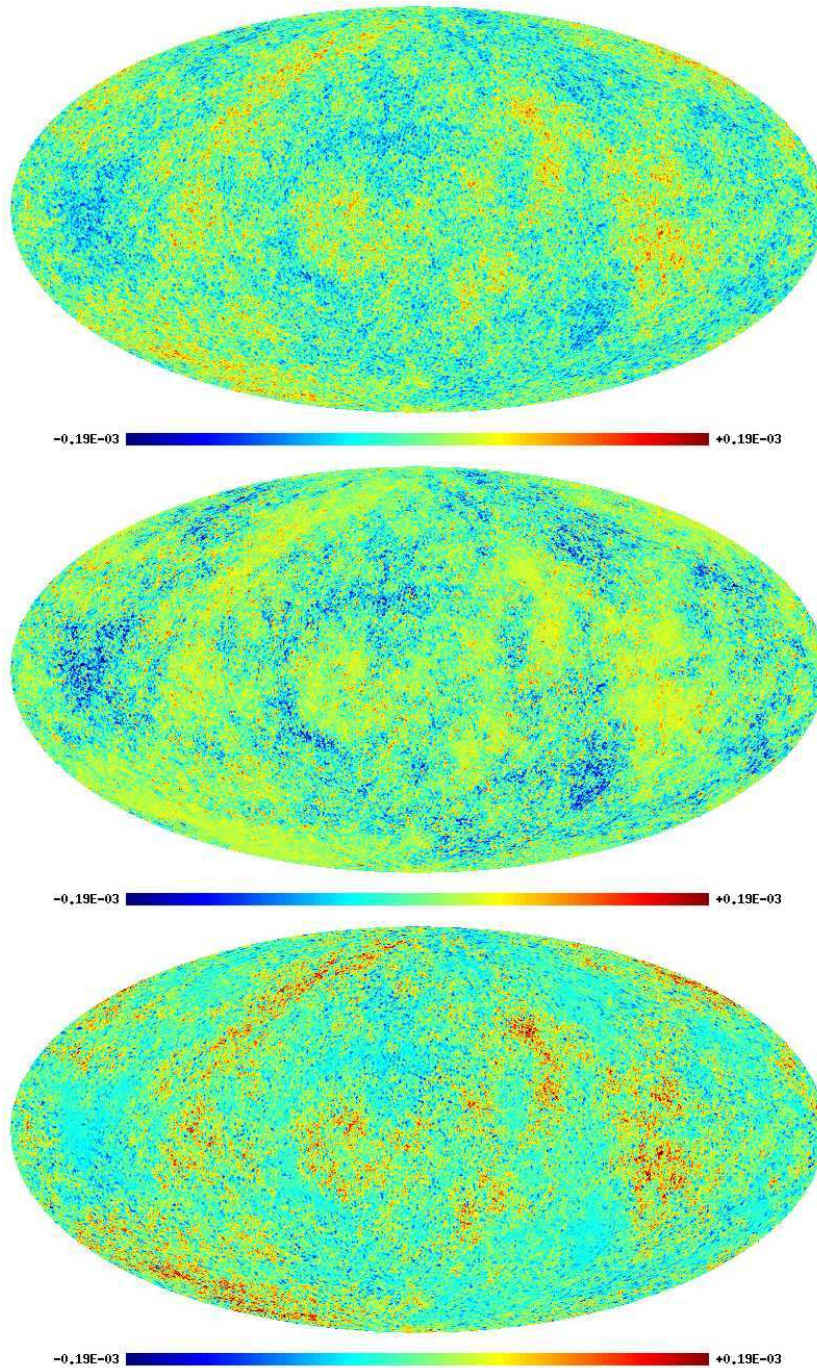


Figura 1.1: Mapas de niveles de no gaussianidad.

De arriba a abajo se muestran simulaciones de gaussianidad $f_{NL} = 0$, no gaussianidad $f_{NL} = 3000$, y no gaussianidad $f_{NL} = -3000$ en la resolución de Planck . Los mapas de no gaussianidad se obtienen utilizando el algoritmo en coordenadas esféricas [18]. Los altos valores para $|f_{NL}|$ son elegidos para producir efectos visibles a simple vista (se debe tener en cuenta que se está refiriendo a las escalas de color calibradas de la temperatura para cada mapa).

CAPITULO 2

Modelo cosmológico estándar

2.1. El paradigma inflacionario

Una de las ideas relevantes en cosmología moderna es representada por el paradigma inflacionario [3, 8, 19, 20, 21]. Aquí se presenta en resumen algunas bases de inflación .

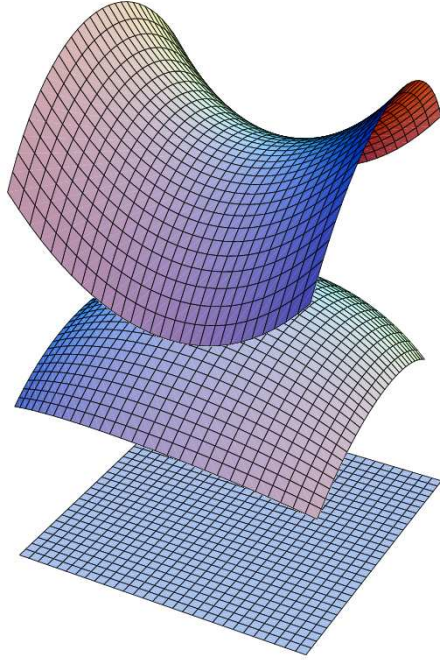
En el Universo observado no se tiene homogeneidad ni isotropía, sin embargo a escalas mayores a $100Mpc$ se aprecia que el número de galaxias por unidad de volumen se puede considerar uniforme, es decir homogéneo , y además se ve que a estas escalas el número de galaxias por unidad de ángulo sólido parece ser el mismo en todas las direcciones por lo tanto se considera también como isotrópico. Estas características de homogeneidad e isotropía a gran escala es lo que se conoce como principio cosmológico.

Para abordar la dinámica inflacionaria se puede emplear una métrica que cumpla con el principio cosmológico y ésta es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.1)$$

en la cual r, θ, ϕ son las coordenadas pseudo esféricas comóviles. En esta métrica, las galaxias se encuentran fijas al sistema coordenado, es decir las coordenadas que describen la posición de una determinada galaxia no varía con el tiempo $\{r = r_0, \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0\}$ pero su separación viene determinada por el parámetro de expansión $a(t)$, el cual está redimensionando el sistema coordenado.

A causa de la homogeneidad e isotropía, hay un mismo tiempo propio para cada galaxia, el cual es t , y se denomina tiempo cósmico. El parámetro $K = -1, 0, 1$ es la constante de curvatura de una hipersuperficie tridimensional ($3 - D$)[figura 2.1]. Para el caso en que: $K = -1$ se tiene un Universo abierto, si $K = 0$ es un Universo plano y cuando $K = 1$ se tiene un Universo cerrado

Figura 2.1: **Geometría del Universo**

Según las ecuaciones de Einstein, las formas tridimensionales que puede adoptar el Universo en un determinado instante son tres: pasadas a una representación bidimensional, corresponden a un paraboloides hiperbólico ($K = -1$), una superficie esférica ($K = 1$) y un plano ($K = 0$).

La distancia física viene siendo de la siguiente manera y es dada por la parte radial de forma que de acuerdo a la métrica es

$$d(r, t) = \int_0^r a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \begin{cases} a \arcsin(r), \\ a \operatorname{arcsinh}(r), \\ a r, \end{cases} \quad (2.2)$$

En función del tiempo cósmico (t) y del parámetro de expansión es posible definir el tiempo conformal η de la manera siguiente

$$d\eta \equiv \frac{dt}{a}. \quad (2.3)$$

Esto implica que, para un Universo plano,

$$ds^2 = a(\eta) [-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j], \quad (2.4)$$

en la cual $-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j$ es el elemento de línea de Minkowski.

El Universo es descrito por el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ de un fluido perfecto con densidad de energía ρ y presión P (véase apéndice B).

Las expresiones del tensor energía-momento para el espacio-tiempo de Minkowski son

$$T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}P + (\rho + P)U^\mu U^\nu, \quad (2.5)$$

siendo $\eta^{\mu\nu}$ el tensor de minkowski y $U^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ el cuadvivector de velocidad del fluido, obteniéndose

$$T^{00} = \eta^{00}P + (\rho + P)U^0U^0 = -P + (\rho + P) = \rho, \quad (2.6)$$

$$T^{0i} = \eta^{0i}P + (\rho + P)U^0U^i = 0 + (0 + 0) = 0, \quad (2.7)$$

$$T^{ij} = \eta^{ij}P + (\rho + P)U^iU^j = P\delta^{ij}. \quad (2.8)$$

De las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

en donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y G_N es la constante gravitacional Newtoniana, se obtiene la ecuación de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho - \frac{K}{a^2}, \quad (2.10)$$

y la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (2.11)$$

en donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de expansión de Hubble y el punto denota la derivación con respecto al tiempo cósmico t . Entonces de la ecuación de continuidad se tiene que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3P), \quad (2.12)$$

la cual muestra que un período inflacionario ($\ddot{a} > 0$) es posible si la presión P es negativa, de la forma

$$P < -\frac{\rho}{3}. \quad (2.13)$$

En particular un período de la historia del Universo en el cual $P = -\rho$ es llamado un estado de Sitter. De la ecuación (2.10) y la ecuación de continuidad (2.11) se ve que en el estado de Sitter $\rho = \text{constante}$, luego

$$H = H_I = \text{constante}. \quad (2.14)$$

Resolviendo la ecuación (2.12) se obtiene también que el factor de escala crece exponencialmente

$$a(t) = a_i e^{H_I(t-t_i)}, \quad (2.15)$$

en donde t_i es el tiempo inicial de inflación. En efecto la condición (2.13) puede ser satisfecha por un campo escalar, el inflatón φ .

2.2. Inflación e Inflatón

Cualquier período de la historia del Universo durante el cual la expansión es acelerada se denomina como período inflacionario [1, 22]. El período inflacionario antes del Big-Bang tiene la propiedad de amplificar las fluctuaciones cuánticas de los campos escalares que existían en el espacio-tiempo de FRW [23, 24], para que éstas se conviertan en clásicas [25, 26, 27, 28], y casi constantes, formando la densidad primordial de inhomogeneidades responsables de las presentes estructuras a gran escala, observadas hoy en día.

2.2.1. Inflación

Inflación puede definirse rigurosamente como un período en el cual el parámetro de expansión a satisface la condición

$$\ddot{a} > 0. \quad (2.16)$$

Tal condición se traduce como un requerimiento del parámetro de expansión de Hubble global durante inflación H_{inf} . A partir de la definición de H_{inf} en términos de a , se puede escribir alternativamente la siguiente ecuación de evolución:

$$a(t) = a_{ini} \exp\left(\int_{t_{ini}}^t H_{inf} dt\right), \quad (2.17)$$

siendo a_{ini} el parámetro de expansión en un tiempo t_{ini} . La condición de inflación en la ecuación (2.16) se satisface cuando

$$\dot{H}_{inf} > -H_{inf}^2. \quad (2.18)$$

2.2.2. Inflatón

La acción para el campo del inflatón φ minimalmente acoplado a la gravedad es dada por (véase apéndice A)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right], \quad (2.19)$$

en donde g es el determinante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico contravariante, tal que $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}$; finalmente $V(\varphi)$ es el potencial escalar. Haciendo una variación en la acción con respecto a φ se obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$\square\varphi = \frac{\partial V}{\partial\varphi}, \quad (2.20)$$

en donde \square es el operador D'Alambert covariante

$$\square\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\varphi). \quad (2.21)$$

En un Universo descrito por la métrica FRW (2.1), y de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial^{\mu}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial^{\mu}\phi)} - \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi} = 0, \quad (2.22)$$

es posible obtener la ecuación de evolución para el campo φ

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2\varphi}{a^2} + V'(\varphi) = 0, \quad (2.23)$$

en donde $V'(\varphi) = (dV(\varphi)/d\varphi)$. Notese en particular, la aparición del término de fricción $3H\dot{\varphi}$: un campo escalar rodando bajo este potencial sufre una fricción debido a la expansión del Universo. El tensor de energía-momento para el campo escalar φ está dado por

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L} = \partial_{\mu}\varphi\partial_{\nu}\varphi + g_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\varphi\partial_{\beta}\varphi - V(\varphi)\right]. \quad (2.24)$$

y en base a este tensor es posible obtener las expresiones para la densidad de energía y presión del campo escalar

$$\rho_{\phi} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{(\nabla\phi)^2}{2a^2}, \quad (2.25)$$

$$p_{\phi} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{(\nabla\phi)^2}{6a^2}. \quad (2.26)$$

El campo del inflatón φ puede escribirse de la forma

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(t, x), \quad (2.27)$$

en donde φ_0 , el campo clásico, es el valor esperado del campo del inflatón al inicio del estado de homogeneidad e isotropía, mientras que $\delta\varphi(t, x)$ representa las fluctuaciones cuánticas alrededor de φ_0 . Esta separación es justificada por el hecho de que las fluctuaciones cuánticas son mucho más pequeñas que el valor de las clásicas y por ende se pueden considerar muy

insignificantes cuando se observa la evolución clásica. Para el caso en que se trabaja con un campo escalar homogéneo, sólo se considera la evolución con respecto a $\varphi_0(t)$, el cuál se comporta como un fluido perfecto con densidad de energía ρ_φ y presión P_φ de fondo de la forma

$$\rho_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi), \quad (2.28)$$

$$P_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi). \quad (2.29)$$

Por consiguiente si

$$V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2, \quad (2.30)$$

obtenemos la condición

$$P_\varphi \simeq -\rho_\varphi. \quad (2.31)$$

De este sencillo cálculo, es evidente que, de un campo escalar cuya densidad de energía domina el Universo y cuya energía potencial domina el término cinético se obtiene inflación. En la figura (2.2) se hace referencia solamente a uno de los modelos más simples de inflación, en donde solo se considera un campo escalar presente (inflatón).

2.3. Parámetros de Slow-Roll

Un modelo en el cuál $V(\varphi_0) \gg \dot{\varphi}_0^2$ y $|\ddot{\varphi}_0| \ll |3H\dot{\varphi}_0|$ se denomina modelo de Slow-Roll. En este modelo la ecuación de Friedmann (2.10) se reduce a

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3} V(\phi_0), \quad (2.32)$$

en la cual se ha asumido una geometría plana del Universo ($K = 0$), y que el campo escalar domina la densidad total de energía. La ecuación de movimiento para este campo es, en base a la ecuación (2.22)

$$\ddot{\varphi}_0 + 3H\dot{\varphi}_0 + \frac{\partial V}{\partial \varphi_0} = 0, \quad (2.33)$$

la cual, usando las condiciones de slow-roll, se reduce a

$$3H\dot{\varphi}_0 \simeq -\frac{\partial V}{\partial \varphi_0}. \quad (2.34)$$

Ahora bien, es conveniente definir los parámetros ϵ y η conocidos como los parámetros de slow-roll [3, 20]:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 4\pi G \frac{\dot{\varphi}^2}{H^2} = \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial \varphi_0}}{V} \right)^2, \quad (2.35)$$

$$\eta = m_{pl}^2 \left(\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_0^2}}{V} \right) = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 V}{H^2}, \quad (2.36)$$

en donde $m_{pl} \equiv \sqrt{\frac{1}{8\pi G}}$ es la masa reducida de Planck.

Para que los modelos de inflación sean posibles es necesario que los parámetros de slow-roll cumplan las siguientes condiciones:

$$\epsilon \ll 1, \quad (2.37)$$

y

$$|\eta| \ll 1. \quad (2.38)$$

Los modelos de slow-roll son elegidos frecuentemente debido a que permiten obtener de manera sencilla el monto de inflación requerido para solucionar los problemas clásicos de la cosmología estándar y además contribuyen a que el espectro de la perturbación en la curvatura \mathcal{P}_ζ , que está parametrizado por el índice espectral n_ζ , sea casi invariante de escala, es decir: $n_\zeta \approx 1$ lo cual está en total concordancia con las observaciones [5]. En los modelos inflacionarios estándar de slow roll donde las fluctuaciones del campo del inflatón φ son responsables de las perturbaciones en la curvatura ζ , la amplitud de este espectro de perturbaciones A_ζ esta dada por

$$|A_\zeta| = \left| -\frac{H_*}{\sqrt{8\pi\epsilon}m_p} \right|. \quad (2.39)$$

Como ya se había mencionado en la introducción, el satélite COBE logró medir este parámetro con un valor de $A_\zeta = 5 \times 10^{-5}$, y tomando el parámetro ϵ del orden de 10^{-2} y la masa de planck $m_p = 2,436 \times 10^{18}$, se tiene que el valor de H_* es del orden de $10^{13} GeV$ que no es posible de alcanzar en los aceleradores de partículas dado a que solamente pueden obtener energías del orden de los $1TeV$. Así, la otra opción que se tiene es tomar el parámetro de slow roll ϵ y reducirlo a un valor muy pequeño de manera que nos permita tener un $H_* \sim 1TeV$ y lograr un conexión verificable en el laboratorio entre la cosmología y la física de partículas, pero aún así, reducir el valor de ϵ altera el potencial del campo del inflatón convirtiendolo en un potencial extremadamente plano, tan plano que es poco probable que se pueda exhibir un potencial de esta forma en los modelos de física de partículas. Por esta razón es que se plantea otro escenario alternativo al inflatón ϕ , el cual no dominará la densidad de energía y su amplitud espectral estará dada en función del parámetro H_* y los

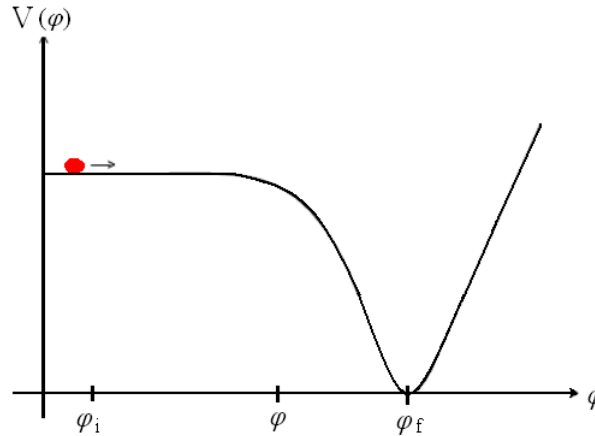


Figura 2.2: **Potencial $V(\varphi)$ del campo escalar del inflatón φ .**

El potencial del campo escalar del inflatón es en sus inicios es un potencial muy plano pero al final terminar decayendo realizando oscilaciones alrededor de su punto mínimo φ_f

parámetros libres σ_* y Ω_{dec} que se abordaran detenidamente más adelante. Este escenario alternativo llamado curvatón σ permitirá conservar los potenciales de los modelos de física de partículas y trabajar con el parámetro H_* en el orden de $1TeV$, permitiéndonos así, lograr una posible unión verificable entre la cosmología y la física de partículas.

2.4. Cosmología: desarrollo científico y tecnológico

Las futuras misiones espaciales permitirán medir con precisión los parámetros que definen el universo: densidad, parámetro de Hubble y valor de la constante cosmológica. Estas medidas permitirán, sin lugar a dudas, una mejor comprensión del origen y la evolución del cosmos.

La cosmología empezó su desarrollo como ciencia hace unos 90 años, cuando se descubrió que todas las galaxias se alejan entre sí con una velocidad que es proporcional a su separación. Una sencilla extrapolación hacia atrás en el tiempo indica que la distancia entre las galaxias era cero en algún momento situado entre los 10,000 y los 15,000 millones de años. En esta época temprana el universo debía ser mucho más denso y caliente que en la actualidad y debía estar dominado por la radiación. En la década de los sesenta se produjeron dos descubrimientos fundamentales : por un lado se comprobó que el universo estaba efectivamente impregnado de una radiación de fondo de $2,75K$ aproximadamente y, por otro, que las estrellas podían sintetizar a partir del hidrógeno, todos los elementos químicos excepto el deuterio y el helio, los cuales se formaron de una manera natural junto con el litio, durante los tres primeros minutos de la expansión universal.

El modelo cosmológico estándar se basa en una solución isótropa y homogénea, de la teoría de la relatividad general según la cual el universo está dominado por la densidad total de energía y por el radio de curvatura, el cual puede ser positivo o negativo, según se trate de un universo cerrado o abierto, o ser nulo si el universo es plano. La densidad para la cual el universo es plano se denomina densidad crítica; si la densidad es menor que la crítica el universo está curvado negativamente, mientras que si es mayor, lo está positivamente. A menudo se utiliza esta densidad como patrón de medida y se representa por la letra Ω .

Durante su evolución el universo ha pasado por tres etapas o eras: la dominada por la radiación, la dominada por la materia y la dominada por la constante cosmológica. La fase dominada por la radiación abarca aproximadamente desde unos 10^{-11} segundos de edad, cuando la temperatura era de unos 300GeV , es decir unos 3×10^{16} Kelvin, hasta los 10^{11} segundos es decir unos 10,000 años después, cuando las densidades de energía y materia se igualaron y la temperatura era de sólo unos 3eV (aproximadamente $30,000\text{K}$).

Al principio la energía estaba dominada por la radiación y por un conjunto de partículas-antipartículas. A medida que la temperatura fue descendiendo por debajo de la masa de cada una de estas partículas, éstas se fueron aniquilando con sus correspondientes antipartículas desapareciendo y al final sólo quedó materia y radiación.

La etapa dominada por la materia abarca desde el momento en que la temperatura era de sólo 3eV hasta ahora, unos 14,000 millones de años después. Durante esta primera época, las inhomogeneidades locales de la densidad de materia se amplificaron por la acción de la gravedad y originaron las primeras galaxias y las estructuras que actualmente se observan.

Cuando la temperatura cayó por debajo de los $0,3\text{eV}$, los electrones se combinaron con los núcleos atómicos y el universo se hizo transparente. El fondo de microondas que observamos actualmente es precisamente la imagen que nos ha llegado de este momento. Cuando ello ocurrió, el universo tenía unos 300,000 años. La última fase está dominada por la constante cosmológica, ya para esta fase el crecimiento de estas inhomogeneidades se detuvo y las estructuras que existían en aquél momento quedaron congeladas.

Este escenario se basa en sólidos argumentos. Tal como se mencionó anteriormente, el más importante es la propia radiación cósmica de fondo. El explorador *COBE* demostró que el fondo cósmico es casi perfectamente isotérmico en todas las direcciones y que su temperatura es de $2,725 \pm 0,002\text{K}$ [29]. La única explicación razonable es que corresponde a la radiación que se desacopló de la materia cuando la temperatura bajó lo suficiente.

COBE también confirma la presencia de anisotropías del orden de unos 30 micro-kelvin a distancias angulares de 10° en el firmamento, proporcionando de este modo las primeras

evidencias de que las actuales estructuras se formaron a partir de pequeñas inhomogeneidades de la densidad que se fueron amplificando a causa de la gravedad a lo largo de la vida del universo. De hecho existen diversos fenómenos que pudieron provocar diferencias de temperaturas entre dos regiones del firmamento en el momento en que la radiación y la materia se desacoplaron. El estudio de las fluctuaciones proporciona información acerca del fenómeno que las ocasionó. Las medidas actualmente existentes sugieren que el universo es plano, es decir que $\Omega \simeq 1$, pero para fijar definitivamente esta cuestión será necesario disponer de datos de gran precisión como los que ha ido proporcionando la misión espacial WMAP de la NASA y los esperados por la misión espacial PLANCK de la ESA (Agencia Espacial Europea)

La misión WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) es un programa de la NASA cuyo objetivo primordial es medir las inhomogeneidades del fondo cósmico de microondas y así obtener información sobre las primeras etapas del universo. Las instituciones responsables son el Goddard Space Flight Center y la Universidad de Princeton.

La instrumentación de WMAP consiste en un conjunto de cinco radiómetros enfriados pasivamente que trabajan a frecuencias de 22, 30, 40, 60 y 90 GHz . La elección de estas frecuencias se debe a la necesidad de separar la contribución galáctica del fondo de microondas.

El satélite PLANCK es la tercera misión del programa horizonte 2000 de la agencia espacial europea (ESA). Su objetivo es medir a diferentes escalas las anisotropías de la radiación cósmica de fondo con una resolución angular y una precisión térmica muy superiores a las ofrecidas por WMAP.

Este satélite fue lanzado el 14 de mayo del año 2009. Las mejores resoluciones angulares y sensibilidades térmicas que se esperan obtener a alta y baja frecuencia son de 10 a 5 minutos de arco y de 12 y 10 micro kelvin respectivamente. Es importante señalar aquí que las diferencias de temperaturas entre regiones separadas por más de 1° reflejan las propiedades del universo primitivo, mientras que las diferencias de temperatura a escala más pequeñas dependen de los parámetros cosmológicos ($H, \Omega, \Omega_B, \Omega_M \dots$) por lo que Planck permitirá obtener los valores de estos parámetros con una precisión superior al 1 %

Por último SNAP(SuperNova Acceleration Probe)[30] , es un experimento en órbita alrededor de la tierra que ha sido propuesto por un consorcio encabezado por la Universidad de Berkeley y cuyo objetivo es medir con gran precisión los parámetros del universo y ver si su expansión se está acelerando. Medir la densidad de materia con una precisión del 2 %, la energía del vacío con una precisión del 5 % y la curvatura con una del 6 %.

CAPITULO 3

El escenario del curvatón

Elaborar un modelo de campo escalar que presente fluctuaciones cuánticas, a partir de las cuales se pueda comprender el origen de las estructuras a gran escala en el Universo, es relativamente sencillo. Sólo es necesario elegir un potencial para el campo escalar que tenga un mínimo global correspondiente a un estado de vacío. Un modelo que puede servir como ejemplo es el de un campo escalar de masa $m_\sigma \ll H_{inf}$ llamado curvatón σ , representado por un potencial de la forma:

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2(t, x) \quad (3.1)$$

3.1. Ecuación de evolución del campo σ

La ecuación de evolución del campo escalar σ teniendo en cuenta su masa m_σ y el parámetro de Hubble durante inflación H_{inf} es de la forma :

$$\ddot{\sigma} + 3H_{inf}\dot{\sigma} + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\sigma^2\right)\sigma = 0, \quad (3.2)$$

Esta ecuación es la análoga a la de un oscilador armónico amortiguado con fricción que se describe habitualmente de la siguiente manera

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g\frac{dx}{dt} + w_0^2x = 0. \quad (3.3)$$

En el escenario del curvatón, dado a que $H_{inf} \gg m_\sigma$ durante inflación, el término de fricción en la ecuación de evolución (3.2) es muy importante y por ende se puede entender que el campo escalar σ presenta tres evoluciones diferentes a medida que el parámetro de Hubble durante inflación H_{inf} varía, los cuales son en análogo al mismo comportamiento de un oscilador armónico amortiguado

$$\ddot{\sigma} + 2\beta\dot{\sigma} + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\sigma^2\right)\sigma = 0, \quad (3.4)$$

en donde $\beta = \frac{3H_{inf}}{2}$ y con solución de la forma:

$$\sigma = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\sigma^2\right)}}{2a}, \quad (3.5)$$

de comportamiento sobreamortiguado si:

$$\frac{k^2}{a^2} + m_\sigma^2 < \beta^2, \quad (3.6)$$

de comportamiento críticamente amortiguado si:

$$\frac{k^2}{a^2} + m_\sigma^2 = \beta^2, \quad (3.7)$$

y finalmente comportamiento subamortiguado

$$\frac{k^2}{a^2} + m_\sigma^2 > \beta^2. \quad (3.8)$$

Se puede apreciar que en el caso de tener el parámetro de Hubble $H_{inf} > m_\sigma$ se presenta una etapa de sobreamortiguamiento, la cual le impide iniciar las oscilaciones, por lo tanto, el valor del campo σ_* se mantendrá congelado durante este período inflacionario. El valor de H durante inflación varia muy suavemente ($\epsilon \ll 1$) de manera que las oscilaciones subamortiguadas comienzan cuando el parámetro H adquiera un valor del orden de la masa del campo del curvatón m_σ , de manera que una vez es descongelado, este empieza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial (figura 3,1) el cual es de la forma cuadrática $V(\sigma) \simeq \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_a^2(t, x)$.

El campo escalar del inflatón domina la densidad de energía del Universo pero este campo también sufre un decaimiento del cual surge la radiación, luego se tiene que la densidad de energía del inflatón es transferida a la radiación y es aquí cuando se presenta una época del universo dominada por la radiación, esta es la primera de las tres épocas por las cuales es regido el universo, la segunda es la época dominada por la materia y la tercera época es la dominada por la constante cosmológica.

Posteriormente, al final del período inflacionario, el campo escalar del curvatón σ empieza a oscilar alrededor del mínimo de su energía potencial y pierde energía creando pares de partículas elementales. Para el movimiento oscilatorio subamortiguado se define de una forma conveniente la siguiente expresión

$$\Gamma_\sigma^2 \equiv m_\sigma^2 - \beta^2, \quad (3.9)$$

donde $\Gamma_\sigma^2 > 0$, luego para el caso $\ddot{\sigma} + 2\beta\dot{\sigma} + m_\sigma^2\sigma = 0$ se tiene la solución general

$$\sigma(t) = e^{-\beta t} [A_1 e^{i\Gamma_\sigma t} + A_2 e^{-i\Gamma_\sigma t}]. \quad (3.10)$$

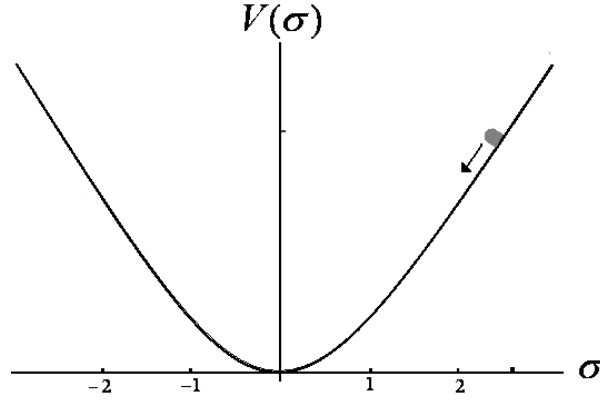


Figura 3.1: **Potencial cuadrático $V(\sigma)$ del curvatón σ**

Una vez que el parámetro de Hubble durante inflación H_{inf} es del orden de la masa del campo del curvatón m_σ , se dará inicio a las oscilaciones del campo σ alrededor del mínimo de su potencial $V(\sigma) \simeq \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_a^2(t, x)$, en donde posteriormente el período de oscilación será mucho menor que el tiempo característico de expansión $\frac{T}{t} = \frac{H_{inf}}{m_\sigma} \ll 1$.

Para el caso en el cual $m_\sigma^2 \gg H^2$ se tiene $\Gamma_\sigma \approx m_\sigma$, en donde Γ_σ es la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas del curvatón, por lo tanto el período de las oscilaciones para este escenario es

$$T = \frac{2\pi}{\Gamma_\sigma} = \frac{2\pi}{m_\sigma}. \quad (3.11)$$

Durante la época dominada por la radiación el parámetro de expansión a evoluciona con el tiempo de la forma $a \rightarrow t^{\frac{1}{2}}$ y en la poca dominada por la materia como $a \rightarrow t^{\frac{3}{2}}$, entonces, debido a que en el momento en que comienza a oscilar el curvatón se tiene una época dominada por la radiación, el tiempo inicial se obtiene como una fracción del parámetro de Hubble:

$$H_{inf} = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t_{ini}} \Rightarrow t_{ini} = \frac{1}{2H_{inf}}, \quad (3.12)$$

luego

$$\frac{T}{t} = \frac{H_{inf}}{m_\sigma} \ll 1, \quad (3.13)$$

entonces se observa que el período de oscilación del curvatón es mucho menor el tiempo característico de expansión, luego en este caso se tiene muchas oscilaciones y por lo tanto es conveniente trabajar los valores promedios para los cálculos de la energía y presión de σ .

Dado que las oscilaciones de σ alrededor el mínimo de su potencial son tan rápidas, es

posible aproximar su densidad de energía ρ_σ por

$$\rho_\sigma \simeq \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_a^2(t, x), \quad (3.14)$$

en donde $\sigma_a(t, \mathbf{x})$ es la amplitud de las oscilaciones y haciendo uso de la perturbación en la curvatura, definida como $\zeta = -\psi - \mathcal{H}(\delta\rho/\dot{\rho}_0)$ [31] se expresa la ζ total para el escenario del curvatón como:

$$\zeta \equiv -\psi - H \left(\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}_0} \right)_{total}, \quad (3.15)$$

en donde la densidad de energía total ρ_{total} es simplemente la adición de las densidades de energía del curvatón y de radiación (ρ_σ y ρ_r), que definen perturbaciones en la curvatura conservadas asociadas al curvatón y a la radiación (ζ_σ y ζ_r).

3.2. Espectro de perturbaciones del campo escalar curvatón σ

Se considera un campo escalar σ que no domina la densidad de energía cuya masa m_σ satisface la condición $m_\sigma \ll H_*$ (campo ligero), durante un período inflacionario donde el parámetro de Hubble H_{inf} no es constante pero evoluciona lentamente satisfaciendo la condición $-\dot{H}_{inf}/H_{inf}^2 \ll 1$ de manera que $\epsilon \ll 1$ (cuasi de Sitter). En esta sección se presenta como la introducción de está pequeña variación en H_{inf} y de una masa pequeña m_σ para el campo del curvatón σ producen una pequeña dependencia en la escala de $\mathcal{P}_{\delta\sigma}(k)$ el cual está parametrizado por ϵ y $\eta_\sigma \equiv m_\sigma^2/3H_*^2$.

El campo escalar del curvatón σ se puede escribir de la forma

$$\sigma(t, x) = \sigma_0(t) + \delta\sigma(t, x), \quad (3.16)$$

durante inflación, y antes de salir del horizonte, las fluctuaciones en σ se pueden considerar como operadores cuánticos. Si además se asume que σ es aproximadamente un campo no interactuante, se puede escribir el operador de perturbación del campo $\delta\hat{\sigma}(x, t)$ en términos de los operadores usuales de creación \hat{a}_k y aniquilación \hat{a}_k^\dagger :

$$\delta\hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \delta\hat{\sigma}_{\mathbf{k}}(t), \quad (3.17)$$

en donde

$$\delta\hat{\sigma}_{\mathbf{k}}(t) \equiv w_k(t) \hat{a}_{\vec{k}} + w_k^*(t) \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger. \quad (3.18)$$

Las propiedades de la perturbación del campo σ son especificadas por el espectro $\mathcal{P}_{\delta\sigma}(k)$ el cual es definido por el promedio estadístico $\langle \sigma_{\mathbf{k}_1} \sigma_{\mathbf{k}_2} \rangle$ de un ensamble de Universos, de modo que solamente la información necesaria para conocer el valor de $\mathcal{P}_{\delta\sigma}(k)$ es el estado cuántico del Universo durante inflación, siendo la opción más indicada el estado de vacío debido a que éste garantiza un estado de homogeneidad e isotropía en todo el espacio. Por lo tanto todos los universos en un ensamble se encuentran en un estado de vacío durante inflación, el promedio estadístico $\langle \delta\sigma_{\mathbf{k}_1} \delta\sigma_{\mathbf{k}_2} \rangle$ es ahora muy fácil de calcular y corresponde al valor esperado $\langle 0 | \delta\hat{\sigma}_{\mathbf{k}_1} \delta\hat{\sigma}_{\mathbf{k}_2} | 0 \rangle$. Es sencillo entonces reconocer que el espectro de $\mathcal{P}_{\delta\sigma}(k)$ de las perturbaciones $\delta\sigma$, que se define por

$$\langle \delta\sigma_{\mathbf{k}_1} \delta\sigma_{\mathbf{k}_2} \rangle \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathcal{P}_{\delta\sigma}(k), \quad (3.19)$$

está dado por la fórmula

$$\mathcal{P}_{\delta\sigma}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |w_k|^2. \quad (3.20)$$

Para calcular $|w_k|^2$ es necesario resolver la ecuación de Klein-Gordon para las fluctuaciones en σ . La ecuación usual de Klein-Gordon

$$[\square^2 + m^2] \phi = 0, \quad (3.21)$$

sufre ciertas modificaciones dado a que se debe considerar la masa m_σ de σ y la pequeña variación de H_{inf} dado por el parámetro de slow-roll ϵ . Luego la ecuación de Klein-Gordon toma la siguiente forma (véase apéndice C):

$$\ddot{w}_k + 3H_{inf}\dot{w}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\sigma^2 \right) w_k = 0. \quad (3.22)$$

que se soluciona fácilmente haciendo los siguientes cambios de variables:

$$w_k \equiv \frac{\lambda_k}{a}. \quad (3.23)$$

En el estado cuasi de Sitter la expansión es casi exponencial, sin embargo esta se puede describir mejor a través de la siguiente ecuación de evolución.

$$a(t) = a_{ini} [1 + H_{inf}(t_{ini}) \epsilon (t - t_{ini})]^\frac{1}{\epsilon}, \quad (3.24)$$

donde $H_{inf}(t_{ini})$ es el parámetro de Hubble en el tiempo t_{ini} . Esta misma expresión para un tiempo conformal η es de la forma

$$a(\eta) = -\frac{1}{H_{inf}(\eta)\eta(1-\epsilon)}, \quad (3.25)$$

teniendo en cuenta que η toma valores negativos. Continuando con el tiempo conformal y los cambios de variables realizados, se obtiene la siguiente ecuación de movimiento para λ_k :

$$\lambda_k'' + \left[k^2 - \frac{1}{\eta^2} \left(v^2 - \frac{1}{4} \right) \right] \lambda_k = 0, \quad (3.26)$$

en donde

$$v_\sigma \equiv \left[\frac{1}{4} - \frac{3\eta_\sigma - 2 + \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{3}{2} + \varepsilon - \eta_\sigma. \quad (3.27)$$

La solución a esta ecuación está dada en términos de las funciones de Hankel $H_{v_\sigma}^{(1)}$ y $H_{v_\sigma}^{(2)}$ de primer y segundo orden respectivamente [32, 33, 34]:

$$\lambda_k = \sqrt{-\eta} [c_1(k) H_{v_\sigma}^{(1)}(-k\eta) + c_2(k) H_{v_\sigma}^{(2)}(-k\eta)], \quad (3.28)$$

en donde $c_1(k)$ y $c_2(k)$ son las constantes de integración que vienen siendo determinadas por el régimen de super horizonte ($k \gg aH_{inf}$), que corresponden a $-k\eta \gg 1$, normalizando la solución de acuerdo a Bunch y Davies [35, 36]. Ahora bien, teniendo en cuenta que en el régimen de subhorizonte las funciones de Hankel vienen aproximadamente dadas por [32, 33, 34]

$$H_{v_\sigma}^{(1)}(-k\eta \gg 1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k\eta}} \exp \left[-i \left(k\eta + \frac{\pi}{2} v_\sigma + \frac{3\pi}{4} \right) \right], \quad (3.29)$$

$$H_{v_\sigma}^{(2)}(-k\eta \gg 1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k\eta}} \exp \left[i \left(k\eta + \frac{\pi}{2} v_\sigma + \frac{3\pi}{4} \right) \right]. \quad (3.30)$$

La normalización de Bunch y Davies [35, 36]

$$\lambda_k = \frac{\exp(-ik\eta)}{\sqrt{2k}}, \quad (3.31)$$

es obtenida en el régimen de subhorizonte escogiendo los siguientes valores para las constantes de integración:

$$c_1(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp \left[i \left(v_\sigma + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (3.32)$$

$$c_2(k) = 0. \quad (3.33)$$

Luego, la solución exacta de la ecuación (3.28) se puede reescribir como

$$\lambda_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp \left[i \left(v_\sigma + \frac{1}{2} \right) \right] \sqrt{-\eta} H_{v_\sigma}^1(-k\eta). \quad (3.34)$$

Para encontrar el espectro de $\delta\sigma$ en escalas de super horizonte que corresponde a $-k\eta \ll 1$, se debe tener en cuenta el comportamiento λ_k en este régimen. Éste se obtiene a través de las aproximaciones de las funciones de Hankel de primer orden a escalas de super horizonte [32, 33, 34]

$$H_{\nu_\sigma}^{(1)}(-k\eta \ll 1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) 2^{\nu_\sigma - \frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu_\sigma)}{\Gamma(\frac{3}{2})} (-k\eta)^{-\nu_\sigma}. \quad (3.35)$$

La magnitud del modo de la función w_k en escalas de super horizonte es entonces casi constante y aproximadamente viene dado por

$$|w_k| \approx [2(1 - \varepsilon)]^{\nu_\sigma - \frac{3}{2}} (1 - \varepsilon) \frac{\Gamma(\nu_\sigma)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{H_{inf}}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH_{inf}}\right)^{\frac{3}{2} - \nu_\sigma} \approx \frac{H_*}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH_{inf}}\right)^{\eta_\sigma - \varepsilon}. \quad (3.36)$$

en donde se ha empleado la relación entre ν_σ , ε , y η_σ establecida en la ecuación (3.27). Haciendo uso de la ecuación (3.20), el espectro de perturbaciones en σ es finalmente escrito como

$$\mathcal{P}_{\delta\sigma}(k) \approx \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH_{inf}}\right)^{n_{\delta\sigma}}, \quad (3.37)$$

cuyo índice espectral $n_{\delta\sigma}$ es dado por

$$n_{\delta\sigma} = 2\eta_\sigma - 2\varepsilon. \quad (3.38)$$

en donde hemos encontrado que la amplitud del espectro $\mathcal{P}_{\delta\sigma}$ presenta una pequeña dependencia parametrizada por la pequeña evolución de H_{inf} y la masa m_σ del campo ligero σ caracterizado por el reducido tamaño de los parámetros ε y η_σ .

CAPITULO 4

Perturbaciones cosmológicas

Además de la dinámica inflacionaria de fondo, es muy importante discutir la evolución de las fluctuaciones cuánticas de los campos del inflatón $\delta\varphi(t, x)$ y curvatura $\delta\sigma(t, x)$. En el paradigma inflacionario asociado con las fluctuaciones de vacío se presentan las perturbaciones primordiales de la densidad de energía, las cuales sobreviven después de inflación y son el origen de todas las estructuras en el Universo. El conocimiento del origen de la estructura en el Universo es dado una vez el Universo empieza a ser dominado por la materia, en la cual toman importancia las inhomogeneidades de la densidad de energía ($\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-5}$) las cuales fueron amplificadas por la gravedad y se han convertido en las estructuras observadas hoy en día [3, 19, 20, 21]. La existencia de estas inhomogeneidades fue de hecho confirmada por el COBE al descubrir las anisotropías en la RCF. En esta sección se resume de una forma cualitativa el proceso por el cual las perturbaciones son generadas durante inflación. Esto también ayudará a apreciar mejor los diferentes mecanismos alternativos que se han propuesto recientemente (curvatura entre otros) para explicar las perturbaciones en la densidad de energía en el escenario inflacionario.

Como se había mencionado anteriormente, las perturbaciones en el Universo observable son definidas con respecto a un universo no perturbado, es decir homogéneo e isotrópico, el cual viene descrito por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). El elemento de línea para tal métrica es:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = - dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (4.1)$$

definiendo el factor de escala no perturbado $a(t)$, tiempo cósmico t , y coordenadas cartesianas espaciales \mathbf{x} [3]. Para definir la perturbación en la curvatura ζ , se toman hipersuperficies de espacio-tiempo con $t = cte$ y densidad de energía uniforme. La componente escalar de la parte espacial de la métrica perturbada es entonces parametrizada de la manera siguiente por la perturbación en la curvatura $\zeta(t, \mathbf{x})$ [17]:

$$g_{ij} = a^2(t)e^{2\zeta(t, \mathbf{x})}\delta_{ij} = \tilde{a}^2(t, \mathbf{x})\delta_{ij}. \quad (4.2)$$

De acuerdo a esta definición, ζ es la perturbación en $\ln(\tilde{a})$, en donde \tilde{a} es el parámetro de expansión local $\tilde{a}(t, x) = a(t)e^{\zeta(t, x)}$. La relación de ζ con la perturbación en la temperatura de la radiación cósmica de fondo $\delta T/T$ viene descrita por el efecto Sachs-Wolfe [4]

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_k \approx \left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)_k = -\frac{1}{5}\zeta_k, \quad (4.3)$$

en donde k hace referencia a los modos de la perturbación. El efecto Sachs-Wolfe fue estudiado inicialmente por Rainer K. Sachs y Arthur M. Wolfe, el cual consiste en el corrimiento al rojo gravitatorio que sufren los fotones provenientes de la radiación cósmica de fondo al cruzar por potenciales gravitacionales.

4.1. Perturbación en la curvatura

El estudio de las perturbaciones cosmológicas en la densidad de energía radica en la evolución del espacio-tiempo que no cumple con el principio cosmológico, es decir, no presenta homogeneidad ni isotropía. Esto se realiza analizando la evolución de las diferencias entre dos espacio-tiempos, uno, el cual será el objeto de estudio y dos, el espacio-tiempo designado de referencia. Para nuestro estudio el sistema de referencia es el espacio-tiempo plano de Friedmann-Robertson-Walker. Con tal fin se emplea la relatividad general que es una teoría de gauge donde las transformaciones de gauge son transformaciones de coordenadas de un marco de referencia a otro.

El cálculo de la perturbación de una cantidad dada, es definido cómo la diferencia entre el valor que esta cantidad tiene en el espacio-tiempo real y el valor que esta asume en el espacio-tiempo de referencia no perturbado. Luego es necesario realizar una comparación directa entre estos dos valores en un mismo punto del espacio-tiempo. Dado que los dos valores se encuentran en geometrías diferentes, es fundamental encontrar una relación que permita hallar unívocamente el mismo punto en los dos espacio-tiempos.

Al fijar un gauge en relatividad general se debe elegir un sistema coordenado. La escogencia de las coordenadas define una malla de espacio-tiempo (líneas que corresponden a las coordenadas espaciales fijas x) y una lonja en hipersuperficies (líneas que corresponden a la coordenada fijas de tiempo t).

Al momento de realizar un cambio en el sistema de coordenadas se presenta un problema con el gauge, y es el siguiente: un cambio en el sistema coordenado implica la variación de la perturbación de una cantidad dada, la cual puede asumir diferentes valores, de acuerdo a la elección del gauge. Para evitar este problema se presentan dos opciones:

- 1) Identificar las combinaciones que representan cantidades invariantes de gauge.
- 2) Elegir un gauge dado y llevar a cabo los cálculos en este gauge.

La elección del gauge puede ser técnicamente más sencilla, pero surgen problemas con las cantidades no físicas. Desarrollar un cálculo con cantidades invariantes de gauge puede ser técnicamente más complicado pero brinda la ventaja de que trata solamente con las cantidades físicas.

Existen dos cantidades invariantes de gauge, que son fundamentales al momento de calcular las perturbaciones en la densidad de energía. En este caso, las transformaciones de coordenadas serán hechas sobre hipersuperficies de $t = cte$, por ende, ser invariante de gauge es equivalente a ser independiente del slicing.

El elemento de línea perturbado es de la forma:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2\phi_G)d\eta^2 + 2\partial_i B d\eta dx^i + ((1 - 2\psi)\delta_{ij} + D_{ij}E) dx^i dx^j \right], \quad (4.4)$$

en donde $D_{ij} \equiv \partial_i \partial_j - (\frac{1}{3})\delta_{ij}\nabla^2$, y ϕ_G, B, ψ, E son cantidades escalares.

4.2. Perturbación en la curvatura comóvil

La cantidad R definida por:

$$\mathcal{R} = -\psi - H \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}}, \quad (4.5)$$

corresponde la perturbación en la curvatura comóvil y es una cantidad invariante de gauge por la forma en que fue construida y se encuentra relacionada con la perturbación en la curvatura dependiente del gauge ψ , en un slicing genérico y con la perturbación del inflatón $\delta\varphi$ en un slicing comóvil, el cual se define como ortogonal a las líneas de mundo de los observadores comóviles.

4.3. Perturbación en la curvatura en slices de densidad de energía uniforme

La cantidad ζ definida por:

$$\zeta = -\psi - H \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}, \quad (4.6)$$

corresponde a la perturbación en la curvatura en slices de densidad de energía uniforme. Esta cantidad, al igual que la anterior (4.5), también es invariante de gauge por construcción y está relacionada con la perturbación en la curvatura dependiente del gauge ψ , en un slicing genérico y con la perturbación del inflatón $\delta\varphi$ en un slicing de densidad de energía uniforme. Vale aclarar que el slicing de densidad de energía uniforme está definido como aquél en el cual no hay perturbación en la densidad de energía, es decir $\delta\rho = 0$.

Es importante señalar que a escalas de superhorizonte la perturbación en la curvatura comóvil y la perturbación en la curvatura en slices de densidad de energía uniforme se encuentran relacionadas de la siguiente forma [33]

$$\zeta \approx -\psi - H \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}} = \mathcal{R}. \quad (4.7)$$

4.4. Perturbación en la curvatura en el escenario del curvatón

Haciendo uso de la perturbación en la curvatura, definida en la ecuación (4.6) se puede escribir la perturbación en la curvatura total ζ para el escenario del curvatón como:

$$\zeta \equiv -\psi - H \left(\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}_0} \right)_{total}, \quad (4.8)$$

en donde la densidad de energía total ρ_{total} es simplemente la adición de las densidades de energía del curvatón y de radiación (ρ_σ y ρ_r), que definen perturbaciones en la curvatura conservadas asociadas al curvatón y a la radiación (ζ_σ y ζ_r):

$$\zeta_\sigma \equiv -\psi - H \frac{\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{\sigma 0}} = -\psi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_\sigma}{\rho_{\sigma 0}}, \quad (4.9)$$

$$\zeta_r \equiv -\psi - H \frac{\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{r 0}} = -\psi + \frac{1}{4} \frac{\delta\rho_r}{\rho_{r 0}}. \quad (4.10)$$

En las anteriores expresiones se ha empleado la ecuación de continuidad (2.11) se toma $P_0 = 0$ para un fluido de materia, y $P_0 = \rho_0/3$ para un fluido de radiación [3, 37, 38]. Combinando las expresiones (4.8), (4.9) y (4.10), la perturbación total en la curvatura ζ puede ser escrita como la suma ponderada de la manera siguiente (véase apéndice F):

$$\zeta \equiv -\psi - H \left(\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}_0} \right)_{total} = -\psi - H \left(\frac{\delta\rho_r + \delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{r 0} + \dot{\rho}_{\sigma 0}} \right) = -\psi - H \left(\frac{\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{r 0} + \dot{\rho}_{\sigma 0}} + \frac{\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{r 0} + \dot{\rho}_{\sigma 0}} \right)$$

$$\implies \zeta = (1 - r)\zeta_r + r\zeta_\sigma, \quad (4.11)$$

con el factor de modulación

$$r \equiv \frac{3\rho_{\sigma_0}}{4\rho_{r_0} + 3\rho_{\sigma_0}}. \quad (4.12)$$

Se puede apreciar que justo al comienzo de la época dominada por la radiación, de la cual se sigue un estado de recalentamiento producido por el decaimiento del inflatón, r es aproximadamente cero por que ρ_σ es insignificante en ese momento. Esto es debido a que $\zeta_r \leq 10^{-2}\zeta$ para asegurar que el campo del inflatón no genere a ζ , por lo tanto $\zeta \approx \zeta_r$ se puede considerar insignificante. Sin embargo, r crece en el tiempo debido al relativo corrimiento al rojo entre ρ_σ y ρ_r hasta cuando eventualmente σ decae [figura 4.1]. En las ecuaciones (F.2) y (F.3) vemos que la ζ total crece en el tiempo acercándose cada vez más a la perturbación en la curvatura del curvatón ζ_σ . Un caso interesante se presenta cuando σ ha dominado la densidad de energía antes de decaer; en este caso se tiene $r \approx 1$ y por lo tanto $\zeta \approx \zeta_\sigma$. Cuando σ decae, ζ es impresa en el fluido remanente de radiación, comenzando de esta forma el proceso de inestabilidad gravitacional que finaliza con las actuales estructuras a gran escala observadas.

Uno de los requerimientos del escenario del curvatón es que la perturbación en la curvatura producida por el inflatón después de inflación ζ_r es completamente despreciable comparada con la producida por el curvatón ζ_σ durante el mismo período: $\zeta_r \ll \zeta_\sigma$. Bajo esta suposición, la expresión para la ζ total después que ha decaído el curvatón σ viene dada por la ecuación (F.2) como

$$\zeta \approx r\zeta_\sigma, \quad (4.13)$$

en la aproximación del decaimiento repentino [11]. Para un modelo que va mucho más allá de esta aproximación, la expresión para el ζ total en términos de ζ_σ es obtenida solamente por métodos numéricos, cuyo resultado viene siendo para este caso [13, 39, 40]

$$\zeta \approx \Omega_{dec}\zeta_\sigma, \quad (4.14)$$

en donde Ω_{dec} es la fracción global de la densidad de energía justo antes de decaer el curvatón:

$$\Omega_{dec} = \left(\frac{\rho_{\sigma_0}}{\rho_{total_0}} \right)_{dec}. \quad (4.15)$$

Como se había mencionado antes, la normalización f_{NL} del biespectro $B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$ de ζ en el escenario del curvatón está directamente relacionada con Ω_{dec} en el caso de que éste no esta tan proximo a 1 [13, 41]:

$$f_{NL} \approx \frac{5}{4\Omega_{dec}}. \quad (4.16)$$

El parámetro f_{NL} brinda información acerca del nivel de no gaussianidad presente en ζ , del cual se conoce una cota superior a través de los datos del WMAP [5] en donde $-9 <$

$f_{NL} < 111$. Esto nos conduce a un rango de valores permitidos para Ω_{dec} bajo la condición $\Omega_{dec} \leq 1$, el cual es

$$1,13 \times 10^{-2} \leq \Omega_{dec} \leq 1. \quad (4.17)$$

La presente cota inferior de Ω_{dec} probablemente será incrementada por los futuros datos del satélite PLANCK si la no gaussianidad no es detectada.

Una vez que se ha estudiado la forma en que la perturbación en la curvatura se produce en el escenario del curvatón, se procede ahora a estudiar el espectro $\mathcal{P}_\zeta(k)$ de ζ . Con base en la ecuación (3.14), y teniendo en cuenta que la ecuación de movimiento para $\delta\sigma_a$ es igual a la que se obtiene para el campo de fondo σ_{a0} , durante todo el período de inflación y durante el período post inflacionario, siempre y cuando la perturbación en la curvatura debida al invariante de gauge ψ sea fijada a cero, podemos relacionar la razón de cambio de la densidad de energía de σ en cualquier tiempo t con la razón de cambio de σ algún tiempo después de haber salido del horizonte pero antes de que inicien las oscilaciones del curvatón:

$$\frac{\delta\rho_\sigma}{\rho_{\sigma_0}} \approx 2 \left(\frac{\delta\sigma_a}{\sigma_{a0}} \right) \simeq 2 \frac{\delta\sigma}{\sigma_*}. \quad (4.18)$$

De las ecuaciones (4.9), (4.14) y (4.18), ζ es expresado en términos de las perturbaciones en σ algún tiempo después de salir del horizonte de Hubble:

$$\zeta \approx \frac{2}{3} \Omega_{dec} \frac{\delta\sigma}{\sigma_*}, \quad (4.19)$$

y en consecuencia el espectro $\mathcal{P}_\zeta(k)$ es dado por

$$\mathcal{P}_\zeta(k) \approx \frac{4}{9} \Omega_{dec}^2 \frac{\mathcal{P}_{\delta\sigma}(k)}{\sigma_*^2}. \quad (4.20)$$

Dado que el campo del curvatón σ es un campo ligero cuya densidad de energía es despreciable en inflación; entonces, del análisis y los resultados de la subsección (3,2) y haciendo uso de las ecuaciones (3.37) y (3.38) se obtiene como resultado

$$\mathcal{P}_\zeta(k) \equiv A_\zeta^2 \left(\frac{k}{aH_{inf}} \right)^{n_\zeta} \simeq \left[\frac{H_* \Omega_{dec}}{3\pi\sigma_*} \right]^2 \left(\frac{k}{aH_{inf}} \right)^{2\eta_\sigma - 2\epsilon}. \quad (4.21)$$

El índice espectral n_ζ está en buen acuerdo con la observación, el cual requiere un espectro de potencia de escala casi invariante [5, 6]:

$$-0,053 < n_\zeta < -0,026. \quad (4.22)$$

4.5. Dinámica inflacionaria y pos-inflacionaria

Durante inflación la perturbación en la curvatura debido al curvatón ζ_σ es una perturbación en la isocurvatura, a pesar de que pueda ser grande con respecto a la cantidad que se está midiendo su aporte es muy pequeño debido a la expresión $\zeta = (1 - r)\zeta_r + r\zeta_\sigma$ en donde inicialmente r es cero. Entonces, a pesar de que se tenga un valor relativamente grande, la contribución al ζ_{total} es mínima. Luego, calcular ζ_{total} durante inflación no es muy relevante debido a que tiende a cero.

Ahora se analizará el curvatón antes de que empiece a oscilar. En este caso se tienen un fluido de radiación (debido al decaimiento del inflatón) y el campo del curvatón, dado a que se pueden considerar como fluidos no interactuantes entre ellos. La ζ_{total} si presenta una variación porque el parámetro r si varía debido a la evolución independiente de cada fluido.

La perturbación en la curvatura ζ mientras se tiene radiación y el curvatón no ha iniciado sus oscilaciones, en general no se considera en base a que se presume que durante esta etapa, la densidad de energía de radiación ρ_r si bien va disminuyendo, aún sigue siendo dominante con respecto a la densidad de energía aportada por el curvatón ρ_σ , de manera que la contribución mayor a la perturbación en la curvatura no es por el curvatón sino por la radiación (inflatón), por lo tanto calcular la ζ_{total} durante esta época no es relevante porque su valor es muy pequeño. Por otra parte, un caso interesante se presenta cuando empiezan las oscilaciones del campo del curvatón hasta en el momento en que éste decae justo antes de dominar la densidad de energía.

Durante las oscilaciones del curvatón σ el valor de su amplitud va disminuyendo debido a la expansión del universo, de igual forma su densidad de energía ρ_σ también sufre este corrimiento al rojo. Es necesario que el curvatón decaiga antes de que domine la densidad de energía, de lo contrario, si el curvatón llegase a dominar la densidad de energía del universo se estaría generando una segunda etapa inflacionaria, por esta razón es que el curvatón debe decaer justo antes de que domine la densidad de energía [figura 4.1].

El curvatón decae cuando la razón de decaimiento es del orden del parámetro de Hubble, es decir cuando se tiene una ausencia de equilibrio térmico de manera que surge el decaimiento. Se puede considerar que el curvatón esta interactuando y que exista una constante de acoplamiento entre él y otros entes o partículas, luego se tendrá que el curvatón está decayendo a un par de partículas, que estas a su vez estarán decayendo a un curvatón y esto se mantendrá mientras se tenga equilibrio térmico, por lo tanto, cuando no hay equilibrio térmico la abundancia decae a cero y eso sucede cuando la razón de decaimiento es del orden del parámetro de Hubble. El tiempo para el cual sucede este proceso no se conoce

en general, y esto es debido a que depende de las características particulares del modelo de curvátón que se éste considerando.

Finalmente se tiene que para realizar un cálculo significativo de la perturbación en la curvatura total ζ_{total} éste se debe realizar en el intervalo en que comienzan las oscilaciones del curvátón hasta el momento de su decaimiento. De modo que, a pesar de que se tiene una historia interesante, el cálculo respectivo debe hacerse en el intervalo mencionado anteriormente, de igual forma se hará para hallar el valor del nivel de no gaussianidad.

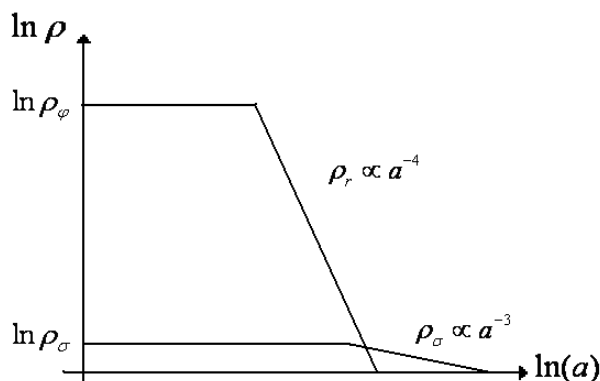


Figura 4.1: **Evolución de las densidades de energía en el modelo de inflación.** El eje horizontal representa el parámetro de expansión en escala logaritmo natural $\ln(a)$ y el eje vertical representa las densidades de energía en escala logaritmo natural $\ln(\rho)$. Recordemos que las densidades de energía son inversamente proporcionales con respecto al parámetro de expansión de la forma siguiente: $\rho_\phi \propto a^{-4}$ y $\rho_\sigma \propto a^{-3}$.

4.6. No gaussianidad primordial en la perturbación en la curvatura ζ

La no gaussianidad es una característica observacional relevante que permitire discriminar entre los posibles escenarios competentes para la generación de la perturbación en la curvatura ζ . Las propiedades estadísticas de ζ son cuantificadas a través del correlador n puntos $\langle \zeta(k_1)\zeta(k_2)\dots\zeta(k_n) \rangle$ asociado a una función de distribución de probabilidad $f(\zeta)$. Las cantidades que definen esta distribución de probabilidad son sus momentos $m_\zeta(n)$ [42, 44, 43] :

$$\text{El valor medio } m_\zeta(1) = \langle \zeta \rangle = \int \zeta f(\zeta) d\zeta, \quad (4.23)$$

$$\text{La varianza } m_\zeta(2) = \int (\zeta - \langle \zeta \rangle)^2 f(\zeta) d\zeta , \quad (4.24)$$

$$\text{El skewness } m_\zeta(3) = \int (\zeta - \langle \zeta \rangle)^3 f(\zeta) d\zeta , \quad (4.25)$$

$$\text{La curtosis } m_\zeta(4) = \int (\zeta - \langle \zeta \rangle)^4 f(\zeta) d\zeta , \quad (4.26)$$

entre otros. Si la función de distribución es gaussiana entonces depende sólo de los dos primeros momentos (*valor medio y varianza*)

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_\zeta(2)}} e^{-(\zeta - m_\zeta(1))^2 / 2m_\zeta(2)} . \quad (4.27)$$

En caso de que la función de distribución sea no gaussiana entonces son necesarios los momentos de orden $n \geq 3$, siendo $m_\zeta(3)$ el primer indicador de no gaussianidad.

Las propiedades estadísticas de las perturbaciones son especificadas a través de los valores esperados, los cuales son tomados con respecto al estado cuántico de vacío del Universo durante inflación. Para esto, se debe considerar la serie de Fourier de $\zeta(\mathbf{x})$:

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \zeta(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} . \quad (4.28)$$

Los valores esperados están dados en términos de las funciones de correlación para los modos $\zeta(\mathbf{k}, t)$, definidas por:

$$\text{Correlador de dos puntos} \quad \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_\zeta(k) , \quad (4.29)$$

$$\text{Correlador de tres puntos} \quad \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B_\zeta(k_1, k_2, k_3) , \quad (4.30)$$

Las cantidades $P_\zeta(k)$ y $B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$ son conocidas como espectro y biespectro respectivamente, y están relacionadas con los momentos $m_\zeta(n)$ de ζ por medio de:

$$m_\zeta(2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_\zeta(k) , \quad (4.31)$$

$$m_\zeta(3) = \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6} B_\zeta(k_1, k_2, k_3) . \quad (4.32)$$

El espectro $P_\zeta(k)$ es parametrizado a través de una amplitud A_ζ y un índice espectral n_ζ :

$$P_\zeta(k) = \frac{2\pi^2}{k^3} A_\zeta^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_\zeta - 1} . \quad (4.33)$$

El biespectro B_ζ es parametrizado a través del espectro P_ζ :

$$B_\zeta(k_1, k_2, k_3) \equiv \frac{6}{5} f_{NL} [P_\zeta(k_1)P_\zeta(k_2) + \textit{permutaciones ciclicas}] , \quad (4.34)$$

en donde f_{NL} es llamado nivel de no gaussianidad. Se tiene entonces que n_ζ y f_{NL} son parámetros que discriminan entre los diferentes modelos para el origen de las estructuras a gran escala en el Universo observable. Existen datos observacionales que los modelos inflacionarios deben predecir con exactitud, por ejemplo: $A_\zeta \simeq 5 \times 10^{-5}$ [45], $n_\zeta = 0,960 \pm 0,014$ [5] y $-9 \lesssim f_{NL} \lesssim 111$ [5].

CAPITULO 5

Formalismo δN

Las propiedades estadísticas de la perturbación en la curvatura ζ pueden ser estudiadas mediante el formalismo δN . Para definir la perturbación en la curvatura ζ se toman hipersuperficies de espacio-tiempo con $t = cte$ y densidad de energía uniforme. La componente escalar de la parte espacial de la métrica perturbada es entonces parametrizada por la perturbación en la curvatura $\zeta(t, \mathbf{x})$ [17]:

$$g_{ij} = a^2(t)e^{2\zeta(t, \mathbf{x})}\delta_{ij}(t, \mathbf{x}) = \tilde{a}^2(t, \mathbf{x})\delta_{ij}(t, \mathbf{x}) . \quad (5.1)$$

De acuerdo a esta definición, ζ es la perturbación en $\ln(\tilde{a})$, en donde \tilde{a} es el parámetro de expansión local. La relación de ζ con la variación en la temperatura de la radiación cósmica de fondo $\delta T/T$ viene descrita por el efecto Sachs-Wolfe [4]

$$\frac{\delta T}{T} \approx -\frac{1}{5}\zeta(t, x) . \quad (5.2)$$

La parte espacial del tensor métrico está dada por [46, 47] :

$$g_{ij} = a^2(t) [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + \Pi_{ij}] . \quad (5.3)$$

Definiendo $\gamma_{ij} = \exp[\Pi_{ij}]$, y expandiendo (5.1) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \exp [2\zeta(t, \mathbf{x}) + \Pi_{ij}] &= \delta_{ij} + (2 \delta_{ij} \zeta(t, \mathbf{x}) + \Pi_{ij}) + \frac{1}{2!}(2 \delta_{ij} \zeta(t, \mathbf{x}) + \Pi_{ij})^2 \dots \\ &= \delta_{ij}(1 + 2 \delta_{ij} \zeta(t, \mathbf{x})) + \Pi_{ij} + \frac{1}{2!}(2 \delta_{ij} \zeta(t, \mathbf{x}) + \Pi_{ij})^2 \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

en donde se puede ver que, si se hacen correcciones a primer orden, la definición (5.1) concuerda con la expresión (5.3), permitiendo que la perturbación en la curvatura quede bien

definida.

Se puede considerar ahora una hipersuperficie de $t = cte$ cuya métrica tenga la forma de la ecuación (5.1) sin el factor ζ el cual se denomina lonja plana. Comenzando para cualquier lonja plana inicial en un tiempo inicial t_{ini} , el monto local de expansión se define como:

$$N(t, \mathbf{x}) \equiv \ln \left[\frac{\tilde{a}(t, \mathbf{x})}{a(t_{in})} \right], \quad (5.5)$$

para una lonja final de densidad de energía uniforme. De esta manera [17]

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = \delta N \equiv N(t, \mathbf{x}) - N_0(t), \quad (5.6)$$

Éste es el formalismo δN que relaciona la perturbación en la curvatura ζ con la perturbación en el monto local de expansión $N(t, \mathbf{x})$ y el monto de expansión no perturbado $N_0(t)$.

La predicción inflacionaria establece que la evolución del universo observable está determinada por los valores de uno o más campos escalares presentes durante el periodo inflacionario y que se pueden representar de la forma: $\phi_i(\mathbf{x}) = \phi_i + \delta\phi_i(\mathbf{x})$.

Eligiendo las cantidades ϕ_i como las que describen el universo homogéneo, la ecuación (5.6) queda [17]:

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = N(\rho(t), \phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots) - N(\rho(t), \phi_1, \phi_2, \dots). \quad (5.7)$$

En esta expresión, el parámetro N es evaluado en un universo no perturbado, desde una época en donde los campos tenían valores asignados hasta una época en donde la densidad de energía tiene un valor asignado ρ .

La expresión (5.7) puede ser usada para obtener una serie para ζ haciendo uso del teorema de Taylor. Esta expresión se puede reescribir, evaluando los campos en el tiempo t_* que es cuando las escalas relevantes salen del horizonte, $\phi_i(\mathbf{x}, t_*) = \phi_i(t_*) + \delta\phi_i(\mathbf{x}, t_*)$, como:

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = N(\rho(t), \phi_1 + \delta\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2 + \delta\phi_2(\mathbf{x}), \dots) - N(\rho(t), \phi_1, \phi_2, \dots). \quad (5.8)$$

Entonces, empleando el teorema de Taylor:

$$\begin{aligned} \psi(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) - \psi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial\psi}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3\psi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k + \dots \quad (5.9) \end{aligned}$$

se obtiene para $\zeta(t, \mathbf{x})$ la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \zeta(t, \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n N_{,i}(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{,ij} \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{x}) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n N_{,ijk} \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{x}) \delta\phi_k(t_*, \mathbf{x}) + \dots, \end{aligned} \quad (5.10)$$

en donde: $N_{,i} \equiv \frac{\partial N}{\partial \phi_i}$, $N_{,ij} \equiv \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_i \partial \phi_j}$ y así sucesivamente.

5.1. Estudios a primer y segundo orden

Al estudiar el primer término en la serie de ζ , es decir $\zeta(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x})$ se obtiene su transformada de fourier $\zeta(t, \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{k})$ en donde $\phi_i(t_*, \mathbf{k})$ es la transformada de fourier de $\phi_i(t_*, \mathbf{x})$. De la definición de correlador de dos puntos (4.29), se puede calcular el espectro de ζ , es decir \mathcal{P}_ζ , en función del espectro $\mathcal{P}_{\delta\phi_i}$ de las perturbaciones en los campos ϕ_i :

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t, \mathbf{k}_1) \zeta(t, \mathbf{k}_2) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n N_{,i}(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{k}_1) \sum_{j=1}^n N_{,j}(t) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{k}_2) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i,j=1}^n N_{,i}(t) N_{,j}(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{k}_1) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{k}_2) \right\rangle \quad (5.11) \\ &= \sum_{i,j=1}^n N_{,i}(t) N_{,j}(t) \langle \delta\phi_i(t_*, \mathbf{k}_1) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{k}_2) \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n N_{,i}(t) N_{,j}(t) \frac{2\pi^2}{k^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathcal{P}_{\delta\phi_i} \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n N_{,i}^2(t) \frac{2\pi^2}{k^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathcal{P}_{\delta\phi_i}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

en donde se ha tomado en cuenta la relación $P_\zeta = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\zeta$. De esta expresión y (4.29) se puede identificar claramente el espectro de ζ :

$$\mathcal{P}_\zeta = \mathcal{P}_{\delta\phi_i} \sum_{i=1}^n N_i^2(t). \quad (5.13)$$

El espectro de las perturbaciones en los campos $\mathcal{P}_{\delta\phi_i}$ es casi invariante de escala y es de la forma [36]:

$$\mathcal{P}_{\delta\phi_i} = \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2, \quad (5.14)$$

el cual es similar al espectro obtenido para el campo del curvaton σ estudiado en la sección [3.2] en donde H_* es el parámetro de Hubble evaluado en el tiempo en el que las escalas relevantes salen del horizonte. Se puede concluir que si se toma corrección a primer orden en la serie de ζ (5.10), entonces el espectro queda determinado por:

$$\mathcal{P}_\zeta = \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2 \sum_{i=1}^n N_i^2(t). \quad (5.15)$$

Realizando un estudio de la serie de ζ a segundo orden es posible obtener las contribuciones al biespectro B_ζ . Por lo tanto, partiendo de:

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_{,i}(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{,ij} \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{x}) \quad (5.16)$$

el cálculo es similar al caso anterior del espectro a primer orden. Se toma la transformada de fourier de (5.16) y se utiliza la definición (4.30). La expresión para ζ , en este caso, tomaría la forma:

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_{,i}(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{,ij} \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{,ij} \langle \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{x}) \rangle \quad (5.17)$$

y obtener la transformada de fourier de esta expresión

$$\zeta(t, \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^n N_{,i}(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{k}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{,ij} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(t_*, \mathbf{k} + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{k}) \quad (5.18)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{,ij} (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}) \langle \delta\phi_i(t_*, \mathbf{k}) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{k}) \rangle, \quad (5.19)$$

en donde se ha utilizado el teorema de convolución de la transformada de fourier debido a que aparecen productos de las perturbaciones en los campos escalares ϕ_i . La contribución al biespectro se obtiene haciendo el triple producto de ζ , y tomando el valor esperado: $\langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \zeta(\mathbf{k}_3) \rangle$. El triple producto genera los 27 términos siguientes:

$$\begin{aligned}
& \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) = \tag{5.20} \\
& \sum N_{,i} N_{,j} N_{,k} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1)\delta\phi_j(\mathbf{k}_2)\delta\phi_k(\mathbf{k}_3) \\
& + \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1)\delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p})\delta^*\phi_l(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1)\delta\phi_j(\mathbf{k}_3) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x})\delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2)\delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p})\delta^*\phi_l(\mathbf{p}) \\
& + \frac{1}{4} \sum N_{,i} N_{,jk} N_{,lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p})\delta^*\phi_k(\mathbf{p}) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_l(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p})\delta^*\phi_m(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{4} \sum N_{,i} N_{,jk} N_{,lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p})\delta^*\phi_k(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_l(\mathbf{x})\delta\phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2)\delta\phi_j(\mathbf{k}_3) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x})\delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{4} \sum N_{,i} N_{,jk} N_{,lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_3) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_j(\mathbf{x})\delta\phi_k(\mathbf{x}) \rangle \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_l(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p})\delta^*\phi_m(\mathbf{p}) \\
& + \frac{1}{4} \sum N_{,i} N_{,jk} N_{,lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_3) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_j(\mathbf{x})\delta\phi_k(\mathbf{x}) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_l(\mathbf{x})\delta\phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1)\delta\phi_j(\mathbf{k}_2) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p})\delta^*\phi_l(\mathbf{p}) \\
& + \frac{1}{4} \sum N_{,i} N_{,jk} N_{,lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p})\delta^*\phi_k(\mathbf{p}) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_l(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p})\delta^*\phi_m(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{4} \sum N_{,i} N_{,jk} N_{,lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p})\delta^*\phi_k(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_l(\mathbf{x})\delta\phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{4} \sum N_{,i} N_{,jk} N_{,lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p})\delta^*\phi_k(\mathbf{p}) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_l(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p})\delta^*\phi_m(\mathbf{p}) \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p})\delta^*\phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p})\delta^*\phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p})\delta^*\phi_n(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \\
& \times \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta \phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta \phi_m(\mathbf{x}) \delta \phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{4} \sum N_{,i} N_{,jk} N_{,lm} \delta \phi_i(\mathbf{k}_2) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta \phi_j(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_k(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta \phi_l(\mathbf{x}) \delta \phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta \phi_i(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta \phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta \phi_m(\mathbf{x}) \delta \phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta \phi_i(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta \phi_k(\mathbf{x}) \delta \phi_l(\mathbf{x}) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta \phi_m(\mathbf{x}) \delta \phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta \phi_i(\mathbf{k}_1) \delta \phi_j(\mathbf{k}_2) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta \phi_k(\mathbf{x}) \delta \phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{4} \sum N_{,i} N_{,jk} N_{,lm} \delta \phi_i(\mathbf{k}_1) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta \phi_j(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_k(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta \phi_l(\mathbf{x}) \delta \phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{4} \sum N_{,i} N_{,jk} N_{,lm} \delta \phi_i(\mathbf{k}_1) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta \phi_j(\mathbf{x}) \delta \phi_k(\mathbf{x}) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta \phi_l(\mathbf{x}) \delta \phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{4} \sum N_{,i} N_{,jk} N_{,lm} \delta \phi_i(\mathbf{k}_2) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta \phi_j(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_k(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta \phi_l(\mathbf{x}) \delta \phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta \phi_m(\mathbf{x}) \delta \phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta \phi_k(\mathbf{x}) \delta \phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta \phi_m(\mathbf{x}) \delta \phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{4} \sum N_{,i} N_{,jk} N_{,lm} \delta \phi_i(\mathbf{k}_2) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta \phi_j(\mathbf{x}) \delta \phi_k(\mathbf{x}) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta \phi_l(\mathbf{x}) \delta \phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta \phi_i(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta \phi_k(\mathbf{x}) \delta \phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta \phi_m(\mathbf{x}) \delta \phi_n(\mathbf{x}) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_i(\mathbf{x}) \delta\phi_j(\mathbf{x}) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle .
\end{aligned}$$

Tomando el valor esperado del primer término de (5.20) se obtiene

$$\sum_{i,j,k=1}^n N_{,i} N_{,j} N_{,k} \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) \delta\phi_k(\mathbf{k}_3) \rangle . \quad (5.21)$$

La contribución asociada a este término ya ha sido calculada [48, 49] y encontrada como irrelevante, es decir, su contribución al f_{NL} es casi nula. En lo que sigue, se asumirá no gaussianidad en las perturbaciones de los campos escalares ϕ_i , es decir, $\langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) \delta\phi_k(\mathbf{k}_3) \rangle = 0$. Debido esto, los 12 términos de (5.20) que contienen 5 términos de perturbación en los campos ($\delta\phi_i$) se asumen despreciables.

Seis de los 27 términos contienen cuatro términos de perturbación en los campos ($\delta\phi$). Explícitamente:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle . \quad (5.22)
\end{aligned}$$

Tomando el valor esperado del primer término se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \right\rangle = \\
& \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \rangle . \quad (5.23)
\end{aligned}$$

El término que está entre corchetes puede descomponerse en correladores de mas bajo orden, vía teorema de Wick [50], de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1)\delta\phi_j(\mathbf{k}_3)\delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p})\delta^*\phi_l(\mathbf{p}) \rangle &= \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1)\delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \rangle \langle \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p})\delta^*\phi_l(\mathbf{p}) \rangle \\
&+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1)\delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \rangle \langle \delta\phi_j(\mathbf{k}_3)\delta^*\phi_l(\mathbf{p}) \rangle \\
&+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1)\delta^*\phi_l(\mathbf{p}) \rangle \langle \delta\phi_j(\mathbf{k}_3)\delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \rangle \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Usando la definición de correlador de dos puntos (4.29) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1)\delta\phi_j(\mathbf{k}_3)\delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p})\delta^*\phi_l(\mathbf{p}) \rangle &= \frac{2\pi^2}{k_1^3}\delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)\delta_{ij}\frac{2\pi^2}{p^3}\delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p} - \mathbf{p})\mathcal{P}_{\delta\phi}(p)\delta_{kl} \\
&+ \frac{2\pi^2}{k_1^3}\delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{p})\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)\delta_{ik}\frac{2\pi^2}{k_3^3}\delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{p})\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)\delta_{jl} \\
&+ \frac{2\pi^2}{k_1^3}\delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p})\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)\delta_{il}\frac{2\pi^2}{k_3^3}\delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{p})\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)\delta_{jk}.
\end{aligned}$$

Introduciendo este resultado en (5.23), este primer término del grupo de cuatro perturbaciones se puede escribir como

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum N_{,i} N_{,i} N_{,kk} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2\pi^2}{k_1^3} \frac{2\pi^2}{p^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)\delta^3(\mathbf{k}_2)\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)\mathcal{P}_{\delta\phi}(p) \\
&+ \frac{1}{2}\sum N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2\pi^2}{k_1^3} \frac{2\pi^2}{k_3^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{p})\delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{p})\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3) \\
&+ \frac{1}{2}\sum N_{,i} N_{,j} N_{,ji} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{4\pi^4}{k_1^3 k_3^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p})\delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{p})\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3) \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Calculando las integrales, se obtiene respectivamente

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,i} N_{,kk} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_2) \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)}{k_1^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^3} \mathcal{P}_{\delta\phi}(p) \\
& + \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_1^3 k_3^3} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \\
& + \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_1^3 k_3^3} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \\
& = \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,i} N_{,kk} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_2) \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)}{k_1^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^3} \mathcal{P}_{\delta\phi}(p) \\
& + \frac{2}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_1^3 k_3^3} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) . \tag{5.26}
\end{aligned}$$

El primer término de esta expresión se puede expresar en otra forma, aprovechando, que a partir de la definición de correlador de dos puntos (4.29), se puede deducir la siguiente relación:

$$\langle \delta_{\phi_i}(\mathbf{x}) \delta_{\phi_j}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d^3\mathbf{k}}{k^3} \mathcal{P}_{\delta\phi_i}(k) . \tag{5.27}$$

Esta expresión evidencia el hecho de que el espectro está directamente relacionado con la varianza de la distribución $\delta_{\phi_i}(\mathbf{x})$.

Tomando esto en cuenta, se obtiene que el primer término del miembro derecho en (5.26) toma la forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,i} N_{,kk} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_2) \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)}{k_1^3} \frac{(2\pi)^3}{2\pi^2} \langle \delta_{\phi_i}(\mathbf{x}) \delta_{\phi_j}(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{2}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_1^3 k_3^3} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) . \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Los términos de (5.22) que tienen integrales son idénticos entre sí, excepto por el orden de los vectores de onda ($\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ y \mathbf{k}_3). Por lo tanto, las contribuciones de estos términos se pueden construir fácilmente haciendo la analogía con el término que se acabó de mostrar. Los dos restantes términos con integrales quedan:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,i} N_{,kk} \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_1) \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_3^3} \frac{(2\pi)^3}{2\pi^2} \langle \delta_{\phi_i}(\mathbf{x}) \delta_{\phi_j}(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{2}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_2^3 k_3^3} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) , \tag{5.29}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,i} N_{,kk} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{k}_3) \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2)}{k_2^3} \frac{(2\pi)^3}{2\pi^2} \langle \delta\phi_i(\mathbf{x}) \delta\phi_j(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{2}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2)}{k_1^3 k_2^3} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) . \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Es necesario ahora calcular las contribuciones de los términos que no tienen integrales del grupo (5.22). Tomando el valor esperado del segundo término de este grupo se obtiene:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,j} N_{,kl} \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& = -\frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,i} N_{,kk} \frac{2\pi^2}{k_1^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& = -\frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,i} N_{,kk} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_2) \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)}{k_1^3} 2\pi^2 (2\pi)^{3/2} \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle . \quad (5.31)
\end{aligned}$$

Análogamente, los otros dos términos del grupo (5.22) que no contienen integrales se pueden escribir como:

$$-\frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,i} N_{,kk} \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_1) \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_3^3} 2\pi^2 (2\pi)^{3/2} \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle , \quad (5.32)$$

y

$$-\frac{1}{2} \sum N_{,i} N_{,i} N_{,kk} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{k}_3) \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2)}{k_2^3} 2\pi^2 (2\pi)^{3/2} \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle . \quad (5.33)$$

Los términos (5.31, 5.32 y 5.33) se cancelan con los primeros términos de las expresiones (5.28, 5.29 y 5.30), entonces, la contribución total al biespectro de ζ del grupo de términos (5.22) se reduce a a la suma de los segundos término de las expresiones (5.28, 5.29 y 5.30):

$$\sum N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left[\frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_1^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_2^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2)}{k_1^3 k_2^3} \right] . \quad (5.34)$$

Asumiendo que el espectro \mathcal{P}_ζ , calculado en (5.13), es una buena aproximación (a pesar de solo haber tomado corrección a primer orden de la serie de ζ), esta contribución se puede escribir como:

$$\sum N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{1}{[\sum N_{,i}^2]^2} \left[\frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1) \mathcal{P}_\zeta(k_3)}{k_1^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_2) \mathcal{P}_\zeta(k_3)}{k_2^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1) \mathcal{P}_\zeta(k_2)}{k_1^3 k_2^3} \right] . \quad (5.35)$$

CAPITULO 6

Obtención de la expresión para f_{NL} en base al formalismo δN

El parámetro f_{NL} permite discriminar entre los diferentes modelos inflacionarios propuestos, debido a que cada modelo predice un nivel de no gaussianidad. El nivel de no gaussianidad aún no ha sido detectado pero se espera que su valor se encuentre en el rango $-9 < f_{NL} < 111$.

De las definiciones de correlador de tres puntos (4.30) y biespectro (4.34) se obtiene que:

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle = \frac{6}{5}f_{NL} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3) \left[\frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1)\mathcal{P}_\zeta(k_2)}{k_2^3 k_1^3} + \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1)\mathcal{P}_\zeta(k_3)}{k_1^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_2)\mathcal{P}_\zeta(k_3)}{k_2^3 k_3^3} \right]. \quad (6.1)$$

Comparando esta ecuación con (5.35) se obtiene la contribución al parámetro f_{NL} :

$$\frac{6}{5}f_{NL} = \frac{\sum N_{,i} N_{,j} N_{,ij}}{[\sum N_{,i}^2]^2}. \quad (6.2)$$

Restan entonces 8 términos, que son los que contienen 6 términos de perturbación en los campos:

CAPITULO 6. OBTENCIÓN DE LA EXPRESIÓN PARA F_{NL} EN BASE AL FORMALISMO

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{,ij} N_{,kl} N_{,mn} (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_i(\mathbf{x}) \delta\phi_j(\mathbf{x}) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle .
\end{aligned} \tag{6.3}$$

CAPITULO 6. OBTENCIÓN DE LA EXPRESIÓN PARA F_{NL} EN BASE AL FORMALISMO

Tomando el valor esperado, el primer término de este grupo, que contiene tres integrales, se puede poner en la forma

$$\frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1 d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^{9/2}} \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle .$$

El término entre brakets se puede descomponer en 15 términos:

$$\begin{aligned} & \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &= \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \rangle \langle \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \rangle \langle \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \rangle \langle \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \\ &+ \langle \delta \phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta \phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta \phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle , \end{aligned} \quad (6.4)$$

de los cuales solo los primeros 8 aportan al biespectro, y los 7 restantes se cancelan con los demás términos del grupo que tiene seis perturbaciones en los campos. Este aporte al correlador de tres puntos es:

$$\frac{1}{2} \sum_{ijk} N_{,ij} N_{,jk} N_{,ki} \left[\frac{2\pi^2}{(2\pi)^{3/2}} \right]^3 \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \int_L d^3 \mathbf{p} \left[\frac{1}{p^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}|^3 |\mathbf{k}_3 - \mathbf{p}|^3} + \frac{1}{p^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}|^3 |\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}|^3} \right] \quad (6.5)$$

Es posible evaluar la integral que aparece en esta expresión:

$$\int_L d^3 \mathbf{p} \left[\frac{1}{p^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}|^3 |\mathbf{k}_3 - \mathbf{p}|^3} + \frac{1}{p^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}|^3 |\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}|^3} \right] = 8\pi \ln(kL) \left[\frac{1}{k_1^3 k_2^3} + \frac{1}{k_1^3 k_3^3} + \frac{1}{k_2^3 k_3^3} \right] , \quad (6.6)$$

CAPITULO 6. OBTENCIÓN DE LA EXPRESIÓN PARA f_{NL} EN BASE AL FORMALISMO

en donde L es el corte infrarrojo escogido de tal manera que el cálculo se realiza en una caja mínima [51, 52].

Introduciendo este resultado en la expresión anterior se obtiene que

$$\frac{1}{2} \sum_{ijk} N_{,ij} N_{,jk} N_{,ki} \left[\frac{2\pi^2}{(2\pi)^{3/2}} \right]^3 \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) 8\pi \ln(kL) \left[\frac{1}{k_1^3 k_2^3} + \frac{1}{k_1^3 k_3^3} + \frac{1}{k_2^3 k_3^3} \right], \quad (6.7)$$

que se puede escribir como:

$$\sum_{ijk} N_{,ij} N_{,jk} N_{,ki} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{\mathcal{P}_\zeta}{[\sum N_i^2]^3} \left[\frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1)\mathcal{P}_\zeta(k_3)}{k_1^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_2)\mathcal{P}_\zeta(k_3)}{k_2^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1)\mathcal{P}_\zeta(k_2)}{k_1^3 k_2^3} \right] \ln(kL) \quad (6.8)$$

Comparando esta expresión con la ecuación (6.1) se obtiene el aporte al parámetro f_{NL} :

$$\frac{3}{5} f_{NL} = \ln(kL) \mathcal{P}_\zeta \frac{\sum_{ijk} N_{,ij} N_{,jk} N_{,ki}}{2 [\sum N_i^2]^3} \quad (6.9)$$

Entonces, la contribución total al parámetro f_{NL} , cuando la serie para ζ (5.10) es tomada sólo hasta segundo orden es:

$$\frac{3}{5} f_{NL} = \frac{\sum_{i,j} N_{,i} N_{,j} N_{,ij}}{2 [\sum_i N_i^2]^2} + \ln(kL) \mathcal{P}_\zeta \frac{\sum_{i,j,k} N_{,ij} N_{,jk} N_{,ki}}{2 [\sum_i N_i^2]^3} \quad (6.10)$$

Para llevar a cabo este cálculo se ha asumido que los términos a partir del tercer orden son todos despreciables comparados con los dos primeros términos en la serie de ζ (5.10).

CAPITULO 7

Nivel de no gaussianidad f_{NL} en el escenario del curvatón

Los modelos inflacionarios en física de partículas presentan diferentes valores para el nivel de no gaussianidad f_{NL} , por ejemplo, cuando se trabaja con el escenario del inflatón φ se obtiene el espectro de ζ :

$$\mathcal{P}_\zeta(k) \equiv A_\zeta^2 \left(\frac{k}{aH_{inf}} \right)^{n_\zeta} \simeq \left[\frac{H_*^2}{2\pi\dot{\varphi}} \right]^2 \left(\frac{k}{aH_{inf}} \right)^{2\eta_\varphi - 6\epsilon} = \left[\frac{H_*}{\sqrt{8\epsilon}\pi m_p} \right]^2 \left(\frac{k}{aH_{inf}} \right)^{2\eta_\varphi - 6\epsilon}, \quad (7.1)$$

el cual es del orden de los parámetros de slow-roll ($\eta_\sigma, \epsilon \leq 10^{-2}$). Si se calcula el nivel de no gaussianidad f_{NL} para este escenario φ , se obtendrá un $f_{NL} \leq 10^{-2}$ que no es detectable por misiones espaciales. Sin embargo, otro de los modelos presente durante inflación propuestos en la literatura es el campo del curvatón σ para el cual nos hemos propuesto calcular el nivel de no gaussianidad porque, cómo se vio en el capítulo 3, al no depender explícitamente de los parámetros de slow-roll, su nivel de no gaussianidad puede ser eventualmente alto para ser detectado en las futuras exploraciones en la radiación cósmica de fondo.

Al introducir el campo escalar ligero σ que no domina la densidad de energía, se obtuvo que su espectro es de la forma

$$\mathcal{P}_\zeta(k) \equiv A_\zeta^2 \left(\frac{k}{aH_{inf}} \right)^{n_\zeta} \simeq \left[\frac{H_* \Omega_{dec}}{3\pi\sigma_*} \right]^2 \left(\frac{k}{aH_{inf}} \right)^{2\eta_\sigma - 2\epsilon}, \quad (7.2)$$

en el cual se observa que la amplitud A_ζ está en función del parámetro H_* y de los parámetros libres σ_* y Ω_{dec} mediante los cuales si es posible obtener $H_* \approx 10^3 GeV$ sin alterar la planitud del potencial, evitándose de esta forma los problemas de ajuste fino, lograndose una posible verificación entre la cosmología y la física de partículas desarrollada hoy en día.

CAPITULO 7. NIVEL DE NO GAUSSIANIDAD F_{NL} EN EL ESCENARIO DEL CURVATÓN

Para calcular el f_{NL} usando la ecuación (6.8) se aclara que σ_* , es decir el valor no perturbado de ζ unos pocos tiempos de Hubble después de la salida del horizonte, es la única cantidad relevante, puesto que la perturbación en la curvatura producida por el inflatón ζ_φ impresa en el fluido de radiación durante el proceso de recalentamiento se supone despreciable. Luego, a pesar de tenerse dos fluidos radiación y curvatón, dado que la radiación no es relevante, se asumirá como si existiera un sólo fluido, por esta razón la ecuación (6.8) toma la forma:

$$-\frac{3}{2}f_{NL} = \frac{1}{2} \frac{N_{,ii}}{N_i^2}, \quad (7.3)$$

que es la expresión cuando se tiene un sólo campo.

Ahora se analiza el número de e-folds N , también conocido como el monto de expansión, este se define como

$$N = \ln \frac{a_f(x, t)}{a_i(t)}, \quad (7.4)$$

en donde tomamos $a_i(t)$ como el parámetro de expansión a la salida del horizonte y $a_f(x, t)$ como el parámetro de expansión justo antes de que el curvatón sufra el decaimiento repentino, evitando que llegue a dominar la densidad de energía, esta expresión se puede reescribir de la manera siguiente:

$$N = \ln \left[\frac{a_f(x, t)}{a_i(t)} \right] = \ln \left[\frac{a_f}{a_{osc}} \frac{a_{osc}}{a_{f-inf}} \frac{a_{f-inf}}{a_*} \right] = \ln \left[\frac{a_f}{a_{osc}} \right] + \ln \left[\frac{a_{osc}}{a_{f-inf}} \right] + \ln \left[\frac{a_{f-inf}}{a_*} \right], \quad (7.5)$$

en donde hemos subdividido el intervalo de $[a_f, a_i]$ en los intervalos $[a_f, a_{osc}]$, $[a_{osc}, a_{f-inf}]$, $[a_{f-inf}, a_*]$, siendo $(a_f, a_{osc}, a_{f-inf}, a_*)$ los valores del parámetro de expansión en : el decaimiento repentino, el inicio de las oscilaciones de σ , el final de inflación y a la salida del horizonte. Ahora bien, como se vio en la ecuación (5.6) se tiene que $\delta N = \zeta$ entonces

$$\delta N|_{osc}^f + \delta N|_{f-inf}^{ocs} + \delta N|_{horizonte}^{f-inf} = \zeta|_{osc}^f + \zeta|_{f-inf}^{ocs} + \zeta|_{horizonte}^{f-inf} = \zeta|_{osc}^f + 0 + 0, \quad (7.6)$$

por lo tanto se calculará la perturbación en la curvatura ζ como función de la densidad de energía de decaimiento ρ_{dec} , la cuál esta asociada al tiempo final, es decir en donde se quiere calcular. Como se parte de un tiempo inicial en el cual comienzan las oscilaciones, entonces ζ también es función de la densidad de energía en el momento en que comienzan las oscilaciones ρ_{osc} en el momento justo antes de salir del horizonte. Si se chequea el espectro del campo a la salida del horizonte mediante la ecuación (5.13), estas $\delta\phi_i$ son cuando salen del horizonte, luego la evolución del universo observable suavizado sobre la escala cosmológica, se supone que se determina por los valores de uno o más campos escalares ligeros, cuando esa escala sale del regimen cuántico unos pocos tiempos de Hubble después de la salida del horizonte.

CAPITULO 7. NIVEL DE NO GAUSSIANIDAD F_{NL} EN EL ESCENARIO DEL CURVATÓN

Cuando se tiene un campo escalar y un fluido de radiación en el momento en que las escalas salen del horizonte hasta el momento en que vuelven a entrar al horizonte ha ocurrido un proceso en donde ζ ha evolucionado. Ahora bien, N desde el momento de la salida del horizonte hasta el momento en que comienzan las oscilaciones en el escenario del curvatón es prácticamente imperturbado, de manera que para este cálculo se partirá desde el momento en que comienzan las oscilaciones. Por esta razón N esta en función de la densidad de energía al comienzo de las oscilaciones ρ_{osc} y la densidad de energía de decaimiento ρ_{dec} , teniendo en cuenta el valor no perturbado del campo del curvatón unos tiempos después de salir del horizonte σ_* .

$$N(\rho_{dec}, \rho_{osc}, \sigma_*) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\rho_{\sigma_{osc}}}{\rho_{\sigma_{dec}}} \right) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} m_\sigma^2 [\sigma_{osc}(\sigma_*)]^2}{\rho_{\sigma_{dec}}} \right), \quad (7.7)$$

en donde σ_{osc} es el valor de la amplitud de las oscilaciones senosoidales en función de σ_* . Cómo se verá a continuación, la densidad de energía del curvatón justo antes de decaer ρ_{dec} es expresada en función de la densidad total de energía al inicio de las oscilaciones senosoidales ρ_{osc} , y de σ_{osc}

$$\rho_\sigma a^3 = cte \implies \rho_{\sigma_{dec}} a_{dec}^3 = cte, \rho_{\sigma_{osc}} a_{osc}^3 = cte, \quad (7.8)$$

$$\rho_{dec} = \rho_{r_{dec}} + \rho_{\sigma_{dec}}, \quad (7.9)$$

$$\rho_\sigma(t, x) \approx \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_a^2(t, x) \propto a^3(t, x), \quad (7.10)$$

$$\rho_{\sigma_{dec}} = \rho_{\sigma_{osc}} \left(\frac{a_{osc}}{a_{dec}} \right)^3 = \rho_{\sigma_{osc}} \left[\left(\frac{a_{osc}}{a_{dec}} \right)^4 \right]^{\frac{3}{4}} = \rho_{\sigma_{osc}} \left(\frac{\rho_{r_{dec}}}{\rho_{osc}} \right)^{\frac{3}{4}} = \rho_{\sigma_{osc}} \left(\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right)^{\frac{3}{4}}, \quad (7.11)$$

$$\implies \rho_{\sigma_{dec}} = \frac{1}{2} m_\sigma^2 [\sigma_{osc}(\sigma_*)]^2 \left(\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right)^{\frac{3}{4}}. \quad (7.12)$$

Finalmente se obtiene el valor de N

$$N(\rho_{dec}, \rho_{osc}, \sigma_*) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} m_\sigma^2 [\sigma_{osc}(\sigma_*)]^2}{\frac{1}{2} m_\sigma^2 [\sigma_{osc}(\sigma_*)]^2 \left(\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right)^{\frac{3}{4}}} \right) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} m_\sigma^2 [\sigma_{osc}(\sigma_*)]^2}{\rho_{\sigma_{dec}}} \right), \quad (7.13)$$

y ya conocido el valor de N se procede a calcular $N_{,\sigma_*}$ y $N_{,\sigma_*\sigma_*}$ los cuales son de la forma (G.8, G.9)

$$N_{,\sigma_*} = \frac{2\sigma'_{osc}}{3\sigma_{osc}} r, \quad (7.14)$$

$$N_{,\sigma_*\sigma_*} = \frac{2}{3} \left[\frac{(r'\sigma'_{osc} + r\sigma''_{osc})\sigma_{osc} - r\sigma'^2_{osc}}{\sigma_{osc}^2} \right], \quad (7.15)$$

CAPITULO 7. NIVEL DE NO GAUSSIANIDAD f_{NL} EN EL ESCENARIO DEL CURVATÓN

obteniéndose como resultado para la amplitud espectral

$$A_\zeta = \frac{H_*}{2\pi} N_{,\sigma_*} = \frac{H_* r \sigma'_{osc}}{3\pi \sigma_{osc}} \quad (7.16)$$

y finalmente se obtiene el parámetro f_{NL} en el escenario del curvatón (figura 7,1)

$$f_{NL} = -\frac{5}{6} \frac{N_{,\sigma_*\sigma_*}}{N_{,\sigma_*}^2} = -\frac{5}{3} - \frac{5}{6}r + \frac{5}{4r} \left(1 + \frac{\sigma_{osc}\sigma''_{osc}}{\sigma_{osc}'^2} \right). \quad (7.17)$$

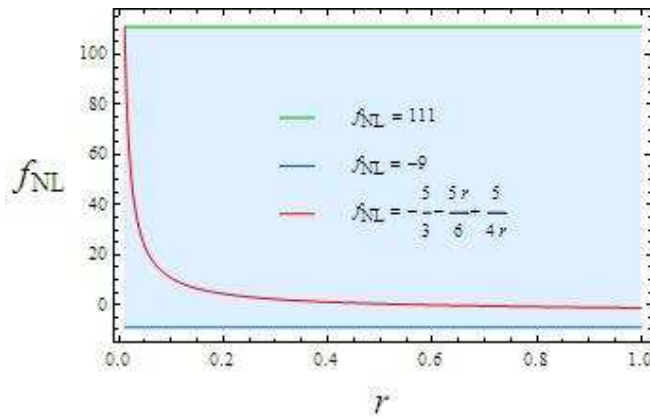


Figura 7.1: Nivel de no gaussianidad f_{NL} en el escenario del curvatón σ . El eje horizontal representa el factor de modulación r de las densidades de energía (ρ_r y ρ_σ) y el eje vertical representa el nivel de no gaussianidad f_{NL} , de cota experimental reportada por WMAP: $-9 \leq f_{NL} \leq 111$ [5].

La ventaja que presenta este formalismo δN es que su cálculo es muy sencillo de realizar. Si se intenta hacer este cálculo empleando teoría de perturbaciones a segundo orden [41] será un proceso muy largo para obtener el mismo resultado. Al trabajar con el formalismo δN se obtiene la perturbación en la curvatura ζ que no es perturbativa, es decir, es válida a todos los ordenes en teoría de perturbaciones, no sólo a primer orden sino a todos !

CAPITULO 8

Conclusiones

Existen modelos inflacionarios muy buenos basados en física de partículas que permiten solucionar los problemas de la cosmología estándar, sin embargo al llevar estos modelos a una escala de energía verificable en el laboratorio (LHC) del orden de $1TeV$, y buscar una posible conexión entre cosmología y física de partículas, los modelos presentan ciertos problemas de ajuste fino al momento de ser contrastados con las restricciones observacionales.

En este trabajo se presenta el estudio de un escenario alternativo que no domina la densidad de energía llamado curvatón σ , el cual logra recuperar los modelos inflacionarios de los problemas de ajuste fino, dado a que las condiciones de slow-roll son irrelevantes para este escenario. A su vez se estudia el nivel de no gaussianidad primordial mediante el formalismo δN para verificar este modelo con las presentes cotas observacionales .

El formalismo δN es una aproximación no perturbativa para calcular la perturbación en la curvatura ζ a todos los ordenes en términos de las cantidades del background. Este formalismo fue introducido para calcular el espectro de la perturbación en la curvatura \mathcal{P}_ζ a segundo orden y el parámetro f_{NL} del biespectro en el escenario del curvatón.

El nivel de no gaussianidad f_{NL} en el escenario del curvatón depende del parámetro r , que contiene las densidades de energía debidas al fluido de radiación y al campo del curvatón de la forma:

$$r = \frac{3\rho_\sigma}{4\rho_r + 3\rho_\sigma}. \quad (8.1)$$

Para el caso inicial en donde la densidad de energía del curvatón ρ_σ es pequeña comparada con la densidad de energía de radiación ρ_r , se tiene que $r \approx 1,13 \times 10^{-2}$, y para el caso en que ρ_σ se aproxime al dominio de la densidad de energía se obtiene $r \approx 1$.

En base a los posibles valores que puede tomar r , la perturbación significativa en la curvatura ζ , debida al campo del curvatón ζ_σ y al fluido de radiación ζ_r es de la forma:

$$\zeta = (1 - r)\zeta_r + r\zeta_\sigma. \quad (8.2)$$

Finalmente se obtiene el parámetro f_{NL} en el escenario del curvatón

$$f_{NL} = -\frac{5}{6} \frac{N_{,\sigma_*\sigma_*}}{N_{,\sigma_*}^2} = -\frac{5}{3} - \frac{5}{6}r + \frac{5}{4r} \left(1 + \frac{\sigma_{osc}\sigma''_{osc}}{\sigma_{osc}^{\prime 2}} \right), \quad (8.3)$$

cuyos valores

$$f_{NL}(r \approx 1,13 \times 10^{-2}) = 108,9, \quad (8.4)$$

$$f_{NL}(r \approx 1) = -\frac{5}{4}, \quad (8.5)$$

se encuentran dentro del rango permitido en las cotas experimentales reportadas por WMAP $-9 < f_{NL} < 111$ [5], en vista a la gráfica 7,1 se aprecia que se puede obtener un nivel de no gaussianidad grande comparado con otros niveles que están en función de los parámetros de slow-roll. Probablemente este nivel de no gaussianidad $f_{NL}(r \approx 1,13 \times 10^{-2}) = 108,9$ sea detectado por las siguientes exploraciones satelitales .

Apéndice A

Variación de la acción con respecto a (φ) .

A partir de este cálculo se obtendrán las ecuaciones de campo de Einstein, las ecuaciones de Euler-Lagrange y se podrá definir el tensor de energía-momento. En teoría cuántica de campos se define una acción de la forma

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(g, \varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu), \quad (\text{A.1})$$

en donde \mathcal{L} es la densidad lagrangiana, φ es el campo escalar, $\partial_\mu \varphi$ es la derivada covariante con respecto al campo y x^μ son las coordenadas espacio-tiempo. En el caso de relatividad general se introduce a la acción el término $\sqrt{-\det g}$

$$S = \int d^4x \sqrt{-\det g} \mathcal{L}(g, \varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu). \quad (\text{A.2})$$

La densidad lagrangiana se puede expresar de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{M-E}, \quad (\text{A.3})$$

siendo \mathcal{L}_G la densidad lagrangiana asociada al tensor de Ricci y \mathcal{L}_{M-E} es la densidad lagrangiana asociada a la materia-energía. Por lo tanto la acción toma la forma siguiente

$$S = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left[\frac{m_p^2}{2} R + \mathcal{L}_{M-E}(g, \varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu) \right]. \quad (\text{A.4})$$

Realizando la variación se tiene que

$$g^{\mu\nu}(x^\mu) \mapsto g'^{\mu\nu}(x^\mu) = g^{\mu\nu}(x^\mu) + \delta g^{\mu\nu}(x^\mu), \quad (\text{A.5})$$

$$\varphi^{\mu\nu}(x^\mu) \mapsto \varphi'^{\mu\nu}(x^\mu) = \varphi^{\mu\nu}(x^\mu) + \delta\varphi^{\mu\nu}(x^\mu), \quad (\text{A.6})$$

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (\text{A.7})$$

en las cuales se obtienen expresiones que han variado de forma pero que siguen siendo evaluadas en el mismo punto. Ahora se realizará una variación real, es decir, habrá un cambio en la función y además se evaluará en un nuevo punto

$$g^{\mu\nu}(x^\mu) \mapsto g'^{\mu\nu}(x'^\mu) = g^{\mu\nu}(x^\mu) + \Delta g^{\mu\nu}(x^\mu), \quad (\text{A.8})$$

$$\varphi^{\mu\nu}(x^\mu) \mapsto \varphi'^{\mu\nu}(x'^\mu) = \varphi^{\mu\nu}(x^\mu) + \Delta\varphi^{\mu\nu}(x^\mu). \quad (\text{A.9})$$

Haciendo variaciones a primer orden se tiene

$$\Delta\varphi = \varphi'(x') - \varphi(x) = \varphi'(x') - \varphi(x') + \varphi(x') - \varphi(x) = \delta\varphi(x') + \partial_\mu\varphi\delta x^\mu, \quad (\text{A.10})$$

y

$$\Delta g^{\mu\nu} = g'^{\mu\nu}(x') - g^{\mu\nu}(x) = g'^{\mu\nu}(x') - g^{\mu\nu}(x') + g^{\mu\nu}(x') - g^{\mu\nu}(x) = \delta g^{\mu\nu}(x') + \partial_\rho g^{\mu\nu}\delta x^\rho. \quad (\text{A.11})$$

Luego la variación en la acción con extremos fijos se reescribe de la forma

$$\delta S = \int d^4x' \sqrt{-\det g'} \mathcal{L}(g'^{\mu\nu}, \varphi', \partial_\mu\varphi', x'^\mu) - \int d^4x \sqrt{-\det g} \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \varphi, \partial_\mu\varphi, x^\mu), \quad (\text{A.12})$$

entonces

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[(1 + \partial_\mu\delta x^\mu) d^4x \sqrt{-\det g'} \left(\mathcal{L}_{M-E}(g'^{\mu\nu}, \varphi', \partial_\mu\varphi', x'^\mu) + \frac{m_p^2}{2} R' \right) \right. \\ &\quad \left. - d^4x \sqrt{-\det g} \left(\mathcal{L}_{M-E}(g^{\mu\nu}, \varphi, \partial_\mu\varphi, x^\mu) + \frac{m_p^2}{2} R \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

es decir

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left\{ \left[\frac{m_p^2}{2} \delta(\sqrt{-\det g} R) + \delta(\sqrt{-\det g} \mathcal{L}_{M-E}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{m_p^2}{2} R + \mathcal{L}_{M-E} \right] \sqrt{-\det g} \partial_\mu \delta x^\mu \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

En general se varía con respecto a $(g^{\mu\nu}, \varphi, \partial_\mu\varphi, x^\mu)$ y a su vez se varía el punto de evaluación dando como resultado

$$\begin{aligned}
 \delta S = \int d^4x & \left[\frac{m_p^2}{2} \frac{\delta(\sqrt{-\det g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \\
 & + \left[\frac{\delta(\sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E})}{\delta\varphi} \delta\varphi + \frac{\delta(\sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E})}{\delta(\partial_\mu\varphi)} \partial_\mu(\delta\varphi) \right] \\
 & + \left[\frac{m_p^2}{2} \frac{\delta(\sqrt{-\det g}R)}{\delta x^\mu} + \frac{\delta(\sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E})}{\delta x^\mu} \right] \delta x^\mu \\
 & + \left[\frac{m_p^2}{2} \sqrt{-\det g}R + \sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E} \right] \partial_\mu \delta x^\mu = 0.
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Con el primer término de la expresión anterior, es decir con

$$\left[\frac{m_p^2}{2} \frac{\delta(\sqrt{-\det g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}, \tag{A.16}$$

se obtiene las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{m_p^2}T_{\mu\nu}, \tag{A.17}$$

siendo

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_{M-E}}{\partial g^{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{M-E}. \tag{A.18}$$

Luego, los últimos seis términos de la expresión (A,15) se pueden reordenar de la forma

$$\begin{aligned}
 \delta S & = \int d^4x \left\{ \left[\frac{\delta(\sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E})}{\delta\varphi} \delta\varphi + \delta(\sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E}) \partial_\mu(\delta\varphi) \right] \right. \\
 & + \left. \left[\frac{m_p^2}{2} \partial_\mu(\sqrt{-\det g}R\delta x^\mu) + \partial_\mu(\sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E}\delta x^\mu) \right] \right\} \\
 & = \int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial(\sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E})}{\partial\varphi} - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E})}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] \delta\varphi \right. \\
 & + \left. \partial_\mu \left[\frac{\partial(\sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E})}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\varphi \right] + \frac{m_p^2}{2} \partial_\mu(\sqrt{-\det g}R\delta x^\mu) + \partial_\mu(\sqrt{-\det g}\mathcal{L}_{M-E}\delta x^\mu) \right\} \\
 & = 0,
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

en los cuales al aplicar el teorema de la divergencia se encuentra que los últimos tres términos son cero y por lo tanto la variación en la acción se reduce a:

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial(\sqrt{-\det g} \mathcal{L}_{M-E})}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-\det g} \mathcal{L}_{M-E})}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right] \right\} \delta \varphi = 0, \quad (\text{A.20})$$

obteniéndose de esta forma la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial(\sqrt{-\det g} \mathcal{L}_{M-E})}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-\det g} \mathcal{L}_{M-E})}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Apéndice B

Tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$

A partir del principio de variación extremal con extremos variables y suponiendo que la acción es invariante ante traslaciones espacio-temporales se obtiene el tensor de energía-momento

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{M-E} - \frac{\partial \mathcal{L}_{M-E}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi. \quad (\text{B.1})$$

Para describir el tensor de energía-momento que se emplea en cosmología es necesario definir un fluido perfecto. Un fluido perfecto es un medio para el cual en todo punto hay un sistema de referencia localmente inercial moviéndose con el fluido, en donde el fluido parece ser el mismo en todas las direcciones.

Por lo tanto se tiene que para un sistema de referencia localmente inercial comóvil la siguiente ley de conservación

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (\text{B.2})$$

entonces $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ es decir $\partial_0 T^{0\nu} + \partial_i T^{i\nu} = 0$

Luego el cuadrimento es de la forma

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu} \quad (\text{B.3})$$

en consecuencia

$$\frac{dP^\mu}{dt} = \int d^3x \partial_0 T^{0\mu} = - \int d^3x \partial_i T^{i\mu} \quad (\text{B.4})$$

y aplicando el teorema de la divergencia

$$\frac{dP^\mu}{dt} = - \oint T^{i\mu} dS_i \quad (\text{B.5})$$

obteniéndose la expresión para la fuerza externa

$$F_{ext}^j = - \oint T^{ij} dS_i \quad (\text{B.6})$$

con $T^{ij} \equiv$ tensor de esfuerzos. Entonces aplicando tercera ley de Newton se tiene

$$F_{int}^j = -F_{ext}^j = \oint T^{ij} dS_i, \quad (\text{B.7})$$

$$F_{int}^j = \oint P \delta^{ij} dS_i, \quad (\text{B.8})$$

con $T^{ij} = P \delta^{ij}$ presión isotrópica. Por otra parte tenemos la densidad de energía definida de forma

$$T^{00} \equiv \rho, \quad (\text{B.9})$$

y la densidad de momentos

$$T^{0i} \equiv 0, \quad (\text{B.10})$$

dado a que el sistema de referencia es comóvil.

Las expresiones del tensor energía-momento para el espacio-tiempo de Minkowski es

$$T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} P + (\rho + P) U^\mu U^\nu, \quad (\text{B.11})$$

siendo $\eta^{\mu\nu}$ el tensor de minkowski y $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ el cuadvivector de velocidad del fluido, obteniéndose

$$T^{00} = \eta^{00} P + (\rho + P) U^0 U^0 = -P + (\rho + P) = \rho, \quad (\text{B.12})$$

$$T^{0i} = \eta^{0i} P + (\rho + P) U^0 U^i = 0 + (0 + 0) = 0, \quad (\text{B.13})$$

$$T^{ij} = \eta^{ij} P + (\rho + P) U^i U^j = P \delta^{ij}. \quad (\text{B.14})$$

Apéndice C

Ecuación de Klein-Gordon debida a las fluctuaciones cuánticas del campo escalar curvatón σ

Partiendo de la ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar σ obtendremos la ecuación de Klein-Gordon debida a las fluctuaciones cuánticas de este mismo campo escalar. La ecuación de Klein-Gordon para el campo del curvatón es de la forma:

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} - \frac{\nabla^2\sigma}{a^2} + V'(\sigma) = 0. \quad (\text{C.1})$$

Haciendo una separación en el campo del curvatón de la forma:

$$\sigma(x, t) = \sigma(t) + \delta\sigma(x, t), \quad (\text{C.2})$$

se realizan las siguientes operaciones

$$\dot{\sigma}(x, t) = \dot{\sigma}(t) + \delta\dot{\sigma}(x, t), \quad (\text{C.3})$$

$$\ddot{\sigma}(x, t) = \ddot{\sigma}(t) + \delta\ddot{\sigma}(x, t), \quad (\text{C.4})$$

$$\nabla^2\sigma(x, t) = \nabla^2\delta\sigma(x, t) = \delta\sigma'', \quad (\text{C.5})$$

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2, \quad (\text{C.6})$$

y reemplazando los términos se tiene

$$\delta\ddot{\sigma} + 3H\delta\dot{\sigma} - \frac{\nabla^2\delta\sigma}{a^2} + V''(\sigma)\delta\sigma = 0. \quad (\text{C.7})$$

APÉNDICE C. ECUACIÓN DE KELIN-GORDON DEBIDA A LAS FLUCTUACIONES CUÁNTICAS

Recordando que

$$\delta\sigma(x, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp(ik \cdot x) \delta\hat{\sigma}_k(t), \quad (\text{C.8})$$

con

$$\delta\hat{\sigma}_k(t) \equiv W_k(t)\hat{a}_k + W_k^*(t)\hat{a}_k^+, \quad (\text{C.9})$$

se tiene

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{ik \cdot x} \left[\ddot{W}_k \hat{a}(t) + \ddot{W}_k^* \hat{a}_k^+ + 3H(\dot{W}_k \hat{a}_k + \dot{W}_k^* \hat{a}_k^+) + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_k^2 \right) (W_k \hat{a}_k + W_k^* \hat{a}_k^+) \right] = 0, \quad (\text{C.10})$$

obteniéndose finalmente la ecuación de Klein-Gordon para las fluctuaciones cuánticas de σ

$$\ddot{W}_k + 3H\dot{W}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_k^2 \right) W_k = 0. \quad (\text{C.11})$$

Apéndice D

Evolución de fluidos no interactuantes

Asumiendo el universo como un fluido $\{gas\}$ y si además de ello los constituyentes de este gas tienen velocidad cuadrado promedio v^2 , la presión se puede dar de la forma:

$$P = \frac{1}{3}\rho v^2, \quad (D.1)$$

de manera que para un fluido de radiación $v \approx 1$

$$P = \frac{1}{3}\rho, \quad (D.2)$$

y para un fluido de materia $v \ll 1$

$$P = 0. \quad (D.3)$$

Así a partir de la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (D.4)$$

para radiación $\implies \dot{\rho} + 4H(\rho) = 0$,

para materia $\implies \dot{\rho} + 3H(\rho) = 0$,

de manera que integrando la expresión para un fluido de radiación se tiene que :

$$\int \frac{d\rho_r}{\rho_r} = -4 \int \frac{da}{a} \implies \ln\left(\frac{\rho_r}{\rho_{or}}\right) = -4\ln\left(\frac{a}{a_o}\right) \implies \rho_r a^4 = \rho_{or} a_o^4. \quad (D.5)$$

De esta manera $\rho_{or} a_o^4 = \text{constante}$ por lo tanto

$$\rho_r \propto a^{-4}. \quad (D.6)$$

De igual manera se tiene para un fluido de materia que

$$\rho_\sigma \propto a^{-3}. \quad (D.7)$$

De esta forma se aprecia como van decayendo las densidades de energía con respecto al parámetro de expansión a

Apéndice E

Integral de Fourier y espectro

La integral de Fourier es de la forma

$$g(x, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{ik \cdot x} g_{\bar{k}}(t). \quad (\text{E.1})$$

El prefactor numérico es conveniente porque hace las funciones base ortonormales en lugar de sólo ortogonales, ya que

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i(k-k') \cdot x} = \delta^3(k - k'), \quad (\text{E.2})$$

en donde δ^3 es la función delta de Dirac. La transformada inversa de Fourier es

$$g_{\bar{k}}(t) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-ik \cdot x} g(x, t). \quad (\text{E.3})$$

El espectro puede ser definido como

$$\langle 0 | g_{\bar{k}_1} g_{\bar{k}_2} | 0 \rangle = \delta^3(k_1 - k_2) \frac{2\pi^2}{k^3} P_g(k), \quad (\text{E.4})$$

entonces

$$\langle 0 | g^2(x, t) | 0 \rangle = \int \frac{dk}{k} P_g(k), \quad (\text{E.5})$$

siendo $P_g(k)$ el espectro de k . Por lo tanto

$$\langle 0 | (\delta X(x, t))^2 | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\delta x_{\bar{k}}|^2 = \int \frac{dk}{k} \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta x_{\bar{k}}|^2 = \int \frac{dk}{k} P_{\delta x}(k), \quad (\text{E.6})$$

es decir

$$P_{\delta x}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta x_{\bar{k}}|^2. \quad (\text{E.7})$$

Apéndice F

Cálculo de la perturbación en la curvatura ζ

Combinando las expresiones (4.8),(4.9) y (4.10), la perturbación total en la curvatura ζ puede ser escrita como la suma ponderada de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 \zeta \equiv -\psi - H \left(\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}_o} \right)_{total} &= -\psi - H \left(\frac{\delta\rho_r + \delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{ro} + \dot{\rho}_{\sigma o}} \right) = -\psi - H \left(\frac{\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{ro} + \dot{\rho}_{\sigma o}} + \frac{\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{ro} + \dot{\rho}_{\sigma o}} \right) \\
 &= -\psi - H \left(\frac{\dot{\rho}_{ro}}{\dot{\rho}_{ro} + \dot{\rho}_{\sigma o}} \frac{\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{ro}} + \frac{\dot{\rho}_{\sigma o}}{\dot{\rho}_{ro} + \dot{\rho}_{\sigma o}} \frac{\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{\sigma o}} \right) \\
 &= -\psi - H \left(\frac{4H\rho_{ro}}{4H\rho_{ro} + 3H\rho_{\sigma o}} \frac{\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{ro}} + \frac{3H\rho_{\sigma o}}{4H\rho_{ro} + 3H\rho_{\sigma o}} \frac{\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{\sigma o}} \right) \\
 &= -\psi - \frac{H}{4\rho_{ro} + 3\rho_{\sigma o}} \left(4\rho_{ro} \frac{\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{ro}} + 3\rho_{\sigma o} \frac{\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{\sigma o}} \right) \\
 &= \frac{1}{4\rho_{ro} + 3\rho_{\sigma o}} \left(-4\rho_{ro}\psi - 3\rho_{\sigma o}\psi - \frac{4H\rho_{ro}\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{ro}} - \frac{3H\rho_{\sigma o}\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{\sigma o}} \right) \\
 &= \frac{1}{4\rho_{ro} + 3\rho_{\sigma o}} \left(-4\rho_{ro}\psi - \frac{4H\rho_{ro}\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{ro}} - 3\rho_{\sigma o}\psi - \frac{3H\rho_{\sigma o}\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{\sigma o}} \right) \\
 &= \frac{4\rho_{ro}}{4\rho_{ro} + 3\rho_{\sigma o}} \left(-\psi - H \frac{\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{ro}} \right) + \frac{3\rho_{\sigma o}}{4\rho_{ro} + 3\rho_{\sigma o}} \left(-\psi - H \frac{\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{\sigma o}} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{3\rho_{\sigma o}}{4\rho_{ro} + 3\rho_{\sigma o}} \right) \left(-\psi - H \frac{\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{ro}} \right) + \frac{3\rho_{\sigma o}}{4\rho_{ro} + 3\rho_{\sigma o}} \left(-\psi - H \frac{\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{\sigma o}} \right) \tag{F.1}
 \end{aligned}$$

$$\implies \zeta = (1 - r)\zeta_r + r\zeta_\sigma, \tag{F.2}$$

con el factor de modulación

$$r \equiv \frac{3\rho_{\sigma_0}}{4\rho_{r_0} + 3\rho_{\sigma_0}}. \quad (\text{F.3})$$

Apéndice G

Obtención de las derivadas de N y parámetro f_{NL} con respecto al campo σ

Partiendo del valor de N

$$N(\rho_{dec}, \rho_{osc}, \sigma_*) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} m_\sigma^2 [\sigma_{osc}(\sigma_*)]^2}{\frac{1}{2} m_\sigma^2 [\sigma_{osc}(\sigma_*)]^2 \left(\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right)^{\frac{3}{4}}} \right) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} m_\sigma^2 [\sigma_{osc}(\sigma_*)]^2}{\rho_{\sigma_{dec}}} \right), \quad (G.1)$$

se procede a calcular $N_{,\sigma_*}$ y $N_{,\sigma_*\sigma_*}$ los cuales son de la forma

$$N_{,\sigma_*} = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_{\sigma_{dec}}}{\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_{osc}^2} \right) \cdot \left(\frac{m_\sigma^2 \sigma_{osc} \sigma'_{osc} \rho_{\sigma_{dec}} - \rho'_{\sigma_{dec}} \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_{osc}^2}{\rho_{\sigma_{dec}}^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{2\sigma'_{osc}}{\sigma_{osc}} \rho_{\sigma_{dec}} - \rho'_{\sigma_{dec}}}{\rho_{\sigma_{dec}}} \right). \quad (G.2)$$

En base a $\rho_{\sigma_{dec}}$ hallamos $\rho'_{\sigma_{dec}}$

$$\rho'_{\sigma_{dec}} = m_\sigma^2 \sigma_{osc} \sigma'_{osc} \left[\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right]^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} \left[\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right]^{-\frac{1}{4}} \left[-\frac{\rho'_{\sigma_{dec}} \rho_{osc}}{\rho_{osc}^2} \right] \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_{osc}^2, \quad (G.3)$$

$$\rho'_{\sigma_{dec}} = \frac{m_\sigma^2 \sigma_{osc} \sigma'_{osc} \left[\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right]^{\frac{3}{4}}}{1 + \frac{3}{4} \left[\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right]^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2 \sigma_{osc}^2}{\rho_{osc}}}, \quad (G.4)$$

APÉNDICE G. OBTENCIÓN DE LAS DERIVADAS DE N Y PARÁMETRO f_{NL} CON RESPECTO A

obteniéndose que

$$N_{,\sigma_*} = \frac{1}{3} \left[\frac{\frac{2\sigma'_{osc}}{\sigma_{osc}} \rho_{\sigma_{dec}} - \frac{m_\sigma^2 \sigma_{osc} \sigma'_{osc} \left[\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right]^{\frac{3}{4}}}{1 + \frac{3}{4} \left[\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right]^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_{osc}^2}}{\rho_{\sigma_{dec}}} \right] = \frac{2\sigma'_{osc}}{3\sigma_{osc}} \left[\frac{\frac{3}{4\rho_{osc}} \left[\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right]^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_{osc}^2}{1 + \frac{3}{4} \left[\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right]^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_{osc}^2}} \right], \quad (G.5)$$

$$N_{,\sigma_*} = \frac{2\sigma'_{osc}}{3\sigma_{osc}} \left[\frac{3 \left[\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right]^{\frac{3}{4}} m_\sigma^2 \sigma_{osc}^2}{8\rho_{osc} \left[\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right] + 3 \left[\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right]^{\frac{3}{4}} m_\sigma^2 \sigma_{osc}^2} \right] = \frac{2\sigma'_{osc}}{3\sigma_{osc}} \left[\frac{6\rho_{\sigma_{dec}}}{8\rho_{osc} \left[\frac{\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}}{\rho_{osc}} \right] + 6\rho_{\sigma_{dec}}} \right], \quad (G.6)$$

$$N_{,\sigma_*} = \frac{2\sigma'_{osc}}{3\sigma_{osc}} \left[\frac{6\rho_{\sigma_{dec}}}{8\rho_{r_{dec}} + 6\rho_{\sigma_{dec}}} \right] = \frac{2\sigma'_{osc}}{3\sigma_{osc}} \left[\frac{3\rho_{\sigma_{dec}}}{4\rho_{r_{dec}} + 3\rho_{\sigma_{dec}}} \right] = \frac{2\sigma'_{osc}}{3\sigma_{osc}} r, \quad (G.7)$$

$$\implies N_{,\sigma_*} = \frac{2\sigma'_{osc}}{3\sigma_{osc}} r, \quad (G.8)$$

$$\implies N_{,\sigma_*\sigma_*} = \frac{2}{3} \left[\frac{(r'\sigma'_{osc} + r\sigma''_{osc})\sigma_{osc} - r\sigma_{osc}^{\prime 2}}{\sigma_{osc}^2} \right], \quad (G.9)$$

dando como resultado para la amplitud espectral

$$A_\zeta = \frac{H_*}{2\pi} N_{,\sigma_*} = \frac{H_* r \sigma'_{osc}}{3\pi \sigma_{osc}}, \quad (G.10)$$

y finalmente para el parámetro f_{NL} en el escenario del curvatón

$$f_{NL} = -\frac{5}{6} \frac{N_{,\sigma_*\sigma_*}}{N_{,\sigma_*}^2} = -\frac{5}{3} - \frac{5}{6} r + \frac{5}{4r} \left(1 + \frac{\sigma_{osc} \sigma_{osc}''}{\sigma_{osc}^{\prime 2}} \right). \quad (G.11)$$

REFERENCIAS

- [1] A. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [2] G. F. Smoot *et. al.*, Astrophys. J. **396**, L1 (1992).
- [3] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, 2000.
- [4] R. K. Sachs and A.M. Wolfe, Astrophys. J. **147**, 73 (1967).
- [5] E. Komatsu *et. al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **180**, 330 (2009).
- [6] G. Hinshaw *et. al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **180**, 225 (2009).
- [7] A. R. Liddle and D. H. Lyth, Phys. Lett. B **291**, 391 (1992).
- [8] D. H. Lyth and A. Riotto, Phys. Rep. **314**, 1 (1999).
- [9] D. N. Spergel *et. al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser **148**, 175 (2003).
- [10] K. Enqvist and M. S. Sloth, Nucl . Phys. B **626**, 395 (2002).
- [11] D. H. Lyth and D. Wands, Phys. Lett. B **524**, 5 (2002).
- [12] T. Moroi and T. Takahashi, Phys. Lett. B **522**, 215 (2001)[Erratum-ibid. B **539**, 303 (2002)].
- [13] D. H. Lyth, C. Ungarelli and D. Wands, Phys. Rev. D **67**, 023503 (2003).
- [14] K. Dimopoulos and D. H. Lyth, Phys. Rev. D **69**, 123509 (2004).
- [15] E. Komatsu *et. al.*, Astrophys. J. **566**, 19 (2002).
- [16] ESA's PLANCK mission homepage: <http://planck.esa.int/>.
- [17] D. H. Lyth and Y. Rodríguez, Phys. Rev. Lett. **95**, 121302 (2005).

- [18] M. Liguori, S. Matarrese and L. Moscardini, *Astrophys. J.* **597**, 57 (2003).
- [19] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, 2003.
- [20] V. F. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005.
- [21] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [22] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
- [23] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **28**, 679 (1983).
- [24] A. H. Guth and S.-Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1110 (1982).
- [25] A. Albrecht, P. Ferreira, M. Joyce and T. Prokopec, *Phys. Rev D* **50**, 4807 (1994).
- [26] L. P. Grishchuk, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2371 (1993).
- [27] D. H. Lyth, *Phys. Rev. D* **31**, 8 (1985).
- [28] D. H. Lyth and D. Seery, *Phys. Lett. B* **662**, 309 (2008)
- [29] Legacy Archive For Microwave Background Data Analysis:
<http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>
- [30] SuperNova Acceleration Probe: <http://www.lbl.gov/Science-Articles/Archive/SNAP-1.html>
- [31] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980).
- [32] M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.* **76**, 1036 (1986).
- [33] A. Riotto, [arXiv:hep-ph/0210162](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0210162).
- [34] R. H. Brandenberger, *Nucl . Phys. B* **245**, 328 (1985).
- [35] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, 1982.
- [36] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, *Proc. R. Soc. Lond. A* **360**, 117 (1978).
- [37] J. Foster and J. D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity*, Longman, 1979.
- [38] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-wesley, 1990.
- [39] K. A. Malik, D. Wands and C. Ungarelli, *Phys. Rev. D* **67**, 063516 (2003.)

- [40] Karim A. Malik and David H. Lyth, JCAP **0609**, 008 (2006)
- [41] N. Bartolo, S. Matarrese and A. Riotto, Phys. Rev. D **69**, 043503 (2004).
- [42] H. R. S. Cogollo, Y Rodríguez and C. A.Valenzuela Toledo, JCAP **0808**, 029 (2008)
- [43] Y Rodríguez and C. A.Valenzuela Toledo, arXiv:0811.4092 [astro-ph].
- [44] M. Sasaki, J. Valiviita, and D. Wands, Phys. Rev. D **74**, 103003 (2006).
- [45] E. F. Bunn and M. J. White, Astrophys. J. **480**, 6 (1997).
- [46] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and R. H. Brandenberger, Phys. Rep. **215**, 203 (1995).
- [47] K. A. Malik and D. Wands, Class. Quantum Grav. **21**, L65 (2004).
- [48] D. H. Lyth and I. Zaballa, JCAP **0510**, 005 (2005).
- [49] J. Maldacena, JHEP **0305**, 013 (2003).
- [50] M. E. Peskin and D V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.
- [51] D. H. Lyth, JCAP **0712**, 016 (2007).
- [52] L. Boubekeur and D. H. Lyth, Phys. Rev. D **73**, 021301(R) (2006).