

ACERCA DE LA CONSTANTE DE EULER MASCHERONI

ANDRÉS FELIPE ORTÍZ FLOREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2022

ACERCA DE LA CONSTANTE DE EULER MASCHERONI

ANDRÉS FELIPE ORTÍZ FLOREZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Director

EDILBERTO JOSE REYES GONZALEZ
Prof. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2022

Dedicado: A mi familia, en especial a mi madre y abuela.

AGRADECIMIENTOS

- ◇ Agradezco a Dios por haberme guiado a lo largo de mi vida, por ser mi apoyo y por permitirme alcanzar este logro. Por haberme dado la fortaleza para seguir adelante en aquellos momentos de debilidad.
- ◇ Agradezco a mi madre **Liliana Florez** y a mi abuela **María A. Carvajal** por su apoyo y por ser mi principal motivación.
- ◇ Agradezco al profesor **Edilberto J. Reyes**, por su paciencia y colaboración en mi proyecto, por todas sus recomendaciones y enseñanzas durante mi formación.
- ◇ Agradezco a mis amigos con los cuales tuve la oportunidad compartir y aprender durante esta etapa.
- ◇ Agradezco a los profesores de la escuela de matemáticas por sus diferentes formas de enseñar y por incentivar me a formarme profesionalmente.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	11
1. PRELIMINARES	14
1.1. LA CONSTANTE DE EULER-MASCHERONI Y LA SERIE ARMÓNICA	14
1.2. GAMMA NÚMEROS	19
1.3. PRELIMINARES PARA LA DEMOSTRACIÓN DEL CRITERIO	26
1.4. ¿DÓNDE APARECE γ ?	46
2. CRITERIO DE RACIONALIDAD	54
BIBLIOGRAFÍA	66
ANEXOS	68

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Implementación de la sucesión γ_n y calculo de $\gamma_{10^{11}}$ en Google Colaboratory.	24
Figura 2. Suma superior $S(n)$ de f correspondiente a la partición $(1, 2, \dots, n)$.	25
Figura 3. Función $\Gamma(x)$ y su recta tangente en el punto $(1, 1)$.	51

LISTA DE TABLAS

pág.

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. Demostraciones del Capítulo 1	68

RESUMEN

TÍTULO: ACERCA DE LA CONSTANTE DE EULER MASCHERONI. *

AUTOR: ANDRÉS FELIPE ORTÍZ FLOREZ **

PALABRAS CLAVE: CONSTANTE, NÚMERO RACIONAL, CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE.

DESCRIPCIÓN:

Existen constantes que son importantes por su aparición en el desarrollo de ciertas teorías e investigaciones; en el siglo XVII Euler descubrió la constante γ que actualmente es llamada “constante de Euler-Mascheroni”, esta aparece en múltiples ecuaciones y ramas de la matemática como análisis matemático, teoría de números y álgebra. El presente trabajo se enfoca en el estudio de los principales aspectos teóricos del número γ . En la primera parte se hace una presentación detallada de la construcción, interpretación geométrica y algunas apariciones de la constante de Euler-Mascheroni en matemáticas; además, se hace un estudio detallado de los principales resultados de combinatoria y sumas dobles necesarios para el capítulo 2. En la segunda parte, se realiza un estudio de la demostración de una proposición que da una condición necesaria y suficiente para que el número γ sea racional o irracional, además se presentan algunos resultados derivados de esta proposición.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Edilberto Jose Reyes Gonzalez, Prof. en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: ABOUT THE EULER-MASCHERONI CONSTANT. *

AUTHOR: ANDRÉS FELIPE ORTÍZ FLOREZ **

KEYWORDS: CONSTANT, RATIONAL NUMBER, NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION.

DESCRIPTION:

There are constants that are important due to their appearance in the development of certain theories and investigations; in the 17th century Euler discovered the constant γ which is currently called the “Euler-Mascheroni constant”, it appears in multiple equations and branches of mathematics such as mathematical analysis, number theory and algebra. The present work focuses on the study of the main theoretical aspects of the number γ . In the first part, a detailed presentation of the construction, geometric interpretation and some appearances of the Euler-Mascheroni constant in mathematics is made; In addition, a detailed study is made of the main results of combinatorics and double sums necessary for chapter 2. In the second part, a study is made of the proof of a proposition that gives a necessary and sufficient condition for the number *gamma* is rational or irrational, also some results derived from this proposition are presented.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Edilberto Jose Reyes Gonzalez, Prof. in Mathematics

INTRODUCCIÓN

A lo largo del desarrollo de la ciencia y en especial de las matemáticas han aparecido constantes que son importantes por su carácter histórico y por estar presentes en el progreso de muchas teorías e investigaciones. π es quizás una de las más conocidas, esta representa una relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Otro ejemplo importante es la constante de crecimiento exponencial o constante de Euler representada por e , esta ha jugado un papel primordial en las matemáticas al ayudar a describir el comportamiento del crecimiento de las funciones que tienen la propiedad de que su ritmo de cambio es proporcional al ritmo de cambio de su variable. El número áureo representado por la letra ϕ , surge de la división de un segmento en dos segmentos guardando las siguientes proporciones: la longitud total es al segmento más largo, como el segmento más largo es al segmento más corto; el número áureo era conocido en la antigua Grecia por aparecer en la construcción de los templos, entre otras.

Por otra parte, en la evolución de las matemáticas el concepto de serie aparece desde el siglo V a.C. con la paradoja de Zenón. La **serie armónica** que viene dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$$

es un ejemplo de una serie con la propiedad de que sus sumas parciales $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ crecen lentamente pero que diverge. La función **logaritmo natural**

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

es una función que también diverge cuando $x \rightarrow \infty$ y que aproxima las sumas

parciales de la serie armónica, es decir, a medida que n crece la diferencia entre las sumas parciales y $\ln(n)$

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

se aproxima a un límite finito. Se puede demostrar que el límite

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$$

existe (ver proposición 1.2.1 y ejemplo 1.2.3), este se conoce como **la constante de Euler-Mascheroni**. La constante γ fue descubierta por Leonhard Euler, esta apareció por primera vez en 1734, en su artículo *De Progressionibus harmonicis observationes* (ver ¹), en donde se calculan los seis primeros dígitos y se denota como C , en 1781 obtuvo diez cifras decimales más. En 1790 Lorenzo Mascheroni calculó 19 cifras decimales y la llamó constante A, razón por la cual esta constante también es conocida como la constante de Euler-Mascheroni. Tiempo después se denotó como γ por su relación con la función gamma.

La constante γ es de interés porque a través del tiempo se han encontrado conexiones con la hipótesis de Riemann, la función gamma, funciones aritméticas y varios aspectos de la teoría de números, en especial teoría analítica de números. Además, aún no se ha demostrado si γ es algebraico o trascendente, ni si quiera se ha probado si es racional o irracional, debido a que aparece en varias ecuaciones y relaciones, demostrar si γ es racional o no se considera un problema importante de matemáticas.

En el primer capítulo de este trabajo se presenta el estudio de algunas propiedades y aspectos teóricos de la constante γ como lo son su construcción, historia,

¹ Leonhard Euler. "De progressionibus harmonicis observationes". En: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (1740), págs. 150-161.

significado geométrico, relación con las funciones $\Gamma(x)$ y $\zeta(x)$, del mismo modo, otras apariciones de la constante γ en matemáticas. En el capítulo 2 se muestra una condición necesaria y suficiente para que γ sea racional o no, es decir un criterio para determinar si γ es racional. Sin embargo, esto no resuelve el problema de determinar si γ es irracional o racional, solo nos da una propiedad equivalente. Este criterio fue dado por Jonathan Sondow (ver ²) y fue inspirado en una prueba de la irracionalidad de los valores $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$ de la función zeta de Riemann realizada por Roger Apéry (ver ³), que posteriormente fue modificada por Frits Beukers (ver ⁴).

Es importante aclarar que la demostración de este criterio esta basada en el desarrollo de Jonathan Sondow (ver ²).

² Jonathan Sondow. "Criteria for irrationality of Euler's constant". En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 131.11 (2003), págs. 3335-3344.

³ Roger Apéry. "Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ ". En: *Astérisque* 61.11-13 (1979), pág. 1.

⁴ Frits Beukers. "A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ ". En: *Pi: A Source Book*. Springer, 2004, págs. 434-438.

1. PRELIMINARES

En este capítulo se hace una revisión de aspectos teóricos de la constante de Euler Mascheroni y se muestran los preliminares para el segundo capítulo. Iniciamos con la construcción de esta constante y su relación con la serie armónica. En la segunda sección se da una generalización de la constante γ y su interpretación geométrica. Posteriormente se presentan algunos preliminares e identidades de sumas dobles y combinatoria necesarios para el capítulo 2; finalmente, se muestran algunas apariciones de γ en matemáticas.

1.1. LA CONSTANTE DE EULER-MASCHERONI Y LA SERIE ARMÓNICA

Desde el año 500 a.C. las sumas de sucesiones de números naturales y las sumas de sus inversos multiplicativos han captado la atención de algunos matemáticos. En el siglo XVIII Leonhard Euler estudió las sumas de potencias de los inversos de los números naturales

$$\zeta(m) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^m},$$

para $m \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, obtuvo la identidad $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (ver ⁵), resolviendo el problema de Basilea, así como una fórmula para cada valor par $\zeta(2m)$. Análogamente trató de encontrar fórmulas para los valores impares de la función zeta de Riemann $\zeta(2m+1)$, pero no lo completó. La constante de Euler-Mascheroni apareció naturalmente en este contexto, tratando de encontrar un valor para $\zeta(1)$. La

⁵ Leonhard Euler. "De summatione serierum in hac forma contentarum $a/1+$ a $2/4+$ a $3/9+$ a $4/16+$ a $5/25+$ a $6/36+$ etc." En: *Memoires de l'academie des sciences de St.-Petersbourg* (1811), págs. 26-42.

suma

$$\zeta(1) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

es conocida como **serie armónica**, se llama así por su relación con la longitud de onda de los armónicos de una cuerda que vibra.

El criterio del n -ésimo término dice que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales y si la suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (ver ⁶, teorema 3.7.3). El recíproco de este criterio no es cierto, es decir, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ no necesariamente la suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. La serie armónica es un ejemplo que muestra que el recíproco del criterio del n -ésimo término es falso; sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge, esto debido a que

$$\sum_{n=1}^{2^m} \frac{1}{n} > \frac{m}{2} \rightarrow \infty$$

(ver ⁶, ejemplo 3.3.3). Euler descubrió la constante γ estudiando los **números armónicos**

$$H_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j},$$

las cuales son las sumas parciales de la serie armónica. En su investigación también estudió, para cada m , las sumas relacionadas

$$H_{n,m} := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^m}$$

⁶ Robert G Bartle y Donald R Sherbert. *Introducción al análisis matemático de una variable*. Limusa Wiley, 2001.

que son llamadas **números m -armónicos**, en esta notación $H_{n,1} = H_n$ y

$$\begin{aligned} H_{\infty,m} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^m} \\ &= \zeta(m) \end{aligned} \tag{1}$$

Euler descubrió la constante γ usando los números armónicos para calcular el valor de la serie armónica alternada (ver ¹), es decir el valor de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Teorema 1.1.1 (Criterio de Leibniz). *Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n \geq 0$ para cada n , una sucesión de números reales decreciente con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.*

Demostración. Ver ⁶, teorema 9.3.2. □

Tomando $a_n = \frac{1}{n}$, por el criterio de Leibniz se tiene que la serie armónica alternada es convergente. La siguiente demostración fue realizada por Euler (ver ¹), en esta apareció por primera vez la constante γ .

Teorema 1.1.2. *Si $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ln(2)$*

Demostración. Sea $\gamma_n = H_n - \ln(n)$, entonces

$$\begin{aligned} y_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Note que $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}) = H_{2n}$ y $2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) = H_n$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 y_{2n} &= H_{2n} - H_n \\
 &= H_{2n} - H_n + (\ln(n) + \ln(2) - \ln(2n)) \\
 &= (H_{2n} - \ln(2n)) - (H_n - \ln(n)) + \ln(2) \\
 &= \gamma_{2n} - \gamma_n + \ln(2).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Como y_{2n} es convergente se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n}. \tag{3}$$

De las ecuaciones (2) y (3) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_{2n} - \gamma_n + \ln(2)) \\
 &= \gamma - \gamma + \ln(2) \\
 &= \ln(2).
 \end{aligned}$$

□

Otra forma de demostrar lo anterior es usando series de Taylor, la serie de Taylor del logaritmo es

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k},$$

por consiguiente

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Otra relación de la constante γ con los números armónicos y m -armónicos es el siguiente teorema que también fue demostrado por Euler (ver ¹). Este resultado es

importante ya que relaciona la constante γ con la función zeta de Riemann.

Teorema 1.1.3. $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln(n)) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n}$.

Demostración. Recordemos que $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ y consideremos el siguiente arreglo de sumas

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1}\right)^4 + \dots \\ \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots \\ \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots \\ &\vdots \\ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \dots \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln(k)] \\ &= \ln(n+1), \end{aligned}$$

entonces la suma de los términos de la primera columna es $\ln(n+1)$. Además si $k \geq 1$ es un número entero fijo se tiene que

$$\frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^k\right) = \frac{(-1)^{k+1}}{k} H_{n,k},$$

de esto se sigue que, la suma de los términos de la k -ésima columna es $\frac{(-1)^{k+1}}{k} H_{n,k}$. Sumar los términos de la primera columna es igual a sumar todos los renglones o

todas las columnas (exceptuando la primera columna), por lo tanto

$$\ln(n+1) = H_n - \frac{1}{2}H_{n,2} + \frac{1}{3}H_{n,3} - \frac{1}{4}H_{n,4} + \dots$$

es decir

$$H_n - \ln(n+1) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{H_{n,k}}{k}. \quad (4)$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{n,k} = H_{\infty,k}$ y $H_{\infty,k} = \zeta(k)$ (ver ecuación (1)) y la identidad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{H_{n,k}}{k} = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{H_{\infty,k}}{k}$$

(ver apéndice A), de la igualdad (4) se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln(n+1)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{H_{n,k}}{k} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{H_{\infty,k}}{k} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k}. \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln(n)) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n}. \end{aligned}$$

□

1.2. GAMMA NÚMEROS

A continuación, se presentan los gamma números que son una generalización del número γ , se muestra su existencia e interpretación geométrica. Estos gamma

números se pueden ver en ⁷ p. 117.

La constante de Euler-Mascheroni puede ser generalizada por

$$\gamma\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \right),$$

para $0 < \alpha < 1$, note que $\gamma\left(\frac{1}{x}\right) = \gamma$. La siguiente proposición generaliza esto aún más.

Proposición 1.2.1. *Sea f una función con la propiedad que para cada $x \in (0, \infty)$ $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Considere la sucesión*

$$\gamma_n(f) = \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt \right),$$

entonces :

(i) $\gamma_n(f)$ *es convergente.*

(ii) *Si $\gamma(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(f)$, entonces*

$$0 < \gamma_n(f) - \gamma(f) < f(n)$$

para todo $n > 1$.

Demostración. (i) Veamos que $\gamma_n(f)$ es decreciente, para eso considere:

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}(f) - \gamma_n(f) &= \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(t) dt - \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt \right) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt. \end{aligned} \tag{5}$$

⁷ Julian Havil. "Gamma: exploring Euler's constant". En: *The Australian Mathematical Society* (2003), pág. 250.

Como $f'(x) < 0$ para $x \in [0, \infty)$, es decir f es decreciente en $[0, \infty)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y para todo t en $(n, n+1)$ se tiene que $-f(n+1) > -f(t)$. En consecuencia

$$-\int_n^{n+1} f(t)dt < -\int_n^{n+1} f(n+1)dt.$$

De la desigualdad anterior y la ecuación (5) se tiene que

$$\gamma_{n+1}(f) - \gamma_n(f) < f(n+1) - \int_n^{n+1} f(n+1)dt. \quad (6)$$

Además, para todo $m \in \mathbb{N}$

$$f(m+1) - \int_m^{m+1} f(m+1)dt = 0. \quad (7)$$

De las ecuaciones (6) y (7) se sigue que $\gamma_{n+1}(f) - \gamma_n(f) < 0$, es decir γ_n es estrictamente decreciente.

Análogamente, como f es decreciente entonces

$$-\int_k^{k+1} f(k) < -\int_k^{k+1} f(t), \quad (8)$$

para todo $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. También

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt \right) \quad (9)$$

De la desigualdad (8) y la ecuación (9) tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(k)dt \right) < \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(t),$$

o sea

$$0 < \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(t)dt. \quad (10)$$

De la desigualdad (10) se sigue que $0 < f(n) < \gamma_n(f)$, es decir, es acotada inferiormente. Como $\gamma_n(f)$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces

$$\gamma(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt \right)$$

existe y $\gamma(f) < \gamma_n(f)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) De $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(n),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \gamma(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(t) dt \right). \end{aligned} \tag{11}$$

Además

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(t) dt - \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(t) dt \right) = f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt,$$

y como f es decreciente, entonces

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(t) dt - \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(t) dt \right) > f(n) - \int_n^{n+1} f(n) dt,$$

por lo tanto

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(t) dt > \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(t) dt. \tag{12}$$

De la ecuación (11) la sucesión $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(t)dt$ converge a $\gamma(f)$ y haciendo uso de la desigualdad (12) es creciente, por consiguiente

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(t)dt < \gamma(f), \quad (13)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, de esto se sigue que

$$\gamma_n(f) - \gamma(f) < f(n). \quad (14)$$

Como $\gamma_n(f) > \gamma(f)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$0 < \gamma_n(f) - \gamma(f) < f(n).$$

□

Definición 1.2.2. Sea f una función con la propiedad que para cada $x \in [0, \infty)$ $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Se llama **gamma número** al limite de la sucesión

$$\gamma_n(f) = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t)dt,$$

para $n > 1$ y se denota por $\gamma(f)$.

Ejemplo 1.2.3. Algunos ejemplos de gamma números son:

- La constante de Euler-Mascheroni:

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{t} dt \right) \\ &= \gamma. \end{aligned}$$

De la proposición 1.2.1 se sigue que

$$0 < \gamma_{10^{11}} - \gamma < 10^{-11}.$$

Con ayuda del software Google Colab (ver ⁸) se calculó $\gamma_{10^{11}}$ (ver figura 1).

```
[2] from math import log

def H(n): # enésimo número armónico H_n
    suma=0
    for i in range(n):
        H_n=H_n+(1/(i+1))
    return H_n

def gamma(n): # enésimo término de la sucesión gamma_n
    gamma=H(n)-log(n)
    return gamma

[ ] gamma(10**11)

0.5772156636019261
```

Figura 1 – Implementación de la sucesión γ_n y calculo de $\gamma_{10^{11}}$ en Google Colaboratory.

Por lo tanto, una aproximación de al menos 11 cifras decimales de γ es

$$\gamma_{10^{11}} = 0.5772156649.$$

■ Para $\alpha > 1$,

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \\ &= \zeta(\alpha) - \frac{1}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Note que para cada f con las propiedades mencionadas en la definición 1.2.2,

⁸ Kalée Tock. "Google CoLaboratory as a platform for Python coding with students". En: *RTSRE Proceedings 2.1* (2019).

$S(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ es una suma superior de f correspondiente a la partición $\mathcal{P} = (1, 2, \dots, n)$ (ver figura 2).

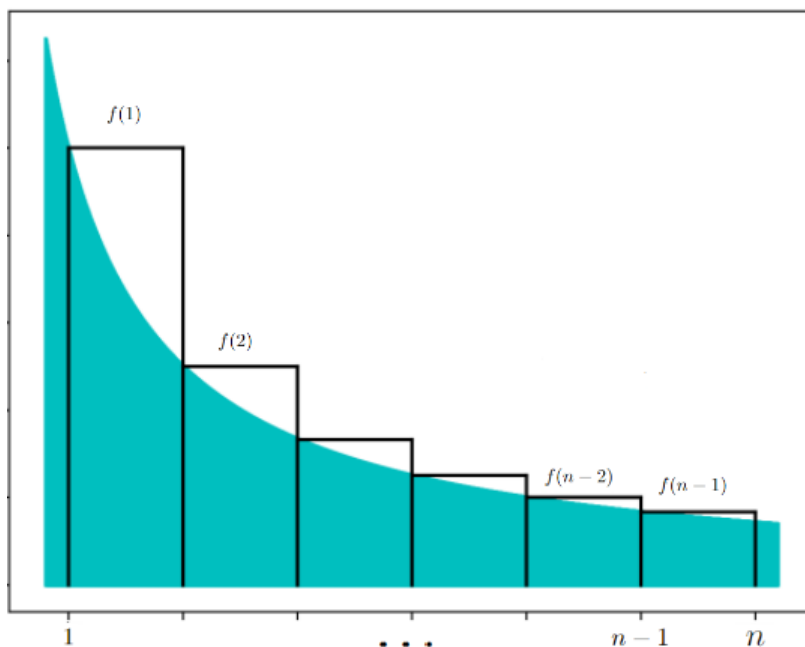


Figura 2 – Suma superior $S(n)$ de f correspondiente a la partición $(1, 2, \dots, n)$.

De lo anterior para una función f con la propiedad de que para cada $x \in (0, \infty)$ $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0,$$

la sucesión $\gamma_n(f) - f(n)$ representa el valor con que la suma $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ aproxima el valor de la integral $\int_1^n f(t)dt$, es decir el área bajo f en el intervalo $[1, n]$.

En específico, la sucesión

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

mide el error con el cual la suma $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ se aproxima al área de la función $\frac{1}{x}$. De manera equivalente esta sucesión puede ser usada para estimar que tanto se acerca

$\ln(n)$ a la suma $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, es decir las sumas parciales de la serie armónica.

1.3. PRELIMINARES PARA LA DEMOSTRACIÓN DEL CRITERIO

A continuación se dan los preliminares para la demostración del criterio de racionalidad que se muestra en el capítulo 2. Se presentan algunas definiciones de teoría de números y notación asintótica; también se muestran las identidades de sumas dobles y números combinatorios necesarias.

Lema 1.3.1. *Si $0 < x, y < 1$, entonces*

$$\int_0^\infty (xy)^t dt = -\frac{1}{\ln(xy)}.$$

Demostración. Sea $g(t) = \frac{(xy)^t}{\ln(xy)}$. Derivando implícitamente con respecto a t se tiene que

$$g'(t) = (xy)^t,$$

entonces por el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (xy)^t dt &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(xy)^t}{\ln(xy)} \right) - \frac{(xy)^0}{\ln(xy)} \\ &= -\frac{1}{\ln(xy)}. \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición es una generalización de la suma $\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{1+i} \right)$.

Proposición 1.3.2. *Si n y p son enteros tales que $1 < p < n$, entonces*

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+p} \right) = \sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+n} \right).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{1}{i+p} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+p} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+p} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) \\
&= \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{p+n} \right) \\
&= \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{p+n} \right) \\
&= \sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+n} \right).
\end{aligned}$$

□

Definición 1.3.3. Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ y supongamos que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$. la notación $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \rightarrow a$ significa que

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0.$$

Observación 1.3.4. i) Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales, diremos que $x_n = o(y_n)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{y_n} \right| = 0$.

ii) El símbolo $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \rightarrow c$ se lee “ $f(x)$ es o-minúscula de $g(x)$ ” o “ $f(x)$ es de orden inferior a $g(x)$ ” y tiene por objeto dar a entender la idea de que para x próximo a c , $f(x)$ es pequeño comparado con $g(x)$, de manera similar para sucesiones.

iii) La igualdad $f(x) = h(x) + o(g(x))$ significa que $f(x) - h(x) = o(g(x))$, análogamente en el caso de sucesiones.

iv) Note que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n - \ln(n) - \gamma}{1} = 0,$$

en consecuencia, $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Lema 1.3.5. Sean $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números

reales, entonces:

(i) Si $x_n = y_n + o(1)$ entonces $\sum_{k=1}^m (a_k x_n) = (\sum_{k=1}^m a_k y_n) + o(1)$.

(ii) Si $w_n = x_n + o(1)$ y $y_n = z_n + o(1)$ entonces $w_n + y_n = (z_n + x_n) + o(1)$.

(iii) Si $x_n = y_n + o(1)$ y y_n es convergente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Demostración. (i) Note que

$$\sum_{k=1}^m a_k x_n - \sum_{k=1}^m a_k y_n = \sum_{k=1}^m (a_k x_n - a_k y_n),$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^m a_k x_n - \sum_{k=1}^m a_k y_n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m a_k (x_n - y_n)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^m a_k x_n - \sum_{k=1}^m a_k y_n \right] &= \sum_{k=1}^m a_k \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

De lo anterior

$$\sum_{k=1}^m (a_k x_n) = \left(\sum_{k=1}^m a_k y_n \right) + o(1).$$

(ii) Si $w_n = x_n + o(1)$ y $y_n = z_n + o(1)$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n - x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - z_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de ahí que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(w_n - x_n) + (y_n - z_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(w_n + y_n) - (x_n + z_n)]. \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(w_n + y_n) - (x_n + z_n)] = 0,$$

es decir $w_n + y_n = (z_n + x_n) + o(1)$.

(iii) Si $x_n = y_n + o(1)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ existe, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) - 0 \\ &= (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) - (\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - y_n + x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

□

Proposición 1.3.6. Sean α_1, α_2 números enteros positivos, entonces

$$\ln(n + \alpha_1) = \ln(n) + o(1) \text{ y } H_{n+\alpha_2} = H_n + o(1).$$

Demostración. Note que

$$\ln(n + \alpha_1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{\alpha_1}{n}\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(n + \alpha_1) - \ln(n)] &= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha_1}{n} \right) \right) \\ &= \ln(1) \\ &= 0,\end{aligned}$$

por lo tanto $\ln(n + \alpha_1) = \ln(n) + o(1)$. Por otra parte

$$\begin{aligned}\frac{H_{n+\alpha_2} - H_n}{1} &= \sum_{i=n+1}^{n+\alpha_2} \frac{1}{i} \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{n+\alpha_2} \frac{1}{n+1},\end{aligned}\tag{15}$$

además

$$\sum_{i=n+1}^{n+\alpha_2} \frac{1}{n+1} = \frac{\alpha_2}{n+1}.\tag{16}$$

De las ecuaciones (15) y (16) se concluye que

$$\frac{H_{n+\alpha_2} - H_n}{1} \leq \sum_{i=n+1}^{n+\alpha_2} \frac{1}{n+1}.\tag{17}$$

De la desigualdad (17) y del teorema de compresión (ver ⁶, teorema 3.2.7) se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{n+\alpha_2} - H_n}{1} = 0,$$

es decir $H_{n+\alpha_2} = H_n + o(1)$. □

El siguiente lema es un resultado de combinatoria conocido como identidad de Vandermonde, que recibe su nombre del matemático francés Alexandre-Théophile Vandermonde (1772).

Lema 1.3.7 (Identidad de Vandermonde). *Para $m, n, r \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

Demostración. Del teorema del binomio se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{m+n} \binom{m+n}{r} x^r &= (1+x)^{m+n} \\ &= (1+x)^m (1+x)^n \\ &= \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right), \end{aligned}$$

de esto y la fórmula para el producto de polinomios se sigue que

$$\sum_{r=0}^{m+n} \binom{m+n}{r} x^r = \sum_{r=0}^{m+n} \left(\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} \right) x^r. \quad (18)$$

De la expresión (18) y la igualdad de polinomios se sigue que

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}.$$

□

Lema 1.3.8. $2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$

Demostración. Del teorema del binomio

$$((1-1)^n)^2 = \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \right) \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \right).$$

Teniendo en cuenta la identidad

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right), \quad n > 0 \quad (19)$$

obtenemos

$$0 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j}.$$

Note que si $f(i, j) = f(j, i)$ para todo $i, j \in \{0, \dots, n\}$, entonces

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f(i, j) = 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} f(i, j) + \sum_{i=j=0}^n f(i, j). \quad (20)$$

Por la igualdad 20 llegamos a

$$0 = 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} + \sum_{i=j=0}^n (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j},$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 &= -2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \\ &= 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j}. \end{aligned} \quad (21)$$

Si en el lema 1.3.7 (identidad de Vandermonde) se toma $r = n, m = n, k = i$ y teniendo en cuenta que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ se obtiene que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}. \quad (22)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (21) y (22) implican que

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \\ &= 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j}. \end{aligned}$$

□

Definición 1.3.9. Sea n un entero positivo y $d_n = mcm\{1, 2, \dots, n\}$. S_n denota el producto

$$S_n := \prod_{k=1}^n \prod_{i=0}^{\min(k-1, n-k)} \prod_{j=i+1}^{n-i} (n+k)^{\frac{2d_{2n}}{j} \binom{n}{i}^2}$$

y $d_{2n}^{-1} \ln(S_n)$ por

$$L_n := d_{2n}^{-1} \ln(S_n).$$

Note que si $a, n \in \mathbb{N}$ y $a < n$, entonces, a divide a d_n .

Proposición 1.3.10. Sea n un entero positivo entonces

$$L_n = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\min(k-1, n-k)} \sum_{j=i+1}^{n-i} \frac{2}{j} \binom{n}{i}^2 \ln(n+k).$$

Demostración. Note que

$$\ln(S_n) = \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(\prod_{i=0}^{\min(k-1, n-k)} \prod_{j=i+1}^{n-i} (n+k)^{\frac{2d_{2n}}{j} \binom{n}{i}^2} \right) \right).$$

Haciendo

$$a_k = \prod_{i=0}^{\min(k-1, n-k)} \prod_{j=i+1}^{n-i} (n+k)^{\frac{2d_{2n}}{j} \binom{n}{i}^2},$$

del lema 2.0.10 se sigue que $\ln(S_n) = \sum_{k=1}^n \ln(a_k)$, es decir

$$\ln(S_n) = \sum_{k=1}^n \ln \left(\prod_{i=0}^{\min(k-1, n-k)} \left(\prod_{j=i+1}^{n-i} (n+k)^{\frac{2d_{2n}}{j} \binom{n}{i}^2} \right) \right).$$

Si en el lema 2.0.10 se toma

$$a_i = \left(\prod_{j=i+1}^{n-i} (n+k)^{\frac{2d_{2n}}{j} \binom{n}{i}^2} \right),$$

se obtiene que

$$\ln \left(\prod_{i=0}^{\min(k-1, n-k)} (a_i) \right) = \sum_{i=0}^{\min(k-1, n-k)} \ln(a_i)$$

y de ahí que

$$\ln(S_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\min(k-1, n-k)} \ln \left(\prod_{j=i+1}^{n-i} (n+k)^{\frac{2d_{2n}}{j} \binom{n}{i}^2} \right). \quad (23)$$

Nuevamente, si en el lema 2.0.10 se toma $a_j = (n+k)^{\frac{2d_{2n}}{j} \binom{n}{i}^2}$ se tiene que

$$\ln \left(\prod_{j=i+1}^{n-i} (n+k)^{\frac{2d_{2n}}{j} \binom{n}{i}^2} \right) = \sum_{j=i+1}^{n-i} \ln \left((n+k)^{\frac{2d_{2n}}{j} \binom{n}{i}^2} \right),$$

de esta igualdad y la ecuación (23) se sigue que

$$\begin{aligned} \ln(S_n) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\min(k-1, n-k)} \sum_{j=i+1}^{n-i} \ln \left((n+k)^{\frac{2d_{2n}}{j} \binom{n}{i}^2} \right) \\ &= d_{2n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\min(k-1, n-k)} \sum_{j=i+1}^{n-i} \frac{2}{j} \binom{n}{i}^2 \ln(n+k). \end{aligned} \quad (24)$$

Por definición $L_n = d_{2n}^{-1} \ln(S_n)$, de esto y la ecuación (24) se concluye que

$$L_n = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\min(k-1, n-k)} \sum_{j=i+1}^{n-i} \frac{2}{j} \binom{n}{i}^2 \ln(n+k).$$

□

Lema 1.3.11. Sean $0 \leq k < n$ enteros, entonces

$$\sum_{j=k+1}^n (-1)^{k+j-1} \binom{n}{j} \frac{1}{j-k} = \binom{n}{k} (H_n - H_k).$$

Demostración. Se hará la prueba por inducción en n . Se usará la notación

$$I(n, k) = \sum_{j=k+1}^n (-1)^{k+j-1} \binom{n}{j} \frac{1}{j-k}.$$

Para $n = 1$, como $0 \leq k < 1$ y k es entero, entonces $k = 0$ y

$$\begin{aligned} I(1, 0) &= \sum_{j=0+1}^1 (-1)^{0+j-1} \binom{1}{j} \frac{1}{j-0} \\ &= 1 \\ &= \binom{1}{0} (H_1 - H_0). \end{aligned}$$

Supongamos que $I(m, k) = \binom{m}{k} (H_m - H_k)$, para $m < n$. Se proba el paso inductivo por casos: primero el caso cuando $k = 0$ y después el caso $k > 0$. Recordemos que

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} \quad (25)$$

$$\binom{n-1}{j-1} \frac{1}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{1}{n} = \binom{n}{j} \frac{1}{n}. \quad (26)$$

Por la identidad (25)

$$I(n, 0) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n-1}{j-1} \frac{1}{j},$$

teniendo en cuenta que $\binom{n-1}{n} = 0$ y la ecuación (26) llegamos a

$$I(n, 0) = I(n-1, 0) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n}{j}. \quad (27)$$

Del teorema del binomio se tiene que

$$(1-1)^n = 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j},$$

de modo que

$$1 = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n}{j}. \quad (28)$$

Por consiguiente, de las ecuaciones (32) y (33) se deduce que

$$\begin{aligned} I(n, 0) &= I(n-1, 0) + \frac{1}{n} \\ &= H_{n-1} + \frac{1}{n} \\ &= H_n. \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene el caso cuando $k = 0$. Cuando $k > 0$ usamos de nuevo (25) para obtener

$$I(n, k) = I(n-1, k) + \sum_{j=k+1}^n (-1)^{k+j-1} \binom{n-1}{j-1} \frac{1}{j-k}. \quad (29)$$

Si en la expresión (29) se hace $j' = j - 1$, entonces

$$I(n, k) = I(n-1, k) + \sum_{j'=k}^{n-1} (-1)^{k+j'} \binom{n-1}{j'} \frac{1}{j' - (k-1)},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} I(n, k) &= I(n-1, k) + I(n-1, k-1) \\ &= \binom{n-1}{k} (H_{n-1} - H_k) + \binom{n-1}{k-1} (H_{n-1} - H_{k-1}) \\ &= \binom{n}{k} (H_{n-1} - H_{k-1}) - \binom{n-1}{k} \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (30)$$

De (25) se sigue que $\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1}$, esto y la ecuación (30) implican que

$$I(n, k) = \binom{n}{k} (H_{n-1} - H_k) + \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{k},$$

teniendo en cuenta esta igualdad y la ecuación (31) se concluye que

$$I(n, k) = \binom{n}{k} (H_n - H_k),$$

lo cual es aquello que se quería probar. $\square$

Lema 1.3.12. Para k, n enteros tales que $0 < k < n$, se tiene que

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i-1} \binom{n}{i} \frac{1}{k-i} = \binom{n}{k} (H_n - H_{n-k}).$$

Demostración. Si en el lema 1.3.11 se reemplaza k por $n - k$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=n-k+1}^n (-1)^{n-k+j-1} \binom{n}{j} \frac{1}{j-n+k} &= \binom{n}{n-k} (H_n - H_{n-k}) \\ &= \binom{n}{k} (H_n - H_{n-k}). \end{aligned} \tag{31}$$

Además, si se usa la notación $f(j) = (-1)^{n-k+j-1} \binom{n}{j} \frac{1}{j-n+k}$, entonces por la ecuación (31) llegamos a

$$\binom{n}{k} (H_n - H_{n-k}) = f(n - (k - 1)) + f(n - (k - 2)) + \dots + f(n - 1) + f(n - 0).$$

De lo anterior

$$\sum_{i=0}^{k-1} f(n - i) = \binom{n}{n-k} (H_n - H_{n-k}),$$

es decir

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-k} (H_n - H_{n-k}) &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{2n-i-k-1} \binom{n}{n-i} \frac{1}{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i-1} \binom{n}{n-i} \frac{1}{k-i}. \end{aligned} \tag{32}$$

Teniendo en cuenta que $\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}$ y la ecuación (32) se sigue que

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i-1} \binom{n}{i} \frac{1}{k-i} = \binom{n}{k} (H_n - H_{n-k}).$$

□

Proposición 1.3.13. Si k y n son enteros tales que $1 \leq k \leq n$, se tiene que

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k}^n (-1)^{i+j-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \frac{1}{j-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i). \quad (33)$$

Demostración. Se hará inducción sobre k . Sean $I(k)$ y $D(k)$ las sumas del lado izquierdo y derecho de la igualdad (33) respectivamente. Del lema 1.3.11 se sigue que $I(1) = H_n = D(1)$. Supongamos que $I(m) = D(m)$ para $m < k + 1$. Note que

$$I(k+1) - I(k) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=k+1}^n (-1)^{i+j-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \frac{1}{j-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k}^n (-1)^{i+j-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \frac{1}{j-i}.$$

Tomando a $g(k) = \sum_{j=k+1}^n (-1)^{k+j-1} \binom{n}{k} \binom{n}{j} \frac{1}{j-k}$, tenemos que

$$\begin{aligned} I(k+1) - I(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=k+1}^n (-1)^{i+j-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \frac{1}{j-i} - \sum_{j=k}^n (-1)^{i+j-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \frac{1}{j-i} \right) + g(k) \\ &= \binom{n}{k} \left(\sum_{j=k+1}^n (-1)^{k+j-1} \binom{n}{j} \frac{1}{j-k} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i-1} \binom{n}{i} \frac{1}{k-i} \right). \end{aligned}$$

Aplicando los lemas 1.3.11 y lema 1.3.12 se tiene que

$$\begin{aligned} I(k+1) - I(k) &= \binom{n}{k}^2 (H_{n-k} - H_k) \\ &= D(k+1) - D(k). \end{aligned} \quad (34)$$

Por la hipótesis de inducción $I(k) = D(k)$, en consecuencia, por la ecuación (34) $I(k+1) = D(k+1)$. Por lo anterior y el principio de inducción matemática se concluye

que: para todo entero $k \geq 1$ y todo entero $n \geq k$ se tiene que

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k}^n (-1)^{i+j-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \frac{1}{j-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i).$$

□

Lema 1.3.14. Sea $C(i, j, n) = \binom{n}{i} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{i+j-1}}{j-i}$, con $0 \leq i < j \leq n$. Entonces

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k}^n C(i, j, n) \ln(n+k) = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \sum_{k=1}^{j-i} C(i, j, n) \ln(n+i+k).$$

Demostración. Sea

$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{j-i} C(i, j, n) \ln(n+i+k).$$

Note que $0 \leq i < j \leq n$, si y sólo si, $1 \leq j \leq n$ y $0 \leq i \leq j-1$, por esta razón

$$\{\alpha_{i,j} : 0 \leq i < j \leq n\} = \{\alpha_{i,j} : 1 \leq j \leq n \wedge 0 \leq i \leq j-1\},$$

de modo que

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} \alpha_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{i,j},$$

es decir

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j \leq n} \left(\sum_{k=1}^{j-i} C(i, j, n) \ln(n+i+k) \right) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} \left(\sum_{k=1}^{j-i} C(i, j, n) \ln(n+i+k) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} \left(\sum_{k=i+1}^j C(i, j, n) \ln(n+k) \right). \end{aligned} \tag{35}$$

Por otra parte, sea

$$a_{i,j,k} = C(i, j, k) \ln(n+k),$$

del la igualdad

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k}^n \alpha_{i,j} = \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i,j}, \quad 1 \leq k \leq n$$

se deduce que

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k}^n a_{i,j,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,j,k}. \quad (36)$$

Tomando $u_{k,j} = \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,j,k}$ en la identidad

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n u_{k,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j u_{k,j}, \quad n > 0$$

y teniendo en cuenta la ecuación (36) obtenemos lo siguiente

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,j,k} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,j,k}. \quad (37)$$

De las identidades (36) y (37) obtenemos que

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k}^n a_{i,j,k} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,j,k},$$

de esto y el lema 2.0.11 se sigue que

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k}^n a_{i,j,k} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=i+1}^j a_{i,j,k},$$

es decir

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k}^n C(i,j,n) \ln(n+k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=i+1}^j C(i,j,n) \ln(n+k). \quad (38)$$

De las ecuaciones (35) y (38) se concluye que

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k}^n C(i, j, n) \ln(n+k) = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \sum_{k=1}^{j-i} C(i, j, n) \ln(n+i+k),$$

que es lo que se quería probar. □

Lema 1.3.15. $L_n = 2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i) \ln(n+k).$

Demostración. Note que para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ se tiene que

$$\sum_{j=i+1}^{n-i} \frac{1}{j} = H_{n-i} - H_i,$$

de esto y la proposición 1.3.10 se sigue que

$$L_n = 2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\min\{k-1, n-k\}} \binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i) \ln(n+k). \quad (39)$$

Si $n \geq 1$, entonces $n - n \leq n - 1$, por lo tanto

$$\{k \in \mathbb{N} : n - k \leq k - 1 \wedge 1 \geq k \geq n\} \neq \emptyset.$$

Sea k_0 el menor entero tal que $n - k_0 \leq k_0 - 1$, si se usa la notación

$$\binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i) \ln(n+k) = a_{i,k},$$

entonces por la identidad (39) se llega a

$$L_n = 2 \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}^2 a_{i,k} + 2 \sum_{k=k_0}^n \sum_{i=0}^{n-k} a_{i,k}. \quad (40)$$

Sea k tal que $k_0 \leq k \leq n$, entonces $n - k \leq n - k_0 \leq k_0 - 1 \leq k - 1$ y además

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i) - \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i) &= \sum_{i=n-k+1}^{k-1} \binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i) \\ &= \sum_{i=n-k+1}^{k-1} \binom{n}{i}^2 H_{n-i} - \sum_{i=n-k+1}^{k-1} \binom{n}{i}^2 H_i. \end{aligned} \quad (41)$$

Teniendo en cuenta que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ y que

$$\sum_{i=n-k+1}^{k-1} \binom{n}{i}^2 H_{n-i} = \binom{n}{n-k+1}^2 H_{k-1} + \cdots + \binom{n}{k-1}^2 H_{n-k+1},$$

se deduce que

$$\sum_{i=n-k+1}^{k-1} \binom{n}{i}^2 H_{n-i} = \binom{n}{k-1}^2 H_{k-1} + \cdots + \binom{n}{n-k+1}^2 H_{n-k+1},$$

es decir

$$\sum_{i=n-k+1}^{k-1} \binom{n}{i}^2 H_{n-i} = \sum_{i=n-k+1}^{k-1} \binom{n}{i}^2 H_i,$$

de la igualdad anterior y teniendo en cuenta la ecuación (41), llegamos a

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i) - \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i) = 0.$$

Lo anterior implica que para $k_0 \leq k \leq n$ se tiene que

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i),$$

entonces

$$2 \sum_{k=k_0}^n \sum_{i=0}^{n-k} a_{i,k} = 2 \sum_{k=k_0}^n \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,k},$$

reemplazando la igualdad anterior en la ecuación (40) se concluye que

$$\begin{aligned}
 L_n &= 2 \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}^2 a_{i,k} + 2 \sum_{k=k_0}^n \sum_{i=0}^{n-k} a_{i,k} \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}^2 a_{i,k} \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}^2 (H_{n-i} - H_i) \ln(n+k).
 \end{aligned}$$

□

Proposición 1.3.16. $L_n = 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \sum_{k=1}^{j-i} \frac{(-1)^{i+j-1}}{j-i} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \ln(n+i+k).$

Demostración. De la proposición 1.3.13 y el lema 1.3.15 se tiene que

$$L_n = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k}^n C(i, j, n) \ln(n+k),$$

tomando la igualdad anterior y el lema 1.3.14 llegamos a

$$L_n = 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \sum_{k=1}^{j-i} \frac{(-1)^{i+j-1}}{j-i} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \ln(n+i+k).$$

□

Definición 1.3.17. Sea x un número real definimos $\pi(x)$ como la cantidad de números primos menores o iguales que x .

Observación 1.3.18. Para $x < 2$, $\pi(x) = 0$.

Definición 1.3.19 (Función de Von Mangoldt). Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $\Lambda(n)$ como:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{si } n = p^k \text{ para algún primo y entero } k \geq 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Definición 1.3.20 (Función de Chebyshev). Para cada $x \in (0, +\infty)$ se define $\psi(x)$ por

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

donde la suma está comprendida por todos los números naturales menores o iguales que x y Λ es la función de Von Mangoldt.

Proposición 1.3.21.

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} m \ln(p),$$

con el sumatorio comprendiendo todos los números primos p menores que x y donde $m = \max_{k \in \mathbb{N}} \{p^k \leq x\}$.

Demostración. Según la definición 2.34 los únicos sumandos no nulos de $\sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ son los que cumplen la condición de que n sea potencia de un número primo. Para cada primo $p \leq x$, las potencias de p menores o iguales que x son $\{p, p^2, \dots, p^m\}$, donde $m = \max_{k \in \mathbb{N}} \{p^k \leq x\}$. De lo anterior, para cada primo $p \leq x$, el término $\ln(p)$ aparece m veces en la suma $\sum_{n \leq x} \Lambda(n)$, por lo tanto

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} m \ln(p).$$

□

Teorema 1.3.22. El cociente $\frac{\psi(x)}{x}$ toma su máximo valor en $x = 113$ y para $x > 0$

$$\psi(x) < 1.03883x.$$

Demostración. ver ⁹, teorema 12.

□

⁹ J Barkley Rosser y Lowell Schoenfeld. "Approximate formulas for some functions of prime numbers". En: *Illinois Journal of Mathematics* 6.1 (1962), págs. 64-94.

Proposición 1.3.23. $1 < d_{2n} < 8^n$, para $n > 0$.

Demostración. Es evidente que si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces $mcm\{1, \dots, 2n\} > 1$. Dado un entero positivo n , sea $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)}\}$ el conjunto de números primos menores o iguales que n . Considere $\prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{m_i}$ donde cada $m_i = \max_{k \in \mathbb{N}} \{p_i^k \leq n\}$ y note lo siguiente:

i) Es claro que $\prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{m_i} > 0$.

ii) Si tomamos $k \in \{1, \dots, n\}$, entonces todos los divisores primos de k están en P . Además, si p_i divide a k y $p_i^{\alpha_i}$ es la potencia de p_i en la descomposición de factores primos de k , entonces por la elección de m_i se tiene que $\alpha_i \leq m_i$. Por lo tanto $p_i^{\alpha_i}$ divide a $p_i^{m_i}$. De lo anterior cada k en $\{1, \dots, n\}$ divide a $\prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{m_i}$.

iii) Sea r tal que k divide a r para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Como cada $p_i^{m_i} \leq n$ entonces $p_i^{m_i} \in \{1, \dots, n\}$, es decir cada $p_i^{m_i}$ divide a r . Es claro que si $i \neq j$ entonces $mcd\{p_i^{m_i}, p_j^{m_j}\} = 1$ y como cada $p_i^{m_i}$ divide a r se tiene que $\prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{m_i}$ divide a r .

Las observaciones i), ii) y iii) implican que

$$d_n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{m_i}.$$

Tomando la igualdad anterior y aplicando el lema 2.0.10 se tiene que

$$\ln(d_n) = \sum_{i=1}^{\pi(n)} \ln(p_i^{m_i}). \quad (42)$$

Note que

$$\sum_{i=1}^{\pi(n)} \ln(p_i^{m_i}) = \sum_{p \leq n} m \ln(p),$$

donde la suma del lado derecho de la igualdad

comprende todos los números primos p menores que n y $m = \max_{k \in \mathbb{N}} \{p^k \leq n\}$, de esto y la ecuación (42) se sigue que

$$\ln(d_n) = \psi(n). \quad (43)$$

De la identidad (43) y el teorema 1.3.22 se deduce que $\ln(d_n) \leq 1.03883n$. Como $(1.03883)(2) < 3(\ln(2))$, entonces $(1.03883)(2n) < 3n(\ln(2))$, en consecuencia

$$\ln(d_{2n}) < (1.03883)(2n) < \ln(8^n). \quad (44)$$

La desigualdad (44) implica que $d_{2n} < 8^n$. □

1.4. ¿DÓNDE APARECE γ ?

En esta sección, se da la definición de la función Γ y se muestra la conexión de γ con las funciones $\Gamma(x)$ y $\zeta(x)$, estas conexiones garantizan su aparición en análisis y teoría de números. La definición de la constante de Euler-Mascheroni $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n - \ln(n)$, permite aproximar las sumas parciales de la serie armónica como $H_n \approx \ln(n) + \gamma$. La falta de una formula explicita para H_n junto con su lenta divergencia hace que la aproximación sea aún más importante y con esa aproximación se tiene otra relación de γ con las sumas parciales de la serie armónica. Finalmente, se muestran algunas apariciones de γ en matemáticas, cabe aclarar que esta sección se podría extender a una larga lista de integrales, sumas, productos y límites que involucran γ pero en su lugar se darán algunos representativos.

Durante los años 1729 y 1730 Euler enfocó su atención en la integral

$$\int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{x-1} dt,$$

en una carta a Christian Goldbach (ver ⁷, capítulo 6), fechada el 8 de enero de 1730, dijo que esta converge para $x > 0$ y propuso su uso. En 1809 Adrien-Marie Legendre (1752-1833) le dio el nombre Gamma y el símbolo correspondiente Γ :

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{x-1} dt = \int_0^1 (-\ln(t))^{x-1} dt, \quad x > 0,$$

usando la sustitución $t \rightarrow -\ln(t)$, se tiene que

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

El 13 de octubre de 1729, Euler propuso a Goldbach (ver ⁷, capítulo 6) la siguiente igualdad.

Teorema 1.4.1. *Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ considere la sucesión*

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)},$$

entonces,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x).$$

Demostración. Ver ¹⁰, corolario 2.3. □

Karl Weierstrass (1815-1897) reescribió la definición y al hacerlo mostró una relación entre la función $\Gamma(x)$ y el número γ .

¹⁰ José Manuel Sánchez Cuadrado. "Las funciones Gamma de Euler-Gauss y Zeta de Riemann". En: (2020).

Teorema 1.4.2. Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_n(x)} \\ &= x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}. \end{aligned}$$

Demostración. Note que

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) &= \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \\ &= \frac{n^x}{x \left(1 + \frac{x}{1}\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{n}\right)} \\ &= \frac{n^x}{x \left(1 + \frac{x}{1}\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{n}\right)} \\ &= \frac{e^{x \ln(n)}}{x \left(1 + \frac{x}{1}\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{n}\right)} \\ &= \frac{e^{x(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})} e^{\left(\sum_{k=1}^n \frac{x}{k}\right)}}{x \left(1 + \frac{x}{1}\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{n}\right)} \\ &= e^{x(\ln(n) - H_n)} \frac{1}{x} \frac{e^x}{\left(1 + \frac{x}{1}\right)} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\left(1 + \frac{x}{2}\right)} \cdots \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \\ &= \frac{e^{-x(H_n - \ln(n))}}{x} \prod_{k=1}^n \left(\frac{e^{\frac{x}{k}}}{\left(1 + \frac{x}{k}\right)} \right), \end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-x(H_n - \ln(n))}}{x} \prod_{k=1}^n \left(\frac{e^{\frac{x}{k}}}{\left(1 + \frac{x}{k}\right)} \right) \\ &= \frac{e^{-x\gamma}}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{k}}}{\left(1 + \frac{x}{k}\right)} \right). \end{aligned} \tag{45}$$

De la ecuación (45) y el teorema 1.4.1 se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_n(x)} \\ &= xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.\end{aligned}$$

□

El teorema 1.4.2 se puede utilizar para calcular o aproximar los valores negativos de $\Gamma(x)$. Cabe aclarar que no se conoce el valor exacto de $\Gamma(\frac{1}{3})$ o $\Gamma(\frac{1}{4})$. El siguiente teorema relaciona la constante γ con la derivada logarítmica de la función $\Gamma(x)$.

Teorema 1.4.3. *Las funciones $\Gamma(x)$ y $\ln(\Gamma(x))$ son derivables y*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (\ln(\Gamma(x))) &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \\ &= -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).\end{aligned}$$

Demostración. Del teorema 1.4.2 se sigue que,

$$\ln \left(\frac{1}{\Gamma(x)} \right) = \ln \left(xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right),$$

esto y la parte (ii) del lema 2.0.10, implican que

$$-\ln(\Gamma(x)) = \ln(x) + \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right). \quad (46)$$

La función $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right)$ es derivable (ver ⁶, teorema 9.44) y

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} \right),$$

además, la función $\ln(x) + \gamma x$ también es derivable, teniendo en cuenta esto y la ecuación (46) se sigue que la función $\ln(\Gamma(x))$ es derivable. Como la $\ln(\Gamma(x))$ es derivable entonces la función $e^{\ln(\Gamma(x))} = \Gamma(x)$ también es derivable. Derivando implícitamente la ecuación (46) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln(\Gamma(x))) &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \\ &= -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \right) \\ &= -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).\end{aligned}$$

□

Definición 1.4.4 (Función digamma). Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ se define $\psi(x)$ como:

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Ejemplo 1.4.5. Del teorema 1.4.3 se sigue que

$$\begin{aligned}\psi(1) &= \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} \\ &= -\frac{1}{1} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= -\gamma.\end{aligned}\tag{47}$$

De la ecuación (55) $\Gamma'(1) = -\gamma$, geoméricamente esto significa que $-\gamma$ es la pendiente de la recta tangente a la función $\Gamma(x)$ en el punto $(1, \Gamma(1))$, es decir la recta $y = -\gamma x + (1 + \gamma)$, (ver figura 3).

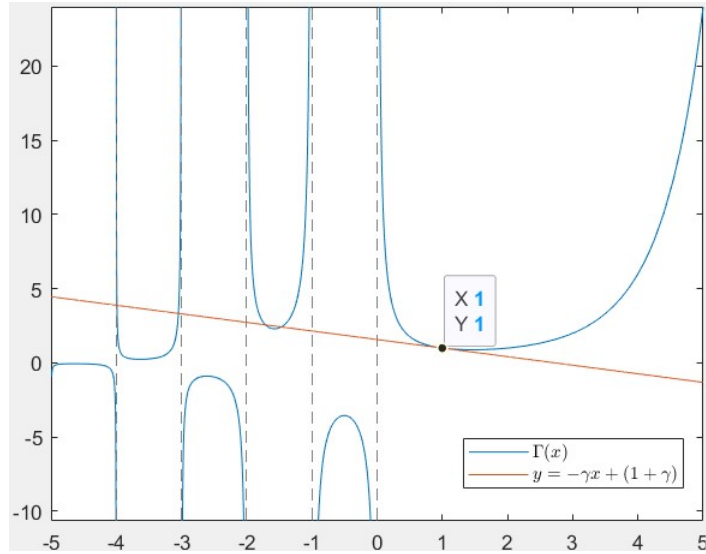


Figura 3 – Función $\Gamma(x)$ y su recta tangente en el punto $(1, 1)$.

A continuación se establece una fórmula que relaciona la función $\Gamma(x)$ con la función $\zeta(x)$, a su vez, esta relaciona la función $\zeta(x)$ con la constante γ . Cabe aclarar que este resultado se puede extender al conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Teorema 1.4.6. *Para cada $x > 1$ se tiene que*

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{e^u - 1} du.$$

Demostración. Ver ¹⁰, proposición 5.3. □

De los teoremas 1.4.2 y 1.4.6 se sigue que para cada $x > 1$

$$\zeta(x) = \left(x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}} \right) \left(\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{e^u - 1} du \right).$$

Por otra Parte, existen funciones que no pueden expresarse como combinación de funciones cuyas antiderivadas son conocidas, por ejemplo, $\ln(u)$, $\text{sen}((u))$, e^{-u} y $\frac{1}{u \ln(u)}$, son funciones tales que su antiderivada se puede calcular de forma elemental.

Sin embargo,

$$\int \frac{\sin(u)}{u} du, \int \frac{\cos(u)}{u} du, \int e^{-u^2} du, \int \frac{e^{-u}}{u} du \quad \text{y} \quad \int \frac{1}{\ln(u)} du,$$

son funciones que no se pueden calcular de forma simple. Estas integrales aparecen con frecuencia en algunas aplicaciones (a continuación se muestran) por lo que se les da un nombre:

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du && \text{(función error),} \\ \operatorname{Li}(x) &= \int_2^x \frac{1}{\ln(u)} du && \text{(integral logarítmica),} \\ \operatorname{Ci}(x) &= \int_x^\infty \frac{\cos(u)}{u} du && \text{(integral cosenoidal),} \\ \operatorname{Si}(x) &= \int_0^x \frac{\sin(u)}{u} du && \text{(integral senoidal),} \\ \operatorname{Ei}(x) &= \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du && \text{(integral exponencial).} \end{aligned}$$

La función de error de Laplace, $\operatorname{erf}(x)$, se reconoce como la función de densidad de probabilidad de la distribución Normal. $\operatorname{Li}(x)$ aparece regularmente en teoría de números en estimaciones de valores asintóticos, incluyendo una conjetura de Littlewood y Hardy sobre la conjetura de Goldbach (ver ¹¹). Las funciones $\operatorname{Li}(x)$, $\operatorname{Ci}(x)$ y $\operatorname{Si}(x)$ aparecen en diversas aplicaciones de diversas áreas de las matemáticas, incluyendo la teoría cuántica de campos, la teoría electromagnética, física de semiconductores, entre otras. Se puede demostrar que la integral de cualquier función de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}e^x$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, se reduce

¹¹ Godfrey H Hardy y John E Littlewood. "Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes". En: *Acta Mathematica* 44.1 (1923), págs. 1-70.

a combinaciones de la función $Ei(x)$. (Ver ⁷, p. 105-106).

Proposición 1.4.7.

$$\begin{aligned} Li(x) &= \gamma + \ln(\ln(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x)}{nn!}, \\ Ci(x) &= -\gamma - \ln(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{2n(2n)!} \quad y \\ Ei(x) &= -\gamma - \ln(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{nn!}. \end{aligned}$$

Demostración. Ver ⁷, p. 106-108. □

El siguiente resultado relaciona la función de Von Mangoldt de la definición 1.3.19 con la constante γ .

Teorema 1.4.8.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda(n) - 1}{n} = -2\gamma.$$

Demostración. Ver ⁷, p. 109. □

El siguiente teorema relaciona γ con los números primos.

Teorema 1.4.9 (Teorema de Mertens). *A continuación, supongamos que $p \leq n$ significa todos los números primos que no excedan a n , entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) \prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = e^{-\gamma}.$$

Demostración. Ver ¹², teorema 3.3.2. □

¹² Jeffrey Lagarias. "Euler's constant: Euler's work and modern developments". En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 50.4 (2013), págs. 527-628.

2. CRITERIO DE RACIONALIDAD

Demostrar que γ es racional o no se considera un problema importante en matemáticas, en 1979 Roger Apéry probó en (ver ³) que $\zeta(3)$ es irracional, desde entonces matemáticos como Keith Ball, Tanguy Rivoal (ver ¹³), Frits Beukers (ver ⁴) y Wadim Zudilin (ver ¹⁴) han tratado de extender esta prueba para todos los valores impares n de la función $\zeta(n)$. En 2003 Jonathan Sondow basado en la prueba de Roger Apéry's demostró una condición necesaria y suficiente para que γ sea racional, su negación da una condición equivalente a que la constante de Euler-Mascheroni sea irracional, por lo anterior llamó a esta condición criterio de racionalidad.

Para la prueba del criterio, en primer lugar se define la integral

$$I_n := \int_0^1 \int_0^1 -\frac{(x(1-x)y(1-y))^n}{(1-xy)\ln(xy)} dx dy, \quad (48)$$

que es inspirada en la prueba de irracionalidad de $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$ realizada por Frits Beukers en (ver ⁴).

Teorema 2.0.1. Para $n > 0$,

$$I_n := \int_0^1 \int_0^1 -\frac{(x(1-x)y(1-y))^n}{(1-xy)\ln(xy)} dx dy = \binom{2n}{n} \gamma + L_n - A_n, \quad (49)$$

¹³ Keith Ball y Tanguy Rivoal. "Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs". En: *Inventiones mathematicae* 146.1 (2001), págs. 193-207.

¹⁴ Wadim Valentinovich Zudilin. "One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ is irrational". En: *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 56.4 (2001), págs. 149-150.

donde $L_n = d_{2n}^{-1} \ln(S_n)$ y $A_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 H_{n+i}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y considere

$$R_N = \int_0^1 \int_0^1 -\frac{(x(1-x)y(1-y))^n (xy)^N}{(1-xy)\ln(xy)} dx dy,$$

entonces

$$I_n - R_N = \int_0^1 \int_0^1 -\frac{(x(1-x)y(1-y))^n (1-(xy)^N)}{(1-xy)\ln(xy)} dx dy. \quad (50)$$

El lema 1.3.1 nos dice que

$$-\frac{1}{\ln(xy)} = \int_0^\infty (xy)^t dt,$$

reemplazando esto en la igualdad (50), se tiene que

$$I_n - R_N = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\infty (xy)^t \frac{(x(1-x)y(1-y))^n (1-(xy)^N)}{1-xy} dt dx dy.$$

Dado que $\frac{1-(xy)^N}{1-xy} = \sum_{k=1}^N (xy)^{k-1}$ (suma geométrica), por lo tanto

$$I_n - R_N = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\infty (xy)^{n+t} ((1-x)(1-y))^n \left(\sum_{k=1}^N (xy)^{k-1} \right) dt dx dy. \quad (51)$$

Del teorema del binomio y la igualdad (19) se sigue que

$$\begin{aligned} (xy)^{t+n} (1-y)^n (1-x)^n &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} x^i \binom{n}{i} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} y^j \binom{n}{j} \\ &= (xy)^{t+n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} x^i y^j \binom{n}{i} \binom{n}{j}. \end{aligned} \quad (52)$$

Sea

$$f(x, y, t) = (xy)^t (x(1-x)y(1-y))^n \sum_{k=1}^N (xy)^{k-1},$$

entonces por la ecuación (52) llegamos a

$$f(x, y, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^N x^{i+n+t+k-1} y^{j+n+t+k-1}. \quad (53)$$

Note que

$$\begin{aligned} I_n - R_N &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} f(x, y, t) dt dx dy \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f(x, y, t) dx dy dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, t) dx dy dt. \end{aligned} \quad (54)$$

De las ecuaciones (53) y (54) se deduce que

$$I_n - R_N = \int_0^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^N x^{i+n+t+k-1} y^{j+n+t+k-1} dt dx dy. \quad (55)$$

Además,

$$\int_0^1 x^{n+i+k+t-1} dx = \frac{1}{n+t+i+k} \text{ y } \int_0^1 y^{n+j+k+t-1} dy = \frac{1}{n+t+j+k},$$

reemplazando en (55) obtenemos que

$$I_n - R_N = \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^N \frac{1}{(n+t+i+k)(n+t+j+k)} dt. \quad (56)$$

Por la identidad (20) y la igualdad (56) llegamos a

$$\begin{aligned} I_n - R_N &= \int_0^{\infty} 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^N \frac{1}{(n+t+i+k)(n+t+j+k)} dt \\ &\quad + \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{(n+t+i+k)^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (57)$$

Note que

$$\int_0^\infty \frac{1}{(n+t+i+k)^2} dt = \frac{1}{n+i+k},$$

además,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{n+i+k} = H_{N+n+i} - H_{n+i},$$

reemplazando en la ecuación (57), obtenemos que

$$\begin{aligned} I_n - R_N &= \int_0^\infty 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^N \frac{1}{(n+t+i+k)(n+t+j+k)} dt \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (H_{n+N+i} - H_{n+i}). \end{aligned} \quad (58)$$

Si se denota por S_N la suma

$$S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(n+t+i+k)(n+t+j+k)}, \quad (59)$$

entonces

$$S_N = \frac{1}{j-i} \sum_{k=1}^N \frac{1}{n+t+i+k} - \frac{1}{n+t+j+k},$$

haciendo $r = n+i+k+t$ y $p = j-i$, se tiene que

$$S_N = \frac{1}{p} \sum_{r=n+i+1+t}^{n+i+N+t} \frac{1}{r} - \frac{1}{r+p},$$

además

$$\sum_{r=1}^{n+i+t} \frac{1}{r} - \frac{1}{r+p} + pS_N = \sum_{r=1}^{n+i+N+t} \frac{1}{r} - \frac{1}{r+p}. \quad (60)$$

De la proposición 1.3.2 y la igualdad (60) se sigue que

$$\sum_{r=1}^p \frac{1}{r} - \frac{1}{r+n+t+i} + pS_N = \sum_{r=1}^p \frac{1}{r} - \frac{1}{r+n+t+i+N}$$

es decir

$$S_N = \frac{1}{p} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r+n+i+t} - \frac{1}{r+n+i+t+N},$$

reemplazando p por $j-i$

$$S_N = \frac{1}{j-i} \sum_{k=1}^{j-i} \frac{1}{k+n+i+t} - \frac{1}{k+n+i+t+N}. \quad (61)$$

También,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty S_N dt &= \frac{1}{j-i} \sum_{k=1}^{j-i} \int_0^\infty \frac{1}{k+n+i+t} - \frac{1}{k+n+i+t+N} dt \\ &= \frac{1}{j-i} \sum_{k=1}^{j-i} \ln \left(\frac{k+n+i+N}{k+n+i} \right). \end{aligned} \quad (62)$$

De las ecuaciones (58), (59), (61) y (62) llegamos a

$$\begin{aligned} I_n - R_N &= \int_0^\infty 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} (S_N) dt + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (H_{n+N+i} - H_{n+i}) \\ &= 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \int_0^\infty (S_N) dt + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (H_{n+N+i} - H_{n+i}) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (H_{N+n+i} - H_{n+i}) + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^{j-i} \ln \left(\frac{k+n+i+N}{k+n+i} \right). \end{aligned} \quad (63)$$

Si en la proposición 1.3.6 se toma $\alpha_1 = n+i+k$ y $\alpha_2 = n+i$, se tiene que $H_{N+n+i} = H_N + o(1)$ y que $\ln(N+n+i+k) = \ln(N) + o(1)$ cuando $N \rightarrow \infty$. Lo anterior y el lema 1.3.5 implican que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 H_{N+n+i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 H_N + o(1) \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty, \quad (64)$$

y

$$\sum_{k=1}^{j-i} \ln(k + n + i + N) = \sum_{k=1}^{j-i} \ln(N) + o(1) \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty. \quad (65)$$

De las ecuaciones (63), (64) y (65) y del lema 1.3.5 obtenemos que

$$\begin{aligned} I_n - R_N = & \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (H_N - H_{n+i}) - 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{(-1)^{i+j-1}}{j-i} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^{j-i} (\ln(N)) \\ & + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{(-1)^{i+j-1}}{j-i} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^{j-i} (\ln(n+i+k)) + o(1), \end{aligned} \quad (66)$$

cuando $N \rightarrow \infty$. La proposición 1.3.16 implica que

$$L_n = 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \sum_{k=1}^{j-i} \frac{(-1)^{i+j-1}}{j-i} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \ln(n+i+k),$$

y por definición $A_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 H_{n+i}$, remplazando esto en la ecuación (66) se deduce que

$$I_n - R_N = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 H_N + L_n - A_n - 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \ln(N) + o(1), \quad (67)$$

cuando $N \rightarrow \infty$. Haciendo uso del lema 1.3.8 llegamos a que

$$2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n},$$

y por la identidad (67), se concluye que

$$I_n = R_N + \binom{2n}{n} (H_N - \ln(N)) + L_n - A_n + o(1), \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty. \quad (68)$$

Halleemos el limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 -\frac{(x(1-x)y(1-y))^n (xy)^N}{(1-xy)\ln(xy)} dx dy. \quad (69)$$

Si $0 < x, y < 1$, entonces $0 < 1 - x < 1 - xy$ y $x(1 - x)^n y(1 - y)^n$ para todo entero $n > 1$, por lo tanto $0 < \frac{1-x}{1-xy} < 1$. En consecuencia, para todo $n > 1$

$$0 < (xy(1 - y))^n (1 - x)^{n-1} \frac{1 - x}{1 - xy} < 1. \quad (70)$$

De la ecuación (69) y la desigualdad (70) se sigue que

$$0 < R_N < \int_0^1 \int_0^1 -\frac{(xy)^N}{\ln(xy)} dx dy. \quad (71)$$

Remplazando $-\frac{1}{\ln(xy)}$ por $\int_0^\infty (xy)^t dt$ y cambiando el orden de integración, se tiene que

$$0 < R_N < \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{N+t} dx dy dt. \quad (72)$$

Note que

$$\int_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{N+t} dx dy dt = \frac{1}{N+1},$$

de la igualdad anterior y la desigualdad (72) obtenemos que $0 < R_N < \frac{1}{N+1}$. De $0 < R_N < \frac{1}{N+1}$ y el teorema de compresión llegamos a $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$.

Como $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$ y $\lim_{N \rightarrow \infty} H_N - \ln(N) = \gamma$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[R_N + \binom{2n}{n} (H_N - \ln(N)) + L_n - A_n \right] = \binom{2n}{n} \gamma + L_n - A_n. \quad (73)$$

Teniendo en cuenta las identidades (68), (73) y haciendo uso del lema 1.3.5, tomando $x_N = I_n$ y $y_N = R_N + \binom{2n}{n} (H_N - \ln(N)) + L_n - A_n$, se concluye que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} I_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[R_N + \binom{2n}{n} (H_N - \ln(N)) + L_n - A_n \right] \\ &= \binom{2n}{n} \gamma + L_n - A_n, \end{aligned}$$

es decir

$$I_n = \binom{2n}{n} \gamma + L_n - A_n.$$

□

Definición 2.0.2. Para $x \in \mathbb{R}$ la parte fraccionaria de x se define como el número $\{x\} \in [0, 1)$ tal que $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$.

Lema 2.0.3. $0 < I_n < 16^{-n}$, para todo $n > 0$.

Demostración. Si $0 < x, y < 1$, entonces

$$\frac{(x(1-x)y(1-y))^n}{(1-xy)} > 0 \text{ y } \frac{-1}{\ln(xy)} > 0,$$

en consecuencia

$$\int_0^1 \int_0^1 -\frac{(x(1-x)y(1-y))^n}{(1-xy)\ln(xy)} dx dy > 0,$$

es decir $I_n > 0$. Sea $f(x) = x(1-x)$, entonces $f'(x) = 1-2x$. Si $x \in (0, \frac{1}{2})$, entonces $f'(x) < 0$, y si $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ entonces $f'(x) > 0$, por lo tanto, por el criterio de la primera derivada (ver ⁶, teorema 6.2.8) f tiene un máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$. De lo anterior $f(x) < f(\frac{1}{2})$, para $x \in (0, 1) - \{\frac{1}{2}\}$, es decir

$$x(1-x) < \frac{1}{4}, \quad x \in (0, 1) - \{\frac{1}{2}\}. \quad (74)$$

De la ecuación (74), para $x, y \in (0, 1) - \{\frac{1}{2}\}$ se tiene que

$$\frac{(x(1-x)y(1-y))^{n+1}}{(1-xy)\ln(xy)} < \frac{(x(1-x)y(1-y))^n}{(1-xy)\ln(xy)} \frac{1}{16}. \quad (75)$$

De la desigualdad (75) se deduce que $I_{n+1} < \frac{I_n}{16}$. Según el ejemplo 2.6

$$\gamma < 0.578$$

y por el teorema 2.0.1, se concluye que

$$I_1 = 2\gamma + 2\ln(2) - \frac{5}{2} < \frac{1}{16}. \quad (76)$$

Usemos inducción matemática para probar que $I < 16^{-n}$, para todo $n > 0$. De la ecuación (76) se tiene el caso $n = 1$. Si $I_n < 16^{-n}$, como $I_{n+1} < \frac{I_n}{16}$, entonces $I_{n+1} < 16^{-(n+1)}$. De lo anterior y del principio de inducción matemática

$$I_n < 16^{-n}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\},$$

y se había probado que $I_n > 0$ para todo $n > 0$, por lo tanto

$$0 < I_n < 16^{-n}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

□

Teorema 2.0.4. *Para n fijo y lo suficientemente grande, $\{\ln S_n\} = d_{2n}I_n$ si y solo si $\gamma = \frac{p}{q}$ para algunos $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \mid d_{2n}\binom{2n}{n}$.*

Demostración. Por el lema 2.0.3

$$d_{2n}I_n = d_{2n}\binom{2n}{n}\gamma + d_{2n}L_n - d_{2n}A_n,$$

además, de la definición 1.3.9 se sigue que $d_{2n}L_n = \ln(S_n)$, de modo que

$$\ln(S_n) - d_{2n}I_n = d_{2n}A_n - d_{2n}\binom{2n}{n}\gamma. \quad (77)$$

Por la definición 1.3.9 y las propiedades del mínimo común múltiplo, para cada $k \in$

$\{1, \dots, 2n\}$ se tiene que $\frac{d_{2n}}{k} \in \mathbb{Z}$, por lo tanto, para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$d_{2n}H_{n+i} = \sum_{k=1}^{n+i} \frac{d_{2n}}{k} \in \mathbb{Z},$$

en consecuencia

$$d_{2n}A_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 d_{2n}H_{n+i} \in \mathbb{Z}. \quad (78)$$

Por consiguiente, si $\{ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$, entonces

$$\{ln(S_n)\} - d_{2n}I_n \in \mathbb{Z},$$

por la ecuación anterior y las igualdades (77) y (78) se sigue que

$$d_{2n}A_n - d_{2n}\binom{2n}{n}\gamma \in \mathbb{Z}.$$

Tenemos que $d_{2n}A_n \in \mathbb{Z}$ y $d_{2n}A_n - d_{2n}\binom{2n}{n}\gamma \in \mathbb{Z}$, luego $d_{2n}\binom{2n}{n}\gamma \in \mathbb{Z}$. Claramente $d_{2n}\binom{2n}{n} \in \mathbb{Z}$, entonces $d_{2n}\binom{2n}{n} \in \mathbb{Z}$. Como $d_{2n}\binom{2n}{n} \in \mathbb{Z}$ y $d_{2n}\binom{2n}{n}\gamma \in \mathbb{Z}$, entonces $\gamma = \frac{p}{q}$ para algunos $p, q \in \mathbb{Z}$, además, $q|d_{2n}\binom{2n}{n}$.

Si $\gamma = \frac{p}{q}$ para algunos $p, q \in \mathbb{Z}$ donde $q|d_{2n}\binom{2n}{n}$, entonces por la ecuación (49) se obtiene que

$$ln(S_n) - d_{2n}I_n \in \mathbb{Z}. \quad (79)$$

La expresión (79), el lema 2.0.3 y la proposición 1.3.23 implican que $d_{2n}I_n \in (0, 1)$, además, $ln(S_n) - d_{2n}I_n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $\{ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$. $\square$

Teorema 2.0.5. (Criterio de racionalidad de γ). Los siguientes enunciados son equivalentes:

- a) La parte fraccionaria de $ln(S_n)$ esta dada por $\{ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
- b) Existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ se cumple $\{ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$ con $n, n_0 \in \mathbb{N}$.
- c) La constante de Euler-Mascheroni es un número racional.

Demostración. Veamos que (a) y (b) son equivalentes. Si la parte fraccionaria de $\ln(S_m)$ esta dada por $\{\ln(S_m)\} = d_{2m}I_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces por el teorema 2.0.4 $\gamma = \frac{p}{q}$ para algunos $p, q \in \mathbb{Z}$. Si tomamos $n_0 = 2q$ entonces para cada $n \geq n_0$ se tiene que $\gamma d_{2n} \in \mathbb{Z}$, por la ecuación (49) se sigue que $\ln(S_n) - d_{2n}I_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \geq n_0$. Además, $d_{2n}I_n \in (0, 1)$ entonces $\{\ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$. Por lo tanto, si la parte fraccionaria de $\ln(S_n)$ está dada por $\{\ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ se cumple que $\{\ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$ con $n, n_0 \in \mathbb{N}$, es decir (a) implica (b). Si existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ se cumple $\{\ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$ con $n, n_0 \in \mathbb{N}$, entonces para algún $n \in \mathbb{N}$ la parte fraccionaria de $\ln(S_n)$ esta dada por $\{\ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$, o sea, (b) implica (a). Como (a) implica (b) y (b) implica (a), entonces (a) y (b) son equivalentes. Del teorema 2.0.4, (a) y (c) son equivalentes y como (a) y (b) son equivalentes, entonces (a), (b) y (c) son equivalentes. $\square$

Corolario 2.0.6. *Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \{m \in \mathbb{N} : m \geq n_0\}$ se tiene que $\{\ln(S_n)\} \geq 2^{-n}$, entonces γ es irracional.*

Demostración. La prueba se hará por contradicción, supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \{m \in \mathbb{N} : m \geq n_0\}$ se tiene que $\{\ln(S_n)\} \geq 2^{-n}$ y que γ es racional para llegar a una contradicción. Si γ es racional, entonces existen $p, q \in \mathbb{Z}$ con $\text{mcd}(p, q) = 1$ y tales que $\gamma = \frac{p}{q}$. Sea m un entero positivo tal que $m > mx\{n_0, q\}$, entonces, como $m > n_0$ se tiene que $\{\ln(S_m)\} \geq 2^{-m}$. Además, $m > q$, por lo tanto $q|d_{2m}$, en consecuencia $q|d_{2m}\binom{2m}{m}$. Como $\gamma = \frac{p}{q}$ y $q|d_{2m}\binom{2m}{m}$, entonces, por el teorema 2.0.4 $\{\ln(S_m)\} = d_{2m}I_m$. De la proposición 1.3.23 y del lema 2.0.3 se sigue que $d_{2m}I_m < 2^{-m}$ y como $\{\ln(S_m)\} = d_{2m}I_m$, entonces, $\{\ln(S_m)\} < 2^{-m}$. Se tiene que $\{\ln(S_m)\} \geq 2^{-m}$ y $\{\ln(S_m)\} < 2^{-m}$, lo que constituye una contradicción, por lo tanto bajo esas hipótesis γ no puede ser racional. Lo anterior implica que, si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo n en $\{m \in \mathbb{N} : m \geq n_0\}$ se tiene que $\{\ln(S_n)\} \geq 2^{-n}$, entonces γ es irracional. $\square$

Corolario 2.0.7. Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, si $\{ln(S_n)\} \geq 2^{-n}$ y γ es racional con denominador q , entonces $|q| > 2n$.

Demostración. Si $\gamma = \frac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $mcm(p, q) = 1$, veamos que q no divide a d_{2n} . Supongamos que $q|d_{2n}$ y lleguemos a una contradicción. Como $\gamma = \frac{p}{q}$ y $q|d_{2n} \binom{2n}{n}$, entonces por el teorema 2.0.4 $\{ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$. De $\{ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$, la proposición 1.3.23 y del lema 2.0.3 se sigue que $\{ln(S_n)\} < 2^{-n}$, lo que contradice la hipótesis $\{ln(S_n)\} \geq 2^{-n}$, por lo tanto la suposición de que $q|d_{2n}$ no puede ser verdadera, en consecuencia q no divide a d_{2n} . Como q no divide a d_{2n} , entonces $|q| > 2n$, de lo contrario $q|d_{2n}$. $\square$

Ejemplo 2.0.8. Dado que $\{ln(S_{10^4})\} = 0.73\dots$ (ver ³, p. 3337) y $0.73\dots > 2^{-(10^4)}$ de esto y el corolario 2.0.7, si γ es racional con denominador q , entonces $|q| > 2 \times 10^4$.

Corolario 2.0.9. Si γ es racional, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ln(S_n)\} = 0$.

Demostración. Si $\gamma = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, entonces, para todo $n \geq q$ se tiene que $q|d_{2n} \binom{2n}{n}$ y por el teorema 2.0.4 para todo $n \geq q$ se tiene que $\{ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$. De $\{ln(S_n)\} = d_{2n}I_n$, la proposición 1.3.23 y el lema 2.0.3 se sigue que $\{ln(S_n)\} < 2^{-n}$. De la definición 2.0.2 se tiene que $\{ln(S_n)\} > 0$, por lo tanto, para todo $n \geq q$

$$0 < \{ln(S_n)\} < 2^{-n}. \quad (80)$$

De la desigualdad (74) y el teorema de compresión (ver ⁶, teorema 3.2.7) se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ln(S_n)\} = 0.$$

$\square$

Del corolario 2.0.9 se sigue que: De ser irracional, para mostrar que γ es irracional es suficiente mostrar que la sucesión $\{ln(S_n)\}$ no tiene límite 0.

BIBLIOGRAFÍA

- Apéry, Roger. “Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ ”. En: *Astérisque* 61.11-13 (1979), pág. 1 (vid. págs. 13, 54, 65).
- Ball, Keith y Tanguy Rivoal. “Irrationalité d’une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs”. En: *Inventiones mathematicae* 146.1 (2001), págs. 193-207 (vid. pág. 54).
- Bartle, Robert G y Donald R Sherbert. *Introducción al análisis matemático de una variable*. Limusa Wiley, 2001 (vid. págs. 15, 16, 30, 49, 61, 65).
- Beukers, Frits. “A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ ”. En: *Pi: A Source Book*. Springer, 2004, págs. 434-438 (vid. págs. 13, 54).
- Euler, Leonhard. “De progressionibus harmonicis observationes”. En: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (1740), págs. 150-161 (vid. págs. 12, 16, 17).
- “De summatione serierum in hac forma contentarum $a/1 + a^2/4 + a^3/9 + a^4/16 + a^5/25 + a^6/36 + \text{etc.}$ ”. En: *Memoires de l’academie des sciences de St.-Petersbourg* (1811), págs. 26-42 (vid. pág. 14).
- Hardy, Godfrey H y John E Littlewood. “Some problems of ‘Partitio numerorum’; III: On the expression of a number as a sum of primes”. En: *Acta Mathematica* 44.1 (1923), págs. 1-70 (vid. pág. 52).
- Havil, Julian. “Gamma: exploring Euler’s constant”. En: *The Australian Mathematical Society* (2003), pág. 250 (vid. págs. 20, 47, 53).

- Lagarias, Jeffrey. "Euler's constant: Euler's work and modern developments". En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 50.4 (2013), págs. 527-628 (vid. pág. 53).
- Rosser, J Barkley y Lowell Schoenfeld. "Approximate formulas for some functions of prime numbers". En: *Illinois Journal of Mathematics* 6.1 (1962), págs. 64-94 (vid. pág. 44).
- Sánchez Cuadrado, José Manuel. "Las funciones Gamma de Euler-Gauss y Zeta de Riemann". En: (2020) (vid. págs. 47, 51).
- Sondow, Jonathan. "Criteria for irrationality of Euler's constant". En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 131.11 (2003), págs. 3335-3344 (vid. pág. 13).
- Tock, Kalée. "Google CoLaboratory as a platform for Python coding with students". En: *RTSRE Proceedings* 2.1 (2019) (vid. pág. 24).
- Zudilin, Wadim Valentinovich. "One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ is irrational". En: *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 56.4 (2001), págs. 149-150 (vid. pág. 54).

ANEXOS

Anexo A. Demostraciones del Capítulo 1

Veamos que se cumple la identidad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{H_{n,k}}{k} = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{H_{\infty,k}}{k}. \quad (81)$$

Para esto, primero demostremos el siguiente resultado.

Sea $n_0 > 0$ un número entero y $(\alpha_n)_{n=n_0}^{\infty}$ una sucesión decreciente de números reales positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, entonces la serie

$$S = \sum_{k=2n_0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \alpha_k \quad (82)$$

converge, además sus sumas parciales $S_m = \sum_{k=2n_0}^m \frac{(-1)^k}{k} \alpha_k$ son positivas y en consecuencia $S \geq 0$.

Demostración. Del criterio de Leibniz (ver teorema 1.1.1) se tiene la convergencia de la serie. Note que si $m > 2n_0$ es un número entero impar, entonces

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{\alpha_{2n_0}}{2n_0} - \frac{\alpha_{2n_0+1}}{2n_0+1} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{m-1} - \frac{\alpha_m}{m} \\ &= \left(\frac{\alpha_{2n_0}}{2n_0} - \frac{\alpha_{2n_0+1}}{2n_0+1} \right) + \left(\frac{\alpha_{2n_0+2}}{2n_0+2} - \frac{\alpha_{2n_0+3}}{2n_0+3} \right) + \cdots + \left(\frac{\alpha_{m-1}}{m-1} - \frac{\alpha_m}{m} \right). \end{aligned} \quad (83)$$

Como $(\alpha_n)_{n=n_0}^{\infty}$ es decreciente, entonces para todo $k \in \{2n_0, 2n_0+2, \dots, m-1\}$ se tiene que $\frac{\alpha_k}{k} > \frac{\alpha_{k+1}}{k+1}$, lo que implica que todos los sumandos de la ecuación (83) son positivos, por lo tanto $S_m > 0$ para todo $m > 2n_0$ entero impar. Si m es par entonces

$S_{m-1} > 0$ y en consecuencia

$$S_m = S_{m-1} + \frac{\alpha_m}{m} > 0$$

De modo que $S_m > 0$ para todo $m > 2n_0$ entero. □

Veamos que se cumple la identidad (81).

Demostración. En primer lugar note que para $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la sucesión $\left(\frac{H_{m,k}}{k}\right)_{k=2}^{\infty}$ es decreciente, positiva y tiene límite 0. Entonces, por el criterio de Leibniz la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} H_{m,k}$ converge. Sea

$$\begin{aligned} y_{n,k} &= H_{\infty,k} - H_{n,k} \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^k}, \end{aligned}$$

entonces $y_{n,k} \geq 0$, $y_{n,k} \geq y_{n,k+1}$, $y_{n,k} \geq y_{n+1,k}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,k} = 0$, para todo entero $k > 1$. Además, como $y_{n,k} \geq 0$ para todo entero $k > 1$, entonces para cada $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2m+1} \frac{(-1)^k y_{n,k}}{k} &= \left(\frac{y_{n,2}}{2} - \frac{y_{n,3}}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{y_{n,2m}}{2m} - \frac{y_{n,2m+1}}{2m+1}\right) \\ &\leq \left(\frac{y_{n,2}}{2}\right) + \left(\frac{y_{n,4}}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{y_{n,2m}}{2m}\right) \\ &\leq \frac{m}{2} y_{n,2}, \end{aligned}$$

es decir para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{k=2}^{2m+1} \frac{(-1)^k y_{n,k}}{k} \leq \frac{m}{2} y_{n,2}. \quad (84)$$

Ahora, considere la sucesión

$$\begin{aligned}\delta_n &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} H_{\infty,k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} H_{n,k} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (H_{\infty,k} - H_{n,k}) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} y_{n,k},\end{aligned}$$

entonces, como $y_{n,k} \geq 0$, $y_{n,k} \geq y_{n+1,k}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,k} = 0$, por el resultado probado anteriormente se tiene que δ_n converge y $\delta_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$, probemos que $\delta = 0$. Dado $\epsilon > 0$, como $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} y_{2,k}$ converge, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \sum_{k=2n_1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} y_{2,k} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (85)$$

Note que si $n > 2$, entonces $y_{2,k} - y_{n,k} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^k}$, en consecuencia la sucesión $(y_{2,k} - y_{n,k})_{n=2n_1}^{\infty}$ es positiva, decreciente y tiene limite 0, esto implica que para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ se tiene que

$$\sum_{k=2n_1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (y_{2,k} - y_{n,k}) > 0,$$

como $\sum_{k=2n_1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} y_{2,k}$ y $\sum_{k=2n_1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} y_{n,k}$ convergen, entonces para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ se tiene que

$$\sum_{k=2n_1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} y_{2,k} > \sum_{k=2n_1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} y_{n,k}. \quad (86)$$

De las desigualdades (85) y (86) se sigue que para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

$$\sum_{k=2n_1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} y_{n,k} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (87)$$

Como $y_{n,k} > 0$ para todo n natural y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,k} = 0$, entonces existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$ se tiene que

$$0 < y_{n,k} < \frac{\epsilon}{2n_1}. \quad (88)$$

Tomando $m = n_1 - 1$ en la desigualdad (84) y teniendo en cuenta la desigualdad 88 se obtiene que para todo $n > n_2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2n_1-1} \frac{(-1)^k}{k} y_{n,k} &< \frac{n_1}{2} y_{n,2} \\ &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (89)$$

De las desigualdades (87) y (89) se sigue que para todo número natural $n > n_2$

$$\begin{aligned} \delta_n &= \sum_{k=2}^{2n_1-1} \frac{(-1)^k}{k} y_{n,k} + \sum_{k=2n_1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} y_{n,k} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Como $\delta_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de la desigualdad anterior se sigue para todo $n > n_2$ se tiene que $0 < \delta_n < \epsilon$. De modo que, dado $\epsilon > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_2$ entonces $0 < \delta < \epsilon$. En consecuencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0,$$

esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{H_{n,k}}{k} = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{H_{\infty,k}}{k}.$$

□

Lema 2.0.10. Sean $0 \leq m \leq n$ enteros, entonces:

$$i) \sum_{k=m}^n \ln(a_k) = \ln \left(\prod_{k=m}^n a_k \right).$$

ii) $\sum_{k=m}^{\infty} \ln(a_k)$ es convergente, si y solo si, $\ln\left(\prod_{k=m}^{\infty} a_k\right)$ también lo es. Además,

$$\sum_{k=m}^{\infty} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=m}^{\infty} a_k\right).$$

Demostración. i) :Primero se hará la prueba para $m = 0$ haciendo inducción sobre n . Para $n = 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^0 \ln(a_k) &= \ln(a_0) \\ &= \ln\left(\prod_{k=0}^0 a_k\right).\end{aligned}$$

Supongamos que para cierto $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^n a_k\right).$$

Veamos para $n + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \ln(a_k) &= \sum_{k=0}^n \ln(a_k) + \ln(a_{n+1}) \\ &= \ln\left(\prod_{k=0}^n a_k\right) + \ln(a_{n+1}) \\ &= \ln\left(\left(\prod_{k=0}^n a_k\right) \cdot a_{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n+1} a_k\right).\end{aligned}$$

Si $m > 0$, hacemos $a_k = 1$ para $k = 0, 1, \dots, m-1$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^n \ln(a_k) &= \sum_{k=0}^{m-1} \ln(1) + \sum_{k=m}^n \ln(a_k) \\ &= \sum_{k=0}^n \ln(a_k) \\ &= \ln\left(\prod_{k=0}^n a_k\right).\end{aligned}$$

Como $a_k = 1$ para $k = 0, 1, \dots, m-1$, entonces $\prod_{k=0}^n a_k = \prod_{k=m}^n a_k$, de esto se sigue que

$$\sum_{k=m}^n \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=m}^n a_k\right).$$

ii) De la parte i) se sigue que la sucesión $\sum_{k=m}^n \ln(a_k)$ es convergente, si y solo si,

$\ln\left(\prod_{k=m}^n a_k\right)$ también lo es, pues son la misma sucesión. Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n \ln(a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\prod_{k=m}^n a_k\right),$$

es decir,

$$\sum_{k=m}^{\infty} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=m}^{\infty} a_k\right).$$

□

Lema 2.0.11. *Para todo entero positivo j se tiene que*

$$\sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=i+1}^j a_{i,k} = \sum_{k=1}^j \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,k}.$$

Demostración. La prueba se hará usando inducción matemática. Para $j = 1$ se tiene que

$$\sum_{i=0}^{1-1} \sum_{k=i+1}^1 a_{i,k} = a_{0,1} = \sum_{k=1}^1 \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,k}.$$

Supongamos que para todo entero $m < j$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m a_{i,k} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,k}.$$

Note que

$$\sum_{k=1}^j \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,k} + \sum_{i=0}^{j-1} a_{i,j},$$

por la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,k} &= \sum_{i=0}^{j-2} \sum_{k=i+1}^{j-1} a_{i,k} + \sum_{i=0}^{j-1} a_{i,j} \\ &= \sum_{i=0}^{j-2} \left(\sum_{k=i+1}^{j-1} a_{i,k} + a_{i,j} \right) + a_{j-1,j} \\ &= \sum_{i=0}^{j-2} \left(\sum_{k=i+1}^j a_{i,k} \right) + \sum_{k=j}^j a_{j-1,k} \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=i+1}^j a_{i,k}. \end{aligned}$$

De lo anterior y el principio de inducción matemática se tiene lo que se quería probar.

□