

**GEODÉSICAS ECUATORIALES EN
ESPACIO-TIEMPOS DE WEYL GENERADOS POR
DISCOS DELGADOS RELATIVISTAS**

LIKIDCEN FRAMSOL LÓPEZ SUSPEZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA**

2004

**GEODÉSICAS ECUATORIALES EN
ESPACIO-TIEMPOS DE WEYL GENERADOS POR
DISCOS DELGADOS RELATIVISTAS**

LIKIDCEN FRAMSOL LÓPEZ SUSPEZ

Tesis para optar al título de físico

Director

DR. GUILLERMO ALFONSO GONZÁLEZ

Físico

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2004

A mi familia,

*Mi santa madre,
Maria Ligia Suspez.*

*Mi hermano,
Stevyn López Suspez.*

*Mi señora,
Genny Saray Noguera Nuñez.*

*Mi hija,
Danna Valentina López Noguera.*

*Sin ellos no hubiera sido posible,
Gracias.*

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

Al Dr. Guillermo Alfonso González Villegas.

Al Dr. José David Sanabria.

Al Dr. Harold Paredes.

Al Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG).

A mi amigo y compañero Javier Fernando Ramos Caro

A la Universidad Industrial de Santander.

**Título: GEODÉSICAS ECUATORIALES EN
ESPACIO-TIEMPOS DE WEYL GENERADOS
POR DISCOS DELGADOS RELATIVISTAS¹**

Likidcen Framsol López Suspez.²

Palabras Claves: 1. Geodésica. 2. Espacio-tiempos de Weyl. 3. Campo de Bonnor-Sackfield. 4. Órbitas Ecuatoriales. 5. Órbitas Radiales.

Se obtuvieron la ecuaciones diferenciales de las geodésicas nulas y temporales para un campo gravitacional estático y axialmente simétrico, primero mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, y luego utilizando las constantes de movimiento del problema. Se tomó el caso especial en que la trayectoria de la partícula está confinada al plano ecuatorial.

Posteriormente se reescribieron las ecuaciones diferenciales para el caso particular de un disco delgado estático axialmente simétrico, el campo de Bonnor-Sackfield. Luego, se analizó el comportamiento de un rayo de luz que se mueve en dirección radial resolviendo las ecuaciones de movimiento correspondientes, tanto para la región interior como para la exterior del disco.

Finalmente, se encontró la trayectoria de la partícula (masiva o no) en el caso de órbitas no radiales. Para ello primero se realizó un análisis cualitativo del potencial efectivo generado por una fuente con dichas características, diferenciando las dos regiones, interior y exterior del disco. Se concluyó de manera general que, por la forma del potencial, no es posible tener órbitas circulares ecuatoriales en un espacio-tiempo de Bonnor-Sackfield. Después se resolvió la ecuación diferencial de la órbita de la partícula, separando nuevamente las ecuaciones para los dos regiones. Las expresiones son complicadas de resolver

¹Trabajo de grado.

²Facultad de Ciencias. Pregrado en Física. GONZÁLEZ VILLEGAS, Guillermo.

en forma analítica, por lo que en algunos casos se utilizarón métodos numericos para obtener la órbita de la partícula.

**Title: EQUATORIAL GEODESICS IN WEYL SPACETIMES
GENERATED FROM RELATIVISTIC THIN DISKS³**

Likidcen Framsol López Suspez.⁴

Key Words: 1. Geodesics. 2. Weyl spacetimes. 3. Bonnor-Sackfield field. 4. Equatorial orbits. 5. Radial orbits.

The differential equations for null and timelike geodesics were obtained for a static axially symmetric spacetime. We use first the Euler-Lagrange equations and then the problem's constants of motion. We consider the special case when the particle's orbit is confined to the equatorial plane.

The differential equations were then rewritten for the particular case of a static axially symmetric thin disk, the Bonnor-Sackfield field. The behaviour of a light ray moving in the radial direction was then analyzed, solving the corresponding motion equations for the interior and for the exterior of the disk.

Finally, the path of the particle (massless or not) was founded for the case of non-radial orbits. For that we first do a qualitative analysis of the effective potential generated for a source with such characteristics, both for the interior and for the exterior of the disk. We concluded that, due to the specific form of the potential, in general is not possible to have equatorial circular orbits in a Weyl space-time of the Bonnor-Sackfield type. Then the differential equation of the orbit was solved, again for the two regions. The obtained expressions are so difficult to solve analytically so, in some cases, numerical methods were used to obtain the orbit of the particle.

³Undergraduate thesis.

⁴Facultad de Ciencias. Pregrado en Física. GONZÁLEZ VILLEGAS, Guillermo.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. GEODÉSICAS EN ESPACIO - TIEMPOS DE WEYL	4
1.1. INTRODUCCIÓN	4
1.2. ECUACIÓN DE LAS GEODÉSICAS	5
1.3. ESPACIO-TIEMPOS DE WEYL	7
1.3.1. GEODÉSICAS TEMPORALES	9
1.3.2. GEODÉSICAS NULAS	11
1.4. GEODÉSICAS ECUATORIALES	11
1.4.1. ECUACIÓN DE LA ÓRBITA	14
1.4.2. GEODÉSICAS NULAS	15
1.4.3. GEODÉSICAS TEMPORALES	16
2. GEODÉSICAS EN EL CAMPO DE BONNOR-SACKFIELD	18

2.1. INTRODUCCIÓN	18
2.2. EL CAMPO DE BONNOR-SACKFIELD	19
2.3. GEODÉSICAS RADIALES	21
2.3.1. GEODÉSICAS EN EL INTERIOR DEL DISCO	21
2.3.2. GEODÉSICAS EN EL EXTERIOR DEL DISCO	26
2.4. GEODÉSICAS NO RADIALES	28
2.4.1. ANÁLISIS CUALITATIVO	28
2.4.2. ANÁLISIS CUANTITATIVO	32
3. CONCLUSIONES	40
BIBLIOGRAFÍA	42

LISTA DE FIGURAS

2.1. Geodésica radial dentro del disco de Bonnor y Sackfield	25
2.2. Geodésica nula radial dentro y fuera del disco de Bonnor y Sack- field	28
2.3. Potencial efectivo dentro de un fuente tipo Bonnor y Sackfield .	31
2.4. Potencial efectivo fuera del disco, para $2\mathcal{L} = 0$	32
2.5. Potencial efectivo fuera del disco, para $2\mathcal{L} = -1$	33
2.6. Geodésicas no radiales nulas con $n = 1/2$	37
2.7. Geodésicas no radiales nulas con $n = 1$	38
2.8. Geodésicas no radiales nulas con $n = 2$	38
2.9. Geodésicas no radiales nulas con $n = 3$	39

LISTA DE TABLAS

2.1. Valores de las constantes para el potencial efectivo	30
2.2. Valores de las constantes para la órbita	36

INTRODUCCIÓN

Un problema de gran importancia en la Teoría de la Relatividad General es la obtención de las soluciones de las ecuaciones de Einstein, las cuales corresponden a la descripción del campo gravitacional. Una vez obtenida la solución, otro problema igualmente importante es la solución de las ecuaciones de las geodésicas, las cuales corresponden al comportamiento de las partículas en presencia del campo gravitatorio. Por tal razón, el estudio de las órbitas en el plano ecuatorial de un espacio-tiempo estático axialmente simétrico en Relatividad General es de gran interés físico, puesto que un modelo idealizado de galaxias aplanadas es un disco delgado conformado por partículas (estrellas) que viajan (órbitas) en el interior y exterior de la galaxia (disco). Es decir, el estudio de las trayectorias de los cuerpos celestes en un espacio-tiempo en particular se puede reducir a encontrar la denominada ecuación de la *geodésica*

Ahora bien, en cuanto a la cinemática de las partículas para un espacio-tiempo en particular, existen numerosos artículos y textos que nos proporcionan una clara interpretación de el comportamiento de las partículas en presencia de un campo. El caso de un campo gravitacional estático esférico y axialmente simétrico, solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío en presencia de una fuente con dichas características, es ampliamente conocido y solucionado [5]. Solución de Schwarzschild, la cual proporciona una clara

explicación de la deflexión de la luz, y de la precesión del perihelio de Mercurio. También, en diversos libros se trata la conocida solución de Kerr, de gran importancia en el estudio de la Astrofísica.

Fue hasta en 1.916 que apareció una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, correspondiente a configuraciones de materia que tienen simetría axial y que en un principio podemos despreciar su rotación, estáticas. Esta solución es conocida como Weyl, y es la base para solucionar un sin número de problemas en Astrofísica y Cosmología. Por ejemplo, es el pionero para el modelo de discos de acreción, discos delgados en Relatividad General, objetivo central de nuestro trabajo, y recientemente discos gruesos. Las soluciones estáticas de discos fueron inicialmente estudiadas por Bonnor y Sackfield en 1.968 [4], y Morgan y Morgan en 1.969 [11].

En el presente trabajo, tomaremos la solución particular monopolar de Bonnor y Sackfield, y hallaremos como se mueven las partículas (masivas o no), dentro y fuera de dicha fuente. Para ello hemos dividido el trabajo de la forma siguiente: el primer capítulo lo dedicamos a escribir las ecuaciones diferenciales de las geodésicas para un espacio-tiempo estático y axialmente simétrico en forma general. Definimos primero como es la ecuación diferencial de la geodésica; una vez hecho esto, pasamos a definir el espacio-tiempo de Weyl que vamos a trabajar y escribimos las geodésicas en dicho campo. Finalmente restringimos las ecuaciones diferenciales al plano ecuatorial, $z = 0$.

En el segundo capítulo, resolvemos las geodésicas para el caso particular de una familia de discos tipo Bonnor-Sackfield. Empezamos el capítulo precisando como es elemento de línea cuando estemos dentro o fuera del campo de Bonnor-Sackfield. Después analizamos el comportamiento de las partículas de masa cero cuando su trayectoria es radial; terminamos el capítulo resolviendo la ecuación de la órbita dentro y fuera del disco utilizando métodos numéricos, las

soluciones las expresamos en forma gráfica por medio de coordenadas polares.
Por último, escribimos las conclusiones en el capítulo 3.

Capítulo 1

GEODÉSICAS EN ESPACIO - TIEMPOS DE WEYL

1.1. INTRODUCCIÓN

El estudio del movimiento de partículas en presencia de un campo gravitacional se realiza analizando las ecuaciones de movimiento correspondientes. En el caso de la Teoría General de la Relatividad, o teoría relativista de la Gravitación, las ecuaciones de movimiento están dadas por las ecuaciones de las *geodésicas*; esto es, las trayectorias de “longitud” mínima en un espacio-tiempo determinado.

De acuerdo con esto, para determinar las ecuaciones de movimiento en un problema en particular, se debe en primer lugar determinar el campo gravitacional, esto es, el tensor métrico que define la geometría del espacio-tiempo a través del elemento de línea. Dado entonces el tensor métrico que representa al campo gravitacional, las ecuaciones de las geodésicas se determinan minimizando el correspondiente elemento de línea.

En este capítulo se obtendrán las ecuaciones de las geodésicas para el caso

de campos gravitacionales estáticos y axialmente simétricos, los cuales corresponden a espacio-tiempos de Weyl. De acuerdo con esto, en la sección 1.2 se presenta, de manera resumida, la forma de obtención de las ecuaciones de las geodésicas a partir del principio de la mínima acción aplicado a un elemento de línea general. En la sección 1.3 presentaremos la forma general que adquiere el tensor métrico cuando se tienen en cuenta las simetrías temporal y axial que caracterizan dichos espacio-tiempos, así como la forma que toman en este caso las ecuaciones de Einstein. Posteriormente se particularizan las ecuaciones de las geodésicas para el caso de espacio-tiempos de Weyl, obteniendo la forma explícita de las ecuaciones correspondientes para geodésicas temporales, que describen las trayectorias de partículas masivas, y para geodésicas nulas, las cuales describen las trayectorias de partículas de masa cero, o señales luminosas.

En la sección 1.4 escribiremos las ecuaciones diferenciales de las geodésicas en el plano ecuatorial para un espacio-tiempo estático con simetría axial, en forma general. Para ello utilizaremos el formalismo lagrangiano y las constantes de movimiento. Como veremos, reduciremos el problema a resolver ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables. Primero escribiremos la ecuaciones en forma general, para después expresar la ecuación diferencial de la órbita de la partícula. Posteriormente particularizaremos las ecuaciones, primero para rayos de luz, y luego para partícula masivas, tomando el caso particular en que la trayectoria es radial.

1.2. ECUACIÓN DE LAS GEODÉSICAS

El movimiento de una partícula material en presencia de un campo gravitacional se puede determinar por medio del principio de mínima acción [7], el cual afirma que para el movimiento de sistemas mecánicos existe una integral

de acción S , tal que S es un extremal calculada a lo largo de la trayectoria de la partícula,

$$\delta S = 0. \quad (1.1)$$

En la Teoría General de la Relatividad, la integral de acción está dada por

$$S = - \int_a^b ds, \quad (1.2)$$

donde $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ es el elemento de línea, y $g_{\alpha\beta}$ es el tensor métrico. Aquella trayectoria de la partícula para la cual S es extremal, se denomina *geodésica*, y representa la trayectoria que debe seguir la partícula en presencia de un campo gravitacional.

Podemos derivar las ecuaciones de movimiento de la partícula por medio de los métodos tradicionales de la Mecánica Clásica expresando la integral de acción en la forma

$$S = \int \mathcal{L} d\tau, \quad (1.3)$$

con el Lagrangiano \mathcal{L} definido como

$$2\mathcal{L} = g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta, \quad (1.4)$$

donde

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (1.5)$$

y τ es un parámetro afín a lo largo de la geodésica, el cual comunmente se relaciona con el tiempo propio.

Las ecuaciones de Lagrange correspondientes al principio variacional (1.1) pueden escribirse en la forma

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (1.6)$$

donde los $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ son los símbolos de Christoffel, los cuales se expresan en términos de derivadas parciales del tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Este es un sistema de cuatro

ecuaciones diferenciales no-lineales de segundo orden para $x^\alpha(\tau)$, con $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Este sistema tiene solución única para unas condiciones iniciales en $\tau = \tau_0$ dadas por: $x_0^\alpha = x^\alpha(\tau_0)$ y $U_0^\alpha = \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)_{\tau_0}$. Haciendo una analogía con la segunda ley de Newton, la derivada $\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{dU^\alpha}{d\tau}$ es la aceleración de la partícula, por lo tanto $-\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$ puede interpretarse como la fuerza por unidad de masa que actúa sobre la partícula en el campo gravitacional.

Para el caso de partículas de masa cero se debe modificar el procedimiento anterior. Dado que las partículas de masa cero viajan a la velocidad de la luz, entonces se mueven a lo largo de trayectorias “nulas”; esto es, trayectorias tales que

$$ds^2 = 0. \quad (1.7)$$

La ecuación (1.6) no es aplicable en este caso, ya que cuando el intervalo es igual a cero todos los términos de dicha relación se indeterminan; por lo tanto, la ecuación de movimiento para partículas de masa cero puede escribirse como

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (1.8)$$

Este es un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales no-lineales de primer orden para $x^\alpha(\tau)$, con $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

1.3. ESPACIO-TIEMPOS DE WEYL

Un campo gravitacional se dice que es independiente del tiempo, o *estacionario*, si podemos escoger un sistema de coordenadas en el que todas las componentes del tensor métrico no dependan de la coordenada temporal x^0 . Por otra parte, si el campo gravitacional no depende de el ángulo acimutal φ podemos decir que el campo es axialmente simétrico. Por lo tanto, si el campo gravitacional no depende de t ni de φ se dice que el campo es estacionario y axialmente simétrico.

Ahora bien, si es posible escoger convenientemente la coordenada temporal de tal manera que el intervalo ds^2 no cambie al hacer la transformación $x^0 \rightarrow -x^0$, el campo gravitacional se denomina *estático*. Esto quiere decir que los eventos que ocurren en este campo gravitatorio no son afectados por la dirección en la que fluye el tiempo. La invariancia con respecto a la inversión temporal implica que todas las componentes g_{0i} del tensor métrico deben ser iguales a cero. Si además de ser estático el campo gravitacional es axialmente simétrico, el elemento ds^2 es invariante ante las transformaciones $t \rightarrow -t$ y $\varphi \rightarrow -\varphi$.

La geometría espacio-temporal que cumple con estas características fue introducida inicialmente por Weyl[16], por medio del elemento de línea que lleva su nombre

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi}[\rho^2 d\varphi^2 + e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2)], \quad (1.9)$$

donde $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \varphi, \rho, z)$ son conocidas como las coordenadas cilíndricas de Weyl y las funciones γ y ψ dependen sólo de las coordenadas $x^2 = \rho$ y $x^3 = z$,

$$\psi = \psi(\rho, z), \quad (1.10)$$

$$\gamma = \gamma(\rho, z). \quad (1.11)$$

Las ecuaciones de Einstein en el vacío, $R_{\mu\nu} = 0$, para el campo gravitacional estático axialmente simétrico, en coordenadas cilíndricas de Weyl, se reducen

al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales[9, 16]:

$$\psi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\psi_{,\rho} + \psi_{,zz} = 0, \quad (1.12)$$

$$\gamma_{,\rho} = \rho(\psi_{,\rho}^2 - \psi_{,\rho}^2), \quad (1.13)$$

$$\gamma_{,z} = 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,\rho}. \quad (1.14)$$

La primera de estas ecuaciones es la conocida ecuación de Laplace tridimensional axialmente simétrica, para la función ψ , cuya solución es ampliamente conocida[2, 12]. Las otras dos ecuaciones son no-lineales, y dependen de ψ , la cual en primera instancia ya está determinada por (1.12); por lo tanto, si ψ está determinada también lo estará γ .

1.3.1. GEODÉSICAS TEMPORALES

En este caso, el lagrangiano toma la forma

$$2\mathcal{L} = -e^{2\psi}\dot{t}^2 + e^{-2\psi}[\rho^2\dot{\varphi}^2 + e^{2\gamma}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2)], \quad (1.15)$$

donde el punto denota derivación con respecto al parámetro τ . Podemos encontrar las ecuaciones de movimiento de las partículas como en la Mecánica Clásica utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha}. \quad (1.16)$$

Esta es una manera equivalente y a la vez sencilla de hallar las ecuaciones de las geodésicas, sin utilizar directamente la ecuación (1.6), pues en tal caso tendríamos que hallar inicialmente los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$.

Vamos ahora a encontrar las cuatro ecuaciones de Euler-Lagrange para $x^\alpha = (t, \varphi, \rho, z)$. Para la coordenada temporal, en función del parámetro τ ,

tendremos:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0. \quad (1.17)$$

Ahora bien, dado que t es una coordenada cíclica, se tiene que $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$, luego

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0. \quad (1.18)$$

Usando entonces el Lagrangiano (1.15), se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -e^{2\psi} \dot{t}, \quad (1.19)$$

que al derivar con respecto a τ lleva al resultado

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = -e^{2\psi} \ddot{t} - e^{2\psi} \dot{t} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right\} = 0; \quad (1.20)$$

es decir, la ecuación de movimiento para la coordenada t toma la forma

$$\ddot{t} + 2\dot{t}\dot{\rho}\psi_{,\rho} + 2\dot{t}\dot{z}\psi_{,z} = 0, \quad (1.21)$$

donde $(\)_{,\mu}$ denota derivación parcial, respecto de x^μ

De manera similar, para la coordenada cíclica acimutal φ se obtiene la ecuación de movimiento

$$\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{\rho} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right] - 2\dot{\varphi}\dot{z} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (1.22)$$

Igualmente, siguiendo el mismo tratamiento para la coordenada radial ρ y la coordenada z , las ecuaciones diferenciales de movimiento toman la forma

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} + (\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2)(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}) + 2\dot{\rho}\dot{z}(\gamma_{,z} - \psi_{,z}) \\ + \rho e^{-2\gamma} [(\rho\psi_{,\rho} - 1)\dot{\varphi}^2 + e^{4\psi}\psi_{,\rho}\dot{t}^2] = 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} + (\dot{z}^2 - \dot{\rho}^2)(\gamma_{,z} - \psi_{,z}) + 2\dot{\rho}\dot{z}(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}) \\ + e^{-2\gamma}\psi_{,z} [\rho^2\dot{\varphi}^2 + e^{4\psi}\psi_{,\rho}\dot{t}^2] = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Las ecuaciones (1.21)-(1.24) son las cuatro ecuaciones diferenciales no-lineales de movimiento de una partícula en un campo gravitatorio, estático axialmente simétrico, que tenemos que resolver.

1.3.2. GEODÉSICAS NULAS

Para finalizar vamos a escribir las ecuaciones para la propagación de una señal luminosa. Como ya hemos mencionado, la distancia invariante ds^2 es nula para partículas sin masa, entonces

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0. \quad (1.25)$$

Utilizando entonces el elemento de línea de Weyl (1.9), se obtiene el resultado

$$-e^{2\psi}\dot{t}^2 + e^{-2\psi}[\rho^2\dot{\varphi}^2 + e^{2\gamma}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2)] = 0, \quad (1.26)$$

la cual constituye la ecuación diferencial no lineal necesaria para estudiar el movimiento de partículas sin masa en los espacio-tiempos de Weyl.

Ahora bien, esta ecuación no es suficiente para obtener las soluciones correspondientes a geodésicas nulas generales; sin embargo, si nos limitamos al caso de geodésicas restringidas al plano ecuatorial, como veremos en la próxima sección, esta ecuación es suficiente para estudiar el caso del movimiento de partículas sin masa para un elemento de línea de Weyl. Teniendo entonces las ecuaciones necesarias para estudiar el problema de las geodésicas, tanto temporales como nulas, en la próxima sección nos dedicaremos a simplificar dichas ecuaciones diferenciales no-lineales restringiéndolas al plano ecuatorial $z = 0$ y utilizando las constantes de movimiento presentes en el problema.

1.4. GEODÉSICAS ECUATORIALES

Las ecuaciones que gobiernan las geodésicas en un espacio-tiempo con elemento de línea $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ las podemos deducir utilizando el formalismo lagrangiano, tomando el lagrangiano (1.15). Los momentos canónicos corres-

pondientes, definidos como

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha}, \quad (1.27)$$

están dados por

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = e^{2\psi} \dot{t}, \quad (1.28)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \rho^2 e^{-2\psi} \dot{\varphi}, \quad (1.29)$$

$$p_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = e^{2\gamma-2\psi} \dot{\rho}, \quad (1.30)$$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = e^{2\gamma-2\psi} \dot{z}, \quad (1.31)$$

y así el Hamiltoniano correspondiente es

$$\mathcal{H} = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = 2\mathcal{L} - \mathcal{L} = \mathcal{L}. \quad (1.32)$$

La igualdad entre el Hamiltoniano y el Lagrangiano quiere decir que no hay energía potencial en el problema; es decir, la energía se deriva solamente de la energía cinética, como se ve en

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (1.33)$$

Además, como el Lagrangiano está directamente relacionado con el intervalo ds^2 , podemos hacer que $2\mathcal{L} = -1$ para partículas masivas y $2\mathcal{L} = 0$ para rayos de luz, dada la signatura que estamos tomando, $(-+++)$. De acuerdo con esto, si $ds^2 > 0$ el intervalo es de tipo espacial: una partícula que se mueva entre dos eventos separados por tal intervalo debe viajar más rápido que la velocidad de la luz. Por otro lado, si $ds^2 < 0$ el intervalo es de tipo temporal y la partícula debe moverse más lento que la velocidad de luz. Finalmente, si $ds^2 = 0$, el intervalo es nulo y la partícula debe viajar a la velocidad de la luz.

Ahora bien, debido a la simetría temporal y axial de nuestro problema $d(\partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}^a) / d\tau = 0$ para $a = 0, 1$; por lo tanto, existen dos constantes de

movimiento además de $2\mathcal{L}$, relacionadas de la siguiente forma

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^0} = p_t = e^{2\psi}\dot{t} = E = cte, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^1} = p_\varphi = \rho^2 e^{-2\psi}\dot{\varphi} = L = cte, \quad (1.35)$$

donde E y L son, respectivamente, la energía y el momentum angular de la partícula. Como consecuencia de estas últimas expresiones, las ecuaciones de movimiento (1.21) y (1.22) se satisfacen inmediatamente, ya que al introducir (1.34) en (1.21), y (1.35) en (1.22), obtenemos $0 \equiv 0$, en los dos casos.

Restringiendo las ecuaciones de movimiento al plano ecuatorial, el plano $z = 0$, las ecuaciones (1.23) y (1.24) toman la forma

$$\ddot{\rho} + \dot{\rho}^2 (\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}) + \rho e^{-2\gamma} [(\rho\psi_{,\rho} - 1)\dot{\varphi}^2 + e^{4\psi}\psi_{,\rho}\dot{t}^2] = 0, \quad (1.36)$$

$$\dot{\rho}^2(\psi_{,z} - \gamma_{,z}) + e^{-2\gamma}\psi_{,z} [\rho^2\dot{\varphi}^2 + e^{4\psi}\psi_{,\rho}\dot{t}^2] = 0, \quad (1.37)$$

que, de acuerdo con (1.34) y (1.35), se reducen a

$$\ddot{\rho} + \dot{\rho}^2 (\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}) + \rho e^{-2\gamma} \left[(\rho\psi_{,\rho} - 1) \frac{L^2}{\rho^4 e^{4\psi}} + \psi_{,\rho} E^2 \right] = 0, \quad (1.38)$$

$$\dot{\rho}^2(\psi_{,z} - \gamma_{,z}) + e^{-2\gamma}\psi_{,z} \left[\frac{L^2}{\rho^2} e^{4\psi} + \psi_{,\rho} E^2 \right] = 0. \quad (1.39)$$

Es fácil ver que las anteriores ecuaciones son complicadas de solucionar para una forma general de ψ y γ , e incluso para una forma particular no trivial de estas funciones. De acuerdo con esto, desarrollaremos un procedimiento análogo, que nos llevará a obtener relaciones similares a las anteriores, partiendo del Lagrangiano restringido al plano ecuatorial. El Lagrangiano, al expresarlo por medio de las constantes de movimiento (1.34) y (1.35), toma la forma

$$2\mathcal{L} = -e^{-2\psi} \left[E^2 - \frac{L^2 e^{4\psi}}{\rho^2} - \dot{\rho}^2 e^{2\gamma} \right], \quad (1.40)$$

donde como hemos mencionado si $2\mathcal{L} = -1$ tendremos geodésicas para partículas masivas y si $2\mathcal{L} = 0$ obtenemos trayectorias de rayos de luz.

Despejando entonces $\dot{\rho}$ en la ecuación anterior, se obtiene

$$\dot{\rho}^2 = e^{-2\gamma} \left[E^2 + 2\mathcal{L}e^{2\psi} - \frac{L^2}{\rho^2} e^{4\psi} \right]; \quad (1.41)$$

esto es, una ecuación diferencial no-línea de primer orden. Como vemos, hemos reducido el problema de resolver una ecuación diferencial no-línea de segundo orden al de resolver una ecuación diferencial de primer orden en la que es posible separar las variables, dado que γ y ψ dependen solamente de ρ debido a que estamos en el plano ecuatorial $z = 0$. Es claro que, aunque la relación (1.39) es igualmente una ecuación diferencial de variables separables, la relación (1.41) es más sencilla puesto que no contiene derivadas de las funciones ψ y γ .

Ahora, como es conocido [6], para resolver una ecuación diferencial de primer orden de variables separadas se integra para hallar su solución general; sin embargo, no todas las integrales indefinidas tienen una solución analítica, por lo que todavía no sabemos si podemos hallar una solución exacta a nuestro problema ya que no conocemos las funciones $e^{2\psi}$ y $e^{2\gamma}$.

1.4.1. ECUACIÓN DE LA ÓRBITA

La solución de la ecuación de movimiento (1.41) nos da la dependencia de la coordenada radial ρ con respecto al tiempo propio τ ; sin embargo, esta dependencia puede no ser muy útil para determinar la naturaleza del movimiento de la partícula en el sistema de coordenadas cilíndricas de Weyl que estamos utilizando. De acuerdo con esto, es conveniente también conocer la dependencia de la coordenada radial ρ con respecto a la coordenada temporal t , denominada *tiempo de Weyl*, y con respecto a la coordenada acimutal φ . Esta última dependencia constituye lo que se denomina la *ecuación de la*

órbita.

Podemos determinar una expresión para $d\rho/dt$ mediante la relación

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = \frac{(\dot{\rho})^2}{(\dot{t})^2}. \quad (1.42)$$

que, por las ecuaciones (1.34) y (1.35), toma la forma

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = e^{-2\gamma} \left[(E^2 + 2\mathcal{L}e^{2\psi}) - \frac{L^2 e^{4\psi}}{\rho^2} \right] \frac{e^{4\psi}}{E^2}, \quad (1.43)$$

cuya solución nos da la relación buscada entre la coordenada radial y el tiempo de Weyl t .

Para encontrar la ecuación de la órbita de la partícula en relatividad general se utiliza el mismo tratamiento que en Mecánica Clásica cuando se resuelve el problema de Kepler [10]. Por medio de la relación

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{(\dot{\rho})^2}{(\dot{\varphi})^2}, \quad (1.44)$$

y utilizando (1.35) y (1.41), la ecuación diferencial de la órbita toma la forma

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = e^{-2\gamma} \left[(E^2 + 2\mathcal{L}e^{2\psi}) \frac{\rho^2}{L^2} e^{-4\psi} - 1 \right] \rho^2. \quad (1.45)$$

Esta es nuevamente una ecuación de variables separables, debido a que $\gamma = \gamma(\rho, 0)$ y $\psi = \psi(\rho, 0)$. La integral de esta ecuación tendrá la forma $\varphi = \varphi(\rho)$, que es precisamente la *ecuación de la órbita* en coordenadas polares planas.

1.4.2. GEODÉSICAS NULAS

Basándonos en las anteriores relaciones, nos dedicaremos ahora a escribir las ecuaciones para el caso en que $2\mathcal{L} = 0$, correspondiente a las geodésicas nulas. Substituyendo en la ecuación de la órbita (1.45), obtenemos

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = e^{-2\gamma} \left[E^2 \frac{\rho^2}{L^2} e^{-4\psi} - 1 \right] \rho^2. \quad (1.46)$$

Esta es la ecuación que determina la geometría de partículas de masa cero en el plano ecuatorial en un campo gravitacional estático y axialmente simétrico.

Por otra parte, si en las relaciones (1.41) y (1.43) tomamos el caso especial en que el momento angular sea igual a cero, estaremos considerando las geodésicas de partículas que se mueven en dirección radial. A este tipo de trayectorias las llamaremos *geodésica radiales*. Las ecuaciones que gobiernan las geodésicas nulas radiales son

$$\dot{\rho} = Ee^{-\gamma}, \quad (1.47)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = e^{-\gamma+2\psi}. \quad (1.48)$$

La primera de estas ecuaciones relaciona la coordenada radial con el tiempo propio, y la segunda relaciona la coordenada radial con el tiempo de Weyl.

1.4.3. GEODÉSICAS TEMPORALES

Como sabemos, para geodésicas tipo tiempo $2\mathcal{L} = -1$, por lo tanto la ecuación de la órbita será

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = e^{-2\gamma} \left[(E^2 - e^{2\psi}) \frac{\rho^2}{L^2} e^{-4\psi} - 1 \right] \rho^2. \quad (1.49)$$

Esta es la ecuación diferencial en coordenadas polares planas del movimiento de partículas en el plano ecuatorial en un espacio-tiempo de Weyl.

Ahora, como en el caso anterior de geodésicas nulas, obtendremos geodésicas radiales cuando $L = 0$. Introduciendo este valor en las relaciones (1.41) y (1.43), se convierten en

$$\dot{\rho}^2 = e^{-2\gamma} [E^2 - e^{2\psi}], \quad (1.50)$$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = e^{-2\gamma} [E^2 - e^{2\psi}] \frac{e^{4\psi}}{E^2}, \quad (1.51)$$

donde estamos relacionando ρ con τ , y ρ con t , respectivamente. Solo nos queda, introducir un caso particular de las funciones ψ y γ para resolver nuestro problema. Este será el tema del siguiente capítulo.

Capítulo 2

GEODÉSICAS EN EL CAMPO DE BONNOR-SACKFIELD

2.1. INTRODUCCIÓN

Como vimos anteriormente, las ecuaciones de movimiento en el plano ecuatorial para un espacio tiempo estático con simetría axial van a depender directamente de los potenciales gravitacionales. Por analogía con la teoría Newtoniana, en relatividad general podemos decir que las componentes del tensor métrico nos representan los potenciales gravitacionales, en nuestro caso $g_{\alpha\beta}$, que claramente dependen de las funciones ψ , γ . En el presente capítulo tomaremos un caso especial de estas funciones, las cuales representan el campo gravitacional de un disco estático sin presión¹.

En vista de esto hemos dividido el capítulo de la siguiente manera: en la sección 2.2 presentamos las funciones ψ , γ correspondientes al campo de Bonnor y Sackfield expresando cada una de las funciones dentro y fuera de dicho campo, luego, en la sección 2.3, resolvemos las ecuaciones diferenciales

¹Un fluido sin presión se conoce como *polvo* en relatividad general, ver[14], pág. 97.

en el caso de trayectorias radiales introduciendo las funciones obtenidas en la sección anterior. Finalmente, en la sección 2.4, encontramos las órbitas de las partículas dentro y fuera de una fuente tipo Bonnor y Sackfield. Esto se hizo mediante un análisis cualitativo del potencial efectivo en 2.4.1., acto seguido se solucionó la ecuación diferencial de la órbita en 2.4.2., donde también se muestran las trayectorias de las partículas en forma gráfica.

2.2. EL CAMPO DE BONNOR-SACKFIELD

Con el fin de obtener una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío que represente el campo gravitacional de un disco delgado estático y axialmente simétrico, tomamos una solución de la ecuación de Laplace (1.12) que represente el potencial Newtoniano para el exterior de un disco de densidad de materia axialmente simétrica, la cual puede escribirse apropiadamente en coordenadas esferoidales oblatas de la forma [3]

$$\psi = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} P_{2n}(\eta) q_{2n}(\varsigma), \quad (2.1)$$

donde C_{2n} son constantes, $P_{2n}(\eta)$ son los polinomios de Legendre y $q_{2n}(\varsigma) = i^{2n+1} Q_{2n}(i\varsigma)$ son las funciones de Legendre de segunda clase. Las variables η y ς son las coordenadas esferoidales oblatas relacionadas con las coordenadas cilíndricas mediante las relaciones

$$\rho^2 = a^2(1 + \varsigma^2)(1 - \eta^2), \quad (2.2)$$

$$z = a\eta\varsigma, \quad (2.3)$$

donde a es una constante, $-1 \leq \eta \leq 1$ y $0 \leq \varsigma < \infty$.

La solución monopolar para ψ la obtenemos escogiendo convenientemente $C_0 = M/a$ y $C_{2n} = 0$ para $n > 0$, entonces

$$\psi = -\frac{M}{a} \cot^{-1}(\varsigma), \quad (2.4)$$

donde M es la masa del disco y a es el radio del disco. La función γ se obtiene integrando las ecuaciones (1.13) y (1.14), y puede escribirse como

$$\gamma = -\frac{1}{2} \left(\frac{M}{a} \right)^2 \ln \left(\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 + \eta^2} \right). \quad (2.5)$$

Esta solución fue obtenida independientemente por Zipoy [17] y Vorhees [15] e interpretada por Bonnor y Sackfield [4] como el campo gravitacional de un disco estático sin presión. Dicha solución es también el término monopolar de la familia de discos de Morgan y Morgan [11].

Este disco se puede representar en el plano XY en coordenadas cartesianas como un disco de radio a y de espesor despreciable, ya que estamos tomando $z = 0$. Ahora, para el plano ecuatorial, tendremos dos regiones bien definidas, ya que si $z = 0$ entonces $\zeta = 0$ ó $\eta = 0$. Si hacemos $\zeta = 0$ tendremos $\eta^2 = 1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2$, por lo que $0 \leq \rho \leq a$, es decir, la región dentro del disco la obtenemos cuando la variable ζ de las coordenadas esferoidales oblatas es igual a cero. Por otra parte, si hacemos $\eta = 0$ obtenemos $\zeta^2 = \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 1$, lo que representa la región exterior al disco $\rho \geq a$.

Vamos ahora a restringir las funciones ψ y γ para la región dentro del disco. Primero escribimos la relación (2.4) de la siguiente manera

$$\psi = - \left(\frac{M}{a} \right) \frac{i}{2} \ln \left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right). \quad (2.6)$$

Si hacemos $\zeta = 0$, la función ψ toma la forma

$$\psi |_{\zeta=0} = - \left(\frac{M}{a} \right) \frac{i}{2} \ln(-1). \quad (2.7)$$

Ahora bien, como $e^{i\pi(2m+1)} = -1$ para $m \in \mathbf{Z}$, entonces $\psi = \left(\frac{M\pi}{2a}\right) (2m+1) = cte$. Por otro lado, debido al comportamiento de la función exponencial, se tiene que $e^\psi = cte > 0$.

Igualmente, la función γ dentro del disco toma la forma

$$\gamma = -\frac{1}{2} \left(\frac{M}{a} \right)^2 \ln(\eta^{-2}), \quad (2.8)$$

donde $\eta = \sqrt{1 - (\rho/a)^2}$, entonces

$$e^\gamma = \left[1 - \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}}, \quad (2.9)$$

donde $n = \left(\frac{M}{a} \right)^2 > 0$.

Siguiendo un procedimiento similar, para el caso fuera del disco las funciones ψ , γ estarán dadas por

$$\psi = -\sqrt{n} \cot^{-1} \left(\sqrt{(\rho/a)^2 - 1} \right), \quad (2.10)$$

$$\gamma = \ln \left(\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\rho} \right)^n, \quad (2.11)$$

de tal manera que

$$e^\psi = \exp \left\{ -\sqrt{n} \cot^{-1} \left(\sqrt{(\rho/a)^2 - 1} \right) \right\}, \quad (2.12)$$

$$e^\gamma = \left(\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\rho} \right)^n. \quad (2.13)$$

Después de definir los potenciales, vamos a volver a nuestro problema central; es decir, vamos a resolver las ecuaciones de las geodésicas tomando las funciones e^ψ y e^γ de la solución de Bonnor y Sackfield para reemplazarlas en las ecuaciones generales del capítulo anterior.

2.3. GEODÉSICAS RADIALES

2.3.1. GEODÉSICAS EN EL INTERIOR DEL DISCO

Dado que e^ψ es constante dentro del disco, y teniendo en cuenta que las geodésicas radiales se obtienen cuando $L = 0$, de (1.41) resulta que

$$\dot{\rho}^2 = e^{-2\gamma} (E^2 + 2\mathcal{L}e^{2\psi}). \quad (2.14)$$

Observando la expresión anterior podemos ver que, como $2\mathcal{L}$ y E son también constantes, las soluciones con $2\mathcal{L} = 0$ y con $2\mathcal{L} = -1$ sólo van a diferir en una constante; por consiguiente, podemos utilizar la ecuación (2.14) tanto para el caso de geodésicas temporales como para el caso de geodésicas nulas.

Ahora bien, la ecuación (2.14) se puede escribir en la forma

$$e^\gamma d\rho = Ad\tau, \quad (2.15)$$

donde $A^2 = E^2 + 2\mathcal{L}e^{2\psi}$ es constante. Sustituyendo entonces (2.9), se obtiene la expresión

$$\left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} d\rho = Ad\tau, \quad (2.16)$$

la cual se puede resolver mediante el uso de una sustitución trigonométrica. Si hacemos $\tilde{\rho} = \sin\theta$, habiendo hecho antes $\tilde{\rho} = \rho/a$, la relación anterior se reduce a

$$a \cos^{n+1}\theta d\theta = Ad\tau. \quad (2.17)$$

Aplicando entonces integración por partes, obtenemos la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\int \cos^{n+1}\theta d\theta = \frac{\tilde{\rho}(1-\tilde{\rho}^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{n}{n+1} \int \cos^{n-1}\theta d\theta = \frac{A\tau}{a}, \quad (2.18)$$

donde $n \in \mathbf{Z}^+$.

Vamos ahora a calcular la expresión anterior para algunos valores de n , con el fin de determinar una relación general; así, tomando $n = 1$, tenemos

$$\int \cos^2\theta d\theta = \frac{\tilde{\rho}(1-\tilde{\rho}^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{2} \int d\theta = \frac{A\tau_{1D}}{a}, \quad (2.19)$$

de modo que

$$\frac{A\tau_{1D}}{a} = \frac{\tilde{\rho}(1-\tilde{\rho}^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-1}\tilde{\rho} + C_{1D}, \quad (2.20)$$

donde C_{1D} es una constante de integración y el subíndice D indica que estamos dentro del disco.

De igual manera, cuando $n = 2$ tenemos

$$\frac{A\tau_{2D}}{a} = \int \cos^3 \theta d\theta = \tilde{\rho} \left[1 - \frac{\tilde{\rho}^2}{3} \right] + C_{2D}, \quad (2.21)$$

mientras que cuando $n = 3$

$$\frac{A\tau_{3D}}{a} = \int \cos^3 \theta d\theta = \frac{\tilde{\rho}(1 - \tilde{\rho}^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3}{4} \int \cos^2 \theta d\theta, \quad (2.22)$$

de modo que podemos reemplazar $\cos^2 \theta$ del caso $n = 1$ y tendremos

$$\frac{A\tau_{3D}}{a} = \int \cos^3 \theta d\theta = \frac{\tilde{\rho}(1 - \tilde{\rho}^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3A\tau_{1D}}{4a}. \quad (2.23)$$

Continuando con otros valores de n podemos ver que, para valores enteros de n mayores que 2, tendremos la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\frac{A\tau_{nD}}{a} = \frac{\tilde{\rho}(1 - \tilde{\rho}^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{n}{n+1} \frac{A\tau_{(n-2)D}}{a}, \quad (2.24)$$

donde, como ya hemos mencionado, n es un número entero positivo.

Por otra parte, para valores reales de n mayores que cero, hagamos la sustitución $u = \tilde{\rho}^2$, lo que transforma la relación (2.16) en

$$\frac{1}{2} \int u^{-1/2} (1-u)^{n/2} du = \frac{A}{a} \int d\tau, \quad (2.25)$$

La integral del lado izquierdo de la ecuación se puede expresar en términos de la función beta incompleta [1],[2], [8] como

$$\frac{1}{2} B_u \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2} + 1 \right) = \sqrt{u} F \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}; u \right), \quad (2.26)$$

donde $B_u = (p, q)$ es la función beta incompleta, y $F(b, c, d; u)$ es la función hipergeométrica, la cual converge para valores reales $n > 0$, y su radio de convergencia es $|u| < 1$.

En términos de $\tilde{\rho}$, tendremos la expresión

$$\int [1 - \tilde{\rho}^2]^{\frac{n}{2}} d\tilde{\rho} = \tilde{\rho} F \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}; \tilde{\rho}^2 \right) + C_{nD} = \frac{A\tau_{nD}}{a}, \quad (2.27)$$

en la cual el radio de convergencia es $0 < \tilde{\rho} < 1$. Aunque esta última relación es más general que (2.24), solamente conviene utilizarla para valores de n no enteros mayores que cero, mientras (2.24), por su forma simple, se puede utilizar para valores enteros positivos de n . Por otra parte, para $d\rho/dt$, utilizando (1.43), tendremos la igualdad

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{Ae^{2\psi-\gamma}}{E}. \quad (2.28)$$

Es claro que esta relación tiene la misma solución de la ecuación (2.14), difiriendo sólo en una constante. En el caso especial en que hagamos $E = e^{2\psi}$, tendremos exactamente la misma solución para $\tau = \tau(\tilde{\rho})$ y $t = \tau(\tilde{\rho})$.

Habiendo ya definido las relaciones para $\tilde{\rho}$ con τ y t , pasemos ahora a graficarlas para analizar su comportamiento. Las funciones $\tau = \tau(\tilde{\rho})$ para los primeros ocho valores enteros de n son:

$$\frac{A\tau_{1D}}{a} = \frac{\tilde{\rho}}{2}\sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} + \frac{1}{2}\arcsin(\tilde{\rho}) + C_{1D}, \quad (2.29a)$$

$$\frac{A\tau_{2D}}{a} = \tilde{\rho} - \frac{\tilde{\rho}^3}{3} + C_{2D}, \quad (2.29b)$$

$$\frac{A\tau_{3D}}{a} = \frac{\tilde{\rho}}{8}\sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} (5 - 2\tilde{\rho}^2) + \frac{3}{8}\arcsin(\tilde{\rho}) + C_{3D}, \quad (2.29c)$$

$$\frac{A\tau_{4D}}{a} = \tilde{\rho} - \frac{2\tilde{\rho}^3}{3} + \frac{\tilde{\rho}^5}{5} + C_{4D}, \quad (2.29d)$$

$$\begin{aligned} \frac{A\tau_{5D}}{a} = & \frac{\tilde{\rho}}{48}\sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} (33 - 26\tilde{\rho}^2 + 8\tilde{\rho}^4) + \\ & \frac{5}{16}\arcsin(\tilde{\rho}) + C_{5D}, \end{aligned} \quad (2.29e)$$

$$\frac{A\tau_{6D}}{a} = \tilde{\rho} - \tilde{\rho}^3 + \frac{3\tilde{\rho}^5}{5} - \frac{\tilde{\rho}^7}{7} + C_{6D}, \quad (2.29f)$$

$$\frac{A\tau_{7D}}{a} = \frac{\tilde{\rho}}{384} \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} (279 - 126\tilde{\rho}^2 + 200\tilde{\rho}^4 - 48\tilde{\rho}^6) + \frac{35}{128} \arcsin(\tilde{\rho}) + C_{7D}, \quad (2.29g)$$

$$\frac{A\tau_{8D}}{a} = \tilde{\rho} - \frac{4\tilde{\rho}^3}{3} + \frac{6\tilde{\rho}^5}{5} - \frac{4\tilde{\rho}^7}{7} + \frac{\tilde{\rho}^9}{9} + C_{8D}. \quad (2.29h)$$

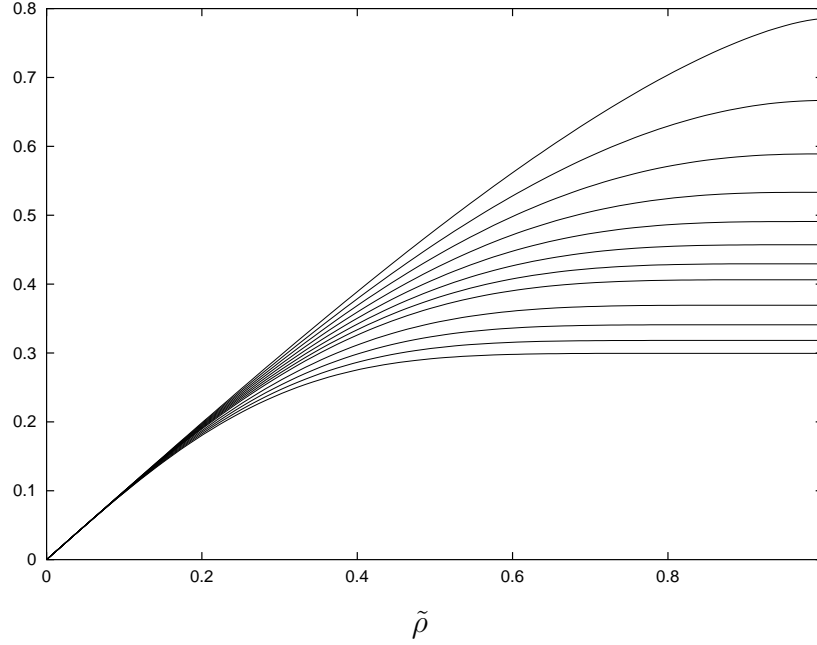


Figura 2.1: Variación del tiempo propio, o del tiempo de Weyl, para una geodésica radial, nula o temporal, dentro de una fuente tipo Bonnor y Sackfield, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16$, y $C_{nD} = 0$ en forma descendente.

En la figura 2.1 se presenta la variación del tiempo propio, o del tiempo de Weyl, en función de $\tilde{\rho}$, para una geodésica radial, nula o temporal, dentro de una fuente tipo Bonnor y Sackfield, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16$, y $C_{nD} = 0$. Igualmente se analizó el comportamiento de τ , o t , para valores reales positivos de n , usando la relación (2.27), y en todos los casos se encontró un comportamiento similar al observado en la figura 2.1.

2.3.2. GEODÉSICAS EN EL EXTERIOR DEL DISCO

Para el caso de geodésicas nulas en el exterior del disco, al reemplazar (2.13) en (1.47), se obtiene la expresión

$$e^\gamma d\rho = \left(\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\rho} \right)^n d\rho = E d\tau. \quad (2.30)$$

Ahora bien, si hacemos el cambio de variable $\tilde{\rho} = \sec \alpha$, donde $\tilde{\rho} = \rho/a$, obtenemos integrando por partes

$$\int \frac{\sin^{n+1} \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\sin^n \alpha}{\cos \alpha} - n \int \sin^{n-1} \alpha d\alpha = \frac{E\tau_{nF}}{a}, \quad (2.31)$$

donde el subíndice F indica que estamos fuera del disco.

Calculando la expresión anterior para diferentes valores de n , enteros positivos. Tomando $n = 1$ tenemos

$$\frac{E\tau_{1F}}{a} = \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} - \arctan \left(\sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} \right) + C_{1F}, \quad (2.32)$$

donde C_{1F} es una constante de integración. Igualmente, para $n = 2$ se obtiene el resultado

$$\frac{E\tau_{2F}}{a} = \tilde{\rho} + \frac{1}{\tilde{\rho}} + C_{2F}, \quad (2.33)$$

Para valores de n no enteros no es posible integrar la expresión (2.30), así que solo consideraremos el caso en que n es un entero positivo.

Deduzcamos ahora una relación entre las constantes dentro del disco con las constantes fuera de él. Para ello se debe cumplir que, al evaluar en $\tilde{\rho} = 1$ las funciones dentro y fuera del disco tienen que ser iguales; en forma general,

$$\tau_{nD}(\tilde{\rho} = 1) = \tau_{nF}(\tilde{\rho} = 1). \quad (2.34)$$

Por ejemplo, cuando $n = 1$, obtenemos

$$\frac{\pi}{4} + C_{1D} = C_{1F}, \quad (2.35)$$

para valores arbitrarios de C_{1D} y C_{1F} . Supongamos que $C_{1D} = 0$, entonces $C_{1F} = \pi/4$. Introduciendo estos casos particulares de las constantes, las funciones se convierten en:

$$\frac{E\tau_{1D}}{a} = \frac{\tilde{\rho}}{2} \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} + \frac{1}{2} \arcsin(\tilde{\rho}), \quad (2.36)$$

$$\frac{E\tau_{1F}}{a} = \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} - \arctan(\sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1}) + \frac{\pi}{4}. \quad (2.37)$$

En general, para valores impares de n , tomando $n = 2m + 1$ las constantes obedecen la relación

$$\prod_{k=0}^m \left(\frac{2k+1}{2k+2} \right) \frac{\pi}{2} + C_{(2m+1)D} = C_{(2m+1)F}, \quad (2.38)$$

Las funciones $\tau(\tilde{\rho})$, fuera del disco, para $n = 1, 3, 5$ y 7 son:

$$\frac{E\tau_{1F}}{a} = \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} - \arctan \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} + \frac{\pi}{4}, \quad (2.39a)$$

$$\frac{E\tau_{3F}}{a} = \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} \left(\frac{1 + 2\tilde{\rho}^2}{2\tilde{\rho}^2} \right) - \frac{3}{2} \arctan \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} + \frac{3\pi}{16}, \quad (2.39b)$$

$$\begin{aligned} \frac{E\tau_{5F}}{a} &= \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} \left(\frac{1 + \tilde{\rho}^2}{\tilde{\rho}^2} \right) - \frac{15}{8} \arctan \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} \\ &\quad - \frac{1}{32} \sin \left[4 \arctan \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} \right] + \frac{5\pi}{32}, \end{aligned} \quad (2.39c)$$

$$\begin{aligned} \frac{E\tau_{7F}}{a} &= \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} \left(\frac{47 + 32\tilde{\rho}^2}{47\tilde{\rho}^2} \right) - \frac{35}{16} \arctan \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} \\ &\quad - \frac{5}{64} \sin \left[4 \arctan \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{192} \sin \left[6 \arctan \sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1} \right] + \frac{35\pi}{256}. \end{aligned} \quad (2.39d)$$

En la figura 2.2 se presentan las gráficas de las geodésicas radiales nulas, dentro y fuera del disco de Bonnor y Sackfield, para $n = 1, 2, 3, 4$, $C_{nD} = 0$,

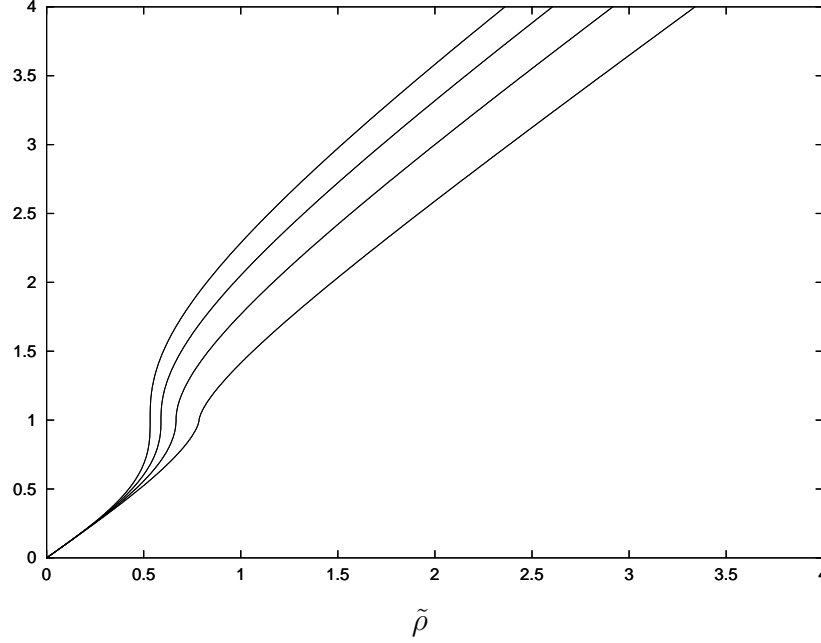


Figura 2.2: Variación del tiempo propio a lo largo de una geodésica nula radial, dentro y fuera del disco de Bonnor y Sackfield, para $n = 1, 2, 3, 4$, $C_{nD} = 0$, $C_{1F} = \pi/4$, $C_{2F} = -4/3$, $C_{3F} = 3\pi/16$ y $C_{4F} = -32/15$.

$C_{1F} = \pi/4$, $C_{2F} = -4/3$, $C_{3F} = 3\pi/16$ y $C_{4F} = -32/15$. Para el caso de geodésicas temporales, el comportamiento es similar, así que no presentamos las gráficas correspondientes. Es claro, que para $t \rightarrow \infty$ o $\tau \rightarrow \infty$, $\tilde{\rho} \rightarrow \infty$, es decir, el fotón se demora un tiempo infinito en llegar al centro del disco.s

2.4. GEODÉSICAS NO RADIALES

2.4.1. ANÁLISIS CUALITATIVO

Para hacer una clasificación de las órbitas en relatividad general se introduce una función energía mediante la relación

$$\xi = V_{ef} + \frac{\dot{\rho}^2}{2}, \quad (2.40)$$

de tal manera que ξ se puede interpretar como la energía por unidad de masa. Si representamos el potencial efectivo V_{ef} en función de ρ , es posible hacer una descripción cualitativa de los tipos de movimientos posibles. Reordenando la expresión (1.41) en la forma (2.40), podemos escribir

$$2\xi = \dot{\rho}^2 + e^{-2\gamma} \left[-2\mathcal{L}e^{2\psi} - E^2 + \frac{L^2 e^{4\psi}}{\rho^2} \right] = 0. \quad (2.41)$$

Se advierte enseguida que la energía que estamos considerando es $\xi = 0$, y el potencial efectivo será

$$2V_{ef} = e^{-2\gamma} \left[-2\mathcal{L}e^{2\psi} - E^2 + \frac{L^2 e^{4\psi}}{\rho^2} \right]. \quad (2.42)$$

Este potencial nos sirve para hacer un análisis cualitativo de las posibles órbitas de un campo gravitacional estático y axialmente simétrico, tanto para partículas masivas como para partículas de masa cero.

Para el caso de una fuente tipo Bonnor y Sackfield, el potencial efectivo dentro del disco está dado por

$$2V_{ef} = \frac{1}{(1 - \tilde{\rho}^2)^n} \left[-A^2 + \frac{B^2}{\tilde{\rho}^2} \right] < 0, \quad (2.43)$$

donde n , $-A^2 = -2\mathcal{L}e^{2\psi} - E^2$ y $B^2 = L^2 e^{4\psi}/a^2$ son constantes, y la condición $2V_{ef} < 0$ se impone para garantizar que se cumpla la expresión (2.41). Ahora bien, $B > 0$, y $1/(1 - \tilde{\rho}^2)^n > 0$ entre $0 < \tilde{\rho} < 1$ para cualquier real $n > 0$; por lo tanto, la constante A tiene que ser positiva, es decir, $E > \sqrt{-2\mathcal{L}e^{2\psi}}$. La relación (2.43) se cumple entonces para $\tilde{\rho} > (B/A)$, por lo que el dominio de V_{ef} será

$$\frac{B}{A} < \tilde{\rho} < 1, \quad (2.44)$$

lo que implica que la partícula estará confinada a moverse entre los límites $\tilde{\rho}_{min} = (B/A)$ y $\tilde{\rho} = 1$.

Para asignar valores a las constantes se debe cumplir que $0 < A < B$ para cualquier valor de A , B y n . En la tabla 2.1 se encuentran los valores de las

n	A^2	B^2	E^2	L^2/a^2
1	100	1	123.14	$1,87 * 10^{-3}$
1	80	1	103.14	$1,87 * 10^{-3}$
1	60	1	83.14	$1,87 * 10^{-3}$
1	40	1	63.14	$1,87 * 10^{-3}$
1	30	1	53.14	$1,87 * 10^{-3}$
1	20	1	43.14	$1,87 * 10^{-3}$
1	10	1	33.14	$1,87 * 10^{-3}$
2	100	1	184.77	$5,90 * 10^{-2}$
2	80	1	164.77	$5,90 * 10^{-2}$
2	60	1	140.77	$5,90 * 10^{-2}$
2	40	1	120.77	$5,90 * 10^{-2}$
2	30	1	110.77	$5,90 * 10^{-2}$
2	20	1	100.77	$5,90 * 10^{-2}$
2	10	1	90.77	$3,49 * 10^{-6}$

Tabla 2.1: Valores de las constantes para el potencial efectivo

constantes para $n = 1, 2$. El comportamiento del potencial efectivo se ilustra gráficamente en la figura 2.3. Es obvio, por la forma del potencial efectivo, que no vamos a tener órbitas circulares debido a que no tenemos un punto crítico para la función V_{ef} .

Veamos ahora cual es el potencial que nos determina las órbitas fuera del disco. Al introducir (2.13) en (2.42), tendremos:

$$2V_{ef} = \left(\frac{\tilde{\rho}}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1}} \right)^{2n} \left[-2\mathcal{L}e^{-2\sqrt{n} \cot^{-1}(\sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1})} - E^2 + \frac{L^2}{a^2 \tilde{\rho}^2} e^{-4\sqrt{n} \cot^{-1}(\sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1})} \right]. \quad (2.45)$$

Podemos obtener las constantes E^2 y L^2 fuera del disco relacionandolas con las

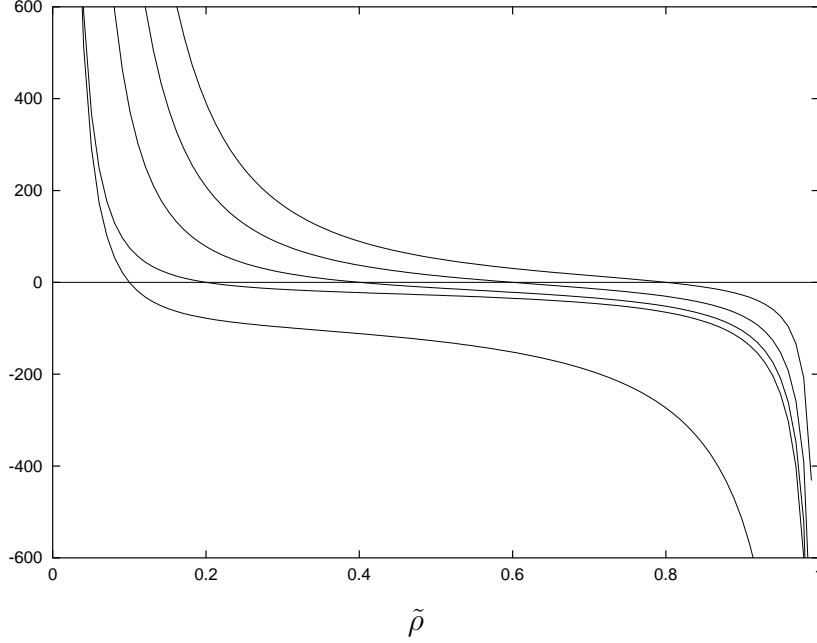


Figura 2.3: Potencial efectivo dentro de una fuente tipo Bonnor y Sackfield, para $n = 1$, y los valores de A y B dados en la tabla 2.1.

constantes dentro del disco de la siguiente forma:

$$E^2 = A^2 - 2\mathcal{L}e^{2\psi}, \quad (2.46)$$

$$\frac{L^2}{a^2} = B^2 e^{-4\psi}, \quad (2.47)$$

donde $\psi = \sqrt{n}\pi/2$, lo que garantiza que E^2 va a ser positivo.

Asignando diferentes valores para A y B , se obtienen los valores dados en la tabla 2.1, donde aparecen diferentes valores de n, A, B , asignados para el potencial dentro del disco. Para fuera del disco tomamos los valores de E^2 y L^2 . El potencial se comporta de la misma forma para todos los valores dados en la tabla 2.1. Los valores de L^2 no alteran el comportamiento del potencial efectivo, por eso en la gráfica tomamos para todos los casos el mismo valor. Recordemos que para geodésicas nulas se tiene que $E^2 = A$.

En las figuras 2.4 y 2.5 se representa gráficamente el potencial efectivo para geodésicas nulas, figura 2.4, y temporales, figura 2.5, con $n = 1$ y diferentes valores de las constantes E^2 y L^2 . De las gráficas 2.3, 2.4 y 2.5 se puede ver que la partícula tiene un punto de retroceso en $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{min} = B/A$; es decir, la partícula viene desde $\rho = \infty$ hasta un punto de retorno y se aleja de nuevo al infinito. Lo anterior implica que no existen órbitas cerradas.

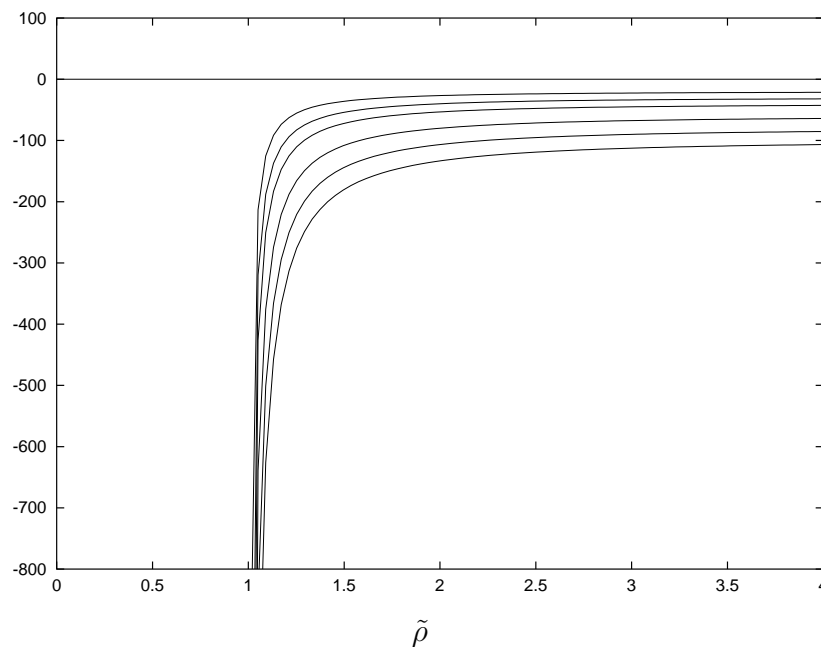


Figura 2.4: Potencial efectivo fuera del disco, para $2\mathcal{L} = 0$, $n = 1$, y los valores de las constantes dados en la tabla 2.1.

2.4.2. ANÁLISIS CUANTITATIVO

Resolveremos ahora la ecuación diferencial de movimiento en coordenadas polares planas. Reescribiendo la relación (1.45) en términos de los potenciales de Bonnor y Sackfield dentro del disco, tendremos

$$d\varphi = \pm \frac{\tilde{\rho}_{min} (1 - \tilde{\rho}^2)^{\frac{n}{2}} d\tilde{\rho}}{[\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2]^{\frac{1}{2}} \tilde{\rho}}, \quad (2.48)$$

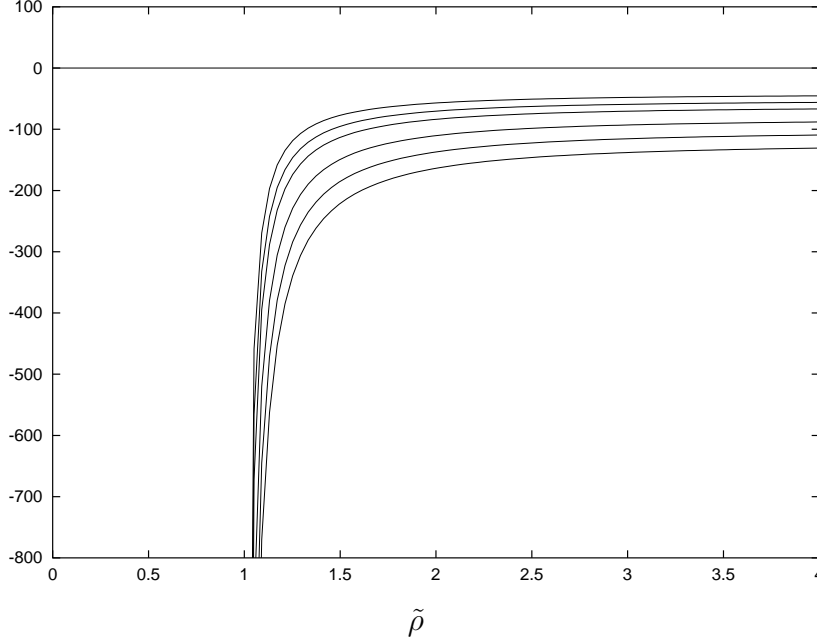


Figura 2.5: Potencial efectivo fuera del disco, para $2\mathcal{L} = -1$, $n = 1$, y los valores de E^2 y L^2 que aparecen en la tabla 2.1

donde $\tilde{\rho}_{min}^2 = L^2 e^{4\psi} / a^2 (E^2 + 2\mathcal{L} e^{2\psi})$ y el signo \pm corresponde a las dos raíces de la ecuación. Para el caso de geodésicas nulas tomamos $2\mathcal{L} = 0$, mientras que para geodésicas temporales tomamos $2\mathcal{L} = -1$, así que la ecuación diferencial es equivalente en ambos casos, difiriendo solo en el correspondiente valor de la constante A^2 , por lo que la solución puede utilizarse tanto para geodésicas nulas como para temporales. Mediante esta expresión podemos establecer nuevamente que el dominio de $\tilde{\rho}$ está dado por (2.44), así que el movimiento de la partícula está limitado dentro del disco; sin embargo, esto no significa que la órbitas sean necesariamente cerradas.

La ecuación (2.48) tiene solución analítica cuando n es un entero par, como puede verse haciendo la sustitución $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{min} \csc \phi$, la cual reduce dicha ecuación a la forma

$$- (1 - \tilde{\rho}_{min}^2 \csc^2 \phi)^{n/2} d\phi = \pm d\varphi. \quad (2.49)$$

La solución de esta integral está expresada en términos de las funciones $\arctan \phi$ y $\cot^m \phi$, donde m depende del valor de n ; por ejemplo, para $n = 2$, obtenemos

$$\varphi_{(+2D)} = -\arctan\left(\frac{\tilde{\rho}_{min}}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2}}\right) - \tilde{\rho}_{min}\sqrt{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2} + C_{(+2D)}, \quad (2.50)$$

$$\varphi_{(-2D)}(\rho) = \arctan\left(\frac{\tilde{\rho}_{min}}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2}}\right) + \tilde{\rho}_{min}\sqrt{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2} + C_{(-2D)}, \quad (2.51)$$

mientras que para $n = 4$, tendremos

$$\begin{aligned} \varphi_{(+4D)}(\rho) &= \frac{\tilde{\rho}_{min}}{3}(\tilde{\rho}^2 + 2\tilde{\rho}_{min}^2 - 6)\sqrt{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2} \\ &\quad - \arctan\left(\frac{\tilde{\rho}_{min}}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2}}\right) + C_{(+4D)}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(-4D)}(\rho) &= -\frac{\tilde{\rho}_{min}}{3}(\tilde{\rho}^2 + 2\tilde{\rho}_{min}^2 - 6)\sqrt{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2} \\ &\quad + \arctan\left(\frac{\tilde{\rho}_{min}}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2}}\right) + C_{(-4D)}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

y así sucesivamente para otros valores pares de n .

Determinemos ahora los valores de las constantes teniendo en cuenta que, en $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{min}$, se debe cumplir que $\varphi_{+(2m)D} = \varphi_{-(2m)D}$. En forma general se cumple que

$$-\frac{\pi}{2} + C_{+(2m)D} = \frac{\pi}{2} + C_{-(2m)D}. \quad (2.54)$$

Asignando, por ejemplo, los valores de $C_{(+2D)} = \pi/2$, y $C_{(-2D)} = -\pi/2$, las funciones para $n = 2$, son:

$$\varphi_{(+2D)} = -\arctan\left(\frac{\tilde{\rho}_{min}}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2}}\right) - \tilde{\rho}_{min}\sqrt{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2} + \frac{\pi}{2}, \quad (2.55)$$

$$\varphi_{(-2D)} = \arctan\left(\frac{\tilde{\rho}_{min}}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2}}\right) + \tilde{\rho}_{min}\sqrt{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}_{min}^2} - \frac{\pi}{2}, \quad (2.56)$$

e igualmente para otros valores pares de n . Escogiendo las constantes de esta manera se garantiza que, para cualquier valor par de n , $\varphi(\tilde{\rho}_{min}) = 0$, de tal manera que la órbita es simétrica con respecto al eje x en coordenadas cartesianas.

Ahora bien, para cualquier otro valor de n diferente de un entero par, la ecuación (2.48) debe resolverse numericamente. Utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, las condiciones iniciales dadas por $\varphi(\tilde{\rho}_{min}) = 0$ y los valores consignados en la Tabla 2.2, la ecuación (2.48) se resolvió numericamente para diferentes valores enteros y no enteros de n . Los resultados obtenidos, tanto para n par como para cualquier otro valor de n , se utilizan entonces para determinar el valor de φ en el borde del disco, cuando $\tilde{\rho} = 1$, el cual proporciona la condición inicial para resolver la ecuación diferencial en la parte exterior al disco.

Para la región exterior al disco la ecuación diferencial de la orbita (1.45) toma la forma

$$d\varphi = \pm \left(\frac{\sqrt{\tilde{\rho}^2 - 1}}{\tilde{\rho}} \right)^n \left[\left(\frac{E^2 + 2\mathcal{L}e^{2\psi}}{a^2L^2} \right) e^{-4\psi} \tilde{\rho}^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{d\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}}, \quad (2.57)$$

donde ψ está dado por (2.12). En este caso la ecuación debe resolverse independientemente para geodésicas nulas y para geodésicas temporales, dado que el término $e^{2\psi}$ depende de $\tilde{\rho}$. Al igual que para la región interior del disco, la ecuación se resolvió numericamente, para diferentes valores enteros y no enteros de n , a través del método de Runge-Kutta de cuarto orden, con las condiciones iniciales dadas por la solución interior evaluada en $\tilde{\rho} = 1$ y los valores de las constantes consignados en la tabla 2.2. Para asignar valores a las constantes se tuvieron en cuenta las relaciones (2.46) y (2.47).

Para cualquier valor de n la gráfica de la órbita tiene un comportamiento similar, por tal motivo en forma de ejemplo graficamos los valores de $n = \frac{1}{2}, 1, 2, 3$

n	A^2	B^2	$E_N^2 = A^2$	E_T^2	$E_N^2 a^2 / L^2$	$\tilde{\rho}_{min}$	$\psi(\tilde{\rho} = 1)$
0.5	100	1	100	109.22	8501.97	0.1	1.314
0.5	25	1	25	34.22	2125.49	0.2	1.218
0.5	25	4	25	34.22	531.37	0.4	0.974
0.5	25	9	25	34.22	236.17	0.6	0.706
0.5	25	16	25	34.22	132.84	0.8	0.406
1	100	1	100	123.14	53549.17	0.1	1.290
1	25	1	25	48.14	53549.17	0.2	1.167
1	25	4	25	48.14	3346.17	0.4	0.881
1	25	9	25	48.14	1487.48	0.6	0.583
1	25	16	25	48.14	836.70	0.8	0.284
2	100	1	100	185.02	722835	0.1	1.371
2	25	1	25	100.02	722835	0.2	1.173
2	25	4	25	100.02	45177.18	0.4	0.792
2	25	9	25	100.02	20078.75	0.6	0.447
2	25	16	25	100.02	11294.30	0.8	0.163
3	100	1	100	330.77	5325229	0.1	1.212
3	25	1	25	255.77	1331317	0.2	1.020
3	25	4	25	255.77	332827	0.4	0.627
3	25	9	25	255.77	147923	0.6	0.298
3	25	16	25	255.77	83206	0.8	0.078

Tabla 2.2: Valores de las constantes para la órbita

que corresponden a las gráficas (2.6), (2.7), (2.8) y (2.9), respectivamente. Todas las gráficas que mostramos a continuación corresponden a trayectorias de rayos de luz. En el caso de órbitas temporales se encontró que las trayectorias nulas pueden representar sus órbitas sin distinción alguna, por lo que dichas órbitas estarán representadas igualmente mediante las siguientes gráficas. Todo esto en concordancia con el análisis cualitativo que se realizó previo a la solución de la ecuación diferencial de la órbita.

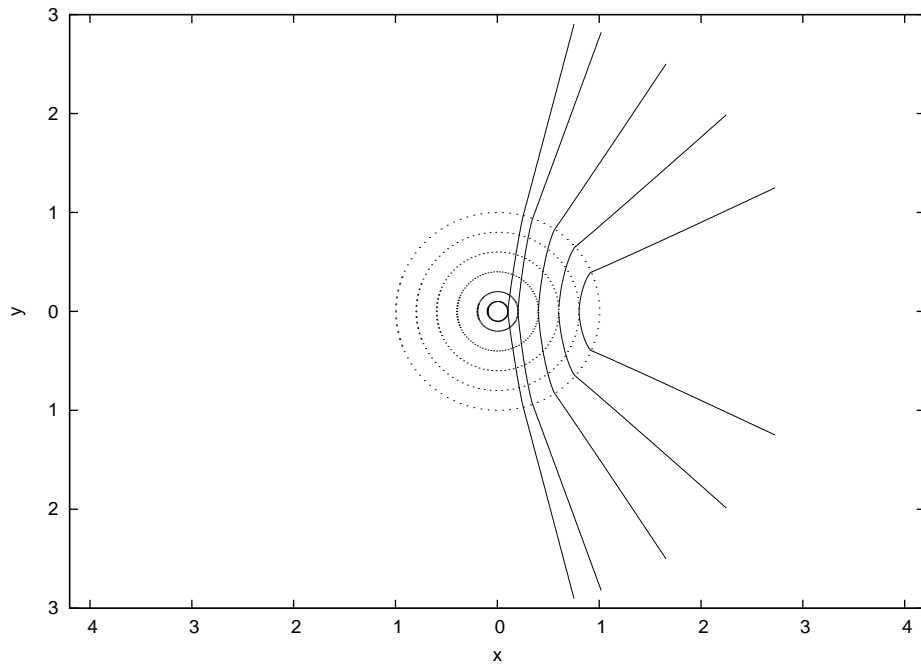


Figura 2.6: Órbitas para geodésicas nulas no radiales tomando $n = 1/2$ y los valores de las constantes consignados en la tabla 2.2.

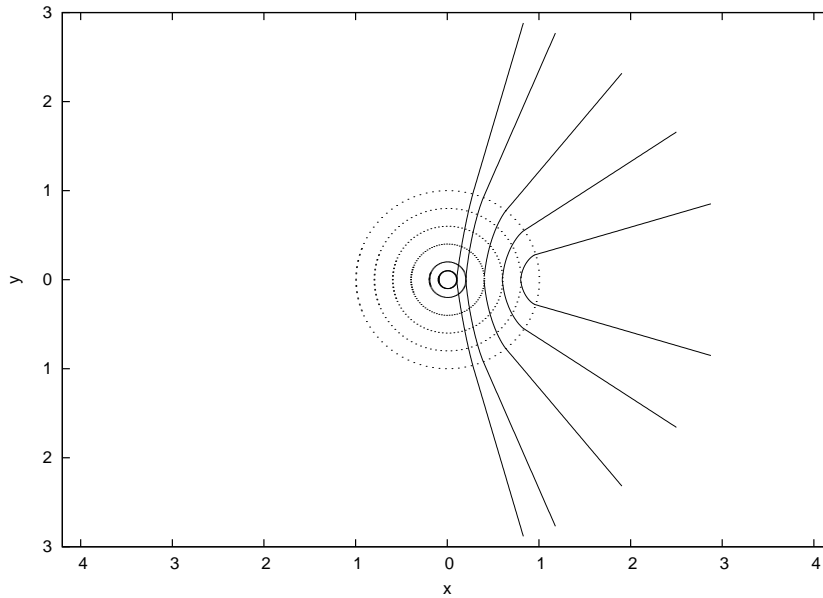


Figura 2.7: Orbitas para geodésicas nulas no radiales tomando $n = 1$ y los valores de las constantes consignados en la tabla 2.2.

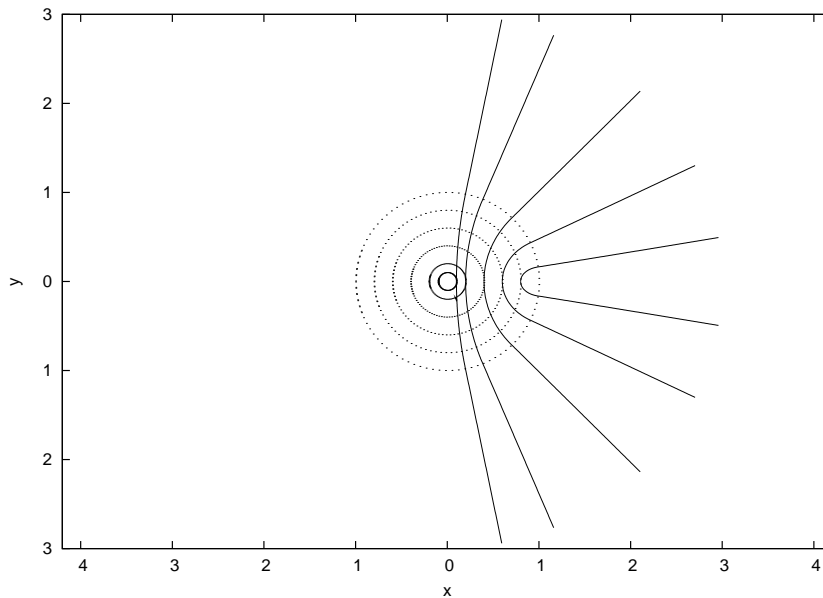


Figura 2.8: Orbitas para geodésicas nulas no radiales tomando $n = 2$ y los valores de las constantes consignados en la tabla 2.2.

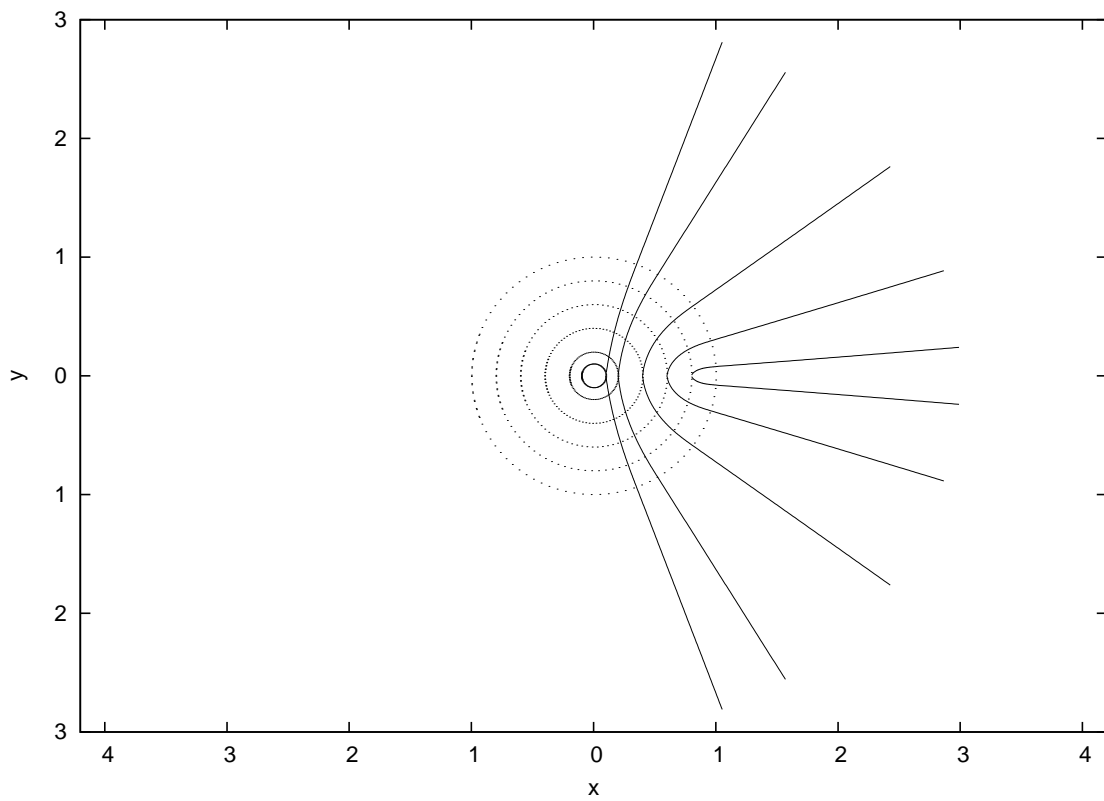


Figura 2.9: Orbitas para geodésicas nulas no radiales tomando $n = 3$ y los valores de las constantes consignados en la tabla 2.2.

Capítulo 3

CONCLUSIONES

En este trabajo se obtuvieron las ecuaciones que gobiernan las trayectorias de las partículas en presencia de un campo gravitacional estático y axialmente simétrico: un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no-lineales. Posteriormente se demostró que las ecuaciones se pueden reducir a ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables, tomando la constantes de movimiento, utilizando el formalismo Lagrangiano y reduciendolas al plano ecuatorial. Las expresiones obtenidas son generales, pues tomando $2\mathcal{L} = 0$ en cada una de ellas se obtienen las ecuaciones para geodésicas nulas, mientras que las geodésicas temporales se obtienen tomando $2\mathcal{L} = -1$; igualmente, las expresiones son válidas para geodésicas radiales, tomando $L = 0$, o para geodésicas no-radiales, tomando $L \neq 0$.

Las expresiones generales se solucionaron para el caso particular de una familia de discos tipo Bonnor y Sackfield, tanto dentro como fuera del disco, y para geodésicas nulas y temporales. Para ello, se tomo primero el caso especial en que la trayectoria es radial para un rayo de luz. Encontrando que un fotón que se mueve en dirección radial se demora un tiempo infinito en alcanzar el centro de la galaxia. Véase figura (2.2)

Por otra parte, para solucionar la ecuación diferencial de la órbita (1.45), se realizó un análisis cualitativo del potencial efectivo que genera un campo tipo Bonnor-Sackfield (2.42), nuevamente para dentro y fuera del disco, y para geodésicas nulas y temporales. De lo cual se concluyó de manera general que por la forma del potencial (figuras 2.3, 2.4, 2.5) que no es posible tener órbitas circulares ecuatoriales en un espacio-tiempo de Bonnor-Sackfield. Además, se demostró que la partícula tiene un punto de retroceso en $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{min}$; es decir, la partícula viene desde el infinito hasta $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{min}$ y se aleja de nuevo al infinito.

Para terminar, una vez hecho este análisis, se solucionó (1.45). Esta ecuación tiene solución analítica dentro de la fuente sólo cuando la relación $(M/a)^2$ en un número par, en los demás casos se solucionó en forma general por medio de métodos numéricos, bajo la condición inicial dada por (2.54). Para el exterior del disco la ecuación no tiene solución analítica para ningún valor de $(M/a)^2$, por lo que se utilizó nuevamente métodos numéricos para solucionarla, esta vez bajo la condición inicial $\varphi(\tilde{\rho}_{min}) = 0$. Se encontró que el comportamiento general de la órbita de la partícula es igual para geodésicas nulas y temporales, como se puede ver en las gráficas (2.6), (2.7), (2.8) y (2.9). Claramente se vio que los resultados concordaban con el análisis cualitativo.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ABRAMOVITZ, M. and STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied Mathematics Series. 55 (AMS-55), National Bureau of Standards, U. S. Department of Commerce (1978).
- [2] ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press. Third edition (1985).
- [3] BATEMAN, H. *Partial Differential Equations*. Dever (1944).
- [4] BONNOR, W. A. and SACKFIELD, *The Interpretation of Some Spheroidal Metrics*. Commun. Math. Phys. **8**,338 (1968).
- [5] CHANDRASEKHAR, S. *The Mathematical Theory of Black Hole*. Oxford University Press (1998).
- [6] DEMIDOVICH, *Análisis Matemático*. Editorial Mir, Moscu. Sexta Edición (1977)
- [7] GOLDSTEIN, *Mecánica Clásica*. Editorial Reverté. Segunda Edición (1998).
- [8] GRADSHTEYN, I. S. and RYZHIK, I. M. *Table of integrals, Series, and Products*. Academic Press New York and London. Fourth edition. (1965)

- [9] KRAMER, D., STEPHANI, H., HERLT, E., and MACCALLUM, M. *Exact Solutions of Einstein's Fields Equations*. Cambridge University Press, (1980).
- [10] MARION, *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas*. Editorial Reverté. Segunda Edición (1995)
- [11] MORGAN, T. and MORGAN, L. *The Gravitational field of disk*. Phys. Rev. **183** (1097).
- [12] MORSE, P.M. and FESBACH, H. *Methods of Theoretical Physics*. Mc Graw Hill, New York (1953).
- [13] RAMOS, J. *Solución General Estática Axialmente Simétrica de las Ecuaciones de Einstein en el Vacío en coordenadas Esferoidales Generalizadas*. Universidad Industrial de Santander. Trabajo de Grado en Física (2000).
- [14] SHUTZ, B. F. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press (1985).
- [15] VORHEES, B. H. *Static Axially Symmetric Gravitational Fields*. Phys. Rev. D **2** 2219.
- [16] WEYL, H. *Bemerkung Über Axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen*. Ann. Physik. **59**, 185(1919).
- [17] ZIPOY, D. M. *Topology of Some Spheroidal Metrics*. Journal Math. Phys. **7**, 1137 (1966).