

Transformación de Fourier fraccionaria en el espacio de Minkowski

Pedro José Albarracín Vargas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2025

Transformación de Fourier fraccionaria en el espacio de Minkowski

Pedro José Albarracín Vargas

Matemático

Trabajo de Grado para optar al título de

Magíster en Matemática aplicada

Director

Yezid Torres Moreno

Dr. en Óptica y Tratamiento de la Señal

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2025

Dedicatoria

A mis padres, por su invaluable apoyo desde mis primeros pasos en el pregrado. Su consejo ha sido el cimiento firme de cada decisión que he tomado a lo largo de mi vida.

Agradecimientos

A mi familia, por acompañarme a la distancia y respaldar mi crecimiento profesional con tanto tacto. A mi director, por moldear mi criterio académico y por su dedicación excepcional a este trabajo. A mis colegas y profesores en el pasado, por ofrecerme enseñanzas de vida que han justificado mis decisiones como profesional y ciudadano. A todas las personas mencionadas, no solo inspiraron este logro orientado a la divulgación del conocimiento, sino que también contribuyeron, directa o indirectamente, con su ejemplo, su apoyo intelectual y su confianza en la validez de este propósito.

Tabla de Contenido

Introducción	14
1. Preliminares	17
1.1. Espacios vectoriales	17
1.2. Espacio normado	18
1.3. Espacio con producto interno.	20
1.4. Bases ortonormales	21
2. Teoría de Distribuciones	28
2.1. Motivación	28
2.2. Espacio de distribuciones	30
2.3. Operaciones básicas de distribuciones	34
2.3.1. Adición	34
2.3.2. Producto escalar	35
2.3.3. Traslación	36
2.3.4. Transposición	36
2.3.5. Cambio de escala	37
2.3.6. Producto de distribuciones	37
2.3.7. Derivada de una distribución	38

TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONARIA EN EL ESPACIO DE MINKOWSKI	6
2.3.8. Convergencia en el espacio \mathcal{D}'	40
2.3.9. Distribuciones en n dimensiones	43
2.3.10. Producto directo de dos distribuciones	45
3. Transformación de Fourier fraccionaria	49
3.1. Operadores lineales	49
3.2. Transformada de Fourier fraccionaria de algunas funciones conocidas	57
3.2.1. Transformada de Fourier fraccionaria n -dimensional	59
4. Relatividad Especial	64
4.1. Transformación de Lorentz	64
4.2. Diagramas de Minkowski	68
5. Transformada de Fourier fraccionaria en relatividad especial	75
5.0.1. Transformada de Fourier fraccionaria de orden uno bidimensional en relatividad especial	75
5.0.2. Transformada de Fourier fraccionaria de cualesquier orden bidimensional en relatividad especial	86
6. Conclusiones	100
Referencias Bibliográficas	101
Anexos	105

Lista de Figuras

Figura 1.	Ejemplo de algunas funciones $\varepsilon\Pi(\varepsilon x)$ que se acercan al impulso centrado en el origen.	29
Figura 2.	Gráfica de las distribuciones delta de Dirac y el peine de Dirac.	33
Figura 3.	La función de Heaviside $H(x)$.	39
Figura 4.	Representación gráfica de la distribución bidimensional $\Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$. Evidentemente tiene altura uno en el interior del rectángulo y cero en el exterior.	47
Figura 5.	Representación de algunas distribuciones en dos dimensiones.	49
Figura 6.	Módulo y fase de la transformada de Fourier fraccionaria de la función rectangular para diferentes valores de a . Algunas de las fases ($a = 0.25, 0.5, 0.75$) no están desenvueltas.	58
Figura 7.	Ejemplos del módulo y fase de las distribuciones ${}^2\delta(y)$ y ${}^2\delta(x)$ simulados sobre una malla de tamaño $(512, 512)$ usando la aproximación del caso especial (2.3.9).	62
Figura 8.	Coordenadas tiempo-espacio de un suceso puntual dado en dos sistema inerciales diferentes.	66
Figura 9.	Diagramas de Minkowski para los observadores S y S' con su calibración de ejes.	70
Figura 10.	Diagramas de Minkowski para dos observadores con orígenes diferentes.	72

- Figura 11. Diagramas de Minkowski en el espacio directo y en el espacio recíproco de Fourier estándar según el observador S y S' , incluyendo las líneas de luz vistas por ambos observadores S , $ct = \pm x$ y S' , $ct' = \pm x'$. 78
- Figura 12. Diagramas de Minkowski según el observador S y S' . 82
- Figura 13. Simulaciones de la señal, $\delta_{(0,ct_0)}$ en el sistema S , como un pulso discreto de altura uno, módulo y fase espectral desenvuelta, definidas sobre una malla de tamaño 512×512 puntos. Estas visualizaciones son vistas como gráficas de contorno y en 3D. 83
- Figura 14. Simulaciones de la señal, $\delta_{(-\gamma^2 ct_0, \gamma ct_0)}$ el sistema S' , como un pulso discreto de altura uno, módulo y fase espectral desenvuelta, definidas sobre una malla de tamaño 512×512 puntos. Estas visualizaciones son vistas como gráficas de contorno y en 3D. 84
- Figura 15. Representación de la señal $\delta_{(0,ct_0)}$, módulo y fase en el dominio espectral fraccionario de orden $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $\theta = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Esta simulación es realizada utilizando el resultado teórico (5.0.1). 88
- Figura 16. Representación de la señal $\delta_{(a,b)}(x', ct')$, módulo y fase en el dominio espectral fraccionario de orden $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $\theta' = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Esta simulación es realizada utilizando el resultado teórico (5.0.1). 90
- Figura 17. Representación de la señal, módulo y fase en el dominio espectral fraccionario de orden $a = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ y $\theta = (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$. Esta simulación es realizada utilizando el resultado teórico (86). 92

Figura 18. De izquierda a derecha: La primera gráfica representa la señal ${}^2\delta(ct' + cx'/v)$ según el observador S' . Luego se muestra el módulo y fase envuelta en el dominio fraccionario de orden $a = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ sobre la malla de tamaño 512×512 puntos y recorte $(156, 356) \times (156, 356)$. 94

Figura 19. Representación de la señal, módulo y fase en el dominio espectral fraccionario de orden $a = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y $\theta = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$. 96

Figura 20. Representación de la señal, módulo y fase en el dominio espectral fraccionario de orden $a = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ y $\theta = (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ ilustradas como gráficas de contorno y en 3D. 98

Figura 21. Representación de la señal, módulo y fase en el dominio espectral fraccionario de orden $a = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ y $\theta = (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ ilustradas como gráficas de contorno y en 3D. 99

Lista de Tablas

Tabla 1.	Propiedades de los polinomios de Hermite.	27
Tabla 2.	Propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria, parte I.	56
Tabla 3.	Transformada de Fourier fraccionaria de algunas funciones.	57
Tabla 4.	Representación de los objetos geométricos en el diagrama de Minkowski sobre el espacio directo y el espacio recíproco de Fourier estándar.	77
Tabla 5.	Propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria, parte II.	105
Tabla 6.	Propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria de orden uno.	106

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria	105
Apéndice B. Algunas propiedades adicionales	106
Apéndice C. Transformada de Fourier de una función de la invariante de Lorentz	107
Apéndice D. Implementación de la transformada de Fourier fraccionaria en Python.	113

Resumen

Título: Transformación de Fourier fraccionaria en el espacio de Minkowski *

Autor: Pedro José Albarracín Vargas **

Palabras Clave: Tff - Transformada de Fourier de orden fraccionario, Relatividad Especial, Distribución delta de Dirac, Invariante de Lorentz.

Descripción: Este trabajo estudia la transformada de Fourier de orden fraccionario desde una nueva perspectiva, al proponer por primera vez, en nuestro conocimiento, su aplicación en el espacio de Minkowski. Para ello, se combinan herramientas de la teoría de distribuciones y la relatividad especial. Se analiza el comportamiento espectral de señales idealizadas modeladas mediante distribuciones que satisfacen la condición de la invariante de Lorentz. En particular, se estudia la acción de la transformada fraccionaria sobre eventos puntuales y distribuciones lineales percusionales, explorando la estructura del módulo y de la fase espectral para distintos órdenes, incluyendo la transformada de Fourier estándar. En el caso estándar, a través de simulaciones numéricas en mallas bidimensionales, se muestra que el intervalo de frecuencia espacio-tiempo permanece invariante bajo transformaciones que relacionan los ejes de frecuencia espacial - frecuencia para dos observadores inerciales diferentes. En el caso fraccionario, la fase espectral resultante exhibe superficies cuádricas como expresión geométrica de la información contenida en la señal original. Estos resultados permiten establecer una correspondencia formal entre la transformada de Fourier fraccionaria y simetrías fundamentales del espacio-tiempo en relatividad especial, abriendo nuevas vías de investigación en el análisis espectral aplicado en física teórica.

* Trabajo de investigación

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Yezid Torres Moreno, Dr.

Abstract

Title: Fractional Fourier transform in Minkowski space.

Author: Pedro José Albarracín Vargas **

Keywords: FrFT - Fractional-order Fourier Transform, Special Relativity, Dirac Delta Distribution, Lorentz Invariant.

Abstract

This work studies the fractional-order Fourier transform from a new perspective, by proposing for the first time, to our knowledge, its application in Minkowski representation. To this goal, tools from distribution theory and special relativity are combined. The spectral behavior of idealized signals modeled using distributions that satisfy the Lorentz invariance condition is analyzed. In particular, the action of the fractional Fourier transform on point-like events and impulsive linear distributions is studied, exploring the structure of the spectral magnitude and phase for various orders, included the standard Fourier transform. In the standard case, numerical simulations on two-dimensional grids shows that the frequency space-time interval remains invariant under transformations that relate the spatial-frequency and frequency axes for two different inertial observers. In the fractional case, the resulting spectral phase exhibits quadric surfaces as a geometric expression of the information contained in the original signal. These results establish a formal correspondence between the fractional Fourier transform and the fundamental symmetries of space-time in special relativity, opening new perspectives of research in spectral analysis applied to theoretical physics.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Yezid Torres Moreno, Dr.

Introducción

La transformación de Fourier ha sido, desde sus orígenes, una herramienta esencial en el análisis de señales, la resolución de ecuaciones diferenciales y la descripción de fenómenos físicos en dominios frecuenciales de tiempo o espacio. Su formulación clásica, basada en integrales sobre funciones del espacio L_2 , ha sido ampliada mediante la teoría de distribuciones, desarrollada originalmente por Schwartz (1978), y presentada de forma accesible y rigurosa en obras como Lighthill (1958) y Zemanian (1987). Este formalismo permite extender el análisis armónico a funciones generalizadas como la distribución delta de Dirac, fundamentales en física teórica.

Dentro de este marco extendido, la transformada de Fourier de orden fraccionario ha surgido como una generalización uniparamétrica de la transformada de Fourier estándar, introducida por Namias (1980) y ampliamente desarrollada por McBride y Kerr (1987), Mendlovic y Ozaktas (1993), I. Zayed (1998), Ozaktas *et al.* (2001), entre otros. Esta transformada permite representar señales en dominios intermedios entre el tiempo y la frecuencia, incorporando un parámetro de orden que confiere mayor flexibilidad en la caracterización espectral. Sus aplicaciones han sido exploradas tanto en óptica como en procesamiento de señales Almeida (1994), abriendo nuevas vías para el estudio de fenómenos dependientes de fase y localización.

En paralelo, la relatividad especial, formulada sobre la geometría del espacio de Minkowski, ha transformado la comprensión del espacio y el tiempo como una única entidad cuatridimensional (coordenada espacial (x,y,z) y temporal t). Las herramientas del análisis funcional y la transformada de Fourier estándar se han utilizado tradicionalmente en marcos euclidianos, por lo que su adaptación a entornos relativistas requiere una revisión de sus propiedades invariantes. Textos como Misner *et al.* (1973), Resnick (1968) y French (2017), detallan la estructura métrica del espacio-tiempo y la necesidad de que cualquier formulación física respete la invariancia del intervalo de Lorentz.

El presente trabajo tiene como propósito explorar rigurosamente la transformada de Fourier de orden fraccionario en el espacio de Minkowski, articulando formalismos de la teoría de distribuciones y la relatividad especial. Se analiza cómo el comportamiento espectral de señales o eventos que cumplan la invariante de Lorentz (ver Wurm *et al.* (2003)), representadas mediante distribuciones, se ve afectado por transformaciones de Lorentz. Así mismo, se estudia la conservación del intervalo de frecuencia espacio-tiempo frecuencial bajo dichos cambios, estableciendo una analogía formal entre el dominio físico y su contraparte recíproca.

Para desarrollar esta propuesta, el manuscrito inicia con un capítulo preliminar donde se introducen los conceptos fundamentales del análisis funcional: espacios vectoriales normados, productos internos, espacios de Hilbert y bases ortonormales, con especial atención a las funciones Hermite-Gaussianas, que desempeñan un papel esencial en el análisis espectral. Posteriormente, en el segundo capítulo, se presenta la teoría de distribuciones, abordando el espacio de funciones test, su dual, y operaciones como derivación, traslación y escalamiento, así como ejemplos relevantes como el peine de Dirac y distribuciones definidas sobre líneas percusionales.

Una vez establecido este marco, en el tercer capítulo se define la transformada de Fourier de orden fraccionario desde un punto de vista algebraico y espectral, destacando su interpretación como operador lineal, sus funciones propias y la generalización a dimensiones superiores. Como ejemplificación de esta teoría, se toma el caso especial de líneas percusionales que pasan por el origen tanto en su módulo como la fase fraccionaria. En el cuarto capítulo, se introduce la relatividad especial, con énfasis en la métrica de Minkowski, los diagramas espacio-temporales y las transformaciones de Lorentz, que permiten interpretar geoméricamente las relaciones entre observadores inerciales para la configuración estándar, es decir, observadores que coinciden en el origen, y también para el caso contrario.

El núcleo del trabajo reside en el quinto capítulo, centrada en el estudio de la transformada fraccionaria aplicada en el espacio de Minkowski. Allí se describe su acción sobre distribuciones que cumplen la condición de la invariante de Lorentz, eventos puntuales y líneas percusionales. Se representan visualmente tanto el módulo como la fase del espectro resultante bajo distintos órdenes fraccionarios. Se presentan resultados obtenidos mediante simulaciones nu-

méricas en mallas bidimensionales, en los cuales se observa la conservación del intervalo de frecuencia espacio-tiempo frecuencial y la aparición de superficies cuádricas como expresión geométrica de la fase fraccionaria transformada.

1. Preliminares

1.1. Espacios vectoriales

Definición 1.1.1. Un **espacio vectorial** sobre un campo K es un conjunto de objetos en el cual las operaciones de adición y multiplicación escalar han sido definidos tal que, para cualesquier vector f, g, h que pertenecen a este espacio y para cualesquier escalares α y β , se cumple:

1. La suma $f + g$ es también un miembro del espacio vectorial,
2. $f + g = g + f$,
3. $f + (g + h) = (f + g) + h$,
4. Existe el vector nulo denotado por 0 tal que $f + 0 = 0$,
5. Existe el opuesto aditivo de f denotado por $-f$ tal que $f + (-f) = 0$,
6. El producto αf es también un elemento del espacio vectorial,
7. $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$,
8. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$,
9. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$,
10. Existe un escalar unitario denotado por 1 tal que $1f = f$.

Los espacios vectoriales son también conocidos como **espacios de funciones**. En lo que sigue, trabajaremos principalmente con espacios vectoriales complejos, cuyos elementos son funciones de valores en \mathbb{C} . Los escalares, que denotaremos a partir de ahora mediante letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, son valores complejos, es decir, pertenecen al cuerpo $K = \mathbb{C}$.

Caso especial 1.1.1. Espacio \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n .

El espacio conformado por elementos x de n componentes reales, es un espacio vectorial con las operaciones usuales en el conjunto \mathbb{R}^n . Para el conjunto \mathbb{C}^n se definen las operaciones usuales anteriores extendidas a los valores complejos.

Caso especial 1.1.2. El conjunto de señales o funciones de valor complejo \mathcal{F} , constituye un espacio vectorial.

Caso especial 1.1.3. $C[a, b]$.

El conjunto $C[a, b]$ de todas las funciones continuas reales sobre el intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas como

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R}.)$$

Aquí, estas operaciones algebraicas cumplen la condición de cerradura, es decir, $f + g \in C[a, b]$ y $\alpha f \in C[a, b]$.

1.2. Espacio normado

Definición 1.2.1. Una **norma** asocia un escalar $\|f\|$ para todo elemento f de un espacio vectorial tal que, para cualesquier vectores f, g y cualquier escalar α se cumple que:

1. $\|f\| \geq 0$, con igualdad si y solo si $f = 0$,
2. $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$,
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (desigualdad triangular).

Un espacio vectorial dotado de una norma, es llamado un **espacio vectorial normado**.

Caso especial 1.2.1. Espacio Euclidiano \mathbb{R}^n o espacio unitario \mathbb{C}^n . Para el espacio \mathbb{R}^n , su norma está definida como

$$\|x\| = \left(\sum_{j=0}^n x_j^2 \right)^{1/2},$$

para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. El espacio unitario, tiene norma definida como

$$\|x\| = \left(\sum_{j=0}^n |x_j|^2 \right)^{1/2},$$

con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ y $|x_j|$ es el módulo del valor complejo para cada $1 \leq j \leq n$.

Caso especial 1.2.2. El conjunto $C[a, b]$ con norma definida como

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

es un espacio normado.

Caso especial 1.2.3. Espacios $L_p[a, b]$.

Se dice que $(L_p, \|\cdot\|_{L_p})$ con $p \geq 1$, es el espacio vectorial¹ normado de funciones reales integrables o sumables sobre el intervalo $[a, b]$, es decir, son todas las funciones f medibles (Véase Rodier (1971)) tales que la norma está dada por :

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty. \quad (1)$$

¹ Esto se debe a la desigualdad de Minkowski para probar la cerradura de la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector, (Rudin, 1987, pág. 66).

1.3. Espacio con producto interno.

Definición 1.3.1. Un **producto interno** asocia a un escalar $\langle f, g \rangle$ para cualesquier dos elementos f y g de un espacio vectorial sobre un campo conmutativo K (\mathbb{R} o \mathbb{C}), tal que para cualesquier vectores f, g, h y cualquier escalar α se cumple que (donde el superíndice $*$ denota la conjugación compleja):

1. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$,
2. $\langle f, f \rangle$ es real y ≥ 0 , con igualdad si y solo si $f = 0$,
3. $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$,
4. $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$.

Un espacio vectorial para el cual un producto interno es definido se dice que es un espacio con producto interno. Dos vectores donde su producto interno es cero, son **ortogonales** entre sí. Ahora, se define el siguiente producto interno para un espacio de funciones de valor complejo:

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f^*(u)g(u)du. \quad (2)$$

Si un producto interno ha sido definido, una norma puede ser definida como

$$\|f\| \equiv \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Caso especial 1.3.1. Espacio $L_2[a, b]$.

La norma $\|\cdot\|_{L_2}$ para este espacio, es una norma inducida por el producto interno como (2).

Un espacio con producto interno que satisface como condición adicional, conocido como **completitud** (Véase Kreys-

zig (1991)), es llamado **espacio de Hilbert**. El espacio de Hilbert de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ con producto interno como en la ecuación (2), tiene norma $\|\cdot\|_{L_2}$, como en el caso especial 1.2.3 con $p = 2$.

1.4. Bases ortonormales

Una **combinación lineal** de vectores v_1, \dots, v_n de un espacio vectorial X es una expresión de la forma

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n,$$

donde α_i son escalares para $1 \leq i \leq n$.

Para un subconjunto no vacío $M \subset X$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de M es conocido como **span** de M , escrito como **span** M . Una **base** para X es un conjunto linealmente independiente de vectores tal que genere el espacio X . El espacio X tiene dimensión finita si tiene una base finita.

Definición 1.4.1. Sea X un espacio normado. Un conjunto $M \subset X$ es una **base ortonormal completa**¹ sii la adherencia de M es X , $\overline{\text{span } M} = X$, la norma para cada elemento de M es 1 y es un conjunto ortogonal, es decir, para cada par $x, y \in M$

$$\langle x, y \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

donde $\delta_{i,j}$ es la función delta de Kronecker.

¹ También conocido como conjunto ortonormal *total*.

² Conjunto de adherencia o clausura, es uno de los conceptos básicos asociado a espacios topológicos que puede consultarse en Munkres (2000).

Teorema 1.4.1 (Teorema de Pitágoras.). *Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un sistema finito ortogonal en el espacio H , entonces*

$$\left\| \sum_{n=1}^N v_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \|v_n\|^2.$$

Demostración. Como $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N v_n \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^N v_i, \sum_{j=1}^N v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \|v_i\|^2. \end{aligned}$$

□

Lema 1.4.2. Si $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ es un conjunto finito ortonormal en el espacio H , entonces

$$\sum_{n=1}^N |\langle a, v_n \rangle|^2 \leq \|a\|^2, \quad (3)$$

para todo $a \in H$.

Demostración. Sea el coeficiente $\gamma_n = \langle a, v_n \rangle$, con $n = 1, 2, \dots, N$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left\| a - \sum_{n=1}^N \gamma_n v_n \right\|^2 \\
 0 &\leq \left\langle a - \sum_{n=1}^N \gamma_n v_n, a - \sum_{n=1}^N \gamma_n v_n \right\rangle && (\|x\|^2 = \langle x, x \rangle) \\
 &\leq \langle a, a \rangle - \sum_{n=1}^N \gamma_n \langle v_n, a \rangle - \sum_{n=1}^N \overline{\gamma_n} \langle a, v_n \rangle + \sum_{n=1}^N \langle \gamma_n v_n, \gamma_n v_n \rangle \\
 &\leq \|a\|^2 - \sum_{n=1}^N \gamma_n \langle v_n, a \rangle - \sum_{n=1}^N \overline{\gamma_n} \langle a, v_n \rangle + \sum_{n=1}^N |\gamma_n|^2 \langle v_n, v_n \rangle \\
 &\leq \|a\|^2 - \sum_{n=1}^N |\gamma_n|^2,
 \end{aligned}$$

para todo a en H , lo que prueba la desigualdad (3). □

Teorema 1.4.3 (Desigualdad de Bessel). *Si X es un conjunto ortogonal en H , entonces*

$$\sum_{x \in X} |\langle a, x \rangle|^2 \leq \|a\|^2, \tag{4}$$

para todo a en H (Abuabara y Lesmes (2010)).

Demostración. Por el lema anterior, para cualquier subconjunto finito $F \subset X$, se tiene que

$$\sum_{v \in F} |\langle a, v \rangle|^2 \leq \|a\|^2,$$

luego, tomando el valor supremo sobre los subconjuntos finitos de X , conlleva a la desigualdad de Bessel (4). □

Teorema 1.4.4. Sea un espacio de Hilbert H y un conjunto ortonormal $M = \{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de H . Las siguientes relaciones son equivalentes:

1. M es completo.

2. Para todo $x \in H$,

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

3. Si para $x \in H$, $\langle x, e_n \rangle = 0, \rightarrow x = 0$.

4.

$$\sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad (\text{Identidad de Parseval})$$

Caso especial 1.4.1. El conjunto $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ en el espacio $C[0, 2\pi]$ es un conjunto ortonormal pero no es completo. Si los elementos $\{u_n\}_{n \geq 0}$ del conjunto cumplen que

$$\langle u_n, u_m \rangle = \int_0^{2\pi} u_n u_m dx = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n. \end{cases}$$

Si se toma cualquier función impar en $C[0, 2\pi]$, como la función idéntica $f(x) = x$, entonces $\langle x, u_n \rangle = 0, n \geq 0$, pero $\|f\| \neq 0$. Así, como no cumple la identidad de Parseval, por el Teorema (1.4.4), el conjunto no es completo.

Caso especial 1.4.2. Polinomios de Hermite. Sea el espacio normado $(L_2[-\infty, +\infty], \|\cdot\|_{L_2})$ y la sucesión de funciones en este espacio, definida como

$$w(x) = e^{-\pi x^2}, \quad xw(x), \quad x^2w(x), \dots$$

es una base ortonormal completa. Al usar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt¹, se encuentra el conjunto ortonormal de funciones **Hermite-Gaussianas** $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definido como

$$\varphi_n = A_n H_n(\sqrt{2\pi}x) e^{-\pi x^2}, \quad A_n = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}}, \quad (5)$$

donde H_n denota el **polinomio de Hermite de grado n** (Véase Tabla 1).

Para probar que $\{\varphi_n\}$ es ortonormal, se consideran $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$ y se define la integral

$$I = \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A_n H_n(\sqrt{2\pi}x) A_m H_m(\sqrt{2\pi}x) e^{-2\pi x^2} dx.$$

Si $n \geq m$,

$$I = (-1)^n A_n A_m \int_{-\infty}^{\infty} H_m(\sqrt{2\pi}x) (2\pi)^{-n/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-2\pi x^2} dx,$$

¹ Este proceso es extendido para conjuntos de dimensión infinita en la Proposición 2.2.5. en Abuabara y Lesmes (2010)

integrando por partes m veces y usando la Propiedad 4 de la Tabla 1, se obtiene

$$\begin{aligned}
 I &= A_n A_m H_m(\sqrt{2\pi}x) (2\pi)^{(1-n)/2} \frac{dx^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-2\pi x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-1)^n (2\pi)^{(1-n)/2} A_n A_m 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1} \\
 &\quad (\sqrt{2\pi}x) \frac{dx^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-2\pi x^2} dx \\
 &= (-1)^{n+1} (2\pi)^{(1-n)/2} A_n A_m 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(\sqrt{2\pi}x) \frac{dx^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-2\pi x^2} dx \\
 &\quad \vdots \\
 &= \frac{(-1)^m (-1)^n \sqrt{2} 2^m m!}{\sqrt{2^{n+m} n! m!}} (2\pi)^{(m-n)/2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0(\sqrt{2\pi}x) \frac{dx^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-2\pi x^2} dx \\
 &= \frac{(-1)^m (-1)^n \sqrt{2} \sqrt{2^m m!}}{\sqrt{2^n n!}} (2\pi)^{(m-n)/2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0(\sqrt{2\pi}x) \frac{dx^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-2\pi x^2} dx \\
 &= \frac{(-1)^{n+m} \sqrt{2} \sqrt{2^m m!}}{\sqrt{2^n n!}} (2\pi)^{(m-n)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-2\pi x^2} dx.
 \end{aligned}$$

Si $m < n$, se integra una vez más,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-2\pi x^2} dx = \frac{dx^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} \frac{e^{-2\pi x^2}}{-4\pi x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

luego la integral I es cero. Si $n = m$,

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{(-1)^{2n} \sqrt{2} \sqrt{2^n n!}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2^n n!}} (2\pi)^{(n-n)/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi x^2} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi x^2} dx \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Por lo anterior, $I = \delta_{nm}$. Este conjunto también es completo en el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$. Esto último es visto con detalle en (Courant y Hilbert, 1962, p. 91).

Tabla 1

Propiedades de los polinomios de Hermite.

-
1. $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x, \dots$
 2. $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$
 3. $H_n(\sqrt{2\pi}x) = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{n/2}} e^{\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-2\pi x^2}$
 4. $\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x)$
 5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\alpha}}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) = \sqrt{1 - e^{2i\alpha}} \exp \left[\frac{2xye^{i\alpha} - e^{2i\alpha}(x^2 + y^2)}{1 - e^{2i\alpha}} \right]_1$
 6. $\pi^{-1/2} e^{-(x^2+y^2)/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) = \delta(x - y)$
-

¹ El símbolo δ hace referencia a la “función” de Dirac estudiada en el Capítulo 2.

En la Tabla 1 se resumen las propiedades algebraicas y diferenciales clave de los polinomios de Hermite, esenciales para el desarrollo posterior de este capítulo. Las primeras propiedades (1-3) describen la estructura general de estos polinomios, tanto en su forma estándar como en versiones escaladas, que resultarán particularmente útiles al analizar sistemas con parámetros normalizados. La propiedad 4 caracteriza el comportamiento diferencial de estos polinomios, mientras que las propiedades 5 y 6 proporcionan herramientas para manipular sumas y combinaciones de polinomios del mismo orden. Estas últimas serán especialmente relevantes cuando se estudian productos de funciones Gauss con polinomios de Hermite, operación frecuente en el cálculo de núcleos integrales y en la simplificación de expresiones dentro del espacio L_2 . Todo este marco teórico queda así preparado para su aplicación directa en la construcción de transformadas fraccionarias.

2. Teoría de Distribuciones

Este capítulo desarrolla la teoría de distribuciones en \mathbb{R} , estableciendo sus propiedades fundamentales y caracterizando la convergencia al delta de Dirac en \mathcal{D}' . Se mencionan teoremas clave que vinculan aproximaciones regulares (sucesiones en L_1) con distribuciones singulares, generalizando resultados a dimensiones superiores. Los ejemplos dados en este capítulo, servirán como soporte para los resultados finales.

2.1. Motivación

En el estudio de fenómenos físicos que involucran señales de impulso, como cambios instantáneos en voltajes eléctricos o fuerzas mecánicas, surge la necesidad de representar matemáticamente estas perturbaciones breves pero significativas en el tiempo. Tradicionalmente, se ha utilizado la función delta de Dirac $\delta(x)$ para describir estos impulsos, que es cero en todos los puntos excepto en $x = 0$, donde es infinitamente alta pero su integral es finita. Sin embargo, esta función plantea desafíos conceptuales y matemáticos al intentar definir su integral y manipularla en cálculos posteriores .

Para abordar este problema, se recurre a la teoría de distribuciones, que proporciona un marco matemático sólido para trabajar con funciones generalizadas, incluida la distribución delta de Dirac. Una forma efectiva de introducir esta teoría es mediante la aproximación de funciones rectangulares para representar señales de impulso. Sea $\Pi(x)$ la función conocida como **función rectangular** definida por:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (6)$$

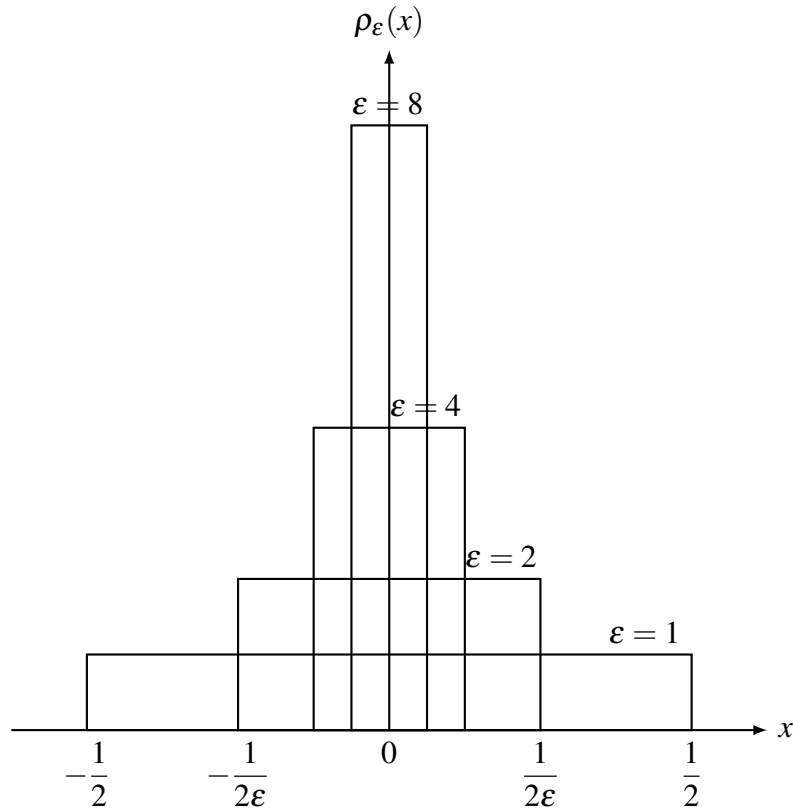


Figura 1. Ejemplo de algunas funciones $\epsilon\Pi(\epsilon x)$ que se acercan al impulso centrado en el origen.

Ahora, considere la función $\rho_\epsilon(x) = \epsilon\Pi(\epsilon x)$, como en la Figura 1, centrada en $x = 0$ con altura ϵ y anchura $\frac{1}{\epsilon}$. Esta función tiene un área unitaria, es decir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\epsilon(x) dx = 1,$$

para todo $\epsilon > 0$ se vuelve más estrecha y alta a medida que ϵ aumenta, concentrando su masa en $x = 0$. Matemáticamente, puede expresarse un impulso de corta duración como el límite de estas funciones rectangulares:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \rho_\epsilon(x) = \delta(x).$$

Más tarde, en el caso especial (2.3.8), se probará la convergencia en el sentido de distribución. Esta aproximación permite estudiar de manera más intuitiva y es consistente con los impulsos en cálculos y análisis, evitando las ambigüedades asociadas con la función delta de Dirac. Además, la teoría de distribuciones brinda herramientas para generalizar este enfoque a distribuciones más complejas y aplicaciones más amplias en matemáticas y física.

2.2. Espacio de distribuciones

Definición 2.2.1. El conjunto de funciones *test* $C^k(\Omega)$, es el espacio vectorial de funciones k veces continuamente diferenciables sobre un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, donde $k \in \mathbb{Z}^+$.

Definición 2.2.2. Sea una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. El conjunto

$$\text{sop } f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}} \quad (7)$$

es llamado el conjunto **soporte de f** .

Caso especial 2.2.1. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1, \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2-1}\right) & |x| < 1. \end{cases}$$

es una función test con soporte $\overline{(-1, 1)} = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Para $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} f(x) \\ f''(x) &= \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) f(x) \\ f'''(x) &= \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4} \right) f(x) \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= P_{2k}(x^{-1}) f(x), \end{aligned}$$

donde $P_{2k}(1/x)$ es un polinomio de grado $2k$ en $1/x$. Para el caso $k = 0$, por definición la propiedad es válida. Al calcular la $k + 1$ - derivada,

$$f^{(k+1)}(x) = e^{1/x} \frac{1}{x^2} (P_{2k}(1/x) - P_{2k+1}(1/x)).$$

El lado derecho es $e^{-1/x}$ veces un polinomio P de grado $2(k + 1)$ en $1/x$. Por lo anterior, $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$. El ejemplo anterior incluso está en un espacio más reducido, es una función del conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables denotado por $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. El espacio de funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto es denotado por $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ o también \mathcal{D} (Schwartz, 1978, p. 21). Note que el soporte del caso especial (2.2.1) es compacto¹, luego f también está en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definición 2.2.3. Una distribución T sobre \mathbb{R}^n es un funcional lineal continuo que tiene dominio el espacio vectorial de las funciones test \mathcal{D} . Es decir, T debe cumplir las siguientes propiedades:

Linealidad: Si T es una distribución, el escalar $\langle T, \varphi \rangle$ correspondiente a la función φ ,

¹ Todo intervalo cerrado y acotado es compacto en \mathbb{R} (Muñoz Quevedo, 2003, p. 156).

$$\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha\langle T, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T, \varphi_2 \rangle,$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$.

Continuidad: Si φ_k converge hacia φ en \mathcal{D} , entonces $\langle T, \varphi_k \rangle$ converge hacia $\langle T, \varphi \rangle$.

Definición 2.2.4. Denotamos por \mathcal{D}' el conjunto de todas las distribuciones, con la operación usual de suma y multiplicación por un escalar.

Caso especial 2.2.2. Distribuciones regulares. Toda función $f(x)$ *localmente sumable*, es decir, sumable en todo conjunto cerrado, también es una distribución, definida como:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

La linealidad se preserva por propiedades de la integral. Para $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}$ y $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\varphi_n \rightarrow \varphi$. Entonces

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle - \langle f, \varphi_n \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\varphi(x) - \varphi_n(x)]dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x)| \cdot |\varphi(x) - \varphi_n(x)|dx \\ &\leq \text{sop}|\varphi - \varphi_n| \cdot \int_a^b |f(x)|dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M && (M > 0) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

con $\text{sop} \varphi_n = [a, b]$.

Decimos que esta distribución es *regular*.

Ejemplo 2.2.1. Delta de Dirac. Considere el funcional lineal δ definido en el origen:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0),$$

y definido en el punto a :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Si $\{\varphi_n\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ es tal que $\varphi_n \rightarrow \varphi$, para un $\varphi \in \mathcal{D}$, también $\varphi_n(a) \rightarrow \varphi(a)$, que es $\delta_a(\varphi_n) \rightarrow \delta_a(\varphi)$. La propiedad de linealidad es evidente en este caso. Por lo anterior, el Delta de Dirac δ es una distribución.

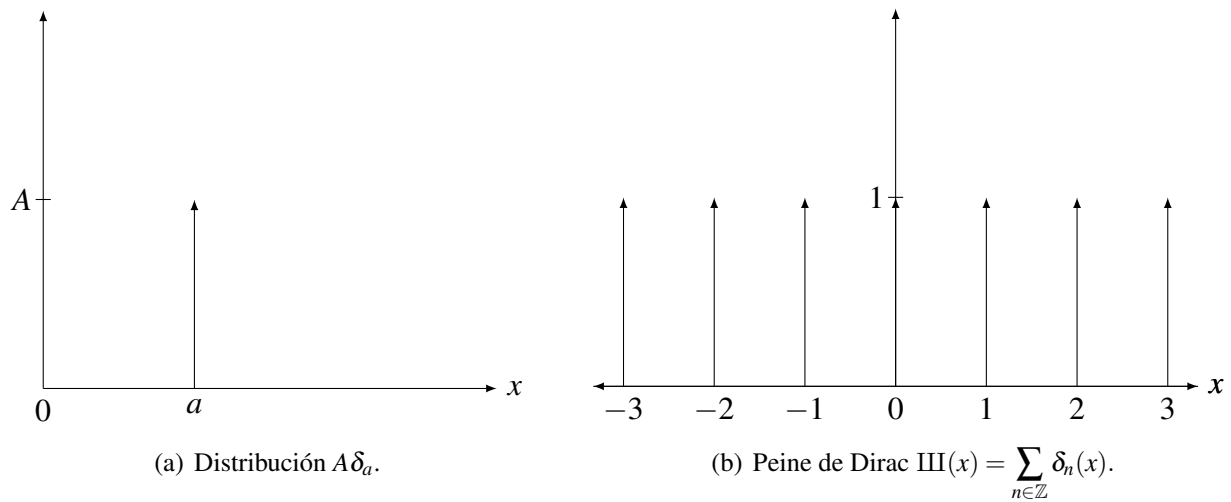


Figura 2. Gráfica de las distribuciones delta de Dirac y el peine de Dirac.

Por convención, se representará la distribución de Dirac $A\delta_a$ como en la Figura 2(a), por una flecha vertical de altura A en el punto $x = a$. Por supuesto, esta representación es puramente simbólica y no se debe confundir $A\delta_a$ con la función:

$$f(x) = \begin{cases} A, & x \neq a \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

El espacio de distribuciones \mathcal{D}' es un espacio vectorial (Véase la sección (2.3)), así cualquier combinación lineal de

distribuciones Delta es también una distribución. En particular, el **peine de Dirac** definido como

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) \quad (8)$$

visto en la Figura 2(b), es una distribución. Después, se ilustrarán estos casos en dos dimensiones.

Definición 2.2.5. Sean $f, g \in \mathcal{D}'$. Las distribuciones f y g son iguales si $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}$.

Definición 2.2.6. Para una distribución $T \in \mathcal{D}'$, el **soporte de T**, denotado por $\text{sop } T$, es el complemento del conjunto abierto más grande tal que T sea nulo, es decir, $\langle T, \varphi \rangle = 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}$.

Ejemplo 2.2.2. $\text{sop } \delta_a = \{a\}$, para $a \in \Omega$.

Si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \setminus \{a\})$, $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = 0$. El soporte de δ_a es el conjunto conformado por el punto $x = a$.

2.3. Operaciones básicas de distribuciones

2.3.1. Adición. Sean T y $S \in \mathcal{D}'$, la suma $S + T$ es otra distribución definida como:

$$\langle T + S, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle, \quad (9)$$

Para toda $\varphi \in \mathcal{D}$ Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \langle T + S, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle &= \langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle + \langle S, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle \\ &= \alpha\langle T, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T, \varphi_2 \rangle + \alpha\langle S, \varphi_1 \rangle + \beta\langle S, \varphi_2 \rangle \\ &= \alpha(\langle T, \varphi_1 \rangle + \langle S, \varphi_1 \rangle) + \beta(\langle T, \varphi_2 \rangle + \langle S, \varphi_2 \rangle) \\ &= \alpha\langle T + S, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T + S, \varphi_2 \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, $T + S$ es un funcional lineal.

2.3.2. Producto escalar. Análogamente, podemos definir el producto de una distribución T por un escalar λ :

$$\langle \lambda T, \varphi \rangle := \lambda \langle T, \varphi \rangle, \quad (10)$$

para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in \mathcal{D}$, se tiene

$$\langle \lambda T, \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 \rangle = \langle \lambda T, \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 \rangle = \lambda (\langle \alpha T, \varphi_1 \rangle + \langle \beta T, \varphi_2 \rangle) = \alpha \langle \lambda T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle \lambda T, \varphi_2 \rangle,$$

lo cual muestra que λT también es lineal. Ahora supongamos que $\varphi_k \rightarrow \varphi$ en \mathcal{D} . Queremos probar que $\langle T + S, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle T + S, \varphi \rangle$ y $\langle \lambda T, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle \lambda T, \varphi \rangle$. Dado $\varepsilon > 0$, por continuidad de T existe $N_T \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_T$ entonces

$$|\langle T, \varphi_k \rangle - \langle T, \varphi \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Análogamente, por continuidad de S existe $N_S \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_S$ entonces

$$|\langle S, \varphi_k \rangle - \langle S, \varphi \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $N = \max(N_T, N_S)$, para todo $k \geq N$ se tiene

$$\begin{aligned} |\langle T + S, \varphi_k \rangle - \langle T + S, \varphi \rangle| &= |\langle T, \varphi_k \rangle - \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi_k \rangle - \langle S, \varphi \rangle| \\ &\leq |\langle T, \varphi_k \rangle - \langle T, \varphi \rangle| + |\langle S, \varphi_k \rangle - \langle S, \varphi \rangle| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto $\langle T + S, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle T + S, \varphi \rangle$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = 0$ el resultado es trivial. Si $\lambda \neq 0$, por continuidad de T existe $N_T \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq N_T$,

$$|\langle T, \varphi_k \rangle - \langle T, \varphi \rangle| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Entonces para $k \geq N_T$,

$$|\langle \lambda T, \varphi_k \rangle - \langle \lambda T, \varphi \rangle| = |\lambda| |\langle T, \varphi_k \rangle - \langle T, \varphi \rangle| < \varepsilon,$$

lo que muestra $\langle \lambda T, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle \lambda T, \varphi \rangle$. Así las operaciones $T + S$ y λT preservan la continuidad. Con esto y las propiedades vectoriales heredadas del campo \mathbb{R} , el conjunto de distribuciones \mathcal{D}' es un espacio vectorial.

2.3.3. Traslación. Para $T \in \mathcal{D}'$ y $a \in \mathbb{R}$. La distribución asociada a $T(x-a)$ está dada por

$$\langle T(x-a), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(x+a) \rangle.$$

$T(x-a)$ se dice que es la *traslación* de $T(x)$.

Ejemplo 2.3.1. La distribución de Dirac δ_a es una traslación de $\delta(x)$:

$$\langle \delta(x-a), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x+a) \rangle = \varphi(0+a) = \varphi(a).$$

2.3.4. Transposición. Para $T \in \mathcal{D}'$. La distribución asociada a $T(-x)$ está dada por

$$\langle T(-x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(-x) \rangle.$$

Por esta propiedad, se definen las distribuciones **pares** tales que $T(x) = T(-x)$ y las distribuciones **impares** tales que $T(x) = -T(-x)$.

2.3.5. Cambio de escala. Para $T \in \mathcal{D}'$, $a \in \mathbb{R}$ distinto de cero. La distribución asociada a $T(ax)$ está dada por

$$\langle T(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle T(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle$$

Caso especial 2.3.1. Tomando la distribución de Dirac, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \delta(ax), \varphi(x) \rangle &= \frac{1}{|a|} \left\langle \delta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{|a|} \delta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{Definición de la operación escalar en } \mathcal{D}').$$

Luego $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$.

2.3.6. Producto de distribuciones. Para hablar del producto o multiplicación de distribuciones, se debe adicionar alguna condición. No siempre puede asegurarse que el producto de dos distribuciones es una distribución.

Caso especial 2.3.2. La función localmente sumable $f(x) = \frac{1}{|x|}$ con $f(x)f(x) = f^2(x) = \frac{1}{|x|^2}$ no es sumable sobre cualquier conjunto que contiene al origen $x = 0$. Aún así, si define una distribución por

$$\left\langle \frac{1}{|x|}, \varphi(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx,$$

puesto que el lado derecho no es sumable para todo $\varphi \in \mathcal{D}$.

Por ello, para cualquier $T \in \mathcal{D}'$ y $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, se define el producto ΨT por:

$$\langle \Psi T, \varphi \rangle = \langle T, \Psi \varphi \rangle.$$

Esto es válido pues $\Psi\varphi$ es indefinidamente derivable y su soporte está contenido en el soporte de φ . Luego $\Psi\varphi \in \mathcal{D}'$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}$.

Caso especial 2.3.3. Sea $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y la distribución Delta δ . Entonces

$$\begin{aligned}\langle \Psi(x)\delta(x), \varphi(x) \rangle &= \langle \delta(x), \Psi(x)\varphi(x) \rangle \\ &= \Psi(0)\varphi(0) \\ &= \Psi(0)\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \\ &= \langle \Psi(0)\delta(x), \varphi(x) \rangle\end{aligned}$$

luego, $\Psi(x)\delta(x) = \Psi(0)\delta(x)$. En particular, si $\Psi(x) = x$, entonces $x\delta(x) = 0$.

2.3.7. Derivada de una distribución. La noción de derivada de una distribución debe ser introducida de forma que coincida con la definición usual de derivación de funciones localmente sumable $f \in \mathcal{D}$, esto es, que f sea derivable y f' continua. La distribución asociada a f' es

$$\langle f'(x), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

Al integrar por partes y sabiendo que φ se anula en un conjunto acotado, entonces

$$\langle f', \varphi \rangle = - \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \right\rangle = -\langle f, \varphi' \rangle.$$

Esta definición es bien definida a distribuciones regulares pues $\varphi' \in \mathcal{D}$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}$. Por lo anterior, se define la derivada para cualquier distribución T :

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle.$$

En general, para la n -enésima derivada:

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi' \rangle.$$

Caso especial 2.3.4. Para la distribución de Dirac δ :

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0).$$

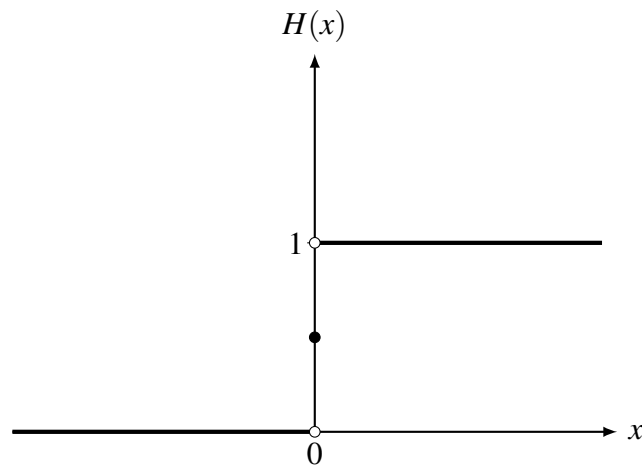


Figura 3. La función de Heaviside $H(x)$.

Caso especial 2.3.5. La función de Heaviside $H(x)$ mostrada en la Figura 3, está definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

La distribución $H(x)$ se define como

$$\langle H(x), \varphi(x) \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Al calcular la derivada de la distribución $H(x)$

$$\begin{aligned} \langle H'(x), \varphi(x) \rangle &= -\langle H(x), \varphi'(x) \rangle \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx \\ &= \varphi(0). \end{aligned}$$

Por igualdad de distribuciones tomando el Ejemplo 2.2.1, se tiene que

$$H'(x) = \delta(x).$$

2.3.8. Convergencia en el espacio \mathcal{D}' . Dada una sucesión de distribuciones $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'$, resulta intrigante conocer la definición de la posible convergencia de la distribución $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a una distribución T en \mathcal{D} .

Definición 2.3.1. Una sucesión de $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{D}' converge a $T \in \mathcal{D}'$ si $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge a $\langle T, \varphi \rangle$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}$.

En este caso, se escribe $T_n \rightarrow T$ en \mathcal{D}' .

Caso especial 2.3.6. Sea $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ y la traslación T_a de T definida como $\langle T_a(x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(x-a) \rangle$, donde

$T \in \mathcal{D}'$. Se puede formar el "cociente de Newton" $U_a = \frac{T_a - T}{a}$. Así,

$$\begin{aligned} \langle \lim_{a \rightarrow 0} U_a(x), \varphi(x) \rangle &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} \langle T_a(x), \varphi(x) \rangle - \frac{1}{a} \langle T(x), \varphi(x) \rangle \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \left\langle T(x), \frac{\varphi(x-a) - \varphi(x)}{a} \right\rangle \\ &= \left\langle T(x), -\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi(x-a) - \varphi(x)}{-a} \right\rangle \\ &= \langle T(x), -\varphi'(x) \rangle \\ &= \langle T'(x), \varphi(x) \rangle. \end{aligned}$$

Entonces, $\lim_{a \rightarrow 0} U_a(x) = T'(x)$. Esto muestra que la derivada de distribuciones sigue siendo el cociente de Newton en cierto sentido.

Suponga que la sucesión $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{D}' tal que $\langle T_n, \varphi \rangle$ es convergente para todo $\varphi \in \mathcal{D}$. Si se denota $\langle T, \varphi \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} T_n, \varphi \rangle$, es claro que T cumple la propiedad de linealidad. Además, T es continua en \mathcal{D} , es decir, $T \in \mathcal{D}'$.

Teorema 2.3.1. *Si una sucesión de distribuciones T_n converge a un funcional T en \mathcal{D}' , entonces T es una distribución.*

Para ver los detalles de la demostración, consulte Hounie (1979).

Teorema 2.3.2. *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones localmente integrables que converge en casi todas partes a la función localmente integrable f , y todas las funciones f_n están acotadas en módulo por una función localmente integrable. Entonces, f es una función localmente integrable y la sucesión de distribuciones regulares $\{f_n\}$ converge en \mathcal{D}' a la distribución regular f .*

La prueba descansa mayormente en el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue ¹, mostrado en el Teorema

¹ El Teorema de convergencia dominada es fundamental en la teoría de distribuciones, ya que garantiza la convergencia en integrales de funciones convergentes dominadas por una función integrable. Su importancia radica en su capacidad para establecer condiciones bajo las cuales se puede intercambiar límites e integrales en el contexto

2.3-1 de Zemanian (1987).

Caso especial 2.3.7. Sean las funciones $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como $f_n(x) = \text{sen}(nx)$. Estas funciones no convergen puntualmente excepto en $x = 0$. Aún así, la sucesión $\{f_n\}$ converge en \mathcal{D}' a la distribución cero. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, al usar integración por partes, se tiene

$$\begin{aligned} |\langle f_n, \varphi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen}(nx) \varphi(x) dx \right| = \left| \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(nx) \varphi'(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) dx \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow +\infty$.

En el caso particular, es de gran interés la convergencia de distribuciones regulares a δ en \mathcal{D}' .

Teorema 2.3.3. Si la sucesión de funciones localmente sumables $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ cumple las siguientes condiciones:

1. $\exists A > 0$ tal que para todo $|x| < A$, $f_n(x) \geq 0$.
2. $\forall a > 0$, $\int_{|x| < a} f_n(x) dx \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$.
3. $f_n(x)$ converge uniformemente a 0 en todo conjunto abierto $0 < a < |x| < \frac{1}{a} < \infty$.

Entonces la sucesión de distribuciones regulares $f_n(x)$ converge a δ en el espacio \mathcal{D}' cuando $n \rightarrow +\infty$.

Para un análisis más exhaustivo de la demostración, se recomienda consultar el Teorema 2.3-2 en Zemanian (1987).

En particular, si $f_n \geq 0$, tal que $\int f_n(x) dx = 1$, la distribución f_n converge a δ .

de funciones medibles. Para más detalles, véase Cohn (2013).

Caso especial 2.3.8. La sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de distribuciones regulares donde $f_n(x) = n\Pi(nx)$, como en la Figura 1, cumple la conclusión anterior. Así,

$$n\Pi(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta(x).$$

Caso especial 2.3.9. Considere la sucesión de funciones localmente integrables $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definidas como $f_n(x) = ne^{-\pi n^2 x^2}$. Note que esta sucesión converge para todo $x \neq 0$, sin embargo converge en \mathcal{D}' hacia la distribución δ . Si $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} ne^{-\pi n^2 x^2} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \varphi\left(\frac{y}{n\sqrt{\pi}}\right) dy \longrightarrow \varphi(0),$$

cuando $n \rightarrow +\infty$. Esto es, $\langle f_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle \delta, \varphi \rangle$. Luego,

$$ne^{-\pi n^2 x^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta(x).$$

2.3.9. Distribuciones en n dimensiones. A pesar de que se haya presentado la definición de funciones test al principio de este capítulo, se dará un ejemplo de este tipo de funciones en \mathbb{R}^n .

Como en el caso especial 2.2.1, se tiene como ejemplo la siguiente función f como función test generalizada dada por:

Caso especial 2.3.10. Sea la función

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \|\mathbf{x}\| \geq 1, \\ \exp\left(-\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2 - 1}\right) & \|\mathbf{x}\| < 1, \end{cases}$$

donde $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j^2$.

Si f es una función localmente integrable en \mathbb{R}^n , se define la distribución regular como:

$$\langle f(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

La distribución de Dirac puntual δ en el origen sobre \mathbb{R}^n , se define como:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(\mathbf{0}), \quad \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

La n -tupla ordenada de enteros no negativos $k = (k_1, \dots, k_n)$ es llamada **multi-índice de dimensión n** y se define su orden como $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Por lo anterior, el operador diferencial D^k para distribuciones está definido por:

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Así, se define la derivación de distribuciones sobre \mathbb{R}^n :

$$\langle D^k T, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \langle T, D^k \varphi \rangle.$$

Caso especial 2.3.11. Derivación de la distribución δ . En el espacio \mathbb{R}^3 , las derivadas parciales de primer orden denotadas como δ'_x , δ'_y y δ'_z , están definidas por:

$$\langle \delta'_x, \varphi \rangle = - \left\langle \delta, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle = -\varphi'_x(\mathbf{0}), \quad \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3.$$

Se sigue que $\langle \delta'_y, \varphi \rangle = -\varphi'_y(\mathbf{0})$ y $\langle \delta'_z, \varphi \rangle = -\varphi'_z(\mathbf{0})$.

2.3.10. Producto directo de dos distribuciones. Una función de dos variables $h(x,y)$ es de la forma

$$h(x,y) = f(x) \cdot g(y).$$

Se dice que la función h es el producto directo de las funciones f y g que dependen de x e y respectivamente. Por lo anterior, se generaliza la noción de producto directo a distribuciones sobre \mathbb{R}^n a partir de distribuciones sobre \mathbb{R} .

Teorema 2.3.4. Sean $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}, \varphi(x,y)$ una función test sobre \mathbb{R}^{n+m} y $T(y)$ una distribución sobre \mathbb{R}^n . Entonces la función de variable x :

$$\theta(x) = \langle T(y), \varphi(x,y) \rangle$$

es una función test sobre \mathbb{R}^m .

Teorema 2.3.5. Sea $S(x)$ una distribución sobre \mathbb{R}^m . Entonces

$$\langle S(x), \theta(x) \rangle = \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

define una distribución sobre \mathbb{R}^{n+m} denotado por

$$\langle S(x) \cdot T(y), \varphi(x,y) \rangle.$$

Observación 2.3.1. Se evita el uso de los símbolos especiales para el producto directo ($S(x) \times T(y)$ o $S(x) \otimes T(y)$) dado que, una clara identificación de las variables previene la confusión.

Conmutatividad. Para las distribuciones $S(x)$ sobre \mathbb{R}^m y $T(y)$ sobre \mathbb{R}^n , se tiene que

$$\langle S(x), \langle T(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle = \langle T(y), \langle S(x), \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

Soporte. El soporte de $S(x) \cdot T(y)$ es el producto de los soportes de $S(x)$ y $T(y)$. Se dice que es el conjunto de puntos (x,y) tales que $x \in S(x)$ e $y \in T(y)$.

Asociatividad. Para las distribuciones $R(x)$ sobre \mathbb{R}^m , $S(y)$ sobre \mathbb{R}^n y $T(z)$ sobre \mathbb{R}^l . Entonces.

$$[R(x) \cdot S(x)] \cdot T(z) = R(x) \cdot [S(x) \cdot T(z)].$$

Caso especial 2.3.12. Distribuciones regulares. Si $f(x)$ y $g(y)$ son funciones localmente integrables. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle f(x)g(y), \varphi(x,y) \rangle &= \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \varphi(x,y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y) \varphi(x,y) dx dy. \end{aligned}$$

El producto directo de distribuciones es la distribución definida por el producto directo de funciones.

Caso especial 2.3.13. El producto directo de dos funciones rectangulares está definido como

$$\Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \Pi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \Pi\left(\frac{y}{b}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{a}{2}, |y| < \frac{b}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{a}{2}, |y| > \frac{b}{2}. \end{cases}$$

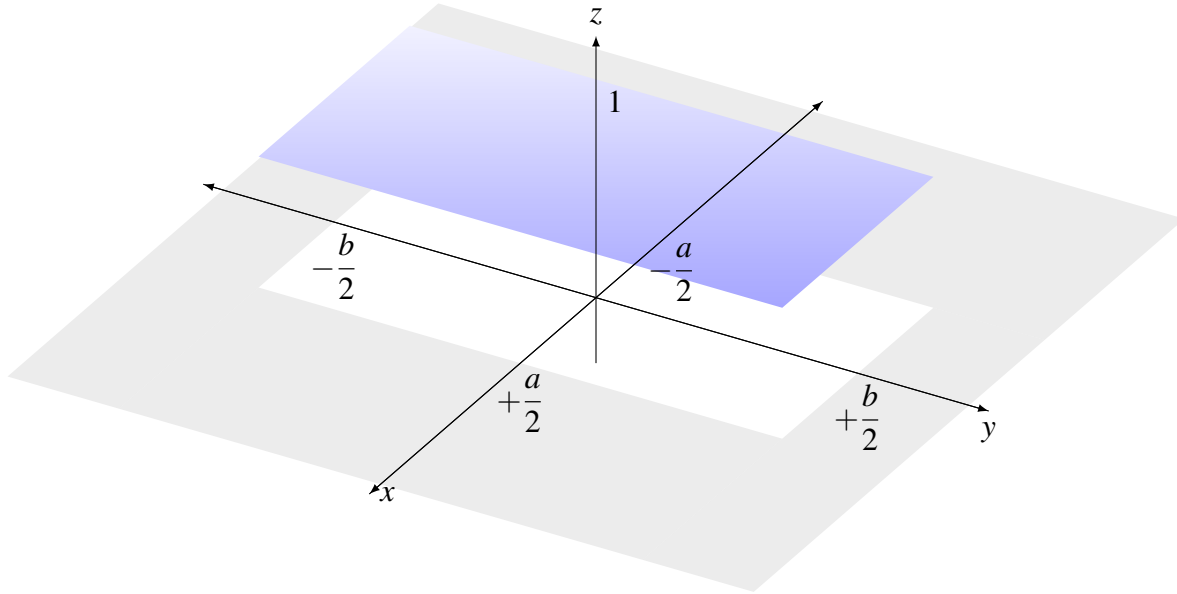


Figura 4. Representación gráfica de la distribución bidimensional $\Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$. Evidentemente tiene altura uno en el interior del rectángulo y cero en el exterior.

La representación gráfica de este producto de distribuciones regulares se muestra en la Figura 4.

Caso especial 2.3.14. Distribución de Dirac. Al definir ${}^2\delta(x)$ como una distribución de Dirac que solo depende de la variable y . Entonces,

$$\langle {}^2\delta(x), \varphi(x, y) \rangle = \langle 1, \langle {}^2\delta(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle 1, \varphi(0, y) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(0, y) dy.$$

Esto representa una distribución de Dirac sobre el eje y (véase la Figura 5(b)). La distribución ${}^2\delta(y)$ representa una distribución de Dirac sobre el eje x . En general, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define ${}^n\delta_{x_0}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ como una distribución de Dirac a lo largo de la recta $x_i = x_0$, con $1 \leq i \leq n$. Si $x_0 = 0$, la distribución ${}^n\delta(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ está definida a lo largo del eje x_i .

Caso especial 2.3.15. Distribución de Dirac ${}^2\delta_{x_0}(x) \cdot {}^2\delta_{y_0}(y)$.

$$\langle {}^2\delta_{x_0}(x) \cdot {}^2\delta_{y_0}(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle \delta_{x_0}(x), \varphi(x, y_0) \rangle = \varphi(x_0, y_0).$$

O también ${}^2\delta_{x_0}(x) \cdot {}^2\delta_{y_0}(y) := {}^2\delta_{(x_0, y_0)}(x, y)$, es la distribución puntual de Dirac en el punto (x_0, y_0) (véase Figura 5(a)). Para este caso, la distribución puntual puede simplificarse su notación como $\delta_{(x_0, y_0)}(x, y)$ sin perder el sentido dimensional.

Caso especial 2.3.16. Línea percusional¹. Además de las distribuciones de Dirac a lo largo de los ejes x e y , el impulso de línea ${}^2\delta(y - mx - c)$ representa una distribución de Dirac a lo largo de la recta $y = mx + c$ como lo muestra en la Figura 5(c).

Caso especial 2.3.17. Distribución III $\text{III}(x, y)$.

El producto ${}^2\text{III}(x) \cdot {}^2\text{III}(y)$, también denotado por $\text{III}(x, y)$, representa un peine de Dirac de dos dimensiones formado por distribuciones puntuales de Dirac en todo punto de coordenadas enteras, como se muestra en la Figura (5(d)).

¹ La notación de esta distribución es atribuida y estudiada en (Bracewell, 2012, p. 119) por su significado físico como densidad de carga superficial.

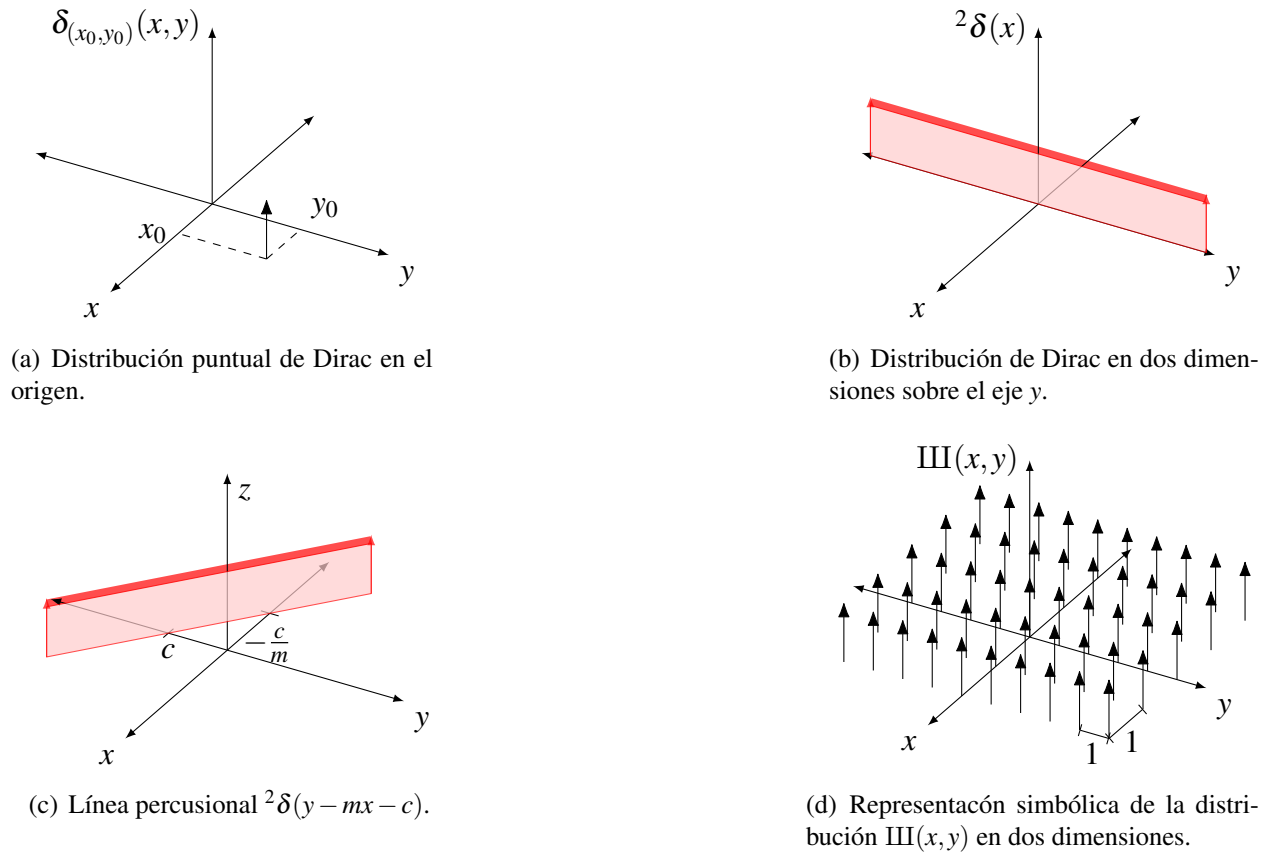


Figura 5. Representación de algunas distribuciones en dos dimensiones.

3. Transformación de Fourier fraccionaria

3.1. Operadores lineales

Definición 3.1.1. Sea \mathcal{L} un operador lineal sobre un espacio vectorial V . Para $f \neq 0 \in V$, se dice que f es una **señal propia** de \mathcal{L} si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\mathcal{L}f = \lambda f.$$

λ es llamado **valor propio** asociado a la función propia o señal propia f del operador \mathcal{L} .

Caso especial 3.1.1. El operador nulo está definido como $\mathcal{T}(f) = 0, \forall f \neq 0 \in \mathcal{F}^1$. Así,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}f &= 0 \\ &= 0f.\end{aligned}$$

Cero es la señal propia del operador \mathcal{T} con valor propio 0.

Caso especial 3.1.2. El operador identidad \mathcal{I} definido como

$$\mathcal{I}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)f(x)dx, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Las funciones diferentes de cero son señales propias de \mathcal{I} con valor propio 1, pues

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)f(x)dx \\ &= f(y) \\ &= 1f.\end{aligned}$$

Caso especial 3.1.3. El operador $\mathcal{D} : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R})$ definido como la derivada de una función, tiene funciones

¹ \mathcal{F} denota el conjunto de funciones de valor complejo.

propias o señales propias e^{ax} con valor propio asociado a :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}f &= \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}e^{ax} \\ &= ae^{ax} = af(x) \\ &= af.\end{aligned}$$

Ahora, se definirá la transformada de Fourier fraccionaria como un operador de funciones propias y valores propios, en la base ortonormal estudiada en el caso especial 1.4.2. A partir de esto, presentamos la transformada de Fourier fraccionaria de orden a en el espacio L_2 ¹.

Definición 3.1.2. Sea $\{\varphi_n\}$ la base ortonormal Hermite-Gaussiana definida en la expresión (5). La operación de la transformada de Fourier fraccionaria de orden a , está definida por ser lineal y satisfacer la condición:

$$\mathcal{F}^a \varphi_n(x) = \lambda_n^a \varphi_n(x) = (e^{-in\pi/2})^a \varphi_n(x) = e^{-ian\pi/2} \varphi_n(x), \quad (11)$$

donde λ_n es el valor propio asociado a la función de Hermite-Gauss como señal propia φ_n . Para encontrar la transformación fraccionaria de una función o señal $f \in L_2$, es expandida en la superposición lineal de las funciones propias de la transformación de Fourier fraccionaria de orden a , usando la relación (II) del Teorema (1.4.4):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \varphi_n, f \rangle \varphi_n(x),$$

¹ Esta transformación no solo se restringe a L_2 , también tiene sentido en el espacio de distribuciones \mathcal{D}' I. Zayed (1998).

donde,

$$\langle \varphi_n, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(y) f(y) dy.$$

Aplicando \mathcal{F}^a a ambos lados de la ecuación anterior y usando la ecuación (11), se obtiene que:

$$\mathcal{F}^a f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-ian\pi/2} \langle \varphi_n, f \rangle \varphi_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-ian\pi/2} \varphi_n(x) \varphi_n(y) f(y) dy. \quad (12)$$

Por la propiedad 5 de la Tabla 1 (fórmula de Mehler), se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\theta} \varphi_n(x) \varphi_n(y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\theta} 2^{1/4} \frac{H_n(\sqrt{2\pi}x)}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\pi x^2} 2^{1/4} \frac{H_n(\sqrt{2\pi}y)}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\pi y^2} & (\theta = \frac{a\pi}{2}) \\ &= \sqrt{2} e^{-\pi(x^2+y^2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-in\theta}}{2^n n!} H_n(\sqrt{2\pi}x) H_n(\sqrt{2\pi}y) \\ &= \frac{\sqrt{2} e^{-\pi(x^2+y^2)}}{\sqrt{1-e^{-2i\theta}}} \exp \left[\frac{4\pi xy e^{-i\theta} - 2\pi e^{-2i\theta} (x^2 + y^2)}{1 - e^{-2i\theta}} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Teniendo en cuenta que

$$\cot \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} i, \quad \csc \theta = \frac{2i}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}},$$

entonces

$$1 - i \cot \theta = 1 + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{2e^{i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{2}{1 - e^{-2i\theta}}.$$

Se sustituye el resultado anterior en la ecuación (13). Así,

$$= e^{-\pi(x^2+y^2)} \sqrt{\frac{2}{1-e^{-2i\theta}}} \exp \left[\frac{4\pi xye^{-i\theta} - 2\pi e^{-2i\theta}(x^2+y^2)}{1-e^{-2i\theta}} \right] \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1-i\cot\theta} \exp \left[\frac{4\pi xye^{-i\theta} - 2\pi e^{-2i\theta}(x^2+y^2)}{1-e^{-2i\theta}} - \pi(x^2+y^2) \right] \\ &= \sqrt{1-i\cot\theta} \exp \left[\frac{4\pi xye^{-i\theta} - 2\pi e^{-2i\theta}(x^2+y^2) - \pi(x^2+y^2)(1-e^{-2i\theta})}{1-e^{-2i\theta}} \right] \\ &= \sqrt{1-i\cot\theta} \exp \left[\frac{4\pi xye^{-i\theta} - \pi e^{-2i\theta}(x^2+y^2) - \pi(x^2+y^2)}{1-e^{-2i\theta}} \right] \\ &= \sqrt{1-i\cot\theta} \exp \left[\frac{4\pi xy - \pi e^{-i\theta}(x^2+y^2) - \pi e^{i\theta}(x^2+y^2)}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \right] \quad (\text{Cancelación del factor } e^{-i\theta}) \\ &= \sqrt{1-i\cot\theta} \exp \left[\pi \left(\frac{4xy - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})x^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})y^2}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \right) \right] \\ &= \sqrt{1-i\cot\theta} \exp \left[i\pi \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} ix^2 - 2xy \frac{2i}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} iy^2 \right) \right] \\ &= \sqrt{1-i\cot\theta} \exp [i\pi(x^2 \cot\theta - 2xy \csc\theta + y^2 \cot\theta)]. \quad (15) \end{aligned}$$

De este último resultado (15), se concluye

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\pi/2} \varphi_n(x) \varphi_n(y) = \sqrt{1-i\cot\theta} \exp [i\pi(x^2 \cot\theta - 2xy \csc\theta + y^2 \cot\theta)]. \quad (16)$$

En particular, para $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\pi/2} \varphi_n(x) \varphi_n(y) &= \sqrt{1-i\cot\frac{\pi}{2}} \exp \left[i\pi \left(x^2 \cot\frac{\pi}{2} - 2xy \csc\frac{\pi}{2} + y^2 \cot\frac{\pi}{2} \right) \right] \\ \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\pi/2} \varphi_n(x) \varphi_n(y) &= 1 \cdot e^{i\pi(-2xy)} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\pi/2} \varphi_n(x) \varphi_n(y) &= e^{-i2\pi xy}. \quad (17) \end{aligned}$$

Al reemplazar el resultado (16) en la ecuación (12), de la Definición 3.1.2 se deduce otra forma de definir la transformada de Fourier fraccionaria para cualquier señal o función en el espacio L_2 :

Definición 3.1.3 (Ozaktas *et al.* (2001)). Sea $f \in L_2(\mathbb{R})$ y $k \in \mathbb{R}$, la transformación de Fourier fraccionaria de f de orden a está definida por la integral:

$$\mathcal{F}^a [f](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_a(k, x) f(x) dx, \quad (18)$$

donde

$$K_a(k, x) = A_\theta \exp [i\pi (k^2 \cot \theta - 2kx \csc \theta + x^2 \cot \theta)],$$

$$A_\theta = \sqrt{1 - i \cot \theta}, \quad \theta = a \frac{\pi}{2}, \text{ cuando } a \neq 2j,$$

$K_a(k, x) = \delta(k - x)$ cuando $a = 4j$ y $K_a(k, x) = \delta(k + x)$ cuando $a = 4j \pm 2$ con $j \in \mathbb{Z}$. Sin ambigüedad, el valor complejo A_θ puede reescribirse como

$$\frac{e^{-i[\pi \operatorname{sgn}(\theta)/4 - \theta/2]}}{\sqrt{|\operatorname{sen} \theta|}}, \quad (19)$$

donde $\operatorname{sgn}(\cdot)$ es la función signo. Para el caso $a = 1$, se tiene la transformada de Fourier estándar¹.

También es posible el sentido recíproco: a partir de la ecuación (18), mostrar que las funciones Hermite-Gaussianas son efectivamente funciones propias de la transformada, con valores propios dados por $e^{-ian\pi/2}$, como se establece en la ecuación (12). Para un desarrollo detallado de este resultado, véase el ejemplo 7.2 en McBride y Kerr (1987). Esta doble implicación confirma la equivalencia entre ambas definiciones de la transformada.

Propiedad de Aditividad del índice.

Sea $f \in L_2(\mathbb{R})$. Para probar la propiedad

$$\mathcal{F}^{a_1} [\mathcal{F}^{a_2} [f]] = \mathcal{F}^{a_1+a_2} [f] = \mathcal{F}^{a_2} [\mathcal{F}^{a_1} [f]],$$

¹ A lo largo de este manuscrito se adopta que, la frase transformación de Fourier estándar, hace alusión a la transformación de Fourier fraccionaria de orden uno, lo que significa matemáticamente lo mismo.

la expresión integral es

$$\mathcal{F}^{a_1}[\mathcal{F}^{a_2}[f]](k) = \mathcal{F}^{a_1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} K_{a_2}(k'', k') f(k'') dk'' \right] (k) \quad (20)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{a_1}(k, k'') \left[\int_{-\infty}^{+\infty} K_{a_2}(k'', k') f(k'') dk'' \right] dk \quad (21)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} K_{a_1}(k, k'') K_{a_2}(k'', k') dk'' \right] f(k'') dk. \quad (22)$$

Esta expresión (22), permite demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_{a_1}(k, k'') K_{a_2}(k'', k') dk'' = K_{a_1+a_2}(k, k'). \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{a_1}(k, k'') K_{a_2}(k'', k') dk'' &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-ina_1\pi/2} \varphi_n(k) \varphi_n(k'') \right] \left[\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-ima_2\pi/2} \varphi_m(k'') \varphi_m(k') \right] dk'' \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-ina_1\pi/2} e^{-ima_2\pi/2} \varphi_n(k) \varphi_m(k') \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(k'') \varphi_m(k'') dk'' \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-ina_1\pi/2} e^{-ina_2\pi/2} \varphi_n(k) \varphi_n(k') \quad (\text{Ortonormalidad de } \{\varphi_n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in(a_1+a_2)\pi/2} \varphi_n(k) \varphi_n(k') \\ &= K_{a_1+a_2}(k, k'). \end{aligned}$$

De manera similar se prueba para el caso $\mathcal{F}^{a_2}[\mathcal{F}^{a_1}[f]] = \mathcal{F}^{a_2+a_1}$. De esta ecuación (23), se completa la propiedad de aditividad. La transformada de cualquier orden conmuta con cualquier transformada de distinto orden y pueden

intercambiarse libremente. Para el operador de la transformada de Fourier fraccionaria \mathcal{F}^a , su inversa $(\mathcal{F}^a)^{-1}$ es igual al operador \mathcal{F}^{-a} . Esto puede verse probando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_a(k, k'') K_{-a}(k'', k') dk'' = \delta(k - k'). \quad (24)$$

Esta prueba es similar a la anterior utilizando la propiedad 6 de la Tabla 1. Esto es, $K_a^{-1}(k, k') = K_{-a}(k, k')$. En términos de operadores, se verifica que

$$\mathcal{F}^a[\mathcal{F}^{-a}] = \mathcal{F}^{-a}[\mathcal{F}^a] = \mathcal{I}. \quad (25)$$

Un resumen de las propiedades de la transformación de Fourier fraccionaria son mencionadas en la Tabla 2. Por

Tabla 2

Propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria, parte I.

1. Linealidad	$\mathcal{F}^a \left[\sum_n \alpha_n f_n(x) \right] = \sum_n \alpha_n \mathcal{F}^a [f_n(x)]$
2. Órdenes enteros	$(\mathcal{F})^n = \mathcal{F}^n$
3. Inversa	$(\mathcal{F}^a)^{-1} = \mathcal{F}^{-a}$
4. Aditividad del índice	$\mathcal{F}^{a_1} \mathcal{F}^{a_2} = \mathcal{F}^{a_1+a_2}$
5. Conmutatividad	$\mathcal{F}^{a_1} \mathcal{F}^{a_2} = \mathcal{F}^{a_2} \mathcal{F}^{a_1}$
6. Asociatividad	$\mathcal{F}^{a_1} (\mathcal{F}^{a_2} \mathcal{F}^{a_3}) = (\mathcal{F}^{a_1} \mathcal{F}^{a_2}) \mathcal{F}^{a_3}$
7. Funciones propias	$\mathcal{F}^a \varphi_n = e^{-ani\pi/2} \varphi_n$
8. Parseval	$\langle f(x), g(x) \rangle = \langle \mathcal{F}^a[f](k), \mathcal{F}^a[g](k) \rangle$

α_n son constantes complejas arbitrarias y $n \in \mathbb{Z}$.

definición, el operador \mathcal{F}^a cumple la linealidad y la relación de función propia con el valor propio $e^{-ani\pi/2}$. Cuando a es un entero n , la transformada de Fourier fraccionaria es equivalente a la n -ésima potencia de la transformada de Fourier estándar. La propiedad 3, permite asociar órdenes negativos con la transformada inversa. Así mismo, el inverso del núcleo asociado es el conjugado transpuesto $K_a^{-1}(k, k') = K_a^*(k', k)$, es decir, el operador \mathcal{F}^a es **unitario**¹,

¹ Un operador lineal \mathcal{L} con representación $L(k, k')$, es **hermítico** si satisface $L^H(k, k') = L^*(k', k)$ y es unitario si

$(\mathcal{F}^a)^H = \mathcal{F}^{-a}$. De las propiedades 5 y 6 es deducible la propiedad de Aditividad del índice. Por último, la propiedad 8, es un caso especial de la unicidad del operador \mathcal{F}^a , esto es, $\langle f, g \rangle = \langle f, (\mathcal{F}^a)^{-1} \mathcal{F}^a g \rangle = \langle \mathcal{F}^a f, \mathcal{F}^a g \rangle$.

3.2. Transformada de Fourier fraccionaria de algunas funciones conocidas

En la Tabla 3, se muestra una lista de transformadas de Fourier fraccionaria de señales principales Ozaktas *et al.* (2001). La propiedad 1 y 2 describen la transformada de la distribución delta de Dirac, de orden a distinto de cualquier múltiplo par. La propiedad 3 proporciona información de la transformada de la unidad, pero esto puede generalizarse

Tabla 3

Transformada de Fourier fraccionaria de algunas funciones.

$f(x)$	$\mathcal{F}^a[f](k)$ con $\theta = a\pi/2$
1. $\delta(x)$	$\sqrt{1 - i \cot \theta} \exp(i\pi k^2 \cot \theta)$
2. $\delta(x - \xi)$	$\sqrt{1 - i \cot \theta} \exp[i\pi(k^2 \cot \theta - 2k\xi \csc \theta + \xi^2 \cot \theta)]$
3. 1	$\sqrt{1 + i \tan \theta} \exp(-\pi i k^2 \tan \theta)$
4. $\exp(2\pi i \xi x)$	$\sqrt{1 - i \cot \theta} \exp[-i\pi(k^2 \tan \theta - 2k\xi \sec \theta + \xi^2 \tan \theta)]$
5. $\exp(2\pi i \zeta x^2)$	$\sqrt{\frac{1 + i \tan \theta}{1 + \zeta \tan \theta}} \exp\left[\pi i k^2 \frac{\zeta - \tan \theta}{1 + \zeta \tan \theta}\right]$
6. $\varphi_n(x)$	$\exp(-in\theta) \varphi_n(x)$
7. $\exp(-\pi x^2)$	$\exp(-\pi k^2)$
8. $\exp(-\pi \zeta x^2)$	$\sqrt{\frac{1 - i \cot \theta}{\zeta - \cot \theta}} \exp\left[\pi i k^2 \frac{(\zeta^2 - 1) \cot \theta}{\zeta^2 + \cot^2 \theta}\right] \exp\left[-\pi k^2 \frac{\zeta \csc^2 \theta}{\zeta^2 + \cot^2 \theta}\right]$

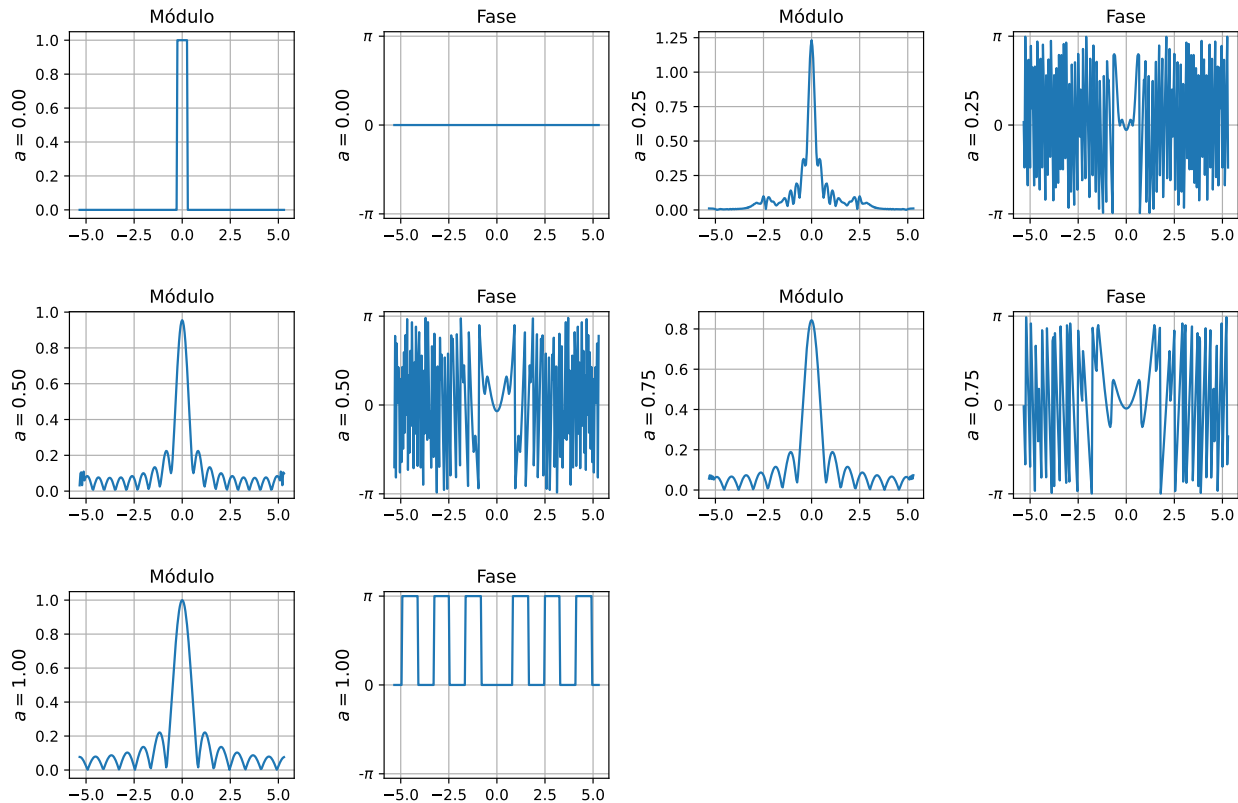
ξ y ζ son valores reales, $\varphi_n(x)$ son las funciones Hermite-Gaussianas. (1) y (2) son válidas cuando $a \neq 2n$, (3) y (4) son válidas cuando $a \neq 2n + 1$, la propiedad (5) es válida cuando $a - (2/\pi) \arctan \chi \neq 2n + 1$, donde $n \in \mathbb{Z}$. La transformada de $\delta(x - \xi)$ es $\delta(k - \xi)$ cuando $a = 4n$ y $\delta(k + \xi)$ cuando $a = 4n + 2$. La transformada de $\exp(2\pi i \xi x)$ es $\delta(k - \xi)$ cuando $a = 4n + 1$ y $\delta(k + \xi)$ cuando $a = 4n + 3$. La transformada de $\exp(\pi i \zeta x^2)$ es $\sqrt{1/(1 - i\zeta)} \delta(k)$ cuando $[a - (2/\pi) \arctan \zeta] = 2n + 1$ y $\sqrt{1/(1 - i\zeta)}$ cuando $[a - (2/\pi) \arctan \zeta] = 2n$. En (8) se necesita que $\zeta > 0$ para la convergencia.

$$\mathcal{L}^H \mathcal{L} = \mathcal{L} \mathcal{L}^H = \mathcal{I}.$$

para cualquier constante. A partir de la transformada de Fourier fraccionaria de cualquier señal f , en la Tabla 5 y 6 del Anexo A, se resaltan las propiedades que se utilizarán a lo largo de este documento. Estas propiedades fueron probadas usando la definición integral y la caracterización de simetría del núcleo en Namias (1980) y Almeida (1994).

La propiedad 4 y 5 están relacionadas con la función exponencial imaginaria y la función gaussiana imaginaria,

Figura 6. Módulo y fase de la transformada de Fourier fraccionaria de la función rectangular para diferentes valores de a . Algunas de las fases ($a = 0.25, 0.5, 0.75$) no están desvueleltas.



respectivamente. La propiedad 6 es parte de la definición de la transformada de Fourier fraccionaria de orden a con $\theta = a\pi/2$. La propiedad 8 generaliza la propiedad 7, siendo la transformada de Fourier fraccionaria la misma señal en el dominio de Fourier. Aunque en la Tabla 2 muestra funciones con transformadas fraccionarias explícitas, otras funciones comunes, como la función rectangular definida en (6), no admiten una expresión cerrada simple en el caso general. Sin embargo, para el caso especial de orden $a = 1$, su representación sí es conocida y corresponde a la función $\text{sinc}(k) = \text{sen}(k)/k$. La Figura 6, muestra el módulo $|\mathcal{F}^a|$ y fase θ de la transformada de Fourier fraccionaria de la

función rectangular centrada en el origen $\Pi(x)$, para órdenes $a = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ y 1 , o también para ángulos $\theta = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/4$ y π , respectivamente. Observe que en la fase las gráficas tienen un rango de $[-\pi, \pi]$, que significa que no han sido desenvueltas.

3.2.1. Transformada de Fourier fraccionaria n -dimensional. Para el caso de funciones que dependen de más de una variable, la generalización de la transformada de Fourier fraccionaria para n dimensiones, fue explorada por varios autores Namias (1980), Mendlovic y Ozaktas (1993) y Sahin *et al.* (1998). La presentación extendida considerada para el caso general n , está dada por

$$\mathcal{F}^a[f](\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\mathbf{a}}(\mathbf{k}; \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (26)$$

$$K_{\mathbf{a}}(\mathbf{k}; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n K_{a_i}(k_i; x_i),$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $d\mathbf{x} = dx_1 \cdots dx_n$ y $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ es el vector de orden fraccionario con coordenadas $\theta_i = a_i \frac{\pi}{2}$ y θ_i es el ángulo para cada $1 \leq i \leq n$. $K_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}; \mathbf{k})$ es el núcleo 1-dimensional como está definido en (3.1.3). Observe que esta expresión plantea el núcleo multidimensional como una función multiplicativa, es decir, como el producto de núcleos unidimensionales. Esta forma de definir la transformada en n dimensiones es mostrada en detalle en Karasik (1994).

Observación 3.2.1. Si $\mathbf{a} = (\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$, la ecuación (26) se reduce a la transformada de Fourier estándar n -dimensional.

Observación 3.2.2. Si $n = 1$, la ecuación (26) se reduce a la transformada de Fourier fraccionaria 1-dimensional como en (3.1.3).

Para el caso $n = 2$, se define como

$$\mathcal{F}^a[f](k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\mathbf{a}}(k_x, k_y; x, y) f(x, y) dx dy, \quad (27)$$

$$K_{\mathbf{a}}(k_x, k_y; x, y) = K_{a_1}(k_x; x) K_{a_2}(k_y; y), \quad (28)$$

donde $a = (a_1, a_2)$ es el orden fraccionario con coordenadas $\theta_1 = a_1 \frac{\pi}{2}$ y $\theta_2 = a_2 \frac{\pi}{2}$.

Caso especial 3.2.1. Considere la distribución bidimensional ${}^2\delta(y - mx)$, el superíndice 2 indica que está definida en el espacio xy , como en la Figura 5(c), es la línea percusional a lo largo de la recta $y = mx$ que pasa por el punto de origen. Luego,

$$\mathcal{F}^a[{}^2\delta(y - mx)](k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} {}^2\delta(y - mx) K_{\mathbf{a}}(k_x, k_y; x, y) dx dy,$$

Al desarrollar esta integral, en el Anexo B se obtiene el resultado siguiente,

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{a_1}(k_x, x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} {}^2\delta(y - mx) K_{a_2}(k_y, y) dy \right) dx \quad (29) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{a_1}(k_x, x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} {}^2\delta(y - mx) A_{\theta_2} \exp [i\pi (k_y^2 \cot \theta_2 - 2k_y y \csc \theta_2 + y^2 \cot \theta_2)] dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{a_1}(k_x, x) A_{\theta_2} \exp [i\pi (k_y^2 \cot \theta_2 - 2(mx)k_y \csc \theta_2 + (mx)^2 \cot \theta_2)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\theta_1} \exp [i\pi (k_x^2 \cot \theta_1 - 2k_x x \csc \theta_1 + x^2 \cot \theta_1)] A_{\theta_2} \exp [i\pi (k_y^2 \cot \theta_2 - 2mk_y x \csc \theta_2 + m^2 x^2 \cot \theta_2)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \exp [i\pi (k_x^2 \cot \theta_1 + k_y^2 \cot \theta_2 - 2k_x x \csc \theta_1 - 2mk_y x \csc \theta_2 + x^2 \cot \theta_1 + m^2 x^2 \cot \theta_2)] dx \\ &= A_{\theta_1} A_{\theta_2} \exp [i\pi (k_y^2 \cot \theta_2 + k_x^2 \cot \theta_1)] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i\pi (x^2 (\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2) - 2x (k_x \csc \theta_1 + mk_y \csc \theta_2))] dx \\ &= A_{\theta_1} A_{\theta_2} \exp [i\pi (k_y^2 \cot \theta_2 + k_x^2 \cot \theta_1)] \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2}} e^{i\pi/4} \exp \left[-i\pi \frac{(k_x \csc \theta_1 + mk_y \csc \theta_2)^2}{(\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2)} \right] \quad (\text{Por la ecuación (105) del Anexo B}) \\ &= \frac{A_{\theta_1} A_{\theta_2}}{\sqrt{\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2}} \exp \left[i\pi \left(k_y^2 \cot \theta_2 + k_x^2 \cot \theta_1 - \frac{(k_x \csc \theta_1 + mk_y \csc \theta_2)^2}{(\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2)} + \frac{1}{4} \right) \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

Si se adopta el valor complejo de $A_{\theta_1} A_{\theta_2}$, dado por la expresión

$$\sqrt{|\csc \theta_1 \csc \theta_2|} \exp \left[-i \left(\pi \frac{\operatorname{sgn}(\theta_1) + \operatorname{sgn}(\theta_2)}{4} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right],$$

tal como se muestra en la ecuación (19), entonces al sustituir en la última ecuación (30), se sigue que

$$= \sqrt{\frac{|\csc \theta_1 \csc \theta_2|}{\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2}} \exp \left[i\pi \left(k_y^2 \cot \theta_2 + k_x^2 \cot \theta_1 - \frac{(k_x \csc \theta_1 + m k_y \csc \theta_2)^2}{(\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2)} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{sgn}(\theta_1) + \operatorname{sgn}(\theta_2)}{4} \right) \right] \quad (31)$$

Este último resultado, permite estudiar la transformada de Fourier de las líneas percusionales en el espacio del módulo y en el espacio de la fase. Para el módulo se tiene que

$$|\mathcal{F}^a| = \sqrt{\frac{|\csc \theta_1 \csc \theta_2|}{\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2}}$$

y fase

$$\pi \left(k_y^2 \cot \theta_2 + k_x^2 \cot \theta_1 - \frac{(k_x \csc \theta_1 + m k_y \csc \theta_2)^2}{(\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2)} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{sgn}(\theta_1) + \operatorname{sgn}(\theta_2)}{4} \right).$$

Caso especial 3.2.2. Del caso especial anterior (3.2.1), considere $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$. La transformada de Fourier estándar de la señal ${}^2\delta(y - mx)$ se reduce a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{i\pi/4} \frac{e^{-i\pi(k_x + m k_y)^2/t}}{\sqrt{t}},$$

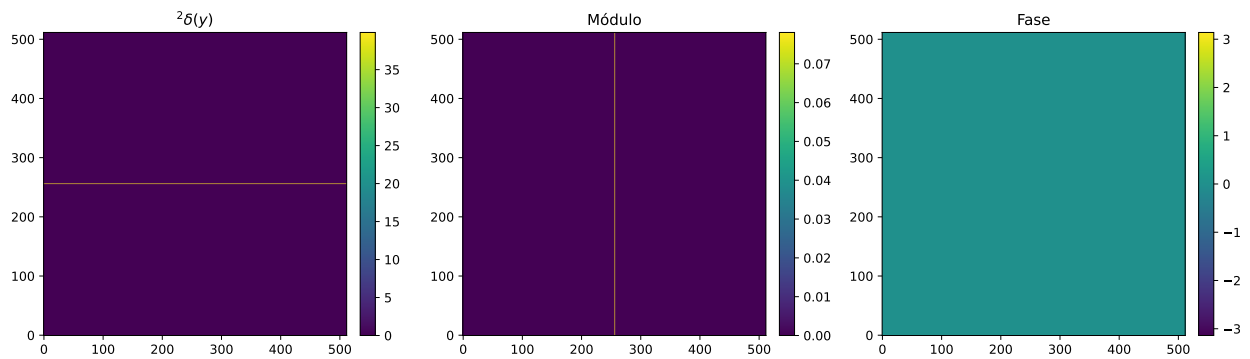
donde $t = \cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2$. Tomando la aproximación compleja (109) del Anexo C, se tiene que

$$\mathcal{F}^a[{}^2\delta(y - mx)] = {}^2\delta(k_x + m k_y).$$

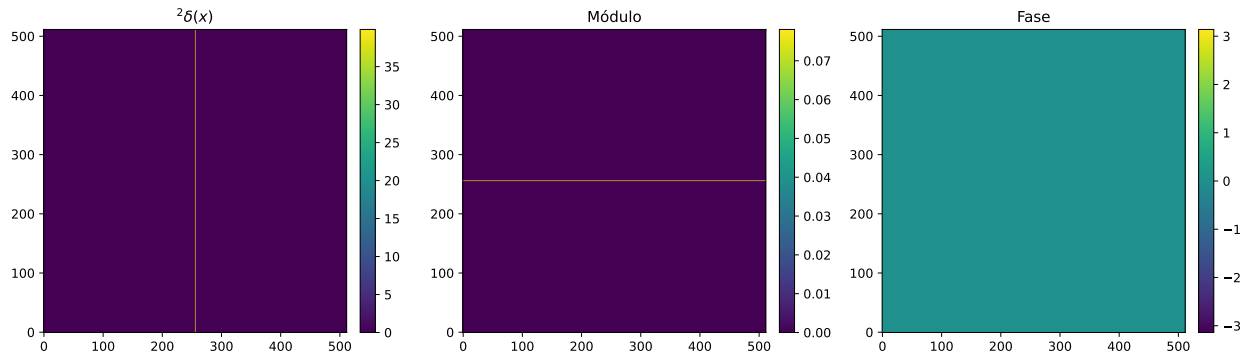
Este resultado describe la línea percusional a lo largo de la recta $k_y = -\frac{1}{m}k_x$. Quiere decir que la distribución δ a lo

largo de la recta $y = mx$ de pendiente m , posee como transformada de Fourier estándar otra distribución δ a lo largo de la recta $k_y = -\frac{1}{m}k_x$ con pendiente $-1/m$.

También pueden considerarse ejemplos particulares como el caso $m = 0$, la distribución ${}^2\delta(y)$ tendrá transformada de Fourier estándar ${}^2\delta(k_x)$ (véase la Figura 7(a)), un delta de Dirac a lo largo del eje de frecuencia k_y . Similarmente, para la distribución ${}^2\delta(x)$, su transformada es un delta de Dirac ${}^2\delta(k_y)$ a lo largo del eje de frecuencia k_x (véase la Figura 7(b)). Ahora considere en el siguiente ejemplo, el caso fraccionario cuando $m = 0$. En adelante, la transformada de Fourier fraccionaria n -dimensional de orden $a = (1, \dots, 1)$, \mathcal{F}^a , se denotará simplemente como \mathcal{F} .



(a) Transformada de Fourier estándar de ${}^2\delta(y)$ con módulo ${}^2\delta(k_x)$ y fase nula.



(b) Transformada de Fourier estándar de ${}^2\delta(x)$ con módulo ${}^2\delta(k_y)$ y fase nula.

Figura 7. Ejemplos del módulo y fase de las distribuciones ${}^2\delta(y)$ y ${}^2\delta(x)$ simulados sobre una malla de tamaño $(512, 512)$ usando la aproximación del caso especial (2.3.9).

Ejemplo 3.2.1. Tomando $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ y $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$, $\csc \theta_1 = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\csc \theta_2 = 2$, $\cot \theta_1 = \sqrt{3}$. Con esto, su transfor-

mada de Fourier fraccionaria de orden $a = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ es

$$\mathcal{F}^a[\delta(y)](k_x, k_y) = \sqrt{2} \exp \left[i\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} k_x^2 + \sqrt{3} k_y^2 - \frac{4k_x^2}{\sqrt{3}} \right) \right] \quad (32)$$

$$= \sqrt{2} \exp \left[i\pi \left(\sqrt{3} k_y^2 - \sqrt{3} k_x^2 \right) \right]. \quad (33)$$

El módulo para este ejemplo es $\mathcal{F}^a(k_x, k_y) = \sqrt{2}$ sobre el plano $k_x k_y$ y la fase es el paraboloides hiperbólico $\sqrt{3}\pi(k_y^2 - k_x^2)$.

4. Relatividad Especial

En este capítulo se estudiará el desarrollo de las transformaciones de coordenadas en la física, desde las transformaciones de Galileo en la mecánica clásica hasta las transformaciones de Lorentz en la relatividad especial. Se analizará cómo la constancia de la velocidad de la luz y los postulados de Einstein llevaron a la reformulación del concepto de espacio y tiempo.

Se estudiará en detalle la deducción de las transformaciones de Lorentz, mostrando su relación con la estructura del tiempo-espacio. La presentación de estas transformaciones se presentan de forma parametrizada French (2017) y Schroder (1990), aunque también han sido investigadas sus propiedades algebraicas en su forma hiperbólica Naber (2012) y Rahaman (2014). Más adelante, se introducen los diagramas de Minkowski como herramienta para visualizar los eventos desde diferentes sistemas de referencia inercial. Se presentarán dos casos principales: cuando dos observadores coinciden en su punto de origen y en el caso contrario, comparando las distintas perspectivas de los observadores.

4.1. Transformación de Lorentz

La relatividad especial, formulada por Albert Einstein en 1905, revolucionó nuestra comprensión del espacio y el tiempo al proponer que no son entidades independientes, sino que están entrelazadas formando una estructura unificada: el tiempo-espacio. Este concepto rompe con la visión clásica de la física newtoniana, donde el tiempo es absoluto y transcurre de manera uniforme para todos los observadores, sin importar su estado de movimiento. Para comprender este cambio de paradigma, es útil empezar revisando cómo se describían las relaciones espacio-temporales antes de la relatividad especial, utilizando las transformaciones de Galileo, y cómo estas fueron reemplazadas por las transformaciones de Lorentz para dar lugar a una nueva descripción del universo.

La relación entre las medidas de un movimiento dado observado desde sistemas de referencia diferentes, viene expre-

sada mediante un conjunto de ecuaciones de transformación. En la mecánica newtoniana las ecuaciones pertinentes llevan el nombre de Galileo, quien fue el primero en señalar el principio de la inercia (French, 2017, p. 76). Relacionan las medidas de posición, tiempo, velocidad y aceleración en un sistema inercial S con coordenadas (x, y, z, t) efectuadas en un sistema S' con coordenadas (x', y', z', t') , que posee una velocidad constante v relativa a S según el eje de las x :

$$\left. \begin{aligned}
 x' &= x - vt & (x = x' + vt) \\
 y' &= y \\
 z' &= z \\
 t' &= t \\
 u_{x'} &= u_x - v & (u_x = u_{x'} + v) \\
 a_{x'} &= a_x
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuaciones} \\ \text{de transformación} \\ \text{de Galileo} \end{array} \quad (34)$$

Aquí es evidente la noción de tiempo como universal para todo sistema de referencia inercial, que se le atribuye en la mecánica newtoniana. Tomando en conjunto las primeras tres ecuaciones de (34), la relación de medidas de la velocidad en sistemas inerciales diferentes, queda definida por completo y la medida de una aceleración es la misma para todos esos sistemas. En la mecánica newtoniana, la aceleración es un invariante.

Estas transformaciones funcionan bien a velocidades cotidianas, pero fallan cuando se trata de fenómenos que involucran la velocidad de la luz. A finales del siglo XIX, experimentos como el experimento de Michelson-Morley puso a prueba la isotropía de la rapidez de la luz, mostrando que es la misma en todas las direcciones. Este resultado contradujo directamente la intuición galileana de que las velocidades se suman, ya que en la mecánica clásica se esperaba que un rayo de luz se moviera más rápido o más lento dependiendo de la velocidad del observador. Para resolver este problema, Einstein propuso los siguientes postulados:

Postulado 1: Todos los sistemas inerciales son equivalentes con respecto a todas las leyes de la física.

Postulado 2: La velocidad de la luz en el espacio libre posee siempre el valor constante c .

Al aplicar las transformaciones de Galileo para un rayo de luz que se mueve a una velocidad de c en el sistema S , la velocidad del rayo en S' según las ecuaciones debe ser $c' = c - v$, lo que contradice el segundo postulado de Einstein. Por lo anterior, es necesario replantearse las ecuaciones que tenga consistencia con los postulados.

Considere nuevamente dos sistemas de referencia S y S' , donde S' se mueve a una velocidad constante v con respecto

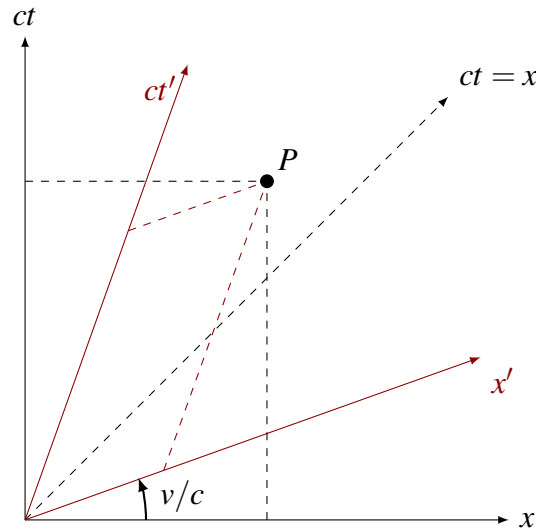


Figura 8. Coordenadas tiempo-espacio de un suceso puntual dado en dos sistema inerciales diferentes.

a S a lo largo del eje x . En la Figura 8 cualquier punto P en el plano $xvsct$ representa lo que se denomina un suceso puntual que puede caracterizarse mediante valores de x y de t , o de x' y de t' . Por propiedades de las ecuaciones de las transformaciones, existe una relación lineal entre las coordenadas (ct, x) y (ct', x') (French, 2017, p. 87). Esta relación está expresada como:

$$x = ax' + bt', \quad x' = ax - bt. \tag{35}$$

El movimiento del origen de S , tal como se mide en S' , se define tomando $x = 0$ en la primera de estas ecuaciones. Análogamente, el movimiento del origen de S' , tal como se mide en S , viene definido tomando $x' = 0$ en la segunda ecuación. Las velocidades son iguales, opuestas y ambas de valor v . Esto nos da la condición $v = b/a$ según la deducción de las ecuaciones anteriores.

Considere una señal luminosa que avanza en el sentido positivo del eje espacial x . Si tal señal se origina en el punto de origen, puede describirse su movimiento en S y S' respectivamente mediante las ecuaciones

$$x = ct, \quad x' = ct' \quad (36)$$

Al sustituir estas expresiones particulares para x y x' en las ecuaciones (35), se obtiene

$$ct = (ac + b)t', \quad ct' = (ac - b)t. \quad (37)$$

Al igualar y simplificar las dos ecuaciones, se tiene

$$c^2 = (ac + b)(ac - b) = a^2c^2 - b^2.$$

Usando el hecho de que $av = b$, esto es $c^2 = a^2c^2 - a^2v^2 = a^2(c^2 - v^2)$. Entonces,

$$a = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Así, de las ecuaciones (35) pueden escribirse como

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad (38)$$

donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ es una constante conocida como **factor de Lorentz**. Ahora, al despejar la variable ct' en la primera ecuación de las ecuaciones anteriores, se sigue que

$$ct' = \frac{c}{v} \left(\frac{x}{\gamma} - x' \right).$$

Al usar x' como está descrita en la segunda de las ecuaciones (38), entonces

$$\begin{aligned}
 ct' &= \frac{c}{v} \left(\frac{x}{\gamma} - (\gamma(x - vt)) \right) \\
 &= \gamma \left(ct - \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \right) \frac{c}{v} x \right) \\
 &= \gamma \left(ct - \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \frac{c}{v} x \right) \\
 &= \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right).
 \end{aligned}$$

Similarmente se tiene que $ct = \gamma \left(ct' + \frac{v}{c} x' \right)$. Por tanto, las ecuaciones que describen cualquier evento P como en la Figura 8, en las coordenadas del sistema S' en función de S y en las coordenadas del sistema S en función de S' , en dirección del eje espacial x , son:

$$\begin{aligned}
 x' &= \gamma \left(x - \frac{v}{c} ct \right) & x &= \gamma \left(x' + \frac{v}{c} ct' \right) \\
 y' &= y & y &= y' \\
 z' &= z & z &= z' \\
 ct' &= \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right) & ct &= \gamma \left(ct' + \frac{v}{c} x' \right)
 \end{aligned} \tag{39}$$

4.2. Diagramas de Minkowski

En la física clásica, las distancias entre dos puntos en el espacio son invariantes bajo transformaciones de Galileo. Esto significa que al medir la distancia entre dos puntos desde dos sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo, el valor de la distancia será el mismo en ambos sistemas. Sin embargo, como lo indican las transformaciones de Lorentz (39), en relatividad especial, el tiempo y el espacio están entrelazados, es necesario redefinir el concepto de distancia en el tiempo-espacio de $3 + 1$ dimensiones (Esto puede generalizarse después a $n + 1$ dimensiones).

Consideremos dos eventos en el espacio de Minkowski, con coordenadas (ct_2, x_2, y_2, z_2) y (ct_1, x_1, y_1, z_1) en un sistema inercial S . Se define el intervalo de tiempo-espacio entre dos eventos como en French (2017)

$$s^2 = (\Delta ct)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \quad (40)$$

Considere un sistema de referencia S' que se mueve a una velocidad constante v en la dirección x respecto a S . Ahora, se tiene el siguiente el intervalo para el observador S' :

$$s'^2 = (\Delta ct')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2. \quad (41)$$

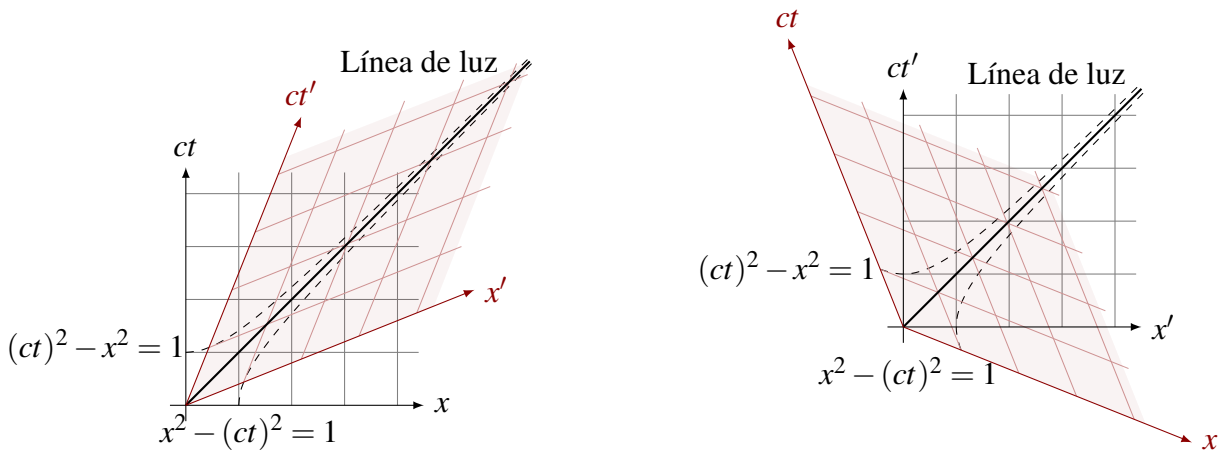
Usando las transformaciones de Lorentz (39) en términos de $\Delta ct'$ y $\Delta x'$, tenemos:

$$\begin{aligned} s'^2 &= \gamma^2 \left[(\Delta ct)^2 - 2vc\Delta x\Delta t + \frac{v^2(\Delta x)^2}{c^2} \right] - \gamma^2 [(\Delta x)^2 - 2v\Delta x\Delta t + v^2(\Delta t)^2] - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\ &= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (\Delta ct)^2 - \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (\Delta x)^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\ &= (\Delta ct)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha demostrado que $s'^2 = s^2$.

Este resultado confirma que el **intervalo de tiempo-espacio** s^2 es invariante bajo las transformaciones de Lorentz, y esta invariancia es fundamental en la relatividad especial, ya que garantiza que todos los observadores inerciales medirán la misma “distancia” en el espacio de Minkowski entre dos eventos, independientemente de su velocidad relativa. Este enfoque proporciona la información necesaria para relacionar las escalas de cada sistema de referencia inercial representado en los diagramas que se presentarán a continuación.

La representación del movimiento unidimensional (sobre el eje x) de una señal o evento en cuanto a la posición y



(a) Diagrama de Minkowski en el primer cuadrante con dos S.R.I. diferentes y dos hipérbolas de calibración para definir la unidad de distancia a lo largo de x y ct en cada sistema.

(b) Diagrama de Minkowski en el primer cuadrante con dos S.R.I. diferentes según el observador S' .

Figura 9. Diagramas de Minkowski para los observadores S y S' con su calibración de ejes.

el tiempo, puede visualizarse mediante los **diagramas de Minkowski**. La descripción de un suceso puntual puede hallarse en el sistema S mediante las coordenadas (ct, x) y en S' con coordenadas (ct', x') . Si se eligen los orígenes de S y S' en forma que coincidan para $t = t' = 0$, la relación entre (ct, x) y (ct', x') está contenida en las transformaciones de Lorentz vistas en las ecuaciones (39). Note que el eje x' puede ser descrito por el observador S , pues la ecuación $ct' = 0$ describe este eje. Luego, al usar las ecuaciones (39), se concluye que la recta $ct = cx/v$ con pendiente c/v describe el eje x' en términos de x y ct . Similarmente, para el eje ct' está descrito por la ecuación $x' = 0$. Es decir que para el sistema S , la descripción de este eje, se encuentra con la recta $ct = vx/c$ con pendiente v/c . En la Figura 9(a), la línea de luz es el trayecto de la luz vista por ambos sistemas inerciales S y S' , como una recta representada por la recta $ct = x$ o $ct' = x'$, respectivamente. Estas rectas tienen la misma pendiente 1, de modo que confirma los postulados de Einstein en la teoría de la relatividad especial. Ahora, para representar la distancia unidad, se considera la distancia invariante $s^2 = 1$:

$$\begin{aligned} (ct)^2 - x^2 &= 1, \\ (ct')^2 - x'^2 &= 1. \end{aligned} \tag{42}$$

Estas ecuaciones definen la hipérbola paralela al eje ct como en la Figura 9(a). Si se toman x y ct como ejes ortogonales, la intersección entre el intervalo $s^2 = 1$ y la recta $x = 0$, define $ct = 1$. Para el caso de los ejes no ortogonales, su intersección corresponde a $ct' = 1$. Similarmente, puede considerar el caso $s^2 = -1$ para obtener la otra hipérbola paralela al eje x y concluir que esta curva corta en $x = 1$ y $x' = 1$. Por tanto, las hipérbolas definen una relación entre x y ct para un número finito de sucesos diferentes descritos en el sistema S , es también un lugar geométrico espacio-temporal de todos los sucesos que representan el tiempo cero y la coordenada x igual a la unidad en sistemas inerciales diferentes.

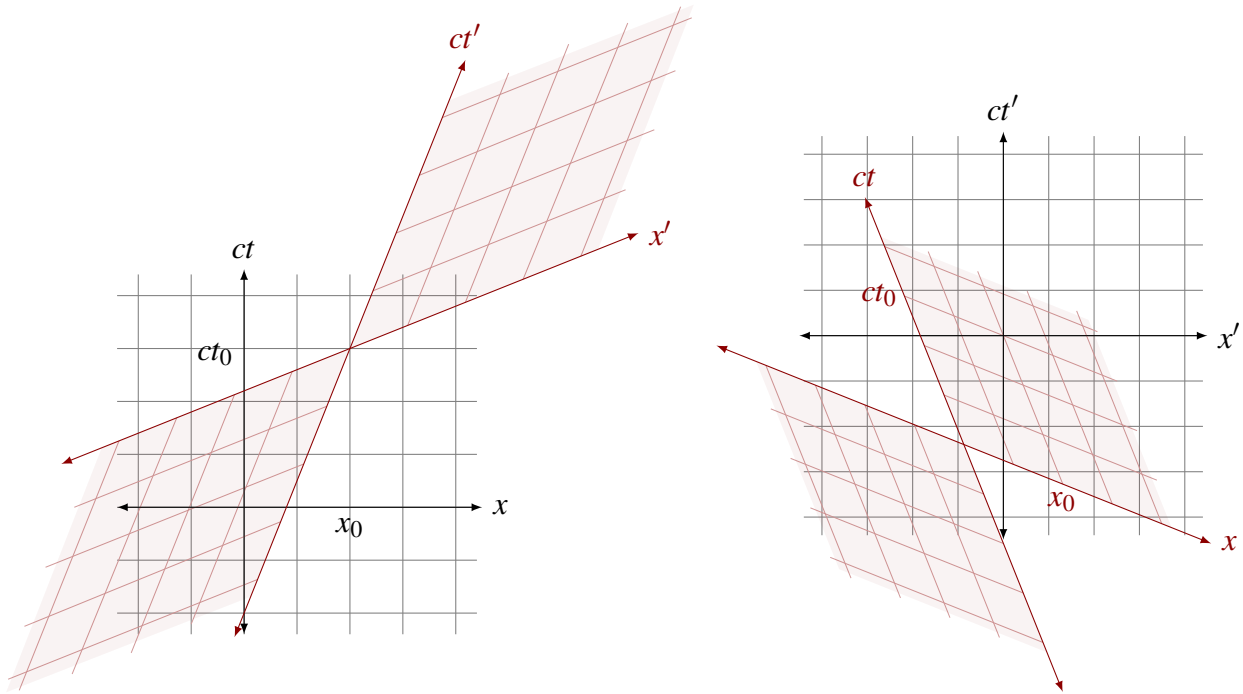
La Figura 9(b), muestra el diagrama tiempo-espacio según el observador S' . En las transformaciones de Lorentz (39) para el sistema S' , cuando $x = 0$ describe el eje ct , se sigue que $ct' = -\frac{c}{v}x'$. Ahora, cuando $ct = 0$, en términos de ct' y x' es la recta $ct' = -\frac{v}{c}x'$. Con esta construcción geométrica se definen los ejes para ambos observadores según S' y además, se conserva la distancia $s'^2 = 1$ que conecta ambos sistemas por medio de las ecuaciones hiperbólicas $(ct')^2 - x'^2 = 1$ y $x'^2 - (ct')^2 = 1$.

Los diagramas de Minkowski también permiten visualizar la relación entre los eventos en el tiempo-espacio desde la perspectiva de distintos observadores, donde el origen del sistema S' está desplazado espacialmente en x_0 y temporalmente en ct_0 con respecto al sistema S , como en la Figura 10(a). Para esto, las ecuaciones que describen la transformación de coordenadas entre ambos sistemas se expresan como

$$x' = \gamma \left((x - x_0) - \frac{v}{c}(ct - ct_0) \right), \quad (43)$$

$$ct' = \gamma \left((ct - ct_0) - \frac{v}{c}(x - x_0) \right). \quad (44)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, los ejes x' y ct' del sistema S' están definidos como las rectas de la Figura 9(a) trasladadas al punto (x_0, ct_0) , es decir, $ct = \frac{v}{c}(x - x_0) + ct_0$ y $ct = \frac{c}{v}(x - x_0) + ct_0$, respectivamente. De las ecuaciones



(a) Diagrama de Minkowski con orígenes distintos según el observador S .

(b) Diagrama de Minkowski con orígenes distintos según el observador S' .

Figura 10. Diagramas de Minkowski para dos observadores con orígenes diferentes.

(43) y (44), se deducen las transformaciones inversas

$$x - x_0 = \gamma \left(x' + \frac{v}{c} ct' \right), \quad (45)$$

$$ct - ct_0 = \gamma \left(ct' + \frac{v}{c} x' \right). \quad (46)$$

Nuevamente, esta transformación ayuda a encontrar los ejes x y ct , en la perspectiva del observador S' , como se muestra en la Figura 10(b), estas ecuaciones son

$$ct' = -\frac{v}{c} x' - \frac{ct_0}{\gamma}, \quad (\text{eje } x)$$

$$ct' = -\frac{v}{c}x' - \frac{x_0}{\gamma}, \quad (\text{eje } ct)$$

con punto de corte $x' = \gamma(\frac{v}{c}ct_0 - x_0)$ y $ct' = \gamma(\frac{v}{c}x_0 - ct_0)$. Esto demuestra que, en el diagrama de Minkowski, los ejes de un observador en movimiento relativo no solo se inclinan simétricamente hacia la línea de mundo de la luz como consecuencia de las transformaciones de Lorentz, sino que también pueden estar trasladados si el origen de coordenadas de dicho observador no coincide con el segundo sistema de referencia. Esta inclinación refleja la mezcla de espacio y tiempo en la relatividad especial y preserva la estructura causal del tiempo-espacio (Rahaman, 2014, p. 67-68), (French, 2017, p. 133-135) y Resnick (1968). Otra forma de representar las transformaciones de Lorentz como en (39), es su forma matricial

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (47)$$

con $\beta = \frac{v}{c}$ y distancia invariante

$$s^2 = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Al considerar la notación contravariante $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ y la matriz $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, se tiene que

$$s^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \quad (49)$$

Si se reescribe lo anterior usando la notación de Einstein como en Wurm *et al.* (2003), nos queda

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \quad (50)$$

5. Transformada de Fourier fraccionaria en relatividad especial

En este capítulo se explora la relación entre la transformada de Fourier estándar bidimensional y las coordenadas espacio-temporales, con el propósito de aplicar herramientas del análisis espectral al estudio de fenómenos en relatividad especial. A partir de esta conexión, se establecen interpretaciones físicas y geométricas de las frecuencias asociadas al espacio y al tiempo, permitiendo formular ejemplos representativos del marco relativista en el dominio espectral. Se analiza cómo las transformaciones de Lorentz afectan a los ejes de frecuencia espacio-temporal, y se demuestra que el intervalo frecuencial asociado permanece invariante bajo cambios de observador inercial. Esta propiedad refuerza la analogía entre el espacio-tiempo físico y su contraparte en el espacio recíproco de Fourier. A través de dos ejemplos concretos, acompañados de simulaciones numéricas, se ilustran los beneficios de este enfoque para interpretar distribuciones y transformadas desde diferentes sistemas de referencia. Estos casos permiten validar de forma visual y analítica los resultados obtenidos mediante el formalismo de Fourier. Finalmente, se extiende el estudio al caso más general de la transformada de Fourier fraccionaria, aplicada a los mismos ejemplos. Este análisis abre nuevas posibilidades para representar y entender transformaciones relativistas en el contexto del análisis espectral no entero, ampliando el marco teórico clásico con herramientas más flexibles y generalizadas.

5.0.1. Transformada de Fourier fraccionaria de orden uno bidimensional en relatividad especial. La geometría utilizada en los diagramas de Minkowski también puede aplicarse al estudio mediante la transformada de Fourier fraccionaria, en dos dimensiones, (x, ct) . Para construir el diagrama correspondiente, primero se debe examinar el comportamiento espectral de los ejes ct y x . Al aplicar la transformada de Fourier estándar

para el eje ct , es

$$\begin{aligned}\mathcal{F} [{}^2\delta(ct)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} {}^2\delta(ct) \exp[-2\pi i(xk_x + ct k_{ct})] dcdx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-2\pi i x k_x] dx \int_{-\infty}^{+\infty} {}^2\delta(ct) \exp[-2\pi i ct k_{ct}] dcdt \\ &= \delta(k_x).\end{aligned}$$

Para el eje horizontal x , se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F} [{}^2\delta(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} {}^2\delta(x) \exp[-2\pi i(xk_x + tk_t)] dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} {}^2\delta(x) \exp[-2\pi i x k_x] dx \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-2\pi i ct \frac{k_t}{c}\right] dcdt \\ &= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-2\pi i ct \frac{k_t}{c}\right] dcdt \\ &= \frac{1}{c} {}^2\delta\left(\frac{k_t}{c}\right) \\ &= \frac{1}{c} {}^2\delta(k_{ct}).\end{aligned}\tag{51}$$

Pero esta transformada es ${}^2\delta(k_t)$, luego ${}^2\delta(k_t) = \frac{1}{c} {}^2\delta(k_{ct})$. Por propiedad escalar para dos dimensiones, esta distribución se cumple si

$$k_{ct} = \frac{k_t}{c}.\tag{52}$$

Estos dos resultados conllevan a representarlos como rectas perpendiculares a su línea percusional respectiva, como se muestra en la Figura 11(b). Ahora la recta de frecuencia espacial k_x es vertical y la recta de frecuencia temporal escalada k_{ct} es horizontal. Para los ejes del segundo observador S' , se considera la conclusión anterior como se resume en la Tabla 4. Los ejes ct' y x' asignados para el marco de referencia S' , son representados como distribuciones: ${}^2\delta(x)$ está a lo largo del eje ct y ${}^2\delta(ct)$ está a lo largo del eje x , como lo muestra la Figura 11(a). Los ejes ct' y x' según el observador S serán expresados como ${}^2\delta(ct - \frac{c}{v}x)$ y ${}^2\delta(ct - \frac{v}{c}x)$, respectivamente. Por el caso especial (3.2.2) y las conclusiones de la Figura (7) indican que, al aplicar la transformada de Fourier estándar, el eje de frecuencia $k_{ct'}$,

Tabla 4

Representación de los objetos geométricos en el diagrama de Minkowski sobre el espacio directo y el espacio recíproco de Fourier estándar.

Espacio directo		Fourier estándar	
Recta	Distribución	Recta	Distribución
$\frac{v}{c}x = ct$	${}^2\delta\left(ct - \frac{v}{c}x\right)$	$k_x = -\frac{c}{v}k_{ct}$	${}^2\delta\left(k_x + \frac{c}{v}k_{ct}\right)$
$\frac{c}{v}x = ct$	${}^2\delta\left(ct - \frac{c}{v}x\right)$	$k_x = -\frac{v}{c}k_{ct}$	${}^2\delta\left(k_x + \frac{v}{c}k_{ct}\right)$
$x = \pm ct$	${}^2\delta(ct \mp x)$	$k_x = \pm k_{ct}$	${}^2\delta(k_x \mp ck_{ct})$

visto por el observador S , es representado por ${}^2\delta(k_{ct} + \frac{v}{c}k_x)$, por el cambio de posición de los ejes frecuenciales de S , entonces ${}^2\delta(k_x + \frac{v}{c}k_{ct})$, es la recta $k_x = -\frac{v}{c}k_{ct}$. Similarmente, el eje de frecuencia $k_{x'}$, corresponde a ${}^2\delta(ct - \frac{v}{c}x)$, entonces al calcular su transformada y el cambio de ejes k_x y k_{ct} es ${}^2\delta(k_x + \frac{c}{v}k_{ct})$, es decir, la recta $k_{ct} = -\frac{c}{v}k_x$. La trayectoria de la luz vista desde los observadores S y S' , se representa por las distribuciones ${}^2\delta(ct \pm x)$ y ${}^2\delta(ct' \pm x')$, que tienen trayectoria de luz espectral ${}^2\delta(k_{ct} \mp k_x)$ y ${}^2\delta(k_{ct'} \mp k_{x'})$ respectivamente, es decir, por las rectas

$$k_t = \pm ck_x \quad \text{y} \quad k_{t'} = \pm ck_{x'}. \quad (53)$$

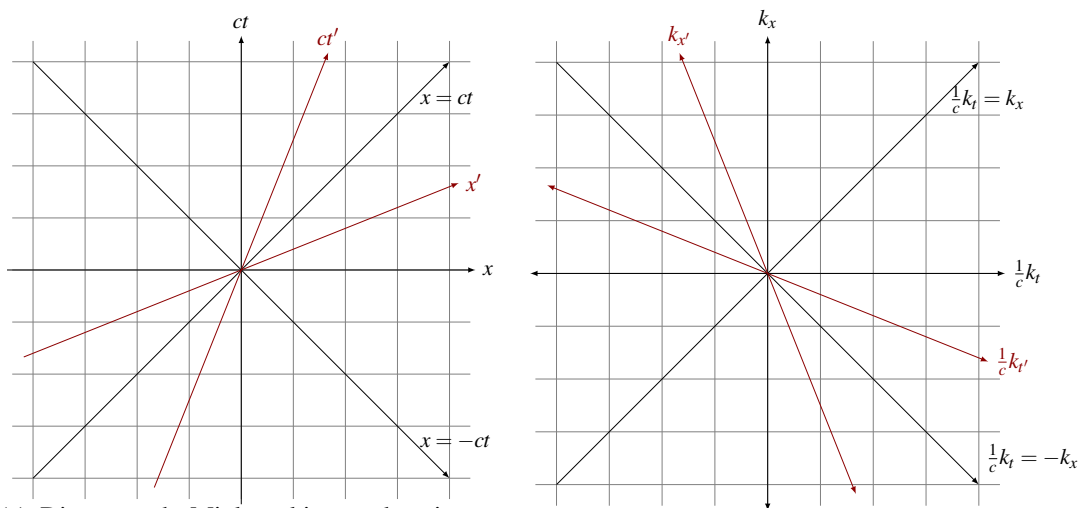
Estos resultados son ilustrados en la Figura 11(b) y 11(d). Una vez mostrado esto, se tendrá en cuenta la relación lineal entre marcos de referencia inercial como en (35), esta vez para frecuencias temporal-espacial

$$k_{x'} = Ak_x + Bk_{ct}, \quad k_{ct'} = Dk_x + Ek_{ct}. \quad (54)$$

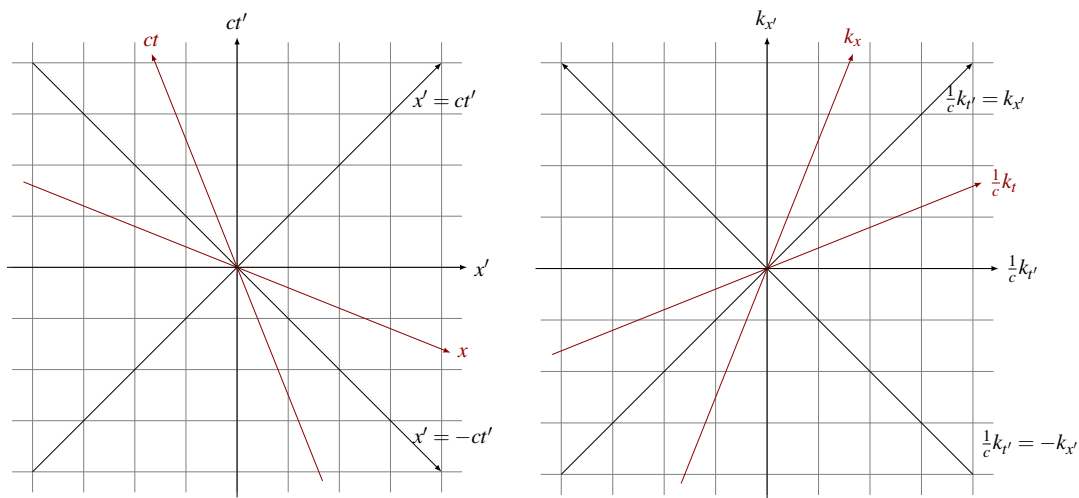
Usando el resultado (52), lo anterior puede escribirse como

$$k_{x'} = Ak_x + B\frac{1}{c}k_t, \quad \frac{1}{c}k_{t'} = Dk_x + E\frac{1}{c}k_t. \quad (55)$$

Si el corrimiento del origen de S' medido por S con ejes de frecuencia $\frac{1}{c}k_t$ y k_x , se define por $k_{x'} = 0$, por la ecuación (55). Así mismo, en la Tabla 4 tenemos que $k_x = -\frac{v}{c}k_{ct}$, esto es $k_x = -\frac{v}{c}\frac{1}{c}k_t$. Entonces, $Ak_x + B\frac{1}{c}k_t = -A\frac{v}{c}\frac{1}{c}k_t + B\frac{1}{c}k_t =$



(a) Diagrama de Minkowski para dos sistemas de referencia en el origen según el observador S . (b) Diagrama de Minkowski con ejes frecuenciales según el observador S .



(c) Diagrama de Minkowski para dos sistemas de referencia en el origen según el observador S' . (d) Diagrama de Minkowski con ejes frecuenciales según el observador S' .

Figura 11. Diagramas de Minkowski en el espacio directo y en el espacio recíproco de Fourier estándar según el observador S y S' , incluyendo las líneas de luz vistas por ambos observadores S , $ct = \pm x$ y S' , $ct' = \pm x'$.

$(A - B\frac{v}{c})\frac{1}{c}k_t = 0 \rightarrow B = A\frac{v}{c}$. Por lo anterior, Las ecuaciones en (55) se resumen en

$$k_{x'} = A \left(k_x + \frac{v}{c} \frac{1}{c} k_t \right), \quad \frac{1}{c} k_{t'} = D k_x + E \frac{1}{c} k_t. \quad (56)$$

Ahora, para el origen de S , $x = 0$ descrita por S' , como en la Figura 11(a), es la ecuación $x' = -vct'$. En el espacio recíproco de Fourier, esto es $k_x = 0$, $\frac{v}{c} \frac{1}{c} k_{t'} = k_{x'}$. Tomando esto en las ecuaciones (56), $k_{x'} = A \frac{1}{c} k_t$ y $\frac{1}{c} k_{t'} = E \frac{1}{c} k_t$. Esto es, $k_{x'} = \frac{v}{c} \frac{1}{c} k_{t'} = E v \frac{1}{c} k_t = A v \frac{1}{c} k_t \rightarrow E = A$. Luego, las ecuaciones (56) se reescriben como

$$k_{x'} = A \left(k_x + \frac{v}{c} \frac{1}{c} k_t \right), \quad \frac{1}{c} k_{t'} = D k_x + A \frac{1}{c} k_t.$$

El enviar una señal de luz en el dominio espectral según cada observador S y S' , se expresa por: $\frac{1}{c} k_t = k_x$ y $\frac{1}{c} k_{t'} = k_{x'}$ se sigue que

$$k_{x'} = A k_x + A \frac{v}{c} k_x, \quad \frac{1}{c} k_{t'} = D k_x + A k_x,$$

$$k_{x'} = \left(A + A \frac{v}{c} \right) k_x, \quad k_{x'} = \frac{1}{c} k_{t'} = (D + A) k_x = (D + A) k_x.$$

Al igualar estas dos ecuaciones, es

$$A + A \frac{v}{c} = D + A \rightarrow D = A \frac{v}{c}.$$

Por el principio de la relatividad, todos los sistemas inerciales son equivalentes. Así, las coordenadas para S según S' son

$$k_x = A k_{x'} - B \frac{1}{c} k_{t'}, \quad \frac{1}{c} k_t = -D k_{x'} + E \frac{1}{c} k_{t'}. \quad (57)$$

Usando el hecho de que $E = A$, $D = Av/c$ y $B = Av/c$,

$$k_x = A k_{x'} - A \frac{v}{c} \frac{1}{c} k_{t'}, \quad \frac{1}{c} k_t = -A \frac{v}{c} k_{x'} + A \frac{1}{c} k_{t'}. \quad (58)$$

Considerando la primera ecuación de (56) y (58) junto con la emisión de luz en el dominio espectral $\frac{1}{c}k_t = k_x$ según S y $\frac{1}{c}k_{t'} = k_{x'}$ según S' , se obtiene

$$k_{x'} = A \left(k_x + \frac{v}{c} \frac{1}{c} k_t \right), \quad k_x = A \left(k_{x'} - \frac{v}{c} \frac{1}{c} k_{t'} \right)$$

$$k_{x'} = A \left(k_x + \frac{v}{c} k_x \right), \quad k_x = A \left(k_{x'} - \frac{v}{c} k_{x'} \right)$$

$$k_{x'} = A \left(1 + \frac{v}{c} \right) k_x, \quad k_x = A \left(1 - \frac{v}{c} \right) k_{x'}$$

Al multiplicar ecuaciones, tenemos

$$k_{x'} k_x = A^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) k_{x'} k_x.$$

Esto es lo mismo que resolver

$$1 = A^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma.$$

Por lo anterior, al sustituir este resultado en las ecuaciones (56), decimos que las transformaciones en el dominio frecuencial para S' según S con velocidad relativa v , son

$$k_{x'} = \gamma \left(k_x + \frac{v}{c} \frac{1}{c} k_t \right), \quad \frac{1}{c} k_{t'} = \gamma \left(\frac{v}{c} k_x + \frac{1}{c} k_t \right). \quad (59)$$

En su representación matricial son

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c} k_{t'} \\ k_{x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v/c \\ \gamma v/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} k_t \\ k_x \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Ahora, para el caso inverso, es decir, las transformaciones en el dominio frecuencial para S según S' con velocidad relativa $-v$ son

$$k_x = \gamma k_{x'} - \gamma \frac{v}{c^2} k_{t'}, \quad k_t = -\gamma v k_{x'} + \gamma k_{t'}. \quad (61)$$

Su forma matricial es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c}k_t \\ k_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c \\ -\gamma v/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c}k_{t'} \\ k_{x'} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Una vez halladas estas transformaciones, puede verificarse la invariancia del intervalo de frecuencia tiempo-espacio independientemente de cualquier sistema S o S' , definida como en (40) y (41). Esto es

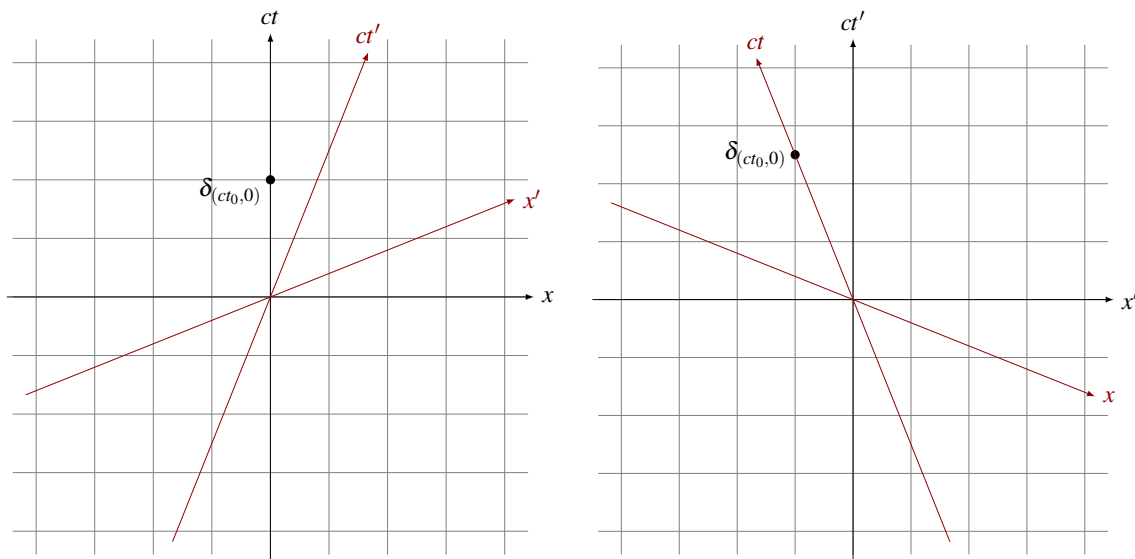
$$\begin{aligned} s'^2 &= \left(\frac{1}{c}k_{t'}\right)^2 - k_{x'}^2 \\ &= \left(\gamma \frac{v}{c}k_x + \gamma \frac{1}{c}k_t\right)^2 - \left(\gamma k_x + \gamma \frac{v}{c}k_t\right)^2 \\ &= \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}k_x^2 + 2\gamma^2 \frac{v}{c^2}k_t k_x + \gamma^2 \frac{1}{c^2}k_t^2 - \gamma^2 k_x^2 - 2\gamma^2 \frac{v}{c^2}k_t k_x - \gamma^2 \frac{v^2}{c^4}k_t^2 \\ &= \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}k_x^2 + \gamma^2 \frac{1}{c^2}k_t^2 - \gamma^2 k_x^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^4}k_t^2 \\ &= \frac{\gamma^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) k_t^2 - \left(\gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right) k_x^2 \\ &= \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{1}{\gamma^2} k_t^2 - \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) k_x^2 \\ &= \frac{1}{c^2} k_t^2 - \gamma^2 \frac{1}{\gamma^2} k_x^2 \\ &= \left(\frac{1}{c}k_t\right)^2 - k_x^2 \\ &= s^2. \end{aligned}$$

Con base en las transformaciones previamente descritas, se propone analizar eventos caracterizados por las coordenadas ct y x , tal como son observados desde los sistemas de referencia S y S' , en el espacio de Fourier. Estos eventos cumplen con la condición de invariancia de Lorentz como se define en el Anexo C.

Ejemplo de aplicación 5.0.1. Se considera un objeto puntual ubicado en la posición $x = 0$ en el instante ct_0 . Este evento puede representarse mediante una distribución delta de Dirac

$$\delta_{(0,ct_0)}(x, ct). \quad (63)$$

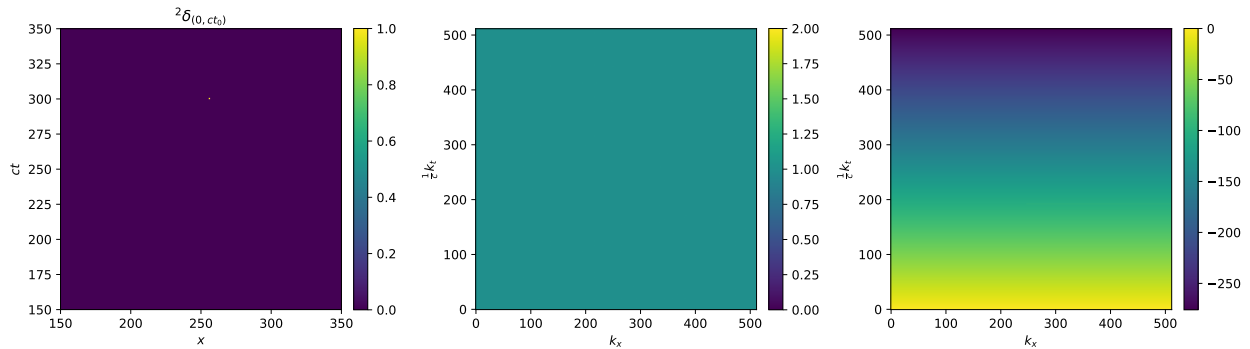
Esta expresión codifica la localización precisa del objeto en el espacio-tiempo: la función delta es diferente de cero únicamente cuando $ct = ct_0$ y $x = 0$, es decir, cuando el evento ocurre exactamente en esa coordenada temporal y espacial. De acuerdo con los resultados del Anexo C y la convergencia de funciones gaussianas vista en el caso especial 2.3.9, la distribución $\delta_{(0,ct_0)}$ es una señal de la invariante de Lorentz. Ahora, se plantea este ejemplo en un marco de referencia inercial S y S' con velocidad relativa v . La transformada de Fourier estándar para esta señal es $\exp(-2\pi i ct_0 \frac{1}{c} k_t)$ (ver Figura 13). Teniendo en cuenta el cambio de ejes de frecuencia para el observador S , entonces $\mathcal{F}[\delta_{(ct_0,0)}] = \exp(-2\pi i ct_0 k_x)$. De esto, su módulo es 1 y fase $\theta = -2\pi ct_0 k_x$, como en la Figura 12(a). Por otro lado,



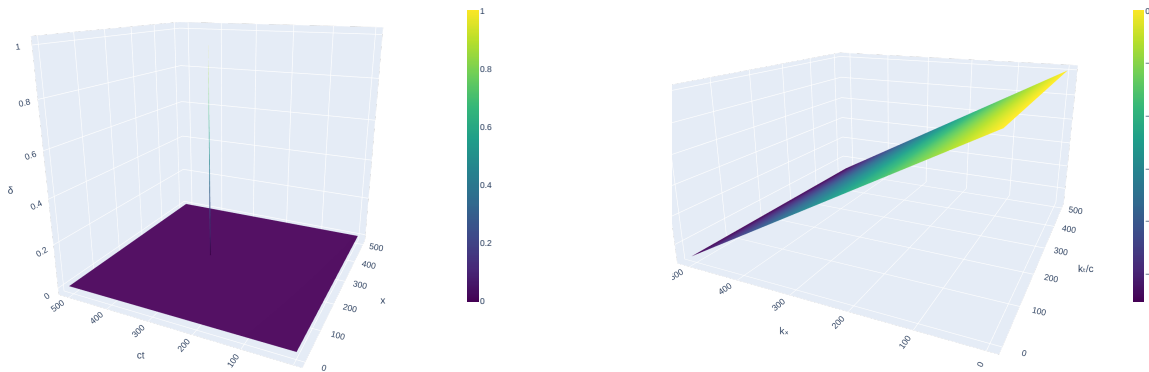
(a) Diagrama de Minkowski para dos sistemas de referencia en el origen según el observador S . (b) Diagrama de Minkowski para dos sistemas de referencia en el origen según el observador S' .

Figura 12. Diagramas de Minkowski según el observador S y S' .

al tomar las transformaciones de Lorentz (39), las coordenadas para este evento según S' son $ct' = \gamma ct_0$, $x' = -\gamma \frac{v}{c} ct_0$, como en la Figura 12(b). Para el observador S' , su transformada de Fourier estándar es $\exp[-2\pi i (\gamma ct_0 k_{x'} - \gamma \frac{v}{c} ct_0 \frac{1}{c} k_{t'})]$ (ver Figura 14). De acuerdo a este resultado, el módulo es uno y fase $\theta' = -2\pi (\gamma ct_0 k_{x'} - \gamma \frac{v}{c} ct_0 \frac{1}{c} k_{t'})$, según el sistema S' . Por lo anterior, se hará uso de las transformaciones obtenidas en (59)



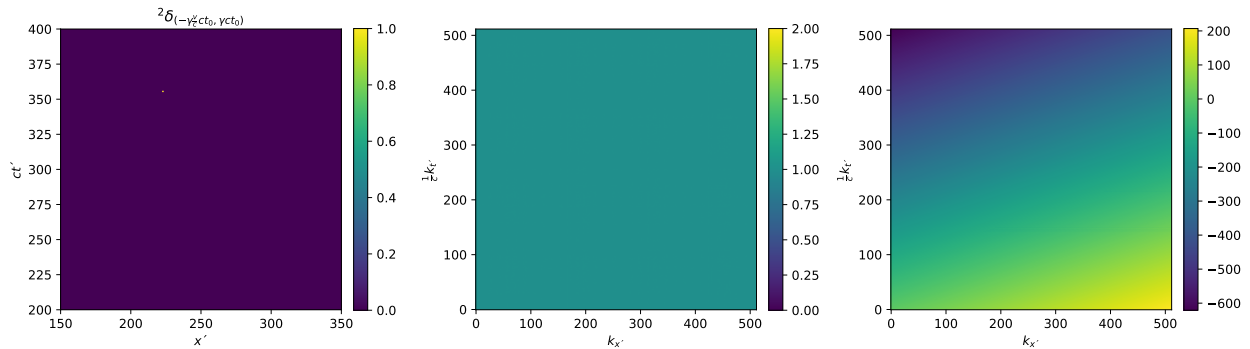
(a) De izquierda a derecha: La primera gráfica corresponde a una simulación del $\delta_{(0,ct_0)}$ con recorte de malla $(150, 350) \times (150, 350)$. La segunda gráfica es el módulo espectral de valor uno en todo su dominio. La última simulación es la fase en el dominio espectral desvuelta, descrita por el plano $\theta = -2\pi ct_0 k_x$.



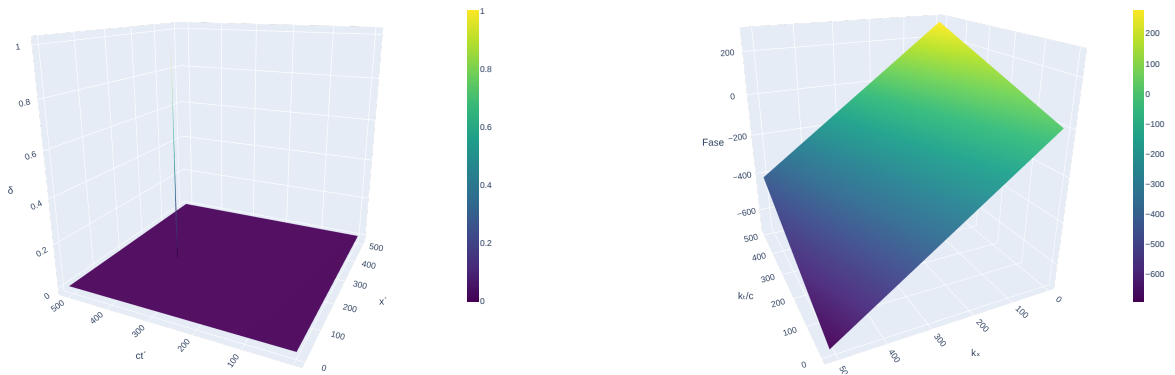
(b) Representación de la distribución δ en 3D considerada como pulso discreto, nula en todo su dominio excepto en el punto $(0, ct_0)$.

(c) La fase desvuelta de la señal percusional $\delta_{(0,ct_0)}$, simulada en 3D.

Figura 13. Simulaciones de la señal, $\delta_{(0,ct_0)}$ en el sistema S , como un pulso discreto de altura uno, módulo y fase espectral desvuelta, definidas sobre una malla de tamaño 512×512 puntos. Estas visualizaciones son vistas como gráficas de contorno y en 3D.



(a) De izquierda a derecha: La primera gráfica corresponde a una simulación de la señal $\delta_{(-\gamma_c^v ct_0, \gamma ct_0)}(x', ct')$ con recorte de malla $(150, 350) \times (200, 400)$. La segunda gráfica es el módulo espectral de valor uno en todo su dominio. La tercera simulación es la fase en el dominio espectral desvuelta, que indica que el plano inclinado es de la forma $\theta' = -2\pi(ct_0 k_{x'} - \gamma_c^v \frac{1}{c} k_{ct'})$.



(b) Representación de la distribución δ en 3D considerada como pulso discreto, nula en todo su dominio excepto en el punto $(-\gamma_c^v ct_0, \gamma ct_0)$.

(c) La fase desvuelta de la señal percusional $\delta_{(-\gamma_c^v ct_0, \gamma ct_0)}$, simulada en 3D.

Figura 14. Simulaciones de la señal, $\delta_{(-\gamma_c^v ct_0, \gamma ct_0)}$ el sistema S' , como un pulso discreto de altura uno, módulo y fase espectral desvuelta, definidas sobre una malla de tamaño 512×512 puntos. Estas visualizaciones son vistas como gráficas de contorno y en 3D.

o (61) en la fase. Observemos que

$$\begin{aligned}
 \theta' &= -2\pi \left(\gamma ct_0 k_{x'} - \gamma \frac{v}{c} ct_0 \frac{1}{c} k_{t'} \right) \\
 &= -2\pi ct_0 \left(\gamma k_{x'} - \gamma \frac{v}{c} \frac{1}{c} k_{t'} \right) \\
 &= -2ct_0 k_x \qquad \qquad \qquad \text{(Transformaciones en (61))} \\
 &= \theta.
 \end{aligned}$$

Esto muestra que el plano de fase visto por el sistema de referencia S es el mismo que el percibido por el observador S' . Así como se estudió en el espacio directo, la fase en el dominio espectral se mantiene coherente entre observadores inerciales, aunque sus coordenadas de frecuencia espacio-temporales asociadas difieran. En este sentido, la fase en el dominio espectral es una cantidad relativa en términos de frecuencia, pero consistente en ambos marcos de referencia, sin contradicción alguna con la relatividad especial.

Ejemplo de aplicación 5.0.2. Considérese un evento de observación correspondiente a un objeto localizado permanentemente en la posición $x = 0$ respecto al sistema de referencia S . Este evento se representa mediante la distribución:

$${}^2\delta(x). \qquad \qquad \qquad (64)$$

Esta formulación representa un objeto que permanece inmóvil en $x = 0$ para todo instante de tiempo t desde la perspectiva del observador en S . Es decir, su localización espacial es fija a lo largo de toda la evolución temporal. Por el resultado en la ecuación (51), la transformada de Fourier estándar coincide con el eje de frecuencia horizontal $\frac{1}{c}{}^2\delta(k_t)$, es decir, cuando $k_x = 0$. Por las transformaciones de Lorentz, las coordenadas del evento para el observador S' están representadas por la ecuación lineal $x' = -\frac{v}{c}ct'$. Como distribución, esto es

$${}^2\delta\left(ct' + \frac{c}{v}x'\right). \qquad \qquad \qquad (65)$$

La transformada de Fourier estándar de este evento junto con el cambio de posición en los ejes de frecuencia, es

$${}^2\delta\left(k_{x'} - \frac{v}{c} \frac{1}{c} k_{t'}\right). \quad (66)$$

Para el sistema S' , al usar las transformaciones encontradas en (61), cuando $k_x = 0$, se tiene que $k_{x'} = \frac{v}{c} \frac{1}{c} k_{t'}$. Esto comprueba que ambos marcos de referencia describen la misma línea para el módulo en el dominio espectral.

5.0.2. Transformada de Fourier fraccionaria de cualesquier orden bidimensional en relatividad especial. Para esta última parte, se tendrá en cuenta los ejemplos de aplicación 5.0.1 y 5.0.2 para el estudio de la transformada de Fourier fraccionaria en dos dimensiones. Se hará en detalle los ejemplos de aplicación 5.0.3 y 5.0.4 para los sistemas de referencia inercial S y S' , mientras que los ejemplos de aplicación 5.0.5 y 5.0.6, serán ejemplos que ilustren otras posibles formas geométricas del ejemplo 5.0.4 según el observador S .

Ejemplo de aplicación 5.0.3. Para el ejemplo de aplicación 5.0.1 según el observador S , se tiene la siguiente transformada \mathcal{F}^a de orden $a = (a_1, a_2)$

$$\mathcal{F}^a[\delta_{(0,ct_0)}(x, ct)] = \sqrt{|\csc \theta_1 \csc \theta_2|} \exp \left[i\pi \left(\frac{k_t^2}{c^2} \cot \theta_2 - 2ct_0 \frac{k_t}{c} \csc \theta_2 + c^2 t_0^2 \cot \theta_2 + k_x^2 \cot \theta_1 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{sgn}(\theta_1) + \operatorname{sgn}(\theta_2)}{4} \right) \right] \quad (67)$$

$$= \sqrt{|\csc \theta_1 \csc \theta_2|} \exp \left[i\pi \left(\cot \theta_2 \left(\frac{k_t}{c} - ct_0 \sec \theta_2 \right)^2 + k_x^2 \cot \theta_1 - c^2 t_0^2 \tan \theta_2 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{sgn}(\theta_1) + \operatorname{sgn}(\theta_2)}{4} \right) \right], \quad (68)$$

con $\theta_1 = a_1 \frac{\pi}{2}$ y $\theta_2 = a_2 \frac{\pi}{2}$. De lo anterior, el módulo $|\mathcal{F}^a|$ es $\sqrt{|\csc \theta_1 \csc \theta_2|}$ y la fase

$$\frac{\theta}{\pi} = \cot \theta_2 \left(\frac{k_t}{c} - ct_0 \sec \theta_2 \right)^2 + k_x^2 \cot \theta_1 - c^2 t_0^2 \tan \theta_2 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{sgn}(\theta_1) + \operatorname{sgn}(\theta_2)}{4}. \quad (69)$$

De la expresión anterior, consideramos el caso $\theta_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ y $\theta_1 = \theta_2$. Entonces,

$$\frac{\theta}{\pi} = \cot \theta_1 \left(\frac{k_t}{c} - ct_0 \sec \theta_1 \right)^2 + k_x^2 \cot \theta_1 - c^2 t_0^2 \tan \theta_1 + \frac{\theta_1}{\pi} - \frac{1}{4} \quad (70)$$

representa un paraboloides, como se muestra en la Figura 15. Tome la fase θ como parámetro r , luego

$$\left(\frac{k_t}{c} - ct_0 \sec \theta_1 \right)^2 + k_x^2 = \tan \theta_1 \left(c^2 t_0^2 \tan \theta_1 - \frac{\theta_1}{\pi} + \frac{1}{4} - \frac{r}{\pi} \right) \quad (71)$$

$$\left(\frac{k_t}{c} - ct_0 \sec \theta_1 \right)^2 + k_x^2 = R^2, \quad (72)$$

donde $R^2 = \tan \theta_1 \left(c^2 t_0^2 \tan \theta_1 - \frac{\theta_1}{\pi} + \frac{1}{4} - \frac{r}{\pi} \right)$. Por lo anterior, las trazas paralelas al plano $k_x, \frac{k_t}{c}$ son circunferencias centradas en el punto $(0, ct_0 \sec \theta_1)$ y radio R que depende de θ_1, ct_0 y el parámetro r . Si k_x es el parámetro r , entonces

$$\frac{\theta}{\pi} = \cot \theta_1 \left(\frac{k_t}{c} - ct_0 \sec \theta_1 \right)^2 + r^2 \cot \theta_1 - c^2 t_0^2 \tan \theta_1 + \frac{\theta_1}{\pi} - \frac{1}{4} \quad (73)$$

$$\left(\frac{k_t}{c} - ct_0 \sec \theta_1 \right)^2 = \tan \theta_1 \left(\frac{\theta}{\pi} - r^2 \cot \theta_1 + c^2 t_0^2 \tan \theta_1 - \frac{\theta_1}{\pi} + \frac{1}{4} \right) \quad (74)$$

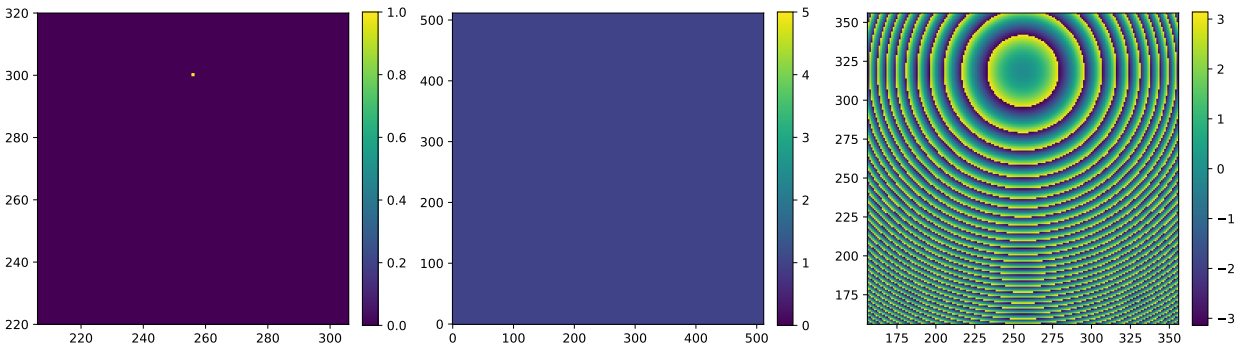
$$\left(\frac{k_t}{c} - ct_0 \sec \theta_1 \right)^2 = 4 \frac{\tan \theta_1}{4\pi} \left(\theta - \pi r^2 \cot \theta_1 + \pi c^2 t_0^2 \tan \theta_1 - \theta_1 + \frac{\pi}{4} \right). \quad (75)$$

Con esto, se describe una parábola que abre hacia arriba con valor $p = \tan \theta_1 / 4\pi > 0$. Quiere decir que el lado recto de la gráfica es $4p = \tan \theta_1$. Tiene centro en el punto $(ct_0 \sec \theta_1, \pi r^2 \cot \theta_1 - \pi c^2 t_0^2 \tan \theta_1 + \theta_1 - \frac{\pi}{4})$. Observe que este punto depende del ángulo θ_1 y ct_0 . Similarmente, las trazas paralelas al plano k_x, θ , tomando k_t/c como parámetro r ,

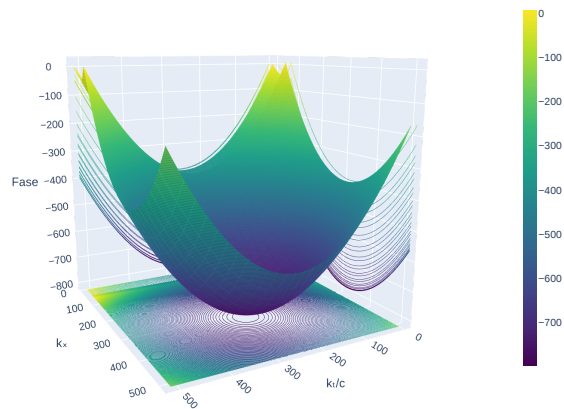
$$k_x^2 \cot \theta_1 = \frac{\theta}{\pi} - \cot \theta_1 (r - ct_0 \sec \theta_1)^2 + c^2 t_0^2 \tan \theta_1 - \frac{\theta_1}{\pi} + \frac{1}{4} \quad (76)$$

$$k_x^2 = \frac{\tan \theta_1}{\pi} \left(\theta - \pi \cot \theta_1 (r - ct_0 \sec \theta_1)^2 + \pi c^2 t_0^2 \tan \theta_1 - \theta_1 + \frac{\pi}{4} \right). \quad (77)$$

Vemos que es una parábola centrada en el punto $(0, \pi \cot \theta_1 (r - ct_0 \sec \theta_1)^2 - \pi c^2 t_0^2 \tan \theta_1 + \theta_1 - \frac{\pi}{4})$. Es decir que el vértice solo tiene cambios en la altura que depende de θ_1 y ct_0 . Ahora, la señal vista por el observador S' , está



(a) De izquierda a derecha: La primera gráfica representa sobre la línea de tiempo $\delta_{(0,ct_0)}$ según S en un recorte de malla $(206, 306) \times (220, 320)$. Luego se muestra el módulo y fase en el dominio fraccionario envuelta de orden $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sobre la malla de tamaño 512×512 puntos y recorte $(156, 356) \times (156, 356)$.



(b) Paraboloido simulado para la fase en el dominio espectral fraccionario desenvuelta incluyendo las trazas para cada plano.

Figura 15. Representación de la señal $\delta_{(0,ct_0)}$, módulo y fase en el dominio espectral fraccionario de orden $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $\theta = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Esta simulación es realizada utilizando el resultado teórico (5.0.1).

representada por $\delta_{(a,b)}(x', ct')$ con $a = -\gamma_c^v ct_0$ y $b = \gamma ct_0$. Entonces,

$$\mathcal{F}^a[\delta_{(0,ct_0)}(x', ct')] = \sqrt{|\csc \theta_1 \csc \theta_2|} \exp \left[i\pi \left(\frac{k_{t'}^2}{c^2} \cot \theta_2 - 2b \frac{k_{t'}}{c} \csc \theta_2 + b^2 \cot \theta_2 + k_{x'}^2 \cot \theta_1 + -2ak_{x'} \csc \theta_1 \right. \right. \quad (78)$$

$$\left. \left. + a^2 \cot \theta_1 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\text{sgn}(\theta_1) + \text{sgn}(\theta_2)}{4} \right) \right]$$

$$= \sqrt{|\csc \theta_1 \csc \theta_2|} \exp \left[i\pi \left(\cot \theta_2 \left(\frac{k_{t'}}{c} - b \sec \theta_2 \right)^2 + \cot \theta_1 (k_{x'} - a \sec \theta_1)^2 - a^2 \tan \theta_1 \right. \right. \quad (79)$$

$$\left. \left. - b^2 \tan \theta_2 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\text{sgn}(\theta_1) + \text{sgn}(\theta_2)}{4} \right) \right].$$

De este resultado, el módulo no cambia, mientras que la fase

$$\frac{\theta'}{\pi} = \cot \theta_2 \left(\frac{k_{t'}}{c} - b \sec \theta_2 \right)^2 + \cot \theta_1 (k_{x'} - a \sec \theta_1)^2 - a^2 \tan \theta_1 - b^2 \tan \theta_2 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\text{sgn}(\theta_1) + \text{sgn}(\theta_2)}{4}. \quad (80)$$

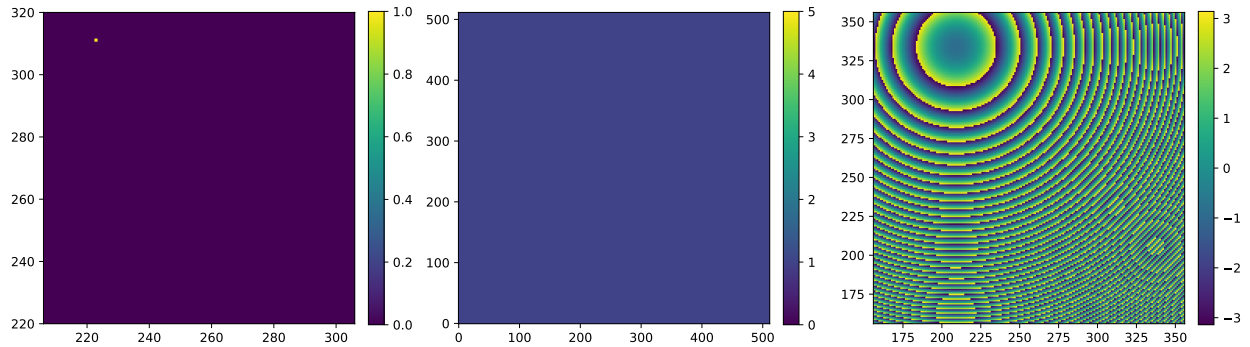
es un paraboloide con vértice $(a \sec \theta_1, b \sec \theta_1)$, como se muestra en la Figura 16. Si se toma $\theta_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ y $\theta_1 = \theta_2$,

la fase se simplifica a

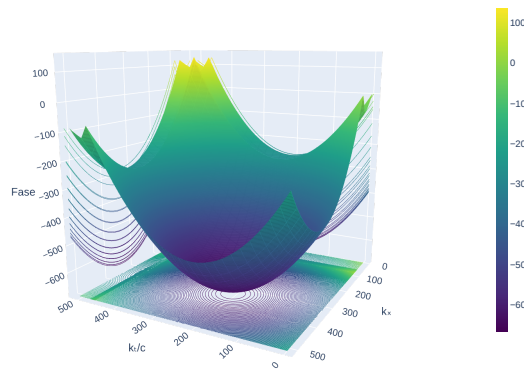
$$\frac{\theta'}{\pi} = \cot \theta_1 \left(\frac{k_{t'}}{c} - b \sec \theta_1 \right)^2 + \cot \theta_1 (k_{x'} - a \sec \theta_1)^2 - a^2 \tan \theta_1 - b^2 \tan \theta_2 + \frac{\theta_1}{\pi} - \frac{1}{4}. \quad (81)$$

Haciendo un análisis geométrico como se realizó para el observador S , las trazas respecto al plano $k_{x'}, \frac{k_{t'}}{c}$, se tienen circunferencias centradas en el punto $(a \sec \theta_1, b \sec \theta_1) = (-\gamma_c^v ct_0 \sec \theta_1, \gamma ct_0 \sec \theta_1)$. Las trazas respecto al plano $\frac{k_{t'}}{c}, \theta'$ son parábolas con vértice $(f(\theta_1, ct_0), g(\theta_1, ct_0))$, donde las componentes $f(\theta_1, ct_0)$ y $g(\theta_1, ct_0)$ dependen de los valores θ_1 y ct_0 . Su apertura o lado recto se mantiene, es decir, $\tan \theta_1 > 0$. Similarmente, las trazas respecto al plano $k_{x'}, \theta'$ son parábolas donde las coordenadas del vértice dependen del ángulo θ_1 y traslación ct_0 , con la misma apertura $\tan \theta_1$.

Para el ejemplo de aplicación 5.0.2, así como en la ecuación (31), su transformada de orden $a = (a_1, a_2)$ con $\theta =$



(a) De izquierda a derecha: La primera gráfica representa sobre la línea de tiempo $\delta_{(a,b)}(x', ct')$ según S' en un recorte de malla $(206, 306) \times (220, 320)$. Luego se muestra el módulo y fase en el dominio fraccionario envuelta de orden $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sobre la malla de tamaño 512×512 puntos y recorte $(156, 356) \times (156, 356)$.



(b) Paraboloides simulado para la fase en el dominio espectral fraccionario desenvuelta incluyendo las trazas para cada plano.

Figura 16. Representación de la señal $\delta_{(a,b)}(x', ct')$, módulo y fase en el dominio espectral fraccionario de orden $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $\theta' = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Esta simulación es realizada utilizando el resultado teórico (5.0.1).

(θ_1, θ_2) , $\theta_1 = a_1 \frac{\pi}{2}$ y $\theta_2 = a_2 \frac{\pi}{2}$, es deducida por

$$\mathcal{F}^a[{}^2\delta(x - mct)] = \sqrt{\frac{|\csc \theta_1 \csc \theta_2|}{\cot \theta_2 + m^2 \cot \theta_1}} \exp \left[i\pi \left(\frac{1}{c^2} k_t^2 \cot \theta_2 + k_x^2 \cot \theta_1 - \frac{(\frac{1}{c} k_t \csc \theta_2 + m k_x \csc \theta_1)^2}{(\cot \theta_2 + m^2 \cot \theta_1)} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{sgn}(\theta_1) + \operatorname{sgn}(\theta_2)}{4} \right) \right]. \quad (82)$$

Cuando $m = 0$,

$$\mathcal{F}^a[{}^2\delta(x)] = \sqrt{\frac{\csc \theta_1 \csc \theta_2}{\cot \theta_2}} \exp \left[i\pi \left(\frac{1}{c^2} k_t^2 \cot \theta_2 + k_x^2 \cot \theta_1 - \frac{(\frac{1}{c} k_t \csc \theta_2)^2}{\cot \theta_2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{sgn}(\theta_1) + \operatorname{sgn}(\theta_2)}{4} \right) \right]. \quad (83)$$

A partir del anterior resultado, se analizará la transformada de Fourier fraccionaria en tres casos:

Ejemplo de aplicación 5.0.4 ($|\theta| < \frac{\pi}{2}$). Para $\theta_1, \theta_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$, se toma el caso particular $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{4}$, luego, $\theta_2 = \frac{\pi}{4} - \theta_1$. De esto se tiene que

$$\operatorname{sen} \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_1) \rightarrow \csc \theta_2 = \frac{\sqrt{2} \csc \theta_1}{\cot \theta_1 - 1}, \quad \cot \theta_2 = \frac{\cot \theta_1 + 1}{\cot \theta_1 - 1}.$$

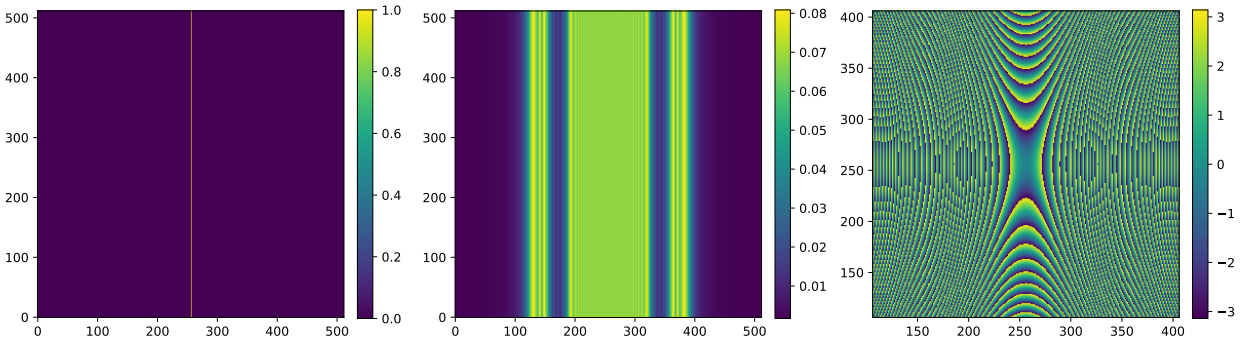
Usando lo anterior en la expresión (83), tenemos

$$\mathcal{F}^a[{}^2\delta(x)] = \sqrt{\frac{\sqrt{2} \csc^2 \theta_1}{\cot \theta_1 + 1}} \exp \left[i\pi \left(\frac{\cot \theta_1 + 1}{\cot \theta_1 - 1} \frac{1}{c^2} k_t^2 + k_x^2 \cot \theta_1 - \frac{(\frac{1}{c} k_t \csc \theta_2)^2}{\frac{\cot \theta_1 + 1}{\cot \theta_1 - 1}} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) \right] \quad (84)$$

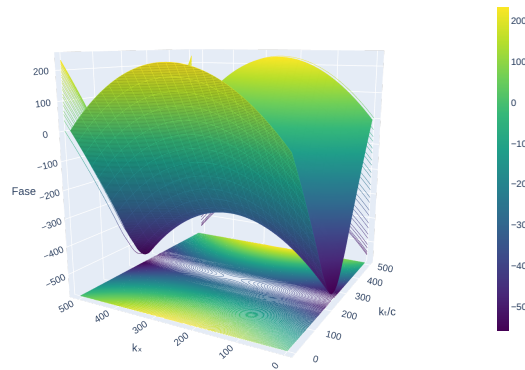
$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\cot \theta_1 + 1}} \csc \theta_1 \exp \left[i\pi \left(\frac{\cot \theta_1 + 1}{\cot \theta_1 - 1} \frac{1}{c^2} k_t^2 + k_x^2 \cot \theta_1 - \frac{\cot \theta_1 - 1}{\cot \theta_1 + 1} \frac{2 \csc^2 \theta_1}{(\cot \theta_1 - 1)^2} \frac{1}{c^2} k_t^2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) \right] \quad (85)$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\cot \theta_1 + 1}} \csc \theta_1 \exp \left[i\pi \left(-\frac{(\cot \theta_1 + 1)(2 \csc^2 \theta_1 + 1 - \cot \theta_1)}{(\cot \theta_1 - 1)^2} \frac{1}{c^2} k_t^2 + k_x^2 \cot \theta_1 - \frac{1}{8} \right) \right]. \quad (86)$$

Decimos que $\mathcal{F}^a[{}^2\delta(x)]$ tiene módulo



(a) De izquierda a derecha: La primera gráfica representa la línea de tiempo ${}^2\delta(x)$. Luego se muestra el módulo y fase en el dominio fraccionario envuelta de orden $a = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ sobre la malla de tamaño 512×512 puntos y recorte $(106, 406) \times (106, 406)$.



(b) Paraboloide hiperbólico simulado para la fase en el dominio espectral fraccionario desenvuelta incluyendo las trazas para cada plano.

Figura 17. Representación de la señal, módulo y fase en el dominio espectral fraccionario de orden $a = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ y $\theta = (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$. Esta simulación es realizada utilizando el resultado teórico (86).

$$|\mathcal{F}^a[\delta(x)]| = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\cot \theta_1 + 1} \csc \theta_1} \quad (87)$$

y fase

$$\theta = \frac{k_x^2}{a^2} - \frac{1}{b^2 c^2} k_t^2 - \frac{1}{8}, \quad (88)$$

donde $a = \frac{\cot \theta_1 - 1}{\sqrt{\pi(\cot \theta_1 + 1)(2 \csc^2 \theta_1 + 1 - \cot \theta_1)}}$ y $b = \sqrt{\tan \theta_1 / \pi}$. En la Figura 17(b) se ilustra la simulación del caso particular $\theta_1 = \theta_2$, la fase desenvuelta y las trazas paralelas al plano horizontal, vertical y de perfil: Hipérbolas a lo largo del eje k_x respecto al plano $k_x, \frac{k_t}{c}$, parábolas que abren hacia abajo respecto al plano $\frac{k_t}{c}, \theta$ y parábolas que abren hacia arriba respecto al plano k_x, θ . Para el observador S' , la señal es descrita como en la ecuación (65). La transformada de Fourier fraccionaria para cualquier distribución lineal obtenida en la ecuación (31), se deduce que el módulo constante solo depende de los valores θ_1, θ_2 y la pendiente m . Para la fase, puede reescribirse como

$$\frac{\theta'}{\pi} = \left(\cot \theta_1 - \frac{\csc^2 \theta_1}{\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2} \right) k_{x'}^2 + \left(\cot \theta_2 - \frac{m^2 \csc^2 \theta_2}{\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2} \right) \frac{k_{t'}^2}{c^2} - \frac{2m \csc \theta_1 \csc \theta_2}{\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2} k_{x'} \frac{k_{t'}}{c} + \frac{\theta_2 + \theta_2}{2\pi} - \frac{1}{4}, \quad (89)$$

con $m = -c/v$. La traza respecto al plano $k_{x'}, \frac{k_{t'}}{c}$, es decir, la intersección al plano $\theta' = r$ con parámetro $r \in \mathbb{R}$, se tiene

$$A k_{x'}^2 + B k_{x'} \frac{k_{t'}}{c} + E \frac{k_{t'}^2}{c^2} + F = 0, \quad (90)$$

donde $A = \cot \theta_1 - \frac{\csc^2 \theta_1}{\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2}$, $B = -\frac{2m \csc \theta_1 \csc \theta_2}{\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2}$, $E = \cot \theta_2 - \frac{m^2 \csc^2 \theta_2}{\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_2}$ y $F = \frac{\theta_2 + \theta_2}{2\pi} - \frac{1}{4} - \frac{r}{\pi}$. Esta ecuación, es un caso especial de hipérbolas con rotación de ejes $k_{x'}$ y $k_{t'}/c$. Este ángulo de rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj, φ es calculado como en (Zill *et al.*, 2012, cáp. 11.4),

$$\tan 2\varphi = \frac{B}{A - C}. \quad (91)$$

Teniendo en cuenta que $\theta_1 = \theta_2$, entonces

$$\tan 2\varphi = \frac{-2m \csc^2 \theta_1}{(\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_1) \cot \theta_1 - \csc^2 \theta_1 - (\cot \theta_1 + m^2 \cot \theta_1) \cot \theta_1 + m^2 \csc^2 \theta_1} \quad (92)$$

$$= \frac{-2m \csc^2 \theta_1}{-\csc^2 \theta_1 (1 - m^2)} \quad (93)$$

$$= \frac{2m}{1 - m^2}. \quad (94)$$

De esto, se deduce que $\tan \varphi = m$. Por lo anterior, los ejes $k_{x'}$ y $k_{t'}/c$ son rotados con un ángulo de $\tan^{-1} m$. Este valor coincide con el ángulo de inclinación de la señal original. Por tanto, el eje rotado $k_{t'}/c$ está representado por la ecuación (65) y el eje rotado $k_{x'}$ está expresado como

$${}^2\delta \left(\frac{k_{t'}}{c} - \frac{v}{c} k_{x'} \right).$$

Para las trazas a los demás planos, se conservan las mismas conclusiones que en el diagrama de Minkowski para el observador S . Los resultados de este análisis geométrico son ilustrados en la Figura 18.

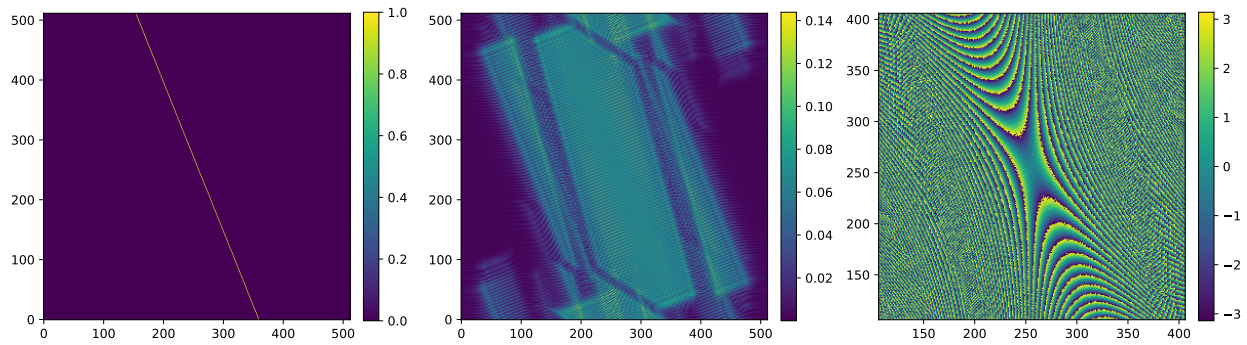


Figura 18. De izquierda a derecha: La primera gráfica representa la señal ${}^2\delta(ct' + cx'/v)$ según el observador S' . Luego se muestra el módulo y fase envuelta en el dominio fraccionario de orden $a = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ sobre la malla de tamaño 512×512 puntos y recorte $(156, 356) \times (156, 356)$.

Ejemplo de aplicación 5.0.5 ($|\theta| = \frac{\pi}{2}$). Para $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$, luego, $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$. Tenemos las relaciones

$$\csc \theta_2 = \sec \theta_1, \quad \cot \theta_2 = \tan \theta_1.$$

Reemplazamos esto en (83) y obtenemos

$$\mathcal{F}^a[{}^2\delta(x)] = \sqrt{\frac{\csc \theta_1 \sec \theta_1}{\tan \theta_1}} \exp \left[i\pi \left(\frac{1}{c^2} k_t^2 \tan \theta_1 + k_x^2 \cot \theta_1 - \frac{(\frac{1}{c} k_t \sec \theta_1)^2}{\tan \theta_1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \right] \quad (95)$$

$$= \csc \theta_1 \exp \left[i\pi \left(k_x^2 \cot \theta_1 - \left(\frac{1}{\sec \theta_1 \csc \theta_1} - \tan \theta_1 \right) \frac{1}{c^2} k_t^2 \right) \right] \quad (96)$$

$$= \csc \theta_1 \exp \left[i\pi \left(k_x^2 \cot \theta_1 - \frac{1}{c^2} k_t^2 \cot \theta_1 \right) \right] \quad (97)$$

$$= \csc \theta_1 \exp \left[i\pi \cot \theta_1 \left(k_x^2 - \frac{1}{c^2} k_t^2 \right) \right]. \quad (98)$$

Para este caso, $\mathcal{F}^a[{}^2\delta(x)]$ tiene módulo

$$|\mathcal{F}^a[{}^2\delta(x)]| = \csc \theta_1$$

y fase

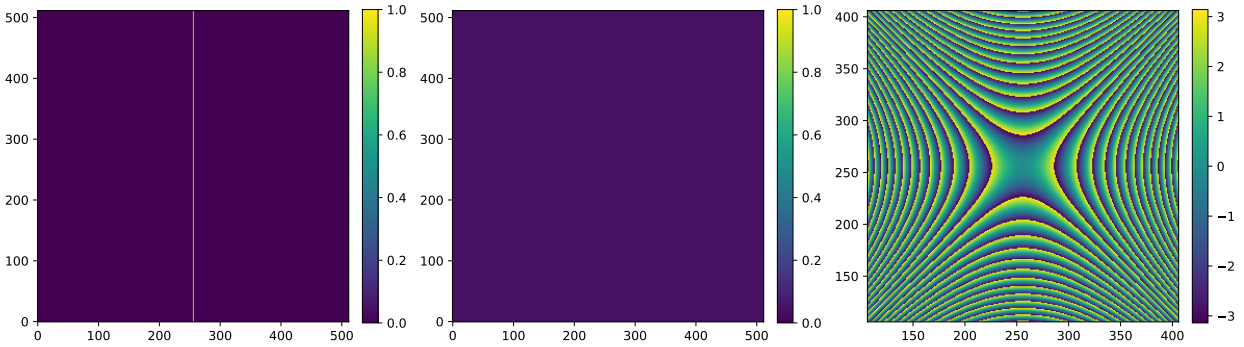
$$\theta = \frac{k_x^2}{a^2} - \frac{1}{a^2 c^2} k_t^2, \quad (99)$$

con $a = \sqrt{\tan \theta_1 / \pi}$. Para este resultado, la fase tiene forma de paraboloides hiperbólico rectangular con asíntotas $\frac{1}{c} k_t = \pm k_x$ y distancia focal $2a$, como se muestra en la Figura 19(b). Luego, esta fase tiene las mismas características al caso especial anterior 5.0.4, como en la Figura 19(a), salvo en las asíntotas.

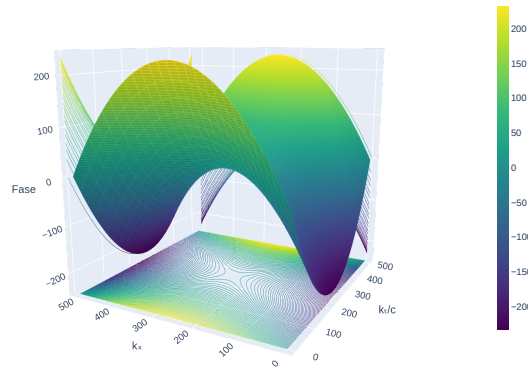
Ejemplo de aplicación 5.0.6 ($|\theta| > \frac{\pi}{2}$). Para $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$, se toma el caso particular $\theta_1 + \theta_2 = \pi \rightarrow \theta_2 = \pi - \theta_1$.

Entonces,

$$\csc \theta_2 = \csc \theta_1, \quad \cot \theta_2 = -\cot \theta_1.$$



(a) De izquierda a derecha: La primera gráfica representa la línea de tiempo ${}^2\delta(x)$. Luego se muestra el módulo y fase en el dominio fraccionario envuelta de orden $a = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ sobre la malla de tamaño 512×512 puntos y recorte $(106, 406) \times (106, 406)$.



(b) Paraboloide hiperbólico rectangular simulado para la fase en el dominio espectral fraccionario, desenvuelta incluyendo las trazas para cada plano.

Figura 19. Representación de la señal, módulo y fase en el dominio espectral fraccionario de orden $a = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y $\theta = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$.

Al sustituir esto en la expresión (83), obtenemos

$$\mathcal{F}^a[{}^2\delta(x)] = \sqrt{\frac{\csc^2 \theta_1}{\sec \theta_1}} \exp \left[i\pi \left(-\frac{1}{c^2} k_t^2 \cot \theta_1 + k_x^2 \cot \theta_1 - \frac{(\frac{1}{c} k_t \csc \theta_1)^2}{-\cot \theta_1} \frac{1}{c^2} k_t^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] \quad (100)$$

$$= \sqrt{\frac{\csc^2 \theta_1}{\sec \theta_1}} \exp \left[i\pi \left(\frac{1}{c^2} k_t^2 \left(\frac{\csc \theta_1}{\cos \theta_1} - \cot \theta_1 \right) + k_x^2 \cot \theta_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] \quad (101)$$

$$= \sqrt{\frac{\csc \theta_1}{\cos \theta_1}} \exp \left[i\pi \left(\frac{1}{c^2} k_t^2 \tan \theta_1 + k_x^2 \cot \theta_1 + \frac{1}{4} \right) \right] \quad (102)$$

$$= \sqrt{\frac{\csc \theta_1}{\cos \theta_1}} \exp \left[i\pi \left(-\frac{1}{c^2} k_t^2 \tan \theta_2 - k_x^2 \cot \theta_2 + \frac{1}{4} \right) \right]. \quad (103)$$

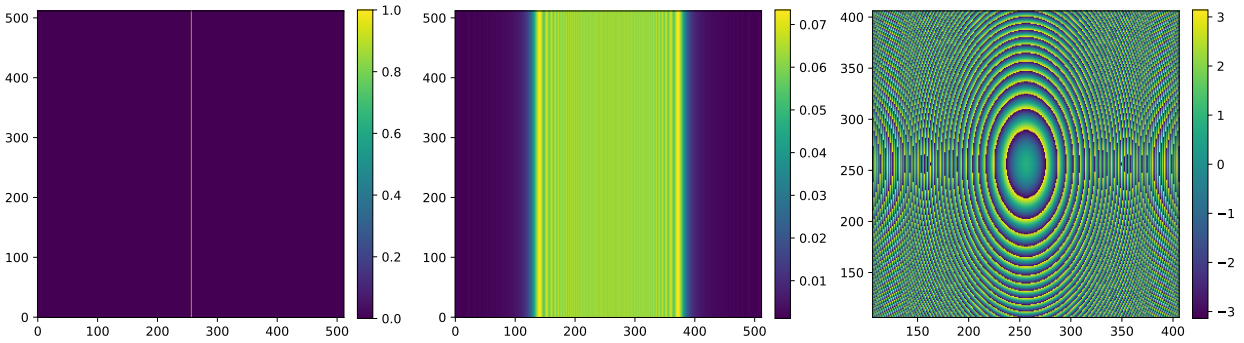
Así $\mathcal{F}^a[{}^2\delta(x)]$ tiene módulo

$$|\mathcal{F}^a[{}^2\delta(x)]| = \sqrt{\frac{\csc \theta_1}{\cos \theta_1}}$$

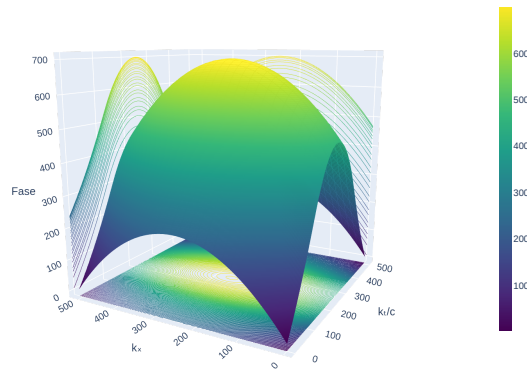
y fase

$$\theta = -\frac{1}{a^2} \frac{1}{c^2} k_t^2 - \frac{1}{b^2} k_x^2 + \frac{1}{4} \quad (104)$$

donde $a = \sqrt{\cot \theta_2 / \pi}$ y $b = \sqrt{\tan \theta_2 / \pi}$. De la ecuación anterior, clasificamos la fase como un hiperboloide elíptico con parámetros $a > 0$ y $b > 0$. Para este caso, en la Figura 20(a) se presenta la señal original ${}^2\delta(x)$, el módulo y fase espectral envuelta de orden $a = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$. En la Figura 20(b) se ilustra la fase desenvuelta junto a sus trazas paralelas al plano horizontal, vertical y de perfil: Elipses a lo largo del eje k_x respecto al plano $k_x, \frac{k_t}{c}$, parábolas verticales con apertura hacia arriba tanto en el plano $\frac{k_t}{c}, \theta$ como en el plano k_x, θ . Por último, se toma otro caso especial dentro de este mismo, para el orden $a = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ mostrada en la Figura 21(b). Observe que la fase esta vez es un paraboloido elíptico con simetría circular, pues $a = b$.

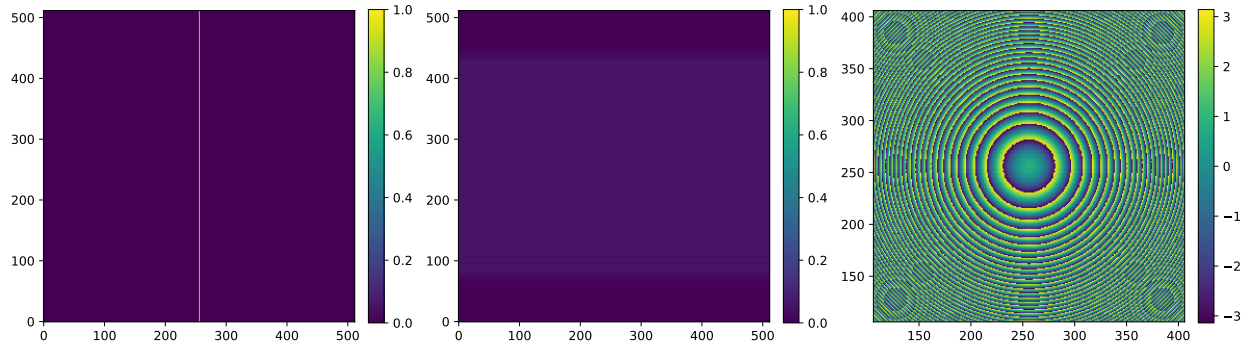


(a) De izquierda a derecha: La primera gráfica representa la línea de tiempo ${}^2\delta(x)$. Luego se muestra el módulo y fase en el dominio espectral fraccionario envuelta de orden $a = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ sobre la malla de tamaño 512×512 puntos y recorte $(106, 406) \times (106, 406)$.

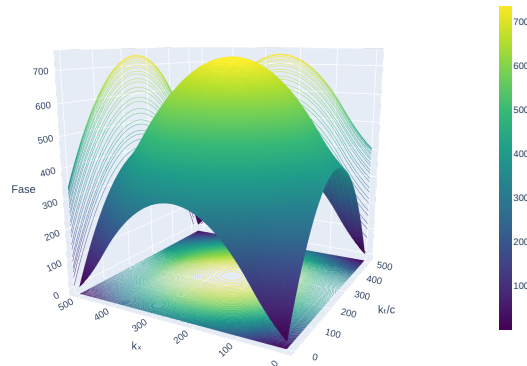


(b) Paraboloide elíptico simulado para la fase en el dominio espectral fraccionario, incluyendo las trazas para cada plano.

Figura 20. Representación de la señal, módulo y fase en el dominio espectral fraccionario de orden $a = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ y $\theta = (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ ilustradas como gráficas de contorno y en 3D.



(a) De izquierda a derecha: La primera gráfica representa la línea de tiempo ${}^2\delta(x)$. Luego se muestra el módulo y fase en el dominio espectral fraccionario envuelta de orden $a = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ sobre la malla de tamaño 512×512 puntos y recorte $(106, 406) \times (106, 406)$.



(b) Paraboloide elíptico de simetría circular, simulado para la fase en el dominio espectral fraccionario, incluyendo las trazas para cada plano.

Figura 21. Representación de la señal, módulo y fase en el dominio espectral fraccionario de orden $a = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ y $\theta = (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ ilustradas como gráficas de contorno y en 3D.

6. Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos en este trabajo de investigación, se extraen las siguientes conclusiones:

- Se establece un vínculo entre tres grandes áreas: la relatividad especial, la teoría de distribuciones y la transformada de Fourier de orden fraccionario. Este trabajo muestra que es posible aplicar la transformada de Fourier fraccionaria, una herramienta matemática que generaliza la transformada de Fourier estándar, al contexto físico de la relatividad especial. Para ello, las señales $\delta_{(x_0, ct_0)}$, ${}^2\delta(ct)$ y ${}^2\delta(x)$ cumplen con la condición de invariancia de Lorentz, son vistas como distribuciones regulares, permitiendo que las transformadas de cada función estén bien definidas.
- La interpretación física de la transformada de Fourier estándar en el contexto de relatividad especial, respeta la estructura del diagrama de Minkowski sobre el plano $k_x, \frac{k_t}{c}$ para dos sistemas de referencia inercial diferentes. Esto genera unas transformaciones que relacionan las coordenadas de frecuencia bajo cambios del observador inercial, asociadas a la matriz inversa (representada en la expresión matemática (60)) de las transformaciones de Lorentz tiempo-espacio. Además, para esta geometría espectral, garantiza la conservación del intervalo de tiempo-espacio en el dominio frecuencial, fortaleciendo la consistencia entre el análisis espectral y las transformaciones de Lorentz.
- Para la transformada de Fourier de orden fraccionario no entero, la fase en el dominio espectral fraccionario codifica la información esencial de la señal original, representándose matemáticamente en un resultado no trivial como superficies cuádricas (paraboloides elípticos, hiperbólicos o rectangulares). Esto evidencia la relevancia estructural, el significado e importancia de la fase en la reconstrucción o interpretación de señales bajo transformadas de Fourier fraccionarias.
- Las simulaciones desarrolladas y representadas en Python, son coherentes de acuerdo a la respuesta analítica.

Sin embargo, se presentan limitaciones al modelar ciertos tipos de señales, como distribuciones lineales en el caso fraccionario de casos especiales 5.0.4, 5.0.5 y 5.0.6. Estas representaciones discretas, no son distribuciones en el sentido estricto, pero permiten simular su comportamiento sobre una malla finita. No obstante, es sensible al paso de malla y a la normalización aplicada, lo que puede afectar la precisión espectral en transformadas de Fourier fraccionarias. Esto explica por qué el módulo de la transformada de orden fraccionario en los ejemplos mencionados, no se mantiene como un plano horizontal. Es consecuencia del algoritmo utilizado en el apéndice D y que no es objeto central en el trabajo presentado aquí, se usó luego de diversas pruebas el mejor encontrado en nuestro conocimiento.

- A partir de la experiencia computacional desarrollada en este trabajo, se concluye que no existe un algoritmo completamente confiable que reproduzca con exactitud todas las propiedades teóricas de la transformada de Fourier de orden fraccionario en cualquier dimensión. El código implementado, basado en la teoría de Ozaktas *et al.* (2001), permite ilustrar casos unidimensionales y bidimensionales, pero requiere normalización adicional, ya que no conserva la norma de la señal. Además, la propiedad aditiva solo se verifica para algunos órdenes fraccionarios. Estos resultados evidencian la necesidad de desarrollar algoritmos numéricos más robustos y estables para esta transformada.

Referencias Bibliográficas

- Abuabara, T. y Lesmes, J. (2010). *Elementos de análisis funcional*. Universidad de los Andes.
- Almeida, L. B. (1994). The fractional Fourier transform and time-frequency representations. *IEEE Transactions on signal processing*, 42(11):3084–3091.
- Bracewell, R. (2012). *Fourier analysis and imaging*. Springer Science & Business Media.
- Cohn, D. L. (2013). *Measure theory*, volumen 5. Springer.
- Courant, R. y Hilbert, D. R. (1962). *Methods of Mathematical Physics, Vol. I*, volumen 2. Interscience.
- French, A. P. (2017). *Special relativity*. CRC Press.
- Gradshteyn, I. S. y Ryzhik, I. M. (2014). *Table of integrals, series, and products*. Academic press.
- Hounie, J. (1979). *Teoria elementar das distribuições*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada.
- I. Zayed, A. (1998). Fractional Fourier transform of generalized functions. *Integral Transforms and Special Functions*, 7(3-4):299–312.
- Karasik, Y. (1994). Expression of the kernel of a fractional Fourier transform in elementary functions. *Optics letters*, 19(11):769–770.
- Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications*, volumen 17. John Wiley & Sons.
- Lighthill, M. J. (1958). *An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*. Cambridge University Press, New York.

- McBride, A. y Kerr, F. (1987). On Namias's fractional Fourier transforms. *IMA Journal of applied mathematics*, 39(2):159–175.
- Mendlovic, D. y Ozaktas, H. M. (1993). Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I. *Journal of the Optical Society of America A*, 10(9):1875–1881.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., y Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, San Francisco.
- Munkres, J. (2000). *Topology*. Featured Titles for Topology. Prentice Hall, Incorporated.
- Muñoz Quevedo, J. M. (2003). Topología básica.
- Naber, G. L. (2012). *The geometry of Minkowski spacetime*. Springer.
- Namias, V. (1980). The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 25(3):241–265.
- Ozaktas, H., Kutay, M., y Zalevsky, Z. (2001). *The Fractional Fourier Transform: With Applications in Optics and Signal Processing*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley.
- Rahaman, F. (2014). *The special theory of relativity*. Springer.
- Resnick, R. (1968). *Introduction to Special Relativity*. Wiley, New York,.
- Rodier, F. (1971). *Distributions et transformation de Fourier*. Ediscience.
- Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis*. McGraw Hill, New York, 3rd edición. Also published as a part of the Higher Mathematics Series.
- Sahin, A., Ozaktas, H. M., y Mendlovic, D. (1998). Optical implementations of two-dimensional fractional Fourier transforms and linear canonical transforms with arbitrary parameters. *Applied Optics*, 37(11):2130–2141.
- Schroder, U. E. (1990). *Special relativity*, volumen 33. World Scientific.

Schwartz, L. (1978). *Théorie des distributions. (entièrement corrigée refondue et augmentée)*. En *Annales de l'institut Fourier*. Hermann.

Wurm, A., Krausz, N., DeWitt-Morette, C., y Berg, M. (2003). Fourier transforms of lorentz invariant functions. *Journal of Mathematical Physics*, 44(1):352–365.

Zemanian, A. H. (1987). *Distribution theory and transform analysis: an introduction to generalized functions, with applications*. Courier Corporation.

Zill, D. G., Dewar, J. M., y Villarreal, M. d. P. C. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. McGraw-Hill Interamericana.

Anexos

Apéndice A. Propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria

A continuación, se presenta una lista de las propiedades fundamentales del operador de la transformada de Fourier fraccionaria en una dimensión. La propiedad 1 se refiere a las operaciones pares, es decir que la transformada de Fourier fraccionaria es un operador par. La anterior propiedad es un caso particular de la propiedad 2. Este resultado no puede ser generalizado a una versión escalada de $\mathcal{F}^a[f](k)$. En cambio, se optó por escribirse en una versión modulada tipo onda de frecuencia linealmente variable de $\mathcal{F}^{a'}[f](k)$, donde $a' \neq a$ y es un orden diferente dado por

$$a' \frac{\pi}{2} \equiv \alpha' = \arctan\left(\frac{\tan \alpha}{M^2}\right),$$

donde α' es elegido en el mismo cuadrante de α . Esta expresión se comprende mejor sobre el plano tiempo-frecuencia

Tabla 5

Propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria, parte II.

$f(x)$	$\mathcal{F}^a[f](k)$
1. $f(-x)$	$\mathcal{F}^a(-k)$
2. $ M ^{-1} f(x/M)$	$\sqrt{\frac{1 - i \cot \theta}{1 - i M^2 \cot \theta}} \exp\left[i\pi k^2 \cot \theta \left(1 - \frac{\cos^2 \theta'}{\cos^2 \theta}\right)\right] \mathcal{F}^{a'}\left[\frac{Mk \operatorname{sen} \theta'}{\operatorname{sen} \theta}\right]$
3. $f(x - \xi)$	$\exp(\pi i \xi^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \exp(-2\pi i x \xi \operatorname{sen} \theta) \mathcal{F}^a[k - \xi \cos \theta]$
4. $\exp(2\pi i \xi x) f(x)$	$\exp(-\pi i \xi^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \exp(2\pi i x \xi \operatorname{sen} \theta) \mathcal{F}^a[k - \xi \operatorname{sen} \theta]$
5. $x^n f(x)$	$\left[k \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dk}\right]^n \mathcal{F}^a[f]$
6. $\left[\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx}\right]^n f(x)$	$\left[k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dk}\right]^n \mathcal{F}^a[f]$

ξ y M son valores reales con $M \neq 0, \pm\infty$. $\theta' = \arctan(M^{-2} \tan \theta)$ y $a' \equiv \theta' \pi / 2$ donde θ' se toma en el mismo cuadrante de θ .

Almeida (1994). Las propiedades 4, 5 y 6 son características de multiplicación por un factor de fase, transformación de

momentos y derivación sobre la señal. En particular, se puede tener una tabla con las propiedades de la transformada de Fourier estándar (orden $a = 1$).

Tabla 6

Propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria de orden uno.

$f(x)$	$\mathcal{F}[f](k)$
1. $f(-x)$	$\mathcal{F}(-k)$
2. $ M ^{-1}f(x/M)$	$\mathcal{F}(Mk)$
3. $f(x - \xi)$	$\exp(-2\pi i k \xi) \mathcal{F}(k)$
4. $\exp(2\pi i \xi x) f(x)$	$\mathcal{F}(k - \xi)$
5. $x^n f(x)$	$\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^n \frac{d^n}{dk^n} \mathcal{F}[f]$
6. $\left[\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx}\right]^n f(x)$	$k^n \mathcal{F}[f]$

ξ y M son valores reales con $M \neq 0, \pm\infty$ y n es un entero positivo.

Apéndice B. Algunas propiedades adicionales

En este apéndice se presentan algunas propiedades fundamentales de integrales que resultan útiles en el análisis de la transformada de Fourier fraccionaria, así como aproximaciones relevantes de la función gaussiana. Estas herramientas permiten simplificar algunos cálculos y comprender mejor el comportamiento asintótico de diversas expresiones matemáticas involucradas en este trabajo. Las ecuaciones (105) y (106) representan integrales gaussianas con valores complejos, originalmente documentadas en Gradshteyn y Ryzhik (2014) y McBride y Kerr (1987). Posteriormente, fueron reescritas en Ozaktas *et al.* (2001) para facilitar su aplicación

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(Au^2 \pm 2Bu)} du = \frac{1}{\sqrt{A}} e^{i\pi/4} e^{-i\pi B^2/A}, \quad A > 0, B \in \mathbb{R}, \quad (105)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\pi(Au^2 \pm 2Bu)} du = \frac{1}{\sqrt{A}} e^{-i\pi/4} e^{i\pi B^2/A}, \quad A > 0, B \in \mathbb{R}. \quad (106)$$

Existen otras aproximaciones para la distribución delta de Dirac δ además de las ya utilizadas. Estas son

$$\delta(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Pi(u/t), \quad (107)$$

$$\delta(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\pi u^2/t^2}}{t}, \quad (108)$$

$$\delta(u) = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{1}{t}} e^{i\pi u^2/t}, \quad (109)$$

$$\delta(u) = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-i\pi \operatorname{sgn}(t)/4} \sqrt{\frac{1}{|t|}} e^{i\pi u^2/t}, \quad (110)$$

donde Π es la función rectangular definida en (6).

Apéndice C. Transformada de Fourier de una función de la invariante de Lorentz

En este apéndice se exponen con mayor detalle los resultados más relevantes, siguiendo el enfoque de Wurm *et al.* (2003). Las expresiones matemáticas utilizadas se encuentran en Gradshteyn y Ryzhik (2014). Una función sobre $\mathbb{R}^{1,n}$, cumple la condición de la invariante de Lorentz si $f(x) = f(s)$ con $s^2 = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$. Para una función de la invariante de Lorentz (o radial) f on $\mathbb{R}^{1,n}$, es definida su transformada de Fourier estándar o fraccionaria de orden uno:

$$F(k) := \int_{\mathbb{R}^{1,n}} dx^{n+1} f(\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu) e^{-2\pi i k_\mu x^\mu}.$$

para tales funciones, su transformada es estudiada como

$$I(k_t) = -2\pi \int_0^{+\infty} f(s_0^2) Y_0(2\pi k_t s_0) ds_0 + 4 \int_0^{+\infty} f(s_1^2) K_0(2\pi k_t s_1) ds_1,$$

$$I(k_x) = 4 \int_0^{+\infty} f(s_0^2) K_0(2\pi k_x s_0) ds_0 - 2\pi \int_0^{+\infty} f(s_1^2) Y_0(2\pi k_x s_1) ds_1,$$

donde $Y_0(z)$ (función de Neumann) y $K_0(z)$ (función de Hankel) son funciones de Bessel definidas sobre la variable compleja z , de orden cero de segunda y tercera especie, respectivamente. En general, las funciones $Y_\nu(z)$ y $K_\nu(z)$ con $\nu \in \mathbb{C}$, son ampliamente estudiadas en la sección 8.4 de Gradshteyn y Ryzhik (2014). $s_0 = \sqrt{t^2 - x^2}$ y $s_1 = \sqrt{x^2 - t^2}$. Para funciones test (véase la definición 2.2.1), se define la integral

$$\int_0^{+\infty} dx f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} dx e^{-\varepsilon x^2} f(x).$$

Con la expresión anterior, podemos calcular la transformada de Fourier estándar "Gaussiana" (esta connotación hace referencia a la exponencial imaginaria),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t^2 - x^2)} e^{-2\pi i k_t} dt dx = \pi e^{-i\pi^2 k_t^2}.$$

Usando la transformada de Fourier estándar cuando $k_x = 0$,

$$\begin{aligned} I_1(k_t) &= 4 \int_0^{+\infty} r e^{-ir^2} K_\nu(2\pi r k_t) dr && (\text{donde } r^2 = x^2 - t^2) \\ &= 4 \int_0^{+\infty} r e^{-\varepsilon r^2} e^{-ir^2} K_\nu(2\pi r k_t) dr \\ &= 4 \int_0^{+\infty} r e^{-(\varepsilon+i)r^2} K_\nu(2\pi r k_t) dr \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la integral

$$\int_0^{+\infty} r^\mu e^{-\alpha r^2} K_\nu(\beta r) dr = \frac{1}{2} \alpha^{-\mu/2} \beta^{-1} \Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu+\mu}{2}\right) \exp\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) W_{-\mu/2, \nu/2}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right),$$

con $\operatorname{Re} \mu > |\operatorname{Re} \nu| - 1$.

Donde $\Gamma(z)$ es la función gamma sobre la variable compleja z , $W_{\lambda, \mu}(z)$ es la función de Whittaker para valores $2\mu \neq \pm 1, \pm 2, \dots$. Al tomar $\mu = 1, \alpha = \varepsilon + i, \beta = 2\pi k_t$, se sigue que

$$\begin{aligned} &= 4 \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi k_t} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon+i}} \Gamma\left(\frac{1+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu+1}{2}\right) e^{\pi^2 k_t^2 / 2(\varepsilon+i)} W_{-1/2, \nu/2}\left(\frac{\pi^2 k_t^2}{2(\varepsilon+i)}\right) \\ &= \frac{1}{\pi k_t} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon+i}} \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) e^{\pi^2 k_t^2 / 2(\varepsilon+i)} W_{-1/2, \nu/2}\left(\frac{\pi^2 k_t^2}{2(\varepsilon+i)}\right). \end{aligned}$$

Para el otro término integral es

$$\begin{aligned} I_2(k_t) &= -2\pi \int_0^\infty r e^{ir^2} Y_\nu(2\pi r k_t) dr && \text{(donde } r^2 = t^2 - x^2) \\ &= -2\pi \int_0^\infty r e^{-\varepsilon r^2} e^{ir^2} Y_\nu(2\pi r k_t) dr \\ &= -2\pi \int_0^\infty r e^{-(\varepsilon-i)r^2} Y_\nu(2\pi r k_t) dr. \end{aligned}$$

Ahora la siguiente integral

$$\int_0^{+\infty} r^\mu e^{-\alpha r^2} Y_\nu(\beta r) dr = -\alpha^{-\mu/2} \beta^{-1} \sec\left(\frac{\nu-\mu}{2}\pi\right) \exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) \times$$

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)} \sin\left(\frac{\nu-\mu}{2}\pi\right) M_{\mu/2, \nu/2}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) + W_{\mu/2, \nu/2}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \right]$$

con $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \mu > |\text{Re } \nu| - 1, \beta > 0.$

Donde $M_{\lambda, \mu}(z)$ es la función hipergeométrica confluyente para valores $2\mu \neq \pm 1, \pm 2, \dots$. Tome la sustitución $\mu = 1, \alpha = \varepsilon - i, \beta = 2\pi k_t$, luego

$$= -(-2\pi)(\varepsilon - i)^{-1/2} (2\pi k_t)^{-1} \sec\left(\frac{\nu-1}{2}\pi\right) \exp\left(-\frac{4\pi^2 k_t^2}{8(\varepsilon - i)}\right) \times$$

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)} \sin\left(\frac{\nu-1}{2}\pi\right) M_{1/2, \nu/2}\left(\frac{4\pi^2 k_t^2}{4(\varepsilon - i)}\right) + W_{1/2, \nu/2}\left(\frac{4\pi^2 k_t^2}{4(\varepsilon - i)}\right) \right]$$

$$= -\frac{1}{k_t} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - i}} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)} e^{-\pi^2 k_t^2 / 2(\varepsilon - i)} \left[W_{1/2, \nu/2}\left(\frac{\pi^2 k_t^2}{2(\varepsilon - i)}\right) \right.$$

$$\left. - \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)} M_{1/2, \nu/2}\left(\frac{\pi^2 k_t^2}{2(\varepsilon - i)}\right) \right]$$

Cada integral tiene un polo con $\nu \rightarrow 0$. Para la función W con primer argumento negativo, así usamos la fórmula

$$M_{\lambda, \mu}(z) = \frac{\Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}\right)} e^{i\pi\lambda} W_{-\lambda, \mu}(e^{i\pi\lambda} z) +$$

$$\frac{\Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma\left(\mu + \lambda + \frac{1}{2}\right)} \exp\left[i\pi\left(\lambda - \mu - \frac{1}{2}\right)\right] W_{\lambda, \mu}(z).$$

Si $\lambda = 1/2$, $\mu = \nu/2$ y además se usa la fórmula $z^{-1/2-\mu}M_{\lambda,\mu}(z) = (-z)^{-1/2-\mu}M_{-\lambda,\mu}(-z)$, se calcula que

$$\begin{aligned} M_{1/2,\nu/2}(z) &= \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{i\pi/2} W_{-1/2,\nu/2}(e^{i\pi}z) + \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-i\pi\nu/2} W_{1/2,\nu/2}(z) \\ &= i \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} W_{-1/2,\nu/2}(z) + \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-i\pi\nu/2} W_{1/2,\nu/2}(z). \end{aligned} \quad (111)$$

Ahora, aplicando las identidades

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \sqrt{z} W_{\lambda-1/2,\mu-1/2}(z) + \left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right) W_{\lambda-1,\mu}(z) \quad (1)$$

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \sqrt{z} W_{\lambda-1/2,\mu+1/2}(z) + \left(\frac{1}{2} - \mu - \lambda\right) W_{\lambda-1,\mu}(z) \quad (2)$$

Al agregar las ecuaciones anteriores en la expresión (111)

$$2W_{\lambda,\mu}(z) = \sqrt{z} W_{\lambda-1/2,\mu-1/2}(z) + \sqrt{z} W_{\lambda-1/2,\mu+1/2}(z) + (1-2\lambda)W_{\lambda-1,\mu}(z).$$

Si $\lambda = 1/2$, $\mu = \nu/2$ y al usar la fórmula extra $W_{\lambda,\mu}(z) = W_{\lambda,-\mu}(z)$, entonces

$$W_{1/2,\nu/2}(z) = \frac{\sqrt{z}}{2} W_{0,(1-\nu)/2}(z) + \frac{\sqrt{z}}{2} W_{1/2,(\nu+1)/2}(z), \quad (112)$$

$$W_{-1/2,\nu/2}(z) = \frac{2\sqrt{z}}{\nu} W_{0,(1+\nu)/2}(z). \quad (113)$$

Para las siguientes identidades

$W_{0,\mu}(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}} K_{\mu}\left(\frac{z}{2}\right)$	$K_{\mu}(2) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\mu} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \int_1^{+\infty} e^{-zt} (t^2 - 1)^{\mu-1/2} dt$
---	---

Se tiene que

$$\begin{aligned} K_{1/2}\left(\frac{z}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\frac{z}{4}}\sqrt{\pi}}{1} \int_1^\infty e^{-zt/2}(t^2-1)^0 dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi z}}{2} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-zt/2}}{-\frac{z}{2}} \Big|_1^b \right) = \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{-z/2}. \end{aligned}$$

Por el hecho anterior,

$$W_{0,\mu}(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{-z/2} = e^{-z/2}.$$

Expandiendo las funciones Γ y $1/\sin z = 1/z + 6/z + \mathcal{O}(z^2)$, podemos verificar explícitamente que se cancelan singularidades:

$$I_1 + I_2 = -\frac{2i}{\nu} + \frac{2i}{\nu} + \mathcal{O}(1).$$

Podemos verificar numéricamente que el término constante es

$$I_1 + I_2 = \pi e^{-i\pi^2 k_1^2}.$$

Apéndice D. Implementación de la transformada de Fourier fraccionaria en Python.

El código proporcionado está diseñado para calcular la transformada de Fourier fraccionaria en cualquier dimensión n , basado en la teoría descrita en Ozaktas *et al.* (2001). En este documento, se ha utilizado este código para ilustrar ejemplos en 1 y 2 dimensiones, bajo la siguiente condición: el algoritmo no conserva la norma de la señal calculada, por lo que se debe agregar una normalización en cada caso. La propiedad aditiva para la transformada de Fourier fraccionaria es verificable únicamente para algunos órdenes fraccionarios. Este código en Python generaliza el algoritmo encontrado en el enlace [frft: Multi-dimensional fractional Fourier transform in Python](#), código sujeto a utilizar siempre un mismo orden a lo largo de cada dimensión n . De forma más resumida, se ofrece el código de abajo:

```
[ ]: pip install -U logzero
```

```
[ ]: from pylab import   
↳meshgrid,cm,imshow,contour,clabel,colorbar,axis,title,show   
   
from numpy import exp,arange,angle, pi, unwrap   
   
import numpy as np   
   
import matplotlib.pyplot as plt   
   
from numpy.fft import fftshift, ifftshift   
   
from pylab import   
↳meshgrid,cm,imshow,contour,clabel,colorbar,axis,title,show   
   
from numpy import exp,arange,angle, pi, unwrap   
   
import torch
```

```
[ ]: import numpy as np   
   
import functools as ftools   
   
from logzero import logger
```

```

try:
from pyfftw.interfaces.numpy_fft import fftshift, fftn, ifftn
except:
from numpy.fft import fftshift, fftn, ifftn

# Utilidades FFT con normalización ortonormal
def fftn_n(arr):
return fftn(arr, norm='ortho')

def ifftn_n(arr):
return ifftn(arr, norm='ortho')

# Inicialización de chirp
chirp = np.mgrid[0:1, 0:1, 0:1]
chirp_arg = 1.j * np.pi * ftools.reduce(lambda x, y: x + y, chirp)

pref0 = 'chirp = tuple( fftshift(this)**2 / this.shape[n] for n, this_
→in enumerate(np.mgrid['
suff0 = ']) )'

DoNothing = lambda x: x

opdict = {0: DoNothing, 1: fftn_n, 2: np.flip, 3: ifftn_n}

```

```

def cot(x):
    if x % np.pi == 0:
        return 0.0
    return 1. / np.tan(x)

def ChirpFunction(x):
    return np.exp(x * chirp_arg)

def RecalculateChirp(newshape):
    #logger.warning('Recalculating chirp.')
    global chirp_arg
    if len(newshape) == 1:
        pref = pref0.replace('np.', '(np.')
        suff = suff0.replace(']', ',)')
    else:
        pref = pref0
        suff = suff0
    regrid = ','.join(f' -{n//2}:{n//2} ' for n in newshape).join([pref,
↪suff])

    exec(regrid, globals())

    chirp_arg = 1.j * np.pi * ftools.reduce(lambda x, y: x + y, chirp)

def CanonicalOps(alpha):
    alpha_0 = alpha % 4.

```

```

    if alpha_0 < 0.5:

    return [ifftn_n, 1. + alpha_0]

    flag = 0

    while alpha_0 > 1.5:

    alpha_0 -= 1.

    flag += 1

    return [opdict[flag], alpha_0]

def frfft_base(arr, alpha):

    phi = alpha * np.pi / 2.

    cscphi = np.sqrt(1. + cot(phi) ** 2)

    scale = np.sqrt(1. - 1.j * cot(phi)) / np.sqrt(np.prod(arr.shape))

    modulator = ChirpFunction(cot(phi) - cscphi)

    filter = ChirpFunction(cscphi)

    arr_frft = scale * modulator * ifftn_n(fftn_n(filter) *
->fftn_n(modulator * arr))

    return arr_frft

def frfft1d(arr1d, alpha):

    arr1d = np.asarray(arr1d)

    if arr1d.ndim != 1:

    raise ValueError("Input to frfft1d must be 1D")

    RecalculateChirp((len(arr1d),))

    ops = CanonicalOps(alpha)

```

```

return frft_base(ops[0](arr1d), ops[1])

def frft2d(arr, alpha1, alpha2):
    arr = np.asarray(arr)
    if arr.ndim != 2:
        raise ValueError("Input to frft2d must be 2D")
    if arr.shape != chirp[0].shape:
        RecalculateChirp(arr.shape)

    # FrFT en eje 0 (filas)
    temp = np.zeros_like(arr, dtype=complex)
    for j in range(arr.shape[1]):
        temp[:, j] = frft1d(arr[:, j], alpha1)

    # FrFT en eje 1 (columnas)
    result = np.zeros_like(temp, dtype=complex)
    for i in range(temp.shape[0]):
        result[i, :] = frft1d(temp[i, :], alpha2)

    return result

```