UNA APROXIMACIÓN AL ESTUDIO DE LA *SUCESIÓN DE THUE MORSE*

Autor:
JACKSON GUEVARA GÓMEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2017

UNA APROXIMACIÓN AL ESTUDIO DE LA *SUCESIÓN DE THUE MORSE*

Autor:
JACKSON GUEVARA GÓMEZ

Propuesta de trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director:
MSc RAFAEL FERNANDO ISAACS GIRALDO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2017

AGRADECIMIENTOS

Primeramente me gustaría agradecer a Dios por regalarme tantas bendiciones, por darme fortaleza pese a las dificultades que se me presentaron en el trayecto de formación académica, para no desfallecer en la culminación de este sueño.

Agradezco al profesor Rafael Isaacs, que despertó en mi un interés para explorar el grandioso mundo de las matemáticas. Gracias por el empeño y dedicación a este trabajo, espero seguir aprendiendo de Usted.

Agradezco a mis padres, Claudia Gómez y Moises Guevara por ser unos padres ejemplares, por apoyarme en todo momento en el logro de mis metas. A mis segundas madres Ligia y Gilma Gómez, por tanto amor que me han brindado, y agradezco a mis hermanos, en especial a Jefferson y Jhon.

También te agradezco a ti Daniela Díaz, te has convertido en la motivación para culminar este proceso, me has brindado un apoyo incondicional. Eres mi mayor regalo.

Agradezco a los hermanos que escogí, Daniel Suarez y Ana Mileidy, por las experiencias vividas y por el apoyo en cada momento bueno y malo.

Agradezco finalmente a quienes tuve la dicha de conocer en este proceso, principalmente a aquellos que me brindaron su valiosa amistad, a Gersain Quintanilla, Carlos Jaimes...

TABLA DE CONTENIDO

TITULO: UNA APROXIMACIÓN AL ESTUDIO DE LA SUCESIÓN DE THUE MORSE [1]

AUTOR: JACKSON GUEVARA GÓMEZ [2]

PALABRAS CLAVES: Sucesión de Thue Morse; Sucesión de Thue Morse generalizada; Sobrepuesta; Palabra; cuadrado; cubo; libre; Curva de Koch.

RESUMEN

La sucesión de Thue Morse fue descubierta en 1851 por Prohuet con el interés de aplicarla en la teoía de números, además durante el siglo XX, es redescubierta por Axel Thue y por Marston Morse, quienes la aplican a la combinatoria de palabras y a la geometría diferencial respectivamente, sin embargo no son las únicas ramas de las matemáticas en las que esta sucesión está presente, también podemos encontrarla en la geometría fractal, la topologia, el álgebra, el ajedrez, entre otras. Por esta razón se considera ubicua.

En este trabajo se presentan algunas de sus definiciones y se demuestran que estas definiciones son equivalentes, seguidamente realizamos el estudio de algunas de las propiedades que se cumplen en la combinatoria de palabras, en la teoría de números, y revisamos algunos resultados que esta sucesión tiene con el ajedrez y la curva de Koch. Por último, presentamos las definiciones estudiadas en base 2 de forma generalizada para cualquier base b, realizamos la prueba de sus equivalencias, y observamos cuáles y de qué forma se cumplen las propiedades estudiadas en base 2 para la base b como el hecho de tener; cuadrados arbitrariamente largos, ser libre de sobreposición, ser libres de cubos, sumatorias iguales, entre otras. También se demuestra que no cumple con algunas de estas propiedades; como el hecho de no tener palabras palíndromos. Y existen otras las cuales no se pudieron establecer para base b.

[1]Proyecto de grado

[2]FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS.
DIRECTOR: MSc. RAFAEL FERNANDO ISAACS GIRALDO

TITLE: AN APPROACH TO THE STUDY OF THUE-MORSE SEQUENCE [3]

AUTHOR: JACKSON GUEVARA GÓMEZ [4]

KEYWORDS: Thue Morse sequence; generalized Thue Morse sequence; Overlap; Word; square; cube; free; Koch curve.

ABSTRACT

The Thue-Morse sequence was discovered in 1851 by Prohuet with interest applied in number theory, also during the 20th century, it's rediscovered by Axel Thue and by Marston Morse who applied it to the Combinatorics of words and to differential geometry respectively, however are not the only branches of mathematics what this sequence is present. We can also find it in fractal geometry, topology, algebra, chess, etc. For this reason it is considered ubiquitous.

In this work some of its definitions are presented and proof that these definitions are equivalent, then we do the study of some of the properties that are met in the Combinatorics of words, in number theory, and we review some of the results that this sequence has chess and the Koch curve. Finally, we present the definitions studied in base 2 generally shape for any base b, performed testing of their equivalents, and observe what and how the properties studied in base 2 to base b as the fact of having arbitrarily long square, be overlap free, be free of cub, sum equal, among others. Also shows that failure to comply with some of these properties; as the fact of not have words palindromes. And there are others which failed to set base b.

[3]Degree project

[4]SCIENCE FACULTY, MATHEMATICS SCHOOL.
ADVISOR: MSc. Rafael Fernando Isaacs Giraldo

INTRODUCCIÓN

El matemático noruego Axel Thue, interesado en el estudio de la combinatoria de palabras, principalmente en las repeticiones que se dan en palabras infinitas, define la sucesión de Thue Morse en 1906, la cual le permitió estudiar muchas propiedades. Por otra parte fue redescubierta por Marston Morse en 1921, quien la aplica a la dinámica de símbolos y por Prouhet quien la descubre en 1851 de manera implícita y la utiliza en la teoría de números. Por esto, en muchos casos es conocida como la sucesión de Prouhet-Thue-Morse, aunque en la literatura es más conocida como la sucesión de Thue Morse. Sin embargo, no han sido los únicos en definirla, Max Euwe la define y la aplica en el ajedrez, y Tom Johnson en la música.

La sucesión ha sido catalagoda por los profesores Jeffrey Shallit y Allouche en [1], de ser ubicua, ya que está presente en muchas ramas de las matemáticas, como la teoría de números, geometría diferencial, la combinatoria de palabras, entre otras.

Esta trabajo consta de 3 capítulos, en los cuales intentamos mostrar algunas de las propiedades más importantes y llamativas que tiene la sucesión.

En el primer capítulo que titulamos "preliminares", revisaremos algunos resultados necesarios para abordar los demás capítulos, y por otro lado, haremos una breve introducción a la combinatoria de palabras, que es sin duda, la principal rama de revisión de este trabajo.

En el segundo capítulo que titulamos como "Sucesión de Thue Morse en base 2", haremos un recorrido por 4 diferentes formas de definir la sucesión de Thue Morse, mostrando sus respectivas equivalencias. Al igual trabajaremos varias de las propiedades que tiene esta sucesión en la combinatoria de palabras, revisando sus demostraciones y realizando algunas observaciones.

En el tercer capítulo que titulamos “Sucesión de Thue Morse en base b”, intentamos generalizar la sucesión de Thue Morse para base b, por ende establecemos de qué manera se dan las definiciones vistas en el capítulo anterior para base b, así mismo demostraremos sus respectivas equivalencias. En combinatoria de palabras se revisan varias de las propiedades que tiene la sucesión en base 2, sin embargo este estudio es una particularidad de las proposiciones demostradas en [2]. Y al finalizar este capítulo en la sesión de teoría de números hacemos una analogía con dos de las propiedades observadas en base 2 que no se encuentran en la bibliografía consultada.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo trabajaremos algunos de los conceptos necesarios para hacer la revisión de los demás capítulos, estas bases principalmente se inician con una introducción a lo que es la combinatoria de palabras, ya que no es común para cualquier lector que tenga conocimientos básicos de las matemáticas, sin embargo, para las demás ramas como las bases para teoria de números asumiremos que el lector tiene conocimientos adquiridos en congruencias.

1.1. COMBINATORIA DE PALABRAS

A continuación daremos algunas de las definiciones necesarias que servirán como base, para el estudio de la sucesión de Thue Morse en la combinatoria de palabras, algunas son tomadas de [9] y [10].

Definición 1.1. Una palabra o cadena es una sucesión finita de símbolos $a_1a_2...a_n$ tomadas de un conjunto finito no vacío Σ llamado alfabeto.

Ejemplo 1.1. Sea el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, luego algunas de sus palabras serán:

- *ababb*
- *bbbbb*

Se supone la existencia de una única cadena λ que no tiene elementos llamada cadena vacía.

Proposición 1.1. *Definimos al conjunto Σ^* como el conjunto de todas las cadenas sobre el alfabeto Σ.*

Definición 1.2. Definimos la longitud de una cadena u como el número de símbolos que tiene la cadena u y lo denotamos por $|u|$.

De la misma forma, denotamos por $|u|_a$ al número de elementos a que tiene la palabra u.

Definición 1.3. Una palabra infinita es una función de $\{0, 1, 2, ...\}$ a Σ.

Σ^w es el conjunto de todas las palabras infinitas sobre Σ. También podemos escribir Σ^∞ que denota el conjunto $\Sigma^* \cup \Sigma^w$.

Para $n \geq 0$, Σ^n denota el conjunto de todas las palabras de longitud n.

Para alguna palabra w sobre el alfabeto binario $\{0, 1\}$, denotamos por $\overline{w}$ al complemento de w, la palabra obtenida de w cambiando los $o's$ por $1's$, y viceversa.

Definición 1.4. Una función $h : \Sigma^* \longrightarrow \triangle^*$, es llamada un morfismo si h satisface $h(xy) = h(x)h(y)$ para toda x, y $\in \Sigma^*$.

Para la definición del morfismo solo basta definirlo para cada $a \in \Sigma$.

Ejemplo 1.2. Por ejemplo definamos el morfismo $h : \{0, 1, 2, 3\}^* \to \{0, 1, 2, 3\}^*$ por:

$$
\begin{aligned}
h(0) &\to 013210 \\
h(1) &\to 301213 \\
h(2) &\to 130123 \\
h(3) &\to 012121
\end{aligned}
$$

Veamos, que si queremos hallarle el morfismo a la palabra 312, estará dado por $h(312) = h(3)h(1)h(2) = 012121\ 301213\ 130123$

Esta definición es posible extenderla a palabras infinitas.

Un morfismo $h : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ tal que $h(a) = ax$ para alguna letra $a \in \Sigma$ y $x \in \Sigma^*$, se dice prolongable en a, y podemos entonces iterar repetidamente h para obtener el punto fijo:

$$h^w(a) = axh(x)h^2(x)h^3(x)...$$

Definición 1.5. Dadas dos cadenas $u = a_1a_2...a_k$ y $v = b_1b_2...b_s$ en Σ^*, la concatenación uv es la cadena que resulta al escribir los símbolos de u y luego los de v, es decir $uv = a_1a_2...a_kb_1b_2...b_s$.

Definición 1.6. Un cuadrado es una palabra de la forma xx donde x es una palabra.

Ejemplo 1.3. Si consideramos el abecedario como alfabeto, tenemos que en la literatura español tenemos los siguientes cuadrados.

- *papa*.
- *coco*.
- *popo*.

Definición 1.7. Un cubo es una palabra de la forma xxx donde x es una palabra.

Ejemplo 1.4. *papapa* donde $x = pa$.

Definición 1.8. Una superposición es una palabra de la forma $axaxa$, donde a es una letra y x es una subpalabra.

Ejemplo 1.5. Sea la palabra *banana*, esta palabra contiene una subpalabra solapada o sobrepuesta *anana*.

Definición 1.9. Si $x, y \in \Sigma^*$ y $w = xy$, entonces la palabra x es un prefijo de w, y si $y \neq \lambda$, entonces x es un prefijo propio de w. De manera similar, la cadena y es un sufijo de w y si $x \neq \lambda$, entonces y es un sufijo propio.

Nota 1.1. Para efectos de facilitar la notación, sea $a \in \mathit{\Sigma}$, entonces denotaremos $a^n = \underbrace{a...a}_{n}$.

1.2. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

En esta sesión abordaremos algunos conceptos básicos e importantes para el estudio de los siguientes capítulos, lo siguiente es tomado del libro de Rubiano [4].

Teorema 1.10. *Sea $b > 1$. Todo número natural $n > 0$ se representa de manera única en la forma:*

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

donde $k \geq 0$, $a_n \neq 0$ y $0 \leq a_i < b$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Donde los a_i son los dígitos de n en base b, y se escribe $(a_k a_{k-1} \ldots a_0)_b$.

Para hacer uso de este teorema, es necesario recordar cómo realizar el cambio de base.

Ejemplo 1.6. Queremos hallar a $n = 29$ en forma de polinomio con $b = 2$. Para hallar los a_i es necesario conocer a n en base 2, por tanto haremos uso del algoritmo de la división:
$29 = 14 * 2 + \underline{1}$
$14 = 7 * 2 + \underline{0}$
$7 = 3 * 2 + \underline{1}$
$3 = \underline{1} * 2 + \underline{1}$
Por lo tanto,

$$29 = (11101)_2$$

Así que:

$$29 = 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1$$

Definición 1.11. Sean a y b enteros cualesquiera, y n un entero positivo. Si $n|(a - b)$ decimos que a y b son congruentes módulo n y escribimos

$$a \equiv b \pmod{n}$$

.

CAPÍTULO 2

SUCESIÓN DE THUE MORSE BASE 2

En este capítulo nos enfocamos en la revisión de parte del estudio relacionado con la sucesión de Thue Morse en base 2, donde tocamos varias áreas en las cuales esta sucesión tiene incidencia, como la combinatoria de palabras, la teoría de números y algunas curiosidades.

2.1. DEFINICIONES

Cabe resaltar la importancia que tiene la sucesión de Thue Morse en matemáticas, ya que está presente en varias de sus ramas, y aún más en ramas diferentes como la música, el ajedrez, entre otras. Dado esto, se han presentado diversas formas de definirla, por eso en esta sección daremos a conocer algunas de sus definiciones utilizadas por Axel Thue, Marston Morse, entre otros. Así mismo, realizamos la prueba de la equivalencia de estas definiciones.

La sucesión de Thue Morse es una sucesión binaria de orden infinita. y a la cual denotaremos por $\mathbf{t} = (t_n)_{n\geq 0}$.

$$\mathbf{t} = 0110100110010110...$$

Para efectos de este trabajo, definiremos la sucesión de Thue Morse de manera recursiva, y las demás definiciones serán trabajadas como proposiciones.

Definición 2.1. Definamos de forma recursiva la sucesión de Thue Morse $\mathbf{t}$, por:

$$t_0 = 0$$

$$t_{2n} = t_n$$

$$t_{2n+1} = 1 - t_n$$

Veamos entonces su desarrollo.

- $t_0 = 0$
- $t_1 = t_{2(0)+1} = 1 - t_0 = 1 - 0 = 1$
- $t_2 = t_{2(1)} = t_1 = 1$

  $\vdots$

Luego,

$$\mathbf{t} = t_0 t_1 t_2 \ldots = 0110100110010110...$$

Hacer uso de esta definición para construir la sucesión de Thue Morse, es algo tediosa, ya que debemos hallar término a término, al igual que para hallar el n-ésimo término es necesario conocer los términos anteriores de la sucesión de Thue Morse, sin embargo, revisaremos algunas definiciones que son más sencillas al momento de generar la sucesión.

Observación 2.1. Veamos qué ocurre si a la sucesión de Thue Morse se le eliminan los elementos que se encuentran en las posiciones impares:

$$\underline{0}\cancel{1}\underline{1}\cancel{0}\underline{1}\cancel{0}\underline{0}\cancel{1}\underline{1}\cancel{0}\underline{0}\cancel{1}\underline{0}\cancel{1}\underline{1}\cancel{0}... \tag{2.1}$$

La sucesión resultante será:

$$01101001...$$

Claramente podemos ver que esta sucesión que se obtiene, es nuevamente la sucesión de Thue Morse, es decir, $\mathbf{t}$ quedá invariante al cancelar sus términos impares, esto se da, ya que por su definición de forma recursiva tenemos que: $t_{2n} = t_n$, por tanto, las dos sucesiones son equivalentes.

Para la siguiente caracterización de $\mathbf{t}$, es necesario definir una función, la cual veremos a continuación y que el profesor Shallit define en [1].

Proposición 2.1. *Sea $S_2(n)$ la sumatoria de los dígitos de $n \in \mathbb{N}$ en base 2, es decir:*

$$S_2(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i$$

donde,

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i$$

es decir, $n = (a_k a_{k-1} ... a_0)_2$ entonces, se tienen las siguientes igualdades:

$$S_2(n) = S_2(2n)$$

$$S_2(2n+1) = S_2(n) + 1$$

Demostración. Supongamos que:

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i \\ n &= a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + ... + a_1 2^1 + a_0 \\ 2n &= 2(a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + ... + a_1 2^1 + a_0) \\ 2n &= a_k 2^{k+1} + a_{k-1} 2^k + ... + a_1 2^2 + a_0 2 + 0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$S_2(2n) = S_2(n)$$

Ahora veamos la siguiente,

$$S_2(2n+1) = a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0 + (0+1)$$

$$S_2(2n) + 1 = (a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0 + 0) + 1$$

Luego

$$S_2(2n+1) = S_2(2n) + 1$$

□

En otras palabras, para conocer a t_n, expresamos a n en base 2 y contamos el número de 1's en dicha expresión, si son impares entonces $t_n = 1$, y si son pares entonces $t_n = 0$. Bernhardt en [3] nos refiere que los números que poseen la primera característica anteriormente mencionada, son denominados como número del mal, y en el segundo caso estos son denominados número odioso. En este artículo se trabajan algunas de las propiedades acá expuesta haciendo alusión a la anterior terminología.

Proposición 2.2. *La sucesión de Thue Morse esta dada por,* $\boldsymbol{t} = (S_2(n) \pmod 2)_{n\geq 0}$.

Observemos que la proposición en otras palabras nos dice que $t_n = S_2(n) \pmod 2$ para todo $n \geq 0$.

Por otro lado, para demostrar la equivalencia de las definiciones, haremos uso de una pequeña observación.

Observación 2.2. Observemos que:

$$t_{2n+1} \equiv 1 + t_n \pmod 2$$

1. Si $t_n = 0$, entonces
   $1 - t_n = 1 - 0 = 1$, y por otro lado $1 + t_n \pmod 2 \equiv 1$
2. Si $t_n = 1$, entonces
   $1 - t_n = 1 - 1 = 0$, y por otro lado $1 + t_n \pmod 2 \equiv 0$

Por lo tanto,

$$t_{2n+1} \equiv 1 + t_n \pmod 2$$

Ahora si, realizamos la demostración de la equivalencia de las definiciones.

Demostración. Por la proposición 1 tenemos que;

$$S_2(2n) = S_2(n)$$

$$S_2(2n+1) = S_2(2n) + 1$$

Para demostrar que $S_2(n) \pmod 2 \equiv t_n$, observaremos que tienen la misma propiedad de recursividad.

1. $S_2(0) = 0 = t_0$

2. $S_2(2n) = S_2(n) \pmod 2$

3. $S_2(2n+1) = S_2(2n) + 1 = S_2(n) + 1 \pmod 2$
   Luego, son equivalentes las definiciones.

$\square$

Aparentemente al contrario que la definición de forma recursiva, ésta forma de definir la sucesión de Thue Morse es más sencilla al momento de buscar el término n-ésimo de la sucesión, pues no tenemos la necesidad de conocer ninguno de los términos anteriores. Aunque se hace necesario conocer la expresión de $n-1$ en base 2 y la suma de sus dígitos.

Ejemplo 2.1. Si queremos hallar el término 36º de la sucesión, entonces $n = 35$.

$$35 = (100011)_2$$

$$35 = 1 * 2^5 + 0 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1$$

$$S_2(35) = 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 3$$

Por otro lado, vamos a hallar a t_{35},

$$\begin{aligned} t_{35} &= t_{17} + 1 \\ &= t_8 + 1 + 1 \\ &= t_4 + 2 \\ &= t_2 \\ &= t_1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego,

$$t(35) = S_2(35) \pmod 2 = 1$$

Sin embargo, es igual de complejo formar la sucesión de Thue Morse haciendo uso de esta definición que de forma recursiva.

Proposición 2.3. *Definamos la secuencia de palabras, de la siguiente forma:*

$$X_0 = 0$$

$$X_{n+1} = X_n\overline{X_n}$$

donde $\overline{X_n}$ *cambia los* $0's$ *por* $1's$ *y viceversa de los elementos que están en* X_n*. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \boldsymbol{t}$$

Demostración. Vamos a demostrar la proposición, aplicando inducción sobre n.

1. $n = 0$
$$X_0 = 0 = S_2(0)$$

2. Si $S_2(k) \pmod 2 \in X_n$, para $0 \leq k \leq 2^n - 1$, entonces tenemos que $(S_2(k) \pmod 2) \in X_{n+1}$ para $0 \leq k \leq 2^{n+1} - 1$.

   Como $0 \leq k \leq 2^n - 1$, y sea k en base 2 de la siguiente forma:

$$k = a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + ... + a_1 2^1 + a_0$$
$$k + 2^n = 2^n + a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + ... + a_1 2^1 + a_0$$

   Luego
$$S_2(k + 2^n) \equiv S_2(k) + 1 \pmod 2$$

   lo que significa que, $S_2(k + 2^n) \pmod 2 \in \overline{X_n}$ es el conjugado de $S_2(k) + 1 \pmod 2 \in X_n$, por lo tanto, para $0 \leq k \leq 2^{n+1} - 1$, tenemos que $(S_2(k) \pmod 2) \in X_{n+1}$.

□

Ejemplo 2.2. Veamos cómo sería su desarrollo,

$$\begin{aligned}
X_0 &= 0\\
X_1 &= 01\\
X_2 &= 0110\\
X_3 &= 01101001\\
X_4 &= 0110100110010110\\
&\vdots
\end{aligned}$$

La cadena X_n tiene 2^n elementos.

El construir la sucesión de Thue Morse haciendo uso de ésta definición, permite avanzar más rápido en la cantidad de elementos de la sucesión que podemos hallar.

Proposición 2.4. *Defina el morfismo Thue Morse* μ *en* $\{0,1\}$ *por,* $\mu(0) = 01$, $\mu(1) = 10$ *entonces,*

$$\mu^n(0) = X_n$$

Ejemplo 2.3. Sus primeras tres iteraciones nos permiten calcular los primeros 8 términos de la sucesión.
$\mu(0) = 01$
$\mu^2(0) = \mu(\mu(0)) = \mu(0)\mu(1) = 0110$
$\mu^3(0) = 01101001$
$\vdots$

La anterior proposición y demostración que se muestran a continuación, se encuentran en [10].

Demostración. Para demostrar la proposición aplicaremos inducción sobre n.
Demostraremos que

$$\mu^n(0) = X_n \text{ y } \mu^n(1) = \overline{X_n}$$

1. Probaremos para $n = 0$
   $\mu^0(0) = X_0 = 0$
   $\mu^0(1) = \overline{X_0} = 1$
   Ya está.

2. Supongamos que es cierto para n, es decir que:

$$\mu^n(0) = X_n \; y \; \mu^n(1) = \overline{X_n}$$

entonces se cumple para $n+1$

$$\begin{aligned}\mu^{n+1}(0) &= \mu^n(\mu(0))\\ &= \mu^n(01)\\ &= \mu^n(0)\mu^n(1)\\ &= X_n\overline{X_n}\\ &= X_{n+1}\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\mu^{n+1}(1) &= \mu^n(\mu(1))\\ &= \mu^n(10)\\ &= \mu^n(1)\mu^n(0)\\ &= \overline{X_n}X_n\\ &= \overline{X}_{n+1}\end{aligned}$$

Luego, queda probado para ambas.

□

Sin duda alguna, al terminar de conocer las diferentes formas en las que podemos construir la sucesión de Thue Morse concluimos que aunque la sucesión de bloques y la definición de morfismo sean similares, la definición de bloques permite construir de manera más fácil la sucesión de Thue Morse, ya que sólo debemos agregar el conjugado de la cadena anterior.

2.2. COMBINATORIA DE PALABRAS

En esta sección observaremos varias propiedades que cumple la sucesión de Thue Morse en esta rama, al igual nos permitimos mostrar algunos resultados que vista como palabra cumple la sucesión.

El siguiente teorema nos ilustra qué pasa con los cuadrados en las sucesiones que están definidas en conjuntos de dos elementos, tomado de [10].

Teorema 2.2. *No existe una palabra u en $\Sigma^* = \{0,1\}^*$ con $|u| \geq 4$, que sea libre de cuadrados.*

Demostración. Supongamos por contradicción que x es una cadena libre de cuadrados con $|x| \geq 4$. Entonces sin pérdida de generalidad asumamos que la palabra x inicia con 0, entonces el segundo símbolo debe ser un 1, de otra forma se obtendría el cuadrado 00. Ahora el tercer símbolo deberá ser un 0, de lo contrario se obtendrá el cuadrado 11. Luego los primeros tres símbolos de la sucesión serián 010, por consiguiente, con cualquiera que sea el cuarto símbolo se obtendrá un cuadrado 0100, ó, 0101. Contradición, luego x no es libre de cuadrados. □

Dado que la sucesión de Thue Morse está definida en un conjunto de dos elementos, el anterior teorema nos permite afirmar que la palabra de Thue Morse tiene cuadrados, pero qué tan largos pueden ser estos cuadrados?

A continuación veremos un teorema que nos permite saber qué tan largos se pueden presentar estos cuadrados en la sucesión de Thue Morse.

Teorema 2.3. *La sucesión de Thue Morse es una sucesión que contiene cuadrados arbitrariamente grandes.*

Demostración. Los primeros 4 términos de la sucesión son; 0110, luego el cuadrado es 11, si a esta iteracción se le aplica nuevamente el morfísmo μ anteriormente definido por $\mu(0) = 01$ y $\mu(1) = 10$, se obtiene por las propiedades de morfismo:

$$\mu(0\underline{11}0) = \mu(0)\underline{\mu(1)\mu(1)}\mu(0)$$

$$\mu(0110) = 01\underline{1010}01$$

luego, el siguiente cuadrado que se obtendrá, será el que se produce por $\mu(11)$, de esta forma los cuadrados de mayor longitud en cada uno de los bloques de longitud 2^n de la sucesión de Thue Morse, tendrán una longitud de $2^{(n-1)}$, como $n \to \infty$ entonces $2^{(n-1)} \to \infty$. $\square$

Teorema 2.4. *La palabra infinita de Thue Morse es libre de sobreposición.*

Demostración. Supongamos por contradicción que la sucesión de Thue Morse no es libre de sobreposición, luego la sucesión contiene una subpalabra de la forma $axaxa$.

Veamos

$$\mathbf{t} = uaxaxav$$

donde a es una letra, u, x son cadenas finitas y v es una cadena infinita.

En otras palabras, tenemos que $t_{k+j} = t_{k+j+m}$ *para* $0 \leq j \leq m$, donde $m = |ax|$ y $k = |u|$. Además $m \geq 1$ y suponemos que m es la longitud más pequeña donde hay una sobreposición. Entonces existen dos casos:

1. Si m es par, entonces $m = 2m'$. Ahora de igual forma, consideraremos también la paridad de k.

   (a). Si k es par, entonces $k = 2k'$. Y tenemos que $t_{k+j} = t_{k+j+m}$ *para* $0 \leq j \leq m$, entonces es cierto que $t_{k+2j'} = t_{k+2j'+m}$ *para* $0 \leq j' \leq m/2$, por la tanto $t_{2k'+2j'} = t_{2k'+2j'+2m'}$ *para* $0 \leq j' \leq m'$, además recordemos que por definición recursiva tenemos:

   $$t_{2k'+2j'} = t_{2(k'+j')} = t_{k'+j'}$$

   Y por otro lado,

   $$t_{2k'+2j'+2m'} = t_{2(k'+j'+m')} = t_{k'+j'+m'}$$

   luego obtenemos que:

   $$t_{k'+j'} = t_{k'+j'+m'}$$

   para $0 \leq j' \leq m'$, pero esto contradice la escogencia del mínimo de m, por lo tanto, $\mathbf{t}$ no tiene palabras sobrepuestas si k es par.

   (b). Si k es impar, entonces $k = 2k'+1$. Y tenemos que $t_{k+2j'} = t_{k+2j'+m}$ *para* $0 \leq j' \leq m/2$,

   $$t_{2k'+2j'+1} = t_{2k'+1+2j'+2m'}$$

para

$$0 \leq j' \leq m/2$$

$$t_{2(k'+j')+1} = t_{2(k'+j'+m')+1}$$

y por definición tenemos que:

$$1 - t_{k'+j'} = 1 - t_{k'+j'+m'}$$

para $0 \leq j' \leq m'$, luego

$$t_{k'+j'} = t_{k'+j'+m'}$$

para $0 \leq j' \leq m'$, esto contradice la escogencia del mínimo m.

2. Ahora, si m es impar.
Para revisar este caso, definamos para $n \geq 1$

$$b_n = (t_n + t_{n-1}) \pmod 2$$

Veamos a que es igual $b_{4n+2} \equiv (t_{4n+2} + t_{4n+1}) \pmod 2$. Recordemos por proposición que $t_n \equiv S_2(n) \pmod 2$ para todo $n \geq 0$, luego

$$S_2(4n+2) = S_2(2(2n+1)) = S_2(2n+1) = S_2(n) + 1$$

$$S_2(4n+1) = S_2(2(2n)+1) = S_2(2n) + 1 = S_2(n) + 1$$

Por lo tanto $t_{4n+2} = t_{4n+1}$, lo que implica que:

$$b_{4n+2} = 0$$

Veamos ahora quien será $b_{2n+1} = (t_{2n+1} + t_{2n}) \pmod 2$

$$t_{2n} = t_n$$

$$t_{2n+1} = 1 - t_n$$

luego,

$$b_{2n+1} = 1$$

(a). Ahora si $m \geq 5$, tenemos que:

$$b_{k+j} = b_{k+j+m} \; para \; 1 \leq j \leq m$$

Ya que $b_{k+j} \equiv (t_{k+j} + t_{k+j-1}) \pmod 2$ y $b_{k+j+m} = (t_{k+j+m} + t_{k+j+m-1}) \pmod 2$, y por ser una palabra sobrepuesta, se tiene que para $1 \leq j \leq m$, $t_{k+j} = t_{k+j+m}$.
Ahora cómo $m \geq 5$, existe j tal que $k + j \equiv 2 \pmod 4$, es decir $k + j$ es de la forma $4k' + 2$, por lo tanto $b_{k+j} = 0$ anteriormente demostrada.
Y $k + j + m$ es impar, dado que $k + j$ es par y m es impar, luego $b_{k+j+m} = 1$ anteriormente demostrada. Contradice el supuesto que **t** tiene una subpalabra sobrepuesta.

(b). Ahora si $m = 3$, tenemos que:

$$b_{k+j} = b_{k+j+3} \; para \; 1 \leq j \leq 3$$

. Ahora escojamos j tal que;

$$k + j \equiv 2 \pmod 4$$

ó

$$k + j \equiv 3 \pmod 4$$

Si $k+j \equiv 2 \pmod 4$ entonces $b_{k+j} = 0$, luego $b_{k+j+3} = 1$ ya que $(k+j+3)$ es impar.

Si $k + j \equiv 3 \pmod 4$ entonces $k + j$ es impar, entonces $b_{k+j} = 1$, luego $k + j + 3$ es par, por lo tanto $b_{k+j+3} = 0$. Contradición.

(c). Ahora si $m = 1$, tenemos que $t_k = t_{k+1} = t_{k+2}$. Por lo tanto, $t_{2n} = t_{2n+1}$ para $n = \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Contradicción.

Así concluimos con la demostración que **t** no contiene subpalabras sobrepuestas.

$\square$

Ahora, es posible saber si la sucesión de Thue Morse tiene cubos?, el teorema anteriormente demostrado nos permite saber la respuesta a esta pregunta.

Corolario 2.1. *La sucesión de Thue Morse es libre de cubos.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe una subpalabra de la forma xxx donde $x = x_1x_2...x_k$, y sea $u = x_2...x_k$ y $a = x_1$ luego, como es cubo es de la forma $xxx = x_1x_2...x_kx_1x_2...x_kx_1x_2...x_k = auauau$, donde $auaua$ es una palabra sobrepuesta, lo que contradice al teorema 2.4. Luego la sucesión es libre de cubos. □

Sobre un conjunto de dos letras es imposible construir una sucesión infinita que sea libre de cuadrados, pero será posible construirla sobre un conjunto de tres letras?. Pues con ayuda de **t** es posible construir una palabra infinita libre de cuadrados, este fue uno de los principales objetivos de Axel Thue cuya demostración la seguimos de [10].

Teorema 2.5. *Para $n \geq 1$, definimos c_n como el número de $1's$ entre el n-ésimo y $(n+1)$-ésimo 0, en la sucesión de Thue Morse. Luego definimos la palabra infinita $c_1c_2...$ entonces $C = 210201...$ es una palabra infinita libre de cuadrados sobre el conjunto $\{0, 1, 2\}$.*

Demostración. Recordemos por corolario anteriormente demostrado, que la sucesión de Thue Morse es libre de cubos, lo cual implica que no es posible que existan tres ó más 1's consecutivos, luego la sucesión está bien definida en el conjunto $\{0, 1, 2\}$.
Ahora supongamos por contradicción que la sucesión C no es libre de cuadrados, esto es, que existe un cuadrado de la forma xx con x una subpalabra de C y donde $x = x_1x_2...x_n$, $n \geq 1$. Luego por definición de C, vamos a tener que en la sucesión de Thue Morse será de la forma

$$01^{x_1}01^{x_2}\ldots01^{x_n}01^{x_1}01^{x_2}\ldots01^{x_n}0$$

donde $a = 0$ y $u = 1^{x_1}01^{x_2}\ldots01^{x_n}$, luego tendría una palabra sobrepuesta, lo cual contradice el teorema 2.4. □

El siguiente resultado, es propio de la observación que hacemos de lo que le sucede a la sucesión, cuando se le eliminan algunos bloques.

Teorema 2.6. *Si a la sucesión de Thue Morse, le quitamos las subpalabras de la forma* 01*, obtendremos la palabra infinita constante* 10*, y de manera análoga si quitamos la subpalabra de la forma* 10 *obtenemos la palabra infinita constante* 01

Demostración. Para demostrar el teorema, inicialmente observaremos que la sucesión definida por forma de bloques nos sugiere que la sucesión sólo se forma con dos bloques de 4 elementos, los cuales son: 0110 y 1001, por lo tanto, observaremos que le suceden a estos bloques y a las posibles combinaciones entre ellos.
$\cancel{01}10$ y $10\cancel{01}$, de manera que al eliminarse los bloques de la forma 01 obtenemos el bloque 10. Ahora observemos qué sucede con sus combinaciones.

$$\cancel{01}\underline{1}\cancel{01}\underline{0}\cancel{01}$$

$$\cancel{01}\underline{10}\cancel{01}\underline{10}$$

$$\underline{10}\cancel{01}\underline{10}\cancel{01}$$

$$\underline{10}\cancel{01}\cancel{01}\underline{10}$$

De todas las posibles combinaciones al cancelar los bloques de la forma 01 obtenemos la sucesión constante 10, y como esta sucesión esta formada por estos bloques, se sigue que la sucesión resultante será la constante 10.

□

En el estudio de las palabras, saber si una palabra infinita contiene palíndromos o no, despierta cierto interes, por ende vamos a mirar la siguiente proposición que entre otras se encuentra en [2].

Proposición 2.5. *La cadena X_{2n} es palíndromo.*

Demostración. Apliquemos inducción sobre n.

1. Veamos que es cierto para $n = 1$

$$X_2 = 0110$$

   Es palíndromo

2. Supongamos que X_{2n} es palíndromo entonces X_{2n+2} es palíndromo.
   Por definición tenemos que:

$$X_{2n+1} = X_{2n}\overline{X_{2n}}$$

y

$$X_{2n+2} = X_{2n+1}\overline{X_{2n+1}} = X_{2n}\overline{X_{2n}X_{2n}}X_{2n}$$

Luego X_{2n+2} es palíndromo.

$\square$

Siguiendo el anterior resultado, sabemos que la sucesión de Thue Morse contiene palíndromos de longitud infinitad.

2.3. TEORIA DE NÚMEROS

En esta sección serán trabajadas varias propiedades interesantes que posee la sucesión de Thue Morse en esta rama.

Veamos como se comportan los siguientes cocientes

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = 0{,}66...$$

$$\frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}}{\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}} = 0{,}70$$

$$\vdots$$

Esto converge a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Y la sucesión de Thue Morse tiene que ver mucho en esto, como veremos en el siguiente resultado probado por Shallit en [1].

Teorema 2.7. *Sea* $P = \displaystyle\prod_{n\geq 0}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{(-1)^{t_n}}$ *entonces* P *converge a* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Demostración. Sea $Q = \prod_{n\geq 1} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{(-1)^{t_n}}$ y $P = \prod_{n\geq 0} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{(-1)^{t_n}}$

$$P = \left(\frac{1}{2}\right) \prod_{n\geq 1} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{(-1)^{t_n}}$$

entonces,

$$PQ = \left(\frac{1}{2}\right) \prod_{n\geq 1} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{(-1)^{t_n}} \prod_{n\geq 1} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{(-1)^{t_n}}$$

por propiedades de las productorias, obtenemos

$$PQ = \left(\frac{1}{2}\right) \prod_{n\geq 1} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\frac{2n}{2n+1}\right)^{(-1)^{t_n}}$$

$$PQ = \left(\frac{1}{2}\right) \prod_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(-1)^{t_n}}$$

Cabe recordar que por definición $t_{2n} = t_n$.

Si observamos a los términos impares de la productoria de n, le corresponden los términos impares de la sucesión de Thue Morse t_{2n+1}, y a los pares le corresponden los términos pares de la sucesión de Thue Morse t_{2n}, y como anteriormente mencionamos $t_{2n} = t_n$, así mismo recordamos que $t_{2n+1} = 1 - t_n$, por lo tanto, de esta definición tenemos que los términos impares son diferentes a los t_n, podemos ver de forma sencilla que:

$$PQ = \left(\frac{1}{2}\right) \prod_{n\geq 0} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{(-1)^{t_{2n+1}}} \prod_{n\geq 1} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{(-1)^{t_n}}$$

luego,

$$PQ = \left(\frac{1}{2}\right) P^{(-1)} Q$$

$$P^2 = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Así queda demostrado el resultado.

□

La siguiente es quizás sin duda, una de las propiedades más interesantes que tiene esta sucesión, y fue descubierta por Prohuet.

Teorema 2.8. *La sucesión de Thue Morse tiene la siguiente propiedad, defina los siguientes conjuntos;*
$I = \{0 \leq i \leq 2^N - 1 : t_i = 0\}$
$J = \{0 \leq j \leq 2^N - 1 : t_j = 1\}$
Entonces para $0 \leq k \leq N - 1$, *tenemos que*

$$\sum_{i \in I} i^k = \sum_{j \in J} j^k$$

A continuación visualizaremos un ejemplo, para entender de una forma más sencilla como funciona esta propiedad que tiene la sucesión de Thue Morse.

Ejemplo 2.4. Vamos a hacerlo para el caso donde $N = 3$. Observemos cuáles serían los primeros 8 elementos de la sucesión

$$01101001$$

Luego los conjuntos

$$I = \{0, 3, 5, 6\}$$

$$J = \{1, 2, 4, 7\}$$

Por tanto $k = 0, 1, 2$.
Veamos entonces como se cumplen las sumatorias.

1. Cuando $k = 0$, se cumplen ya que I y J tienen el mismo número de elementos.

2. Cuando $k = 1$

$$0 + 3 + 5 + 6 = 1 + 2 + 4 + 7$$

$$14 = 14$$

3. Cuando $k = 2$

$$0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2$$

$$0 + 9 + 25 + 36 = 1 + 4 + 16 + 49$$

$$70 = 70$$

La siguiente demostración se sigue de [10], y es más general, dado que se considerará cualquier polinomio de tamaño menor que N, y no solamente el polinomio de la forma x^N.

Demostración. Vamos a aplicar inducción sobre el grado del polinomio, luego nuestra hipótesis de inducción será que el resultado es cierto para los polinomios de grado menor que N, $(grad(p(x)) < N$. Demostraremos que se cumple para los polinomios $p(x)$ de grado N. Sea

$$p(x) = a_N x^N + a_{N-1}x^{N-1} + ... + a_1 x + a_0$$

con $a_N \neq 0$, y consideremos el polinomio evaluado en $x + 2^N$, es decir:

$$p(x + 2^N) = a_N(x + 2^N)^N + a_{N-1}(x + 2^N)^{N-1} + ... + a_1(x + 2^N) + a_0$$

Ahora, definamos el polinomio $q(x)$ como,

$$q(x) = p(x + 2^N) - p(x)$$

$$q(x) = a_N(x+2^N)^N + a_{N-1}(x+2^N)^{N-1} + ... + a_1(x+2^N) + a_0 - (a_N x^N + a_{N-1}x^{N-1} + ... + a_1 x + a_0)$$

$$\begin{aligned} q(x) = a_N & \left(\binom{N}{0} x^N + \binom{N}{1} x^{N-1} 2^N + \binom{N}{2} x^{N-2} 2^{N^2} + ... + \binom{N}{N} 2^{N^N} \right) \\ & + a_{N-1} \left(\binom{N-1}{0} x^{N-1} + \binom{N-1}{1} x^{N-2} 2^N + ... + \binom{N-1}{N-1} 2^{N^{N-1}} \right) + ... \\ & + a_1(x + 2^N) + a_0 - a_N x^N - a_{N-1}x^{N-1} - ... - a_1 x - a_0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
q(x) = \cancel{a_N x^N} + a_N \left(\binom{N}{1} x^{N-1} 2^N + \binom{N}{2} x^{N-2} 2^{N^2} + \dots + \binom{N}{N} 2^{N^N} \right) \\
+ a_{N-1} \left(\binom{N-1}{0} x^{N-1} + \binom{N-1}{1} x^{N-2} 2^N + \dots + \binom{N-1}{N-1} 2^{N^N-1} \right) + \dots \\
+ a_1(x + 2^N) + \cancel{a_0} - \cancel{a_N x^N} - a_{N-1}x^{N-1} - \dots - a_1 x - \cancel{a_0}
\end{aligned}
$$

Luego $(grad\ q(x)) < N$. Por tanto, de la hipótesis de inducción, tendremos,

$$\sum_{\substack{i=0 \\ t_i=0}}^{2^N-1} q(i) = \sum_{\substack{j=0 \\ t_j=1}}^{2^N-1} q(j)$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ t_i=0}}^{2^N-1} \big(p(i+2^N) - p(i)\big) = \sum_{\substack{j=0 \\ t_j=1}}^{2^N-1} \big(p(j+2^N) - p(j)\big)$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ t_i=0}}^{2^N-1} \big(p(i+2^N)\big) + \sum_{\substack{j=0 \\ t_j=1}}^{2^N-1} (p(j)) = \sum_{\substack{j=0 \\ t_j=1}}^{2^N-1} \big(p(j+2^N)\big) + \sum_{\substack{i=0 \\ t_i=0}}^{2^N-1} (p(i))$$

$$\sum_{\substack{j=2^N \\ t_j=1}}^{2^{N+1}-1} (p(j)) + \sum_{\substack{j=0 \\ t_j=1}}^{2^N-1} (p(j)) = \sum_{\substack{i=2^N \\ t_i=0}}^{2^{N+1}-1} (p(i)) + \sum_{\substack{i=0 \\ t_i=0}}^{2^N-1} (p(i))$$

Entonces

$$\sum_{\substack{j=0 \\ t_j=1}}^{2^{N+1}-1} p(j) = \sum_{\substack{i=0 \\ t_i=0}}^{2^{N+1}-1} p(i)$$

Así queda demostrado, ya que $p(x)$ es de grado N. □

La siguiente propiedad que se encuentra en [1], aparte de ser una propiedad interesante, se sugiere como otra forma de definir la sucesión de Thue Morse.

Teorema 2.9. *Sea x una variable, entonces se cumple que*

$$\prod_{i \geq 0} (1 - x^{2^i}) = \sum_{j \geq 0} (-1)^{t_j} x^j$$

Demostración. Apliquemos inducción sobre n. Para $n = 1$

$$\prod_{i\geq 0}^{1}(1-x^{2^i}) = (1-x)(1-x^2) = 1-x-x^2+x^3$$

$$= 1-x-x^2+x^3$$

$$= \sum_{j\geq 0}^{3}(-1)^{t_j}x^j$$

Nuestra hipótesis de inducción

$$\prod_{i\geq 0}^{n}(1-x^{2^i}) = \sum_{j\geq 0}^{2^{n+1}-1}(-1)^{t_j}x^j$$

$$\prod_{i\geq 0}^{n}(1-x^{2^i})(1-x^{2^{n+1}}) = (1-x^{2^{n+1}})\sum_{j\geq 0}^{2^{n+1}-1}(-1)^{t_j}x^j$$

$$\prod_{i\geq 0}^{n+1}(1-x^{2^i}) = \sum_{j\geq 0}^{2^{n+1}-1}(-1)^{t_j}x^j - x^{2^{n+1}}\sum_{j\geq 0}^{2^{n+1}-1}(-1)^{t_j}x^j$$

Como la sumatoria recorre todos los 2^{n+1} siguientes términos, que van a hacer los opuestos según la definición por bloques, es decir que al multiplicar por $-$ obtendremos los siguientes términos del bloque.

$$\prod_{i\geq 0}^{n+1}(1-x^{2^i}) = \sum_{j\geq 0}^{2^{n+1}-1}(-1)^{t_j}x^j + \sum_{j\geq 0}^{2^{n+1}-1}(-1)^{t_{2^{n+1}+j}}x^{2^{n+1}+j}$$

$$\prod_{i\geq 0}^{n+1}(1-x^{2^i}) = \sum_{j\geq 0}^{2^{n+1}-1}(-1)^{t_j}x^j + \sum_{j\geq 2^{n+1}}^{2^{n+2}-1}(-1)^{t_j}x^{2^j}$$

$$= \sum_{j\geq 0}^{2^{n+2}-1}(-1)^{t_j}x^j$$

$\square$

2.4. CURIOSIDADES

En esta sesión observaremos dos importantes propiedades que tiene la sucesión de Thue Morse en geometría fractal y en la teoría de juegos.

2.4.1. Geometría fractal.

Si observamos las siguientes imágenes podremos encontrar una estrecha relación de uno de los fractales más conocidos, como lo es la curva de Koch, sus primeros pasos son muy diferentes a las primeras iteraciones de la curva de koch, sin embargo, esta similitud a medida que crecen las iteraciones aumenta. Aunque esta relación se demuestra de una manera más formal como se hace en [5], hemos optado por guiarnos de [8], en la que se plantea como un ejemplo y que graficamente podemos apreciar su similitud.

La gráfica la realizamos utilizando xlogo, el cual con el siguiente código generamos la sucesión de Thue Morse, y con las instrucciones de por cada 0 avanza ciertas unidades y por cada 1 gira a la izquierda un ángulo de 120º.

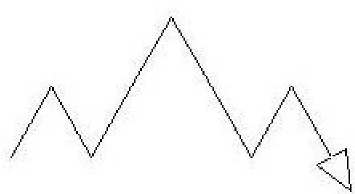
```
para neg :mija
haz "tu []
paracada "t :mija [si :t=1
[haz "tu pu 0 :tu]
si :t=0
[haz "tu pu 1 :tu]]
devuelve :tu
fin

   para morse :n
haz "x [0]
haz "j 0
mientras [:j <= :n]
[haz "x frase :x neg :x
haz "j :j+1]
devuelve :x
```

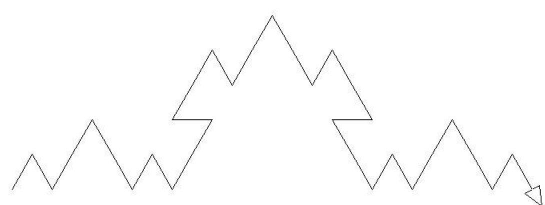
```
fin

   para dragi :n :lado :ang1
morse :n
paracada "j :x [
si :j=0 [av :lado ]
si :j=1 [ gi :ang1]]
fin
```

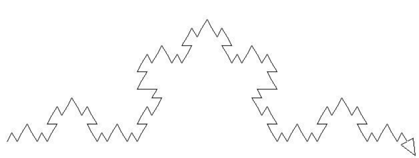
Introducimos las iteraciones que dan como resultado los bloques pares, ya que sabemos que X_{2n} es palíndromo, y como lo afírman los autores de [5], este hecho asegura que la itereación par sea simétrica, ya que el primer bloque X_{2n-1} se encarga de dibujar un brazo de la gráfica, mientras la gráfica del otro bloque $\overline{X_{2n-1}}$, parte del punto donde termina de dibujar el anterior dibujando el mismo brazo de la gráfica, por ende obtenemos similitud en la gráfica.



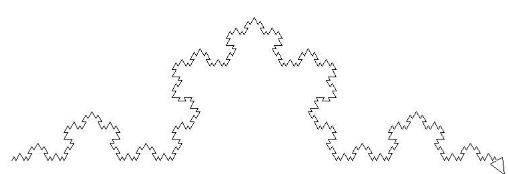
(a) Tercera iteración



(b) Quinta iteración



(c) Septima iteración



(d) Novena iteración

Figura 2.1: Palabras $X_4, X_6, X_8,\ y\ X_{10}$.

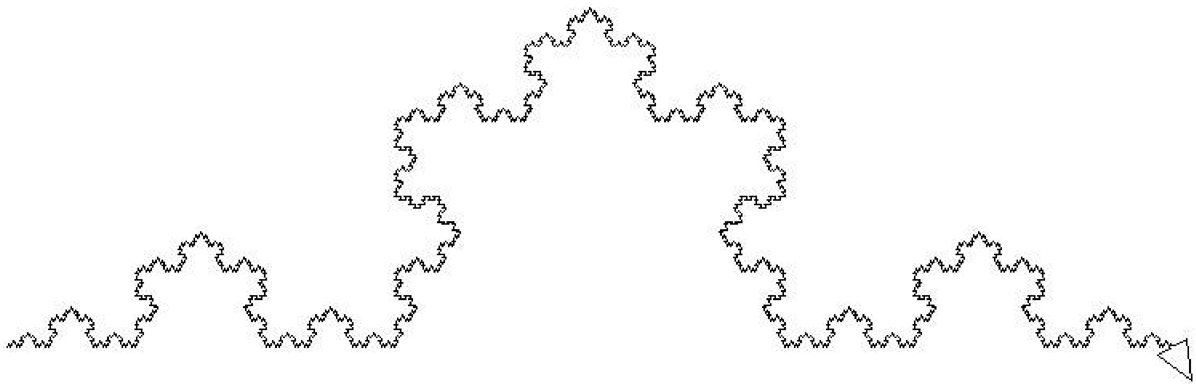


Figura 2.2: X_{12}, onceava iteración

2.4.2. Ajedrez y matemáticas

Ahora, veremos la cercanía que existe entre el ajedrez y la sucesión de Thue Morse.

Max Euwe fue campeón del mundo de ajedrez y matemático. Ganó desde 1935 hasta 1937. Pero Max Euwe se hizo la siguiente pregunta, ¿puede ser infinita una partida de ajedrez?, la respuesta a esta pregunta depende de las reglas, las cuales han ido cambiando a lo largo del tiempo. Sin embargo, cuando Euwe realizó su investigación una de esas reglas era: Una partida de ajedrez termina en tablas, si una sucesión de movimientos con todas las piezas exactamente en la misma posición es jugada tres veces de forma consecutiva.

Basta ver como lo contempla Perez en [7], que haciendo uso de la sucesión de Thue Morse se demuestra que existe la posibilidad que con esta regla existan partidas infinitas, para ello, se establece el siguiente ejemplo que nos visualiza un poco como se daría este caso.

Realicemos la siguiente asignación,
$0 : 1.Cc3Cc32.Cb1Cb8$
$1 : 1.Cf3Cf62.Cg1Cg8$

Luego, es fácil ver que una partida con una sucesión formada por estas jugadas, puede hacer que la partida sea infinita.

Perez afírma en [7], "Esta es la razón por la que esta regla ya no está incluida en las reglas de la FIDE. Por todo ello, hay otras dos normas en vigor que hacen garantizar el ajedrez como un juego finito:

- Una partida es tablas si el jugador que está en juego reclama correctamente, cuando por lo menos por tercera vez la misma posición va a repetirse o acaba de producirse.

- Una partida acaba en tablas cuando tras 50 movimientos (completados por blancas-negras o negras-blancas) no se ha movido peón alguno y ninguna pieza ha sido capturada.

En ambos casos, uno de los jugadores debe reclamar las tablas. Las normas de la FIDE dan las instrucciones precisas para estas reclamaciones. Estas dos reglas son obviamente eficaces. La primera resuelve finalmente la finitud de las posiciones. Mientras que la segunda regla obliga a los jugadores a realizar movimientos irreversibles si quieren evitar el empate, habiendo únicamente un número finito de movimientos irreversibles (p.32)."

CAPÍTULO 3

SUCESIÓN DE THUE MORSE GENERALIZADA

Este es el capítulo principal de este trabajo, en él estableceremos primero cómo se define la sucesión de Thue Morse de forma general, comparándolas con las definiciones que vimos en el capítulo anterior, y revisaremos algunas de las propiedades que se tienen en base dos, para ver si se cumplen y de qué manera lo hacen en base b.

3.1. DEFINICIONES

Aunque en la literatura utilizada como bibliografía para este trabajo, encontramos la sucesión de Thue Morse generalizada definida de forma distinta a como lo haremos, preferimos realizar una analogía de cada una de las definiciones de la sucesión en base 2 para base b, y a esta sucesión le hemos dado este título de sucesión Thue Morse generalizada.

Cabe aclarar que las siguientes definiciones aquí plasmadas, son primeramente un trabajo de observación de las definiciones estudiadas en el capítulo anterior, logrando así, la generalización de cada una de ellas en base b, por lo tanto, las demostraciones entre estas, son resultados propios.

A continuación definiremos la sucesión Thue Morse generalizada de forma recursiva.

Definición 3.1. La sucesión en base b se define de forma recursiva, de la siguiente manera:

$$t_0 = 0$$

$$t_{bn} = t_n$$

$$t_{bn+1} \equiv t_n + 1 \pmod{b}$$

$$t_{bn+2} \equiv t_n + 2 \pmod{b}$$

$$\vdots$$

$$t_{bn+(b-1)} \equiv t_n + (b-1) \pmod{b}$$

Ejemplo 3.1. Veamos el caso en especial cuando $b = 3$. Luego su definición recursiva estará dada por:

$$t_0 = 0$$

$$t_{3n} = t_n$$

$$t_{3n+1} \equiv t_n + 1 \pmod{3}$$

$$t_{3n+2} \equiv t_n + 2 \pmod{3}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&t_0 = 0 \\
&t_1 = t_{3(0)+1} \equiv t_0 + 1 \pmod{3} = 1 \\
&t_2 = t_{3(0)+2} \equiv t_0 + 2 \pmod{3} = 2 \\
&t_3 = t_{3(1)} = t_1 = 1 \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión Thue Morse generalizada en base 3, será:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= t_0 t_1 t_2 t_3 \ldots \\
\mathbf{t} &= 012120201\ldots
\end{aligned}$$

El utilizar esta definición para generar la sucesión de Thue Morse para cualquier base es tediosa, ya que para cada término es necesario realizar ciertas operaciones.

Observación 3.1. Observemos que la sucesión de Thue Morse en base 3, dada por:

$$012120201120201012201012120\ldots$$

Cumple con la propiedad de quedar invariante si se le eliminan todos sus términos que están en una posición diferente a un múltiplo de 3, obteniendo,

$$0\cancel{12}1\cancel{20}2\cancel{01}1\cancel{20}2\cancel{01}0\cancel{12}2\cancel{01}0\cancel{12}1\cancel{20}\ldots$$

la cual, da como resultado nuevamente la sucesión en base 3.

$$012120201\ldots$$

Se obtiene haciendo uso de su definición, ya que $t_{3n} = t_n$.

Y así para cualquier base b, haciendo uso de su definición $t_{bn} = t_n$, obtenemos que la sucesión queda invariante al momento que se le eliminan los términos que se encuentran en una posición que no es múltiplo de b.

Para ver la siguiente definición, es necesario hacer uso de una función y observar algunas propiedades que esta cumple.

Proposición 3.1. *Sea $S_b(n)$ la sumatoria de los dígitos de n en base b, es decir*

$$S_b(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i$$

donde

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i b^i$$

entonces, se tienen las siguientes igualdades

$$S_b(n) = S_b(bn)$$

$$S_b(bn+1) = S_b(n) + 1$$

$$S_b(bn+2) = S_b(n) + 2$$

$$\vdots$$

$$S_b(bn+(b-1)) = S_b(n) + (b-1)$$

Demostración. Sea $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + ... + a_1 b^1 + a_0$, donde $0 \leq a_i < b$ para $0 \leq i \leq k$,

$$bn = b(a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + ... + a_1 b^1 + a_0)$$

$$bn = a_k b^{k+1} + a_{k-1} b^k + ... + a_1 b^2 + a_0 b$$

por tanto,

$$S_b(n) = a_k + ... + a_1 + a_0 = S_b(bn)$$

Ahora, para $0 < c < b$ tenemos:

$$bn + c = a_k b^{k+1} + a_{k-1} b^k + ... + a_1 b^2 + a_0 b + c$$

Luego,

$$S_b(bn+c) = a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0 + c = S_b(n) + c$$

□

Proposición 3.2. *La sucesión de Thue Morse generalizada estará dada por,* $(S_b(n) \pmod{b})_{n \geq 0}$.

En otras palabras lo que nos dice la proposición es que $t_n = S_b(n) \pmod{b}$ para todo $n \geq 0$.

Esta definición es una de las más valiosas dada su utilidad, ya que que nos permite conocer cualquier término de la sucesión que queramos, sin ser necesario conocer los términos anteriores a éste. Sin embargo, es obligatorio saber como se escribe el número en base b, y conocer cómo se escribe un número en base b exige muchos pasos tantos como para calcular t_n.

A continuación observaremos un ejemplo en el cual podemos visualizar como se hace este procedimiento para conocer un término en especifico.

Ejemplo 3.2. Supongamos que queremos conocer el 35-avo término de la sucesión Thue Morse generalizada en base 3, luego debemos hallar cuando $n = 34$ teniendo en cuenta que la sucesión inicia desde el 0. Primero conoceremos su expresión en base 3.

$$34 = 1 * 3^3 + 0 * 3^2 + 2 * 3^1 + 1$$

Luego,

$$S_3(34) \equiv 1 + 0 + 2 + 1 \pmod{3}$$

$$S_3(34) = 1$$

Por lo tanto, el término 35 esta dado por el número 1.

Demostración. Para realizar la demostración, veremos que $(S_b(n) \pmod{b})_{n \geq 0}$ tiene la misma propiedad recursiva que la definición Thue Morse generalizada, y haciendo uso de la proposición anteriormente demostrada, tenemos:

- $S_b(0) \pmod{b} = 0$
- $S_b(bn) = S_b(n) \pmod{b}$
- $S_b(bn + 1) = S_b(n) + 1 \pmod{b}$
  $\vdots$
- $S_b(bn + (b - 1)) = S_b(n) + (b - 1) \pmod{b}$

Luego, queda demostrada la equivalencia de las definiciones. □

Teniendo en cuenta la definición dada en el capítulo anterior de bloques, veremos a continuación de que forma se da esta, de manera generalizada.

Proposición 3.3. *Definimos la secuencia de palabras* X_n *en el conjunto* $\{0, 1, 2, ..., b - 1\}$ *de la forma:*

$$X_0 = 0$$

$$X_{n+1} = X_n X_n^1 X_n^2 ... X_n^{b-1}$$

Donde X_n^a, se obtiene sumando $a \pmod b$ a cada término de X_n. Entonces el

$$\lim_{n\to\infty} X_n = t$$

Demostración. Vamos a demostrar la proposición, aplicando inducción sobre n.

1. Para $n = 0$, es claro ya que,

$$X_0 = 0 = S_b(0)$$

2. Si $S_b(k) \pmod b \in X_n$, para $0 \leq k \leq b^n - 1$, entonces tenemos que $S_b(k) \pmod b \in X_{n+1}$ para $0 \leq k \leq b^{n+1} - 1$.

   Como $0 \leq k \leq b^n - 1$, y sea k en base b:

$$k = a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + ... + a_1b^1 + a_0$$
$$k + cb^n = cb^n + a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + ... + a_1b^1 + a_0$$

   Para $1 \leq c \leq b - 1$.

   Luego,

$$S_b(k + cb^n) \equiv S_b(k) + c \pmod b$$

   Lo que significa que $S_b(k + cb^n) \pmod b \in X_n^c$ para todo $1 \leq c \leq b - 1$.
   Para $cb^n \leq k + cb^n \leq (c + 1)b^n - 1$, luego si llegamos al bloque de X_n^{b-1}, ahora cuando consideramos $c = b - 1$ entonces $(b - 1)b^n \leq k + cb^n \leq b^{n+1} - 1$, por lo tanto, para $0 \leq k \leq b^{n+1} - 1$, tenemos que $S_b(k) \pmod b \in X_{n+1}$.

□

Para ver de que manera se debe dar el desarrollo de esta definición, veremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.3. El desarrollo de la definición de bloques para base 3 esta dada por:

$$X_0 = 0$$

$$X_{n+1} = X_n X_n^1 X_n^2$$

Luego,
$X_0 = 0$
$X_1 = 012$
$X_2 = 012\ 120\ 201$
$X_3 = 012120201\ 120201012\ 201012120$
$\vdots$

Como podemos observar en el anterior ejemplo para base 3, el paso 4 de la sucesión de bloques nos permite conocer los primeros 3^3 términos de la sucesión Thue Morse generalizada en base 3, mientras con cualquiera de las dos definiciones anteriores nos permitía tan solo conocer los 4 primeros términos de la sucesión, claramente, el construir la sucesión generalizada de Thue Morse haciendo uso de esta definición para cualquier base b, es más sencillo y más provechoso, ya que nos permite conocer los primeros b^n términos de la sucesión en el paso $n+1$, mientras con las demás solo los primeros $n+1$ términos, aunque para hacer el paso $n+1$ es necesario conocer el paso n. Por otro lado, por su forma de estar definida se hace casi imposible conocer el término k-ésimo de la sucesión.

Proposición 3.4. *Definimos el morfismo μ en el conjunto $\{0, 1, 2, ..., (b-1)\}$ como:*

$$\mu(0) = 012...(b-1)$$

$$\mu(1) = 12...(b-1)0$$

$$\mu(2) = 2...(b-1)01$$

$$\vdots$$

$$\mu(b-1) = (b-1)01...(b-2)$$

luego, la sucesión de Thue Morse generalizada estará dada por,

$$\mu^n(0) = X_n$$

Ejemplo 3.4. Veamos como se daría el desarrollo de la definición del morfismo en base

3.

$$\mu(0) = 012$$

$$\mu(1) = 120$$

$$\mu(2) = 201$$

luego,
$\mu(0) = 012$
$\mu^2(0) = \mu(\mu(0)) = \mu(012) = \mu(0)\mu(1)\mu(2) = 012\ 120\ 201$
$\mu^3(0) = 012\ 120\ 201\ 120\ 201\ 012\ 201\ 012\ 120$
$\vdots$

Demostración. Vamos a aplicar inducción sobre n.

1. Probemos para $n = 0$

$$\mu^0(0) = 0 = X_0$$

2. Supongamos que es cierto para n, es decir que:
$\mu^n(0) = X_n$ y $\mu^n(a) = X_n^a$ *para* $1 \leq a \leq (b-1)$, entonces veamos que se cumple para $n+1$.

$$\begin{aligned}\mu^{n+1}(0) &= \mu^n(\mu(0)) \\ &= \mu^n(01...(b-1)) \\ &= \mu^n(0)\mu^n(1)...\mu^n(b-1)) \\ &= X_n X_n^1 X_n^2 ... X_n^{b-1} \\ &= X_{n+1}\end{aligned}$$

Análogamente para $a \in \{1, 2, ..., b-1\}$.

$$\begin{aligned}\mu^{n+1}(a) &= \mu^n(\mu(a)) \\ &= \mu^n(a(a+1)..,01...(a-1)) \\ &= \mu^n(a)\mu^n(a+1)...\mu^n(a-1)) \\ &= X_n^a X_n^{a+1} ... X_n^0 X_n^1 ... X_n^{a-1} \\ &= X_{n+1}^a\end{aligned}$$

Luego queda probado para todos. □

Al igual que la definición anterior, la dada por morfismo posee las mismas caracteristicas.

3.2. COMBINATORIA DE PALABRAS

En esta sección mostraremos algunas de las propiedades que se encuentran en la bibliografía utilizada para esta tesis, muchos de los resultados que veremos a continuación, son utilizados para la palabra infinita $t_{k,m}$ definida en [2], de la siguiente forma: Sean k, m enteros con $k \geq 2$, $m \geq 1$, luego $t_{k,m} = (S_k(n) \pmod{m})_{n \geq 0}$, donde $S_k(n)$ es la sumatoria de los dígitos de n en base k. Sin embargo, aquí trabajaremos el caso particular cuando $m = k$, para que coincida con las definiciones anteriormente trabajadas.

A diferencia del teorema 12 del capítulo anterior, para un alfabeto de b letras, con $b \geq 3$, no podemos asegurar que para cierta palabra u, si su longitud es mayor que un número ésta no sea libre de cuadrados, como por ejemplo el teorema 15 que se define en el conjunto de 3 letras, y que es libre de cuadrados.

Las siguientes propiedades y demostraciones se siguen de [2], haciendo enfasis cuando $m = b$.

Proposición 3.5. *La sucesión de Thue Morse generalizada contiene cuadrados arbitrariamente largos.*

Demostración. consideremos los $2b$ primeros términos de la sucesión Thue Morse generalizada en base b,

$$012...(b-1)12...(b-1)0$$

luego, este contiene un cuadrado de longitud $2b - 2$, y la imagen de este cuadrado bajo el morfismo μ sigue siendo un cuadrado de longitud $b * (2b - 2)$.
Podemos ver fácilmente que si la sucesión bajo el morfismo está en su iteración n entonces el número de sus elementos será b^n, y la longitud de su cuadrado será de $b^{n-2}(2b - 2)$. Como $n \longrightarrow \infty$ entonces la longitud del cuadrado mas grande tiende al infinito. □

Teorema 3.2. *La sucesión de Thue Morse generalizada no contiene palíndromos, si $b > 2$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que la sucesión contiene alguna subpalabra palíndromo de longitud par mayor o igual a 4, entonces esta contiene la subpalabra $caac$ para $a, c \in \Sigma$, pero si aa está en la imagen de una letra bajo el morfismo μ entonces $b = 1$. Por otro lado ca deberá ser el sufijo de la imagen de una letra en Σ, y ac deberá ser el prefijo de la imagen de una letra en Σ, teniendo esto en cuenta y la definición de morfismo obtenemos que:

$$c \equiv a - 1 \pmod{b}$$

$$c \equiv a + 1 \pmod{b}$$

Por lo tanto,

$$c - c \equiv a + 1 - (a - 1) \pmod{b}$$

$$0 \equiv 2 \pmod{b}$$

luego, tendremos que $b|2$ por tanto $b \leq 2$. Contradicción.

Ahora supongamos que la sucesión contiene una subpalabra palíndromo de longitud impar mayor o igual que 5, lo que es decir que contiene a $zyxyz$ donde $x, y, z \in \Sigma$. Si yxy es una subpalabra de la imágen por μ de una letra en Σ entonces

$$x \equiv y + 1 \pmod{b}$$

$$y \equiv x + 1 \pmod{b}$$

Luego

$$0 \equiv 2 \pmod{b}$$

Nuevamente tendremos que $b \leq 2$. Si yxy no es una subpalabra de la imagen de una letra, entonces habrá que estudiar dos casos

1. Si zyx es el sufijo de la imagen por μ de alguna letra en Σ y yz es el prefijo de la imagen por μ de alguna letra en Σ, lo que es decir que

$$z \equiv x - 2 \pmod{b}$$

$$y \equiv x - 1 \pmod{b}$$

$$z \equiv y + 1 \pmod{b}$$

Luego restando la primera y tercera congruencia obtenemos,

$$0 \equiv x - y - 3 \pmod{b}$$

Lo que es lo mismo que:

$$y \equiv x - 3 \pmod{b}$$

Ahora restamos la segunda congruencia con la anterior y obtenemos que,

$$0 \equiv 2 \pmod{b}$$

Por lo tanto, $b \leq 2$

2. Ahora consideraremos si zy es el sufijo de la imagen por μ de alguna letra en Σ y xyz es el prefijo de la imagen por μ de alguna letra en Σ, lo que es decir que:

$$z \equiv y - 1 \pmod{b}$$

$$y \equiv x + 1 \pmod{b}$$

$$z \equiv x + 2 \pmod{b}$$

Luego restando la primera y tercera congruencia obtenemos,

$$0 \equiv x - y + 3 \pmod{b}$$

Lo que es lo mismo que,

$$y \equiv x + 3 \pmod{b}$$

Ahora a esta congruencia le restamos la segunda congruencia y obtenemos que

$$0 \equiv 2 \pmod{b}$$

Por lo tanto $b \leq 2$.

Luego, queda demostrado que la sucesión de Thue Morse generalizada no contiene palíndromos si $b > 2$.

$\square$

Teorema 3.3. *La sucesión de Thue Morse generalizada es libre de sobreposición.*

Para realizar esta demostración definiremos algunas funciones y revisaremos algunos resultados necesarios para poder demostrarla.

Definición 3.4. Sean $k \geq 2$, $n \geq 1$ entonces definimos $V_k(n)$ como el exponente más alto entero a de k, tal que k^a divide a n.

En otras palabras, $V_k(n) = a$, si $k^a | n$, pero $k^{a+1} \nmid n$.

Corolario 3.1. *Para todos los enteros $k \geq 2$, $n, n' \geq 1$ tenemos que,*

$$V_k(n+n') \begin{cases} = min\{V_k(n), V_k(n')\}, & si\ V_k(n) \neq V_k(n'); \\ \geq V_k(n), & si\ V_k(n) = V_k(n') \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $V_k(n) = a$ y $V_k(n') = b$ con $a \neq b$, y sin pérdida de generalidad, supongamos que $a < b$. Luego por definición de la función tenemos que:

$$k^a | n$$

por lo tanto existe un c_1 tal que $n = c_1 k^a$ y por otra parte

$$k^b | n'$$

por lo tanto existe un c_2 tal que $n' = c_2 k^b$, de manera que $n + n' = c_1 k^a + c_2 k^b = k^a(c_1 + c_2 k^{b-a})$ donde $k \nmid c_1$ por lo tanto no es posible factorizar otra k de $c_1 + c_2 k^{b-a}$. Luego

$$V_k(n+n') = a = min\{V_k(n), V_k(n')\}$$

Ahora supongamos que $V_k(n) = V_k(n') = a$, luego $n = c_1k^a$ y $n' = c_2k^a$ por lo tanto

$$n + n' = k^a(c_1 + c_2)$$

Entonces k^a divide a $n + n'$.

Sin embargo, se puede presentar que $c_1 + c_2 = ck$, en este caso tendremos que

$$V_k(n + n') \geq a = V_k(n)$$

□

Nota 3.1. Si k es un primo, entonces tenemos que

$$V_k(nn') = V_k(n) + V_k(n')$$

Supongamos que $V_k(n) = a$ y $V_k(n') = b$, luego $n = c_1k^a$ y $n' = c_2k^b$, por lo tanto

$$nn' = c_1k^ac_2k^b$$

$$nn' = k^{a+b}c_1c_2$$

como k es primo, la unica posibilidad que $k = c_1c_2$, es que $c_1 = 1$ ó $c_2 = 1$, pero si $c_1 = 1$ entonces $c_2 = k$, luego esto contradice el hecho que $V_k(n') = b$, ya que $n' = c_2k^b = k * k^b = k^{b+1}$

Proposición 3.6. *Cualquier bloque de* $2k$ *valores consecutivos de la sucesión* $(V_k(n))_{n\geq 1}$ *contiene el valor* 1

Demostración. Cualquieras k números consecutivos contienen algún múltiplo de k, supongamos que es g, luego tendremos que $V_k(g) \geq 1$. Ahora, si $V_k(g) = 1$ ya está.

Por otro lado, si $V_k(g) > 1$, tenemos por el corolario anteriormente demostrado que $V_k(g + k) = min\{V_k(g), V_k(k)\} = 1$, ya que $V_k(k) = 1$. □

El siguiente lema relaciona $V_k(n)$ y $S_k(n)$.

Proposición 3.7. *Sean $k \geq 2$, $n \geq 1$ enteros, entonces:*

$$S_k(n) - S_k(n-1) = 1 - (k-1)V_k(n)$$

Demostración. Sea $V_k(n) = a$, entonces $n = c_1 k^a$. Por otro lado n en base k se puede escribir de la siguiente manera:

$$wc\underbrace{0\ldots0}_{a}$$

donde w es una palabra y c un dígito con $c \neq 0$.

Luego la expansión de $n-1$ en base k estará dada por

$$w(c-1)\underbrace{(k-1)\ldots(k-1)}_{a}$$

Por lo tanto

$$S_k(n) = S_k(w) + c$$

y

$$S_k(n-1) = S_k(w) + (c-1) + a(k-1)$$

luego

$$S_k(n) - S_k(n-1) = 1 - a(k-1) = 1 - V_k(k-1)$$

□

Definición 3.5. Si $w = a_1a_2...a_t$ es una palabra sobre $\Sigma_b = \{0, 1, ..., b-1\}$, entonces definimos la palabra de diferencias, así:

$$\triangle\ w = (a_2 - a_1)...(a_t - a_{t-1})$$

Estas diferencias son tomadas módulo b, podemos extender esta definición a palabras infinitas.

Sea y una palabra, entonces definimos $S(y)$ que representa la suma de los términos de y.

Proposición 3.8. *Sea s una palabra finita o infinita sobre $\{0, 1, ..., b-1\}$. La palabra s*

contiene una sobreposición axaxa si y solamente si, la palabra $\triangle$ s contiene un cuadrado yy tal que $S(y) \equiv 0 \pmod{b}$.

Demostración. Suponga que:

$$s = s_0 s_1 \ldots$$

Si s contiene una sobreposición de periodo p, iniciando en la posición r de s. Sea $x = x_0 x_1 ... x_{2p} = s_r ... s_{r+2p}$ la subpalabra sobrepuesta, entonces $x_i = x_{i+p}$ para $0 \leq i \leq p$. Por lo tanto, $x_i - x_{i-1} = x_{i+p} - x_{i+p-1}$ para $1 \leq i \leq p$, luego haciendo a;

$$y = (x_1 - x_0)(x_2 - x_1)...(x_p - x_{p-1})$$

Tendremos que $\triangle\, x = yy$, además aplicando la propiedad telescópica obtenemos que:

$$S(y) = x_p - x_0 = 0$$

Ahora supongamos que $\triangle\, s$ contiene el cuadrado yy, entonces existen enteros $r \geq 0$, $p \geq 1$, tales que:

$$s_{r+i+1} - s_{r+i} = s_{r+i+1+p} - s_{r+i+p} \pmod{b}$$

para $0 \leq i < p$.

Por cancelación telescópica obtenemos que:

$$s_{r+j+1} - s_r = s_{r+j+1+p} - s_{r+p} \pmod{b}$$

Para $0 \leq j < p$, y por hipótesis tenemos que:

$$S(y) \equiv 0 \pmod{b}$$

entonces

$$s_{r+p} - s_r \equiv 0 \pmod{b}$$

luego utilizando ambas congruencias obtenemos que

$$s_{r+j} \equiv s_{r+j+p} \pmod{b}$$

para $0 \leq j \leq p$. Y esto implica que s contiene una sobreposición de periodo $p+1$, iniciando en r. □

Con las propiedades anteriormente demostradas y las funciones definidas, demostraremos el teorema 3.3.

Demostración. Sea $t = t_0 t_1 t_2 ...$, note que:

$$t_{bn+c} \equiv S_b(bn+c) \equiv S_b(n) + c \pmod{b} \tag{3.1}$$

con $0 \leq c \leq b-1$.
Sea

$$z = t_{bn} t_{bn+1} ... t_{bn+(b-1)} \tag{3.2}$$

Luego, cada término contenido en z aparece solo una vez en z. A la subpalabra z le llamaremos subpalabra b-alineada.

De la definición de z tenemos, que cada término en una subpalabra b-alineada está completamente determinada una vez que se conoce el valor de un solo término.

Consideremos por contradicción que $\mathbf{t}$ contiene una sobreposición, y supongamos que p es el menor entero positivo, el cual es el periodo de la subpalabra sobrepuesta, así;

$$t_r t_{(r+1)} ... t_{(r+p-1)} t_{r+p} ... t_{(r+2p-1)} t_{r+2p}$$

Donde $p \geq 1$ y por definición de sobreposición tenemos que:

$$t_{r+i} = t_{r+p+i} \; para \; 0 \leq i \leq p$$

1. Caso 1.
   Si $b|p$, en este caso escribimos que $p = bp'$, donde p' es un entero positivo, y haciendo uso del teorema de la división, escribimos:
   $r = br' + c$, con $0 \leq c < b$.

Ahora considerando solamente aquellas i que sean múltiplos de b, de modo que:

$$t_{r+bj'} = t_{r+p+bj'}$$

con $0 \leq j' \leq p/b$. Y por teorema de la división aplicado a r, tenemos que:

$$\begin{aligned}
t_{br'+c+bj'} &= t_{br'+c+bp'+bj'} \; con \; 0 \leq j' \leq p' \\
t_{b(r'+j')+c} &= t_{b(r'+p'+j')+c} \\
t_{b(r'+j')} + c &\equiv t_{b(r'+p'+j')} + c \pmod{b} \\
t_{b(r'+j')} &= t_{b(r'+p'+j')} \\
t_{(r'+j')} &= t_{(r'+p'+j')}
\end{aligned}$$

Con $0 \leq j' \leq p'$, como $p' < p$, hemos encontrado una palabra sobrepuesta más pequeña de longitud p', luego se contradice la escogencia del mínimo p.

2. Caso 2.
Si $b \nmid p$, para este caso hay tres subcasos a considerar, basados en el tamaño de p, cuando:

a. $p < b$
Sea $j = \lceil \frac{r}{b} \rceil$, entonces $bj = r + I$ donde $0 \leq I < b$. Ahora, debemos considerar dos subcasos:

i. Si $I \leq p$, entonces $w = t_{(r+I)}...t_{(r+p+I)}$ es una subpalabra de $t_{bj} \ldots t_{(bj+b-1)}$ que es una subpalabra b-alineada y w contiene 2 términos idénticos, que son: $t_{(r+I)}$ y $t_{(r+I+p)}$ ya que es una subpalabra sobrepuesta por hipótesis. Contradicción con el hecho que es una subpalabra b-alineada 3.2

ii. Si $I > p$, y sea $w = t_{(r)}...t_{(r+p)}$ entonces es una subpalabra de $t_{b(j-1)}...t_{(bj-1)}$, ya que $r = bj - I$ con $I < b$, entonces $r = bj - I > bj - b$, y ahora como sabemos que $p < I$ se tiene que $p - I < 0$ entonces, $r + p = bj - I + p \leq bj - 1$, de ahí que w es una subpalabra de $t_{b(j-1)}...t_{(bj-1)}$ que es una subpalabra b-alineada, por lo tanto, no puede tener dos términos idénticos y por hipótesis tenemos que $t_r = t_{r+p}$, contradicción.

b. $b < p < 2b$

Sea $j = \lceil \frac{r}{b} \rceil$, y recordemos por hipótesis que esta subpalabra es sobrepuesta:

$$t_r \dots t_{(r+2p)}$$

Ahora, definamos $x_i = t_{(r+i)}$ para $0 \leq i \leq 2p$.

$$x_i = x_{(p+i)} \; para \; 0 \leq i \leq p \tag{3.3}$$

Donde $I = bj - r$, de modo que $A_1 = x_I \dots x_{I+b-1}$ es una subpalabra b-alineada y $0 \leq I < b$, hay dos casos a considerar:

2b.i. $0 \leq I \leq p - b$. Si además $I \leq 2p - 3b + 1$, entonces definamos:

$$X = \overbrace{x_0 \dots x_{I-1}}^{A_0} \overbrace{x_I \dots x_{I+b-1}}^{A_1} \overbrace{x_{I+b} \dots x_{I+p} \dots x_{I+2b-1}}^{A_2} \overbrace{x_{I+2b} \dots x_{I+b+p} \dots x_{I+3b-1}}^{A_3} \overbrace{x_{I+3b} \dots x_{2p}}^{A_4} \tag{3.4}$$

Note que A_1, A_2, y A_3 son todas subpalabras b-alineadas.

Por otra parte, si $2p - 3b + 1 < I \leq p - b$, defina

$$X = \overbrace{x_0 \dots x_{I-1}}^{A_0} \overbrace{x_I \dots x_{I+b-1}}^{A_1} \overbrace{x_{I+b} \dots x_{I+p} \dots x_{I+2b-1}}^{A_2} \overbrace{x_{I+2b} \dots x_{I+b+p} \dots x_{2p}}^{A_3} \tag{3.5}$$

Note que A_1 y A_2 son subpalabras b-alineadas, y A_3 es un prefijo de una subpalabra b-alineada.

Suponga $x_I \equiv J \pmod{b}$, entonces, del hecho que A_1 es una subpalabra b-alineada tenemos que $x_{I+b-1} \equiv J + b - 1 \pmod{b}$, entonces de 3.3, tenemos que: $x_{I+p+b-1} \equiv J + b - 1 \pmod{b}$, ya que A_3 es una subpalabra b-alineada ó el prefijo de una, tenemos:

$$x_{I+b+p} \equiv J + b \pmod{b} \tag{3.6}$$

De $x_I \equiv J \pmod{b}$ y de 3.3, sabemos que $x_{I+p} \equiv J \pmod{b}$. Ahora, ya que A_2

es una subpalabra b-alineada, entonces $x_{I+b} \equiv J+b-p \pmod{b}$. De 3.3 tenemos que:

$$x_{I+b+p} \equiv J+b-p \pmod{b} \tag{3.7}$$

Ahora restando las congruencias 3.6 y 3.7, tenemos que $p \equiv 0 \pmod{b}$, entonces $b|p$ luego, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $p = nb$, lo cual contradice el hecho que $b < p < 2b$.

b.ii. $I > p-b$. Si además $I \leq 2p-2b+1$, defina:

$$X = \overbrace{x_0 \ldots x_{I+b-p} \ldots x_{I-1}}^{A_0} \overbrace{x_I \ldots x_p \ldots x_{I+b-1}}^{A_1} \overbrace{x_{I+b} \ldots x_{I+p} \ldots x_{I+2b-1}}^{A_2} \overbrace{x_{I+2b} \ldots x_{2p}}^{A_3} \tag{3.8}$$

Note que A_1 es una subpalabra b-alineada, y por la inecuación $I \leq 2p-2b+1$, tenemos que $I+2b-1 \leq 2p$, así que además A_2 es una subpalabra b-alineada. Note que A_3 puede ser vacia.

Por otra parte, si $I > 2p-2b+1$, defina:

$$X = \overbrace{x_0 \ldots x_{I+b-p} \ldots x_{I-1}}^{A_0} \overbrace{x_I \ldots x_p \ldots x_{I+b-1}}^{A_1} \overbrace{x_{I+b} \ldots x_{I+p} \ldots x_{2p}}^{A_2} \tag{3.9}$$

En este caso A_1 es una subpalabra b-alineada, y A_2 es una subpalabra b-alineada ó prefijo de una.

Suponga que $x_I \equiv J \pmod{b}$. Entonces como A_1 es una subpalabra b-alineada, tenemos:

$$x_p \equiv J+p-I \pmod{b} \tag{3.10}$$

Por 3.3 sabemos que $x_I = x_{I+p}$, y A_2 es una subpalabra b-alineada o un prefijo de una, así que $x_{I+b} \equiv J+b-p \pmod{b}$. Ahora, $I+b-p \geq 0$, así que:

$$x_{I+b} = x_{I+b-p} \equiv J+b-p \pmod{b} \tag{3.11}$$

Como A_0 es el sufijo de una subpalabra b-alineada, y de lo anterior tenemos que

$x_0 \equiv J - I \pmod{b}$. Entonces $x_p = x_0$, luego:

$$x_p \equiv J - I \pmod{b} \tag{3.12}$$

Y restando las congruencias 3.10 y 3.12, tenemos que $p \equiv 0 \pmod{b}$, luego $b|p$, se sigue como el caso anterior, y así se llega a la contradicción.

c. $p > 2b$

Considere la palabra $\triangle\ t$. Por la proposición 3.6 debe haber un i, tal que $r \leq i < r + p$ con $V_b(i) = 1$. Ahora por la proposición 3.8 sabemos que $\triangle\ t$ contiene un cuadrado. Entonces por la proposición 3.7 tenemos que:

$$S_b(i) - S_b(i-1) = 1 - (b-1)V_b(i)$$

$$S_b(i+p) - S_b(i+p-1) = 1 - (b-1)V_b(i+p)$$

como $S_b(i) = S_b(i+p)$, por ser sobrepuesta, entonces tenemos que $S_b(i-1) = S_b(i+p-1)$, por lo tanto,

$$1 - (b-1)V_b(i) \equiv 1 - (b-1)V_b(i+p) \pmod{b}$$

luego,

$$b - 1 \equiv (b-1)V_b(i+p) \pmod{b}$$

Pero $V_b(i+p) \geq 1$, dado que si $V_b(i+p) = 0$, tendríamos $b - 1 \equiv 0 \pmod{b}$, contradicción.

Ahora, ya que $V_b(i) = 1$ y $V_b(i+p) \geq 1$, siguiendo del corolario 2 tenemos que $b|p$. Luego, se contradice el supuesto que $b \nmid p$.

Así concluimos con la prueba del teorema.

$\square$

Proposición 3.9. *La sucesión de Thue Morse generalizada es libre de cubos.*

Observación 3.2. Esta demostración se realiza al igual que en el capítulo anterior, haciendo uso de que la sucesión de Thue Morse generalizada no contiene palabras sobrepuestas.

3.3. TEORÍA DE NÚMEROS

Teorema 3.6. *La sucesión de Thue Morse generalizada tiene la siguiente propiedad, defina los siguientes conjuntos:*
$I_0 = \{i \in \{0, 1, 2, ..., b^N - 1\} : t_i = 0\}$
$I_1 = \{i \in \{0, 1, 2, ..., b^N - 1\} : t_i = 1\}$
$\vdots$
$I_{(b-1)} = \{i \in \{0, 1, 2, ..., b^N - 1\} : t_i = b - 1\}$

Entonces para $0 \leq k \leq N - 1$*, tenemos que*

$$\sum_{i \in I_0} i^k = \sum_{i \in I_1} i^k = ... = \sum_{i \in I_{(b-1)}} i^k$$

A continuación visualizaremos un ejemplo, para entender de una forma más sencilla como funciona esta propiedad que tiene la sucesión Thue Morse generalizada.

Ejemplo 3.5. Vamos a hacerlo para la base 3 con $N = 3$.
Observemos cuales serían los primeros 27 elementos de la sucesión:

$$012120201120201012201012120$$

Luego los conjuntos I_0, I_1 y I_2 serán:
$I_0 = \{0, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 21, 26\}$
$I_1 = \{1, 3, 8, 9, 14, 16, 20, 22, 24\}$
$I_2 = \{2, 4, 6, 10, 12, 17, 18, 23, 25\}$
Por tanto $k \in \{0, 1, 2\}$.

Veamos entonces como se cumplen las sumatorias cuando

1. $k = 0$

Se cumplen, ya que los conjuntos tienen el mismo número de elementos.

$$0^0 + 5^0 + 7^0 + 11^0 + 13^0 + 15^0 + 19^0 + 21^0 + 26^0 = 9$$

$$1^0 + 3^0 + 8^0 + 9^0 + 14^0 + 16^0 + 20^0 + 22^0 + 24^0 = 9$$

$$2^0 + 4^0 + 6^0 + 10^0 + 12^0 + 17^0 + 18^0 + 23^0 + 25^0 = 9$$

2. $k = 1$

$$0 + 5 + 7 + 11 + 13 + 15 + 19 + 21 + 26 = 117$$

$$1 + 3 + 8 + 9 + 14 + 16 + 20 + 22 + 24 = 117$$

$$2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 17 + 18 + 23 + 25 = 117$$

3. $k = 2$

$$0^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 15^2 + 19^2 + 21^2 + 26^2 = 2067$$

$$1^2 + 3^2 + 8^2 + 9^2 + 14^2 + 16^2 + 20^2 + 22^2 + 24^2 = 2067$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 10^2 + 12^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 + 25^2 = 2067$$

Esta propiedad fue atribuida a Prohuet, quien trabajó con la sucesión de Thue Morse aplicándola a la Teoría de Números

La siguiente demostración, es realizada para base 3, y es propio de este trabajo.

Demostración. Vamos a aplicar inducción sobre el grado del polinomio, luego nuestra hipótesis de inducción será que el resultado es cierto para los polinomios de grado menor que N, $(grad(p(x)) < N$. Demostraremos que se cumple para los polinomios $p(X)$ de grado N. Definamos la función $\phi(a, b)$ así:

$$\phi(c, d) = \sum_{\substack{i=d*3^N \\ t_i=c}}^{(d+1)3^N-1} (p(i))$$

Con $c, d \in \{0, 1, 2\}$.
Donde

$$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + ... + a_1 x + a_0$$

con $a_N \neq 0$ y consideremos el polinomio evaluado en $x + 3^N$, es decir

$$p(x+3^N) = a_N(x+3^N)^N + a_{N-1}(x+3^N)^{N-1} + ... + a_1(x+3^N) + a_0$$

Ahora, definamos los polinomios,

$$q_1(x) = p(x+3^N) - p(x)$$

$$q_2(x) = p(x+2*3^N) - p(x)$$

$$q_3(x) = p(x+3^N) - p(x+2*3^N)$$

Veamos el grado que tiene cada polinomio,

$$q_1(x) = a_N(x+3^N)^N + a_{N-1}(x+2^N)^{N-1} + ... + a_1(x+2^N) + a_0 - (a_N x^N + a_{N-1}x^{N-1} + ... + a_1 x + a_0)$$

$$\begin{aligned} q_1(x) = a_N &\left(\binom{N}{0}x^N + \binom{N}{1}x^{N-1}3^N + \binom{N}{2}x^{N-1}3^{N^2} + ... + \binom{N}{N}3^{N^N}\right) \\ &+ a_{N-1}\left(\binom{N-1}{0}x^{N-1} + \binom{N-1}{1}x^{N-2}3^N + ... + \binom{N-1}{N-1}3^{N^N-1}\right) + ... \\ &+ a_1(x+3^N) + a_0 - a_N x^N - a_{N-1}x^{N-1} - ... - a_1 x - a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1(x) = \cancel{a_N(x^N)} + a_N &\left(\binom{N}{1}x^{N-1}3^N + \binom{N}{2}x^{N-1}3^{N^2} + ... + \binom{N}{N}3^{N^N}\right) \\ &+ a_{N-1}\left(\binom{N-1}{0}x^{N-1} + \binom{N-1}{1}x^{N-2}3^N + ... + \binom{N-1}{N-1}3^{N^N-1}\right) + ... \\ &+ a_1(x+3^N) + \cancel{a_0} - \cancel{a_N x^N} - a_{N-1}x^{N-1} - ... - a_1 x - \cancel{a_0} \end{aligned}$$

Luego $(grad(q_1(x))) < N$, y así análogamente $(grad(q_2(x))) < N$, $(grad(q_3(x))) < N$. Por lo tanto, de la hipótesis de inducción, tendremos,

$$\sum_{\substack{i=0 \\ t_i=2}}^{3^N-1} q_1(i) = \sum_{\substack{i=0 \\ t_i=0}}^{3^N-1} q_1(i)$$

$$\sum_{\substack{i=0\\t_i=2}}^{3^N-1}\big(p(i+3^N)-p(i)\big)=\sum_{\substack{i=0\\t_i=0}}^{3^N-1}\big(p(i+3^N)-p(i)\big)$$

$$\sum_{\substack{i=0\\t_i=2}}^{3^N-1}\big(p(i+3^N)\big)+\sum_{\substack{i=0\\t_i=0}}^{3^N-1}(p(i))=\sum_{\substack{i=0\\t_i=0}}^{3^N-1}\big(p(i+3^N)\big)+\sum_{\substack{i=0\\t_i=2}}^{3^N-1}(p(i))$$

$$\sum_{\substack{i=3^N\\t_i=0}}^{2*3^N-1}(p(i))+\sum_{\substack{i=0\\t_i=0}}^{3^N-1}(p(i))=\sum_{\substack{i=3^N\\t_i=1}}^{2*3^N-1}(p(i))+\sum_{\substack{i=0\\t_i=2}}^{3^N-1}(p(i))$$

Entonces,

$$\phi(0,1)+\phi(0,0)=\phi(1,1)+\phi(2,0) \tag{3.13}$$

Ahora, repitamos el proceso con el polinomio q_2

$$\sum_{\substack{i=0\\t_i=0}}^{3^N-1}q_2(i)=\sum_{\substack{i=0\\t_i=1}}^{3^N-1}q_2(i)$$

$$\sum_{\substack{i=0\\t_i=0}}^{3^N-1}\big(p(i+2*3^N)-p(i)\big)=\sum_{\substack{i=0\\t_i=1}}^{3^N-1}\big(p(i+2*3^N)-p(i)\big)$$

$$\sum_{\substack{i=0\\t_i=0}}^{3^N-1}\big(p(i+2*3^N)\big)+\sum_{\substack{i=0\\t_i=1}}^{3^N-1}(p(i))=\sum_{\substack{i=0\\t_i=1}}^{3^N-1}\big(p(i+2*3^N)\big)+\sum_{\substack{i=0\\t_i=0}}^{3^N-1}(p(i))$$

$$\sum_{\substack{i=2*3^N\\t_i=2}}^{3^{N+1}-1}(p(i))+\sum_{\substack{i=0\\t_i=0}}^{3^N-1}(p(i))=\sum_{\substack{i=0\\t_i=0}}^{3^{N+1}-1}(p(i))+\sum_{\substack{i=0\\t_i=0}}^{3^N-1}(p(i))$$

Entonces,

$$\phi(2,2)+\phi(1,0)=\phi(0,2)+\phi(0,0) \tag{3.14}$$

Ahora, repitamos el proceso con el polinomio q_3

$$\sum_{\substack{i=0\\t_i=2}}^{3^N-1}q_3(i)=\sum_{\substack{i=0\\t_i=1}}^{3^N-1}q_3(i)$$

$$\sum_{\substack{i=0\\t_i=2}}^{3^N-1}\big(p(i+3^N)-p(i+2*3^N)\big)=\sum_{\substack{i=0\\t_i=1}}^{3^N-1}\big(p(i+3^N)-p(i+2*3^N)\big)$$

$$\sum_{\substack{i=0\\t_i=2}}^{3^N-1}\big(p(i+3^N)\big)+\sum_{\substack{i=0\\t_i=1}}^{3^N-1}\big(p(i+2*3^N)\big)=\sum_{\substack{i=0\\t_i=1}}^{3^N-1}\big(p(i+3^N)\big)+\sum_{\substack{i=0\\t_i=2}}^{3^N-1}\big(p(i+2*3^N)\big)$$

$$\sum_{\substack{i=3^N\\t_i=0}}^{2*3^N-1}(p(i))+\sum_{\substack{i=2*3^N\\t_i=0}}^{3^{N+1}-1}(p(i))=\sum_{\substack{i=3^N\\t_i=2}}^{2*3^N-1}(p(i))+\sum_{\substack{i=2*3^N\\t_i=1}}^{3^{N+1}-1}(p(i))$$

Entonces,

$$\phi(0,1)+\phi(0,2)=\phi(2,1)+\phi(1,2) \tag{3.15}$$

Luego, sumamos las ecuaciones (3.13), (3.14) y (3.15).

$$\phi(0,1)+\phi(0,0)+\phi(0,2)+\phi(0,0)+\phi(0,1)+\phi(0,2)=$$
$$\phi(1,1)+\phi(2,0)+\phi(2,2)+\phi(1,0)+\phi(2,1)+\phi(1,2)$$

$$2(\phi(0,0)+\phi(0,1)+\phi(0,2))=(\phi(1,0)+\phi(1,1)+\phi(1,2))+(\phi(2,0)+\phi(2,1)+\phi(2,2))$$

$$2A=B+C$$

Análogamente obtenemos,

$$\phi(0,2)+\phi(2,0)=\phi(1,2)+\phi(1,0)$$

$$\phi(1,1)+\phi(1,0)=\phi(2,1)+\phi(0,0)$$

$$\phi(1,1)+\phi(1,2)=\phi(0,1)+\phi(2,2)$$

Luego,

$$2B=A+C$$

Repetimos el proceso cambiando algunos indices,

$$\phi(2,1)+\phi(2,0)=\phi(0,1)+\phi(1,0)$$

$$\phi(1,2)+\phi(0,0)=\phi(2,2)+\phi(2,0)$$

$$\phi(2,1)+\phi(2,2)=\phi(1,1)+\phi(0,2)$$

Luego,

$$2C=A+B$$

Luego $A=B=C$ Así, queda demostrado $\square$

Para realizar la demostración del teorema 3.6 para cualquier base b, hecha por Nguyen en [6] en el año 2016, necesitaremos considerar lo siguiente:

Sea $A=(a_0,a_1,\ldots,a_{b-1})$ un vector con b valores complejos tales que la suma sea igual a cero.

$$a_0+a_1+\ldots+a_{b-1}=0$$

Ahora, definamos $F_N(x;A)$ como el polinomio de grado b^N-1 con coeficientes en A, que se repiten dependiendo de t_n, es decir,

$$F_N(x;A)=\sum_{i=0}^{b^N-1} a_{t_i}x^i$$

Ahora definamos la sucesión de vectores que consiste de constantes desconocidos como sigue:

$$C_1=(c_0,\ldots,c_{b-2})$$

y para $N>1$,

$$C_N=C_{N-1}(0)\#C_{N-1}(1)\#\ldots\#C_{N-1}(b-2)$$

Donde # denota la concatenación de vectores y

$$C_{N-1}(k)=(c_{j+kb^{N-1}}:c_j\in C_{N-1})$$

para $k=0,1,\ldots,b-2$

Veamos un ejemplo sobre ello, si $b=3$, tenemos.

$$C_1=(c_0,c_1)$$

$$C_2 = C_1(0)\#C_1(1)$$

Como $c_0 \in C_1$, entonces $c_{0+0*3^1} = c_0 \in C_1(0)$
$c_1 \in C_1$, entonces $c_{1+0*3^1} = c_1 \in C_1(0)$
$c_0 \in C_1$, entonces $c_{0+1*3^1} = c_3 \in C_1(1)$
$c_1 \in C_1$, entonces $c_{1+1*3^1} = c_4 \in C_1(1)$
Luego,

$$C_2 = (c_0, c_1)\#(c_3, c_4) = (c_0, c_1, c_3, c_4)$$

Por otro lado, definamos la secuencia de polinomios $P_N(x; C_N)$ recursivamente como sigue:

$$P_1 = (x; C_1) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{b-2} x^{b-2}$$

y para $N > 1$,

$$P_N(x; C_N) = P_{N-1}(x; C_{N-1}(0)) + x^{b^{N-1}}(x; C_{N-1}(1)) + \ldots + x^(b-2)b^{N-1} P_{N-1}(x; C_{N-1}(b-2))$$

Así, podemos observar como se cumple el siguiente teorema.

Teorema 3.7. *Sea N un entero positivo, entonces existe un polinomio $P_N(x; C_N)$ tal que:*

$$F_N(x; A) = P_N(x; C_N) \prod_{i \geq 0}^{N-1} (1 - x^{b^m})$$

Haciendo uso de este teorema, demostraremos el teorema 3.6.

Demostración. Consideremos los conjuntos

$I_0 = \{i \in \{0, 1, 2, ..., b^{M+1} - 1\} : t_i = 0\}$
$I_1 = \{i \in \{0, 1, 2, ..., b^{M+1} - 1\} : t_i = 1\}$
$\vdots$
$I_{(b-1)} = \{i \in \{0, 1, 2, ..., b^{M+1} - 1\} : t_i = b - 1\}$

Entonces para $0 \leq k \leq M$,

$$F_N(x; A) = \sum_{i=0}^{b^N - 1} a_{t_i} x^i$$

Por otro lado, tenemos que;

$$F_N(x;A) = \prod_{i\geq 0}^{N-1}(1 - x^{b^m})$$

Realicemos esta demostración considerando cuando $N = M + 1$.

Denotemos por $s_m(k) = \sum_{i\in I_m} i^k$. Ahora sustituyamos en $F_N(x;A)$, x por e^θ $(x = e^\theta)$, $G_N(\theta) := F_N(e^\theta; A)$, realicemos la k-ésima derivada de $G_N(\theta)$ en $\theta = 0$, luego, obtendremos:

$$\begin{aligned} G_N^{(k)}(\theta) &= \sum_{i=0}^{b^N-1} i^k a_{t_n} \\ &= \sum_{i\in I_0} i^k a_{t_0} + \ldots + \sum_{i\in I_{b-1}} i^k a_{t_{b-1}} \\ &= a_0 s_0(k) + \ldots + a_{b-1}s_{b-1}(k) \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $G_N(\theta)$ tiene un cero de orden N con $\theta = 0$. Siguiendo obtenemos

$$G_M^{(k)}(0) = 0$$

Para $k = 0, 1, \ldots, M - 1$. Entonces;

$$a_0 s_0(k) + \ldots + a_{b-1}s_{b-1}(k) = 0$$

Como sabemos que podemos escoger arbitrariamente los valores de A, cumpliendo que la suma de estos sea cero, por lo tanto, escogeremos un par de enteros i, j que satisfacen $0 \leq i, j \leq b - 1$, tales que $a_i = 1$, $a_j = -1$ y $a_l = 0$ para todo $l \neq i, j$, entonces:

$$s_i(k) - s_j(k) = 0$$

$$s_i(k) = s_j(k)$$

Como los valores de i, j no son estrictos, entonces concluimos que:

$$s_0(k) = s_1(k) = \ldots = s_{b-1}(k)$$

Para $k = 0, 1, \ldots, M$ como consideramos. $\square$

Teorema 3.8. *Sea x una variable, y consideremos a λ como la raíz b-ésima de la unidad, entonces se cumple que:*

$$\prod_{i\geq 0}(1 + \lambda x^{b^i} + \lambda^2 x^{2b^i} + ... + \lambda^{(b-1)} x^{(b-1)b^i}) = \sum_{j\geq 0}(\lambda)^{t_b(j)} x^j$$

Demostración. Veamos que si restringimos este proceso a n, y aplicando sobre ella inducción podemos demostrar la igualdad:

$$\prod_{i=0}^{n}(1 + \lambda x^{b^i} + \lambda^2 x^{2b^i} + ... + \lambda^{(b-1)} x^{(b-1)b^i}) = \sum_{j=0}^{b^{n+1}-1}(\lambda)^{t_b(j)} x^j$$

Apliquemos inducción sobre n, de esta manera obtendremos lo siguiente para $n = 0$:

$$1 + \lambda x^{b^0} + \lambda^2 x^{2b^0} + ... + \lambda^{(b-1)} x^{(b-1)b^0} = \sum_{j=0}^{b^{0+1}-1}(\lambda)^{t_b(n)} x^j$$

$$1 + \lambda x + \lambda^2 x^2 + ... + \lambda^{(b-1)} x^{(b-1)} = \lambda^0 x^0 + \lambda^1 x + \lambda^2 x^2 + ... + \lambda^{(b-1)} x^{(b-1)}$$

$$1 + \lambda x + \lambda^2 x^2 + ... + \lambda^{(b-1)} x^{(b-1)} = 1 + \lambda^1 x + \lambda^2 x^2 + ... + \lambda^{(b-1)} x^{(b-1)}$$

La hipótesis de inducción:

$$\prod_{i=0}^{n}(1 + \lambda x^{b^i} + \lambda^2 x^{2b^i} + ... + \lambda^{(b-1)} x^{(b-1)b^i}) = \sum_{j=0}^{b^{n+1}-1}(\lambda)^{t_b(j)} x^j$$

Luego

$$\prod_{i=0}^{n+1}(1+\lambda x^{b^i}+\lambda^2 x^{2b^i}+...+\lambda^{(b-1)} x^{(b-1)b^i}) = (1+\lambda x^{b^{n+1}}+...+\lambda^{(b-1)} x^{(b-1)b^{n+1}}) \sum_{j\geq 0}^{b^{n+1}-1}(\lambda)^{t_b(j)} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{b^{n+1}-1} (\lambda)^{t_b(j)} x^j + \lambda x^{b^{n+1}} \sum_{j \geq 0}^{b^{n+1}-1} (\lambda)^{t_b(j)} x^j + ... + \lambda^{(b-1)} x^{(b-1)b^{n+1}} \sum_{j \geq 0}^{b^{n+1}-1} (\lambda)^{t_b(j)} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{b^{n+1}-1} (\lambda)^{t_b(j)} x^j + \sum_{j=b^{n+1}}^{2b^{n+1}-1} (\lambda)^{t_b(j)} x^j + ... + \sum_{j=(b-1)b^{n+1}}^{b^{n+2}-1} (\lambda)^{t_b(j)} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{b^{n+2}-1} (\lambda)^{t_b(j)} x^j$$

□

CITAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] J.P. Allouche y J. Shallit. The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence. *Journal of Funny Physics*, Vol. 35:1–14, 1997.

[2] J.P. Allouche y J. Shallit. Sums of digits, overlaps, and palindromes. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 4:1–10, 2000.

[3] C. Bernhardt. Evil twins alternate with odious twins. *Mathematics Magazine*, 82(1):57–62, 2009.

[4] J. Gordillo L. Jimenez y G. Rubiano. *Teoría de Números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[5] J. Ma y J. Holdener. When Thue Morse meets Koch. *Fractals 13*, 3:191–206, 2005.

[6] D. Nguyen. A new proof of the Prouhet-Tarry-Escott problem. *Integers 16*, págs. 1–9, 2016.

[7] R. Pérez. *Matemáticas y Ajedrez (tesis de pregrado).* Universidad de Murcia, España, 2015.

[8] J.L. Ramírez y G. Rubiano. Generación de curvas fractales a partir de homomorfismos entre lenguajes con mathematica. *Revista Integración*, 30(2):129–150, 2012.

[9] N. Rampersad. Overlap-free words and generalizations. *Thesis (ph.D), University of Waterloo*, 2007.

[10] J. Shallit. *The Ubiquitous Thue Morse sequence.* https://cs.uwaterloo.ca/ shallit/Talks/green3.pdf, 2010.

BIBLIOGRAFÍA

D. Nguyen. A new proof of the Prouhet-Tarry-Escott problem. *Integers 16*,1-19, 2016.

J.P. Allouche and J. Shallit. Sums of Digits, Overlaps, and Palindromes. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 4:1-10, 2000.

J.P. Allouche and J. Shallit. The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence. *Journal of Funny Physics*, 35:1-14, 1997.

ANEXO A

PROGRAMA DE SAGE

El siguiente programa realizado en SAGE, nos muestra cómo se cumple el teorema 25 del capítulo 4. Teniendo en cuenta al igual que en la demostración que no sólo se cumple para los polinomios $p(x) = x^n$, sino para cualquier polinomio que tenga el grado menor ó igual a n.

La última parte del programa trabaja con 4 variables N, bb, p, y k. Para ejecutarlo debemos utilizar el comando `for ik in range (bb): print ik, eve(N,bb,p,k)`

la primera línea del comando, permite hacer un recorrido por cada uno de los valores que contiene la sucesión de Thue Morse generalizada con el fín de encontrar el valor de la suma de los índices que dan el mismo término en la sucesión, por lo tanto, la variable bb representa la base en la cual se quiere hallar la sucesión. Por otro lado, en la segunda línea pedimos que imprima una lista, en la que la primera columna representa los diferentes valores que pueden tomar los términos de la sucesión, y en la segunda, la suma que corresponde a los índices de los términos que toman el valor correspondiente a la primera columna, llamamos entonces al programa "even", para ello debemos incluir en la primera variable, el valor de N, este es quien definirá el número de términos que quieres hallar de la sucesión, y este será de b^N elementos. La variable bb representa la base como lo dijimos anteriormente, la variable p representa el polinomio que se va a introducir, debemos recordar que este polinomio debe ser de grado menor a N. Y por último la variable k representa los valores de la sucesión al igual que ik.

```
def base(nn,ba):
    lista=[]
    while nn>=ba:
        re=nn%ba
        lista.append(re)
        nn=nn//ba
    lista.append(nn)
    return lista
def sumab(ll,bb):
    sum=0
    for ii in ll:
        sum=mod(sum+ii,bb)
    return sum
def tmorse(nn,bae):
    for ii in range(nn):
        print sumab(base(ii,bae),bae),
def thmorse(nn,bae):
    listi=[]
    for ii in range(nn):
        listi.append(sumab(base(ii,bae),bae))
    return listi
var('x')
def eve(N,bb,p,k):
    summa=0
    tuya=thmorse(bb^N,bb)
    for ii in range(bb^N):
        if tuya[ii]==k:
            x=ii
            summa=summa+p(ii)
    return summa
```