Tipos de demostraciones que realizan estudiantes en un curso de Precálculo

Marilyn Lizeth Antonio Osma

Trabajo de Grado para Optar el título de Magister en Educación Matemática

Director
Jorge Enrique Fiallo Leal
Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Maestría en Educación Matemática
Bucaramanga
2020

A la Luz de mis ojos, mi madre.

A mi pequeña y eterna alegría, mi negra.

Siempre juntas…

Agradecimientos

En primer lugar, a Dios por permitirme realizarme como persona, por darme la fuerza para trabajar por esta maestría y poder prepararme.

A la Universidad Industrial de Santander por ser el lugar que me formó profesionalmente, porque tengo el orgullo de decir que soy miembro de la comunidad UIS y nuevamente egresada UIS.

A la Vicerrectoría Académica y a la profesora Sandra Evely por darme la oportunidad de trabajar con ellos, por darme el espacio y el tiempo para educarme, y por motivarme a terminar este proceso.

Al profesor Jorge Fiallo, mi director del trabajo de grado por el apoyo, la paciencia, la exigencia y su compromiso en el proceso de esta investigación.

A las profesoras Solange Roa Fuentes y Edith Johanna Mendoza por la evaluación de este trabajo de investigación.

A mis profesores, Jorge, Sandra, Sol y Tulia quienes compartieron conmigo un poco de su sabiduría.

A mis padres, Luz y Luis; a mis hermanos, Johana, Vanessa, Danna y Adrián, a mis sobrinos, Annya y Joann quienes son gran parte de mi inspiración.

A mi eterna compañía, mis pequeños, Mimi, Antonio y mi ángel.

A mis compañeros de maestría con quienes compartimos y disfrutamos de aprender de la Educación Matemática.

A mi ángel guardián, mi ágape, quien con su amor ha apoyado mi proceso académico y me ha ayudado a ser una mejor persona.

Contenido

Lista de figuras

Lista de imágenes

Resumen

Título: Tipos de demostraciones que realizan estudiantes en un curso de Precálculo [*]

Autor: Marilyn Lizeth Antonio Osma [**]

Palabras Clave: Demostración, Precálculo, Geogebra

Descripción: En el presente documento se identifican algunos tipos de demostraciones que logran realizar estudiantes de nuevo ingreso a la universidad en la resolución de problemas de variación, aproximación y tendencia dentro de un curso de Precálculo mediado por el software de matemática interactiva Geogebra, donde se asume la demostración como un proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática (Fiallo, 2011), para ello se distinguen 5 tipos de demostración empírica o inductiva (Empirismo Ingenuo inductivo, Experimento Crucial Basado en el Ejemplo, Experimento Crucial Constructivo, Ejemplo Genérico Analítico y Ejemplo Genérico Intelectual) y 4 de demostración deductiva (Experimento Mental Transformativo, Experimento Mental Estructural, Deductiva Formal Transformativa y Deductiva Formal Estructurada).

La argumentación y la demostración son procesos propuestos desde los lineamientos nacionales y los estándares internacionales, se plantean para la educación básica y media, y coinciden en que los estudiantes al iniciar la vida universitaria deberían realizar demostraciones deductivas formales, pero la realidad es otra, dado que un gran porcentaje de los estudiantes colombianos justifican sus razonamientos haciendo uso de ejemplos, lo que indica que sus razonamientos son de tipo empírico.

En esta investigación se evidenciará que los estudiantes que inician su vida universitaria hacen uso de ejemplos para sustentar sus conjeturas, lo que nos lleva a concluir que las demostraciones que los estudiantes logran realizar dentro del curso de precálculo ofrecido por la Universidad Industrial de Santander son únicamente de tipo empírico.

---

[*] Trabajo de Grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Abstract

Title: Types of proof performed by students in a pre-calculus course *

Author: Marilyn Lizeth Antonio Osma[1]

Key Words: Proof, Precalculus, Geogebra

Description: This document identifies some types of proof that new university students manage to perform in solving variation, approximation and trend problems within a Precalculus course mediated by the interactive mathematics software Geogebra, where the proof (Fiallo, 2011) as a process that includes all the arguments raised by the students to explain, verify, justify or validate with a view to convincing themselves, other students and the teacher of the veracity of a mathematical statement. They distinguish 5 types of empirical or inductive proof (Inductive Naive Empiricism, Crucial Experiment Based on the Example, Crucial Constructive Experiment, Generic Analytical Example and Generic Intellectual Example) and 4 deductive proof (Transformative Mental Experiment, Structural Mental Experiment, Formal Transformative Deductive and Structured Formal Deductive).

The argumentation and proof are processes proposed from the national guidelines and international standards, these are proposed for basic and secondary education, and these agree that students at the beginning of university life should carry out formal deductive demonstrations, but the reality is different, given that a large percentage of Colombian students justify their reasoning using examples, which indicates that their reasoning is empirical.

In this research it will be shown that students who begin their university life make use of examples to support their conjectures, which leads us to conclude that the demonstrations that students manage to perform within the pre-calculus course offered by the Universidad Industrial de Santander are only empirical type.

* Master Work

[1] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Introducción

Tanto los estándares nacionales, como los internacionales coinciden en que los estudiantes en todos los grados de escolaridad deberían ver el sentido de las matemáticas, desarrollar ideas, explorar fenómenos, justificar resultados y usar conjeturas con diferentes expectativas de complejidad, iniciando con demostraciones de tipo informal y de forma evolutiva llegar a la demostración deductiva formal, tomando este razonamiento como un hábito.

Es por ello que, grandes educadores matemáticos se han interesado por estudiar la demostración, pero no como un producto, sino más bien como un proceso dentro del aula de clase, considerando la intuición como una primera fase dentro del proceso de demostración, dado que sus argumentos se basan en que la formalidad y rigurosidad propias de las demostraciones deductivas formales son matemática y lógicamente exactas, pero no necesariamente contribuyen a la comprensión de los conceptos fundamentales de las matemáticas.

Esta situación no es ajena a nosotros, es decir, no es ajena a la realidad de la Universidad Industrial de Santander, dado que en un gran porcentaje de los colegios colombianos no se promueve el proceso de demostración y los estudiantes al iniciar su vida universitaria fracasan en los cursos del ciclo básico, en particular, en el curso de Cálculo Diferencial, debido a que este curso se presenta bajo un enfoque formal y riguroso.

No obstante, el grupo de investigación en Educación Matemática (EDUMAT-UIS) ha propuesto un curso laboratorio de Precálculo, que se centra en la comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo (Variación, cambio, aproximación y tendencia), cuya metodología está basada en la resolución de problemas y además uno de sus objetivos principales es promover el proceso de demostración.

Es entonces, que teniendo en cuenta la demostración como el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática (Fiallo, 2011) nos propusimos identificar los tipos de demostraciones que realizan los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad en la resolución de problemas de variación, aproximación y tendencia, dentro de un curso laboratorio de Precálculo mediado por el software de matemática interactiva Geogebra.

1. Planteamiento del problema

González (2004) afirma que Newton y Leibniz son los verdaderos creadores del Cálculo Infinitesimal, sin embargo, estos dos genios encontraron un terreno explorado ampliamente por un gran número de matemáticos como Arquímedes, Oresme, Kepler, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, Roberval, Wallis, Barrow, entre otros, quienes habían desarrollado, en la resolución de ciertos problemas, una variedad de métodos y técnicas infinitesimales, de las que Newton y Leibniz concluyeron el algoritmo universal que constituye el Cálculo Infinitesimal. Sin embargo, cuando se realiza una mirada a los antecesores del Cálculo, se puede observar que muchos de los trabajos realizados fueron empíricos, o más bien, no del todo deductivo, formal y riguroso. Por ejemplo, Eudoxo de Cnido[2], de la Academia platónica, aproximadamente en el siglo V a.C. logró introducir y demostrar la idea de "tan pequeño como se quiera" a través de la Teoría de la Proporción, que se desarrolla en tres fases: una definición, un axioma (Axioma de continuidad) y un método (Método de exhaución), imponiendo así, un fuerte rigor lógico, y propiciando la codificación axiomático-deductiva de la geometría inmersa en los Elementos de Euclides, que establece un rígido modelo de exposición y demostración en casi toda la Matemática griega.

En los siglos XVI y XVII, los matemáticos retoman algunas obras clásicas griegas, pero notan que la Geometría griega, y en particular las obras de Arquímedes, los priva de ver la forma en la que habían sido descubiertos los resultados. Por ejemplo, se ignora el sistema por el que

[2] Eudoxo de Cnido fue un filósofo, astrónomo, matemático y médico de la Antigua Grecia, pupilo de Platón.

Arquímedes había obtenido los resultados acerca de las cuadraturas y cubaturas[3]. Sin embargo, algunos de los estudiosos más importantes (Fermat, Descartes, Torricelli, Wallis, ...), cultivan la sospecha de que Arquímedes tenía a su disposición un método de descubrimiento sustentado en el Álgebra; que sólo en el siglo XX, cuando se conoce la obra "El método" de Arquímedes, son revelados los procedimientos de la Mecánica, no del todo rigurosos, que precedían sus descubrimientos; y que fueron omitidos en todas sus memorias científicas. La Matemática del siglo XVII presenta un cambio radical respecto a la Matemática clásica griega, donde el paradigma estilístico y demostrativo que impuso la filosofía platónica fue reemplazado por el principio de que lo que importa es la consecución de nuevos resultados, aunque no muestre rigurosidad alguna. Es decir, se impone el lema "primero inventar, después demostrar" (González, 2004).

Como se ha encontrado en diferentes investigaciones, la Matemática griega se caracteriza por su alto grado de rigor y es la fuente de formación y de inspiración de los matemáticos. Sin embargo, se abandonan y critican sus métodos porque no son heurísticos, por lo que, en el siglo XVII, tras la recuperación, reconstrucción, divulgación y asimilación del legado clásico, se impuso una nueva actitud hacia los problemas matemáticos, permitiendo el desarrollo de nuevas técnicas infinitesimales, que permitieran obtener de forma directa algunos resultados, aunque fuera a costa del rigor. En cuanto al cálculo infinitesimal, en los dos primeros tercios del siglo XVII, los indivisibles, lo infinitamente pequeño, los incrementos evanescentes, las cantidades despreciables, etc., se trabajan de forma empírica, desarrollando así, multitud de técnicas y

---

[3] Cubatura es un término en desuso que se refiere al volumen. Este término también se define como el procedimiento para determinar un cubo del mismo volumen que un cuerpo dado.

métodos infinitesimales, que contribuyen a resolver de forma sorprendente antiguos y nuevos problemas, bajo la acción de profundas intuiciones, que supliendo la falta de rigor, evitan las contradicciones y el absurdo donde podía haber llevado tanto desenfreno conceptual, conduciendo al descubrimiento simultáneo del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton y Leibniz (González, 2004).

Es por ello, que grandes exponentes de la Educación Matemática se han interesado por el cambio del estudio formal y riguroso del cálculo, considerando la intuición y las aplicaciones del mismo, sustentándose en que el pensamiento tradicional es matemática y lógicamente exacto, pero no contribuye a la comprensión de conceptos fundamentales, debido a que, cuando el análisis matemático es desarrollado de forma abstracta no alcanza a tener un verdadero significado para la mayoría de los alumnos. Es decir, las ideas básicas del cálculo permanecen escondidas bajo una capa de formalismo, negando al estudiante la posibilidad de una comprensión autentica y de pensar la matemática como una actividad humana cercana a todos (Ímaz y Moreno, 2014).

Como una forma de contribuir a ello, los Principios y Estándares de la Educación Matemática (NCTM, 2003) y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) sugieren

acoger el proceso de demostración, entre los otros procesos, desde los grados inferiores de escolaridad con el fin de que al avanzar en ellos, este proceso se vaya refinando y se pueda llegar a la demostración deductiva formal al finalizar el bachillerato, sin embargo, por diferentes factores esto no se cumple dentro de un gran porcentaje de los colegios colombianos, por lo que muchos estudiantes al iniciar su vida universitaria fracasan en los primeros cursos del ciclo básico, en particular el cálculo diferencial.

Esta dificultad no es ajena en la Universidad Industrial de Santander, en donde los cursos de matemáticas y en particular el curso de Cálculo diferencial presenta un enfoque formal y riguroso, basado estructuralmente y bajo el orden de definición, ejemplos, teorema, demostración, algunas notas y ejercicios.

Para abordar la problemática de la repetición y pérdida de los cursos de cálculo diferencial, y teniendo en cuenta que la comprensión preliminar intuitiva del cálculo facilita el paso al rigor matemático, desde el año 2012, el grupo de investigación Edumat UIS ha planteado un curso-laboratorio de precálculo, desarrollado alrededor de los núcleos conceptuales de la variación, el cambio, la aproximación y la tendencia; cuyo objetivo principal es promover el desarrollo del pensamiento variacional, y cuya metodología está basada en la resolución de problemas y la mediación de un software; esta propuesta sugiere el aprendizaje de dichos núcleos conceptuales, a través de un acercamiento intuitivo, que propicie la realización de demostraciones cada vez más cercanas al rigor sin someter a los estudiantes al formalismo. Igualmente se propone desarrollar las habilidades de los procesos matemáticos, en particular el de demostración.

Es por esto por lo que en este trabajo de investigación se propone analizar los tipos de demostración que realizan los estudiantes en este curso, con el objetivo de contribuir a comprender mejor el proceso de demostración de los estudiantes que ingresan por primera vez a la universidad.

2. Objetivo de la investigación

Identificar los tipos de demostraciones que realizan los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad en la resolución de problemas de variación, aproximación y tendencia dentro de un curso de precálculo mediado por el software de matemática interactiva GeoGebra.

3. Revisión de la literatura

En esta sección se muestra una revisión bibliográfica de trabajos de investigación relacionados con: Concepciones de la demostración y tipos de demostración; Enseñanza del cálculo, Referentes curriculares; y contenidos del curso de cálculo diferencial de la Universidad Industrial de Santander.

3.1.Concepciones de la demostración y tipos de demostración

Balacheff (1988) presenta un estudio acerca de las concepciones de demostración de los estudiantes, desde el punto de vista de las prácticas matemáticas y plantea que los estudiantes realizan los siguientes tipos de demostración: empirismo ingenuo, experimento crucial, ejemplo genérico y experimento mental, donde las tres primeras corresponden a demostraciones empíricas y la última a demostraciones deductivas informales. En este estudio se logran ver los procesos de demostración usados por los estudiantes al resolver un problema, a través de la discusión verbal. “La diferencia entre las demostraciones empíricas es la forma como los estudiantes seleccionan los ejemplos. En el empirismo ingenuo, el estudiante busca, muchas veces de manera aleatoria, uno o varios ejemplos, que son percibidos como casos aislados. En el experimento crucial, la demostración se basa en la concepción de que todos los ejemplos se comportarán de la misma manera, por lo que el estudiante elige ejemplos de manera cuidadosa para que sean “especiales” y verifica en ellos la conjetura cuya veracidad quiere demostrar. En el ejemplo genérico, el estudiante hace una búsqueda cuidadosa de ejemplos, que son representantes de sus clases y portadores de propiedades abstractas. La principal característica del experimento mental es que los ejemplos ya no forman parte de la demostración, sino que son un complemento que ayuda al estudiante a encontrar propiedades y relaciones deductivas para construir la demostración" (Fiallo, Camargo, Gutiérrez, 2013)

Hanna y Jahnke (1993) sugirieren dejar en un papel secundario al rigor, argumentando que la comprensión y la aceptación de un teorema son primordiales por parte de un alumno, ya que los estudiantes comprenden mejor las demostraciones cuando se hace hincapié en la comunicación del significado más que en la formalidad que sugiere un teorema. En este sentido, De Villiers (1993) propone la verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación como funciones de la demostración. Planteando además que la convicción de un hecho no se consigue exclusivamente con una demostración, ni la única función de la demostración es la de verificación/convicción; ya que esta función carece de sentido para los estudiantes en los casos evidentes o fácilmente verificables, mientras que la función de explicación es más significativa, es decir, en un contexto educativo debe ponerse más atención a las funciones de descubrimiento y comunicación, dejando la sistematización a los niveles más avanzados.

Posteriormente Harel y Sowder (1998), plantean un conjunto de categorías de demostraciones empíricas y deductivas, haciendo una revisión de una variedad de factores que influyen en el aprendizaje de la demostración, organizados desde los puntos de vista matemático e histórico-epistemológico, cognitivo, educativo, y socio-cultural. En este estudio, proponen la noción de "esquema de demostración" como una herramienta para analizar las formas de convicción o persuasión, y clasifican las demostraciones de los estudiantes en esquemas. Dichos esquemas son mutuamente exclusivos, pues un argumento de demostración no puede ser de dos tipos a la vez, pero es frecuente que los estudiantes utilicen más de una clase de esquema en diferentes partes de una demostración (Fiallo, Camargo y Gutiérrez, 2013)

Basados en las categorías propuestas por Balacheff (1988) y Harel y Sowder (1998), Marrades y Gutiérrez (2000) plantean los siguientes tipos de demostración: Fallida, empirismo ingenuo perceptivo, empirismo ingenuo inductivo, experimento crucial basado en el ejemplo, experimento crucial constructivo, experimento crucial analítico, experimento crucial intelectual, ejemplo genérico basado en el ejemplo, ejemplo genérico constructivo, ejemplo genérico analítico, ejemplo genérico intelectual; todos estos de tipo empírico y las que siguen de tipo deductivo, que son fallida, experimento mental transformativo, experimento mental estructurante, deductiva formal transformativa y deductiva formal estructurante; sin embargo, Fiallo (2011, 2017) utiliza esta estructura en su investigación y sugiere eliminar las demostraciones tipo experimento crucial analítico e intelectual dado que estos dos tipos de demostración requieren de la habilidad de generalización; además de eliminar el ejemplo genérico basado en ejemplo y constructivo, dado que estos dos tipos de demostración no requieren de la habilidad de generalización.

Antonini (2008) a través de entrevistas a estudiantes graduados avanzados, plantea un esquema de categorización inicial de las estrategias utilizadas para producir ejemplos, que incluyen el ensayo y error, la transformación, y el análisis. En este estudio encontró que el hecho de generar ejemplos no mejora la capacidad para escribir demostraciones, y la generación de ejemplos por sí solo puede no ser suficiente para apoyar las actividades productivas para hacer demostraciones; más bien, los estudiantes pueden aprovechar de manera efectiva los ejemplos que conducen a la apropiación de la argumentación deductiva.

Según Stylianides (2009), la noción de demostración en las matemáticas escolares se utiliza para examinar si una justificación puede ser aceptada como una demostración legítima en el aula donde se da la justificación. Los estudiantes tienden a ser demasiado dependientes de ejemplos y, a menudo infieren que un enunciado matemático es cierto sobre la base de la verificación de una serie de ejemplos que satisfacen la declaración (Healy y Hoyles 2000; Knuth et al., 2009; Porteous 1990). Komatsu (2016) reafirma que los procesos de los estudiantes para demostrar y refutar se construyen utilizando un conjunto de reglas heurísticas, donde una característica destacada parte de la idea de aumentar los métodos empíricos, para avanzar hacia lo deductivo.

3.2.Algunas investigaciones acerca de la enseñanza del cálculo

Artigue (1998) argumenta que los métodos de enseñanza tradicionales a nivel universitario tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, y a menudo se intenta inculcar desde el inicio, los métodos tradicionales y rigurosos de la demostración. Lo que conlleva a que los estudiantes aprendan “el producto del pensamiento matemático” en vez del proceso (Skemp, 1980).

Moreno (2014) analiza las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo, a la conceptualización de la noción de límite y a la ruptura del pensamiento característico del funcionamiento algebraico, mostrando que la enseñanza del cálculo padece de diversas patologías, que persisten y además son bastante complejas en el entorno educativo, entre ellas están lo que él denomina “Una grave indigestión crónica” ocasionada por el exceso de rigor que genera una confusión entre el análisis y el cálculo; “un desorden inmunológico” que genera una alergia a los infinitesimales; y “una atrofia muscular atípica” que culmina en el aborrecimiento del estudio del cálculo debido a la manipulación de los textos de cálculo y que amenazan la enseñanza del mismo. Por lo que Moreno (2014) considera que “las dificultades de los estudiantes no provienen del cálculo, sino de un curriculum artificial que es responsable de gran parte de los obstáculos".

Fiallo y Parada (2018) afirman que algunas de las dificultades ya mencionadas en el aprendizaje del cálculo, es que los estudiantes no cuentan con pre-saberes lo suficientemente sólidos que les permita comprender los conceptos fundamentales del cálculo diferencial, además el curso está organizado por un conjunto de subtemas conectados de tal manera que el déficit en el manejo de alguno de ellos no permite la comprensión real de los fenómenos de variación y acumulación. Estos autores plantean una propuesta pata el estudio de cambio y la variación, fundamentado en elementos teóricos y metodológicos concernientes al desarrollo del pensamiento variacional y una organización curricular alrededor de núcleos conceptuales, procesos y el uso de las tecnologías. Se pretende aportar al desarrollo de procesos matemáticos de los estudiantes, particularmente a resolver problemas, comunicar, representar, proponer, comparar y ejercitar procedimientos, y razonar y demostrar. En esta propuesta se asume el proceso de formulación, tratamiento y resolución de problemas, como el proceso central, para el cual los procesos de representación, comunicación, razonamiento, y proposición, comparación y ejercitación de procedimientos, sirven como puente y apoyo para la resolución de problemas que involucran el cambio, la aproximación y la tendencia.

3.3.Aspectos curriculares sobre la argumentación y la demostración

Según el NCTM (2003), una demostración matemática es una manera formal de expresar tipos particulares de razonamiento y de justificación. Los estudiantes deberían ver que las matemáticas tengan sentido y al finalizar la escuela secundaria, deberían estar capacitados para comprender y elaborar demostraciones matemáticas (argumentos deductivos y conclusiones lógicamente rigurosas a partir de la hipótesis).

En los Lineamientos Curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional Colombiano (MEN, 1998), se comenta que desde los inicios de la republica hasta la década de los 70, la formación matemática se relacionó con el desarrollo de capacidades de razonamiento lógico, por la abstracción, el rigor y la precisión. Las matemáticas se concebían como un cuerpo estable e infalible de verdades absolutas, lo que solo quería estudiar, ejercitar y recordar un listado de contenidos matemáticos (hechos, propiedades, axiomas, definiciones, teoremas, …), sin embargo, a medida que se ha ido reflexionando acerca de la filosofía de las matemáticas y de la educación matemática, estos argumentos comenzaron a ser cuestionados, dando paso a lo que hoy en día conocemos como “las matemáticas por competencias”, donde se articulan un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. Esta noción describe la competencia como el saber hacer en un contexto y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase.

Es por ello, que estos lineamientos plantean que un estudiante matemáticamente competente es quien formula, plantea, transforma y resuelve problemas de la vida cotidiana; logrando analizar la situación, sustraer lo relevante en ella, y establecer relaciones, formando modelos mentales e integrando el razonamiento, cuando se exige formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados; y además, usa la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios para validar conjeturas y avanzar hacia la demostración.

Desde el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, los lineamientos curriculares (MEN, 2006), se refieren al proceso de argumentación y razonamiento, como a las actividades basadas en el proceso de generalización que involucran la visualización, exploración y manipulación de figuras y números, analizar, reconocer, identificar y caracterizar la variación y el cambio en diferentes contextos, así como describirla, modelarla y representarla en distintos sistemas.

Desde los cursos de la escuela primaria, dentro del desarrollo de este pensamiento se propone el análisis de los fenómenos de variación representados en gráficas y tablas (intentando precisar la magnitud de los cambios), ya en los cursos de la escuela secundaria, el sistema algebraico está más ligado con la variación, expresado por diferentes tipos de representaciones (gestuales, lenguaje técnico u ordinario, numéricas, graficas e icónicas). Cabe resaltar que, las situaciones que fomentan el desarrollo del pensamiento variacional dan múltiples oportunidades para la formulación de conjeturas, la puesta a prueba, su generalización y argumentación para sustentar o refutar una conjetura.

4. Marco teórico

Moore (1994) manifiesta que la dificultad en la demostración radica en que estas experiencias en secundaria solo son de tipo geométrico, por lo que tienen una perspectiva limitada. Por ello, los estudiantes deberían ser expuestos al razonamiento matemático, tomándolo como un hábito mental, que solo se desarrolla mediante el uso coherente en muchos contextos. Ellos deberían aprender lo que es aceptado como un argumento apropiado en clase de matemáticas, dándose cuenta de que el razonamiento matemático se basa en supuestos y reglas específicas. Se debería tener claro que hacer matemáticas implica descubrir. Los alumnos de todos los niveles deberían aprender a investigar sus conjeturas por medio de materiales concretos, calculadoras y otras herramientas, y de forma creciente, según avanzan en su escolaridad, mediante representaciones y símbolos, con el fin de aprender a formular, perfeccionar y comprobar conjeturas desde la escuela elemental.

Según los Principios y Estándares de la Educación Matemática (NCTM, 2003), por su traducción en español, en los primeros niveles el razonamiento es informal comparado con la deducción lógica de los matemáticos. Las primeras tentativas de justificación implican estrategias de ensayo y error o el tratamiento no sistemático de muchos casos, sin embargo, con los niños es posible demostrar por contradicción y pueden aprender a refutar conjeturas por medio de contraejemplos. Ya en la escuela secundaria, debería esperarse que los alumnos construyan cadenas de razonamientos relativamente complejos y proporcionen argumentos matemáticos, comparen sus ideas con las de los demás, de tal forma que esto pueda ser útil para modificar, consolidar o ampliar sus argumentos o su razonamiento. En los niveles superiores, el razonamiento y la demostración deberían constituir una parte natural y continua de las discusiones en clase, ya que esto capacita a los alumnos para abstraer y codificar sus observaciones. El hábito de preguntar por qué es esencial para que los estudiantes desarrollen un razonamiento matemático sólido, los alumnos deberían comprender que el hecho de disponer de muchos ejemplos que cumplan con la conjetura no la demuestra, mientras que un contraejemplo sí prueba que la conjetura es falsa. En los niveles de 9-12, los alumnos deberían ver la potencia de las demostraciones deductivas para establecer resultados. Además, deberían ser capaces de producir argumentos lógicos y presentar demostraciones formales que expliquen eficazmente su razonamiento, también deberían tener experiencias con pruebas indirectas, y entender que ciertos resultados se demuestran mediante inducción matemática. Es decir, en secundaria, sus criterios para aceptar las explicaciones de otros deberían llegar a ser más rigurosos y desarrollar un repertorio de razonamiento y demostración cada vez más complejo. Los profesores deberían crear un ambiente propicio para discutir, preguntar y escuchar, de tal forma que los estudiantes puedan buscar, formular y criticar las explicaciones y discutir conjeturas, junto con la estructura lógica de los argumentos; convirtiéndose en comunidades de investigación.

Desde la didáctica de las matemáticas se ha planteado que el papel de una demostración no es solamente mostrar la validez de un teorema sino también mostrar las razones de esta validez (De Villiers, 1993). Una demostración debería permitir comprender el teorema, no solamente decir qué es verdadero si no también justificarlo. En síntesis, una demostración debería aumentar el grado de coherencia de los conocimientos de los estudiantes. A veces los estudiantes tienen que hacer pruebas o comprobaciones empíricas después de una demostración porque la demostración no los convence pues no ha logrado una comprensión que previamente no existía (Healy & Hoyles, 2000). Los estudiantes prefieren las argumentaciones donde las relaciones matemáticas y los razonamientos se describen en el lenguaje común (argumentaciones narrativas) que utilizan diagramas y ejemplos, porque son más próximas a su manera de expresar una justificación (Fiallo, 2011).

Este trabajo asume la siguiente caracterización de demostración propuesta por Fiallo (2011), donde se resalta la demostración como un proceso, en el cual la hipótesis de la argumentación previa a la demostración puede ser útil o no en la construcción de la demostración. Para lograr que los estudiantes se comprometan con la construcción de una demostración es importante que desarrolle la habilidad de conjeturar.

4.1.Demostración

Este estudio está basado en la caracterización de Fiallo (2011, p.85), quien asume ampliamente la demostración como "el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática". Esta postura obedece a que las actividades propuestas por Fiallo y Parada (2018) cuentan con una metodología que le permite al estudiante argumentar la solución a los problemas según sus nociones e ideas.

Cabe resaltar, que las características de la demostración no son diferentes de las de la argumentación, por el contrario, ella es un caso particular de argumentación con unas características específicas. Las siguientes son las características de la demostración (Fiallo 2011, pp. 82-86).

4.1.1. Características funcionales

La demostración tiene como objetivo validar un enunciado: Es una justificación racional que busca certificar la verdad dentro de una teoría matemática de una determinada manera. Tanto la demostración, como la argumentación, tienen como objetivo la búsqueda de las razones de la "verdad", sin embargo, la demostración, tiene el objetivo de validar una tesis determinada a través de un sistema axiomático que la aparta de cualquier ambigüedad.

La demostración es convincente y se dirige a un auditorio universal: Va dirigida a un interlocutor universal, que está representado por la comunidad matemática que reconoce el valor de validación y convierte en irrefutable lo que se afirma.

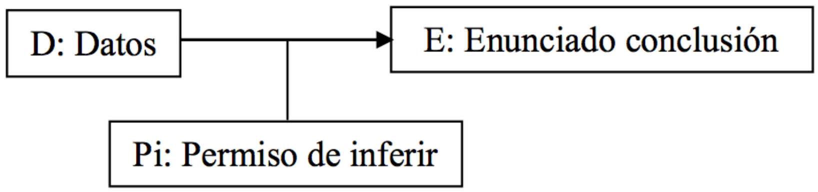
La demostración es relativa a un campo: Las demostraciones matemáticas se realizan con argumentos analíticos relativos al campo determinado por el sistema axiomático con el que se trabaja.

4.1.2. Características estructurales

La demostración es una cadena deductiva de pasos, que están conformados por un modelo estructural para la argumentación en matemáticas, el modelo de Toulmin.

Un argumento en el modelo de Toulmin está compuesto por un esquema ternario formado por (Pedemonte, 2005, p. 321 -322): un enunciado conclusión (que se pretende justificar), unos datos (sirven para justificar el enunciado), y un permiso de inferir (es un teorema que permite el paso de los datos a la conclusión). Por medio de una demostración, puede construirse un nuevo enunciado a partir de los axiomas y los primeros principios (Fiallo, 2011).

Figura 1. Esquema de Toulmin

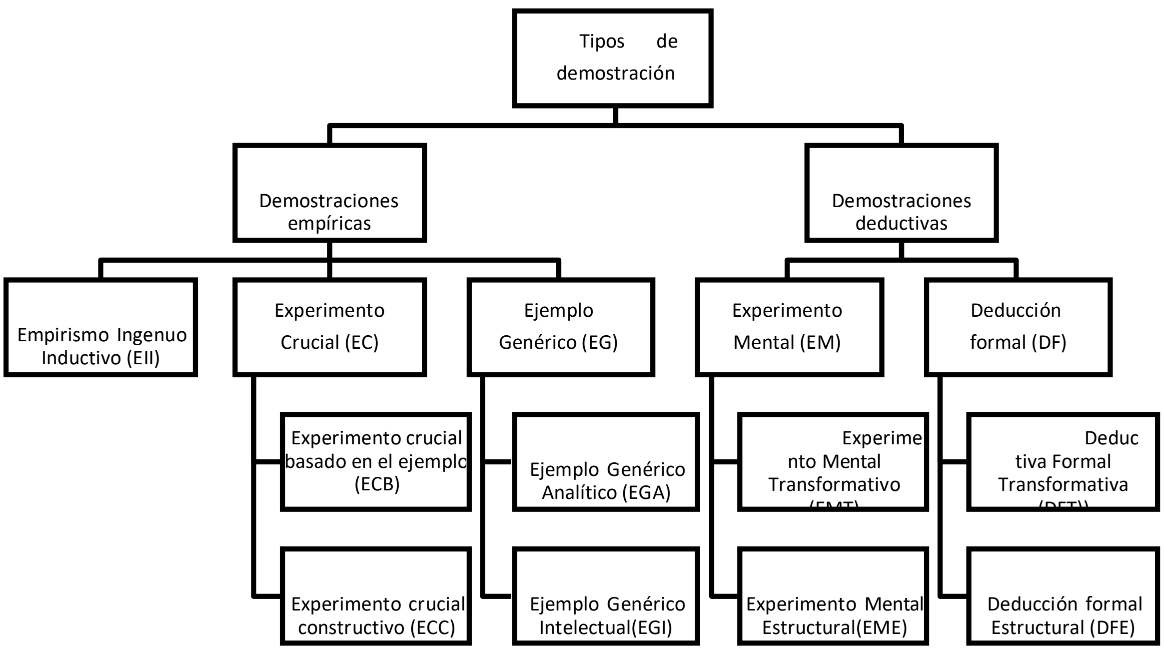


Fuente: Fiallo, 2011, p.77

4.1.3. Clasificación de los tipos de demostración

En el ámbito escolar se construyen demostraciones empíricas y deductivas de diferentes tipos (Fiallo, 2011) que describiremos y definiremos brevemente a continuación:

Figura 2. Tipos de demostración



Fuente: elaboración propia

Estos tipos de demostración surgen de la propuesta de modificación que hace Fiallo (2011) a los tipos propuestos por Marrades y Gutiérrez (2000). Los esquemas de Toulmin son propuestos por Fiallo (2011) al considerar la demostración como un caso particular de argumentación.

Demostraciones empíricas o inductivas

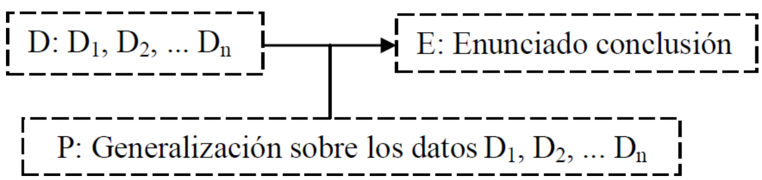
Se caracterizan por el uso de ejemplos como el principal elemento de convicción. Los estudiantes aceptan la veracidad de las conjeturas después de que han observado regularidades en uno o más ejemplos; ellos usan los propios ejemplos, o relaciones observadas en ellos para justificar la verdad de su conjetura.

Empirismo ingenuo inductivo (EII):

Se presenta cuando en la construcción de la demostración se usa solamente ejemplos escogidos sin ningún criterio y las argumentaciones se basan en elementos visuales o táctiles (perceptivo) o elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo (inductivo). Se trata de una generalización inductiva sobre los enunciados (datos).

Usando el modelo de Toulmin, el esquema siguiente representa las demostraciones del tipo empirismo ingenuo:

Figura 3. Esquema de un empirismo ingenuo inductivo



Fuente: Fiallo, 2011, p. 91

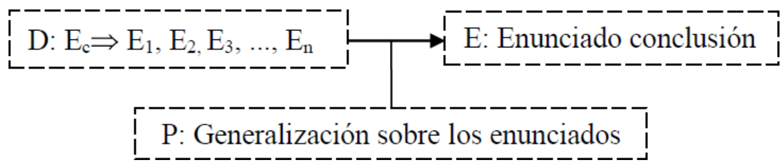
Experimento crucial (EC):

Cuando la conjetura es demostrada usando un ejemplo cuidadosamente seleccionado y se escoge porque se presume que en cualquier otro caso va a dar el mismo resultado. Se plantean dos tipos de demostración:

Experimento crucial basado en ejemplo (ECB):

Se presenta cuando los estudiantes basan su generalización en la existencia de un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos para su demostración. En este caso se trata de una generalización inductiva sobre los enunciados.

Figura 4. Esquema de un experimento crucial basado en el ejemplo



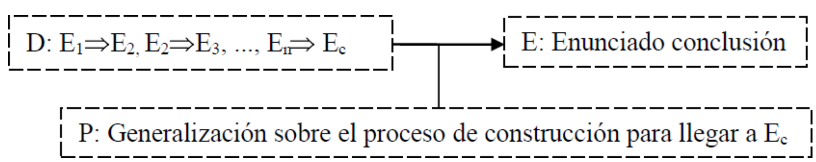
Fuente: Fiallo, 2011, p. 92

Experimento crucial constructivo (ECC):

Se presenta cuando los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo. Se trata de una generaliza

ción inductiva sobre el proceso que lleva a la construcción de un enunciado.

Figura 5. Esquema de un experimento crucial constructivo



Fuente: Fiallo, 2011, p. 92

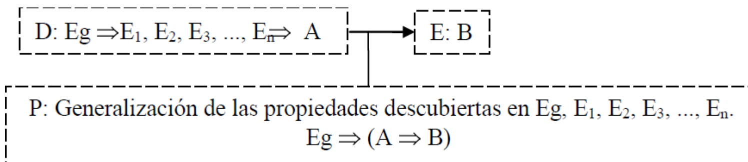
Ejemplo genérico (EG):

Se presenta cuando en la demostración se usa un ejemplo específico que es representante de una clase y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos. Se plantean dos tipos de demostración:

Ejemplo genérico analítico (EGA):

Se presenta cuando en la demostración se usa un ejemplo representante de una clase y las justificaciones están basadas en propiedades y relaciones generales descubiertas en el ejemplo. Se trata de una generalización de las propiedades observadas en cada uno de los enunciados que conllevan al planteamiento de A.

Figura 6. Esquema de un ejemplo genérico analítico

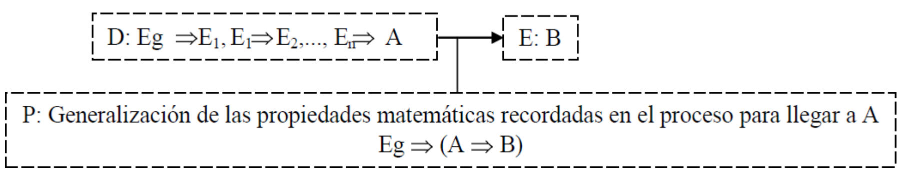


Fuente: Fiallo, 2011, p. 93

Ejemplo genérico intelectual (EGI):

Se presenta cuando para conjetura o demostración se usa un ejemplo representante de una clase y los argumentos están basados en propiedades matemáticas aceptadas, pero no son resultado de observaciones o propiedades encontradas en el ejemplo, sino que al trabajar sobre él se recuerdan. Se trata de una generalización inductiva con argumentos matemáticos sobre el proceso para llegar a A.

Figura 7. Esquema de un ejemplo genérico intelectual



Fuente: Fiallo, 2011, p. 94

Demostraciones deductivas.

La deducción se ocupa de los argumentos que apoyan la necesidad de una conclusión sobre una o varias premisas: de tal forma que, si las premisas son verdaderas, la conclusión también debe serlo. Sin embargo, cabe resaltar que la deducción puede parecer artificial y complicada, ya que esta no se desarrolla de forma espontánea, es decir, simplemente es una clase de “mecanismo” que el estudiante aprende a fin de construir las demostraciones.

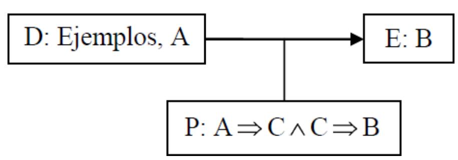
Experimento mental (EM):

Cuando se usa un ejemplo para ayudar a organizar la demostración. Se pueden distinguir dos tipos de experimento mental:

Experimento mental transformativo (EMT):

Cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente. Los ejemplos ayudan a prever qué transformaciones (imágenes mentales espaciales, manipulaciones simbólicas o construcciones de objetos) son convenientes para la justificación.

Figura 8. Esquema de un experimento mental

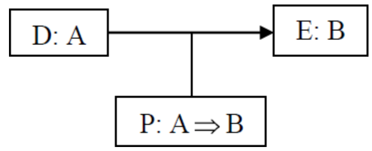


Fuente: Fiallo, 2011, p. 88

Experimento mental estructural (EME):

Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados, y, si se usan ejemplos, son para ayudar a organizar o entender los pasos de las deducciones.

Figura 9. Esquema de un experimento mental estructural



Fuente: Fiallo, 2011, p. 89

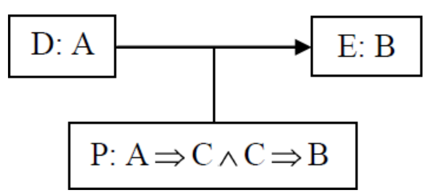
Deducción formal (DF):

Se presenta cuando la demostración está basada en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos. En una deducción formal solamente se mencionan aspectos genéricos del problema discutido. Es, por lo tanto, la clase de demostración formal matemática encontrada en el mundo de los investigadores de las matemáticas. Podemos también encontrar dos tipos de demostraciones formales:

Deductiva formal transformativa (DFT):

Cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente.

Figura 10. Esquema de una demostración deductiva formal transformativa

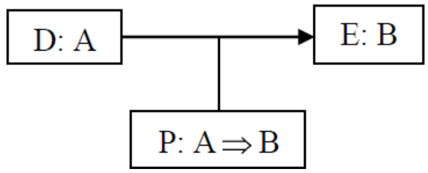


Fuente: Fiallo, 2011, p. 89

Deductiva formal estructural (DFE):

Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados.

Figura 11.Esquema de una demostración deductiva formal estructural



Fuente: Fiallo, 2011, p. 89

5. Metodología

Para cumplir el objetivo de la investigación se usó una metodología cualitativa con un carácter de investigación en el aula, que nos permitió indagar sobre los tipos de demostración que realizan los estudiantes en un curso laboratorio de precálculo dirigido por el grupo de investigación Edumat-UIS, realizando una valoración continua del desempeño evolutivo tanto de los núcleos conceptuales de la variación, el cambio, la aproximación y tendencia, como de los procesos demostrativos de los estudiantes dentro del desarrollo de la noción de derivada.

Los participantes de este trabajo fueron investigador-observador activo, docente y 28 alumnos, donde el papel del investigador y del profesor proporciona una oportunidad para que se desarrolle conocimiento a través de múltiples iteraciones de un ciclo de reflexión- interacción. Esta ruptura de la diferenciación entre docente e investigador está motivada por el propósito de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos (Camargo, 2010).

Dentro del ciclo de reflexión-interacción, tanto el profesor, como el investigador interactuaban con los estudiantes, compartiendo su conocimiento personal y aquel requerido para la investigación, posibilitando entender los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Este estudio tuvo en cuenta cinco fases que motivaron el desarrollo de la investigación y se describen a continuación:

5.1.Fase I: Contexto de estudio.

Para alcanzar el objetivo de esta investigación se hizo seguimiento a un grupo de 28 estudiantes de nuevo ingreso a las carreras de ingeniería y ciencias de la Universidad Industrial de

Santander, cuyo rango de edades oscila entre los 17 y los 21 años y fueron admitidos para cursar el segundo semestre académico de 2018, y de forma voluntaria se inscriben al curso de precálculo. Estos estudiantes son organizados en grupos ascendentes de acuerdo al puntaje de matemáticas de las pruebas Icfes, cabe resaltar que este curso es subsidiado en su totalidad por la Vicerrectoría Académica de la Universidad Industrial de Santander.

5.1.1. Curso de Precálculo

El curso laboratorio de Precálculo cuenta con una secuencia didáctica que está compuesta por 14 talleres, se realiza en 60 horas, 4 horas diarias durante 15 días, y cuyo objetivo es desarrollar gradualmente las habilidades del pensamiento variacional por medio de interacciones tanto estáticas como dinámicas de los objetos matemáticos.

5.1.2. Talleres del curso

Estos talleres están diseñados con un enfoque de resolución de problemas y una estructura intencional donde se parte de la noción para llegar al concepto, es por ello, que cada taller obedece a las siguientes fases:

i. Información y exploración libre. Donde se plantea una situación problema para que se haga uso de los presaberes en la resolución sin ayuda del software Geogebra.

ii. Socialización de los resultados obtenidos. Esta fase promueve la participación de los estudiantes y se espera que los estudiantes expongan sus argumentos.

iii. Exploración dirigida. Se hace uso de un archivo de Geogebra, donde se espera que por medio de la exploración los estudiantes encuentren la solución a los problemas, planteen conjeturas y justifiquen de una forma matemática sus argumentos.

iv. Explicación. Esta actividad sugiere una discusión de los estudiantes con el profesor, donde a manera de debate se llegue a la construcción del conocimiento.

v. Tarea retadora. es una situación problema para aplicar lo que se aprendió durante la sesión del curso

5.1.3. Rol del profesor

Además, como el objetivo del curso es desarrollar el pensamiento variacional, el profesor asume un papel orientador donde proporciona información necesaria sobre el problema, propicia la actividad participativa e interactiva en la clase, cede su papel protagonista en la clase y acepta respuestas correctas e incorrectas, para buscar un consenso y el diálogo en los estudiantes y permita a través de ello la consolidación de un conocimiento.

5.2.Fase II: Recolección de datos

5.2.1. Prueba diagnóstica

Se tomó el primer taller del curso laboratorio de precálculo como prueba diagnóstica inicial con el fin de determinar los tipos de demostración que realizan los estudiantes según el marco teórico, tomando esta como un punto de partida para contrastar al finalizar la investigación la evolución en el proceso de demostración de los estudiantes.

5.2.2. Grabaciones de video dentro de las sesiones del curso laboratorio de Precálculo

Se usaron las transcripciones de dos momentos claves que son la socialización y algunas entrevistas que se hicieron de forma particular donde se indagó acerca de la justificación de los procesos en la resolución de los talleres propuestos, esto con el fin de identificar en los estudiantes algunos procesos básicos de la argumentación y la demostración.

Cabe resaltar que la mayor parte de esta investigación se desarrolla de acuerdo a estas transcripciones, ya que era el momento donde los estudiantes expresaban sus ideas y lograban argumentar el porqué de los procesos.

5.2.3. Hojas de trabajo de los estudiantes

Estas eran las hojas de trabajo usadas por los estudiantes durante el desarrollo de taller, estas se recogían al finalizar cada sesión, sin embargo, dado que la escritura de los estudiantes fue bastante pobre, se dificultó evidenciar los tipos de demostración que lograron realizar durante el proceso teniendo en cuenta este instrumento.

5.3.Fase III: Análisis de datos

El análisis de los datos se realiza a la luz del marco teórico, donde se describen las características que nos llevan a concluir el tipo de demostración que realizan los estudiantes en su actividad matemática.

Los talleres de la secuencia didáctica que se tuvieron en cuenta para el desarrollo de esta investigación son i.) Números y operaciones (Taller diagnóstico), ii.) Recipientes, iii.) Área máxima, iv.) Caja sin tapa. Esto con el fin de determinar los tipos de demostraciones que realizaban los estudiantes al inicio del curso, y además si había habido un progreso al finalizar el curso.

5.4.Fase IV: Reporte de resultados

Como parte final del proceso descrito se hizo un reporte de los resultados obtenidos dentro de la experiencia, intentando contribuir a las líneas de investigación que trabajan sobre la enseñanza y el aprendizaje del proceso de demostración en matemáticas.

6. Reporte de resultados

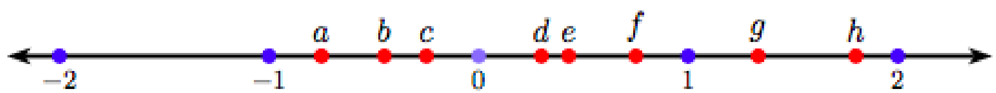
En este capítulo mostramos los tipos de demostración realizados por los estudiantes de un curso laboratorio de precálculo a la luz del marco teórico. Teniendo en cuenta, que más que el rigor es la construcción del sentido lo que debe privilegiarse (Fiallo y Parada, 2018). Analizamos la actividad argumentativa de los estudiantes en los problemas propuestos en 5 de los 14 talleres del curso: 1) Números y Operaciones, 2) Recipientes, 3) Área máxima y 4) Caja sin tapa

A continuación, se muestran los resultados del taller 1:

6.1.Taller 1. Números y operaciones (Diagnóstico)

Actividad 1

Observa los puntos a, b, c, d, e, f, g y h de la siguiente figura



Responde las siguientes preguntas

¿Cuál es el punto más próximo a $a.b$? ¿Cuál punto es más cercano a: $a.d$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{e}$, $\frac{1}{f}$ y $\sqrt{h}$? Explica tu respuesta.

Socialización 1. ¿Cuál es el punto más cercano a $a.d$?

[1] Profesora: ¿Qué valor le dieron a a? ¿Otra vez -0.8?

[2] Varios: Sí

[3] …

[4] Profesora: Bueno, entonces vamos a pensar en esto, tenemos que b es positivo, ¿entre que valores esta? Entre 0 y 1, ¿sí? y tenemos a a, que esta entre 0 y -1, cuando yo

multiplico $d.a$, ¿de qué manera está cambiando a? ¿se está volviendo más grande? pensemos en la distancia

[5] Danilo: Da un valor negativo, pero da un valor más cercano a cero

[6] Profesora: ¿Por qué?

[7] Danilo: Porque un número negativo multiplicado por un número positivo, pues va a dar negativo; y como el valor positivo está al lado derecho es más grande que el valor negativo, que esta a mucho más allá del cero, o sea, está muy pequeño el número, entonces el valor va a dar negativo, pero más grande, y para más grande negativo es el cero, está más cerca del cero

[8] …

[9] Profesora: ¿Cómo es $a.d$ comparado con a y comparado con d?

[10] Jacob: Es más pequeño

[11] Profesora: Es más pequeño, ¿cierto?, es más pequeño que los dos en distancia, ¿está a la izquierda o a la derecha de a?

[12] Varios: A la derecha

[13] Profesora: A la derecha de a, pero resulta que también es más pequeño que la distancia hacia d ¿cierto? ¿Entonces cuál podría ser?

[14] Varios: c

[15] Profesora: Bueno, alguien podría hacer una conclusión

[16] Carlos: Es mejor trabajar con números exactos

[17] Profesora: Pero acá no tenemos números exactos, acá lo único que sabemos es que son números entre 0 y 1, o entre 0 y -1, en esta primera parte. ¿Alguien se atreve a dar una conclusión?

[18] Nicolás: El resultado de una multiplicación entre un punto negativo y uno positivo siempre va a tender, o bueno va a tender a ser cercano, o sea, quitando los signos, cercano al número positivo. Por ejemplo, cuando usted multiplica a qué hipotéticamente es -0.8 por b que para mí es 0.4 daría c que sería -0.32 más o menos ¿me hice entender?

[19] Profesora: Si, ¿pero entonces ahí está más cercano a quién? ¿Al positivo?

[20] Nicolás: Al positivo, pero quitando el -1, si me entiende, quitando el signo

[21] Profesora: Quitando los signos pues tanto a como d serían positivos, ¿entonces?

[22] Daniel: En la multiplicación de números decimales el resultado siempre va a dar negativo ambas partes, siempre va a dar menor a ambas partes

En [1] la profesora ha inspeccionado el grupo y ha observado que todos les han puesto valores a los puntos a, b, c, d, e, f, g y h, es decir, los estudiantes han estado conjeturando y demostrando a través de la percepción, por lo tanto, esto nos muestra que las demostraciones realizadas son de tipo *Empírico Ingenuo Inductivo (EII).*

En [5] y [7] Danilo recuerda algunas propiedades de la multiplicación y orden de los números reales, además, en [16] Carlos muestra su inseguridad al trabajar con números decimales, pero en [18] y [20] Nicolás nos muestra su proceso inductivo sobre el enunciado, lo que una vez reafirma que su razonamiento es netamente *Empírico Ingenuo Inductivo (EII)*, además porque dentro de sus razonamientos él habla de los números decimales, pero omite la diferencia del comportamiento dentro del intervalo [0,1], y finalmente Daniel complementa la conjetura de Nicolás.

Socialización 2. ¿Cuál es el punto más cercano a $\frac{a}{b}$?

[1] Profesora: Luisa ¿cuál es el punto más cercano a $\frac{a}{b}$?

[2] Luisa: Según yo h, pero porque ubiqué. Los ubiqué a todos en la misma recta y le di valores a cada punto, obviamente a mí no me cae en un punto exacto, Me cae cerca de h pero pasa a g, entonces, yo puse h.

[3] Profesora: Cerca de h, pero pasa… Entonces ¿Por qué? ¿O sea, porque le dio valores?

[4] Luisa: Sí, solamente le di valores, hice la operación y vi eso, entonces el más cercano es h

[5] Profesora: ¿Alguien tomó otra estrategia? ¿cuál fue su estrategia Nicolás?

[6] Nicolás: Le di valores y resolví la operación.

[7] Profesora: ¿Cómo podríamos hacerlo sin darle valores? ¿Cómo podríamos descartar? ¿cuáles descartaron? estamos hablando de $\frac{a}{b}$

[8] Sebastián: Yo tengo algo más o menos. Si por el punto medio b sería 0.5

[9] Profesora: Por el punto medio

[10] Sebastián: Sí, si tomamos la distancia entre -1 a 0, b sería -0.5

[11] Profesora: Sí tomándolo como si estuviera en la mitad, aja

[12] Sebastián: Aja, entonces a sería un valor menor a b, que sería -0.5, o sea, sería de -0.6 en adelante. Continúe con otra persona y luego ya vuelvo a explicarle.

Estos razonamientos nos muestran que los estudiantes que participaron de la socialización 2, han recordado algunas propiedades de los reales y es por ello que descartan a los números negativos, tienen en cuenta que la multiplicación de dos números negativos es positiva, sin embargo, vemos como Sebastián a través de la visualización [8] empieza a recordar algunas propiedades de orden de los números reales [12] y esto es lo que posibilita el establecimiento de las conjeturas. es decir, aluden al *Experimento Crucial Basado en Ejemplo (ECBE).*

Como se puede observar en [4] y [6] tanto Luisa como Nicolás usan valores para determinar cuál es el punto más cercano a $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$, es decir, toman en cuenta la relación de orden de los números reales [2] y de acuerdo a estas propiedades buscan por medio de los ejemplos validar su proposición, es decir, aluden al *Empirismo Ingenuo Inductivo (EII)*.

[13] Profesora: Listo, a ver, vamos a pensar en lo mismo, ¿cómo es $\frac{a}{b}$ comparado con a y comparado con b?

[14] Karst: Es mayor

[15] Profesora: ¿Por qué?

[16] Karst: Porque son negativos entonces la división va a ser positiva, pues yo le puse valores y al hacer la división me dio 1.33, y sería consecutivo, entonces me acerqué y me puse a mirar y le agregue un valor, digamos, supuse que g era 1.4 entonces por eso dije que el punto g es el más cercano

[17] Profesora: ¿g es el más cercano?

[18] Karst: Si, o sea daría un número positivo mayor que 1

En esta parte de la socialización Karst establece una conjetura [14], aunque no la expresa de forma explícita si plantea que $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ es mayor cuando se compara con a y con b, además manifiesta que esto se da debido a que el cociente entre dos números negativos es positivo [16], y luego le establece algunos valores a a y b y realiza las operaciones necesarias para encontrar su respuesta, ahí nos damos cuenta que recuerda algunas propiedades de los números reales [16], gracias a haberle asignado valores a a y b, lo que nos muestra una argumentación de tipo *Empírico Ingenuo Inductivo (EII)*

[19] Miguel Ángel: Pues nosotros lo que hicimos fue tomar los valores que ya teníamos, y lo que hicimos fue dividirlo, según esto a mí me dio 1.6 y entonces que es lo que

pasa, digamos que si fuera 1.5 entonces si fuera la mitad está cerca de g y está cerca de h, pero como es 1.6 entonces queda más cerca de h

[20] Karen: Teniendo 1.6 se necesitaría un número, o bueno, pues un punto que esté más cerca de 2 que más cerca de 1, y h está más cerca de 2, o sea, por eso es que es más apropiado que h sea la respuesta, porque si por lo menos tomamos el valor de g.

[21] Miguel Ángel: Es que digamos g, la mitad de entre el punto 1 y el punto 2, entonces esta digamos entre la mitad de g y h, entonces digamos esta es la mitad, g y h (señala el orden posicional) entonces, si está en 6 (refiriéndose a las décimas) está más cerca de h. Si, o sea, esta 1 sobre la mitad, si lo miráramos respecto a g, o sea respecto a g digamos que está un número más adelante porque o sea la mitad está pasándose otro número más allá.

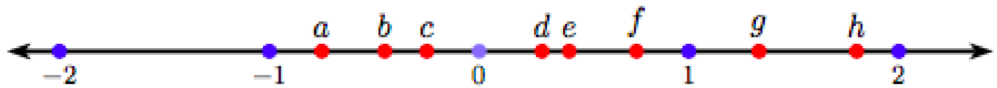
[22] Profesora: O sea, para usted la respuesta es h. ¿Alguien dijo g? ¿por qué es g? Ellos dos están diciendo allá h, ¿por qué es g?

[23] Jacob: Es que a mí me parece que h está muy cercano a 2 para ser, dándole digamos un punto en la mitad de 1 y 2 que me de 1.5, entonces h está muy cercano a 2 para ser como la mitad.

En el razonamiento de Miguel Ángel, Karen y Jacob en [46], [47], [48] y [50], demuestran a través de ejemplos su conjetura, además de forma visual ellos notan la proximidad de $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ con 2 y eso los conduce a hablar de la posibilidad de partir el intervalo [1,2] en dos partes iguales, es decir, se basan en la existencia del 1.5 como único ejemplo para su demostración. Lo que nos lleva a plantear que la demostración de estos estudiantes es un *Experimento Crucial Basado en Ejemplo (ECBE)*.

***Socialización 3.* ¿Cuál es el punto más cercano a $\sqrt{e}$?**

Observa los puntos a, b, c, d, e, f, g y h de la siguiente figura



Responde las siguientes preguntas:

¿Cuál es el punto más próximo a $a.b$? ¿Cuál punto es más cercano a: $a.d$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{e}$, $\frac{1}{f}$ y $\sqrt{h}$? Explica tu respuesta.

[1] Profesora: Carolina ¿Quién está más cerca de $\sqrt{e}$?

[2] Carolina: f

[3] Profesora: ¿Por qué? ¿Cómo lo hizo?

[4] Carolina: Poniéndole un valor a e, 0.4

[5] Profesora: ¿Cuál es la raíz de 0.4?

[6] Karen: 0.63

[7] Profesora: $\sqrt{0.4} = 0.63$, ¿y a f qué valor le puso?

[8] Carolina: 0.7

[9] Profesora: 0.7, bueno, listo entonces la estrategia de ella fue darle valores, ¿alguien encontró otra estrategia?

En este momento de la socialización, vemos como Carolina para demostrar que su hipótesis alude a un ejemplo escogido sin ningún criterio [4], es decir, gracias a la visualización de la recta numérica, le da un valor a e y de acuerdo a las operaciones que realiza el resultado final es f, es decir, en este caso Carolina toma la validez de este único ejemplo, lo que nos lleva a inferir que su razonamiento es *Empírico Ingenuo Inductivo (EII).*

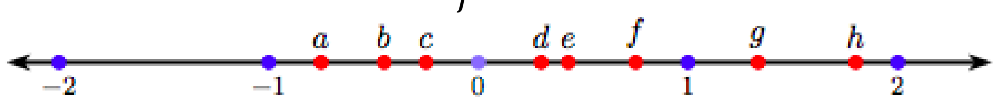
[10] Nicolás: Si usted saca una raíz entre menos de 1, entre 0 y 1, entre 0 y 0.99, el resultado tiende a ser mayor

[11] Profesora: Bueno, ¿entre 0 y 1 sin tomar el 1?

[12] Nicolás: Sí, sin tomar el 1, el resultado tiende a ser mayor, si toma 0.8, el resultado debería ser mayor a 0.8, sería como 0.87

Aquí vemos como Nicolás empieza a realizar conjeturas de acuerdo con la visualización de la recta numérica dada, sin embargo, dentro de su exploración ha encontrado que la raíz cuadrada de un número dentro del intervalo (0,1) siempre va a ser mayor que el número [10], [12], es decir, su razonamiento al trabajar sobre varios números dentro del intervalo (0,1) es un *Experimento Crucial Basado en Ejemplo (ECBE)*. Cabe resaltar también que no tiene claro la infinidad del intervalo (0,1) y por ello, es que habla que el intervalo llega hasta 0.99.

Socialización 4. ¿Cuál punto es más cercano a $\frac{1}{f}$***?***



[1] Profesora: f, ahora, $\frac{1}{f}$ ¿cual es el mas cercano $\frac{1}{f}$? ¿por qué?

[2] Juan David: g, pues a f le di el valor de 0.8 y básicamente dividí 1 en 0.8

[3] Profesora: ¿Cuánto le dio?

[4] Juan David: 1.25

[5] Profesora: 1.25, entonces el más cercano ahí sería g, listo, dándole valores, ¿alguien utilizó otra estrategia, para empezar a descartar?

[6] Nicolás: Para descartar todos los anteriores se podría decir que cuando usted pone 1 sobre una variable, que no sea mayor a 1, que la variable no sea mayor o igual a 1, va a dar mayor al número, la variable no tiene que ser mayor a 1

[7] Profesora: Si, ¿los demás que dicen? Usted divide un número, divide 1 entre un número que esta entre 0 y 1, ¿cómo va a ser el cociente?

[8] Varios: Mayor que 1

[9] Profesora: Mayor que 1, listo. Ahora, en este caso, ¿f es positivo o negativo?

[10] Varios: positivo

[11] Profesora: ¿Positivo? ¿entonces el cociente da positivo o negativo?

[12] Jacob: Positivo

Se puede evidenciar que Juan David [2] logra resolver la situación haciendo uso de un ejemplo. El ejemplo que seleccionó representa a f que es un número que está en el intervalo (0,1) cerca de 1, pero sin ningún criterio geométrico o numérico. Además, Nicolás [6] ha trabajado con varios ejemplos y logra establecer con anterioridad que si se divide uno entre un número que pertenece al intervalo (0,1), el resultado de esa operación siempre es mayor que el 1, lo que nos permite inferir que los argumentos siguen siendo de tipo *Empírico Ingenuo Inductivo o Perceptivo (EII).*

Taller 1. Actividad 2

2.1 Abre el archivo T1_Act-2.1.ggb de GeoGebra y explora.

a. ¿Qué pasa con el valor de $a.b$ si $0 < a < 1$ y $0 < b$?; ¿si $-1 < a < 0$ y $0 < b$? Escribe tus conjeturas y justifícalas.

b. ¿Qué pasa con el valor de $a \cdot b$ si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$?; ¿si $-1 < a < 0$ y $-1 < b < 0$? Escribe tus conjeturas y justifícalas.

c. ¿Qué pasa con el valor de $a \cdot b$ si $0 < a < 1$ y $-1 < b < 0$? Escribe tus conjeturas y justifícalas

Planteamiento de conjetura y tipos de demostración de Jair

2.1 Abre el archivo T1_Act-2.1.ggb de GeoGebra y explora.

a. ¿Qué pasa con el valor de $a.b$ si $0 < a < 1$ y $0 < b$?; ¿si $-1 < a < 0$ y $0 < b$? Escribe tus conjeturas y justifícalas.

[1] Jair: El resultado de $a.b$ siempre es menor a b, si a se acerca al cero el resultado disminuye, mientras si b se acerca al cero es lo contrario.

[2] Investigadora: ¿Por qué?

[3] Jair: Es lo que estaba mirando, si b se acerca al cero también disminuye, si b se aleja aumenta, pero el resultado nunca va a tocar a b, por lo menos en la primera.

[4] Investigadora: ¿Nunca el resultado va a ser b?

[5] Jair: Nunca, siempre va a ser menor que b

[6] Investigadora: ¿Por qué?

[7] Jair: Pues porque estamos multiplicando por un número decimal que es menor que 1

[8] Investigadora: ¿Y qué pasa cuando uno multiplica por un número decimal menor que 1?

[9] Jair: Pues le va a dar un resultado menor al número que estamos multiplicando

Jair a través de la exploración y visualización en el archivo de GeoGebra, en [1] plantea una conjetura, en [3] vemos como empieza a justificar la conjetura con argumentaciones basadas en la percepción, debido a la exploración del archivo dado, es por ello por lo que en este caso Jair alude al *Empirismo Ingenuo Inductivo (EII)*. Sin embargo, en [9] vemos como Jair a través de la exploración recuerda algunas propiedades de la multiplicación y justifica su conjetura con estas propiedades, lo que nos lleva a pensar que la justificación de que $a.b$ siempre es menor que b es un *Ejemplo Genérico Analítico (EGA)*, ya que no usa un valor particular.

Planteamiento de conjetura y tipos de demostración de Luisa

2.1 Abre el archivo T1_Act-2.1.ggb de GeoGebra y explora.

a. ¿Qué pasa con el valor de $a.b$ si $0 < a < 1$ y $0 < b$?; ¿si $-1 < a < 0$ y $0 < b$? Escribe tus conjeturas y justifícalas.

[1] Investigadora: ¿Qué es lo que pasa con el valor de $a.b$ en ese caso? ¿Por qué? (se refiere a cuándo $0 < a < 1$ y $0 < b$)

[2] Luisa: Pues si lo sube van a aumentar (se refiere a los valores de a y b)

[3] Investigadora: ¿Siempre?

[4] Luisa: Si

[5] Investigadora: ¿Qué aumenta?

[6] Luisa: El resultado de acá

[7] Investigadora: ¿La multiplicación? ¿Qué tanto aumenta?

[8] Luisa: Bueno pues, va subiendo, ¿qué tanto aumenta?, No sé decir, obviamente

aumenta en decimales porque como ya se ha hablado que se limita entre 1, pues entonces ya después de 1 cambiará el resultado, esto y si se acerca más a cero, pues va a dar…

[9] Investigadora: ¿De qué forma aumenta el producto $a.b$? ¿es más grande que a o más grande que b?

[10] Luisa: Si, cuando son positivos, por ejemplo, cuando a es mayor y b pues es un poquito menor, esto (señala $a.b$) es mayor no mentiras es menor que a y b

[11] Investigadora: ¿Siempre?

[12] Luisa: Sí porque vea, este (refiriéndose a b) está en 0.2 y este (refiriéndose a a) está cerca al 1 y el resultado se ubicaría por acá, a bueno, véalo acá (señala la recta en un lugar próximo a 0.2)

Luisa al estar explorando dentro del archivo se da cuenta de diferentes propiedades del producto $a.b$, sin embargo, sus argumentos [10], [12] se basan en la visualización, es por ello, que podemos deducir que el tipo de demostración a la que alude Luisa es el *Empirismo Ingenuo Inductivo*.

Planteamiento de conjetura y tipos de demostración de Carlos Daniel

2.1 Abre el archivo T1_Act-2.1.ggb de GeoGebra y explora.

a. ¿Qué pasa con el valor de $a.b$ si $0 < a < 1$ y $0 < b$?

[1] Carlos Daniel: Si a es menor que 1, el resultado $(a.b)$ va a ser menor que a y b, pero si a es mayor que 1 el resultado va a ser mayor que b, pero nunca mayor o igual a a

[2] Profesora: ¿Si qué?

[3] Carlos Daniel: Si a es menor que 1, el resultado va a ser menor que a y b

[4] Profesora: ¿Y b cómo? ¿Cómo va a ser? Usted me está hablando de a, a está entre 0 y 1

[5] Carlos Daniel: Si, y si esa a es menor que 1, el resultado va a ser menor que a y que b

[6] Profesora: ¿Por qué?

[7] Carlos Daniel: porque así mostró el computador

En [1] Carlos Daniel logra establecer dos conjeturas que dicen: i) sí a es menor que 1 y b es mayor que 0, el resultado de $a.b$ es menor que a y menor que b, ii) pero si a es mayor que 1 y b es mayor que 0, el resultado va a ser mayor que b. Sin embargo, Carlos Daniel justifica su conjetura en lo que ve en el archivo a explorar en Geogebra [7] lo que nos lleva a concluir que la demostración usada en este momento es un *Empirismo Ingenuo Inductivo (EII)*.

Socialización 5

a. Al responder las preguntas anteriores, un grupo de estudiantes realizó las siguientes conjeturas: “Andrés asegura que el punto más cercano a $a.d$ está a la derecha de a y d; Camila dice que $a.d$ está entre a y d, y muy cercano a c. ¿Con cuál de los dos argumentos anteriores te identificas? ¿Por qué?”

[1] Profesora: Entonces por acá, Karen, ¿usted está de acuerdo con Camila o con Andrés? ¿Por qué?

[2] Karen: Con Camila porque $a.d$ al tomar valores próximos entre -1 y 0, y, 0 y 1

respectivamente, el resultado es un punto entre a y d que podría ser c, o estar muy cercano a c

[3] Profesora: O sea, lo que está diciendo Camila, precisamente, bueno, entonces vamos a mirar por qué lo que dice Andrés es mentira

[4] Miguel Ángel: Precisamente porque está a la derecha de a

[5] Profesora: ¿Por qué es cierto que está a la derecha de a?

[6] Danilo: Podría descartar lo que dice el, que al multiplicar los signos el resultado va a ser negativo, no puede estar a la derecha de los dos, sino entre los dos

[7] Profesora: Ah sí, ¿sí? entonces cómo a y d tienen signos, ¿qué?

[8] Danilo: Positivo y negativo, va a dar negativo

[9] Profesora: Positivo y negativo, la respuesta va a dar negativo, ¿entonces podría estar a la derecha de quién?

[10] Varios: De a

[11] Danilo: O a la derecha de b

La reflexión que ha hecho Danilo [6] para poder descartar la veracidad del argumento planteado por Andrés en el ejercicio acerca de que el punto más cercano a $a.d$ está a la derecha de a y d, tiene dos componentes válidas para una demostración de tipo *Experimento Crucial Constructivo (ECC)*, ya que trabaja sobre los ejemplos dados en la recta numérica, pero además, recuerda que el resultado de multiplicar un número negativo y un número positivo, es negativo; y esto le permite concluir que el razonamiento de Andrés es erróneo, sin embargo, también podemos observar que Karen [2] justifica su proposición de la misma forma que se plantea en el ejercicio, por lo tanto, no logra establecer ningún tipo de demostración.

Para las otras preguntas los argumentos dados por los estudiantes corresponden a una forma de razonamiento *Empírica Ingenua o Experimento Crucial*, muchas veces evidenciando errores o falta de comprensión en las operaciones básicas como se puede evidenciar en la siguiente transcripción:

Andrés está comparando $d, f, g, \frac{1}{d}, \frac{1}{f}$ y $\frac{1}{g}$, y afirma que ha encontrado una relación en los últimos tres números con respecto a la posición de d, f y g. ¿Cuál consideras que fue la relación que encontró Andrés? Explica.

[1] Profesora: Sebastián ¿cuál cree usted que fue la relación que encontró Andrés? ¿Alguien encontró otra relación? ¿Por acá?

[2] Juan David: No sé, ¿la relación de desigualdad? Comparando a los mismos números, o sea como son iguales, d se compararía con

[3] Profesora: A ver, ¿cuál relación usted encontró?, por ejemplo ¿por qué?

[4] Juan David: Por eso, o sea, d menor que f, f menor que g, $\frac{1}{d}$ mayor que $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f}$ mayor que $\frac{1}{g}$, porque lo tienen que componer, o sea tienen el mismo esto… numerador

[5] Profesora: Miren el comparó d, con f y con g, ¿de qué manera lo comparó?

[6] Juan David: De que son los mismos números, o sea, d lo comparó con $\frac{1}{d}$

[7] Profesora: el comparó d con $\frac{1}{d}$, que más?

[8] Juan David: f con $\frac{1}{f}$, g con $\frac{1}{g}$

[9] Eliseo: Pero $\frac{1}{f}$ es mayor que el denominador…

[10] Juan David: Por eso es una relación de desigualdad

[11] Profesora: Bueno, listo, según lo que usted está diciendo como es d comparado con $\frac{1}{d}$? ¿Mayor o menor?

[12] Juan David: Esto… menor

[13] Profesora: ¿Menor? ¿Por qué?

[14] Juan David: Porque cuando se divide $\frac{1}{d}$ la respuesta es mayor

Aquí se logra evidenciar como Juan David establece algunas relaciones de orden de los números y los recíprocos respectivamente, es decir, conjetura que si $f < g < h$ entonces $\frac{1}{f} > \frac{1}{g} > \frac{1}{h}$, sus argumentos se basan en las operaciones que el realizó gracias a su percepción, por lo que nos lleva a pensar que el tipo de demostración que realiza es un *Experimento Crucial Basado en el Ejemplo (ECBE).*

[15] Profesora: Entonces, ¿cómo es g comparado con $\frac{1}{g}$?, a ver, ¿qué relaciones ustedes encontraron? Además de la que él está diciendo, ¿cómo ustedes entendieron eso de relación? Cuando ustedes leyeron ahí, la relación entre los últimos tres números con respecto a la posición de d, f y g, ¿ustedes como lo entendieron? ¿cómo lo interpretaron? ¿a ver usted, por acá? ¿no qué? ¿no lo entendió? La relación encontrada podría ser que $\frac{1}{d}$ es el doble de $\frac{1}{f}$ y $\frac{1}{f}$ es el doble de $\frac{1}{g}$ (lee las hojas de Carlos), ¿Por qué?

[16] Carlos: Es que $\frac{1}{g}$ es la mitad de $\frac{1}{f}$ y $\frac{1}{f}$ es la mitad de $\frac{1}{d}$

[17] Profesora: ¿Y usted como encontró eso? Que $\frac{1}{g}$ es la mitad de $\frac{1}{f}$ y $\frac{1}{f}$ es la mitad de $\frac{1}{d}$

[18] Carlos: Con la calculadora

[19] Sebastián: También podía haber una relación de igualdad, porque d sería igual a d^{-1}, igual para todo, por la propiedad de la potenciación

[20] Profesora: d igual a d^{-1}, ¿y por qué eso es igual? Cuando ustedes leyeron la palabra relación, ¿ustedes que entendieron con eso?

[21] Danilo: Algo que pasaba igual en los tres casos, en las 3 opciones al darle valores o algo, yo lo entendí así, por eso, le di valores aproximados

[22] Profesora: Listo, veo que muchos le dieron valores a d, f y g y luego calcularon $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{f}$ y $\frac{1}{g}$, ¿luego como relacionaron esos valores? ¿Cómo los relacionaron? ¿por qué es que dice que Andrés está comparando y encuentra una relación? ¿entonces cual consideras que fue la relación que encontró Andrés?

[23] Karen: yo creería que fue una división, porque d, f y g, g es como por así decirlo, el mayor de esos 3, pero si colocamos $\frac{1}{g}$ es todo a la inversa, se convierte en el pequeñito, entonces yo pienso que esa es la relación que él dice, que al momento de ponerle el numerador 1, se invirtió la cosa, ya no es el mayor sino es el menor

[24] Eliseo: Es que g ahora es el más cercano al cero

[25] Profesora: Claro, entonces si usted tiene que, lo que ella está diciendo, g es el más grande, ¿no? entonces si yo quiero ordenar d, f y g, ¿cómo los podría ordenar? Según como están ubicados ahí, quien sería el más pequeño

[26] Varios: d

[27] Profesora: d es menor que f, menor que g, ¿sí?, ¿pero ahora tengo a quién? Tengo $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{f}$ y tengo $\frac{1}{d}$. ¿Qué pasó ahora?

[28] Varios: Ahí se invirtió, se cambió

[29] Profesora: ¿Se cambió? ahora $\frac{1}{g}$ es menor

[30] Varios: que $\frac{1}{f}$ y que $\frac{1}{d}$

Carlos [16] encuentra que $\frac{1}{g} = \frac{1}{2f}$ y $\frac{1}{f} = \frac{1}{2d}$, sin embargo, estos razonamientos los realiza debido a la visualización de los objetos de la gráfica, es decir, solo está tomando casos particulares de la situación, que cumplen una única condición y nos muestra que lo comprobó a través de la calculadora, es decir, que su demostración es un *Empirismo Ingenuo Inductivo*.

Karen [23] establece que existe la relación de reciprocidad, a la que ella llama inversa, y su justificación es que los elementos que inicialmente son mayores, al aplicarle la función de recíproco se convierten en los elementos menores de la situación, pero al hacer uso de varios ejemplos y al lograr establecer las relaciones nos indica que se está aproximando a la demostración como un *Experimento Crucial Constructivo (ECC)*.

Taller 1. Actividad 3

3.1 Abre el archivo T1_Act-3.1.ggb de GeoGebra. Mueve el punto x. Resuelve las siguientes preguntas:

a. ¿Qué valores toma $\frac{1}{x}$ cuando x varía entre -20 y 20? Justifica tu respuesta.

Cabe resaltar que este ejercicio no se trabajó en clase por falta de tiempo, entonces se dejó como actividad para la casa, lo que permitió ver el trabajo extra-clase de dos estudiantes del curso.

[1] Profesora: Entonces abre el archivo 3.1, mueve el punto x y resuelve las siguientes preguntas, entonces Karst, ¿qué valores toma $\frac{1}{x}$ cuando x varía entre esos números? los demás empiecen a mover entre -20 y 20 ¿que ven?

[2] Karst: Cuando x varía entre 0 y 20 el cociente disminuye a medida que el denominador aumenta, siendo el cociente un número positivo mayor o igual a cero y menor que 1; cuando x varía entre 0 y -20, el cociente aumenta su negatividad a

medida que el denominador disminuye.

[3] Profesora: Entonces bueno, ahora sin leérmelo ¿qué puede usted concluir?

[4] Karst: que el cociente va a ser un número positivo que va a estar en base mayor a 0 o puede ser igual, pero no va a pasar de 1

[5] Profesora: ¿Puede ser igual a 0? ¿En qué caso puede ser igual a cero?

[6] Karst: Si, pero no sé cuando

Podemos ver que Karst [2] hizo un abordaje no muy riguroso del archivo de Geogebra sugerido para la realización del taller, en la visualización no se percata de que la división por 0 no está definida, y es por ello que plantea [4] que el valor de $\frac{1}{x}$ puede ser 0, sin embargo, trabaja sobre los ejemplos que le va mostrando Geogebra y logra realizar demostraciones de tipo aunque cuando la profesora le pregunta en que caso es igual a 0, no hay respuesta dado que no se había cuestionado acerca de esa posibilidad.

[7] Mayra: Entre -0.5 y 0.5, porque cuando está en -20 es -0.5

[8] Sebastián: Porque esos serían los extremos

[9] Profesora: Miren lo que están diciendo, entonces, cuando está en -20 entonces están haciendo esto $\frac{1}{-20}$, ¿cierto?

[10] Varios: Si

[11] Profesora: Cuando esta 20, están haciendo $\frac{1}{20}$ entonces esto es 0.05, ¿cierto? ¿entonces, por qué? O sea, que ahora están diciendo lo contrario, ahora resulta que $\frac{1}{x}$ ¿es esto?

[12] Mayra: Si

[13] Profesora: ¿Entonces lo que decía Sebastián? Sebastián decía que si yo me acercaba

a 0 por este lado (izquierda) eso se iba para infinito y que si me acerco a 0 por este lado (derecha) se va para menos infinito. será que es la unión de todo? Ah bueno, entonces acá Mayra, ¿acá tomó el cero?

[14] Mayra: ¿Cómo?

[15] Profesora: ¿Acá tomó el cero?

[16] Mayra: No

[17] Profesora: Si o no, porque usted está diciendo bueno, listo, -20, entonces $\frac{1}{-20}$, -0.05 y $\frac{1}{20}$, 0.005, pero ahí está metido el cero, o sea, que hay un x donde $\frac{1}{x}$ vale cero?

[18] Karst: No

[19] Investigadora: ¿Por qué no?

[20] Karst: Ese es el problema

[21] Mayra: No

[22] Profesora: ¿Por qué no?

[23] Mayra: Porque entre más se va alejando del 20 más se va volviendo chiquito entonces no se puede pasar de 0

[24] Eliseo: 0,0001 o sea, así

[25] Mayra: O sea, va a volver a cero después de 20

[26] Profesora: Ah bueno, mire lo que usted está diciendo, cuando se está acercando a 20, $\frac{1}{x}$ ¿se acerca a qué?

[27] Mayra: A cero

[28] Profesora: A cero, o sea $\frac{1}{x}$ va para cero, pero cuando se acerca a cero

[29] Mayra: Se va aumentando

[30] Profesora: Se va aumentando, entonces, entre que valores se mueve $\frac{1}{x}$ cuando x está entre 0 y 20. Ustedes lo están diciendo

[31] Mayra: Entre 0 y 0.5

[32] Nicolás: Entre cero e infinito, porque cuando al acercarlo se supone que va aumentando más y más y mas

[33] Profesora: ¿Al acercarlo a dónde?

[34] Nicolás: Usted puede coger y ponerle ceros a la derecha

[35] Profesora: ¿Al acercarlo a dónde?

[36] Nicolás: A cero

[37] Profesora: Al acercarlo a cero ¿qué pasa?

[38] Nicolás: Aumenta mucho

[39] Profesora: Y al acercarse a

[40] Nicolás: Y al acercarse a 20, es cero

[41] Profesora: A 20 es cero, ah entonces cuando está entre 0 y 20, $\frac{1}{x}$ se mueve entre cuanto y cuánto?

[42] Nicolás: Entre infinito y el cero

Los estudiantes logran establecer el comportamiento de la función $\frac{1}{x}$ para las $x > 0$, es decir, logran establecer que el límite de $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a 0 por derecha es infinito, y el límite de $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a infinito es 0, sin embargo, es notorio que les cuesta determinar que el comportamiento del rango se da en el eje de las abscisas.

[43] Profesora: Pongámoslo en orden, de cero a infinito, y por este lado (refiriéndose a la izquierda del 0)

[44] Karst: ¿De cero a menos infinito?

[45] Profesora: ¿Por qué?

[46] Karst: Porque, o sea, es casi el mismo caso

[47] Profesora: Si se acerca a cero

[48] Karst: Se va acercando a cero cuando está en -20 y cuando está acercándose más a cero va aumentando el número

[49] Profesora: Aumentando de manera negativa, ¿no? Bueno, entonces de menos infinito hasta cero, ¿ahora y el cero? ¿por qué el cero no?

[50] Nicolás: Porque al dividir un número por cero da cero

[51] Profesora: No, pero esa no es la pregunta que yo estoy haciendo, lo que yo estoy haciendo , lo que yo estoy haciendo es porque $\frac{1}{x}$ nunca es cero, ya vimos acá que $\frac{1}{x}$ va de menos infinito a cero y va de cero hasta infinito, ¿sí? Pero ¿por qué $\frac{1}{x}$ nunca es cero? ¿Por qué no lo vamos a tomar? Pero, es decir, no lo vamos a tomar, no digo acá, sino $\frac{1}{x}$ nunca es cero.

[52] Sebastián: Porque usted estableció el numerador, y para que un cociente sea cero, el numerador debe ser cero

[53] Profesora: ¿Están de acuerdo o no? Para que un cociente sea cero el numerador tiene que ser cero y ya establecimos el numerador.

Los estudiantes logran establecer el comportamiento de la función $\frac{1}{x}$ para las $x > 0$, es decir, logran establecer que el límite de $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a 0 por derecha es infinito, y el límite de $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a infinito o a menos infinito es 0. Además, los argumentos dados, algunos de ellos erróneos, están basados en ejemplos particulares o en lo que observan para los casos claves, lo que evidencia un tipo de argumento que corresponde a una demostración tipo *Empirismo Ingenuo (EI) o Experimento Crucial Basado en Ejemplos* y en la Construcción *(ECBE, ECC)*, como se pude ver en las siguientes transcripciones, en donde participan varios estudiantes.

Los estudiantes logran establecer el comportamiento de la función $\frac{1}{x}$ para $x < 0$, es decir, que el límite de $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a 0 por izquierda es menos infinito, y el límite de $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a menos infinito es 0. Además, Sebastián [52] logra justificar el hecho de por qué el rango de esta función no incluye el 0.

Actividad 4

Abre el archivo T1_Act-4.1.ggb y explora. Mueve el punto x y responde las siguientes preguntas:

a. ¿Qué valores toma $\sqrt{x}$ cuando x varía entre -20 y 20? Justifica tu respuesta.

b. ¿Qué valores toma $\sqrt{x}$ cuando x varía entre 0 y 1? ¿A qué tiende $\sqrt{x}$ cuando x se aproxima a 0 por la derecha? ¿A qué tiende $\sqrt{x}$ cuando x se aproxima a 1 por la izquierda? Justifica tus respuestas.

Al igual que en la actividad anterior, los argumentos siguen basándose en algunos ejemplos observados en el archivo y en casos cruciales, lo que evidencia una forma de razonamiento que denota tipos de demostración empíricas ingenuas o experimentos cruciales.

a. ¿Qué valores toma $\sqrt{x}$ cuando x varía entre -20 y 20? Justifica tu respuesta.

[1] Profesora: ¿Qué valores toma $\sqrt{x}$ cuando x varía entre 0 y 20?

[2] Sebastián: 0 y 4.46

[3] Profesora: ¿0 y qué?

[4] Sebastián: 0 y 4.5 aproximado

[5] Profesora: Ah bueno, listo. ¿toma el 0?

[6] Sebastián: Sí

[7] Profesora: Si, ¿por qué?

[8] Sebastián: Porque $\sqrt{x}$, siendo x cero, es cero

[9] Profesora: Listo, ¿toma el 4 coma algo? También, ¿cierto? Ahora chicos, ¿qué valores toma $\sqrt{x}$ cuando x varía entre 0 y 1?

[10] Nicolás: Pues vimos la vez pasada que entre 0 y 1 el valor de la raíz va a ser mayor al radical

[11] Profesora: ¿O sea, va a ser mayor a x?

[12] Nicolás: Va a ser mayor a x hasta llegar a 1

[13] Profesora: ¿Entonces qué valores está tomando?

[14] Sebastián: Desde cero abierto, hasta 1 abierto, porque si toma 0 serían iguales, si tomamos 1 también serían iguales

[15] Profesora: ¿Por qué no pueden tomar el cero y el uno? ¿Porque serían iguales? ¿Cómo así? ¿entonces, qué valores está tomando $\sqrt{x}$?

[16] Karst: Desde 0 a 1

[17] Profesora: Desde 0 hasta 1, pero entonces lo que está diciendo ella, ¿ $\sqrt{x}$ es qué?

[18] Carolina: Cuando x es mayor que cero y menor a 1, la raíz es mayor al radical

Cuando se les indaga a los estudiantes por los valores toma $\sqrt{x}$ cuando x varía entre 0 y 20, empiezan a recordar las propiedades de los números reales tratados en el día anterior, entonces Nicolás [10] y Carolina [18] manifiesta que en el intervalo (0,1) se cumple que $\sqrt{x} > x$, sin embargo, Sebastián [14] muestra que esta propiedad se cumple solo si está dentro del intervalo (0,1) abierto, porque de lo contrario se debía enunciar que $\sqrt{x} \geq x$ sí $x \in [0,1]$, es decir, la condición cambia.

[1] Profesora: ¿Sí? ¿Cómo?

[2] Karst: El doble más o menos

[3] Profesora: ¿más o menos? ¿o el doble?

[4] Karst: No, o sea, es que yo acá me di cuenta y a lo que lo movía lo puse en 0.33 y me daba 0.6

[5] Profesora: ¿O sea que si vale por ejemplo 0,9 va a valer cuánto? ¿Uno esperaría que valiera cuánto?

[6] Karst: 0.18 pero es que

[7] Profesora: Entonces miremos a ver

[8] Eliseo: Cada vez que se aproxima más al número va reduciendo

[9] Karst: Si, va reduciendo, pero digamos, más o menos al principio si comienza a tomar el doble, y luego se reduce hasta que llegue a 1

[10] Profesora: ¿Pero podemos decir que siempre va a ser el doble?

[11] Karst: No, hasta cierto punto

[12] Profesora: No, cierto. Porque estaríamos diciendo que $\sqrt{x}$ es igual a $2x$ cuando x está entre 0 y 1, ¿pero eso es verdad?

[13] Varios: No

[14] Profesora: ¿Cómo podríamos ahí mostrar que eso no es verdad? ¿Alguien se atreve? Si porque Karst se dio cuenta que entre 0 y 1 cuando estaba muy cercano a 0 estaba dando casi el doble, entonces, uno podría pensar, ¿oiga será que eso siempre es así?

[15] Karst: Pero luego, ya regreso y, pero es que no recuerdo en cual punto era empieza a tomarlos, pero no toma el doble hasta que llega a 1, o sea, es medio verdad y medio falso.

Podemos observar que Karst en [4] plantea que $\sqrt{x} = 2x$ para el intervalo (0,1), sin embargo, para demostrar esta conjetura ella solamente hace uso de un ejemplo [26] por lo tanto, esta demostración carece de argumentos válidos, pero podríamos pensar que es de tipo *Empírico Ingenuo Inductivo (EII).* Además, vemos su dificultad para operar con números decimales [6], porque nos habla acerca de la relación, pero plantea mal lo que espera como resultado.

Por otra parte, Eliseo plantea intuitivamente que $\sqrt{x}$ es creciente, sin embargo, él se da cuenta que a medida que $\sqrt{x}$ se va acercando a cero, esta va a creciendo en menor proporción.

[1] Profesora: Bueno, listo, no importa, ¿entonces que podríamos decir? ¿Qué $\sqrt{x}$?

[2] Mayra: ¿Es mayor a x?

[3] Juan David: Cuando x es diferente de 0 y de 1

[4] Profesora: ¿Cuándo x es diferente de 0 y de 1? ¿qué dicen los demás? ¿por qué cuando x es diferente de 0 y de 1?

[5] Juan David: Porque si x es 0 la raíz es 0 y si x vale 1 la raíz va a ser 1

[6] Profesora: ¿Bueno, entonces, pero x está entre 0 y 1? ¿si? x está entre 0 y 1

[7] Varios: Si

[8] Profesora: ¿Y bueno… $\sqrt{x}$ podría ser igual a x cuando qué?

[9] Jacob: Cuando está en 0 o cuando está en 1.

[10] Profesora: Cuando está en 0 o cuando está en 1. ¿Si? Listo, bueno, muy bien. A que tiende $\sqrt{x}$… a no, entonces ya prácticamente resolvieron la c y la d, ¿no? ¿en el intervalo 0,1 es mayor raíz de x o x?

[11] Varios: $\sqrt{x}$

[12] Karst: Pero es lo mismo, o sea vuelve al punto porque en determinado tiempo se reduce cuando se acerca a 1.

[13] Profesora: Por eso, $\sqrt{x}$ comparado con x, ¿quién es mayor?, entre 0 y 1

[14] Karst: $\sqrt{x}$ va a aumentar en determinado punto y cuando ya se vaya acercando a 1 va a ser mayor

[15] Profesora: Pero ¿cómo es comparado con x?

[16] Karst: Si, por eso, o sea en determinado tiempo $\sqrt{x}$ va a ser mayor que x, pero luego ya cuando la raíz de x se va acercando a 1 va a ser menor o igual

[17] Profesora: ¿Sí?

[18] Karst: Más o menos

[19] Jacob: Solo cuando llega a 1 se convierte en igual

Juan David [5] y Jacob [9] concluyen que $\sqrt{x} = x$ siempre y cuando $x = 0$ y $x = 1$. Además, podemos observar que Karst [14] y [16] intenta expresar que la raíz de x al acercarse a 1 también aumenta, pero en menor proporción, sin embargo, ella no logra ver que $\sqrt{x}$ no es menor que x cuando se acerca a 1, sino que el cambio de $\sqrt{x}$ es menor cuando se acerca a 1.

[1] Profesora: (Se dirige a Karst) acérquelo a 1

[2] Karst: Va decreciendo

[3] Profesora: No, acérquelo hacia la derecha, eso acérquese a 1, pare. ¿cómo es x comparado?

[4] Karst: Va siendo mayor, pero entonces ya está decreciendo porque entonces la diferencia es más grande

[5] Profesora: ¡Ah! Es que ella lo que quiere decir es

[6] Jacob: Es mayor o igual, es que si, cuando se acerca a 1 va aumentando $\sqrt{x}$, creo que es lo que ella está queriendo decir, pero no está preguntando si aumenta, sino que cual es más grande

[7] Profesora: Estamos comparando x y $\sqrt{x}$

[8] Jacob: Pero no cuál va aumentando, sino cual es más grande o cual es mayor

[9] Karst: Si, eso era lo que iba a decir

[10] Profesora: Karst lo que está queriendo decir es que $\sqrt{x}$ entre 0 y 1 aumenta, pero luego empieza a aumentar más poquito, pero la pregunta que yo estaba haciendo es ¿cómo es $\sqrt{x}$ comparado con x cuando entre x está entre 0 y 1?

[11] Karst: Sigue siendo más grande $\sqrt{x}$

[12] Eliseo: Pero el intervalo es cerrado en 0, o sea, es cerrado

[13] Profesora: ¿Cómo?

[14] Eliseo: Quiere decir que está tomando el 0, por eso, entonces es igual también. Mayor o igual porque en 0 es igual

[15] Profesora: La pregunta d, ¿a que tiende $\sqrt{x}$ cuando x tiende a infinito en el intervalo

1 a infinito? ¿Cómo es $\sqrt{x}$ comparado con x?

[16] Varios: Menor

[17] Profesora: ¿Por qué?

[18] Nicolás: Porque al sacarle la raíz cuadrada a un número mayor a 1, siempre va a dar el resultado menor al número.

Finalmente, los estudiantes logran determinar que el comportamiento de la función $\sqrt{x}$ dentro del intervalo $(0,1)$ es diferente al comportamiento de la función $\sqrt{x}$ dentro del intervalo $(1,\infty)$, es decir, dentro del intervalo $(0,1)$ se tiene que $\sqrt{x} > x$, pero dentro del intervalo $(1,\infty)$ se tiene que $\sqrt{x} \leq x$.

b. ¿Qué valores toma $\sqrt{x}$ cuando x varía entre -20 y 20? Justifica tu respuesta.

[1] Sebastián: Menor que 0, no puede tomar valores $\sqrt{x}$, porque estamos en una recta real y raíces pares, con índice par, es imposible que usted tome un subradical impar básicamente porque no hay ningún número positivo y negativo

[2] Profesora: ¿Un radical impar?

[3] Sebastián: Un subradical negativo, porque lo que dice la raíz es que un mismo número se multiplica dos veces, entonces si multiplicamos dos veces un número negativo, siempre nos da positivo, y si multiplicamos dos positivos siempre da positivo.

[4] Profesora: ¿Alguien quiere argumentar otra cosa?

[5] Eliseo: O pues da un número imaginario

[6] Profesora: Da un número imaginario. ¿Entonces qué está pasando ahí?, cuando ustedes intentan moverlo a la izquierda de cero.

[7] Sebastián: Se desaparece

[8] Profesora: Se desaparece, ¿sí? Por lo que está diciendo Sebastián, le estaríamos sacando la raíz cuadrada a un número negativo ¿sí? Por ejemplo, ¿por qué $\sqrt{4}$ es más o menos 2?

[9] Sebastián: Porque -2×-2 es 4, igual que 2×2, 4.

[10] Profesora: Aja, entonces intentemos hacer ahora eso con raíz de menos 16 por ejemplo.

[11] Eliseo: Menos por menos da más.

[12] Profesora: Bueno, listo, ya descartaron los valores de menos 20 a cero, entonces que valores toma $\sqrt{x}$, cuando x varía entre 0 y 20 porque ya descartamos los otros, ¿entonces que valores toma?

[13] Sebastián: Tomaría desde el 0, tomando el 0, hasta 4.5, si es la aproximadamente la raíz de 20

Sebastián plantea [1] y [3] que $\sqrt{x}$ no está definida para los números negativos dado que no existe un número que al multiplicarlo por el mismo resulte negativo, esto debido a la ley de los signos, lo que nos lleva a pensar en que está construyendo una demostración de tipo *Experimento Crucial Constructivo.*

6.2. Taller 2. Recipientes

Actividad 1

1.1 Toma una hoja rectangular de tamaño carta y, sin recortar, forma un cilindro sin tapas.

a. Considerando cada uno de los lados mayor y menor del rectángulo como la posible altura del cilindro, como se obtiene el mayor volumen del solido: ¿con el mayor o con el menor de los lados? Justifica tu elección.

Para poder dar respuesta a esta pregunta se realizaron entrevistas particulares acerca de los razonamientos que realizaron los estudiantes, después se trabajó por grupos y por último en una puesta en común, y se dará cuenta de estos momentos.

Planteamiento de conjetura y tipos de demostración de Luisa

[1] Luisa: Cuando el radio es mayor que el lado, que la altura, eso va a influir a que el volumen sea mayor porque el radio al ser mayor y elevado a la 2, esto le va a dar el doble del radio y este al multiplicarse por la altura pues va a dar más volumen

[2] Investigadora: ¿Ahí es el doble del radio? Cuando usted lo eleva a la 2 ¿es el doble del radio?

[3] Luisa: Si

[4] Investigadora: ¿Segura?

[5] Luisa: Pues el radio al elevarse a la 2 va a ser mayor

[6] Investigadora: ¿Pero necesariamente va a ser el doble o no?

[7] Luisa: Pues al elevarse a la 2 si, ¿no?

[8] Investigadora: No sé

[9] Luisa: Pues si, al elevarse a la 2, no, no es el doble

[10] Investigadora: ¿Por qué?

[11] Luisa: Porque si yo digo el doble de 6 es 12 y si digo 6 por 6 es 36, entonces no es el doble, es más.

Podemos observar cómo Luisa recuerda que en una función cuadrática aumenta más rápido que una función lineal, sin embargo, cuando plantea su conjetura, muestra de una forma errónea este aumento, ya que propone que $x^2 = 2x$, sin embargo, a través de un ejemplo (demostración *Empírica Ingenua Inductiva*) corrige el planteamiento de su proposición.

<u>Planteamiento de conjetura y tipos de demostración de Gabriela</u>

[1] Gabriela: Al unirlo así (a lo ancho), obviamente el radio pues va a ser mayor que al unirlo así (a lo largo), al unir los dos lados más largos, el radio va a ser mucho menor, que, en teoría, aunque esto sea más largo (se refiere al largo) que esto (se refiere al ancho)

[2] Investigadora: O sea, ¿qué hay? ¿depende es del radio o qué?

[3] Gabriela: Yo supongo, porque, aunque sea más largo que esto (refiriéndose al ancho) y el radio este es mayor (uniendo los anchos) que al unirlos así (uniendo los largos) el número me da siempre mayor acá

[4] Investigadora: solo fue por el ejemplo, ¿sí?

[5] Gabriela: sí

Gabriela nos muestra que ella toma las medidas de la hoja tamaño carta y a través de ese ejemplo logra conjeturar que el cilindro que se forma con una hoja tamaño carta tiene mayor volumen cuando su radio es mayor, sin embargo, ella solo usa ese ejemplo y se queda con su conjetura sin establecer más relaciones, lo que nos lleva a concluir que su razonamiento es *Empírico Ingenuo Inductivo.*

Planteamiento de conjetura y tipos de demostración de Jacob

[1] Jacob: Tomé las alturas, y pues no me daba igual al volumen (se refiere a cuando el radio es mayor, es decir, la hoja doblada a lo ancho), sino que me daba menor, aun cambiando la altura, el radio, aunque era pequeño, un numero 4 comparado con el 25 daba mucho mas

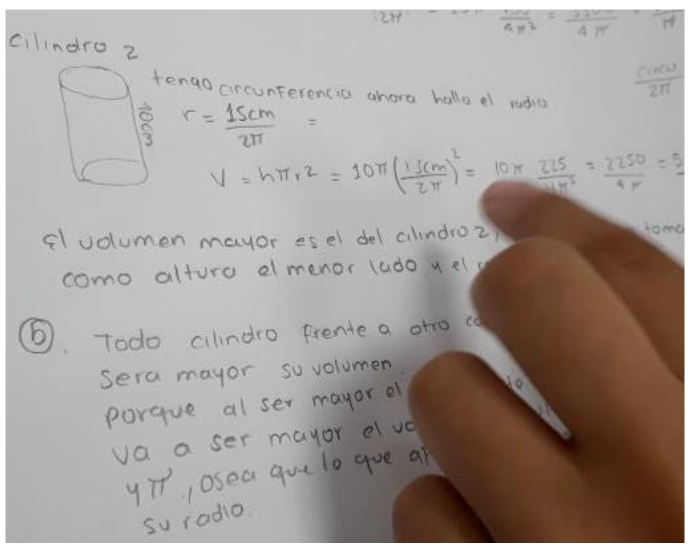
[2] Investigadora: ¿Por qué?

[3] Jacob: Al multiplicarla me dio 1256 y si lo cambiaba por un radio… perdón, cuando lo cambie por el radio de 16 me dio 1256, pero si le pongo a este, aunque sea un número más alto no me va a variar mucho el volumen

[4] Investigadora: ¿Por qué cree que pasa eso?

[5] Jacob: Ni idea

Imagen 1. Hoja de trabajo de Jacob



En este caso, Jacob se da cuenta de que el volumen del cilindro aumenta más cuando el radio es mayor, es decir, él nota a través de sus ejemplos de que a pesar de que la altura varíe, no va a representar mayor cambio en la variación del volumen, sin embargo, el aún no reconoce por qué sucede esto.

Socialización con el grupo 1.

¿Qué se puede conjeturar de cualquier hoja rectangular? Explica tu respuesta.

[1] Profesora: Bueno, en otras palabras, si este es el largo de la hoja y este es el ancho, entonces, ¿qué podríamos conjeturar?, si a ustedes les dan una hoja rectangular, y le dicen

[2] Jacob: Cuando el perímetro de una hoja rectangular

[3] Profesora: ¿Cuál perímetro?

[4] Jacob: Cuando el perímetro de la circunferencia es mayor, hace que el radio sea mayor y…

[5] Profesora: O sea, que ¿depende del radio?, ¿nos quedamos con esa idea? ¿de qué depende del radio?

[6] Gabriela: De que el radio sea mayor a la altura

[7] Miguel Ángel: De que el perímetro sea mayor a la altura

[8] Profesora: Pero cuando usted habla de perímetro, ¿a qué se refiere con perímetro?

[9] Miguel Ángel: El perímetro de la base

[10] Carlos: O sea, al lado mayor

[11] Danilo: O sea, cogiendo como perímetro el lado mayor

[12] Profesora: ¿Qué pasa cuando la hoja es cuadrada?

[13] Miguel Ángel: Son iguales, el volumen es igual

[14] Profesora: ¿Por qué?

[15] Karst: Porque es un cuadrado y sus lados son iguales, los lados y sus medidas van a ser iguales

[16] Jacob: Porque la altura sería igual al perímetro

[17] Karst: Y si se toma desde cualquier lado

[18] Jacob: Y el radio viene siendo el mismo

[19] Profesora: ¿Acá quién es la altura?

[20] Jacob: Es que la altura es igual al perímetro, y al sacar el radio va a ser el mismo en los dos casos y entonces al aplicar la fórmula de volumen el radio y la altura van a ser iguales, y π como es una constante siempre va a dar lo mismo.

En primer lugar, los estudiantes de este grupo han discutido y se han dado cuenta de que cuando el cilindro se forma por la parte ancha de la hoja, es decir, cuando el lado más largo de la hoja rectangular corresponde al perímetro del círculo que forma la base del cilindro, el volumen es mayor, sin embargo, aún no establecen claramente por que se da esto. Además, logran establecer que con una hoja cuadrada el volumen del cilindro que se forma es el mismo, dado que la altura es igual al perímetro de la circunferencia de la base.

<u>Socialización 1</u>

1.1 Toma una hoja rectangular de tamaño carta y, sin recortar, forma un cilindro sin tapas.

a. Considerando cada uno de los lados mayor y menor del rectángulo como la posible altura del cilindro, como se obtiene el mayor volumen del solido: ¿con el mayor o con el menor de los lados? Justifica tu elección.

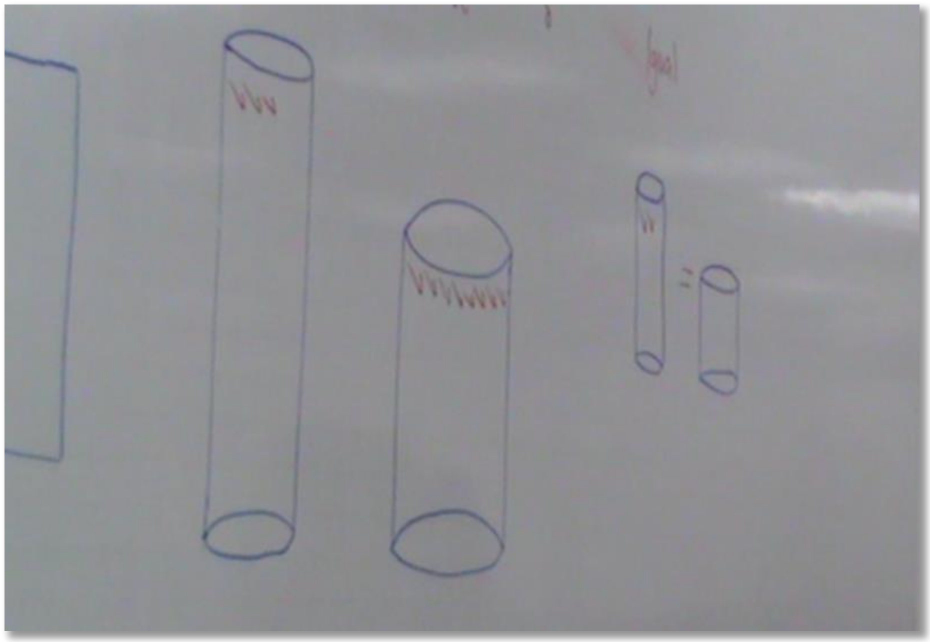
b. ¿Qué se puede conjeturar de una hoja cuadrada? Explica tu respuesta.

c. Compara tus resultados con un compañero, y demuéstrale que tus conjeturas son verdaderas.

1.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Imagen 2. Cilindros formados por la hoja tamaño carta



[1] Profesora: ¿1, 2 o cuál? ¿usted que contestó?

[2] Danilo: 1 y 2

[3] Profesora: O sea, ¿puede ser así (refiriéndose al de menor radio) o puede ser así (refiriéndose al de mayor radio) y da igual volumen?

[4] Danilo: No, no puede dar igual

[5] Profesora: ¿Cómo cual da mayor volumen? ¿Así (refiriéndose al de menor radio) o así (refiriéndose al de mayor radio)?

[6] Danilo: El 2 (refiriéndose al de mayor radio)

[7] Profesora: Daniel, igual, por acá.

[8] Carlos Daniel: El de la derecha (refiriéndose al de mayor radio)

[9] Profesora: ¿Maira?

[10] Maira: Dos (refiriéndose al de mayor radio)

[11] Profesora: ¿Sebastián?

[12] Juan Sebastián: Dos (refiriéndose al de mayor radio)

[13] Juan David: Dos (refiriéndose al de mayor radio)

[14] Carolina: Dos (refiriéndose al de mayor radio)

[15] Profesora: ¿El dos Carolina?

[16] Luisa: Uno (refiriéndose al de menor radio)

[17] Juan camilo: Dos (refiriéndose al de mayor radio)

Hasta este momento de la socialización, la profesora habiendo revisado previamente la actividad de cada uno de los estudiantes comenzó a indagar en primer lugar acerca de la conclusión de cada uno de los estudiantes respecto a de qué forma se obtiene el mayor volumen del cilindro, de los lados mayor y menor del rectángulo como la posible altura del cilindro. Esto se realizó con el fin de ver quienes concuerdan en sus razonamientos, para poder apoyar o refutar las condiciones.

[1] Profesora: ¿Qué está haciendo Miguel? Cuéntenos acá en el tablero lo que estaba haciendo

[2] Miguel Ángel: Yo lo saqué como si hubiera dos casos, pues utilicé primero una fórmula para hallar el radio del circulo que acá se formaba y luego (escribe $\frac{C}{2\pi}$)

[3] Profesora: $\frac{C}{2\pi}$ igual al, ¿Carolina $\frac{C}{2\pi}$ igual al? ¿al radio? ¿Quién es c?

[4] Miguel Ángel: c es elperímetro

[5] Profesora: ¿c es el perímetro de quién?

[6] Miguel Ángel: Acá el perímetro sería tomar la base

[7] Profesora: bueno, ¿por qué calcular r? ¿para que necesitaba r?

[8] Miguel Ángel: Para calcular el volumen

[9] Profesora: ¿A que era igual el volumen?

[10] Jacob: $\pi r^2 h$

[11] Profesora: $\pi r^2 h$, ¿la altura si la tenía?

[12] Miguel Ángel: asiente

[13] Profesora: ¿En ambos casos? ¿cual?

[14] Miguel Ángel: La altura es la misma de la hoja, y voy a reemplazar valores

[15] Profesora: Bueno, mientras el termina de hacer los cálculos, ahí todavía no sabemos si es 1, 2 o igual (refiriéndose al volumen de las figuras del tablero). Entonces los que dijeron 1, Luisa ¿por qué 1?

[16] Luisa: Pues es que yo dije que 1 porque yo hice unas cosas, el problema es que esa parte me quedó mal, entonces probablemente lo que dije me quedó mal.

[17] Profesora: O sea, usted le puso valores a …

[18] Luisa: Si, es que yo le di valores, o sea cogí los valores de la hoja y asumí un radio, entonces daba que…

[19] Profesora: ¿Cómo lo asumió?

[20] Luisa: Porque es que lo puse en la hojita y supuestamente yo cada 2 cuadritos es 1 cm, entonces así…

[21] Profesora: una aproximación

[22] Luisa: Me dio que ese tiene más volumen, entonces, por eso pues no sé

[23] Profesora: ¿Con cuántos lo hizo? ¿con una sola hoja o varios?

[24] Luisa: No, por ejemplo, si lo pusiera así larguito, con los cuadritos a mí me daba 8, se lo aumenté a 9 y entonces sigue aumentando

[25] Profesora: ¿Usted le aumento 1 cm a la altura?

[26] Luisa: Al radio

[27] Profesora: ¿Usted le aumento 1 cm al radio?

[28] Luisa: o sea, si

[29] Profesora: a ver usted lo tenía así (refiriéndose al cilindro de menor radio)

[30] Luisa: Y así tenía mayor volumen, si usted lo voltea de la otra forma y le aumenta el radio 1, la otra forma va a tener más volumen que si usted lo deja como tiene la hoja

[31] Investigadora: Es correcto lo que está diciendo Luisa

[32] Luisa: Y ahorita como el radio se halla así entonces pues hay un error

Miguel Ángel [2] ha utilizado la ecuación de la longitud de la circunferencia para hallar el radio, Luisa [18] escogió valores sin ningún criterio, eso nos muestra que mientras Miguel Ángel está proponiendo una demostración *Ejemplo Genérico Analítico (EGA),* Luisa está proponiendo un *Experimento Crucial constructivo (ECC),* esto se da porque a pesar de que sus razonamientos son erróneos, ella realiza construcciones sobre el ejemplo y generaliza sobre los procesos que está realizando.

[33] Profesora: No, porque lo que usted hizo no está mal, usted está dando una aproximación, entonces usted dijo, así el radio vale tanto y así la altura vale tanto, ¿sí? pero entonces lo que no entiendo es al aumentarle 1 cm ¿cómo? ¿así? (hoja de radio grande) ¿a quién? ¿al radio?

[34] Luisa: Si

[35] Profesora: Al aumentarle el radio ¿qué pasa?

[36] Luisa: El volumen de la otra figura va a ser más alto que si usted lo aumentara 1 cm así

[37] Profesora: ¿Por qué cree que está pasando eso?

[38] Luisa: Si usted lo pone así (radio menor) va a dar un volumen alto, un volumen mayor

[39] Profesora: ¿Por qué?

[40] Luisa: Porque yo le aproximé un radio y obtuve los valores de la altura, entonces desarrollé la formula y el volumen que me da así (refiriéndose al de menor radio), es más alto a como si yo lo pusiera así (refiriéndose al de radio mayor), entonces si usted le aumentaba 1 cm a esto en el radio de esta figura (refiriéndose al de menor radio) era mayor, aun así, si usted le aumentaba 1 cm a esta (refiriéndose al de radio mayor), ¿sí?

[41] Profesora: ¿Cómo hizo esto? ¿por qué?

[42] Luisa: Porque yo pensé que, si usted le aumentaba, porque es que si usted le pega otra hoja aquí de cierta manera y le hace así (formando el cilindro), entonces puede que la capacidad o el volumen aumente, ¿sí?, y lo mismo por el otro lado, y entonces, si usted le aumenta al chiquito y le aumenta al otro va a haber una diferencia, puede que uno aumente y el otro disminuya entonces estaba buscando eso

[43] Profesora: ¿O sea, el volumen depende de qué?

[44] Luisa: Según yo, del radio

[45] Profesora: ¿Del radio?

[46] Luisa: Pero es que eso, no también de la altura, de los dos

[47] Profesora: Bien, ¿qué opinan de lo que dice Luisa? Gabriela

[48] Gabriela: Pues yo dije que también era 1, pero no depende del radio sino de la altura

[49] Profesora: ¿La altura? ¿Por qué?

[50] Gabriela: Porque yo le di valores a la altura suponiendo que la hoja (vertical) a lo largo, es 30 cm, le di un radio de 5 cm, obviamente porque el cono va a ser una figura más angosta, en el caso que yo le di valores, como usted me dijo hay que minimizar; puede

que yo le de 100 ejemplos de que depende de la altura pero usted me va a dar uno de que si depende del radio, el que yo di, dependía del radio al ponerle 30 cm de altura y 5 cm de radio, yo hice la fórmula que era el volumen, altura, por π, por el radio al cuadrado

Gabriela también está proponiendo un *Experimento Crucial constructivo (ECC),* esto se da porque a pesar de que sus razonamientos son erróneos, ella realiza construcciones sobre el ejemplo y generaliza sobre los procesos que está realizando.

[51] Profesora: Espéreme, vamos a anotar esos datos ahí, ¿cuándo a usted le dio que r era cuánto?

[52] Gabriela: No, el volumen es igual a $h \times \pi\, r^2$. Entonces de altura coloque 30 cm, lo multiplica por pi, el radio seria 5, al cuadrado, eso va a dar, bueno va a dar un valor menor a que si yo le coloco. bueno, con el menor o más pequeño

[53] Profesora: O sea, ¿esas dimensiones son para este (alto) o para este (ancho)?

[54] Gabriela: No, para el alto

[55] Profesora: O sea, ¿estas son para el alto?

[56] Gabriela: para el más pequeño le coloque que tenia de altura 20 cm y de radio 7

[57] Profesora: ¿De dónde? Pero ojo este se forma con esta misma hoja

[58] Jacob: Claro

[59] Profesora: ¿Sí? o sea, es decir

[60] Gabriela: Es que yo estoy hablando de la altura esta

[61] Profesora: Ah por eso, es decir, acá otra vez, $h \times \pi \times r^2$, pero entonces la pregunta ahora es, si acá h vale 30 cm, o sea, esto, y acá el radio vale 5, como esas medidas afectan en el radio de este y en la altura de este

[62] Gabriela: Es que cuando uno une los lados, bueno los 20 cm que yo le coloque el radio me va a dar mayor

[63] Profesora: 20 o 30?

[64] Gabriela: No, al angosto

[65] Profesora: Ah es que acá usted puso 20, ¿sí?

[66] Gabriela: El radio del angosto me va a dar mayor porque se va a volver más ancho

[67] Profesora: Que opinan de lo que dice Gabriela, o sea, para eso ella le dio unos valores, le dio h, le dio r, pero a este ella le está dando 20. ¿Cómo?

[68] Daniel: Es que sí, digamos le suma las puntas de cada cilindro, el tamaño de la hoja va a ser distinto, ¿si me entiende?

[69] Profesora: Podría pasar eso. Pero ¿podría pasar eso Gabriela?, es decir, lo que está diciendo Daniel, usted le dio valores para formar este cilindro, ¿sí?

[70] Jacob: Pero entonces ahí ya debería de hallar el radio del segundo con el perímetro que ya tiene de los 30 cm.

[71] Profesora: O sea, el radio de este (refiriéndose al de radio mayor) ¿cuál sería según lo que usted está diciendo?

[72] Jacob: Entonces, seria $radio = \frac{30}{2\pi}$

[73] Profesora: Mas o menos, ¿cuánto es eso chicos?

[74] Gabriela: 4.7

[75] Profesora: 4.7, ese sería el radio de este, ¿cierto? Sí, sería el radio de este, ¿cierto? ¿cuál sería la altura de este? Porque ella más o menos le puso 20, pero ¿será que si es 20?

[76] Jacob: Entonces pues allá le dio, el radio 0.95, entonces hagamos el perímetro sería

10, perdón, el perímetro no, el diámetro sería 10, entonces ahí busquemos una formula con la que hallemos el

[77] Profesora: ¿El radio seria 10? ¿o el que?

[78] Jacob: El diámetro con el perímetro

[79] Profesora: ¿Cómo lo haría?

[80] Jacob: Una formula

[81] Profesora: Esta longitud acá, ¿cómo se refleja acá? ¿cuál sería?

[82] Jacob: Perímetro

[83] Profesora: Jacob, lo que él está diciendo, esta altura acá, esta longitud acá, ¿cómo se refleja allá?

[84] Jacob: Como el perímetro de la base, entonces ahora una fórmula con la que hallemos ese perímetro si conocemos el radio

Al darse cuenta Jacob, de que los elementos que usó Gabriela para el planteamiento de la conjetura no eran los correctos, entonces, el plantea la misma situación de Gabriela, pero, donde muestra la relación entre la longitud de la hoja de papel y el perímetro de la circunferencia de la base.

[1] Estudiante no identificado: Pues al 5 se le multiplica por 2π, ¿no?

[2] Profesora: Entonces, ¿al 5 lo multiplico por 2π? Sí, porque mire acá tengo que c es igual a $2\pi r$, bueno, listo, ¿ahora? ¿cuánto da eso más o menos?

[3] Estudiante no identificado: 10π

[4] Profesora: ¿Cuánto es 10π aproximadamente?

[5] Silvana: 31.415996

[6] Profesora: 31.4 ¿sí? dejémoslo así, si, es decir, a partir de estos datos que dio

Gabriela, ella considero un cilindro de altura 30 y de radio 5, ustedes calcularon el radio y la altura del otro cilindro, ¿sí?, ahora, ¿que podría hacer con esos datos?

[7] Jacob: Ahora pues hallar el volumen de ese cilindro

[8] Profesora: ¿El volumen de ese cual sería?

[9] Jacob: $30 * \pi$

[10] Profesora: Por el radio al cuadrado, ¿y el de este? ¿cuál sería?

[11] Eliseo: 31.4

[12] Profesora: 31.4π

[13] Silvana: $31.4 \times \pi \times 4.7$

[14] Profesora: $31.4 \times \pi \times 4.7^2$. ¿Si entiende lo que está pasando Gabriela?, que cuando usted le dio valores a este cilindro, lo que dijo Jacob, si usted extiende este (refiriéndose al propuesto por ella) y extiende este (refiriéndose al propuesto por Jacob), ¿será que daría la misma hoja?

[15] Miguel Ángel: A mí el segundo me dio 2179

[16] Profesora: ¿Y acá?

[17] Gabriela: 750

[18] Profesora: ¿750π? ¿Sí?, o sea, con π ¿cuánto da eso?

[19] Gabriela: 2356

[20] …

[21] Profesora: Entonces, va a ser $\frac{30}{2\pi}$, ¿está bien, no? Y por otro lado necesitamos ahora la altura de esto, entonces la altura de esto, ¿con qué se forma?, con lo que ustedes dijeron, la base de este, ¿cierto?, y la base de este va a ser $5 \times 2\pi$

En medio de la confusión con lo que trabajó Gabriela, se concluyó, gracias a la ayuda de Jacob que los ejemplos que se proponen debían cumplir con las condiciones iniciales dadas, es decir, que fueran las mismas medidas para los dos casos. Es decir, Jacob trabajó la demostración como un *Ejemplo Genérico Intelectual (EGI)*, dado que el realiza su procedimiento, pero cuando trabaja con el ejemplo de Gabriela logra transformar la situación de tal forma que con ese ejemplo también puede reafirmar su conjetura.

<u>Actividad 2</u>

2.1 Abre el archivo T11_Act-2.1.ggb, que simula el llenado de un depósito para agua en forma de un cono circular invertido de altura 8 m y radio 3 m.

[19] Anima el deslizador *t* (haz clic en el botón *play* de la ventana gráfica y resuelve las siguientes preguntas:

a. ¿Qué magnitudes varían a medida que va llenándose el depósito? ¿Por qué?

b. ¿Qué valores toman las magnitudes variables? Justifica tu respuesta.

Socialización 2

[1] Profesora: A ver Miguel ¿Qué magnitudes varían a medida que va llenándose el depósito? ¿Por qué?... ustedes saben que respondieron

[2] Miguel: Bueno ¿Qué magnitudes varían…? Bueno el diámetro, el radio y la altura

[3] Profesora: ¿Por qué están variando?

[4] Estudiante no identificado: Porque a medida que se va acercando… va ocupando

un espacio más grande, entonces va a ocupar una altura y va a ocupar un diámetro

[5] Miguel: El radio del líquido que hace ocupar, va aumentándose entonces a medida que va la altura aumentando…

[6] Profesora: Es decir, cuando se va llenando el cono ahí ¿Qué figura está formándose ahí también?

[7] Estudiante no identificado: Un cono

[8] Miguel: Si, está tomando la forma del recipiente

[9] Profesora: ¿Qué otras magnitudes más varían Danilo? Él dijo el diámetro, el radio, la altura ¿Qué otras?... ¿el qué?

[10] Danilo: El volumen

[11] Profesora: ¿Qué otras?

[12] Karen: El tiempo también

[13] Profesora: El tiempo también está variando

[14] Miguel: Está jugando un papel importante ahí

Los estudiantes logran identificar las magnitudes variables, cabe resaltar que de forma muy precaria se dan cuenta que la variación del volumen del cono está dependiendo del tiempo.

[15] Profesora: Daniel, ¿Qué valores toman las magnitudes variables? ¿Por qué?

[16] Daniel: El radio va de 0 a 6

[17] Estudiante no identificado: No, esa es la altura… va de 0 a 3

[18] Profesora: ¿Por qué desde 0 hasta 3?

[19] Danilo: Cuando usted lo coloca hasta acá…

[20] Daniel: El diámetro de 0 a 6

[21] Profesora: El diámetro de 0 a 6 y el radio de 0 a 3 ¿Por qué?

[22] Daniel: Porque el radio es la mitad del diámetro

[23] Profesora: Si, pero ¿Por qué están variando entre esos valores?

[24] Daniel: Porque el cono, o sea el que nos están dando, el radio máximo es de 3…

[25] Profesora: Bueno ¿Y qué otras magnitudes?

[26] Daniel: La altura

[27] Profesora: La altura de cuanto a cuanto

[28] Danilo: De 0 a 8

[29] Profesora: ¿Por qué Carolina?

[30] Carolina: Porque a medida que usted va llenando con agua pues va subiendo hasta 8 que es la máxima.

[31] Profesora: Bueno Luisa ¿Qué relación entre el radio y el nivel del agua?

[32] Luisa: Yo puse, es que el cono tiene, si usted le pone una línea acá eso va a formarle un triangulo

[33] Profesora: A ver hagamos acá el dibujito

[34] Luisa: Pero no espere… ¿Cómo le explico? Tengo la idea

[35] Profesora: Venga y la desarrolla en el tablero, yo le ayudo con el dibujo solamente… y esto se va llenando acá… bueno, pero luisa cuando usted leyó eso de qué relación existe entre el radio y el nivel del agua, ¿usted en que pensó?

[36] Luisa: En la altura y el radio

[37] Profesora: Pero ¿Cómo piensa relacionarlos?

[38] Luisa: Pues es que el recipiente tiene una capacidad máxima y usted no la puede aumentar, porque a usted ya le están dando los valores, entonces cuando usted lo va llenando se va creando la forma de un cono más chiquito, entonces las dos medidas van a ser proporcionales a las que ya tienen el recipiente

Daniel [20], Danilo [24] y [28], y Carolina [30] de forma visual logran establecer el dominio de algunas de las magnitudes variables, además, Luisa [32] logra establecer la semejanza de los triángulos que se van formando a medida que se va llenando el cono de la simulación.

[39] Profesora: ¿Por qué?

[40] Luisa: Porque se están llenando

[41] Varios: Pero ¿Por qué proporcionales?... cuando uno dice que a medida que una magnitud aumenta y la otra también aumenta ¿eso quiere decir que el aumento es proporcional?

[42] Daniel: No, lo proporcional era si digamos aumentara la misma cantidad…es decir, el radio 4 y la altura 4

[43] Sebastián: O sea, que hay una constante de crecimiento

[44] Profesora: Ah, hay una constante de crecimiento… ¿y acá será que hay una constante?

[45] Investigadora: ¿Entonces qué hizo?

[46] Luisa: No, yo no hice nada… es que eso tiene forma también de triangulo, entonces cuando usted dijo relación, como ya habíamos hecho varios ejercicios de eso, cuando usted decía relación era para usted buscar una fórmula o algo que sí, que fuera… entonces yo para las fórmulas muy mala, entonces esto forma

una forma de triángulo, si usted le traza una línea forma dos triángulos semejantes

[47] Profesora: ¿Por qué semejantes?

[48] Daniel: Pero eso no sería con triángulos rectángulos

[49] Nicolás: No, eso solamente dependía de la altura y el ángulo…

[50] Profesora: ¿Cuándo dos triángulos son semejantes?

[51] Carolina: Cuando sus ángulos eran iguales, del pequeño al más grande

[52] Profesora: ¿Y por ejemplo ahí se cumple eso?... dibuje los dos triángulos, si quiere dibújelos aparte

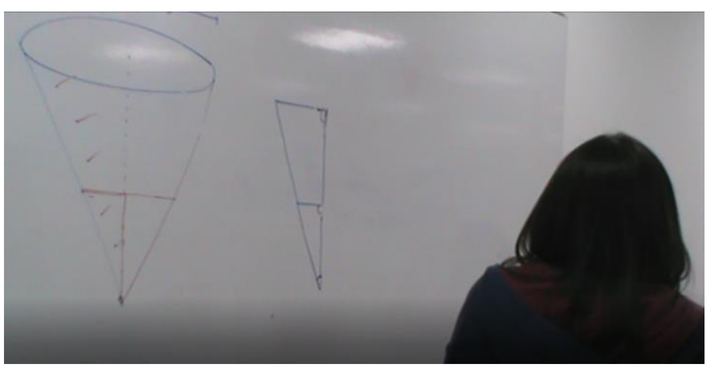
[53] Luisa: Ya, el grande y el chiquito

[54] Profesora: ¿Cuál es el grande?

[55] Luisa: El de acá (señala el triángulo externo) … y el chiquito es este (señala el triángulo interno)

[56] Profesora: Ah listo, entonces tiene estos dos… ¿Por qué son semejantes?

Imagen 3. Semejanza de triángulos (Socialización de Luisa)



[57] Luisa: Por que comparten este mismo ángulo y acá tienen 90…

[58] Profesora: ¿Sera que no?... usted me dice que estos dos son iguales por ser de 90, este, comparten uno… bueno entonces ¿todos están de acuerdo de que son

semejantes?... listo y ahora ¿para qué me sirve esto?

[59] Luisa: No, pues esa era lo de la relación

Luisa [46] aunque no está segura establece la relación de semejanza en los triángulos que se forman de acuerdo al llenado del cono, sin embargo, posee argumentos teóricos suficientes que validan la información, dado que comprende que para que dos triángulos sean semejantes, los ángulos deben ser iguales, sin embargo, no está convencida de la relación de proporcionalidad que debe existir entre ellos, es decir, hace uso de un ejemplo representativo de la clase y sus justificaciones son generales, lo que nos lleva a pensar que está tratando de construir una demostración de tipo *Ejemplo Genérico Analítico (EGA)*, además, vemos la dificultad de Daniel en la compresión del concepto de semejanza de triángulos.

Dentro de la última parte de la socialización, los estudiantes hicieron intentos por establecer la dependencia entre el radio y la altura, sin embargo, se pudo evidenciar que entiende que hay una constante que relaciona las variables, pero no supieron cómo hallarla.

Socialización 3

c. Halla la función que representa la interdependencia entre el nivel del agua y el volumen. Explica tu procedimiento.

[1] Profesora: Ayer nosotros encontramos la interdependencia entre el radio y el nivel del agua, ¿cierto? Entonces, ahora nos están pidiendo, cual es la función que relaciona el nivel del agua con el volumen. Entonces, Carolina pase y nos explica.

[2] Carolina: Teniendo en cuenta que el $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ y el radio es esto (señala el radio en el tablero), entonces la formula quedaría así $V = \frac{\pi\left(\frac{3h}{8}\right)^2 h}{3}$ (escribe de nuevo la fórmula del volumen con los datos conocidos).

[3] Profesora: Y resolviendo eso entonces ¿Cómo quedaría?

[4] Karst: Pues ahorita llegamos a esa “teoría”. Digamos si V va a ser igual a πr^2... 3 pero en este caso sería por 8. Y si tomáramos el valor original que nos dan de…

[5] Profesora: O sea ¿como si estuviera lleno el tanque?

[6] Karst: Si, y lo… bueno sobre 8. Esto al cuadrado por 8, que es el valor de la altura, sobre 3, esto da 24π

[7] Profesora: ¡Ajá! ¿Y qué pasa?

[8] Karst: Pues que ahí sí, pues se podría llegar, si tomamos solo los valores de h, pero si digamos nosotros…

[9] Profesora: Ahí solamente tomo un valor de h

[10] Karen: Es que si le damos a h otro valor ya no nos daba lo que se supone que era el volumen. O sea, por lo menos lo intentamos con h igual a 4…

[11] Profesora: A ver con h igual a 4…

[12] Karen: Daba 3

[13] Karst: Daba 3 y el resultado es 12π

[14] Estudiante: Daba 3π y el volumen es 12π

[15] Profesora: A ver hagámoslo… Chicos allá en el simulador, lleven a h igual a 4 y díganme cuánto vale… si h es igual a 4 ¿Cuánto vale r? (Karst escribe en el tablero)

[16] Karen: Acá no está el…

[17] Profesora: Si h vale 4 ¿Cuánto vale r?

[18] Karst: Pero con la fórmula original da 12π, entonces…

[19] Profesora: Con la fórmula original da 12π, a ver calcule el 12π, eso que está diciendo.

[20] Karst: O sea seria, volumen igual a πr^2, 3 al cuadrado…

[21] Investigadora: ¿Por qué tres?

[22] Profesora: ¿Por qué 3^2? Si h vale 4 por que el radio vale 3.

[23] Investigadora: ¿Cuánto vale el radio en ese momento?

[24] Karen: 1.5

[25] Karst: 1.5 sobre 3. Creo que ahí está el error

[26] Estudiante: Eso era lo que no habíamos considerado

[27] Profesora: ¿Por qué estaban considerando a 3 como el radio?

[28] Karst: Es que tomamos un valor en el radio totalmente. O sea, no cambiamos el valor del radio

[29] Investigadora: Pero ¿Si están de acuerdo o no están de acuerdo?

[30] Profesora: ¿Están de acuerdo con lo que hizo acá Carolina? (encierra la formula escrita por Carolina en el tablero).

[31] Sebastián: Pues sería solucionarlo

[32] Profesora: ¿Solucionar esto (la formula encerrada)? ¿O qué? ¿Solucionar qué?

[33] Karst: Pues aquí si coincide (señala lo escrito en el tablero) entonces, o sea, con este si coincide. Pero, si yo tomara otro valor…

[34] Profesora: ¿Y hasta cuantos valores vamos a tomar para convencernos de que puede que esté bien o puede que este mal?

[35] Karst: Pues sería una prueba

[36] Investigadora: ¿Y cómo sería esa prueba?

[37] Karst: La prueba seria hacer la operación

[38] Investigadora: ¿Solo con esa?

[39] Karst: O sea, darle los valores. O sea, tomar el valor del volumen como se halló originalmente y como lo hicimos tomando en este caso la altura. Si los dos valores

coinciden pues técnicamente…

[40] Profesora: Pero, es decir, ¿cuándo usted toma… tomando el volumen originalmente como usted dice entonces usted que hace?, ¿usted le da un valor a la altura?

[41] Karst: Si, o sea, digamos que valga 4…

[42] Profesora: Digamos que valga 4. Entonces, si h vale 4 ¿Cuánto vale el radio?

[43] Karst: 1.5

[44] Profesora: ¿Por qué 1,5?

[45] Karst: Porque sería la mitad del radio, o sea, estaría como…

[46] Profesora: ¿Por qué es la mitad del radio?

[47] Karst: Sí, digamos acá (señala el dibujo en el tablero) esto se llama…

[48] Profesora: ¿Pero que encontramos nosotros ayer? ¿Cómo se relación la altura con el radio?

(Karst señala una expresión del radio con la altura en el tablero)

[49] Profesora: ¿Y esa es la mitad? ¿El radio es qué?

[50] Maira: $\frac{3}{8}$ de la altura

[51] Profesora: $\frac{3}{8}$ de la… altura. Entonces si usted le da un valor a la altura ¿Cómo calcula el radio?

[52] Karst: $\frac{3}{8}$… o sea, va a ser $\frac{3}{8}$ de la altura

[53] Profesora: Y luego multiplica por π y divide en 3. Entonces ahora. ¿Para cualquier altura? Para cualquier altura ahora, ¿usted cómo calcula el radio?

[54] Karst: Pero ya... o sea estaría así (señala la expresión del radio con la altura) sería igual a $V = \frac{\pi\left(\frac{3h}{8}\right)^2 h}{3}$

[55] Profesora: Lo que está haciendo acá…

[56] Karst: Lo que está haciendo Carolina

[57] Profesora: O sea usted necesita darle valores a *h*

[58] Karst: Pues sería como más fácil, súper seguro.

[59] Profesora: Si, ¿Qué opinan los demás? Jacob, ¿Qué opina usted?

[60] Jacob: Pues de que, bueno… si le da valores, lo mismo que siempre nos preguntan entonces ¿Cuántos valores tiene que tomar para pues convencernos de que es real? porque entre, digamos de 0 a 8 hay cualquier cantidad de números, entonces ¿Cómo vamos a saber que en todos es exacto?

[61] Profesora: ¡Ajá! O sea que… Entonces ¿usted qué opina de lo que hace Carolina, que esto funcionaria…?

[62] Jacob: Para todo, porque está tomando en general la altura.

En esta parte de la socialización, a pesar de que el día anterior se había encontrado la relación entre la altura y el radio, Karst [35], [39] y [58] aún tiene dudas dado que no establece dichas relaciones con los elementos, además vemos como para ella es necesario hacer uso de los ejemplos para comprobar su conjetura, es decir, ella continúa estableciendo demostraciones de tipo *Empírico Ingenuo Inductivo (EII).*

6.3.Taller 3. Área Máxima

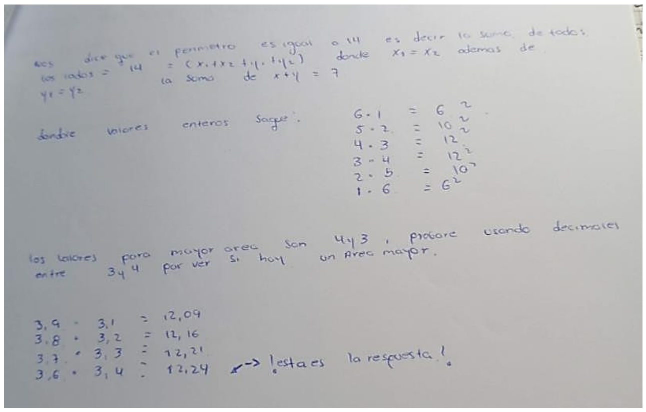
Actividad 1

1.1 El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero para que su área sea la máxima posible. Explica y justifica tu respuesta en la hoja de trabajo.

Hoja de trabajo de Jair

Como podemos observar en la hoja de trabajo de Jair (Imagen 4), el empieza a tomar diferentes ejemplos para poder hallar la solución, sin embargo, tiene en cuenta el concepto de perímetro y además entiende que los dos valores, la base y la altura deben sumar 7 metros.

Imagen 4. Hoja de trabajo de Jair

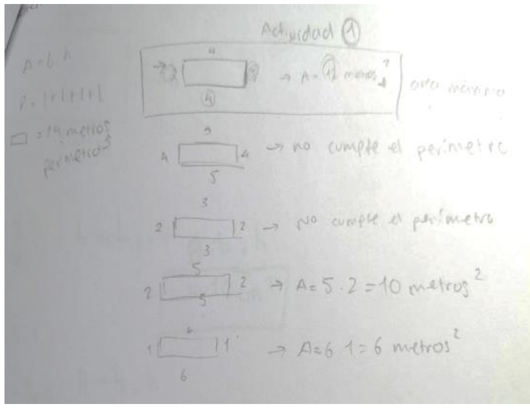


Es decir, a pesar de estar probando con algunos ejemplos empieza a encontrar algunas herramientas que le pueden servir en su demostración, por otra parte, vemos como él va cerrando el intervalo donde se encuentra el valor del lado del rectángulo que hace máxima el área del mismo. Lo que nos lleva a concluir que el tipo de demostración que está intentando realizar es un *Experimento Crucial Constructivo (ECC)*

Hoja de trabajo de Karen

En la hoja de trabajo de Karen (Ilustración 2) podemos evidenciar que ella solo está haciendo uso de los números enteros como el valor de la longitud de los lados del rectángulo, es decir, ella basa sus razonamientos en la existencia única de los números enteros y es por ello que nos lleva a pensar que el tipo de demostración que pretende realizar es un *Experimento Crucial Basado en el ejemplo (ECBE).*

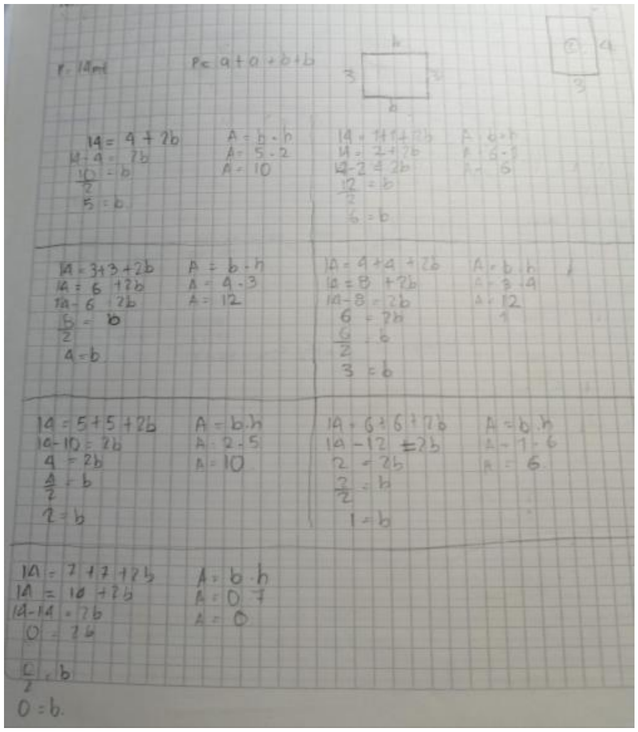
Imagen 5. Hoja de trabajo de Karen



Hoja de trabajo de Danilo

En la hoja de trabajo de Danilo (Ilustración 3) podemos evidenciar que, al igual que Karen, el hace uso exclusivo de los números enteros como el valor de la longitud de los lados del rectángulo, sin embargo, cabe resaltar que maneja parcialmente el ejercicio de forma algebraica, dado que asume un valor y a partir de ese valor despeja el otro y de esta forma relaciona la base y la altura. Lo que nos permite inferir que el tipo de demostración que pretende realizar es un *Experimento Crucial Basado en el ejemplo (ECBE).*

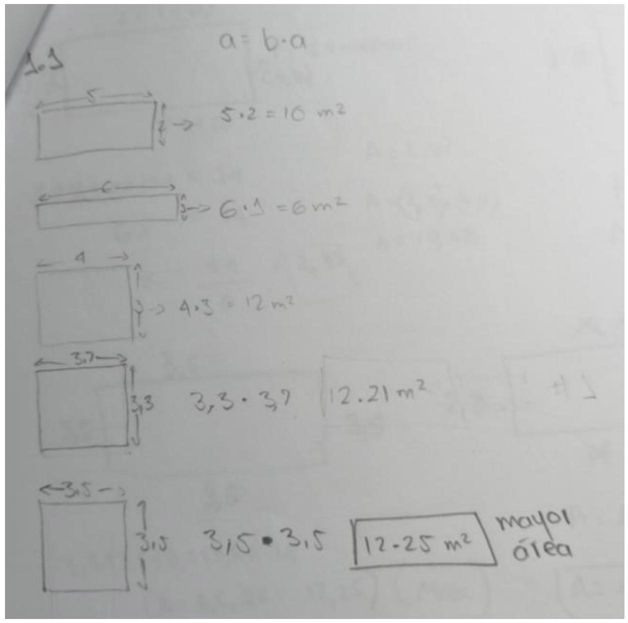
Imagen 6. Hoja de trabajo de Danilo



Hoja de trabajo de Gabriela

En la hoja de trabajo de Gabriela (Ilustración 4) podemos evidenciar que, para poder justificar sus razonamientos hace uso de ejemplos, tiene en cuenta los números decimales como valor de como el valor de la longitud de los lados del rectángulo, sin embargo, es importante resaltar que define al cuadrado como un rectángulo de lados iguales y es por ello que admite esta respuesta. Lo que nos permite inferir que el tipo de demostración que pretende realizar es un *Experimento Crucial Basado Constructivo (ECC).*

Imagen 7. Hoja de trabajo de Gabriela



Socialización 1.

Actividad 2

2.1 Abre el archivo de GeoGebra T12_Act-2.ggb y mueve el punto B.

a. ¿Qué magnitudes varían? ¿Cuáles no varían? Explica tu respuesta.

b. ¿Qué valores puede tomar la altura? ¿Por qué?

[1] Profesora: Daniel ¿Qué magnitudes varían y cuales no varían? ¿por qué?

[2] Daniel: Varían la base y la altura, el área. No varía el perímetro

[3] Profesora: ¿Por qué varía la base, la altura, el área? ¿Por qué no varía el perímetro?

[4] Daniel: No varia el perímetro porque ya nos están diciendo que el perímetro valdría 14, y la base y la altura varían porque debemos que darle valores para que el perímetro sea 14

[5] Profesora: ¿Alguien más? Karst…

[6] Karst: Variaría porque digamos que hay diferentes números que al sumarse dan 14

[7] Profesora: Entonces ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el área del rectángulo? ¿Por qué? ¿Qué valores puede tomar la base? ¿Por qué?

[8] Profesora: ¿Qué valores puede tomar la base?

[9] Juan David: Pues la base puede tomar de 7 hasta 0, puede llegar hasta el cero, pero no puede tomar ese valor.

[10] Profesora: ¿El 7 si lo puede tomar? Pero el cero no. Si la base vale 7 ¿Cuánto vale la altura?

[11] Juan David: 0, ah… pero 7 tampoco.

[12] Profesora: ¿Por qué no los puede tomar?

[13] Juan David: Porque daría 0

[14] Profesora: ¿Y no puede dar 0?

[15] Juan David: No, porque sería una recta… serian dos líneas ahí. No tendría gracia

[16] Profesora: O sea, que ¿no puede haber un rectángulo de área cero?

[17] Juan Sebastián: Yo creo que sí, pero depende de cómo uno vea el 0

[18] Jacob: 0 es un número

[19] Profesora: El 0 es un número si

[20] Nicolás: … uno entiende el valor 0.

[21] Profesora: Pues de altura 0, de longitud 0

[22] Nicolás: Pero entonces uno puede decir, no si existe, simplemente que es 0 y ya. Depende de cómo uno lo vea.

[23] Profesora: ¿Quiénes consideran que si toma el 0 y el 7? (Varios estudiantes levantan la mano)

[24] Profesora: Bueno y ¿Por qué ustedes si consideran que toma el 0 y el 7? Gabriela ¿Por

qué usted si considera que toma el cero y el siete?

[25] Mayra: Por el número que uno ubica de la cinta. Porque la base y la altura… o sea que la suma de los dos tiene que dar siete, siete más cero da siete

[26] Profesora: Ah que la suma de los dos lados tiene que dar siete

[27] Mayra: Si, la suma de la base y de la altura.

Los estudiantes logran reconocer las magnitudes que varían y las que son constantes, sin embargo, en algunos casos les cuesta reconocer la existencia del rectángulo de área 0 (Juan David [9] y [11]). Además, logran reconocer el dominio de la función área y de paso establecer la relación de forma implícita entre la base y la altura del rectángulo del problema. En cierto modo, podemos decir que, ellos logran establecer de una forma elemental una conjetura acerca de que la base más la altura debe ser 7 (Mayra [25]).

Socialización 2

c. ¿Qué valores puede tomar el área? ¿Por qué?

[1] Profesora: No consideran un rectángulo de área cero. Entonces ¿entre cuánto y cuanto varían Sebastián?

[2] Sebastián: Entre 0 y 7 deberían tomar. O sea, pero yo quiero aclarar que gráficamente como por ejemplo en el programa si, o sea, el sí lo representa como un rectángulo cuando es cero, pero en la vida real, o sea, acá físico no se puede, no daría un rectángulo.

[3] Profesora: Okey, esa es, esa es la consideración de él, listo. ¿Para los demás?... Miguel, ¿Usted qué opina? ¿Usted si considera un rectángulo de área cero?

[4] Miguel: Es que sí, según lo que estábamos hablando acá, y lo que dijo Karen, pues…

[5] Profesora: En ese mismo sentido, ¿Qué valores puede tomar el área? Danilo… ¿Qué valores puede tomar el área?

[6] Danilo: Si es 0, base 0 y altura 7, entonces seria entre 0 y 12,25.

[7] Profesora: ¿Tomándolo o sin tomarlo?

[8] Danilo: Sin tomarlo… no, tomándolo.

[9] Profesora: ¿Y por qué? ¿Por qué entre cero y 12,25?

[10] Danilo: Porque cuando… pues al tomar la base cero y la altura máxima 7, entonces el área valdría…

[11] Profesora: ¿Cuánto valdría el área?

[12] Danilo: Cero

[13] Jacob: $0 = 7 \times 0$.

[14] Danilo: Ah no, eso pasa es cuando esta los dos…. Tomando 3,5

[15] Profesora: O sea que ¿El área varía entre cero y 12,25? ¿Por qué hasta 12,25? ¿No encontró uno mayor?

[16] Jacob: Yo no encontré uno mayor por que hice… lo que le había dicho… bueno multipliqué 3,5 por 3,5 y lo máximo era 12,25. Y pues, esto… miré un número que fuera mayor a 3,5, entonces 3,501 y el otro 3,499 y me daba 12,24999 y venía siendo un número periódico…

[17] Profesora: ¿Y si hubiera tomado 3,50001…?

[18] Jacob: Pues me seguía repitiendo el número nueve…

[19] Karst: Seguiría siendo periódico.

[20] Jacob: …periódicamente, sin llegar a 12,25.

[21] Carolina: Va a tender a 12,25 de todos modos, pero no va a llegar a tocarlo. La única forma de que de 12,25 es que este en 3,5

Sebastián [2] basa sus razonamientos en lo que ha observado del programa, y es por ello que acepta la existencia del rectángulo del área 0 dentro de la actividad matemática, mas no, en el mundo tangible. Además, Jacob [16] encuentra el valor del lado del rectángulo, sin embargo, lo que hace es probar con ciertos números y operar sin ningún criterio, pero tomando en cuenta la posibilidad de encontrar la respuesta dentro de los números decimales, por lo tanto, el encuentra que el rectángulo cuyo perímetro es 14 y es de mayor área cuando los lados son iguales a 3.5, lo que nos permite concluir que la demostración que realiza es de tipo *Empírico Ingenuo Inductivo (EII).*

Socialización 3

d. ¿Qué relación hay entre la base y la altura? ¿Por qué?

[1] Profesora: ¿Y si es 3,5? Okey… vamos a dejarlo hasta ahí. Ahora, Jair, ¿Qué relación hay ente la base y la altura?

[2] Jair: La suma de las dos es igual a la mitad del perímetro.

[3] Profesora: ¿La suma de qué? Sea más específico. ¿Cuál es la relación entre la altura y la base?

[4] Jair: … y mientras una aumenta la otra disminuye.

[5] Profesora: ¡Ajá! ¿Y por qué la suma de las dos tiene que ser la mitad del perímetro?

[6] Jair: Porque sería $a + a + b + b = 2a + 2b = P$

[7] Profesora: ¿Cómo?

[8] Karen: Dos veces la altura y dos veces la base.

[9] Profesora: ¡Ajá!... ¿Luego?

[10] Karst: Luego dividirá el perímetro en dos

[11] Profesora: ¿Cómo?

[12] Karst: O sea, después de hacer la suma dividirá, o sea, va a quedar $2a + 2b$, y eso lo hicimos algebraicamente y quedaba $2(a + b)$. Luego, pasaba el 2 a dividir a P, y técnicamente se cumple que la suma de las dos va a dar la mitad de P.

[13] Profesora: La suma de las dos va a dar la mitad de P.

Jair [2], Karen [8] y Karst [12] logran establecer de manera algebraica la relación entre la base y la altura del rectángulo cuyo perímetro es 14, dado que inician su abordaje de manera intuitiva, y a través de ese abordaje logran establecerlo de forma general, se puede deducir que la demostración que logran realizar es un *Ejemplo Genérico Analítico (EGA)*.

[11] Investigadora: ¿Y no hay otra relación?

[12] Karst: Pues sí, que a medida que la una aumenta, la otra disminuye. Y que cuando se igualan…

[13] Profesora: Acá están diciendo que es inversamente proporcional, ¿Sera que es inversamente proporcional?

[14] Jacob: Si es inversamente proporcional

[15] Profesora: ¿Por qué?

[16] Jacob: Porque a medida que aumentaba la base así sea 0,1 se lo disminuía a la altura en 0,1. Entonces pues yo miré como que su máxima base era 7, entonces empecé a dar un número a la altura, entonces 7 menos la altura, me daba el número que había dado.

[17] Profesora: ¿Qué opinan?

[18] Jacob: Porque es inversamente proporcional

[19] Profesora: ¿Qué significa que dos magnitudes son inversamente proporcionales?

[20] Jacob: Que lo que mientras una aumenta algo, la otra le está disminuyendo lo mismo.

[21] Profesora: Por ejemplo, a ver… ustedes que tienen allá el archivo…

[22] Karst: ¿No podría ser que digamos la altura seria la diferencia entre el perímetro, la mitad del perímetro y la base…? O sea, que fuera digamos la altura sería igual a la diferencia entre la mitad del perímetro menos la base.

[23] Profesora: Lo que ella está diciendo acá es esto… que la altura es igual a la mitad del perímetro menos la base

[24] Karst: Y lo mismo para el caso de la base, sería la mitad del perímetro menos la altura.

[25] Profesora: ¡Ajá! Entonces para la base sería, la mitad del perímetro menos la altura. Pero entonces lo que está diciendo ahí, lo que dice Nicolás y Jacob que son inversamente proporcionales. Por ejemplo, no sé, tenemos acá la altura y tenemos acá la base. ¿Qué significa que dos magnitudes sean inversamente proporcionales?

[26] Nicolás: Que mientras la una aumenta, la otra disminuye.

[27] Miguel: Aumente o disminuye exactamente lo mismo.

Aquí se refleja la ausencia de buenos conceptos matemáticos, Karst [12], Jacob [16] y [20] y Nicolás [26], platean que la altura y la base del rectángulo son inversamente proporcionales simplemente porque mientras la altura aumenta, la base disminuye, describiendo de forma errónea, lo que implica la proporcionalidad inversa y sin tener en cuenta lo que implica la proporcionalidad en sí.

[28] Eliseo: Tiene que haber la constante de proporcionalidad.

[29] Profesora: Tiene que haber la constante de… proporcionalidad. O sea, que a medida que la altura aumenta, la base disminuye, pero de manera constante… pero cuando ustedes dicen constante ¿Cómo así constante?

[30] Jacob: Pero, puede ser el mismo, el mayor perímetro, ya sea la altura o la base,

descontárselo al otro.

[31] Profesora: ¿Cómo así?

[32] Jacob: O sea, por ejemplo, démosle algún valor a la altura.

[33] Karst: Seria 6

[34] Profesora: Empecemos con uno bajito para ir aumentando, entonces 1 ¿Acá cuanto tendría que valer la base?

[35] Jacob y Karst: 6

[36] Profesora: Ahora, 2, según la constante ¿Cuánto tendría que valer ahí la base Sebastián? Bueno dejémoslo acá, con 2 ¿Cuánto?

[37] Jacob: 5

[38] Profesora: Con 3

[39] Estudiantes: 4

[40] Karst: No, sería, sí, pero sería… pero no nos vamos a quedar haciéndolo con todos los números.

[41] Jacob: Por eso, o sea, sería el perímetro…

[42] Profesora: Con 2 ¿Cuánto?... perdón, ¿con 4 cuánto?

[43] Varios: 3

[44] Profesora: 5

[45] Varios: 2

[46] Profesora: 6

[47] Varios: 1

[48] Profesora: Acá está aumentando la altura y está disminuyendo la base, pero ¿de manera proporcional?... ¿Cómo uno saca la constante de proporcionalidad Sebastián?

[49] Sebastián: Yo confundo las dos, o sea, la manera de sacarla. No me acuerdo si es la constante sobre x. No, es que hay dos formas de relacionar una constante y dos variables, una es la proporcionar y otra es la inversamente proporcional, pero no me acuerdo bien como, cual era cual. Pero si no me equivoco una es $y.\ x$ o $y.\ x$ tiene que dar la constante, creo que aquí es proporcional; y la otra sería $\frac{y}{x}$ tiene que dar la constante…

[50] Karst: ¿No es esto $y.x$ y la otra $\frac{1}{x}$?

[51] Karen: ¿Y en donde queda y?

[52] Karst: O sea $y = \frac{1}{x}$ y la otra sería

[53] Karen: 1 = $y.\ x$

[54] Karst: No, y sería igual a 1, es que no recuerdo…

[55] Profesora: Bueno, pero ¿Esta clara acá la relación que hay entre la base y la altura?

[56] Karst: Si, sería la diferencia

Sebastián hace uso de la memoria, sin embargo, tiene algunos aciertos, en este caso recordó que, para que las relaciones de dos variables sean proporcionales debe haber una constante de proporcionalidad, sin embargo, Eliseo se preocupó más por buscar la relación en ese momento, es decir, hizo una búsqueda rápida y por ello pudo sustentar que la relación entre la base y la altura no es proporcional inversa.

[57] Profesora: ¿Qué está variando acá?

[58] Karen: Los lados

[59] Profesora: Si y ¿Qué pasa con el perímetro? En nuestro caso ¿Cuánto valía el perímetro?

[60] Estudiantes: 14

[61] Profesora: Entonces ¿Qué tenemos?

[62] Karst: $\frac{14}{2} - b$… $7 - b = a$.

[63] Profesora: Jacob exprese el área en función de la base. Ahí ya está la altura en función de la base. Ahora ¿Cuál sería el área en función de la base?

[64] Karst: Utiliza la del área, o sea, el área sería igual a $(7 - b)b$

[65] Profesora: ¿Por qué?

[66] Karst y Karen: Porque ya tenemos a…

[67] Jacob: Es que solo es reemplazar el b acá.

[68] Profesora: ¿Por qué ahí?

[69] Karst: O sea, agarramos fue digamos a, y usamos la fórmula del área.

[70] Profesora: ¿Cuál es la fórmula del área?

[71] Karst: $a.\ b$, y entonces sería igual a…

[72] Karen: Ahora usted ya tiene a, porque esa a de allá

[73] Jacob: Si (escribe la formula en el tablero $(7 - b)b$)

[74] Profesora: ¿Qué está multiplicando la b?

[75] Estudiantes: Paréntesis (Jacob pone paréntesis en la ecuación)

[76] Karst: Entonces quedaría 7 por… $7b - b^2$. Como la teníamos

[77] Profesora: Entonces ahí ¿Cuál es la variable dependiente?

[78] Juan David: La base

[79] Karen: El área

[80] Profesora: ¿Y la independiente?

[81] Juan David: La base

[82] Profesora: O sea, el área depende de… entonces notación chicos (escribe en el tablero

$A(b)$) el área depende de la base.

[83] Karst: Entonces si nos había quedado bien

[84] Profesora: Entonces ¿Qué significa esto Mayra? ¿Qué es esto? Esta expresión acá ¿Qué me está calculando?

[85] Mayra: La altura en función de la base.

[86] Profesora: ¿La altura en función de la base?

[87] Mayra: El área.

[88] Profesora: El área en función de la base. La interdependencia entre ¿Quién?

[89] Jacob: Donde este la base, ese va a ser el área y donde este el área eso va a ser… O como sea el área, eso va a ser la base

Los estudiantes logran reconocer que la variable independiente es la base, y la dependiente es el área, dada la relación que se había planteado en el punto anterior, además queda claro que la relación entre la altura y la base es una diferencia, y que el hecho de que el área dependa de la base es porque se puede expresar el área en términos de la base.

Socialización 4

e. ¿Cuáles son las dimensiones de la base y la altura del rectángulo de mayor área? ¿Por qué?

[1] Profesora: Luisa, ¿Cuáles son las dimensiones de la base y la altura del rectángulo de mayor área?

[2] Luisa: Es que yo alcance a hacer hasta la h, pero de acuerdo a lo que se había dicho antes, yo había pensado que era 3.5

[3] Profesora: ¿Por qué? Quiero otra justificación además de la que están viendo ahí en GeoGebra.

[4] Jacob: Pues como lo habíamos dicho ahorita si le dábamos un numero mas a 3.5…

[5] Profesora: Pero que tal que yo encuentre uno donde no, o sea quiero que me garantice que…

[6] Jacob: Pero ahí el 9 no sigue periódicamente…

[7] Profesora: Pero que tal que pase algo más adelante

[8] Karst: Es que no sé qué pasa en GeoGebra que digamos, no sé si lo aproxima y digamos llegaba a un valor muy cercano al 3.5 y los valores de atrás, digamos en un intervalo era pequeño, 0 sea de 3.5 a 3.45 tomaba los valores y los aproximaba a 25 y lo mismo pasaba con el otro.

[9] Duván: Pero ¿no sería por que el perímetro es 14 y no cambia? O sea, podía aumentar todo lo demás, pero llega hasta ahí el 14 y por eso no pasa de…

[10] Profesora: No, pero yo puedo encontrar 3.6 y aun así encontrar el otro lado para que sume 14. ¿Cómo? Con este que ya tienen acá. Entonces yo puedo escoger un lado 3.6 ¿Cómo encuentro el otro? $7 - 3.6$ ¿Sí? ¿Qué otra justificación? Daniel. ¿Todos están de acuerdo que la dimensión es 3.5?

[11] Jacob: ¿Y si el perímetro es la suma de todas las dimensiones, entonces el número máximo…?

[12] Profesora: ¿Cuáles dimensiones? ¿Cuántas dimensiones tiene ese rectángulo?

[13] Jacob: Bueno, de todos los lados. Entonces, se supone que su lado al dividir el perímetro por sus cuatro lados me tiene que dar su número máximo que deba tener ese lado.

[14] Profesora: ¿Por qué?

[15] Jacob: Porque al sumarlo me tiene que dar…

[16] Profesora: Pero otra vez, yo puedo encontrar dos lados diferentes, que no sean iguales,

que aun así me siguen sumando 14.

[17] Karst: Se escogería por el orden, dependiendo del mayor…

[18] Profesora: A ver, pero chicos miren, ustedes encontraron la interdependencia entre la altura y la base, encontraron la interdependencia entre al área y la base, ¿Cómo hacer uso de eso para ahora encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima? ¿Cómo? Porque usted estaba buscando eso ¿no, Karen? Usted estaba buscando algo así, mire, usted misma lo dijo, ya tengo al área que depende de a y b, ya tengo al perímetro que depende de a y b, ahora ¿Cómo relaciono esas dos? Acá esta, y ahora ¿Qué voy a hacer con esto? ¿Qué es esto? Jair ¿Qué es esto?

[19] Jair: Una función

[20] Profesora: ¿Una función? Sí, sí es una función ¿no?

[21] Karst: ¿No se puede hallar en función de la altura?

[22] Estudiante: Si, usted lo puede hallar tanto en función de la base como en función de la altura

…

[23] Profesora: Bueno, pero ¿Están de acuerdo que es una función?

[24] Estudiantes: Si

[25] Profesora: ¿Por qué? Sebastián ¿Cómo usted me garantiza que esto es una función?

[26] Karen: Porque la variable independiente tiene una única imagen en la variable dependiente

[27] Profesora: ¿Y cómo demuestra usted eso?

[28] Karst: En el plano, pues agarro, digamos le doy 3.5…

[29] Profesora: A ver hágalo. A ver colabórenle a Karst a hacer eso en el plano.

[30] Karst: Pues sería… pues primero hallo este (señala la ecuación del tablero), que sería $A(b) = 7b - b^2$. Y digamos que a esto le doy el valor de 3.5

[31] Profesora: Entonces escriba, $A(3.5)$ … ¿Cuándo da cuando vale 3.5?

[32] Karst: Va a dar 12.25… (escribe la operación en el tablero)

[33] Profesora: ¿Cuánto da eso?... mientras vamos hallando unas más fáciles, a ver la de 0. ¿Cuánto es $A(0)$?

[34] Karst: $A(0)$ sería igual a…0

[35] Profesora: ¿Cuánto es $A(7)$? ¿Qué significa que b sea 7? (Karst realiza la operación en el tablero)

[36] Karst: También va a dar 0

[37] Profesora: Ah bueno 0, vaya ubicándolos ahí, entonces…

[38] Karst: (ubicando los puntos en el plano) Cuando vale 7 acá, esto va a ser… $A(7)$?. Y acá creo que…

[39] Profesora: ¿Y $A(0) = 0$? Karst ¿Usted que está ubicando en el eje horizontal? ¿Qué se ubica en el eje horizontal?

[40] Karst: Es que me confundo… ¿La base?

[41] Profesora: La base… Acá se está ubicando b ¿Y que se ubica en el eje vertical?

[42] Estudiantes: $A(b)$

[43] Profesora: $A(b)$… o sea ¿qué?… el área. ¿Cuál es la variable independiente? ¿b o A?

[44] Profesora: ¿Quién depende de quién?

[45] Estudiante: A depende de b

[46] Profesora: A depende de b, entonces ¿Cuál es la variable independiente?

[47] Estudiante: b

[48] Profesora:¿Alguien sabe esa grafica que es? ¿ $7b - b^2$.?

[49] Investigadora: Karen ¿Es que?

[50] Karen: Una función cuadrática

[51] Investigadora: Una función cuadrática, pero usted dijo otra cosa

[52] Estudiante: Una parábola (Karst realiza el bosquejo de la función cuadrática en el tablero)

[53] Profesora: Bueno, pero ¿Por qué la máxima? A mí no me convence todavía que sea la máxima, entonces yo voy hacerlo algo así (realiza otro bosquejo) …. Ustedes me tienen que convencer que es la máxima, no sé, voy a decir que acá es 3.5

[54] Jacob: Sacamos la mitad…de su máxima base

[55] Profesora: ¿Por qué?

[56] Jacob: Porque, es que eso ya lo habíamos hecho, pero no recuerdo, o sea, no sé cómo explicárselo. La mitad y donde daba el, esto que, el… la parte más alta de la parábola, … el vértice.

[57] Profesora: Si, y usted está diciendo una manera de encontrar ese vértice ¿Cómo?

[58] Jacob: Pues el punto medio de 0 a 7, 3.5

[59] Profesora: Y hay otra manera ¿Cuál? ¿Cuál es Sebastián? Sebastián nos la ha dicho como 3 veces

[60] Sebastián: $\frac{-b}{2a}$

[61] Profesora: $\frac{-b}{2a}$

Jacob [4] manifiesta que los procedimientos para justificar que el rectángulo de área máxima se encuentra cuando cada uno de sus lados es 3.5 fue de manera inductiva, además justifica que al tener el rectángulo 4 lados lo que puede hacer es dividir el perímetro entre 4 y así hallar el lado del rectángulo de mayor área, es decir, carece de criterios a la hora de justificar su proceso, por lo que su demostración es de tipo *Empírico Ingenuo Inductivo (EII).*

Además, Karst en el desarrollo propone realizar operaciones que carecen de justificación matemática, sin embargo, también propone [28] la demostración por medio de un gráfico, sin embargo, cuando intenta realizar la misma, se da cuenta de las falencias que tiene, dado que no comprende dentro del plano la ubicación de las variables dependientes e independientes.

Por otra parte, Karen [50] y Sebastián comprenden que la función $A(b) = 7b - b^2$ es cuadrática y, por lo tanto, posee propiedades tales como el vértice, que es una herramienta que puede ayudar a determinar el valor del rectángulo cuyo perímetro es 14 y cuya área es máxima. Cabe resaltar que, Sebastián tiene claridad de esta característica de la función cuadrática y es por ello que él es quien establece esta relación, por lo tanto, podemos decir que Sebastián logra demostrar que el rectángulo de mayor área y cuyo perímetro es 14, es el cuadrado de lado 3.5 y esta demostración es de tipo *Ejemplo Genérico Intelectual (EGI).*

6.4.Taller 4. Caja sin tapa

1. A partir de una hoja rectangular de tamaño 6 dm por 4 dm, construye una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas, de tal manera que almacene el mayor volumen. ¿Cuáles son las dimensiones de la atura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué? Explica tu procedimiento y tu respuesta.

Comunicando y compartiendo resultados

2. Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

En esta actividad los estudiantes se distribuyeron en 5 grupos, donde tenían la libertad de abordar el problema como quisieran, sin embargo, se obtuvieron los siguientes resultados, de 5 grupos que se organizaron 4 probaron midiendo la caja con regla y realizando operaciones.

Grupo 1. ¿Cuáles son las dimensiones de la atura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué?

[1] Profesora: ¿Cuáles fueron las dimensiones de la caja de mayor volumen?

[2] Karen: a es el valor que ya nos dieron al principio… nosotros lo manejamos con centímetros

[3] Danilo: Lo que ella quiere decir ahí es que estamos manejando el volumen con todos los valores de la caja, entonces ahí ya no va a ser $a = 60$ y el $b = 40$, entonces el 60 ya no va a ser 60 cuando armemos la caja, sino $60 - 2x$ que es lo que se le va a quitar, que son las dos partes que se van a recortar, y el 40 es $40 - 2x$ que se van a recortar las dos partes y x es la altura, ¿Por qué? Porque cuando se vaya a doblar va a quedar, va a quedar este lado y este lado, entonces al doblarse forman x y por eso es la x

[4] Karen: O sea la x también igual que ¿Quiénes fueron los que lo intentaron sacar, el primer grupo?... intentamos sacar una x, buscar la manera de que la x no fuera un valor al azar, sino un número exacto, también lo intentamos, pero no lo logramos…

[5] Profesora: ¿Cómo lo intentaron?

[6] Karen: Pues yo intente ponerla como en función de x, pero no lo logre

[7] Profesora: ¿Poner en función de x qué?

[8] Karen: El volumen

[9] Profesora: ¿Y ahí como esta expresado como esta, en función de quién?

[10] Karen: Ah no pues sí, estoy confundiendo x

[11] Profesora: Ahí el volumen esta expresado en función de x, pero ¿para qué le sirve eso? ¿Cómo con eso hallaron la altura que les dio cuanto al final? ¿con cuál se quedaron?

[12] Karen: Con 7.8

[13] Profesora: O sea para ustedes con x igual 7.8 les da el volumen máximo

[14] Danilo: Dándole valores

[15] Karen: Yo lo intenté porque quería llegar a un punto exacto, quería despejarlo, primero lo quería organizar, pero ni siquiera llegué a eso, entonces simplemente le dimos valores a x … probamos con varios, bueno probó con varios, y el llego a 7.8 como la altura adecuada para legar al volumen máximo

[16] Profesora: ¿Y cuánto le dio con 7.8?

[17] Karen: Dio $8450\ cm^3$

[18] Profesora: Parece que con x igual a 7.8, por el momento es el volumen máximo, si claro si ustedes hubieran tenido más tiempo de seguir probando, de pronto se hubieran aproximado

[19] Danilo: Yo tomé por lógica de que no se podía tomar un valor mayor a 20, 15 o así, si porque si usted va tomar un valor más grande entonces va a quedar sin un lado en la caja, entonces por eso no me pasé de 10 o de 15 porque cuando me pasé de 15 el área era muy pequeña

[20] Investigadora: ¿El área?

[21] Danilo: iba bajando hasta que me encontré con el 8, y me fui ahora subiendo hasta el

8, entonces el área estaba entre 7 y 8

[22] Profesora: Lo que dice Danilo es cierto, es decir, ¿hasta dónde podría yo considerar entonces el valor de x, para poder formar la caja? ¿Hasta dónde?

[23] Karen: Antes de 20, no puede coger 20

[24] Danilo: No 15, ni 15 puede coger

[25] Karst: Hasta 10

[26] Profesora: ¿Hasta 10?... pero él dice que 15 si puede coger Daniel, que, si coge 15, bueno si coge 15 ¿Cuánto valdría esto acá?

[27] Danilo: 30

[28] Profesora: ¿30?... ¿Cuánto valdría esto?... ¿5 o 10?

[29] Karen: 10

[30] Profesora: ¿Y esto? 15… ¿Hasta dónde?

[31] Eliseo: 20 no puede, 20 no puede coger porque no da la altura, entonces no da el volumen

[32] Profesora: ¿0 a 20?

[33] Eliseo: Hasta 19,9

[34] Profesora: ¿O 19,999…?... O sea ¿Hasta cuándo?

[35] Karen: De 0 a 20 sin incluirlo

[36] Profesora: ¿Por qué sin incluirlo?

[37] Karen: Porque ya cuando es 20 no va a ser caja

[38] Profesora: Pues es una caja de volumen 0... ¿no?

Vemos como Danilo [3] logra expresar el volumen de la caja en función de la altura, y determinar que tanto al ancho como la profundidad dependen de la altura, sin embargo, a pesar de que en el grupo realizan pasos generalizados, también hacen uso de ejemplos [14] para poder hallar las dimensiones de la caja cuyo volumen es el máximo, en este caso vemos la demostración como un *Ejemplo Crucial Constructivo (ECC)* dado que Danilo [21] se da cuenta de ciertas características del volumen cuando la altura de la caja está en el intervalo (7, 8) realizando construcciones sobre el ejemplo clave.

Cabe resaltar que Danilo [19], Eliseo [33] y Karen [35] expresan casi que de forma acertada el valor del dominio de la función, ya que descartan el volumen cero, propiedad que reconocen trabajando sobre el ejemplo.

Grupo 2. ¿Cuáles son las dimensiones de la atura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué?

[1] Profesora: Pero bueno ¿al final como llegaron a esa respuesta?

[2] Luisa: Nosotros teníamos 7.4 y entonces Jacob le entro la cosa y lo probamos con otro, y entonces lo probamos con 7.5, 7.6 y empezó a aumentar, entonces luego si llegamos a 7.8 y ahí se estancó… cuando pasamos a hacerlo a 7.9, disminuyó entonces era 7.8

[3] Investigadora: Ahora otra pregunta, ¿Qué pasa si no es 7.8 sino es 7.85? ¿7.82? ¿Lo probaron?

[4] Jacob: Es que eso era lo que queríamos hacer para no hacer tantos valores, queríamos relaciones el volumen con la suma del área de la…

[5] Jacob: $2 \times lado \times ancho + 2 \times lado \times altura + ancho \times altura.$

[6] Profesora: ¿Y querían relacionar qué? ¿Esa área con qué?

[7] Jacob: Con el volumen

[8] Profesora: ¿Por qué?

[9] Jacob: Para mirar como que de que dependían esto digamos de que área más grande o más pequeña se hacía depende del volumen si aumentaba o disminuía

[10] Profesora: Pero ¿Cómo se relaciona el área con el volumen?

[11] Jacob: Es que no sé porque en cierto momento donde el área aumentaba el volumen se hacía grande, pero en cierto momento lo que hacía era disminuir, en 7.6 disminuía, en 7.9 también seguía disminuyendo entonces era como un punto medio. También queríamos intentarlo en el plano cartesiano si hallábamos la función del volumen de la caja y pues en el plano cartesiano hallar el punto medio y mirar, multiplicar en el punto medio donde daba...

[12] Profesora: ¿Por qué el punto medio? ¿Usted cree que…?

[13] Jacob: Pues depende de la función, porque si era una función cuadrática lo hacíamos en el punto medio, depende la función que fuera, si era una función diferente pues buscábamos la mitad de esa función

Los estudiantes del grupo 2 logran aproximarse a la solución del problema a través del uso de varios ejemplos, es decir, su demostración es de tipo *Empírico Ingenuo Inductivo (EII)*.

Además, trabajando con los valores recuerdan que en el taller anterior se trabajó con la función cuadrática, y una propiedad de ella es que el punto máximo o mínimo es el vértice, por lo que, los estudiantes recordaron esa propiedad y pretendían llevar la función volumen a ser representada como una función cuadrática, sin embargo, no consiguieron establecer ninguna relación.

¿Qué valores puede tomar la altura? ¿Por qué?

[14] Jacob: ¿Qué valores pueden tomar la altura? Entonces pues la altura puede tomar el valor 0, siendo esto una caja de altura 0, porque es su máxima, bueno cuando le doy a la anchura si máxima anchura y su profundidad su máxima profundidad no voy a tener nada de altura y consigo una caja de altura 0.

[15] Investigadora: ¿Y cuál es la máxima altura, la máxima profundidad y la máxima anchura?

[16] Jacob: Espere, y la máxima altura es… la máxima altura es dos ¿Por qué? Porque llegamos a la altura por medio de su anchura y la anchura es 4, con su máxima anchura lo dividimos a la mitad, viene siendo 2, entonces se supone que eso es lo máximo para hallar una caja, no le puedo dar un valor de 3 y 1 porque no da una caja.

[17] Investigadora: ¿Por qué lo dividimos en 2?

[18] Jacob: Porque sí, porque es como… es para que nos quede igual la forma de la caja

[19] Investigadora: ¿Cómo así igual?

[20] Jacob: Nos queden los dos lados iguales

[21] Investigadora: ¿Y por qué deben quedar los dos lados iguales?

[22] Jacob: Porque se supone que la caja debe tener sus lados iguales

[23] Investigadora: ¿Cuáles lados? ¿la base y la profundidad?

[24] Jacob: La profundidad y su… bueno, pero llegue a la cuestión de que si la anchura máxima es 4

[25] Investigadora: ¿Por qué la anchura? ¿Por qué la anchura máxima es 4?

[26] Jacob: Pues porque ya nos dieron que 4 dm era la máxima anchura

[27] Investigadora: Es lo que mide, pero no es la máxima anchura ¿no?

[28] Jacob: De esta caja si

[29] Investigadora: ¿Es la máxima? Muestre. Pero eso es una hoja

[30] Jacob: Ah okey, bueno. Entonces es 3,99

[31] Investigadora: ¿Por qué?

[32] Karen: Porque al tomar valores menos a 2 no va a ser una caja, la ocuparía. Tendría que tener valores entre estos dos porque si ocupa valores mayores a 4 ya no seria, ya no tendría anchura, eso ya no tendría altura porque se comería los valores de la anchura se comería los valores de la altura que ya lo había dicho, cuando armemos la caja. Si probamos con valores más grandes que, digamos, que 6 pues este lado ya no va a existir. Digamos que este sea 6, y si le quitamos 6 a 6 entonces daría 0, entonces no existiría ese lado.

Jacob [16] establece una relación que a pesar de que es visual es válida para determinar los valores que puede tomar la altura, ya que el manifiesta que se pueden los valores del ancho y dividir en 2 y esa va a ser la máxima altura que se pueda tomar, y esto corresponde a las esquinas cuadradas de la caja que se deben quitar.

Grupo 3. ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el volumen de la caja? ¿Por qué?

[1] Profesora: Daniel ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el volumen de la caja? ¿Y por qué?

[2] Daniel: El volumen de la caja depende de la altura, ya que la altura también afecta directamente a su ancho y profundidad

[3] Profesora: Danilo, ¿Usted qué opina?

[4] Danilo: Yo creo que depende de los tres, de la altura, de la profundidad y de la anchura.

[5] Profesora: ¿Por qué?

[6] Danilo: Porque si no existe uno de ellos, o sea da cero, el volumen va a ser cero.

[7] Profesora: ¿Por qué si no existe uno de ellos entonces el…?

[8] Danilo: Por ejemplo, si, digamos una altura 0, entonces va a ser 0 el volumen

[9] Profesora: Luisa ¿Qué opina de lo que está diciendo Danilo?

[10] Luisa: Yo pienso lo mismo de Daniel, que depende de la altura, porque ayer que estábamos haciendo lo de la caja, que le estábamos quitando, entonces, cuando usted le quitaba los cuatro lados del mismo, eso era la altura; y dependiendo de la altura, le daba el mayor volumen. Entonces opino lo mismo que él.

[11] Daniel: Es que yo pienso que, sin la altura, no sería una caja, sería más bien un cuadrado en dos dimensiones

[12] Profesora: Usted me está diciendo que el volumen solamente depende de la altura…

[13] Daniel: No, digamos el volumen depende también de la anchura y de la altura, de la altura no, de la anchura y de la profundidad, pero sin la altura no tendría volumen

[14] Profesora: O sea ¿Qué pasa cuando varia la altura?

[15] Daniel: Cuando varia la altura, dependiendo de si hay altura o no. Para mí sería una caja, si no hay altura

[16] Profesora: Pero ¿Cuáles son las magnitudes que están variando? ¿la altura está variando?

[17] Daniel: Si

[18] Profesora: ¿Pero la profundidad y la anchura no? (varios estudiantes responden que sí) Entonces ¿Cuáles son las magnitudes que están variando?

[19] Estudiantes: Las tres.

[20] Profesora: Usted mismo lo dijo al principio, si usted varia la altura, a su vez… ¿Qué va variando?

[21] Daniel: La anchura y la profundidad

Daniel [2] y Luisa [10] manifiestan que únicamente está variando la altura, dado que él sabe que tanto el ancho como la profundidad están variando dada la dependencia de estas magnitudes con la altura, sin embargo, esto no quiere decir que no varíen, por el contrario, puedo relacionar la altura con el ancho y la profundidad y dejar el volumen en términos de la altura.

¿Qué valores puede tomar la altura? ¿Por qué?

[1] Profesora: ¿Y qué valores puede tomar la altura, Daniel?

[2] Daniel: Mayores que 0 y menores o iguales a 2

[3] Profesora: ¿Mayores que cero, o sea, sin tomar el cero? Pero menores o iguales que 2, o sea puede ser 2

[4] Daniel: Si

[5] Profesora: ¿Por qué?

[6] Daniel: Porque pienso que, pues que esa sería su máxima

[7] Profesora: Bueno usted está diciendo que si la altura es 0 no puede haber una caja, pero ¿Qué pasa cuando la altura llega exactamente a dos? ¿Si puede haber una caja?

[8] Daniel: No, porque entonces el volumen también sería igual a cuando su altura es cero.

[9] Profesora: ¿Qué pasa con las otras variables cuando la altura llega exactamente a 2?

[10] Estudiante: Cuando la altura es 2, la anchura es 0

[11] Profesora: La anchura daría 0, entonces ¿Cuánto sería el volumen?

[12] Daniel: 0, entonces sería que, mayor que cero y menor que dos

[13] Investigadora: ¿Y por qué de 0 a 2?

[14] Daniel: Yo creo que de 0 a 2 porque entonces así tendríamos un volumen, entonces pues…

[15] Profesora: ¿Alguien si considero otra respuesta? En cuanto, ¿a qué valores puede tomar la altura? ¿Todos de 0 a 2, sin tomar el 0 y sin tomar el 2?

[16] Jacob: No, incluyéndolo. Lo que pasa es que, lo que hicimos, bueno yo mire la caja y entonces, hicimos que su máxima anchura fuera 4, en ese momento vendría a ser la altura 0. Se dice que, muchos dijeron que una caja no podría tener altura 0 porque era algo tridimensional, o bueno que tenía más, entonces mire que la anchura era un rectángulo y pues ¿Cuál es el área de un rectángulo? La base por la altura, la base vendría siendo la anchura, 4 por 0 da 0 que nos daría el área. Entonces supuse que, si lo tomaban, porque estaba dando el área de la caja

[17] Profesora: ¿El área de la caja?

[18] Jacob: El volumen

[19] Danilo: Eso es cuestión de la perspectiva de como uno lo tome

[20] Profesora: Para usted Danilo ¿si toma el 0 y el 2 o no?

[21] Danilo: Para mí no sería una caja literal, si yo tomo 0 no sería una caja

[22] Estudiante: Seria un rectángulo porque no tiene direcciones, bueno si tiene, pero no lo hace una caja porque no tiene…

La altura puede tomar valores en el intervalo [0,2], sin embargo, aún hay estudiantes que no aceptan la existencia, en este caso, del volumen 0. Pero sus justificaciones están basadas en la visualización y no en herramientas matemáticas. Es decir, los estudiantes solo están haciendo uso de su percepción.

Grupo 4. ¿Qué valores puede tomar la anchura? ¿Por qué? ¿Qué valores puede tomar el volumen? ¿Por qué?

[1] Profesora: Ah listo, Mayra, ¿Qué valores puede tomar el volumen y por qué?

[2] Mayra: El valor máximo 8.45 y 0 sin tomarlo

[3] Profesora: ¿Por qué?

[4] Mayra: 8.45 porque es el volumen máximo que puede llegar el volumen y 0, o sea, no 0 sino más arriba, mayores que 0…

[5] Profesora: ¿Alguien lo encontró de otra manera? O ¿Alguien tiene otra explicación que sea además de lo que está viendo GeoGebra?

[6] Karst: Pues si está bien, pero digamos yo opino que toma el 0 que puede dar el volumen 0 como puedo que no, entonces lo explique bueno teniendo en cuenta las variables, al tener en cuenta que una disminuye o aumenta entonces el volumen va a aumentar o a disminuir… o sea, llegue al punto de que me dio 8.435…

[7] Profesora: ¿Cómo llego a ese valor?

[8] Karst: O sea lo fui mirando en GeoGebra, pero digamos iba analizando hasta qué punto iba llegando, pero digamos depende de la variación de los datos que tengo entonces iba mirando que cuando la altura cambiaba, o bueno las variables (alto, ancho y profundidad), el volumen cambiaba, o sea, ese resultado tenía el mínimo y el máximo

[9] Profesora: Bueno ¿pero si en la altura...? la altura…

[10] Jacob: Pues yo dije, pues yo tomé el 0 como que yo decía que, si había un volumen 0,

entonces pues el volumen es la altura por la anchura por la profundidad y pues como es el volumen de un rectángulo, entonces la anchura…

[11] Profesora: ¿De un rectángulo?

[12] Jacob: Pero, no… pero es que cuando el volumen es 0, entonces tiene su anchura máxima y su profundidad máxima que yo se la tome como 4 y como 6. Entonces vendría la anchura, la profundidad 6 y la altura 0, entonces al hallar con la fórmula del volumen dando el caso de que, si podía tener 4 y que, si podía tener 6, entonces 4 por 6, 24 por 0, 0

[13] Profesora: Listo, ese es el mínimo... ¿Y por qué el máximo 8,45? …. Usted está explicando el cero, entonces usted asume la anchura máxima, la profundidad máxima y la altura va a ser 0, entonces lo que usted dijo ahorita, multiplica 6 por 4, 24 por cero, 0 ¿Y el 8,45?

[14] Jacob: Es que es complicado esa parte de decir, es porque esto sino por que tome valores…

Los estudiantes aún no comprenden como determinar ese volumen máximo sin ayuda de Geogebra, sin embargo, en el mínimo aceptan que inicia en 0, aunque no logran tener una postura conjunta dado que unos asumen y otros no, la existencia de un volumen 0. Sin embargo, al estar apoyados en este criterio, los estudiantes están razonando de forma *Empírica Ingenua Inductiva (EII)*.

Grupo 5. ¿Cuáles son las dimensiones de la atura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué?

[1] Investigadora: Bueno ¿Cómo era?

[2] Felipe: Que la función que más se asemeja a la…

[3] Nicolás: No espere, eso está mal graficado

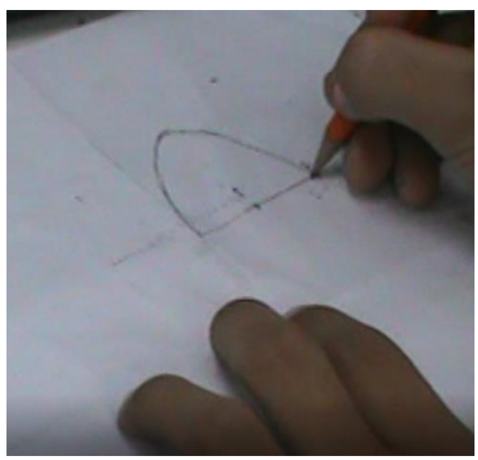
[4] Felipe: Pero me refiero a que en este punto el volumen es 0 y ente punto el volumen es… ah no, perdón

[5] Nicolás: Entonces sería aquí, en este punto el volumen 8.45 que sería el volumen y cero y cero y marca los dos puntos. O sea, el volumen está en el eje y

[6] Investigadora: ¿Y es una cuadrática? ¿Por qué?

[7] Nicolás: Si, porque es que, o sea, el volumen aquí cuando la altura va, cuando la altura llega a cierto punto, en este caso llega a 0.8 que sería el vértice de la cuadrática el volumen llega a su punto máximo que sería 4.5 y a partir de ese punto va bajando y descendiendo otra vez en ambos lados… por eso más o menos concluimos que es la cuadrática pero aún no sabemos cómo ponerlo en…

Imagen 8. Grafica de la función del volumen



A pesar de que Nicolás y Felipe ya tienen la ecuación del volumen en función de la altura se dejan llevar por la visualización de la función que realiza Geogebra dentro del intervalo, es por ello, que ellos aseguran que esta función es cuadrática. Si ellos establecieran la relación entre las diferentes formas de representación de una función, dejando de un lado la percepción podrían construir una demostración más elaborada que a la que aluden en este momento que es el *Empirismo Ingenuo Inductivo (EII)*.

Conclusiones

En esta investigación se ha hecho uso de la estructura de análisis de los tipos de demostración planteado en Fiallo (2011), que nos permitió cumplir con el objetivo de la investigación de caracterizar los tipos de demostración que realizan los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad. Como era de esperarse, en el taller diagnóstico, los tipos de demostración que surgieron en su totalidad son demostraciones de tipo empírico, dado que los estudiantes hacen uso de ejemplos como elementos principales de convicción. Esto corrobora de alguna manera que, a pesar de que en los lineamientos curriculares de matemáticas nacionales e internacionales se está proponiendo, que además de los contenidos, se tengan en cuenta los procesos matemáticos, en particular el de demostración, esto no se está llevando a cabo, lo que pone en desventaja a los estudiantes que tienen que comprender algunas demostraciones de los teoremas más importantes del curso de cálculo diferencial, ya sea porque el profesor los hace en la clase, o porque vienen expuestos en los libros de texto.

En el desarrollo del curso surgieron demostraciones tipo Empírico Ingenuo Inductivo y perceptivo (EII, EIP), Experimento Crucial Basado en el Ejemplo (ECBE), Experimento Crucial Constructivo (ECC), Ejemplo Genérico Analítico (EGA), Ejemplo Genérico Intelectual (EGI), siendo la más común el empirismo ingenuo y en muy pocos casos en ejemplo genérico, el cual es un indicador que los estudiantes están comprendiendo que la demostración matemática no se puede soportar en ejemplos particulares o prototípicos. Esto puede haberse dado porque la demostración es un proceso que debería promoverse desde edades tempranas y en sesenta horas no se va a suplir el proceso que debió haberse construido mucho tiempo atrás; sin embargo, algo importante es que los estudiantes reconocen la necesidad de establecer conjeturas y de demostrar sin hacer uso de los ejemplos particulares.

Algo que también se puede concluir es la importancia de que los estudiantes reconozcan las propiedades de los objetos matemáticos de los que hacen uso para poder conjeturar y demostrar. En el desarrollo de la experiencia surgieron muchos vacíos de conceptos y procedimientos previos para el desarrollo con éxito del curso de cálculo diferencial. Muchos de estos vacíos o concepciones erróneas lograron ser comprendidos por los estudiantes debido a le metodología del curso y al uso del software, el cual les permitió la posibilidad de explorar, comprobar, experimentar y plantear conjeturas y tratar de dar argumentos matemáticos, además de abordar problemas similares a los que deberá enfrentar en el curso de cálculo diferencial.

Otro asunto importante es el rol que debe asumir el profesor como promotor del planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones, generador de la discusión y de la argumentación en el aula de clase. En este sentido se evidenció la disposición de la profesora para ello, pero en algunas ocasiones intervenía más ella, de manera muy dirigida y no daba tiempo para la discusión entre los estudiantes. Esto, tal vez por la premura del tiempo, por lo que es necesario que el profesor sepa en qué momentos sintetizar las actividades, sin dejar de promover la discusión y la argumentación en el aula.

Finalmente, se concluye que sí es posible promover el proceso de demostración en un curso de precálculo que apunte al desarrollo de procesos y no al repaso de contenidos, y que la estructura planteada es una herramienta valiosa para analizar los procesos argumentativos de los estudiantes, pudiéndose reconocer una forma de razonamiento empírica o deductiva.

Referencias Bibliográficas

Antonini S. y Mariotti M. (2008), Indirect proof: what is speciFc to this way of proving? *ZDM the International Journal on Mathematics Education, 40*, 401–412.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. (pp. 33-59). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M., (1995). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Relime*, *1*(1), 40-55.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils´ practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children Hodder & Stoughton* (pp. 216-235). Londres: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.), Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995 (pp. 219-244). Grenoble: Université Joseph Fourier

Balacheff, N., Gaudin, N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. *Les cahiers du laboratoire Leibniz.* Recuperado el 08/07/2017 de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00190425/document, 1-21.

Balacheff, N., Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage -Editions-.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceeding of the 20th PME International Conference*, 113-120.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon* (26), 15 - 29.

Duval, R. (1989). Langage et représentation dans l'apprentissage d'une démarche déductive. *Proceeding of the 13th PME International Conference*, Paris, Francia.

Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. (Tesis doctoral). Universitat de Valencia, Valencia, España.

Fiallo, J.; Camargo, L.; Gutiérrez, A. (2013): Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas, *Revista Integración*, 31(2), 181-205.

Fiallo, J. y Parada, S. (2018) *Estudio dinámico del cambio y la variación*. Bucaramanga, Colombia: Editorial UIS.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA*, 45, pp. 17-28.

Hanna, G., Jahnke, N. (1993). Proof and Application. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 421- 438.

Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: results from exploratory studies. En A. Schoenfeld y otros (Ed.), *Research in collegiate mathematics education*, 3(7), 234 – 283. Providence, EEUU: American Mahematical Society.

Ímaz, C., y Moreno, L. (2014). *Cálculo Su evolución y enseñanza.* Ciudad de México, México: Editorial Trillas.

Komatsu, K. (2016). A framework for proofs and refutations in school mathematics: Increasing content by deductive guessing. *Educational Studies in Mathematics*, 92(2), 147-162.

Marrades, R., Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87 - 125.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales. Colombia: M.E.N.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2003). Estándares Básicos de Matemáticas. Colombia: M.E.N.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Matemáticas. Colombia: M.E.N.

Moore, R. (1994). Making the Transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 249-266.

Moreno, L. (2014). La enseñanza del cálculo. En Ímaz, C., y Moreno, L. *Cálculo Su evolución y enseñanza*. (pp. 55-91). México. Trillas.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla*: SAEM Thales, National Council of Teachers of Mathematics.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démostration dans le apprentisage des mathématiques*. (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier - Grenoble I, Grenoble.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l`analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathematiques*, 25(3), 313 - 348.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23-41.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education*, 40, 385-400.

Pedemonte, B., Reid, D. (2010). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 281-303.

Skemp, R. (1980). Psicología del aprendizaje de las Matemáticas. Madrid, España: Morata.

Stylianides A.J., Stylianides G.J., (2009). “Proof constructions and evaluations”. *Educational Studies in Mathematics.* 72(2), 237–253.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación.* Barcelona: Península. Zill, D. (2011) *Cálculo. Trascendentes tempranas*. México, D.F: McGraw-Hill

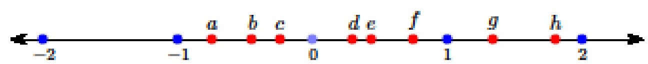
Apéndices

Taller 1. Números y operaciones

Actividad 1

1.1 Explorando

Observa los puntos a, b, c, d, e, f, g y h de la siguiente figura:



Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el punto más próximo a $a \cdot b$? ¿Cuál punto es más cercano a: $a \cdot d$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{e}$, $\frac{1}{f}$ y $\sqrt{h}$? **Explica** tu respuesta.

b) Al responder las preguntas anteriores, un grupo de estudiantes realizó las siguientes conjeturas:

1. Camila comenta a sus compañeros que el punto más cercano a $\sqrt{h}$ es g. ¿Es verdadera la afirmación de Camila? **Justifica** tu respuesta.
2. Andrés asegura que el punto más cercano a $a \cdot d$ está a la derecha de a y d; Camila dice que $a \cdot d$ está entre a y d, y muy cercano a c. ¿Con cuál de los dos argumentos anteriores te identificas? ¿**Por qué**?
3. Andrés está comparando d, f, g, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{f}$ y $\frac{1}{g}$, y afirma que ha encontrado una relación en los últimos tres números con respecto a la posición de d, f y g. ¿Cuál consideras que fue la relación que encontró Andrés? **Explica**.

1.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 2

2.1 Abre el archivo `T1_Act-2.1.ggb` de GeoGebra y explora.

a) ¿Qué pasa con el valor de $a \cdot b$ si $0 < a < 1$ y $0 < b$?; ¿si $-1 < a < 0$ y $0 < b$? **Escribe** tus conjeturas y **justifícalas**.

Anexo 2. Taller 11

Taller 11. Recipientes

Actividad 1

1.1 Toma una hoja rectangular de tamaño carta y, sin recortar, forma un cilindro sin tapas.

a) Considerando cada uno de los lados mayor y menor del rectángulo como la posible altura del cilindro, cómo se obtiene el mayor volumen del sólido: ¿con el mayor o con el menor de los lados? **Justifica** tu elección.

b) ¿Qué se puede conjeturar de cualquier hoja rectangular? **Explica** tu respuesta.

c) ¿Qué se puede conjeturar de una hoja cuadrada? **Explica** tu respuesta.

d) **Compara** tus resultados con un compañero, y demuéstrale que tus conjeturas son verdaderas.

1.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 2

2.1 Abre el archivo `T11_Act-2.1.ggb`, que simula el llenado de un depósito para agua en forma de un cono circular invertido de altura 8 m y radio 3 m.

Anima el deslizador t (haz clic en el botón *play* de la ventana gráfica y resuelve las siguientes preguntas:

a) ¿Qué magnitudes varían a medida que va llenándose el depósito? ¿**Por qué**?

b) ¿Qué valores toman las magnitudes variables? **Justifica** tu respuesta.

c) ¿Qué relación existe entre el radio y el nivel del agua? **Justifica** tu respuesta.

d) Halla la funcion que representa la interdependencia entre el nivel del agua y el volumen. **Explica** tu procedimiento.

2.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Anexo 3. Taller 12

Taller 12. Área máxima

Actividad 1

1.1 El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero para que su área sea la máxima posible. **Explica** y **justifica** tu respuesta en la hoja de trabajo.

1.2 Comunicando y compartiendo

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 2

2.1 Abre el archivo de GeoGebra `T12_Act-2.ggb` y mueve el punto B.

a) ¿Qué magnitudes varían? ¿Cuáles no varían? **Explica** tu respuesta.

b) ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el área del rectángulo? **¿Por qué?**

c) ¿Qué valores puede tomar la base? **¿Por qué?**

d) ¿Qué valores puede tomar la altura? **¿Por qué?**

e) ¿Qué valores puede tomar el área? **¿Por qué?**

f) ¿Qué relación hay entre la base y la altura? **¿Por qué?**

g) Expresa la altura en función de la base. **Explica** tu respuesta.

h) Expresa el área en función de la base. **Explica** tu respuesta.

i) ¿Cuáles son las dimensiones de la base y la altura del rectángulo de mayor área? **¿Por qué?**

2.2 Comunicando y compartiendo

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Anexo 4. Taller 13

Taller 13. Caja sin tapa

Actividad 1

1.1 A partir de una hoja rectangular de tamaño 6 dm por 4 dm, construye una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas, de tal manera que almacene el mayor volumen. ¿Cuáles son las dimensiones de la atura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿**Por qué**? **Explica** tu procedimiento y tu respuesta.

1.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

1.3 Abre el archivo de GeoGebra `T13_Act-1.3.ggb` y anima el punto P.

a) ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el volumen de la caja? ¿**Por qué**?
b) ¿Qué valores puede tomar la altura? ¿**Por qué**?
c) ¿Qué valores puede tomar la anchura? ¿**Por qué**?
d) ¿Qué valores puede tomar la profundidad? ¿**Por qué**?
e) ¿Qué valores puede tomar el volumen? ¿**Por qué**?
f) ¿Qué relación hay entre la anchura y la altura? ¿**Por qué**?
g) ¿Qué relación hay entre la profundidad y la altura? ¿**Por qué**?
h) Representa algebraicamente el volumen en función de la altura.
i) ¿Cuáles son las dimensiones de la altura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿**Por qué**?

1.4 Comunicando y compartiendo resultados

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

1.5 Abre el archivo de GeoGebra `T13_Act-1.5.ggb`. Anima el punto P.

a) ¿Qué representa el punto V? ¿**Por qué**?