

**CONTROL DEL COMPORTAMIENTO DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL  
TIPO VIGA EMPLEANDO MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS**

**EDGAR IVÁN CELIS MARTÍNEZ  
MARIO ALBERTO FERNÁNDEZ BELTRÁN**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIA FISICO-MECANICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL  
BUCARAMANGA  
2013**

**CONTROL DEL COMPORTAMIENTO DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL  
TIPO VIGA EMPLEANDO MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS**

**EDGAR IVÁN CELIS MARTÍNEZ  
MARIO ALBERTO FERNÁNDEZ BELTRÁN**

**Trabajo de grado modalidad Investigación para optar al título de:  
Ingeniero Civil**

**Director:  
OSCAR JAVIER BEGAMBRE CARRILLO  
PhD. Ing. Civil**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIA FISICO-MECANICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL  
BUCARAMANGA**

**2013**

## **DEDICATORIA**

A mi abuela, quien ha sido mi ejemplo a seguir y me ha enseñado a esforzarme para lograr mis objetivos. A Lina Yajaira Martínez, quien se ha convertido en la inspiración de mi vida.

**Iván Celis Martínez**

A mi abuela Yolanda quien estuvo día a día velando y orando por mis resultados académicos durante todo este proceso, para que tenga un motivo más de orgullo. A mis padres y hermana, quienes han depositado su confianza en mí, y han sabido orientarme a lo largo de estos años.

**Mario Fernández Beltrán**

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios por ser mi mejor aliado para cumplir mis metas propuestas, A mi madre y mi abuela, quienes se han esmerado por brindarme lo mejor y les debo muchas de las cosas que he logrado en la vida.

A mis familia, hermanos y tíos en especial Ariel y Nancy Martínez, por brindarme su apoyo para incluirme en al apasionante mundo de la Ingeniería Civil.

Mis amigos de la Universidad y Marcela Correa por estar a mi lado cuando más los necesito.

**Iván Celis Martínez**

A Dios, por ser esa fuerza motivante en mi día a día.

A mi novia Tatiana, por todo su apoyo incondicional en los momentos difíciles de la realización de este trabajo, por querer siempre lo mejor para mí.

**Mario Fernández Beltrán**

A nuestro director el ingeniero Oscar Javier Begambre Carrillo por su colaboración y disposición para ayudarnos a desarrollar y culminar este proyecto.

## CONTENIDO

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN .....	20
2. SISTEMAS INTELIGENTES EN INGENIERÍA .....	22
2.1 DESCRIPCIÓN .....	22
2.2 APLICACIÓN DE LOS SISTEMAS INTELIGENTES EN INGENIERÍA CIVIL ...	23
2.2.1 Ecuaciones y principios básicos en el control de estructuras .....	23
2.2.2 Control activo .....	26
3. MATERIALES INTELIGENTES .....	28
3.1 DEFINICIÓN .....	29
3.2 CARACTERÍSTICAS .....	29
3.3 CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES INTELIGENTES DE ACUERDO A SU FUNCIONAMIENTO .....	30
4. CASO DE ESTUDIO: IMPLEMENTACIÓN DE MATERIAL PIEZOELÉCTRICO PARA EL CONTROL DE LA DEFLEXIÓN DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL TIPO VIGA EN VOLADIZO .....	30
4.1 REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE SOBRE EL USO DE MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS PARA EL CONTROL DE VIGAS .....	31
4.2 MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS .....	34

4.3 FENÓMENO DE PIEZOELECTRICIDAD .....	35
4.4 TIPOS DE MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS .....	38
4.4.1 CERÁMICAS PIEZOELÉCTRICAS.....	38
4.4.1.1 Proceso de fabricación.....	38
4.4.1.2 Clasificación de las cerámicas piezoeléctricas .....	39
4.5 ANÁLISIS EMPLEANDO MEF A TRAVÉS DE ANSYS V11 .....	41
4.5.1 Ecuaciones que rigen el comportamiento electro-mecánico de los materiales piezoeléctricos. ....	41
4.5.2 Características del Modelo.....	45
4.5.3 Procedimiento para la creación de modelos Viga/PZT-5H.....	46
4.6 ALGORITMO DE CONTROL PARA LA MINIMIZACIÓN .....	62
4.7 RESULTADOS OBTENIDOS.....	65
4.7.1. Resultados del comportamiento de los parches .....	65
4.7.2 Resultados de la implementación del algoritmo de control .....	69
4.8 PROCESAMIENTO Y ANÁLISIS DE LOS DATOS.....	75
4.8.1 Formalización del algoritmo de control por medio de ecuaciones.....	77
4.8.2 Implementación del análisis para el uso de dos parches PZT-5H .....	82
4.9 CASO ALTERNO: POSICIONAMIENTO DE UN ACTUADOR PIEZOELÉCTRICO EN VIGA SIMPLEMENTE APOYADA .....	84

5. CONCLUSIONES .....	87
6. RECOMENDACIONES Y PERSPECTIVAS DE PRÓXIMOS ESTUDIOS CON MATERIAL PIEZOELÉCTRICO EN EL CONTROL DE ESTRUCTURAS .....	90
BIBLIOGRAFÍA.....	92
ANEXOS .....	95

## LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Constantes elásticas de las cerámicas piezoeléctricas.....	40
Tabla 2. Constantes Piezoeléctricas de las cerámicas piezoeléctricas .....	41
Tabla 3. Constantes Dieléctricas de las cerámicas piezoeléctricas .....	41
Tabla 4. Propiedades elásticas del material Grafite/Epoxy (En GPa) .....	61
Tabla 5. Resultados de deflexión con variación de la posición de parche y el voltaje aplicado (deflexiones en metros) .....	73
Tabla 6. Resultados de la deflexión en el extremo libre, con variación de la longitud del parche, ubicado a 0 mm del extremo empotrado.....	74
Tabla 7. Valores de coeficientes de ecuación del plano y desviación cuadrática ..	78
Tabla 8. Valores de los coeficientes no lineales y desviación cuadrática .....	78
Tabla 9. Rango de valores para ajuste por Mínimos Cuadrados .....	80
Tabla 10. Coeficientes de las regresiones y desviaciones cuadráticas para cada rango de valores estipulado .....	80
Tabla 11. Deflexiones mínimas y valores óptimos de voltajes y posición del actuador piezoeléctrico. ....	82
Tabla 12. Valores de deflexión con 1 y 2 actuadores en el empotramiento y porcentaje de reducción.....	83

Tabla 13. Comparación entre el comportamiento de la viga con dos actuadores en el extremo empotrado y un actuador de 0.1 m en la superficie superior.....	83
Tabla 14. Resultados de deflexión con variación de la posición del parche y el voltaje aplicado (deflexiones en metros) .....	85

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Expresiones del efecto piezoeléctrico.....	35
Figura 2. Estructura de las cerámicas piezoeléctricas PZT. 1) Debajo de la temperatura de Curie. 2) Por encima de la temperatura de Curie .....	36
Figura 3. Efectos de un esfuerzo mecánico en diferentes moléculas según su simetría. a) Si hay simetría central no se produce polarización. b) Polarización paralela al esfuerzo. c) Polarización perpendicular al esfuerzo. ....	37
Figura 4. Proceso de polarización en la fabricación cerámicas piezoeléctricas...	39
Figura 5. Ejes coordenados que describen las direcciones de aplicación de parámetros piezoeléctricos .....	43
Figura 6. Características geométricas Viga – Laminas piezoeléctricas .....	45
Figura 7. Asignación unidades de trabajo .....	46
Figura 8. Definición de información requerida para el modelamiento .....	47
Figura 9. Geometría del elemento SOLID45.....	48
Figura 10. Geometría del elemento SOLID5.....	49
Figura 11. Selección de los tipos de elementos finitos .....	50
Figura 12. Definición de las características del elemento finito.....	51
Figura 13. Definición de materiales.....	52
Figura 14. Asignación de la matriz elástica viga concreto reforzado .....	52

Figura 15. Asignación de la matriz elástica PZT-5H .....	53
Figura 16. Asignación de la matriz piezoeléctrica PZT-5H Fuente: Ansys v11, 2007 [32].....	53
Figura 17. Asignación de la matriz dieléctrica PZT-5H .....	54
Figura 18. Creación de volúmenes de la viga y el actuador.....	54
Figura 19. Volúmenes generados .....	55
Figura 20. Resultado del pegado de áreas .....	56
Figura 21. Asignación del tipo de elemento y material a los volúmenes .....	56
Figura 22. Creación de la malla de elementos finitos .....	57
Figura 23. Unión de nodos de interfaz viga/PZT-5H.....	58
Figura 24. Asignación de restricciones .....	58
Figura 25. Asignación de carga en la viga .....	59
Figura 26. Asignación de voltaje en la lámina de PZT-5H .....	60
Figura 27. Desplazamiento transversal del modelo propio (a) $u_z$ en metros y (b) $u_x$ en metros .....	61
Figura 28. Desplazamiento transversal del modelo del artículo (a) $u_z$ en metros y (b) $u_x$ en metros.....	62
Figura 29. Comportamiento con parche superior y voltaje negativo (en metros) ..	66
Figura 30. Comportamiento con parche superior y voltaje positivo (en metros) ...	66
Figura 31. Comportamiento con parche inferior y voltaje negativo .....	67
Figura 32. Comportamiento con parche inferior y voltaje positivo.....	67
Figura 33. Deflexión máxima viga sin PZT con carga de 50 N .....	69
Figura 34. Deflexión máxima modelo 1.....	71

Figura 35. Deflexión máxima modelo 2.....	71
Figura 36. Deflexión máxima modelo 3.....	72
Figura 37. Deflexión máxima modelo 4.....	72
Figura 38. Deflexión máxima modelo 5.....	73
Figura 39. Gráfica Deflexión Vs Posición del parche respecto al empotramiento.	75
Figura 40. Gráfica Deflexión Vs Voltaje .....	76
Figura 41. Gráfica deflexión Vs Longitud parche .....	77
Figura 42. Perspectiva en profundidad de la superficie que relaciona las variables “Posición, Voltaje y Deflexión” .....	79
Figura 43. Configuración viga/actuador con dos láminas piezoeléctricas en el extremo empotrado.....	84
Figura 44. Gráfica Deflexión Vs Posición.....	86
Figura 45. Configuración viga/actuador en su posición óptima en el centro de la luz a 0.35 m del apoyo izquierdo .....	87

## LISTA DE ANEXOS

Pág.

Anexo A:Código elaborado en (MATLAB R2012b, 2012) [56], para la minimización de las 3 funciones obtenidas de la relación entre la posición del actuador, el voltaje aplicado y la deflexión generada de cada rango estipulado .....	95
---	----

## RESUMEN

### TITULO:

CONTROL DEL COMPORTAMIENTO DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL TIPO VIGA EMPLEANDO MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS.\*

### AUTORES:

CELIS MARTÍNEZ, Edgar Iván\*\*  
FERNÁNDEZ BELTRÁN, Mario Alberto\*\*

### PALABRAS CLAVES:

Estructuras Inteligentes, Material Piezoeléctrico, Control Estructural, Sensor y Actuador.

### CONTENIDO:

La invención de sistemas inteligentes, es un tema muy común en la actualidad y ha venido desarrollándose alrededor de los últimos treinta años, dicho desarrollo en algunas de las áreas del conocimiento se ha dado de forma lenta, debido a la complejidad del objetivo que se pretende alcanzar. Un sistema inteligente debe poseer la habilidad de auto-diagnosticarse identificando la naturaleza y extensión del problema, repararse con la actuación apropiada, ya sea en forma pasiva o en forma activa, reportar y acumular información que le permita aprender ante escenarios similares.

En ingeniería civil estos sistemas inteligentes tienen aplicación en el diseño de estructuras que cuenten con la capacidad de realizar de manera autónoma un monitoreo para verificar su estado, reportando las anomalías encontradas, así mismo generando una respuesta que de solución a los inconvenientes generados por la exposición a cargas sísmicas, eólicas, entre otras, cuyo comportamiento es de difícil predicción y finalmente pueda almacenar la información de dichos eventos para responder ante situaciones semejantes en el futuro.

Para obtener las características descritas, se han desarrollado diferentes técnicas en las que se implementan materiales “inteligentes” entre los cuales se encuentran los materiales piezoeléctricos (cerámicas piezoeléctricas), junto con los materiales estructurales comunes como el acero o el concreto. Para el caso de estudio se realiza un análisis donde se modela numéricamente mediante el software de elementos finitos ANSYS v11, el efecto producido con la adición de láminas de material piezoeléctrico en un elemento estructural de referencia, como lo es una viga en voladizo sometida a un caso de carga específico, lo anterior, para mostrar el acoplamiento de los campos eléctricos y estructural con la aplicación de dos elementos finitos de la librería de ANSYS v11, y de esta forma generar una idea para el modelamiento experimental en próximos trabajos.

---

\*Proyecto de grado. Modalidad Investigación

\*\*Facultad de Ingeniería Físico Mecánicas – Escuela de Ingeniería Civil  
Director: PhD. Ing. Oscar Javier Begambre Carrillo

## SUMMARY

### TITLE:

CONTROLLING THE BEHAVIOR OF A STRUCTURAL ELEMENT TYPE BEAM USING PIEZOELECTRIC MATERIALS.\*

### AUTHORS:

EDGAR IVÁN CELIS MARTÍNEZ\*\*  
MARIO ALBERTO FERNÁNDEZ BELTRÁN\*\*

### PALABRAS CLAVES:

Smart structures, Piezoelectric Material, Structural Control, Sensor and Actuator.

### ABSTRACT:

This concluding project presents numerical modelling to control the behavior of a structural element type, in this case a beam. Deflection control is carried out using piezoelectric actuators as smart materials.

The invention of smart systems is a common topic nowadays and has been developed strongly around the last thirty years; the development in some areas of knowledge has been slow, due to the complexity of the objective to be achieved. An intelligent system must have the ability to self-diagnose identifying the nature and extent of the problem, repair itself with appropriate action, passively or actively, report and gather information that will enable learning to similar situations in the future.

Those smart systems in civil engineering have application in the design of structures that have the ability to perform autonomously a monitoring to verify their status, reporting anomalies found, also generating a solution response to the problems created by exposure seismic loads, wind and others whose behavior is difficult to predict, finally the structure can be able to store the information of such events to respond to similar situations later.

To get the features described above, different techniques have been developed using "smart" materials like piezoelectric materials (piezoceramics), along with common structural materials such as steel or reinforced concrete. The case studied consists of a reference structural element as a cantilever beam subjected to a specific load case, in which was made an analysis where is modeled numerically by the finite element software ANSYS v11. The idea is to show the effect produced by the addition of piezoelectric patches at the element surface, and show structural - electric coupling field with the application of two finite elements of ANSYS v11, in this way researchers will have an idea for experimental models in futures projects.

---

\*Graduation Project. Investigation Modality

\*\*Physics- Mechanics Engineering Faculty – Civil Engineering School  
Director: PhD. Ing. Oscar Javier Begambre Carrillo

## 1. INTRODUCCIÓN

En la realización del estudio de un modelo numérico que represente la interacción aproximada de los campos estructural y eléctrico se hace necesaria una revisión sistemática de los conceptos más generales, y de esta forma aterrizar al caso específico del estudio. Como primera medida se abarca el estudio de los conceptos relevantes en el campo de los sistemas inteligentes, y su aplicación en las estructuras de ingeniería civil. Una vez se abarcan estos temas, en el capítulo 3 se procede con el estudio de las características y clasificación de aquellos materiales que generan respuestas físicas particulares ante estímulos de diferentes orígenes, los cuales podrían tener aplicabilidad en el control de sistemas estructurales. En este punto del estudio se hace énfasis en los piezoeléctricos como objeto del presente trabajo, este tipo de material será abordado desde el fenómeno de la piezoelectricidad en el capítulo 4, y de esta manera se empieza a establecer una base del comportamiento esperado en el modelamiento numérico realizado.

Para el análisis inicial del caso específico del proyecto, se presenta una breve descripción del desarrollo de diferentes estudios en cuanto al control de deflexiones o control de forma en vigas con materiales piezoeléctricos, realizados desde el punto de vista estático, debido a que es el enfoque del trabajo.

A partir de la anterior revisión y la información sobre el material usado como actuador para la reducción de la deflexión, se procede con el planteamiento básico del comportamiento de campos acoplados, es decir, las ecuaciones que rigen el fenómeno, y el software que realiza la solución de estas. De lo anterior, se crea el punto de partida para la generación del modelo numérico de una viga en voladizo con una carga puntual en su extremo libre bajo la acción de actuadores piezoeléctricos, con el cual se pretende alcanzar el primer objetivo del estudio, que consiste en definir el comportamiento mecánico obtenido a partir de la interacción

de los materiales piezoeléctricos con el concreto. Con los resultados del capítulo 4.7 se puede establecer claramente lo sucedido tanto en el conjunto viga/actuador, como en los actuadores a nivel individual.

El procedimiento definido en la sección 4.6, se establece con la finalidad de plantear una serie de pasos que permitiesen ubicar una posición óptima para los parches mediante el modelamiento numérico. Dicho proceso, basado en pruebas sucesivas de los modelos generados, permitió alcanzar el segundo objetivo que sugiere obtener un algoritmo para regular la deflexión máxima de la viga de concreto mediante láminas de material piezoeléctrico.

Con el fin de tener cierta certeza sobre los resultados obtenidos y la metodología aplicada para generar los modelos, se replicó un ejemplo de una de las referencias bibliográficas, como se aprecia en el numeral 4.5.3. De dicho ejemplo se empleó la información y datos tanto de la geometría como de las propiedades de los materiales usados. Los resultados fueron satisfactorios, en cuanto a que la metodología propuesta para la generación de los modelos numéricos propios, al ser usada en otro ejemplo con características distintas pudo aproximar los resultados de los desplazamientos en las direcciones X y Z.

La información que se obtuvo de las deflexiones máximas fue procesada y analizada a partir de la sección 4.8. Se puede apreciar el comportamiento de los datos, los puntos óptimos de posición a lo largo de la viga, la magnitud del voltaje y tamaño del actuador. Para alcanzar el último de los objetivos planteados, fue necesaria una comparación entre un modelo de viga sin actuador y otro con la presencia de este. Para tener certeza de los resultados sin el efecto de los parches, se contrastó la deflexión máxima del modelo con el valor obtenido de ecuaciones analíticas como se establece en 4.7.2. Lo anterior, tanto para el caso de estudio del elemento en voladizo, como para el caso alterno planteado en la sección 4.9.

## **2. SISTEMAS INTELIGENTES EN INGENIERÍA**

Los avances tecnológicos en el entendimiento de los materiales, han permitido la manipulación de los mismos y la habilidad para optimizar sus atributos, causando un creciente impacto en los diferentes sistemas tradicionales manejados en el campo de la ingeniería. Así mismo, la disponibilidad de avanzada capacidad computacional ha permitido el manejo de nuevos problemas de gran complejidad donde se involucran las “aleaciones con memoria”, los “fluidos electroreológicos y magnetoreológicos”, piezoeléctricos, ferroeléctricos y polímeros electroactivos (Gaudenzi, Yasuhide, 2005) [1].

### **2.1 DESCRIPCIÓN**

Un sistema inteligente está definido por su capacidad de percibir la dinámica del entorno, de responder en forma adecuada adaptándose a los cambios y finalmente por su capacidad de acumular o guardar la información de los eventos ocurridos para su posterior procesamiento y uso en eventos futuros de características similares. En resumen, el comportamiento que adquiere el sistema tiene como referencia el funcionamiento de un ser vivo, el cual percibe un estímulo que procesa para reaccionar y adaptarse a la nueva circunstancia, en la mayoría de los casos el organismo aprende de la experiencia mejorando sus acciones en entornos similares (Wadhawan, 2005) [2].

Básicamente cuando se habla de este tipo de sistemas, se hace referencia a tres elementos fundamentales que los conforman: La percepción de estímulos es lograda mediante sensores que captan la forma de energía que afecta al sistema y la transforma en una señal u otra forma de energía que es procesada por el centro de control, el cual devuelve una respuesta que minimiza el impacto de las sollicitaciones generadas por entorno.

## **2.2 APLICACIÓN DE LOS SISTEMAS INTELIGENTES EN INGENIERÍA CIVIL**

### **2.2.1 Ecuaciones y principios básicos en el control de estructuras**

Las estructuras en ingeniería civil como edificios, puentes y torres, pueden vibrar fuertemente e incluso colapsar bajo excitaciones sísmicas o de vientos. Diseñar estructuras que puedan soportar adecuadamente daños sísmicos sigue siendo un reto para los ingenieros civiles; a pesar de los esfuerzos en el desarrollo de códigos y mejoras constructivas para lograr diseños resistentes contra viento y sismos, todavía existe vulnerabilidad contra dichas fuerzas. Se puede atribuir este hecho a las limitaciones existentes en el enfoque tradicional de diseño estructural, en cuanto a resistencia de cargas y disipación de energía. Tales estructuras dependen de su rigidez, y del pequeño amortiguamiento característico del material que la compone para disipar la energía dinámica. Dada esta descripción, se puede otorgar el calificativo de “estructuras pasivas”, pues no pueden adaptarse a cada cambio y excitación por sismo y viento. Para soportar esto, se requiere un incremento en la resistencia y ductilidad, pero materiales con elevados valores de estas características son costosos. Se podría aumentar la resistencia con un tamaño de sección transversal mayor en los elementos que constituyen la estructura, sin embargo, se demandaría mayor fuerza en dichos elementos, por consiguiente requerirán mayor resistencia (Cheng, 2008) [3]. Esto se puede tornar en una búsqueda infructuosa en el diseño, además, no hay forma de aumentar el amortiguamiento propio de los materiales de construcción comunes, como el concreto reforzado y el acero.

Hoy en día, tales sistemas han sido aplicados a las siguientes estructuras civiles:

- Estructuras bajo excitaciones inusuales, como vientos extremos o fuertes terremotos.

- Estructuras con funciones y requerimientos especiales indispensables en la sociedad, como hospitales, estaciones de bomberos y plantas de energía.
- Estructuras con requerimientos especiales de servicio y mantenimiento, tales como torres, edificios de gran altura, puentes, techos de grandes luces, entre otras estructuras flexibles. Bajo largas excitaciones ambientales, las excesivas vibraciones estructurales pueden afectar la comodidad del usuario y la seguridad de la edificación.

El estudio del control sísmico mediante estructuras inteligentes, tiene como base el modelo de un grado de libertad bajo una excitación del terreno, es decir, se analiza dinámicamente la estructura según la expresión siguiente:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_g(t) \quad (1)$$

La ecuación 1, que representa el comportamiento dinámico normal de una estructura, puede ser escrita en términos de la frecuencia natural de la estructural ( $w_n$ ) y de la relación de amortiguamiento ( $\zeta$ )(Cheng, 2008) [3].

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta w_n \dot{x}(t) + w_n^2 x(t) = -\ddot{x}_g(t) \quad (2)$$

La solución de esta ecuación muestra que existen tres maneras de reducir la respuesta sísmica de la estructura. Se puede reducir la magnitud del movimiento del suelo ( $\ddot{x}_g$ ), incrementar la relación de amortiguamiento ( $\zeta$ ) y evitar la resonancia ampliando la diferencia entre la frecuencia natural de la estructura y la frecuencia del sismo. Para aplicar los conceptos mencionados surgen los diferentes mecanismos de control empleados en las estructuras inteligentes, enunciados a continuación (Cheng, 2008) [3].

La representación matemática que integra el control de la respuesta sísmica mediante los mecanismos anteriormente mencionados es la siguiente (Cheng, 2008) [3].

$$(m + m_c)\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) + F_c(t) = -m\ddot{x}_g(t) \quad (3)$$

Donde  $m_c$  es la masa del dispositivo o sistema de control, la cual es mucho menor que la masa de la estructura;  $F_c(t)$  es la fuerza de control, que es altamente dependiente del sistema o dispositivo elegido. Un modelo lineal típico de dicha fuerza es el siguiente (Cheng, 2008) [3].

$$F_c(t) = c_c\dot{x}(t) + k_c x(t) \quad (4)$$

Remplazando esta última expresión en la ecuación 3, se puede obtener el modelo matemático de un sistema estructural de un grado de libertad bajo excitación sísmica, controlado mediante una fuerza generada por el tipo de dispositivo manipulado (Cheng, 2008) [3].

$$m\ddot{x}(t) + (c + c_c)\dot{x}(t) + (k + k_c)x(t) = -(m + m_c)\ddot{x}_g(t) \quad (5)$$

Al comparar las ecuaciones 1 y 5, se puede notar que al añadir la fuerza de control se modifican las propiedades estructurales, con el fin de mejorar la respuesta ante movimientos del terreno. Los dispositivos añadidos son diseñados para aumentar el amortiguamiento estructural, o para evitar la resonancia modificando la rigidez o la masa de la estructura de modo que la respuesta sea minimizada en cuanto a velocidad, desplazamiento y aceleración de la estructura (Cheng, 2008) [3].

Actualmente algunos dispositivos o sistemas son usados en la práctica. Estos se pueden resumir en cinco categorías o grupos enunciados a continuación.

- Control por aislamiento de base.

- Control pasivo.
- Control semi-activo.
- Control activo.
- Control híbrido.

Se puede recurrir a un análisis estático para estudiar el comportamiento de elementos estructurales como vigas o columnas, con determinada condición de apoyo y carga. El control de la deflexión de dichos elementos proporciona un acercamiento al estudio del control de la vibración de los mismos o de una estructura con mayor complejidad. Siendo el control de vibraciones (ocasionadas por alguna fuente externa) un poco más sofisticado, se puede llevar a cabo un análisis estático que proporcione resultados satisfactorios en el estudio de la implementación de alguna nueva técnica relacionada con la mejora del comportamiento estructural, como es el caso del control activo mediante la utilización de material piezoeléctrico.

### **2.2.2 Control activo**

Tanto los sistemas pasivos como los semi-activos, son buenos en el aspecto económico y son confiables operativamente, sin embargo, sus capacidades están limitadas a la acción para la cual fueron diseñados. Por un lado los sistemas pasivos poseen mecanismos simples y son fáciles de fabricar, pero no tienen suficiente capacidad adaptativa para responder ante las cambiantes e inciertas excitaciones externas debido a la inexistencia de sensores que permiten la detección de las mismas. Por otra parte los sistemas semi-activos si tienen un sistema adaptativo, pero están restringidos a la capacidad máxima de los dispositivos pasivos que utilizan. Por tanto, es requerida una capacidad mayor de adaptabilidad para proteger las estructuras de las excesivas vibraciones.

Las estructuras inteligentes con sistemas de control activo surgen de la ya mencionada necesidad de protección, y se define como un sistema que requiere de una fuente externa de potencia para alimentar los actuadores que aplican fuerzas a la estructura. Estas fuerzas pueden ser usadas tanto para suministrar como para disipar energía en la estructura. En un sistema de control activo con retroalimentación, las señales enviadas a los actuadores de control son función de las respuestas (normalmente movimientos) de la estructura, medidas con sensores físicos (Cheng, 2008) [3]. Esta técnica innovadora usa dispositivos especiales como actuadores electrohidráulicos<sup>1</sup> para generar la fuerza de control requerida. El sistema básicamente lo conforman tres elementos esenciales, los ya mencionados actuadores, los sensores y un controlador que usa un algoritmo de control predeterminado para su funcionamiento.

Los sensores en el caso de las estructuras inteligentes, pueden asemejarse a los órganos sensitivos del cuerpo humano. Pueden localizarse en la base de la estructura, o en la estructura misma. Los dispositivos de control pueden incorporar sensores también con la finalidad de controlar su comportamiento. La respuesta de salida de un sensor es comúnmente en forma de señales voltaicas, enviadas al controlador para su posterior procesamiento.

El controlador es el cerebro del sistema pues recibe las mediciones de los sensores, las analiza y genera las señales de control necesarias para manejar los actuadores bajo un algoritmo de control predeterminado. En la etapa de diseño, el modelo matemático del controlador está formulado por la teoría de control, y la ley de control de retroalimentación está determinada por los algoritmos de control (Cheng, 2008) [3]. Para la implementación física, hay controladores análogos y digitales. Los controladores análogos son dispositivos que implementan una ley de control de retroalimentación formulada en un dominio de tiempo continuo<sup>2</sup>; todos los componentes físicos de tal controlador trabajan de forma continua. Los controladores digitales tienen un equipo o computador de control como

componente principal. Debido a los avances en la microelectrónica, la tecnología digital ha superado a la del controlador análogo. Los actuadores por su parte, hacen las veces de las extremidades en el cuerpo humano, pues producen las acciones pertinentes en respuesta a las señales enviadas por el controlador, generando las fuerzas de control que ayudan a la estructura. Para el caso del control de la respuesta sísmica, las estructuras civiles largas o de grandes dimensiones, requieren de actuadores de tamaño considerable que puedan generar grandes fuerzas de control. Se pueden encontrar los actuadores electrohidráulicos y los generadores de pulsos, para responder a esta necesidad.

El control activo ha sido ampliamente usado para suprimir ruidos y vibraciones en las industrias mecánica y aeroespacial. Sus aplicaciones en estructuras civiles de gran envergadura están en pleno desarrollo y son todavía estudiadas por los investigadores. Se pueden enunciar las siguientes ventajas:

### **3. MATERIALES INTELIGENTES**

El desarrollo de nuevas tecnologías de fabricación de productos de todas las áreas, ha logrado que se disminuya el alto precio de la implementación de materiales inteligentes, promoviendo el desarrollo de nuevas aplicaciones, por medio de la combinación de estos con los materiales tradicionales. Dicho desarrollo se ha logrado gracias al aporte realizado por diferentes campos del conocimiento tales como: física de estado sólido, química, ingeniería de materiales, medicina, mecánica, biología, entre otras (Discovery Channel, 2010) [4].

### **3.1 DEFINICIÓN**

Es considerado material inteligente, aquel material que tiene la capacidad de cambiar sus propiedades mecánicas o físicas a partir de la aplicación de un estímulo externo, recuperando su forma normal cuando este deja de aplicarse. La aplicación de estos materiales en las diferentes áreas depende de ese fenómeno acción-reacción y generalmente son usados en la fabricación de sensores y actuadores, que constituyen sistemas inteligentes. En el caso específico de las estructuras inteligentes, mediante la combinación de materiales estas pueden autodiagnosticarse y modificarse para así adaptarse a las condiciones consideradas como óptimas o correctas (Revista Actimat, 2010)[5].

### **3.2 CARACTERÍSTICAS**

Existe una gran variedad de propiedades que pueden ser modificadas, entre ellas están las propiedades mecánicas (dureza, flexibilidad, deformación, tensión, etc.), las propiedades térmicas (transiciones de fase), las propiedades electromagnéticas (ferro, ferri, paramagnéticos), las propiedades ópticas (transmisión de la luz), así como colorimetría, propiedades acústicas y propiedades químicas(Andragogy, 2001) [6].

Por su sensibilidad o actuación, estos materiales pueden ser utilizados para el diseño y desarrollo de sensores, actuadores y productos multifuncionales, así como poder también llegar a configurar estructuras y sistemas inteligentes de aplicaciones múltiples. En este caso las estructuras inteligentes, son por ejemplo aquellas que gracias a la combinación de estos materiales son capaces de autodiagnosticarse y modificarse para adaptarse a las condiciones que se les ha marcado como óptimas o correctas(Revista Actimat, 2010) [5].

### **3.3 CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES INTELIGENTES DE ACUERDO A SU FUNCIONAMIENTO**

Según el comportamiento que poseen ante un estímulo externo (físico o químico), podríamos clasificar los materiales inteligentes cuatro grupos:

- Materiales electroactivos y magnetoactivos.
- Materiales fotoactivos o fotolumiscentes.
- Materiales cromoactivos
- Materiales con memoria de forma (Materiales Inteligentes s.l., 2001) [7].

### **4. CASO DE ESTUDIO: IMPLEMENTACIÓN DE MATERIAL PIEZOELÉCTRICO PARA EL CONTROL DE LA DEFLEXIÓN DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL TIPO VIGA EN VOLADIZO**

En este capítulo se muestra el estudio de la implementación de un sistema controlado activamente con material piezoeléctrico de acuerdo a lo mencionado en el capítulo 3 numeral 3.3.4 del presente trabajo. Sin embargo, debido a la complejidad de utilizar un sistema completo con sensores, actuadores y controlador, en dicho estudio solo se pretende trabajar con actuadores, los cuales son controlados de forma manual reemplazando la función del sensor en cuanto a la detección y la función del controlador en la señal de respuesta; sumado a esto, se debe tener en cuenta que las condiciones externas son preestablecidas.

#### **4.1 REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE SOBRE EL USO DE MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS PARA EL CONTROL DE VIGAS**

Dentro del desarrollo de los materiales inteligentes, la implementación de materiales con comportamiento piezoeléctrico no solo ha tenido relación con el mejoramiento de los elementos que forman parte de satélites y helicópteros, sino que en el área de estructuras civiles se ha venido aplicando al monitoreo y control de vigas, introduciendo la noción de estructura inteligente a este tipo de elemento mediante la implementación de sensores y/o actuadores piezoeléctricos generalmente en forma de parches planos de poco espesor (Irschik, Krommer, Vetyukov, 2010) [8].

Los primeros estudios de vigas con dispositivos piezoeléctricos fueron realizados en el campo aeroespacial; Bailey y Hubbard en 1985 presentaron un amortiguador de vibraciones activo para una viga en voladizo de una estructura satelital utilizando el polímero piezoeléctrico fluoruro de polivinilideno (PVDF) como el actuador de parámetros distribuidos (Songa, Sethi, Li, 2006) [9], pues se presentaban errores en las superficies de las antenas de los satélites a causa de imperfecciones en la fabricación, distorsión térmica en órbita, humedad, conexiones sueltas y degradación del material (Agrawal, Treanor K, 1999.) [10]. Años más tarde entre 1987 y 1988 Edward F. Crawley y otros investigadores presentaron técnicas analíticas y los resultados experimentales para el uso de actuadores piezoeléctricos como elementos de estructuras inteligentes. Presentaron el análisis estático y soluciones completas analíticas para casos de actuadores piezoeléctricos adheridos superficialmente. Los modelos estáticos de flexión se integraron con el modelo de viga de Euler-Bernoulli que condujo al análisis del modelo dinámico y la predicción del comportamiento de la viga bajo el accionamiento piezoeléctrico (Songa, Sethi, Li, 2006) [9]. El problema de control de una viga flexible en voladizo ha sido estudiado por varios investigadores; Vinet Sethi de la Universidad de Akron (USA), investigó la supresión de la vibración usando parches piezocerámicos en una viga de fibra de polímero reforzado en

forma de I con 3.3 metros de longitud instalada en voladizo. En este estudio, la relación de peso entre la estructura y el actuador era de 186, la cual es considerablemente más alta que la obtenida para las estructuras flexibles y ligeras que comúnmente se usan con los parches piezoeléctricos (actuadores). Diferentes tipos de controladores tales como el de realimentación positiva, y el control de ubicación de polos fueron implementados, logrando muy buenos resultados en el amortiguamiento del elemento (Songa, Sethi, Li, 2006) [9].

Muchos de los esfuerzos se concentraron en la supresión activa de vibraciones, sin embargo, se empezó a indagar también sobre el control de la forma o deflexión de los elementos a través de actuadores piezoeléctricos, como se hizo en el “Centro de Investigación y Diseño de Vehículos Espaciales” en la Escuela Naval de Postgrado de Estados Unidos de Norteamérica. En sus estudios incluyeron una viga en voladizo con actuadores piezocerámicos adheridos a su superficie en diferentes ubicaciones, y para determinar la deflexión transversal se usó la teoría de Euler-Bernoulli. Los resultados que obtuvieron muestran que los actuadores piezocerámicos son una manera efectiva de controlar la forma de una viga flexible y delgada. Se infiere también que la ubicación de dichos actuadores es de gran relevancia para determinar qué tan cerca se puede aproximar un perfil de deformación deseado (Agrawal, Treanor, 1999) [10].

Comúnmente los materiales piezoeléctricos se encontraban adheridos o pegados a la superficie del elemento estructural huésped, y cuando se activaban por un campo eléctrico aplicado, su deformación inducida por la membrana controla la estructura. En este caso campos eléctricos constantes son aplicados a través del espesor del actuador polarizado transversalmente, mediante la constante piezoeléctrica con valor genérico “ $e_{31}$ ”. Lo anterior define el mecanismo de accionamiento de extensión, que ha sido ampliamente utilizado en cada aplicación de control activo en vigas (Trindade, Benjeddou, Ohayon, 1999.) [11]. A partir de este punto, con el desarrollo del diseño de vigas compuestas los investigadores

empiezan el análisis de otro factor importante en la teoría de las denominadas “vigas inteligentes”. Notan la posibilidad de usar actuadores embebidos en el cuerpo del elemento, sin embargo, los ya mencionados actuadores extensibles no responden bien ante esta configuración. Es entonces cuando surgen los actuadores de corte o cortantes (en su traducción al español), estos están polarizados longitudinalmente, y cuando se someten al campo eléctrico transversal presentan deformaciones de cizallamiento, a través de la constante piezoeléctrica llamada genéricamente “ $e_{15}$ ”, lo anterior se denomina mecanismo de accionamiento de corte o cizallamiento. El uso de este tipo de actuadores fue propuesto por primera vez por Zhang y Sun, en su trabajo emplean parches piezoeléctricos de cizallamiento para generar una deflexión transversal en una viga compuesta o “tipo sándwich” (Sun, Zhang, 1995) [12], (Osama, Ahmed, 2000) [13]. Entre 1995 y 1996 estos mismos autores hicieron un análisis numérico estático comparativo usando un código de elementos finitos comercial y propusieron un modelo teórico para los actuadores de corte. Lo que condujo a la conclusión de que el uso de mecanismos de cortante está sujeto a menores esfuerzos en comparación con los mecanismos de extensión (Trindade, Benjeddou, Ohayon, 1999.) [11]. Finalmente, es pertinente destacar que en la realización de los diferentes modelos los investigadores Zhang y Sun sugieren suponer un comportamiento acorde a la teoría de vigas de Euler-Bernoulli para las capas unidas superficialmente, y para los actuadores embebidos suponer que obedecen la teoría para vigas de Timoshenko (Trindade, Benjeddou, Ohayon, 1999.) [11], (Osama, Ahmed, 2000)[13].

Como ya se ha notado, la ciencia de los materiales es un área importante en la investigación del control de vigas, siendo los piezocerámicos y su interacción uno de los objetos de estudio. Paralelo a esto, la aplicación correcta de las teorías de control complementa el funcionamiento del conjunto viga, actuador y sensor. La ley de realimentación de la teoría de control, ha sido la principal herramienta en las

investigaciones y logros en el control de estructuras, tal y como se muestra en el trabajo de Sheng Xu y T.S Koko [14], donde se presenta un esquema para el diseño del control por realimentación en estructuras piezoeléctricas. Los mecanismos de realimentación denominados “State Feedback” y “Output Feedback” fueron utilizados para el esquema de control del modelo de viga en voladizo realizado, además se menciona, de acuerdo a los resultados numéricos, que un adecuado posicionamiento de los dispositivos es indispensable para el rendimiento del sistema de control.

#### **4.2 MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS**

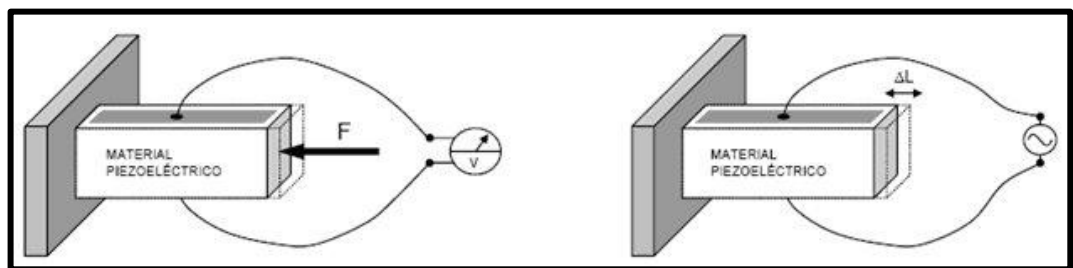
Los materiales piezoeléctricos son aquellos que producen un voltaje cuando se les aplica tensión mecánica, dichos materiales están compuestos por una serie de cristales naturales o sintéticos que no poseen centro de simetría, los cuales frente al efecto de compresión o cizallamiento presentan una disociación de los centros de gravedad de las cargas positivas y de las cargas negativas apareciendo así los dipolos elementales en la masa agrupando cargas de signo opuesto en las superficies enfrentadas. Este efecto también se produce de manera inversa, produciendo una tensión mecánica en presencia de un campo eléctrico (Eccured, 2012) [15].

Los materiales piezoeléctricos más comunes son cristales naturales como el cuarzo, la turmalina y la sal de Rochel, entre otros, los cuales han servido durante mucho tiempo como transductores de una cantidad de aplicaciones electro-mecánicas y mecano-eléctricas y seguramente se seguirán encontrando nuevas aplicaciones en el futuro. Sin embargo el descubrimiento de los materiales cerámicos piezoeléctricos abrió el camino hacia numerosas aplicaciones y cuentan con alta resistencia ante los agentes atmosféricos (Gonzales, 2009) [16].

### 4.3 FENÓMENO DE PIEZOELECTRICIDAD

La piezoelectricidad es la capacidad de algunos materiales (cristales y cerámicas) para generar potencial eléctrico en respuesta a acción mecánica aplicada ya sea tensión, compresión o torsión. Si al aplicar dicha acción mecánica no se produce corto circuito, la carga aplicada induce un voltaje a través del material (Scribd, 2012) [17].

**Figura 1.** Expresiones del efecto piezoeléctrico



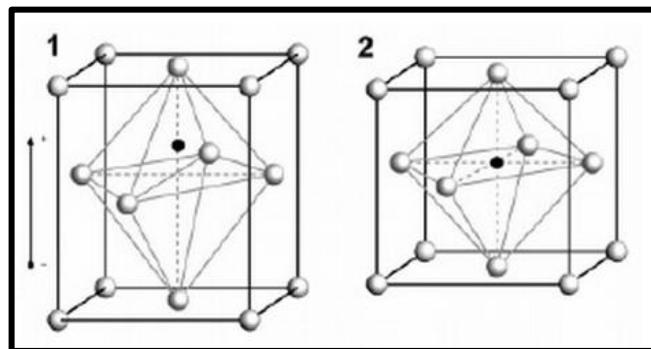
Fuente: (Sensores Generadores, 2009) [18].

La palabra piezoelectricidad se deriva de Griego *piezein*, que significa exprimir o presión pero dicho efecto es reversible, es decir, se puede presentar el efecto directo (la producción de la electricidad cuando se aplica la acción mecánica) o el efecto inverso (la producción de una tensión mecánica cuando se aplica un campo eléctrico). Por ejemplo, titanato-zirconato del plomo los cristales exhibirán un cambio máximo de la forma de cerca de 0.1% de la dimensión original.

Las propiedades piezoeléctricas fueron descubiertas por Antoine Becquerel en 1819 (Santamaría, Castejón, 2009) [19] y dicha propiedad de la piezoelectricidad fue estudiada por primera vez por Pierre y Jacques Curie en 1881, analizando la compresión del cuarzo. El efecto piezoeléctrico se produce en varias sustancias cristalinas como el bario, el titanio o la turmalina. El efecto se explica por el desplazamiento de iones en cristales que tienen una celda unitaria asimétrica (la celda unitaria es el poliedro más simple que compone la estructura de un cristal).

Cuando se comprime el cristal, los iones de las celdas se desplazan, provocando la polarización eléctrica de la misma puesto que al someterlo a la acción mecánica, se ejerce una presión en los extremos del eje polar, produciendo una separación de las cargas de la materia y así mismo da lugar a una polarización: un flujo de electrones va hacia un extremo y produce en él una carga negativa, mientras que en el extremo opuesto se induce una carga positiva. Esta polarización es la causante de que se presente el voltaje (Scribd, 2012) [17].

**Figura 2.** Estructura de las cerámicas piezoeléctricas PZT. 1) Debajo de la temperatura de Curie. 2) Por encima de la temperatura de Curie



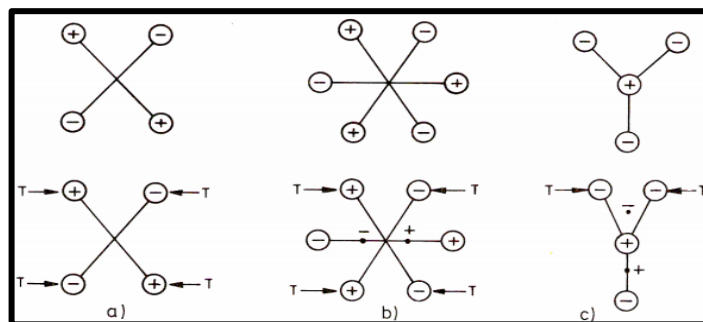
Fuente: atcp, 2012 [23]

Debido a la regularidad de la estructura cristalina, estos efectos se acumulan, produciendo una diferencia de potencial eléctrico entre determinadas caras del cristal. En el caso inverso, cuando se aplica al cristal un campo eléctrico externo, los iones de cada celda son desplazados por las fuerzas electrostáticas, produciendo una deformación mecánica. Dada su capacidad de convertir la deformación mecánica en voltaje eléctrico y un voltaje eléctrico en movimiento mecánico, los cristales piezoeléctricos son utilizados en diferentes aplicaciones (Scribd, 2012) [17]. La primera aplicación práctica de la piezoelectricidad, que surge de la cualidad de transformar una señal mecánica (la presión) en una señal eléctrica (corriente eléctrica), es la del sónar. Para que la materia presente la

propiedad de la piezoelectricidad debe cristalizar en sistemas que no tengan centro de simetría (que posean disimetría) y por lo tanto que tengan un eje polar. Todas estas clases menos una tienen la propiedad piezoeléctrica en mayor o menor medida. Los gases, los líquidos y los sólidos con simetría no poseen piezoelectricidad (Google Sites, 2012) [20]. Las propiedades piezoeléctricas se manifiestan en 20 de las 32 clases cristalográficas, aunque en la práctica se usan unas pocas, y también en materiales amorfos ferroeléctricos. De aquellas 20 clases, solo 10 tienen propiedades ferroeléctricas.

En cualquier caso, todos los materiales piezoeléctricos son necesariamente anisótropos. En la siguiente figura se observa que en el caso a hay simetría central, y al aplicar un esfuerzo no aparece polarización eléctrica. En el caso b, en cambio, aparece una polarización paralela al esfuerzo, mientras que en el caso c aparece una polarización en dirección perpendicular al esfuerzo. (Pallás, 2004) [21].

**Figura 3.** Efectos de un esfuerzo mecánico en diferentes moléculas según su simetría. a) Si hay simetría central no se produce polarización. b) Polarización paralela al esfuerzo. c) Polarización perpendicular al esfuerzo.



Fuente: Merino, 2012 [22]

## **4.4 TIPOS DE MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS**

Pueden distinguirse dos grupos de materiales: los que poseen carácter piezoeléctrico de forma natural y los llamados ferroeléctricos, que presentan propiedades piezoeléctricas tras ser sometidos a una polarización (tantalio de litio, nitrato de litio, berlinita en forma de materiales monocristalinos y cerámicas o polímeros polares bajo forma de microcristales orientados (Ecurrred, 2012) [15].

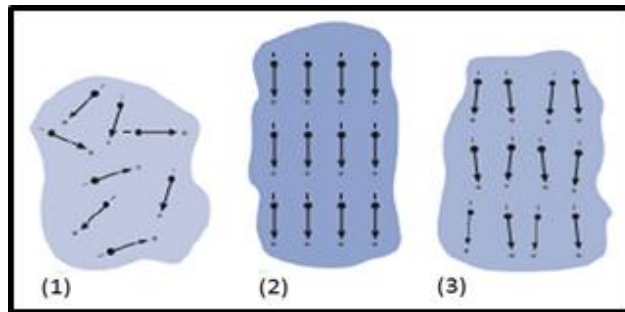
### **4.4.1 CERÁMICAS PIEZOELÉCTRICAS**

#### **4.4.1.1 Proceso de fabricación**

Desde un punto de vista eléctrico, la cerámica piezoeléctrica contiene dipolos elementales. Originalmente, los dipolos de la cerámica están orientados al azar; al aplicar un esfuerzo la suma de los desplazamientos de carga es cero, y, el material no exhibe el efecto piezoeléctrico (utn, 2012) [23].

Al exponer el material cerámico a un fuerte campo eléctrico externo, a alta temperatura (no más allá de la temperatura Curie), los dipolos naturales desaparecen, y aparecen nuevamente en forma espontánea al disminuir la temperatura. Bajo estas condiciones, los dipolos adoptan la dirección correspondiente a la del campo de polarización. Como resultado, el cuerpo de la cerámica muestra una elongación en esa dirección (utn, 2012) [23]. Después de remover el campo de polarización, y, enfriar el material, los dipolos no vuelven fácilmente a su posición original, con lo que se obtiene el efecto de polarización remanente del material (Ver Fig. 4). El cuerpo cerámico se ha convertido, en forma permanente, en piezoeléctrico.

**Figura 4.** Proceso de polarización en la fabricación de cerámicas piezoeléctricas



Fuente: Merino, 2012 [26]

#### 4.4.1.2 Clasificación de las cerámicas piezoeléctricas

Los materiales piezoeléctricos se clasifican en dos grupos: Hard y Soft. Esta clasificación se basa en la curva de la histéresis dieléctrica. Los materiales de alta potencia (Hard) presentan una curva de histéresis cerrada de área pequeña. Los materiales de alta sensibilidad (Soft), presentan una curva de histéresis abierta con área mayor. La clasificación es adoptada por los principales fabricantes de cerámicas piezoeléctricas, pero existen otros nombres en la industria. ATCP Brasil, denomina a sus cerámicas piezoeléctricas con las siglas SP-N, en donde N representa la clase de cerámica. FERROPERM, denomina a sus cerámicas con las siglas PZ, seguidas por distintos números en función de la clase. EDO, denomina a sus cerámicas con las siglas EC-6n, en donde n es un número que representa a una clase dada de piezoeléctrico. MORGAN, designa a sus cerámicas con las siglas PZT-n, en donde n es un número que representa a cada clase de piezoeléctrico.

Los materiales tipo Hard operan a altas tensiones eléctricas y mecánicas, sin que sus condiciones piezoeléctricas cambien sustancialmente, por lo cual resultan idóneos para aplicaciones de alta potencia (Polytecpi, 2012) [24]. Poseen una moderada permitividad, un gran factor de acoplamiento piezoeléctrico, una buena estabilidad bajo altas tensiones mecánicas y campos de operación, y, bajas

pérdidas dieléctricas (Polytecpi, 2012) [24] y dentro de este grupo podemos encontrar:

Por su parte Los materialesSoft poseen un alto valor para la constante descarga piezoeléctrica, permitividad moderada, y, altos valoresde acoplamiento (Polytecpi, 2012)[24]. Bajo condiciones de alta transmisión,estos materiales son susceptibles al calentamiento espontáneomás allá de su rango de temperatura de funcionamiento.

Entre las aplicaciones de estos materiales, se destacanactuadores, microposicionadores y sensores de nanoposición (Polytecpi, 2012) [24], para el caso de estudio se empleara una cerámica que pertenece al este grupo que recibe el nombre de:

- **Navy Type VI:**Este material, denominado PZT-5H por MORGAN, presenta una alta permitividad, un alto acoplamiento, y, unaalta constante piezoeléctrica. Es utilizado en aplicaciones querequieren grandes deformaciones mecánicas, comoposicionadores y actuadores. Su temperatura de Curie es baja,lo que limita su funcionamiento, y, su estabilidad en el tiempoes menor (MORGAN, 2012) [25].

A continuación se muestra el resumen de las propiedades elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas de las Cerámicas Piezoeléctricas (Guanghui Q., Jiajun Q. and Yanhong L., 2006) [26].

**Tabla 1.** Constantes elásticas de las cerámicas piezoeléctricas

Propiedad	C'11	C'22	C'33	C'12	C'13	C'23	C'44	C'55	C'66
<b>PZT-4 (GPa)</b>	139	139	115	77.8	74.3	74.3	25.6	25.6	30.6
<b>PZT-5H (GPa)</b>	126	126	118	79.5	84.1	84.1	23.3	23	23

Fuente:Guanghui, Jiajun, Yanhong, 2006[26]

**Tabla 2.** Constantes Piezoeléctricas de las cerámicas piezoeléctricas

Propiedad	$e'_{31}$	$e'_{32}$	$e'_{33}$	$e'_{24}$	$e'_{15}$
PZT-4 (C/m <sup>2</sup> )	-5.20	-5.20	15.08	12.7	12.7
PZT-5H (C/m <sup>2</sup> )	-6.50	-6.50	23.3	17	17

Fuente:Guanghui, Jiajun, Yanhong, 2006 [26]

**Tabla 3.** Constantes Dieléctricas de las cerámicas piezoeléctricas

Propiedad	$\epsilon'_{11}/\epsilon'_0$	$\epsilon'_{22}/\epsilon'_0$	$\epsilon'_{33}/\epsilon'_0$
PZT-4	1475	1475	1300
PZT-5H	1697,5	1698	1468

Fuente:Guanghui, Jiajun, Yanhong, 2006 [26]

#### **4.5 ANÁLISIS EMPLEANDO MEF A TRAVÉS DE ANSYS V11**

Este ítem muestra la metodología para el modelamiento mediante el MEF (Método de Elementos Finitos) de las cerámicas piezoeléctricas, aplicadas al control estructural de un elemento tipo viga en voladizo. Dicho modelamiento se realiza a través de las herramientas prestadas por el software Ansys versión 11.

##### **4.5.1 Ecuaciones que rigen el comportamiento electro-mecánico de los materiales piezoeléctricos.**

En la comprensión del comportamiento del efecto piezoeléctrico de los materiales cerámicos cuando trabajan en conjunto con elementos tipo viga, el punto de partida radica en las ecuaciones que rigen el comportamiento acoplado eléctrico y mecánico de los materiales. Solo el comportamiento eléctrico en un medio no sujeto a esfuerzo y bajo un campo eléctrico queda definido por dos cantidades: la

intensidad de campo  $E$  y la densidad de flujo electroestático  $D$  que se relacionan mediante la ecuación 6.

$$D = \varepsilon \times E \quad (6)$$

Donde la constante  $\varepsilon$  hace referencia a la permitividad del medio.

Por su parte, el comportamiento mecánico o elástico cuando la intensidad de campo es cero se define por dos magnitudes: la tensión o esfuerzo aplicado  $T$  y la deformación unitaria  $S$ , las cuales se relacionan mediante la ecuación 7.

$$S = s \times T \quad (7)$$

Donde  $s$  representa el inverso del módulo de elasticidad, es decir, se relaciona la deformación unitaria y el esfuerzo.

La piezoelectricidad involucra la interacción entre el comportamiento eléctrico y elástico de un medio, y es así definido por las relaciones lineales entre las dos variables eléctricas y las dos mecánicas:

$$S = s^E \times T + d \times E \quad (8)$$

$$D = d \times T + \varepsilon^T \times E \quad (9)$$

La elección de las variables independientes, una eléctrica y otra elástica, es arbitraria. Se puede plantear otro par de ecuaciones, que surge de una elección diferente de las variables independientes, como se muestra a continuación:

$$T = c \times S - e^T \times E \quad (10)$$

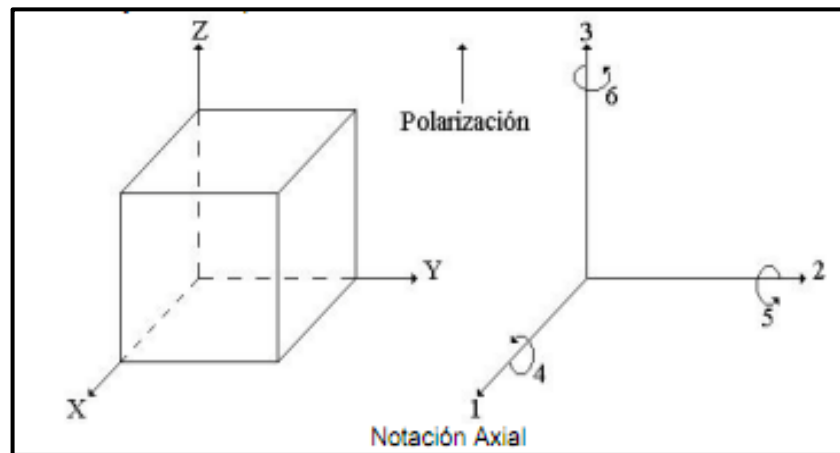
$$D = e \times S + \varepsilon \times E \quad (11)$$

Donde  $d$  y  $e$  son los coeficientes piezoeléctricos.

Las anteriores expresiones se pueden representar de forma matricial. Los elementos que conforman las matrices de las constantes piezoeléctricas dependen de la dirección del campo eléctrico, densidad de flujo, tensión y deformación unitaria. Por ello se agregan a los símbolos de dichas constantes subíndices que indican la dirección.

Para los materiales cerámicos piezoeléctricos la dirección de polarización positiva se toma paralela al eje Z en un sistema ortogonal XYZ como se muestra en la figura 5. Dado que estos materiales tienen simetría polar, los sentidos de X e Y elegidos en un elemento, tienen especial importancia. Si las direcciones X, Y, Z se representan como 1, 2 y 3 respectivamente y los giros o torsiones sobre estos como 4, 5 y 6 respectivamente, los distintos parámetros pueden ser escritos con subíndices referentes a dichas direcciones(González A., 2009) [16].

Figura 5. Ejes coordenados que describen las direcciones de aplicación de parámetros piezoeléctricos



Fuente: González A. 2009 [16]

En la matriz dieléctrica, representada por  $\epsilon$ , se encuentran las constantes de permitividad del material, cuyos subíndices proporcionan la relación entre la dirección del desplazamiento eléctrico y la dirección del campo eléctrico. Por ejemplo, para el caso del elemento  $\epsilon_{11}^T$  se indica que la densidad de flujo

electrostático (desplazamiento eléctrico) y el campo eléctrico van en la dirección 1, además, el superíndice  $T$  indica una tensión constante ( $T = 0$ ). Para los valores de la constante elástica  $s$ , el primer subíndice proporciona la dirección de la deformación unitaria y el segundo la dirección de la tensión o esfuerzo. En la siguiente ecuación se muestra lo mencionado anteriormente, y la relación inversa con el módulo elástico  $c$ :

$$s_{33}^E = \frac{1}{c_{33}^E} \quad (12)$$

El superíndice  $E$  hace referencia a la actuación de un campo eléctrico constante ( $E = 0$ ).

En el caso de las constantes  $e$  y  $d$ , el primer subíndice indica la dirección del campo eléctrico y el segundo genera la dirección de la deformación. Se tiene por ejemplo, que  $d_{33}$  es la relación entre la deformación en la dirección 3 al campo aplicado en la misma dirección, con el cuerpo piezoeléctrico mecánicamente libre y no sujeto a campos en las direcciones 1 y 2. Para el caso  $e_{31}$  da la relación del campo desarrollado en la dirección 3 a la tensión aplicada en la dirección 1 cuando no hay otras tensiones externas y cuando no hay cargas aplicadas en cualquiera de las tres direcciones. También representa la relación entre la deformación en la dirección 1 a la densidad de carga aplicada a los electrodos los cuales están colocados en ángulos rectos respecto al eje 3, mientras el material se encuentre libre mecánicamente en todas las direcciones y no se aplique campo en las direcciones 1 y 2.

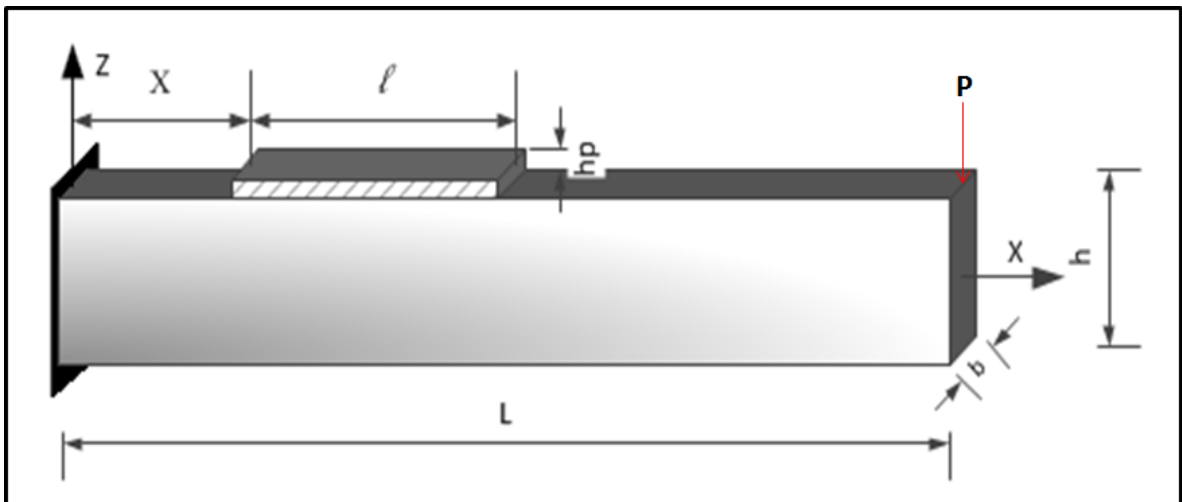
La implementación de las ecuaciones constitutivas del comportamiento piezoeléctrico 8 y 9, junto con alguna teoría de vigas como la de Euler-Bernoulli o Timoshenko, y un análisis estático o dinámico del problema estructural, proporcionan las ecuaciones diferenciales que serán resueltas analítica (para los casos estáticos) o numéricamente (principalmente casos dinámicos). Para el caso particular del estudio realizado, a pesar de ser un análisis estático, se implementó

una solución numérica basada en el método de los elementos finitos mediante el uso del programa ANSYS versión 11.

#### 4.5.2 Características del Modelo

Este caso de estudio consiste en un modelo 3D de una viga en voladizo, empotrada en su extremo izquierdo, dicha viga es de concreto reforzado de 21 [MPa] (3000 Psi). Otra característica del modelo, es la presencia de láminas de material piezoeléctrico PZT-5H, de tamaños variado, localizadas a diferentes distancias del empotramiento en la superficie superior e inferior de la viga, aplicándoles diferentes voltajes, dicho posicionamiento se realiza con el fin de estimar la ubicación que le proporciona mejor comportamiento en cuanto a la deformación que se produce en el extremo derecho de la viga, bajo el efecto de aplicación de una carga en el mismo. Las características geométricas se presentan en la figura 6.

**Figura 6.** Características geométricas Viga – Láminas piezoeléctricas



Fuente: Autores, 2013

En los modelamientos a realizar, se mantendrán constantes las siguientes características acorde con la figura 12:

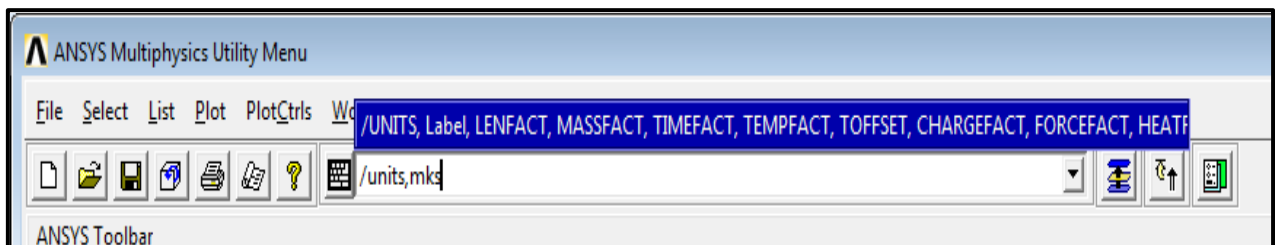
$$\mathbf{L} = 0.10 \text{ m}; \mathbf{b} = 0.01 \text{ m}; \mathbf{h} = 0.016 \text{ m}; \mathbf{P} = 50 \text{ N}.$$

#### 4.5.3 Procedimiento para la creación de modelos Viga/PZT-5H

Este modelamiento se realiza en Mechanical APDL (ANSYS), una de las muchas aplicaciones del programa Ansys, la cual permite trabajar con materiales piezoeléctricos. La metodología empleada se basa en el procedimiento enunciado en el trabajo de maestría realizado por el ingeniero Carlos Bassi de la Universidad de Sao Paulo (Bassi C. E., 2011) [27], cuyo objeto de estudio requiere resultados a partir de la interacción con materiales piezoeléctricos.

- Inicialmente se debe tener en cuenta empezar a trabajar sobre un archivo nuevo, es decir, sin modificar los parámetros preestablecidos, puesto que se van a proporcionar todos los datos necesarios para realizar el modelo.
- Seguidamente es importante definir el sistema de unidades con el cual se va a trabajar, para el caso de estudio se utilizaran las unidades del SI, para esto se debe Tabular en Ansys Command Windows (Ventana de comandos de Ansys) la siguiente línea de programación: `/units, mks`.

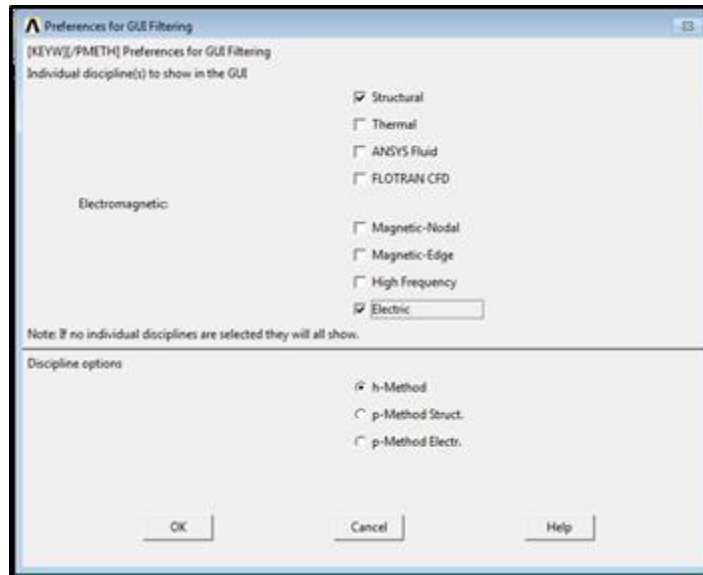
Figura 7. Asignación unidades de trabajo



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

- Debido a que en el modelamiento la información requerida es de carácter electro-mecánica se debe definir esto seleccionando las opciones Structural y Electric en Preferences for GUIE Filtering del menú Preferences.

**Figura 8.** Definición de información requerida para el modelamiento



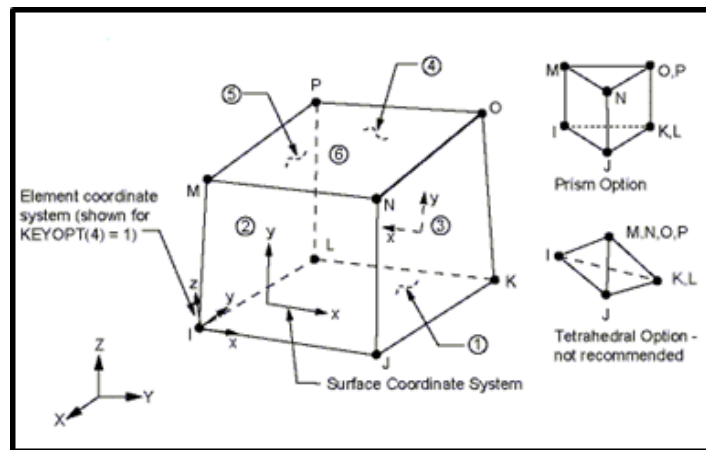
Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

- Esta aplicación de Ansys cuenta con una serie de elementos en su librería con una configuración interna que permite realizar el modelamiento con materiales de forma más aproximada a la realidad, en este caso se implementara el elemento SOLID45 para simular el concreto reforzado y SOLID5 para las láminas piezoeléctricas, los cuales cuentan con las siguientes características:

**SOLID45:** El elemento es usado para modelamientos en tres dimensiones de estructuras sólidas, está definido por ocho nodos con tres grados de libertad en cada nodo, es decir, desplazamientos en las tres direcciones ortogonales (UX, UY, UZ), posee además, plasticidad, fluencia, inflamación,

rigidez bajo esfuerzo, gran deflexión y capacidades de gran tensión. Una versión de orden mayor de este elemento es el denominado SOLID95. También existe el denominado SOLID65, que puede modelar el concreto reforzado, sin embargo, es semejante al SOLID45 con la diferencia que el primero trabaja mejor las no linealidades del material, lo cual no afecta el estudio realizado que maneja un rango elástico, es decir, cualquiera de los dos elementos trabajará adecuadamente.

**Figura 9.** Geometría del elemento SOLID45



Fuente: Ansys v11, 2013 [28]

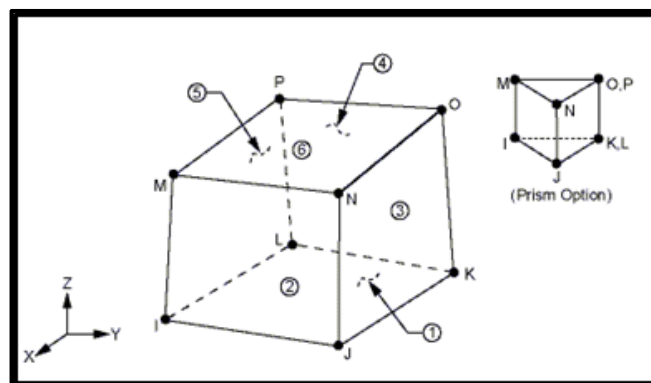
La geometría, localización de nodos y el sistema coordenado del elemento son mostrados en la figura 15. Se pueden introducir presiones como cargas superficiales. Los parámetros de entrada de este elemento son:

- Incluir o suprimir formas de desplazamientos extras (KEYOPT 1).
- Opción de integración (KEYOPT 2).
- Sistema coordenado (KEYOPT 4).
- Salidas extras de elementos (KEYOPT 5).
- Salidas extras de superficies (KEYOPT 6).
- Opción de subrutina de esfuerzos (KEYOPT 9).

Para el trabajo realizado las opciones por defecto fueron dejadas. Además, a diferencia del SOLID5, este tipo de elemento presenta una constante real que por defecto fue dejada como 1, sin embargo maneja un rango entre 1 y 10. Todo lo anterior mantiene controlado el comportamiento del sistema modelado; pero no todos los valores por defecto son adecuados, por tanto el programa ofrece la opción con el comando “CNCHECK, AUTO”, de obtener opciones (KEYOPT) y constante real adecuadas en términos de eficiencia y generación de modelos robustos.

**SOLID5:** El elemento SOLID5, es uno de los tantos elementos con capacidad de modelar campos acoplados. Este es tridimensional y maneja grados de libertad estructurales, magnéticos, eléctricos, piezoeléctricos y térmicos. Posee ocho nodos y hasta seis grados de libertad por nodo, convirtiéndolo en una herramienta valiosa a la hora de modelar problemas complejos. Cuando se usa en análisis piezoeléctricos o estructurales, obtiene adecuadas deflexiones y capacidad de rigidez bajo esfuerzos. La geometría de este elemento se puede apreciar en la figura 10.

**Figura 10.** Geometría del elemento SOLID5

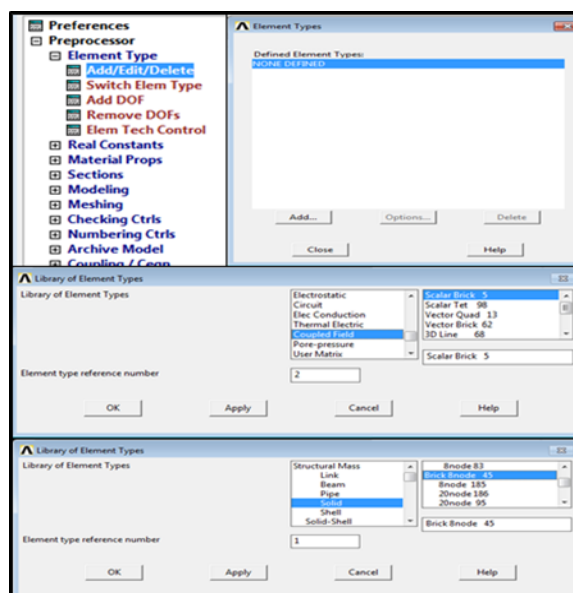


Fuente: Ansys v11, 2013 [28]

Varias combinaciones de cargas nodales están disponibles para el SOLID5, estas son definidas con los comandos del programa “D” y “L”, con el primero de ellos se escogen los grados de libertad que se manejarán como por ejemplo desplazamiento en las tres direcciones (UX, UY, UZ), voltaje (VOLT), temperatura (TEMP) y potencial magnético escalar (MAG), luego, con el segundo comando se podrán escoger las cargas que se aplicarán acorde a los grados de libertad seleccionados, para el caso de este elemento las posibles cargas serán, fuerza en las tres direcciones (FX, FY, FZ), flujo de temperatura (HEAT), corriente o carga (AMPS) y flujo magnético (FLUX). Vale la pena mencionar que dicho elemento no necesita de un parámetro usado por el programa denominado constante real, por tanto tendrá un valor cero (ANSYS v11, 2013) [28].

Para poder utilizar estos elementos se deben agregar al Element Types del menú Preprocessor, mediante la siguiente ruta Preprocessor– Element Type– Add/Edit/Deleted, como se muestra en la figura 11:

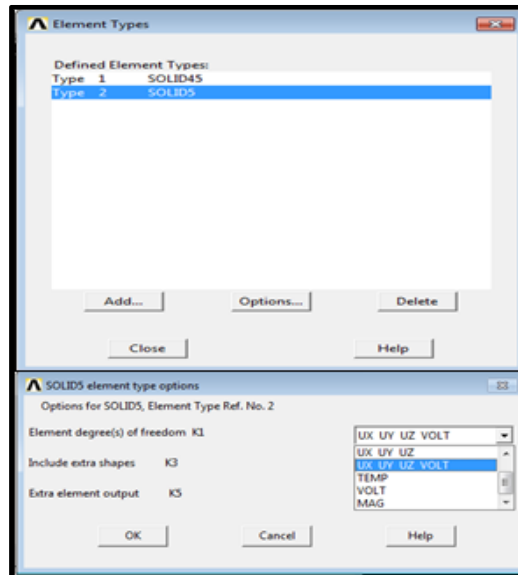
**Figura 11.** Selección de los tipos de elementos finitos



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

Al elemento SOLID5 se le deben definir las opciones con las cuales se va a trabajar que para este caso son desplazamiento en las tres direcciones y voltajes, siguiendo la ruta: Seleccionar SOLID5 – Options – Element degree(s)of freedom K1= UX UY UZ VOLT, como muestra la figura 12:

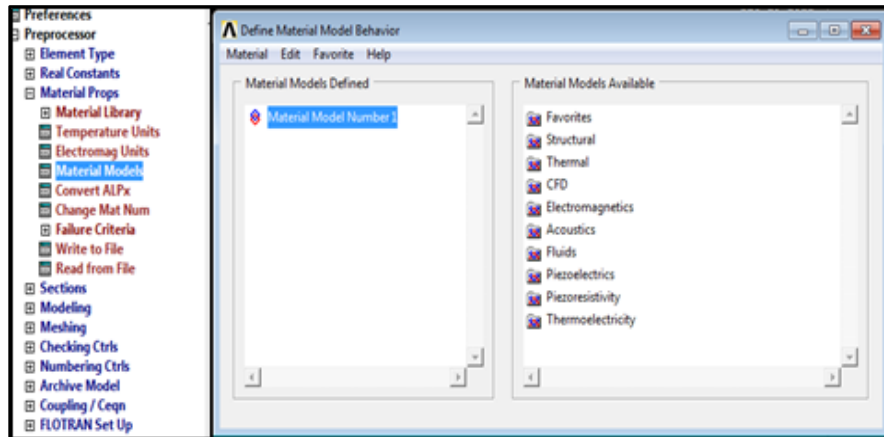
**Figura 12.** Definición de las características del elemento finito



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

- Una vez definidos los tipos de elementos, se deben establecer los materiales con los cuales se va a trabajar, asignando las propiedades con las cuales cuenta este. Para el caso en estudio se definen 2 materiales, el concreto reforzado y el PZT-5H a los cuales se les asignarán las constantes de las matrices enunciadas a continuación, tomadas de las tablas 2, 3 y 4. La definición de dichos materiales con sus respectivas propiedades se realiza a través del menú Preprocessor, mediante la siguiente ruta: Preprocessor – Material Props – Material Models.

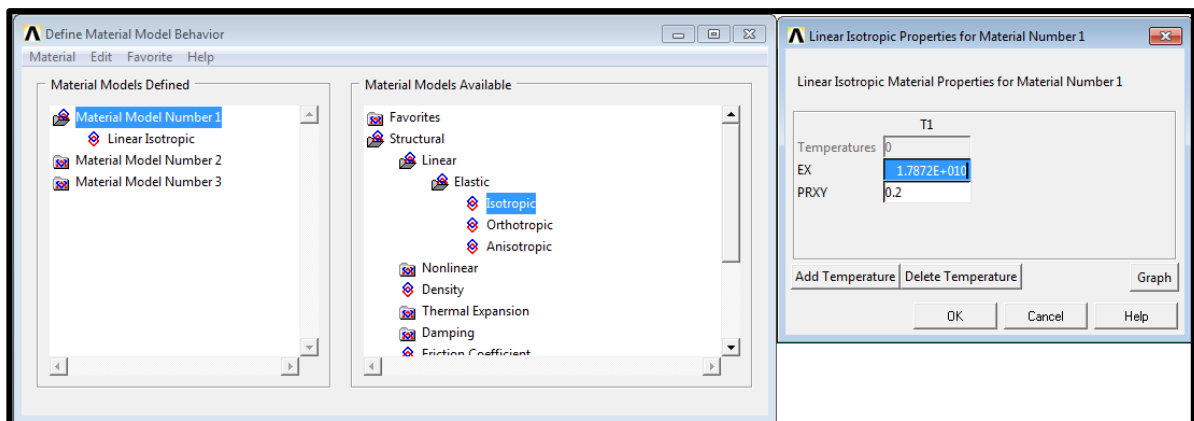
**Figura 13.** Definición de materiales



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

Para definir el material concreto reforzado, que se trata de un material con propiedades estructurales lineales de elasticidad isotrópica, se creará el “Material Model Number 1”, asignándole dichas propiedades de la siguiente forma: Material Model Number 1 – Structural – Linear – Elastic – Isotropic.

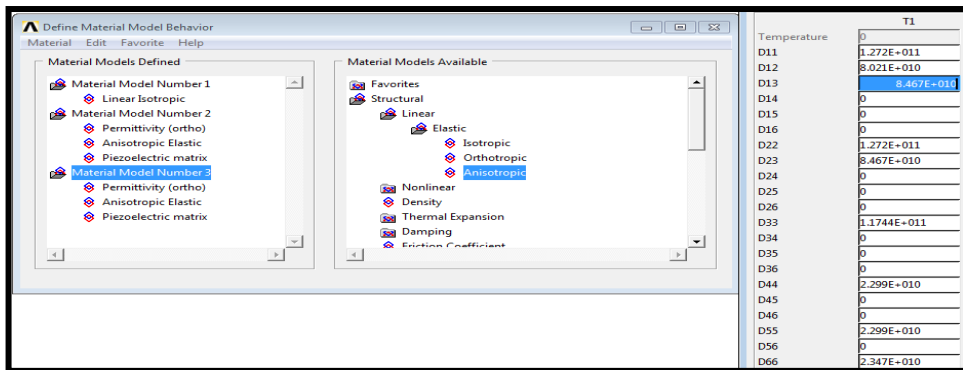
**Figura 14.** Asignación de la matriz elástica viga concreto reforzado



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

En el caso de las cerámicas piezoeléctricas se crean los materiales necesarios asignándole un número diferente, en este caso se define el “Material Model Number 2” para el PZT-4 Y el “Material Model Number 3” para el PZT-5H que será el que se usará en el caso de estudio. Se introducen las propiedades estructurales teniendo en cuenta que se trata de una material con propiedades estructurales lineales de elasticidad anisotrópica, mediante la siguiente ruta: Material Model Number 2,3 – Structural – Linear – Elastic – Anisotropic.

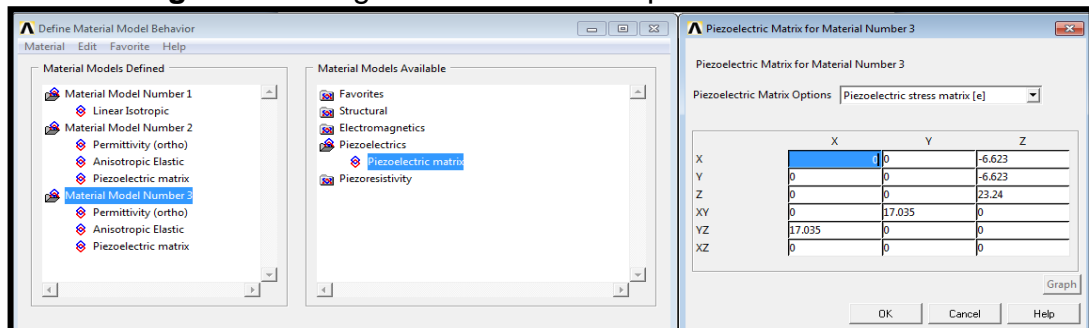
**Figura 15.** Asignación de la matriz elástica PZT-5H



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

Las propiedades piezoeléctricas se asignan mediante la siguiente ruta: Material Model Number 2,3 – Piezoelectrics – Linear – Piezoelectric matrix.

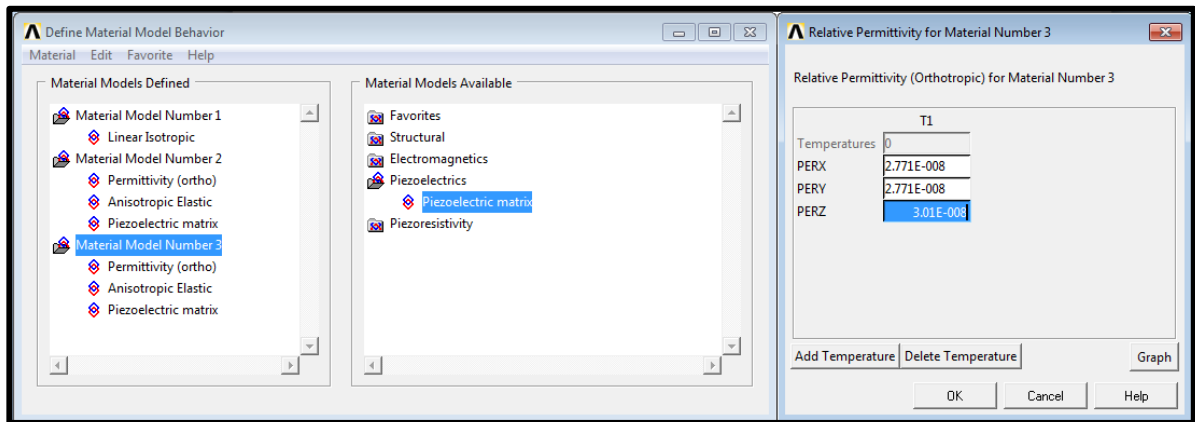
**Figura 16.** Asignación de la matriz piezoeléctrica PZT-5H



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

Las propiedades de permitividad relativa se asignan mediante la siguiente ruta:  
Material Model Number 2,3 – Piezoelectrics – Linear – Piezoelectric matriz.

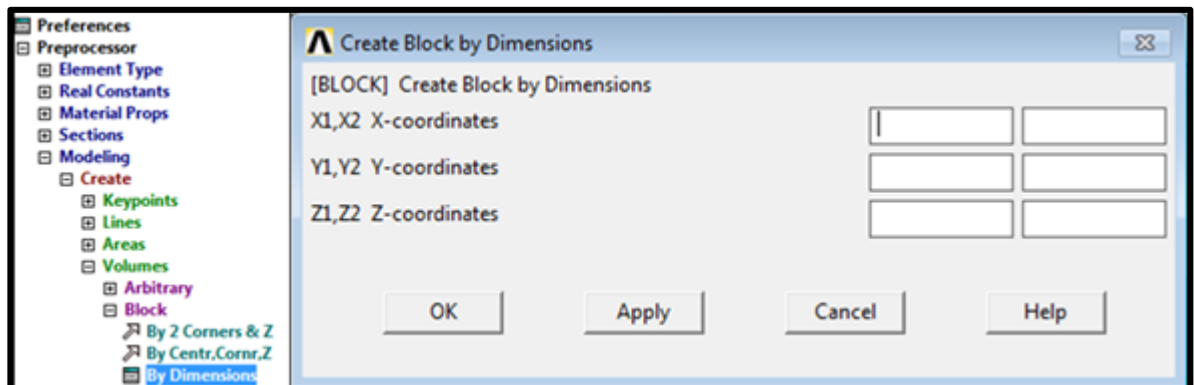
**Figura 17.**Asignación de la matriz dieléctrica PZT-5H



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

- Una vez definidos los materiales se crean los volúmenes siguiendo la ruta: Preprocessor – Modelling – Create – Volumes – Block – By Dimensions. Por tratarse de sólidos en forma regular donde se define el inicio y el final de los lados en las direcciones.

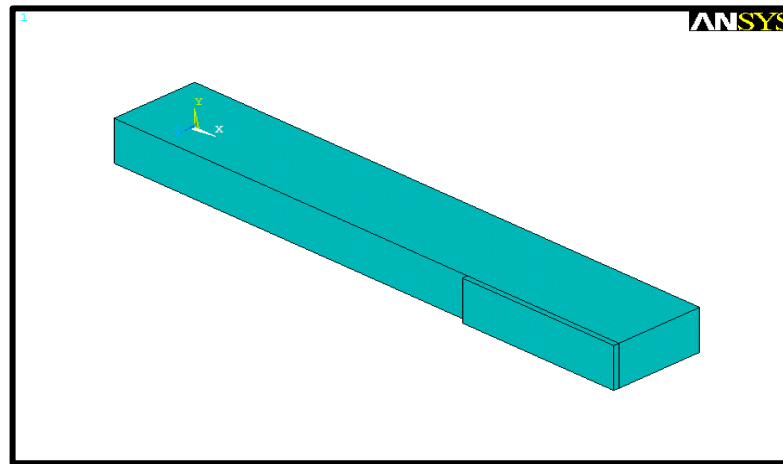
**Figura 18.** Creación de volúmenes de la viga y el actuador



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

Se debe tener en cuenta que la viga se debe crear con su longitud a lo largo del eje X, su altura en dirección Z y su ancho en dirección Y, debido a las propiedades asignadas al material piezoeléctrico. Este procedimiento se repite para crear los parches de material piezoeléctrico, hasta obtener el siguiente esquema.

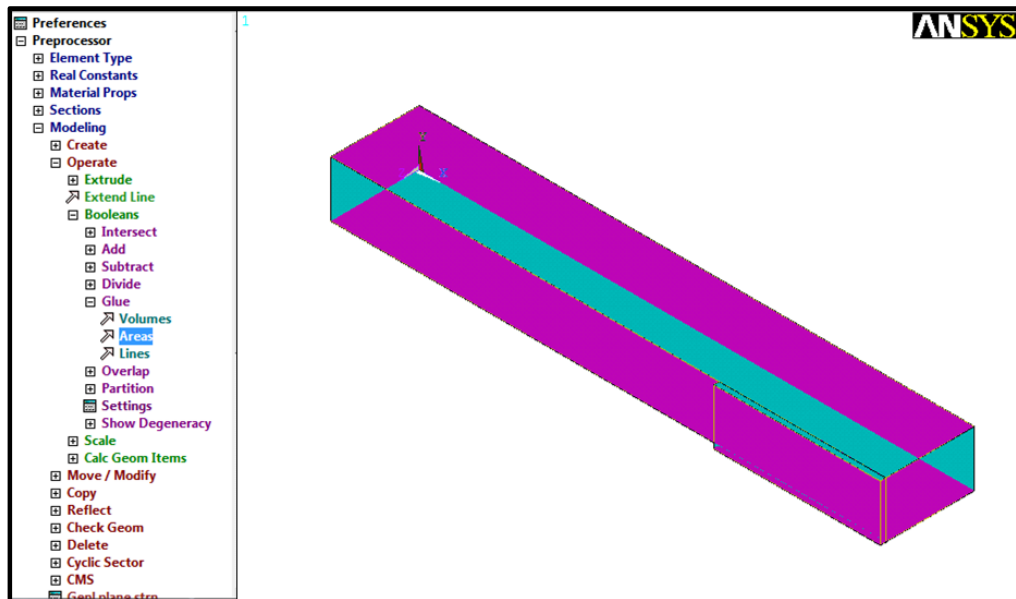
**Figura 19.** Volúmenes generados



Fuente: Ansys 11, 2007 [28]

- Mediante el comando Glue se pegan las áreas de contacto entre los dos sólidos, ubicadas en un mismo plano con el fin de garantizar la adherencia entre la viga y el PZT-H5 (Bassi C. E., 2011) [27]. Vale la pena mencionar que las áreas a pegar se encuentran paralelas al plano XY de acuerdo con la configuración descrita. Este procedimiento se hace mediante la ruta: Preprocessor – Modelling –Operate – Booleans – Glue – Areas y se seleccionan dichas áreas como se muestra a continuación:

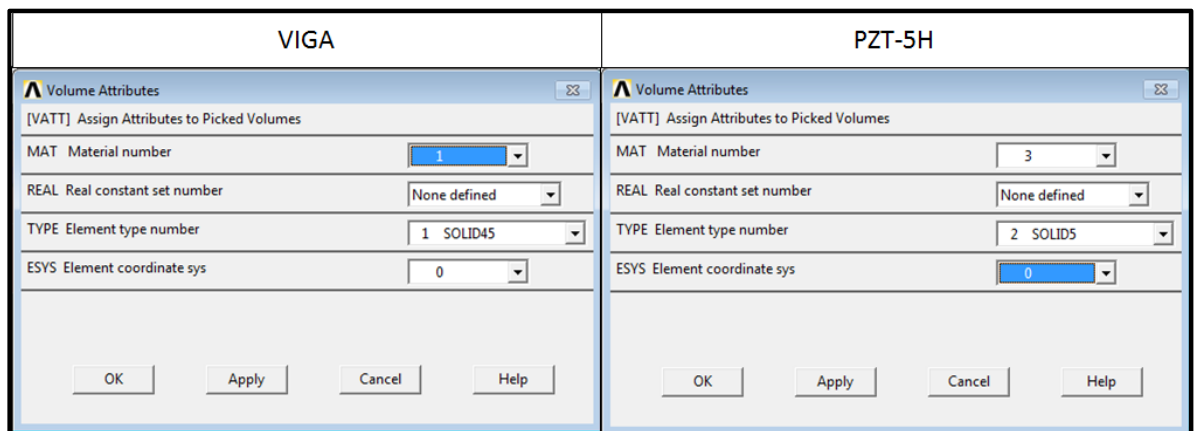
**Figura 20.** Resultado del pegado de áreas



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

- Se asigna el tipo de elemento y tipo de material a cada uno de los sólidos siguiendo la ruta: Preprocessor – Meshing – Mesh Tool – Element Attributes: Volumes – set, luego se selecciona el sólido y se le asigna el tipo de elemento y el material, en nuestro caso como se muestra en la figura 21:

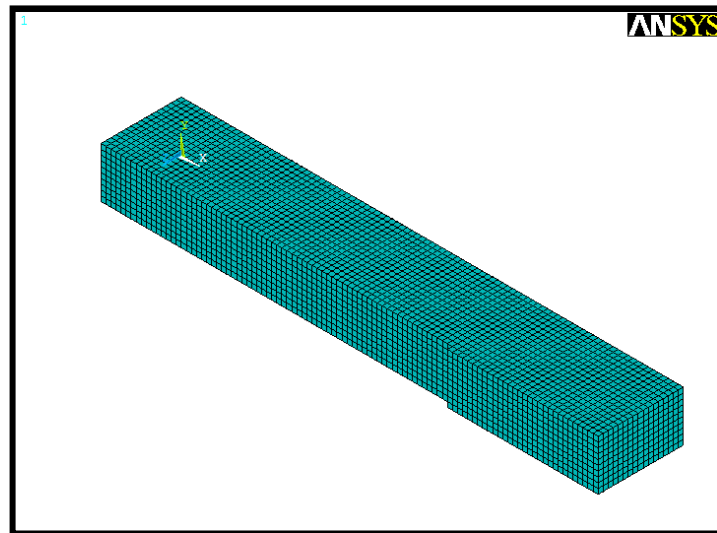
**Figura 21.** Asignación del tipo de elemento y material a los volúmenes



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

En Size Control – Global- Set de la opción Mesh Tool se define el tamaño de los elementos para el análisis de elementos finitos, asignando un tamaño de 0.001 metros y finalmente se genera definiendo la opción Mesh: Volumes – Hex – Mapped – botón Mesh y se seleccionan los sólidos para crear el mallado y obtener el siguiente resultado:

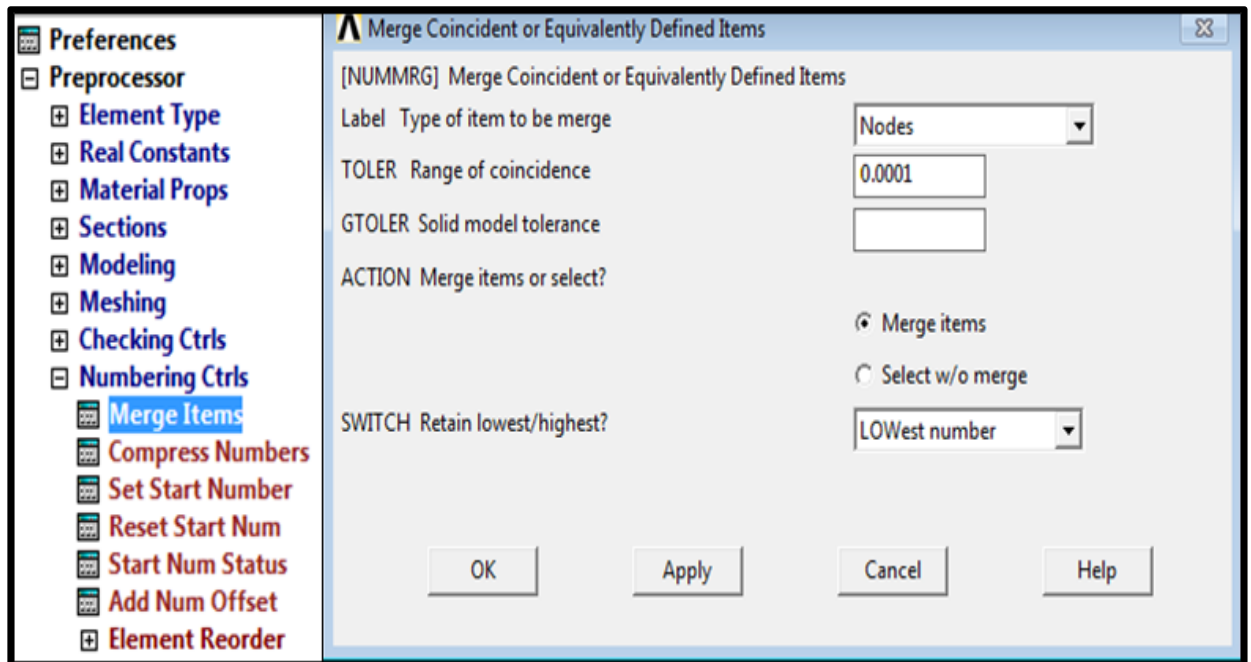
**Figura 22.** Creación de la malla de elementos finitos



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

- Una vez realizada la malla se deben unir los nodos de la superficie de contacto este procedimiento se realiza mediante la opción Merge Items con ayuda del menú Select – Entites para seleccionar, solo dejar activos dichos nodos y así aplicarles la opción Merge Items mencionada, asignando un valor de 0.0001 a la tolerancia máxima de separación entre nodos que se unirán, para utilizar dicha opción se hace la ruta: Preprocessor – Numbering Ctrl's – Merge Items (Bassi C. E., 2011) [27].

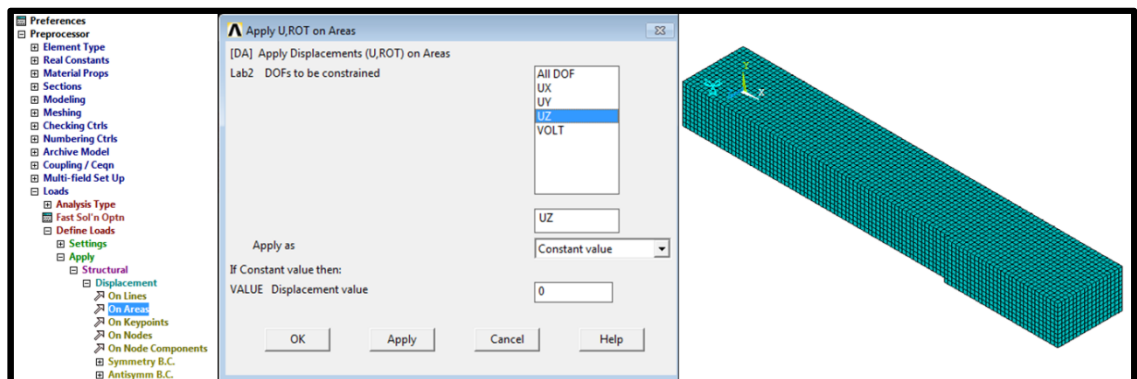
Figura 23. Unión de nodos de interfaz viga/PZT-5H



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

- El empotramiento en el extremo izquierdo de la viga se realiza siguiendo la ruta: Preprocessor – Loads – Define Loads – Apply – Structural – Displacements – On Areas, se selecciona el área a empotrar y se le asigna el valor de cero a los UX, UY y UZ como se muestra a continuación.

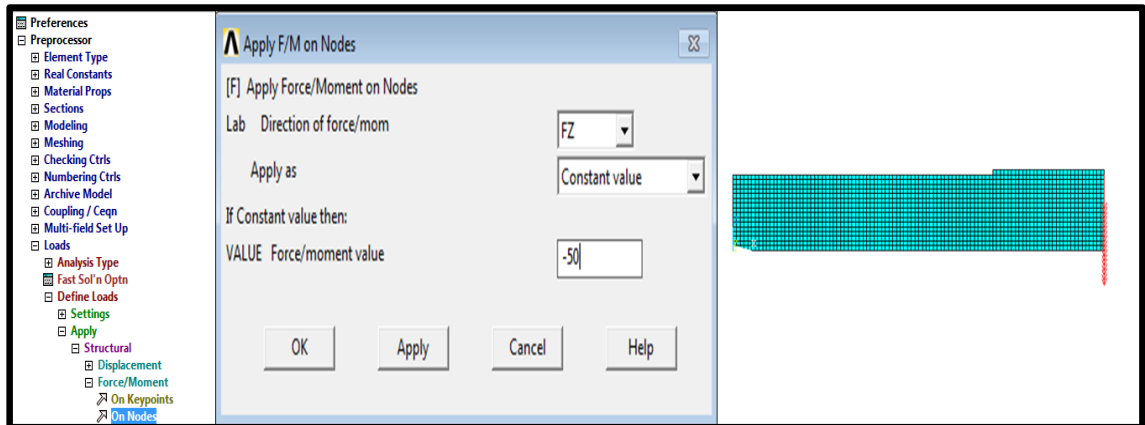
Figura 24. Asignación de restricciones



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

- La aplicación de la carga en el extremo derecho de la viga se realiza siguiendo la ruta: Preprocessor – Loads – Define Loads – Apply – Structural – Force/Moment – On Nodes, se seleccionan los Nodos a cargar y se le asigna el valor de la carga y su dirección como se muestra en la figura:

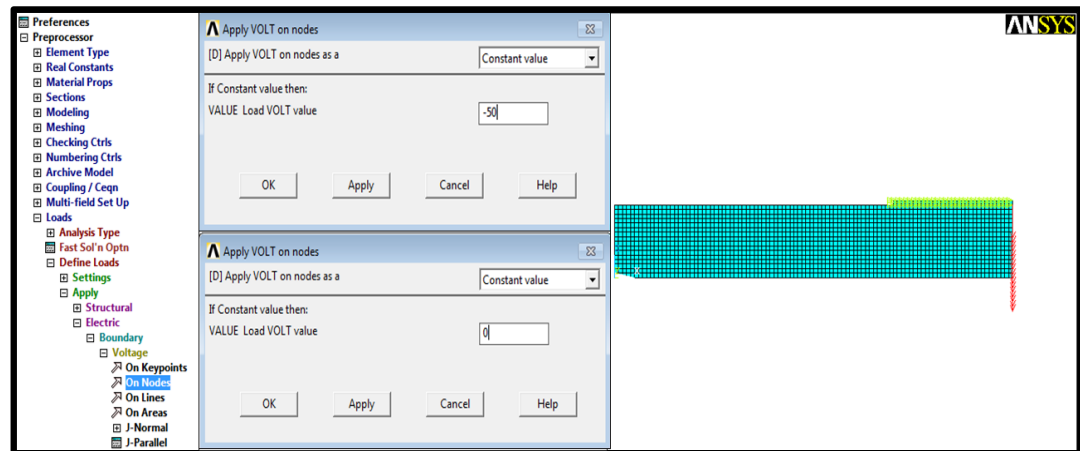
**Figura 25.** Asignación de carga en la viga



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

- En el caso de los voltajes se deben seleccionar los nodos de la superficie de contacto entre los dos materiales y se les asigna un voltaje de cero con el fin de generar un polo a tierra o una restricción que impide que el elemento viga sea afectado. Y se aplica el voltaje (diferente de cero) en los nodos de la superficie exterior del material piezoeléctrico, siguiendo la ruta: Preprocessor – Loads – Define Loads – Apply – Electric – Boundary – Voltage – On Nodes. Como se muestra en la figura 26:

**Figura 26.** Asignación de voltaje en la lámina de PZT-5H



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

- Después de definir las condiciones de carga, se corre el modelo mediante la siguiente ruta: Solution – Solve – Current LS.
- Para visualizar los resultados mediante la ruta: General Postproc – Plot results – Contour Plot – Nodal Solu.

Con el fin de validar este procedimiento, se realiza el modelamiento de un ejemplo ya aceptado formalmente en el grupo de publicaciones “Elsevier” en el área de materiales compuestos. A continuación se presentan los resultados obtenidos en cuanto al desplazamiento de la sección transversal. Las imprecisiones obtenidas en los modelos son más notorias en los esfuerzos obtenidos, pero esto surge de la falta de información en cuanto al elemento finito usado en la viga. Las propiedades de los materiales usados se pueden verificar en las tablas 1, 2 y 3 para el caso del material piezoeléctrico (PZT-4), y en la tabla 4 para el material de la viga (Grafite/Epoxy). Se debe tener en cuenta que todas las dimensiones ingresadas en el modelo están acorde a la sección 4 y el numeral 4.2 de la referencia (Koutsawa, Giunta, Belouettar, 2012) [29]. Debido a que la configuración geométrica de la viga del caso estudiado es igual a la del ejemplo de validación,

se pueden verificar estas dimensiones en el numeral 4.523 del presente trabajo. En cuanto a las dimensiones de la lámina o parche, se listan a continuación:

$$\mathbf{L} = 0.05 \text{ m}; \mathbf{b} = 0.01 \text{ m}; \mathbf{h} = 0.001 \text{ m}$$

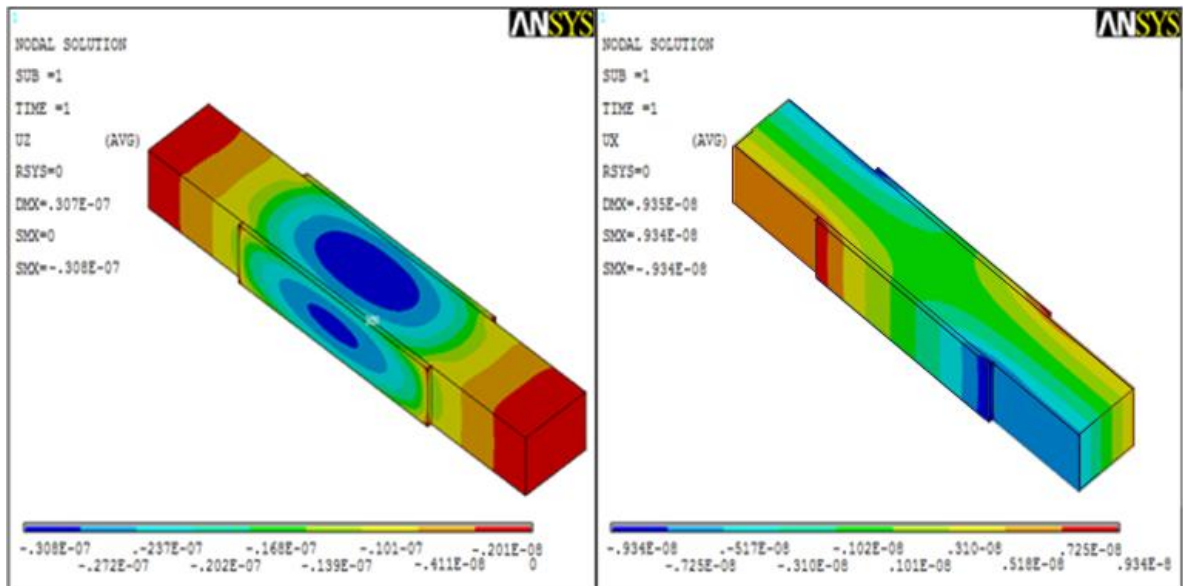
Donde las variables representan la longitud, el ancho y el espesor de los actuadores respectivamente.

**Tabla 4.** Propiedades elásticas del material Grafite/Epoxy (En GPa)

Propiedad	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$
Gr/Ep	132,38	10,756	10,756	0,24	0,24	0,49	5,6537	5,6537	3,606

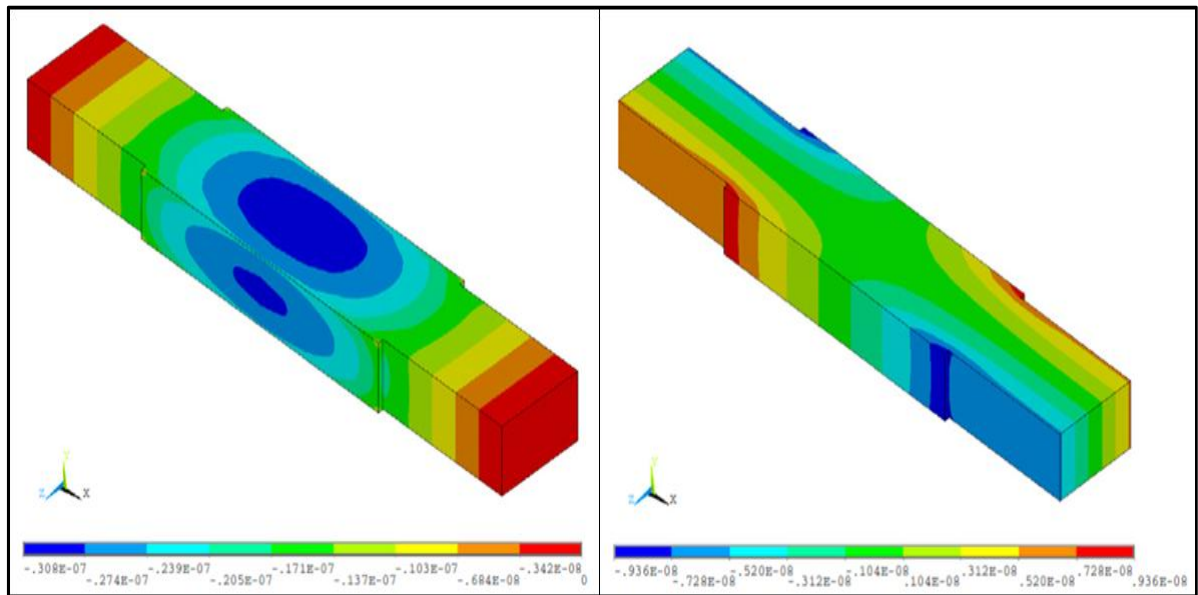
Fuente: Koutsawa, Giunta, Belouettar, 2012 [29]

**Figura 27.** Desplazamiento transversal del modelo propio (a)  $u_z$  en metros y (b)  $u_x$  en metros



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

**Figura 28.** Desplazamiento transversal del modelo del artículo (a)  $u_z$  en metros y (b)  $u_x$  en metros



Fuente: Koutsawa, Giunta, Belouettar, 2012 [29]

Los resultados obtenidos en el montaje del modelo de validación fueron concordantes con los valores consignados en el artículo de validación, por tanto se puede decir que la metodología empleada es correcta y se puede aplicar para los modelos generados en el caso de estudio.

#### **4.6 ALGORITMO DE CONTROL PARA LA MINIMIZACIÓN**

Una vez está verificado el procedimiento para generar el modelo en el programa ANSYS, se procede con la generación del algoritmo que llevará a la minimización de la deflexión en el extremo libre del elemento estructural. Como primera medida se definen las condiciones de apoyo y carga, que para el caso de estudio son: empotramiento en el extremo izquierdo, libre el extremo derecho y carga puntual en este último. Antes de empezar el proceso de minimización del desplazamiento transversal en dirección del eje Z, se generan ciertos modelos en el programa que sirven para analizar el comportamiento de los parches solo con voltaje aplicado en

la cara superficial y sin carga mecánica. De lo anterior, dependerá el signo del voltaje usado en el control y la manera como se empezará el procedimiento por prueba y error, siendo este el principio o la base del algoritmo de control de deflexión empleado. Este procedimiento se realiza con el fin de cumplir el objetivo que pretende definir el comportamiento mecánico obtenido de la interacción de una viga en voladizo de concreto reforzado y los parches piezoeléctricos. Lo anterior consiste en la creación de un modelo de viga con parche (1 solo parche) y sin carga puntual, al cual se le aplica un voltaje aleatorio diferente de cero para conocer el comportamiento del conjunto, es decir, si el elemento estructural se deforma por acción del actuador y en qué dirección se deforma (flexión positiva o negativa). Se asume como posición aleatoria de referencia para el actuador el centro de la viga, y la cara superior de la misma. El tamaño del parche se asumió de 3 cm, teniendo en cuenta la poca longitud de la viga y los valores empleados en las referencias (Xu, Koko, 2004) [14], (Tripathi, Gangadharan, 2012) [43] y (Bruch, 2000) [35] El primer voltaje asignado fue positivo y el segundo negativo.

Luego, de acuerdo a los resultados obtenidos en el análisis previo, en cuanto al signo del voltaje y su efecto en la deformación del conjunto viga/actuador, se realiza un reconocimiento de los efectos de un parche superior o inferior con voltaje y tamaño constante en el centro y en los dos extremos del elemento para hacer una primera observación de la posición adecuada del actuador.

Básicamente son tres variables las que dominan el problema analizado, de ellas dos son independientes y la restante depende de las dos primeras. Se tienen como variables independientes la posición del parche y el voltaje que se suministra en la superficie del actuador, como variable independiente a controlar, se tiene la deflexión de la viga en su extremo libre. El primer paso de la etapa de control, es decir, el inicio del algoritmo, es el modelamiento en ANSYS de la viga con la condición de apoyo y carga dadas, sin el efecto de los actuadores piezoeléctricos, todo esto con la finalidad de conocer la deflexión causada total (la

que será reducida). Se debe verificar que sea un valor consistente con ecuaciones deducidas analíticamente. Para el caso de estudio dicha ecuación es:

$$D_{m\acute{a}x.} = \frac{F * L^3}{3 * E * I} \quad (13)$$

Acorde al tamaño del elemento (viga) y al tamaño de la lámina piezoeléctrica escogido (el mismo tamaño usado antes), se generan modelos con actuadores en diferentes posiciones a lo largo de la viga, de derecha a izquierda y bajo un rango de voltajes entre 0 y 1000 Voltios, considerado como óptimo para las características de las láminas a usar según (Bruch, 2000) [30]. Como alternativa se sugiere mover el parche cada 0.005 m hasta llegar al empotramiento, con el fin de obtener una adecuada cantidad de deflexiones para analizar. De acuerdo al intervalo de voltajes asignado, el cual depende del tipo de cerámica piezoeléctrica, se realiza el procedimiento descrito arriba, de tal manera que para un valor de voltaje asignado, se mueva la lámina en cada punto sobre el eje axial del elemento. De esta forma se analiza el mejor posicionamiento del elemento piezoeléctrico, y se empieza a observar el efecto del aumento de voltaje.

Lo siguiente, es elegir el mismo rango de voltajes, y ubicar el parche en una posición fija, la posición estipulada dependerá de los resultados obtenidos en el proceso inmediatamente anterior, lo que garantiza la reducción de posibilidades respecto a los mejores valores para las variables. Una vez escogida dicha posición, se variará el tamaño de la lámina hasta un valor aproximadamente el tamaño del elemento (viga), esto con el fin de analizar el efecto que produce dicha variación del tamaño del parche a la deflexión de la viga. Para este caso particular, se toma el extremo empotrado como punto coincidente con el extremo izquierdo del parche y se modificó la longitud cada centímetro hasta abarcar la longitud total de la viga. Cada valor de voltaje elegido dentro del rango tendrá asignado distintos

valores de la dimensión longitudinal del parche, y cada uno produce una reducción de la deflexión.

Se realizan pruebas con más de un parche, acomodándolos primero uno al lado del otro con una separación proporcional a su tamaño, y luego en superficies contrarias manteniendo la simetría respecto al eje axial X. en el análisis se realizó este procedimiento para dos parches, ambos casos en el extremo empotrado o cerca de este.

Finalmente, se elige la mejor configuración del paso anterior, y con un tamaño de parche y ubicación constante, escogidos previamente conforme a los mejores resultados analizados, se realiza un último modelo para garantizar un óptimo comportamiento bajo el rango de voltajes permitido. Hay que destacar el hecho de que todos los modelos creados manejaron la misma magnitud de la carga.

## **4.7 RESULTADOS OBTENIDOS**

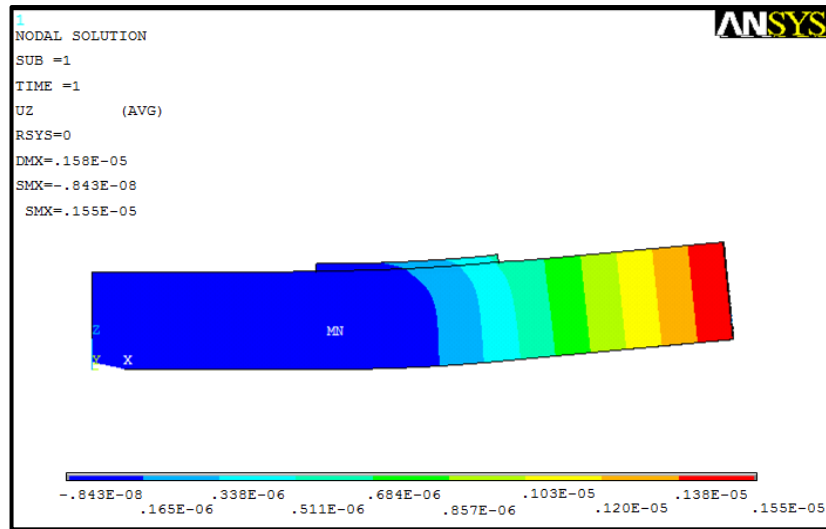
Los resultados mostrados a continuación son producto de la aplicación del algoritmo descrito en la sección 5.6 del presente proyecto, con el cual se buscaba la minimización de la deflexión máxima producida en una viga en voladizo, por efecto de una carga puntual en su extremo libre.

### **4.7.1. Resultados del comportamiento de los parches**

Las imágenes de las figuras 35 y 36, hacen referencia al análisis previo a la realización del proceso de minimización, con el cual se reconoció el efecto de aplicar voltaje positivo o negativo, con una misma magnitud, en una lámina piezoeléctrica de 3 [cm] de longitud ubicada en la parte superior, a 0.035 m del extremo empotrado de la Viga, es decir, en el centro de la misma. Se puede observar que surgen dos formas de flexión en la viga, en la primera al aplicar

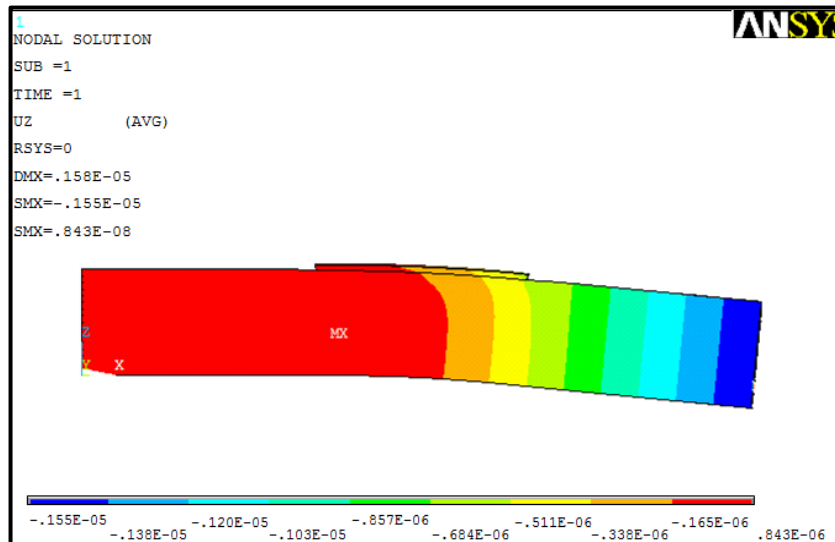
voltaje negativo de 100 [V] (ver figura 29), generando flexión positiva, mientras que con la aplicación del mismo voltaje con signo positivo, se genera una flexión negativa del elemento (ver figura 30).

**Figura 29.** Comportamiento con parche superior y voltaje negativo (en metros)



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

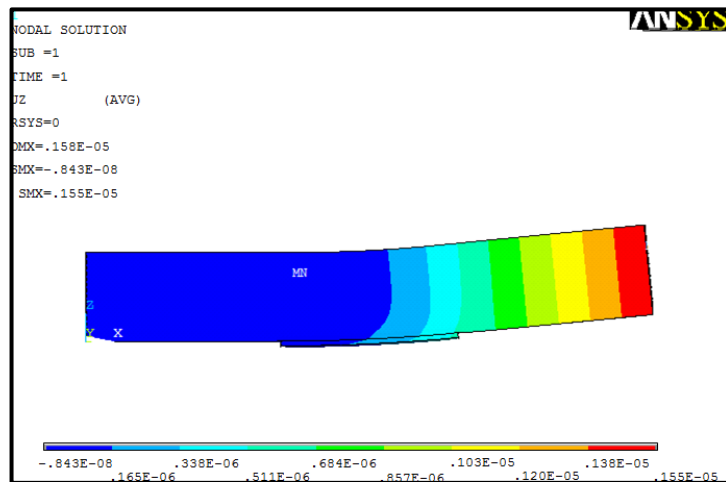
**Figura 30.** Comportamiento con parche superior y voltaje positivo (en metros)



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

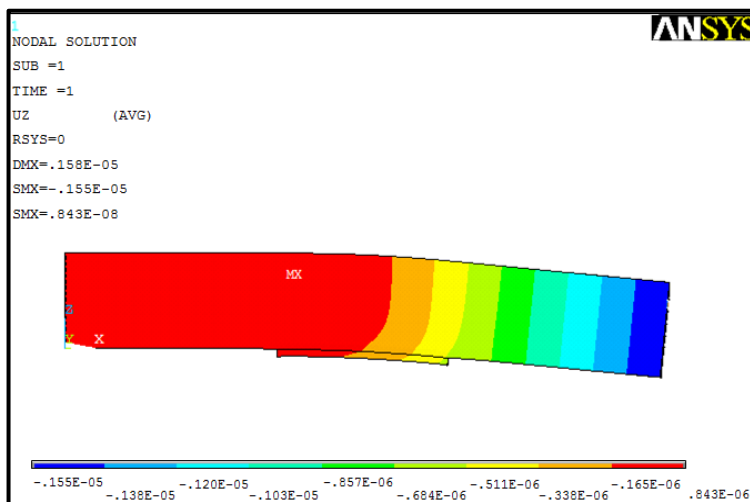
A continuación se presentan los resultados de repetir el procedimiento anterior cambiándolo el parche de la superficie superior a la superficie inferior, manteniendo la distancia desde el empotramiento, el tamaño, y los voltajes, para poder observar el efecto producido a la viga y compáralo con el caso de parche en la superficie superior:

**Figura 31.** Comportamiento con parche inferior y voltaje negativo



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

**Figura 32.** Comportamiento con parche inferior y voltaje positivo



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

Los resultados obtenidos muestran que al tener la viga con un parche de material piezoeléctrico PZT-5H en la superficie superior, sometido a un voltaje negativo, se produce una Flexión positiva, esto debido a que en el proceso de llenado de la matriz piezoeléctrica, los dipolos de las cerámicas piezoeléctricas, quedan orientados en la dirección de su espesor es decir en dirección Z, con carga positiva en el superficie de abajo y carga negativa en la superficie de arriba, produciendo una retracción del material debido a las fuerzas de atracción entre el voltaje negativo aplicado y la carga positiva del dipolo del material. Al cambiar el volteje de signo, se produce el efecto contrario lo cual hace que el material se expanda y provoque una flexión negativa de la viga.

A cambiar el parche a la superficie inferior, puesto que el voltaje es aplicado en la superficie de abajo del parche, el voltaje negativo va a producir sobre el parche el efecto contrario al caso cuando el parche estaba en superficie superior, de modo que el material se expande y produce la misma flexión positiva, mientras que en el caso del voltaje positivo con dicha posición del parche el material se contrae produciendo una flexión negativa.

A partir de esto se puede concluir que se produce el mismo efecto al tener un parche ubicado en la superficie superior o en la superficie inferior, manteniendo constante el tamaño, ubicación del parche y la magnitud y signo del voltaje aplicado, produciendo a la viga una flexión positiva en el caso de un voltaje negativo y una flexión negativa en caso de un voltaje positivo.

La Tabla 6 muestra una síntesis del comportamiento de la viga en función de la ubicación, el efecto y del tipo de voltaje (positivo o Negativo) aplicado sobre el parche.

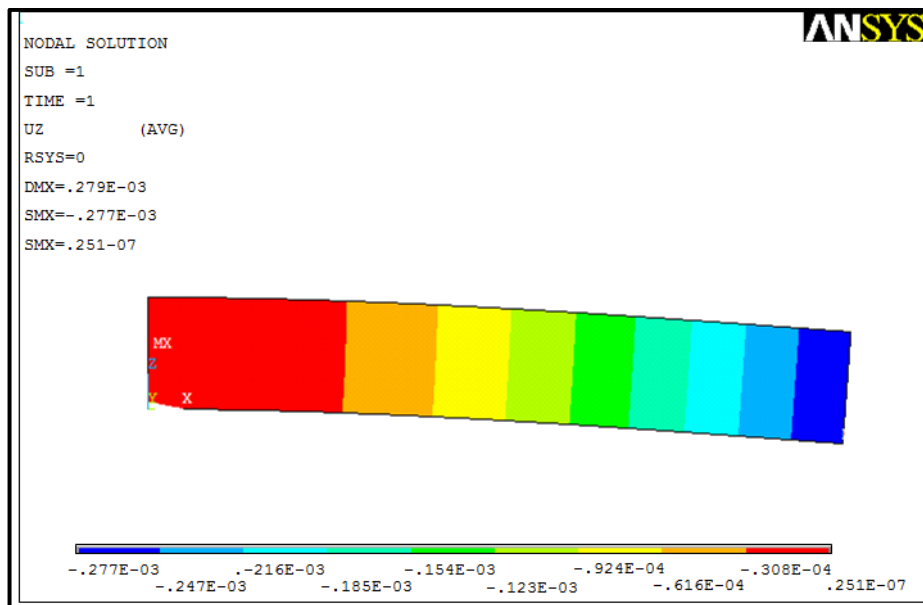
**Tabla 6.** Comportamiento de la viga en función de la ubicación, el efecto y del tipo de voltaje (positivo o Negativo) aplicado sobre el parche.

Posición	Voltaje	Efecto en el material	Efecto en la viga
Superficie Superior	Negativo	Retracción	Flexión Positiva
	Positivo	Expansión	Flexión Negativa
Superficie Inferior	Negativo	Retracción	Flexión Negativa
	Positivo	Expansión	Flexión Positiva

#### 4.7.2 Resultados de la implementación del algoritmo de control

A continuación se muestran los resultados obtenidos en el programa de la deflexión máxima viga sin parches piezoeléctricos, bajo el efecto de una carga de - 50 N en el extremo derecho, con las propiedades geométricas de la viga de análisis, esto con el fin de compararlas con los resultados obtenidos a partir de la ecuación 13.

**Figura 33.** Deflexión máxima viga sin PZT con carga de 50 N



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

Según la ecuación 13:

$$D_{\text{máx.}} = \frac{50 * (0.1)^3}{3 * 17872E6 * \frac{(0.01)(0.016)^3}{13}} = 0.273E - 03 \text{ m}$$

Con lo que se muestra que el resultado obtenido por los dos métodos es parecido, por tanto el procedimiento mediante el programa está bien realizado.

A partir del análisis de los parches, se implementa el algoritmo de control, teniendo en cuenta que se usa un rango de voltaje entre 0-1000 voltios, con signo negativo para producir la flexión positiva como se muestra en el análisis, siendo este efecto el que contrarreste la flexión negativa producida por la aplicación de la carga puntual. También se opta por ubicar el parche a analizar en la superficie superior puesto que no hay diferencia del efecto producido si se ubica en la superficie inferior.

Utilizando un parche de longitud 0.03 m con valores de voltaje, 0, -250, -500, -750, y -1000 Voltios, desplazando el parche, de derecha a izquierda y una carga puntual en el extremo derecho de -50 N en dirección Z, manteniendo las propiedades geométricas de la viga propuestas en el numeral 4.5.2 se presentan los siguientes modelos para una variación de voltajes y posición con respecto al empotramiento del parche.

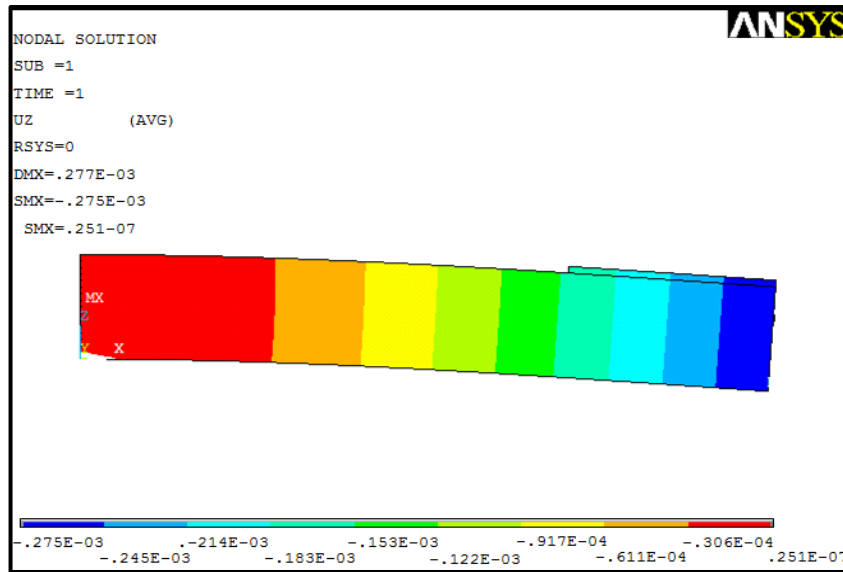
**Tabla 7.** Modelos con variación de posición y voltaje

Modelo	Posición [m]	Voltaje [volt]
1	0.070	0
2	0.050	-250
3	0.035	-500
4	0.020	-700
5	0	-1000

Fuente: Autores, 2013

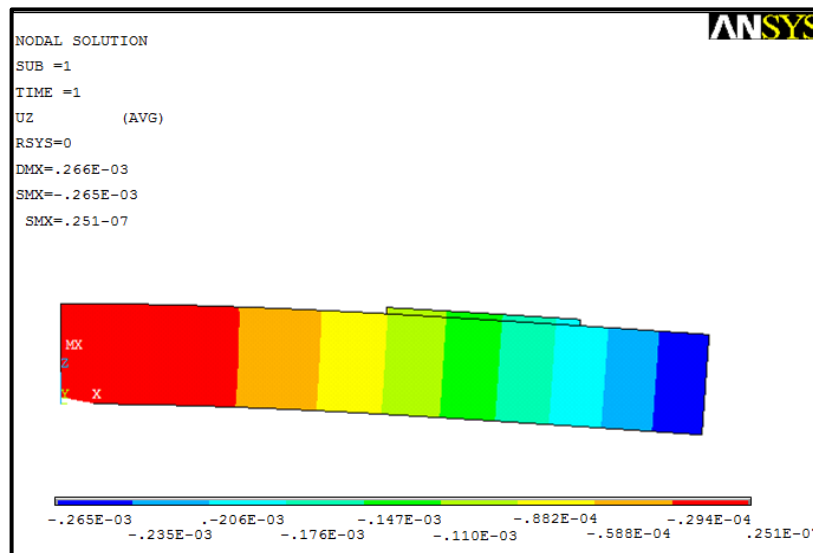
A continuación se presenta el esquema y los resultados de deflexión máxima que se produce en el extremo libre para cada uno de los modelos planteados en la tabla 7.

**Figura 34.** Deflexión máxima modelo 1



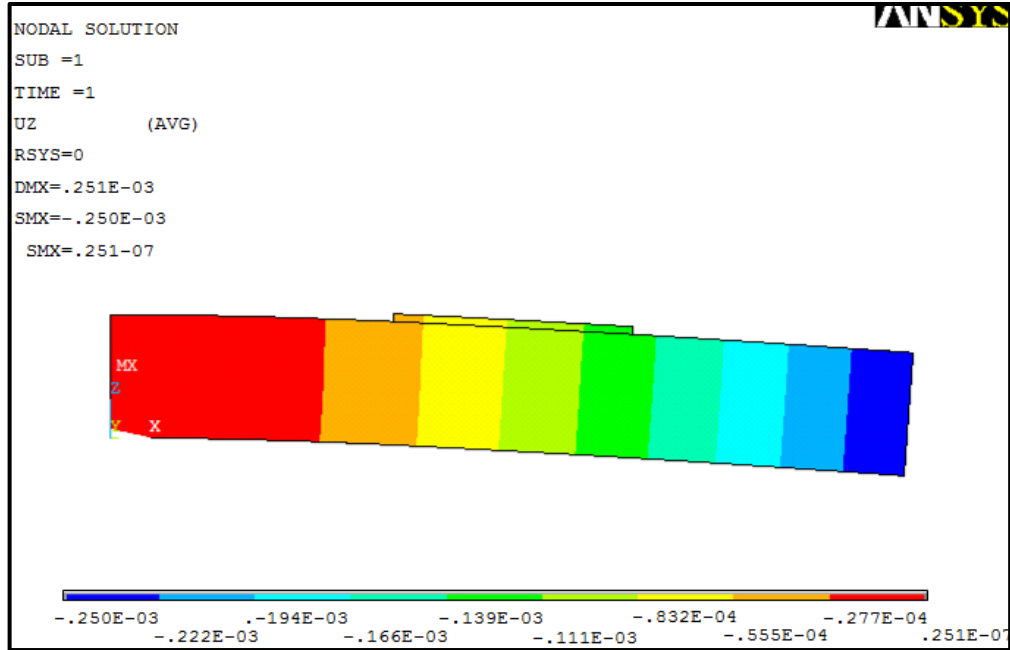
Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

**Figura 35.** Deflexión máxima modelo 2



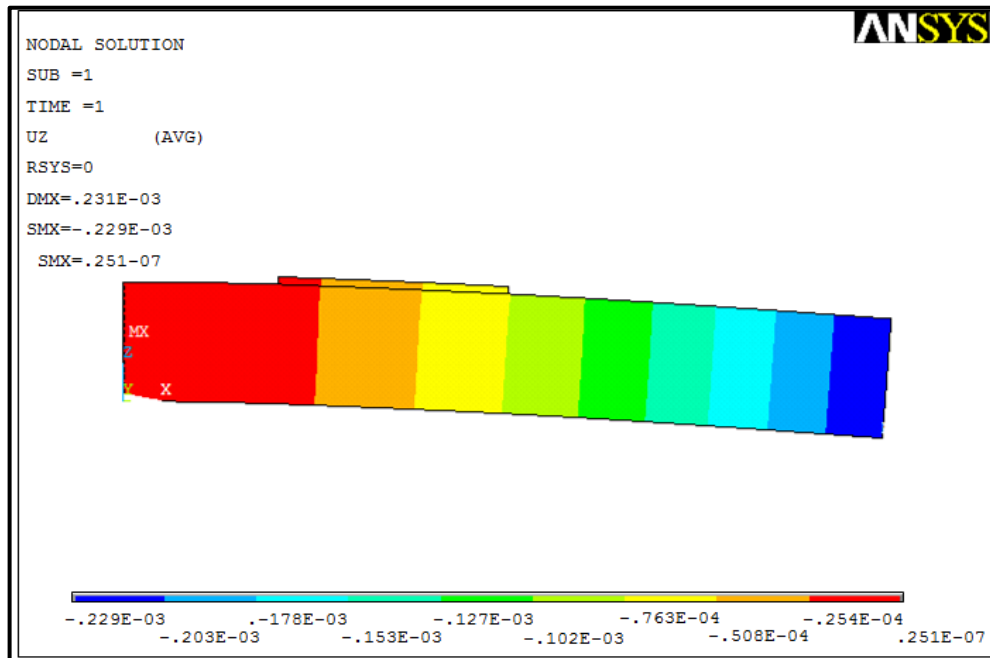
Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

Figura 36. Deflexión máxima modelo 3



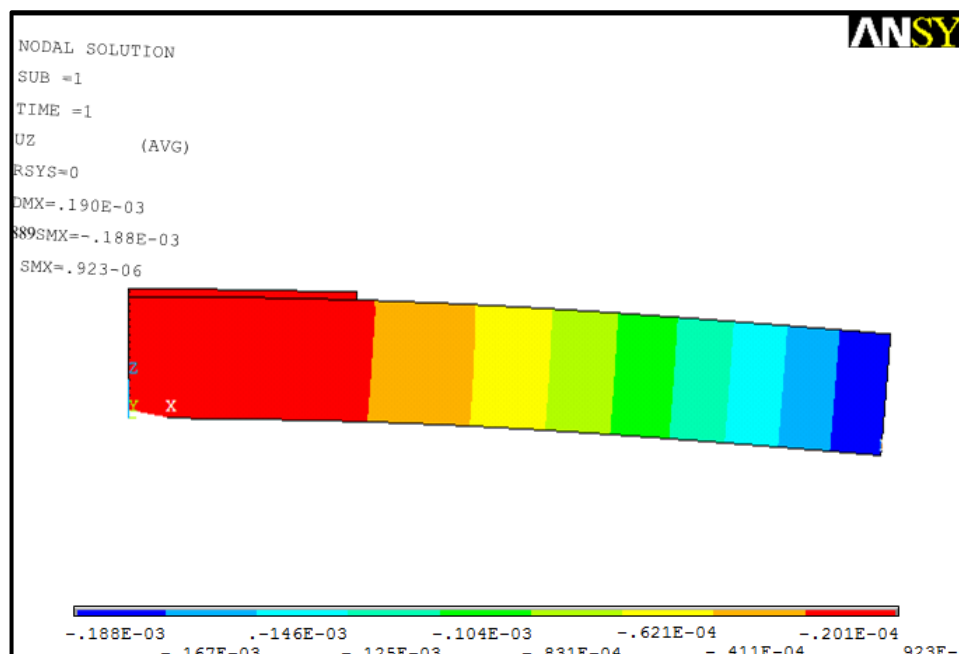
Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

Figura 37. Deflexión máxima modelo 4



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

**Figura 38.** Deflexión máxima modelo 5



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

Como se puede observar a se presenta una disminución en la deflexión al aumentar el voltaje y disminuir la distancia del parche respecto al empotramiento. La tabla 6 muestra los resultados de modelamientos con menor variación de la distancia de ubicación del parche respecto al empotramiento para los voltajes usados anteriormente, esto con el fin de estudiar con más precisión el comportamiento de la viga usando lo parches piezoeléctricos.

**Tabla 5.** Resultados de deflexión con variación de la posición de parche y el voltaje aplicado (deflexiones en metros)

Posición[m]/Voltaje[volt]	0	-250	-500	-750	-1000
0.000	2.17E-04	2.10E-04	2.03E-04	1.95E-04	1.88E-04
0.005	2.27E-04	2.21E-04	2.15E-04	2.08E-04	2.02E-04
0.010	2.33E-04	2.27E-04	2.21E-04	2.16E-04	2.10E-04
0.015	2.39E-04	2.33E-04	2.28E-04	2.22E-04	2.17E-04
0.02	2.44E-04	2.39E-04	2.34E-04	2.29E-04	2.24E-04

<b>0.025</b>	2.49E-04	2.44E-04	2.40E-04	2.35E-04	2.30E-04
<b>0.030</b>	2.53E-04	2.49E-04	2.45E-04	2.41E-04	2.36E-04
<b>0.035</b>	2.56E-04	2.54E-04	2.50E-04	2.46E-04	2.42E-04
<b>0.040</b>	2.60E-04	2.58E-04	2.54E-04	2.51E-04	2.47E-04
<b>0.045</b>	2.64E-04	2.61E-04	2.58E-04	2.55E-04	2.52E-04
<b>0.05</b>	2.67E-04	2.65E-04	2.62E-04	2.59E-04	2.57E-04
<b>0.055</b>	2.70E-04	2.68E-04	2.65E-04	2.63E-04	2.61E-04
<b>0.060</b>	2.72E-04	2.70E-04	2.68E-04	2.66E-04	2.64E-04
<b>0.065</b>	2.74E-04	2.72E-04	2.71E-04	2.69E-04	2.68E-04
<b>0.070</b>	2.75E-04	2.74E-04	2.73E-04	2.72E-04	2.71E-04

Fuente: Autores, 2013

También se pretende estudiar la variación de la deflexión máxima de la viga para diferentes tamaños del parche para lo cual se realiza el procedimiento descrito en el algoritmo de control, donde se mantiene constante la ubicación del parche, para sometiéndolos a los voltajes anteriormente mencionados, pero aumentando su longitud hasta un longitud máximo igual a la de viga.

**Tabla 6.** Resultados de la deflexión en el extremo libre, con variación de la longitud del parche, ubicado a 0 mm del extremo empotrado

<b>Long. Parche [m]/Voltaje [volt]</b>	<b>0</b>	<b>-250</b>	<b>-500</b>	<b>-750</b>	<b>-1000</b>
<b>0</b>	2.77E-04	2.77E-04	2.77E-04	2.77E-04	2.77E-04
<b>0.01</b>	2.58E-04	2.56E-04	2.54E-04	2.52E-04	2.50E-04
<b>0.02</b>	2.35E-04	2.30E-04	2.26E-04	2.21E-04	2.16E-04
<b>0.03</b>	2.17E-04	2.10E-04	2.03E-04	1.95E-04	1.88E-04
<b>0.04</b>	2.03E-04	1.94E-04	1.85E-04	1.75E-04	1.66E-04
<b>0.05</b>	1.93E-04	1.82E-04	1.71E-04	1.60E-04	1.49E-04
<b>0.06</b>	1.86E-04	1.74E-04	1.61E-04	1.49E-04	1.36E-04
<b>0.07</b>	1.82E-04	1.68E-04	1.55E-04	1.41E-04	1.28E-04
<b>0.08</b>	1.80E-04	1.65E-04	1.51E-04	1.36E-04	1.22E-04
<b>0.09</b>	1.79E-04	1.64E-04	1.49E-04	1.34E-04	1.19E-04
<b>0.1</b>	1.79E-04	1.63E-04	1.48E-04	1.33E-04	1.18E-04

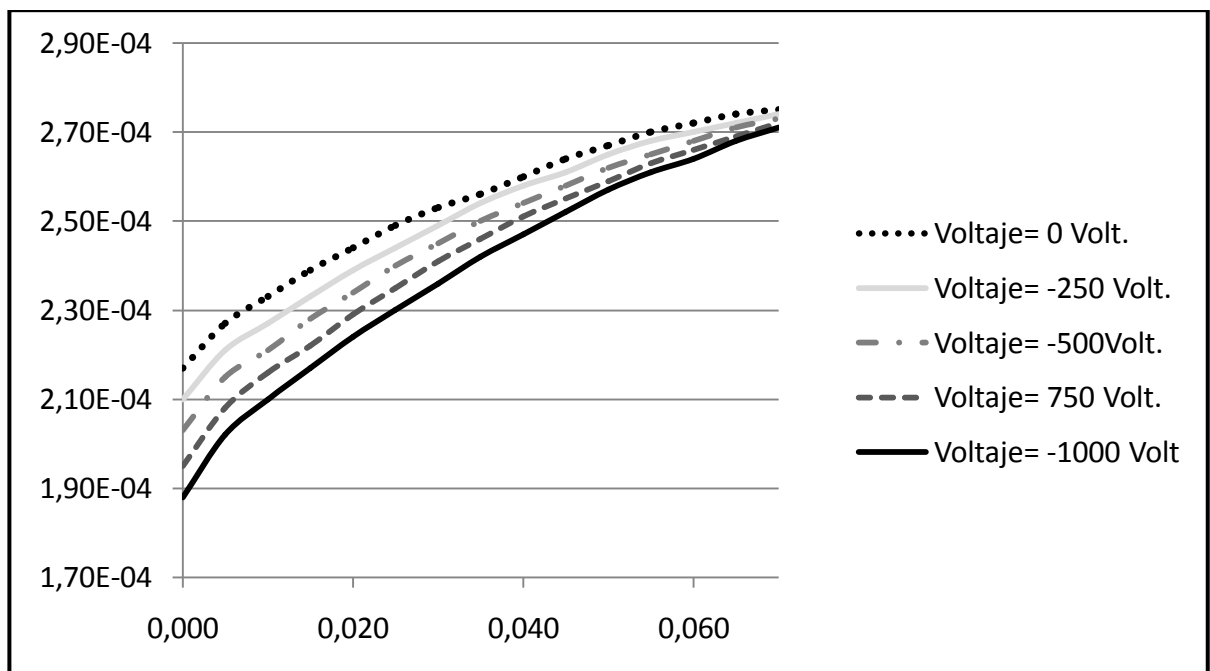
Fuente: Autores, 2013

#### 4.8 PROCESAMIENTO Y ANÁLISIS DE LOS DATOS

La información tabulada en la sección 5.7, es la base del procesamiento de los datos mediante la creación de gráficas que exhiben la relación entre las variables tratadas. Se realizó una discretización de las variables, para mostrar la influencia individual respecto al desplazamiento mínimo de la viga, de esta manera se puede empezar a notar cuales son los puntos óptimos en el control de la deflexión.

La figura 39, muestra el comportamiento de las deflexiones máximas (extremo libre de la viga) al variar la posición del extremo izquierdo del parche respecto al empotramiento. Para cada variación se aplicó un voltaje cada vez mayor entre 0 y 1000 V (negativos), notándose una disminución del desplazamiento del extremo de la viga. Se puede notar que para el rango de voltajes en la posición 0.07 m, todas las deflexiones son muy cercanas entre sí y aproximadas al valor total sin la presencia del actuador.

**Figura 39.** Gráfica Deflexión Vs Posición del parche respecto al empotramiento

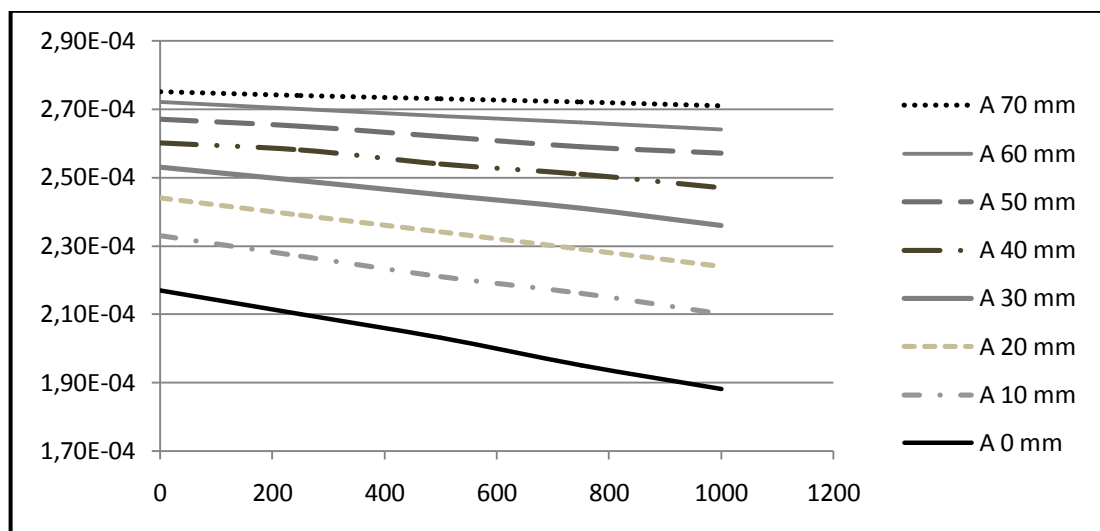


Fuente: Autores, 2013

En las figuras 40 y 41, que se muestran debajo, se muestra un comportamiento lineal y no lineal respectivamente. Para la primera de ellas se observa una consistencia con los resultados obtenidos en la figura anterior, pues para un mayor voltaje y cercanía al empotramiento la reducción se hace más notoria. El comportamiento con el actuador colocado en el extremo en voladizo es muy poco conveniente, se presentan desplazamientos entre  $2.74 \times 10^{-4}$  m y  $2.70 \times 10^{-4}$  m, lo que representa entre el 98% y 100% del desplazamiento total sin el actuador.

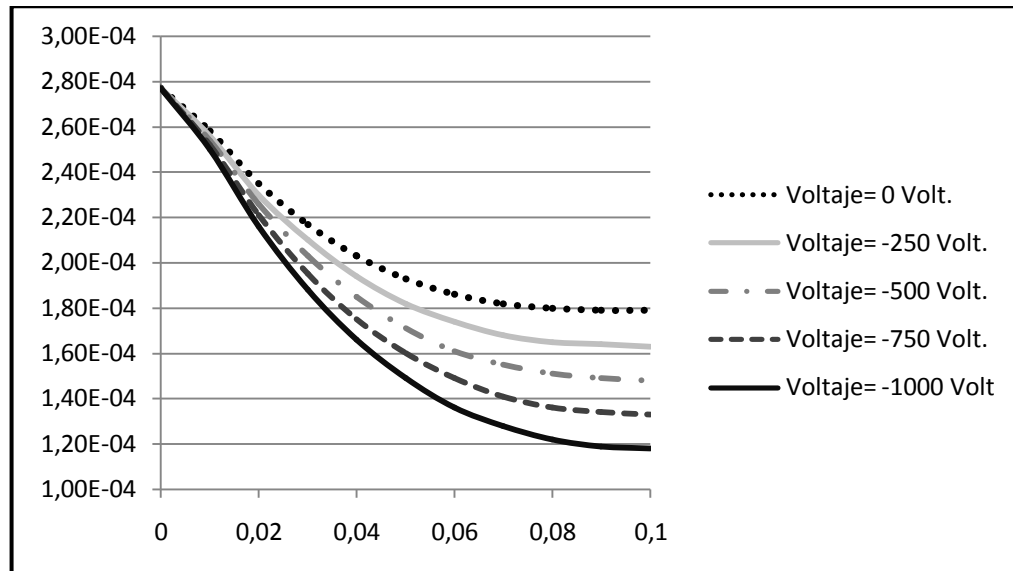
Por otro lado la reducción no lineal del desplazamiento transversal de la figura 41, muestra que con un parche del tamaño del elemento alcanza una reducción hasta del 57% del valor total sin parche, sin embargo, se generan dudas sobre este comportamiento en elementos de mayores dimensiones, y del costo por implementar el control basado en la relación del tamaño del actuador con el tamaño del elemento a controlar, la tendencia de la gráfica muestra que para un mínimo desplazamiento en un elemento infinito, la lámina piezoeléctrica también sería infinita.

**Figura 40.** Gráfica Deflexión Vs Voltaje



Fuente: Autores, 2013

**Figura 41.** Gráfica deflexión Vs Longitud parche



Fuente: Autores, 2013

#### 4.8.1 Formalización del algoritmo de control por medio de ecuaciones

Luego de extraer y mostrar toda la información de los modelos realizados, se procesa para su posterior análisis. Se realizaron gráficas que relacionan las variables de interés y demuestran el comportamiento restrictivo de los actuadores piezoeléctricos.

Al relacionar el comportamiento de la posición de la lámina, el voltaje aplicado y la deflexión que se obtiene del modelamiento numérico, se puede obtener una función que al ser minimizada, garantice y de soporte al algoritmo planteado en la sección 5.6. El ajuste de los datos extraídos de ANSYS se realizó mediante el Método de los Mínimos Cuadrados para una superficie plana y un paraboloide, donde se pretende que la desviación cuadrática de los datos sea la mínima posible para garantizar un buen ajuste. En primer lugar se ajustaron los datos a una superficie plana representada por la ecuación:

$$y = a_0 + a_1 * u + a_2 * v(14)$$

Los coeficientes de este ajuste fueron obtenidos de acuerdo al procedimiento del método de regresión multivariable que implica la solución de un sistema de ecuaciones de 3x3. Los valores se relacionan a continuación con la respectiva desviación cuadrática obtenida.

**Tabla 7.** Valores de coeficientes de ecuación del plano y desviación cuadrática

<b><math>a_0</math></b>	0.00018501
<b><math>a_1</math></b>	7.36E-09
<b><math>a_2</math></b>	0.00146611
<b>Desviación Cuadrática.</b>	1.792808544

Fuente: Autores, 2013

Luego se realizó el mismo procedimiento para ajustar los datos a un paraboloides, con lo cual se asumió la posibilidad de un comportamiento no lineal de la información. La expresión del paraboloides al cual se ajustaron los datos se muestra a continuación:

$$y = a * u^2 + b * v^2 \quad (15)$$

Una vez se aplica el Método de Mínimos Cuadrados y se resuelve un sistema de 2 x 2, se obtienen los coeficientes de la expresión y la desviación cuadrática (Ver tabla 8).

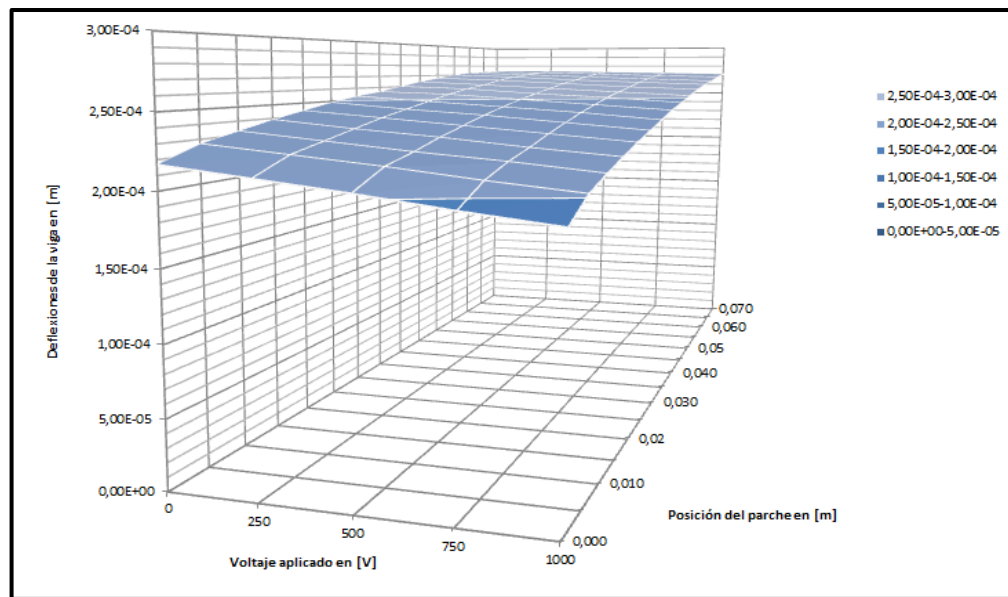
**Tabla 8.** Valores de los coeficientes no lineales y desviación cuadrática

<b><math>a</math></b>	0.06164824
<b><math>b</math></b>	1.8498E-10
<b>Desviación Cuadrática.</b>	125.3531587

Fuente: Autores, 2013

Como se aprecia, el menor valor de la desviación cuadrática es el obtenido para la superficie plana, con lo cual se asegura una mejor aproximación o ajuste de los datos del modelamiento. Sin embargo, esta única función no es suficiente para una aproximación apropiada, pues no abarca un rango de los valores de manera adecuada. Lo anterior se afirma de acuerdo a los datos tabulados de voltaje, posición y deflexión de la tabla 6, y mediante la observación del gráfico en tres dimensiones generado en Excel, cuyo dominio son las variables de posición y voltaje (Ver figuras 42).

**Figura 42.** Perspectiva en profundidad de la superficie que relaciona las variables “Posición, Voltaje y Deflexión”



Fuente: Autores, 2013

Como recurso para mejorar el ajuste, se implementó la regresión por Mínimos Cuadrados, pero asociada a rangos de valores, es decir, de acuerdo al comportamiento de la gráfica se asumieron tres rangos de valores en cuanto a voltaje, posicionamiento del parche y sus deflexiones asociadas. En la tabla 10, se pueden apreciar los rangos asociados a las regresiones realizadas.

**Tabla 9.** Rango de valores para ajuste por Mínimos Cuadrados

Posic./Volt.	0	250	500	750	1000
0,000	2,17E-04	2,10E-04	2,03E-04	1,95E-04	1,88E-04
0,005	2,27E-04	2,21E-04	2,15E-04	2,08E-04	2,02E-04
0,010	2,33E-04	2,27E-04	2,21E-04	2,16E-04	2,10E-04
0,015	2,39E-04	2,33E-04	2,28E-04	2,22E-04	2,17E-04
0,02	2,44E-04	2,39E-04	2,34E-04	2,29E-04	2,24E-04
0,025	2,49E-04	2,44E-04	2,40E-04	2,35E-04	2,30E-04
0,030	2,53E-04	2,49E-04	2,45E-04	2,41E-04	2,36E-04
0,035	2,56E-04	2,54E-04	2,50E-04	2,46E-04	2,42E-04
0,040	2,60E-04	2,58E-04	2,54E-04	2,51E-04	2,47E-04
0,045	2,64E-04	2,61E-04	2,58E-04	2,55E-04	2,52E-04
0,05	2,67E-04	2,65E-04	2,62E-04	2,59E-04	2,57E-04
0,055	2,70E-04	2,68E-04	2,65E-04	2,63E-04	2,61E-04
0,060	2,72E-04	2,70E-04	2,68E-04	2,66E-04	2,64E-04
0,065	2,73E-04	2,72E-04	2,71E-04	2,69E-04	2,68E-04
0,070	2,74E-04	2,74E-04	2,73E-04	2,72E-04	2,71E-04

Fuente: Autores, 2013

Los datos de deflexiones referenciados en azul son aquellos valores en la frontera de las superficies planas ajustadas. Para cada superficie generada se relacionan los coeficientes y su respectiva desviación cuadrática (ver tabla 10).

**Tabla 10.** Coeficientes de las regresiones y desviaciones cuadráticas para cada rango de valores estipulado

Coeficiente	Rango 1	Rango 2	Rango 3
$a_0$	0.000217833	0.000218917	0.00023612
$a_1$	0.002833333	0.001202489	0.000587262
$a_2$	-3E-08	-2.0504E-08	-7.41021E-09
Desviación Cuadrática	1.66667E-21	0.012586259	3.79195E-19

Fuente: Autores, 2013

Según la tabla 11 el primer rango corresponde al color amarillo, el rango 2 se relaciona con el color rojo y el rango 3 se asocia con los datos de color verde. Como se puede observar los valores de la desviación son muy aproximados a cero, es decir, para cada dominio existe un mejor ajuste de los datos, por lo cual se aceptan las funciones lineales generadas.

Teniendo las funciones que aproximan el comportamiento de todos los datos, se pueden optimizar mediante un método de minimización, en el cual a las variables que representan el voltaje y la posición se les asignan valores determinados, tal que la deflexión asociada resulta ser la mínima del rango. La minimización de cada una de las funciones fue generada a partir del método Simplex a través de la función “*fmincon*” del paquete de herramientas de optimización de (MATLAB R2012b, 2012) [31].

La función genera los valores óptimos de acuerdo a la función objetivo, que para estos casos son lineales, las restricciones de las variables a minimizar y una primera pareja de valores para la iteración. La sintaxis de la función de acuerdo con la referencia (MathWorks, 2012) [55] se puede trabajar de manera sencilla omitiendo alguno de los parámetros colocando un par de llaves vacías “[ ]”. El código generado para cada plano o rango de datos se puede observar en el *Anexo I* del presente trabajo.

La tabla 11 muestra los valores mínimos para cada rango de datos, es decir, las menores deflexiones para cada pareja de voltaje y posición en el respectivo plano o superficie.

**Tabla 11.** Deflexiones mínimas y valores óptimos de voltajes y posición del actuador piezoeléctrico.

Rango	Posición	Voltaje	Deflexión
1	0.000 m	1000 V	1.88e-4 m
2	0.005 m	1000 V	2.04e-4 m
3	0.030 m	0	2.54e-4 m

Fuente: Autores, 2013

De los valores tabulados anteriormente, se tomarán como valores óptimos aquellos que estén relacionados con la menor deflexión de la viga. De esta manera se está garantizando el algoritmo de control generado para el control de la deflexión del elemento en voladizo.

#### **4.8.2 Implementación del análisis para el uso de dos parches PZT-5H**

Con los valores óptimos obtenidos de la minimización de las funciones que relacionan las variables de estudio (Posición – Voltaje – Deflexión), se realizó un último análisis donde se modeló el efecto de la colocación de dos parches en las superficies inferior y superior, de manera simultánea y simétrica. Se asumieron los mejores valores de posición y voltaje productos del algoritmo, que para este caso fueron -1000 V y 0.000 m (Empotramiento). Se supuso que el efecto de esta acción sería la reducción del valor de la mínima deflexión, debido a los resultados mostrados en los primeros modelos donde se observó que el desplazamiento con parche superior o inferior es el mismo, bajo un mismo voltaje aplicado.

**Tabla 12.** Valores de deflexión con 1 y 2 actuadores en el empotramiento y porcentaje de reducción

Voltaje	Deflexión 1 parche (empotramiento)	Deflexión 2 parches (empotramiento)	Reducción de la deflexión
-1000	$1.88 \times 10^{-4}$ m	$1.33 \times 10^{-4}$ m	29.3 %
-750	$1.95 \times 10^{-4}$ m	$1.45 \times 10^{-4}$ m	25.6 %
-500	$2.03 \times 10^{-4}$ m	$1.56 \times 10^{-4}$ m	23.2 %
-250	$2.10 \times 10^{-4}$ m	$1.68 \times 10^{-4}$ m	20.0 %
0	$2.17 \times 10^{-4}$ m	$1.79 \times 10^{-4}$ m	17.5 %

Fuente: Autores, 2013

Se puede hacer también un análisis semejante donde se comparan los valores de desplazamiento transversal en el rango de voltajes usado en los modelos, con los valores de deflexión cuando se coloca un parche de 0.1 m (Tamaño del elemento). En la tabla 13 se pueden apreciar los datos tabulados de la comparación descrita.

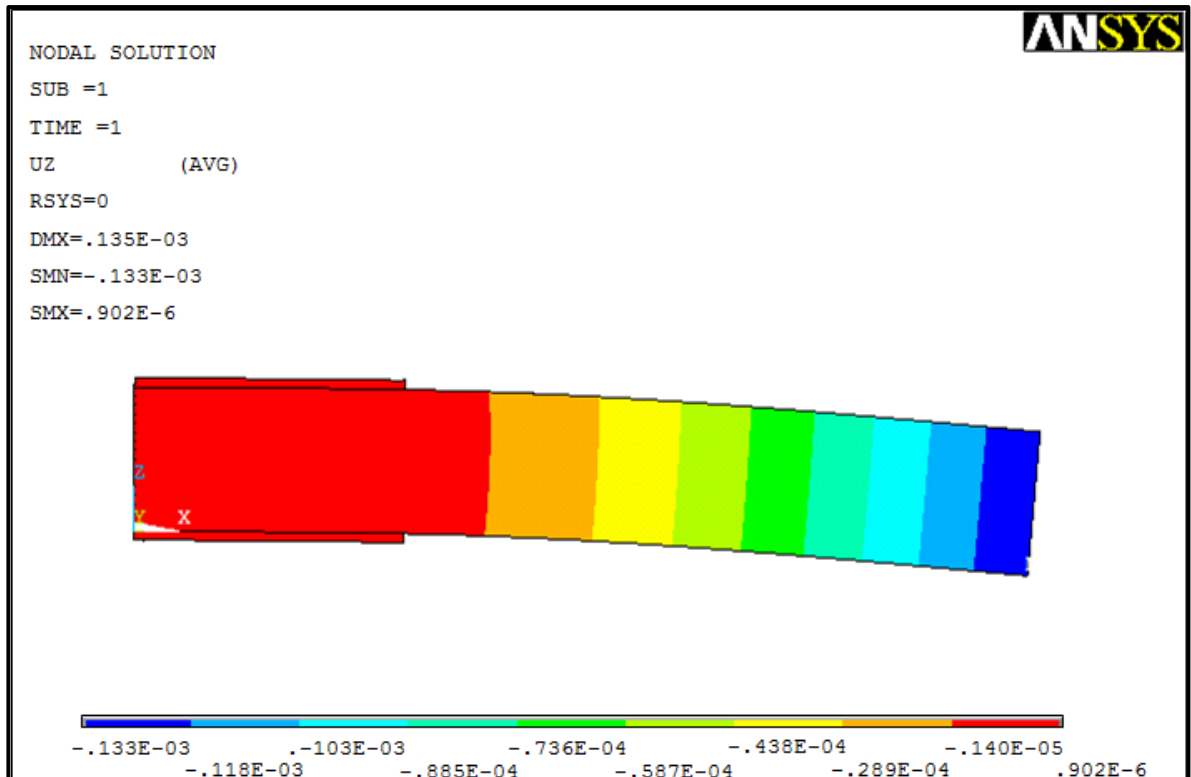
**Tabla 13.** Comparación entre el comportamiento de la viga con dos actuadores en el extremo empotrado y un actuador de 0.1 m en la superficie superior

Voltajes	Deflexión (2 parches en el empotramiento)	Deflexión (Tamaño de actuador 0.1 m)
-1000	$1.33 \times 10^{-4}$ m	$1.18 \times 10^{-4}$
-750	$1.45 \times 10^{-4}$ m	$1.33 \times 10^{-4}$
-500	$1.56 \times 10^{-4}$ m	$1.48 \times 10^{-4}$
-250	$1.68 \times 10^{-4}$ m	$1.63 \times 10^{-4}$
0	$1.79 \times 10^{-4}$ m	$1.79 \times 10^{-4}$

Fuente: Autores, 2013

Los mayores valores del tamaño de la lámina piezoeléctrica implican mayor reducción en el desplazamiento del extremo del elemento, sin embargo, la diferencia existente entre deflexiones está alrededor del 10 % del mayor valor para cada voltaje.

**Figura 43.** Configuración viga/actuador con dos láminas piezoeléctricas en el extremo empotrado



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

En la figura 43 se expone la configuración modelada, donde se alcanzan ha observar los valores y el rango de deflexión que se obtienen del modelo generado.

#### **4.9 CASO ALTERNO: POSICIONAMIENTO DE UN ACTUADOR PIEZOELÉCTRICO EN VIGA SIMPLEMENTE APOYADA**

Como extensión del estudio, se decidió analizar el caso de una viga simplemente apoyada en sus extremos bajo una carga puntual en el centro de la luz. Las dimensiones tanto de la viga como de las láminas se conservan, para la comparación del efecto reductor del parche de 3 centímetros bajo otra condición de apoyo y posición de la carga.

El modelamiento y ejecución del algoritmo fue el mismo que se usó para el caso anterior. Mediante el programa de elementos finitos ANSYS [28], se obtuvieron datos de deflexión relacionados con el voltaje aplicado y la posición del actuador. Se muestra a continuación la tabulación y procesamiento de la información obtenida.

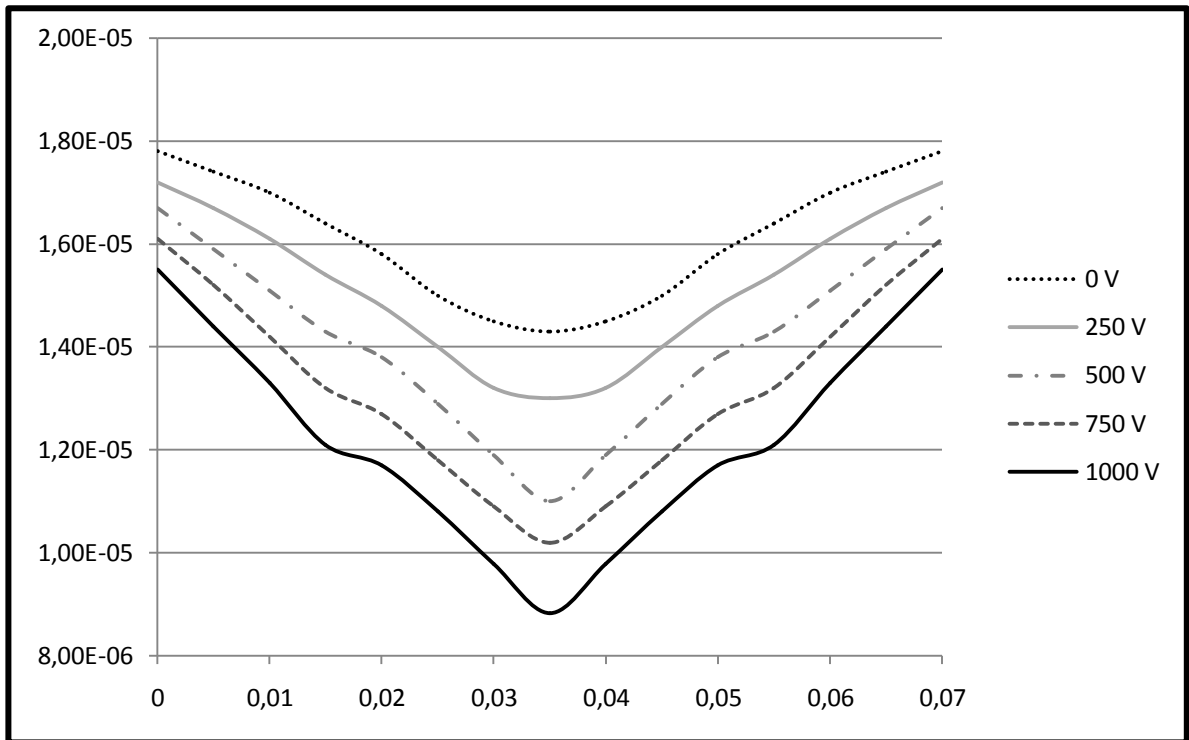
**Tabla 14.** Resultados de deflexión con variación de la posición del parche y el voltaje aplicado (deflexiones en metros)

Posición [m]/Voltaje [volt]	0	250	500	750	1000
0	1,78E-05	1,72E-05	1,67E-05	1,61E-05	1,55E-05
0,005	1,74E-05	1,67E-05	1,59E-05	1,52E-05	1,44E-05
0,01	1,70E-05	1,61E-05	1,51E-05	1,42E-05	1,33E-05
0,015	1,64E-05	1,54E-05	1,43E-05	1,32E-05	1,21E-05
0,02	1,58E-05	1,48E-05	1,38E-05	1,27E-05	1,17E-05
0,025	1,50E-05	1,40E-05	1,29E-05	1,18E-05	1,08E-05
0,03	1,45E-05	1,32E-05	1,19E-05	1,09E-05	9,79E-06
0,035	1,43E-05	1,30E-05	1,10E-05	1,02E-05	8,83E-06
0,04	1,45E-05	1,32E-05	1,19E-05	1,09E-05	9,79E-06
0,045	1,50E-05	1,40E-05	1,29E-05	1,18E-05	1,08E-05
0,05	1,58E-05	1,48E-05	1,38E-05	1,27E-05	1,17E-05
0,055	1,64E-05	1,54E-05	1,43E-05	1,32E-05	1,21E-05
0,06	1,70E-05	1,61E-05	1,51E-05	1,42E-05	1,33E-05
0,065	1,74E-05	1,67E-05	1,59E-05	1,52E-05	1,44E-05
0,07	1,78E-05	1,72E-05	1,67E-05	1,61E-05	1,55E-05

Fuente: Autores, 2013

El comportamiento del parche a lo largo de la viga de estudio se aprecia mejor mediante la gráfica de la figura 56. Donde la mínima deflexión se obtiene para el mayor voltaje aplicado y en la configuración donde se localiza la lámina de material piezoeléctrico en el centro de la luz. Se puede notar simetría en los valores de deflexión encontrados, y la existencia de un único punto mínimo para todos los voltajes aplicados. La posición de este mínimo está ubicada a 0.35 m del extremo izquierdo.

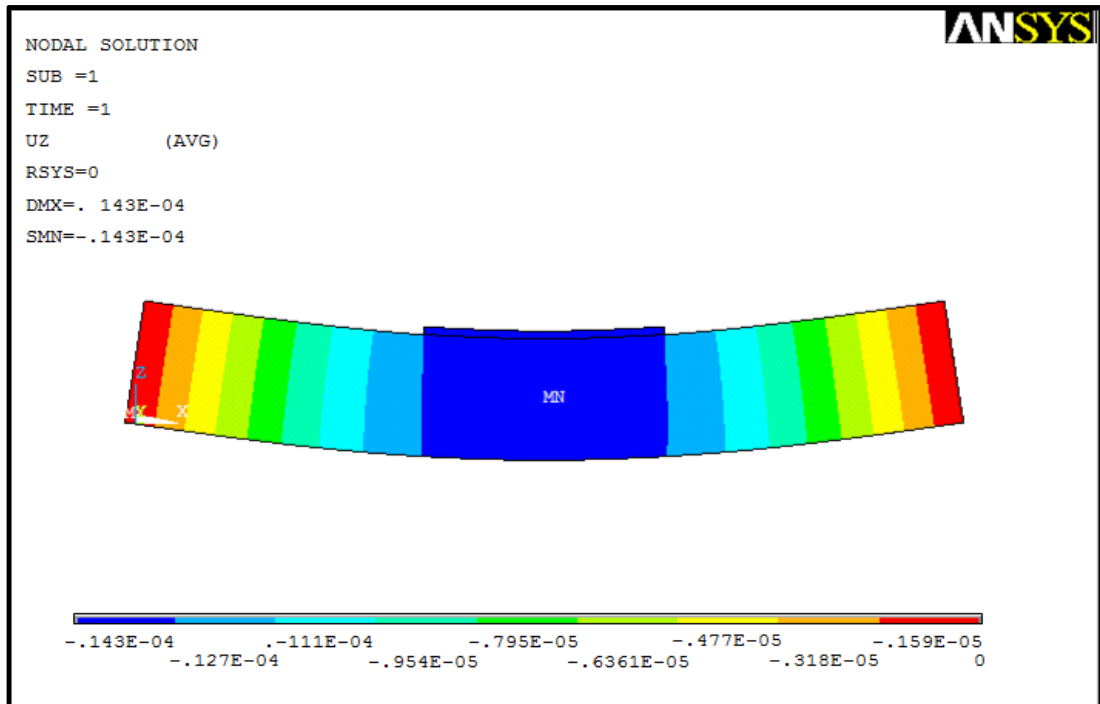
Figura 44. Gráfica Deflexión Vs Posición



Fuente: Autores, 2013

La Figura 44, representa la configuración del modelo viga/actuador que más reduce el efecto de la carga aplicada de 50 N. Por facilidad de colocación, pensando en el montaje de un modelo real, sería más práctico ubicar el parche en la parte inferior de la viga, pero se modeló igual que el primer caso sabiendo que el resultado es el mismo al colocar el actuador en la parte superior del elemento. De acuerdo a los primeros análisis, donde el efecto del parche con voltaje negativo era de contracción si era colocado en la superficie de arriba, o de extensión si se ubicaba debajo de la viga, se aplicó el signo del voltaje para estas nuevas condiciones. La necesidad de esta ocasión era obtener extensión con parche superior y contracción con la otra configuración, de modo que fue necesario el cambio de signo en la aplicación del voltaje, es decir, se cambió el signo negativo del primer caso por voltajes positivos, para lograr obtener reducciones en el desplazamiento transversal.

**Figura 45.** Configuración viga/actuador en su posición óptima en el centro de la luz a 0.35 m del apoyo izquierdo



Fuente: Ansys v11, 2007 [28]

La flexión negativa producto del actuador contrarresta el efecto de la carga. La figura anterior muestra la interacción de la lámina y la viga con la carga aplicada. El mayor porcentaje de reducción obtenido en este caso fue del 50.4 %, siendo la deflexión total sin el actuador igual a  $1.78 \times 10^{-5}$  m.

## 5. CONCLUSIONES

- Aun es bastante extenso el trabajo por realizar en cuanto al perfeccionamiento de la técnica de control activo mediante material piezoeléctrico, y para ahondar más en este estudio es pertinente la realización de modelos reales con dimensiones adecuadas que demuestren plenamente su aplicabilidad. En el estudio realizado, la utilización de láminas piezoeléctricas sí otorgó resistencia

a la carga aplicada en el extremo libre, con lo cual se muestra teóricamente el acoplamiento de los campos eléctrico y estructural, y el cumplimiento de nuestro objetivo general. No obstante, no hay una única solución que otorgue buena respuesta bajo condiciones de carga y apoyo generales, por tanto, se hace necesario el control de todas las variables que entran en juego a la hora de mejorar la resistencia de un elemento estructural.

- Respecto al primer objetivo, se establece que las características o propiedades mecánicas de los cerámicos PZT-5H simuladas en el programa mediante el elemento "SOLID5", son adecuadas teóricamente para generar alteración física en un elemento de concreto, produciendo disminución del desplazamiento transversal tanto en la viga empotrada como en la simplemente apoyada. A pesar de tener propiedades anisotrópicas e isotrópicas el actuador y la viga respectivamente, tuvieron un adecuado comportamiento en el modelo numérico realizado en tres dimensiones, puesto que la colocación de un solo parche de 0.03 m en el extremo empotrado ocasiona una reducción del 31.3 % aplicando voltaje de 1000 V para el caso empotrado.
- La metodología de control de la deflexión máxima denominada algoritmo de control por "Prueba y Error", el cual hace parte del cumplimiento del objetivo número dos, llegó a valores óptimos de posición del parche y voltaje aplicado, como se deseaba, de manera que logró minimizar el valor de la deflexión en la punta cargada. Es una herramienta útil para establecer relaciones entre las variables del problema, a partir de la extracción de datos que mediante la aplicación de métodos de regresión se puedan formalizar con ecuaciones.
- El uso de Ansys v11 en la aplicación de los materiales piezoeléctricos para el control de deflexiones en vigas, es de gran utilidad gracias a las herramientas con las que cuenta el programa para asignar cada una de las propiedades de los materiales con los que se trabaja, generando una idea de su

comportamiento en la realidad, siempre y cuando se tenga un procedimiento adecuado para crear el modelo. La validez del procedimiento según el tercer objetivo es aproximada, sin embargo, no se descarta pues aparte de manejar el mismo programa de modelamiento, se asumieron todas las propiedades que establece (Koutsawa, Giunta, Belouettar, 2012) [29] bajo el procedimiento propio, y se obtuvieron desplazamiento en las direcciones X y Z muy similares como se muestra en el numeral 4.5.3 del presente trabajo.

- Para el caso del modelo alternativo, donde se cambió la condición de apoyo, y se pasó a una configuración con una viga simplemente apoyada, se obtuvo una reducción de 50.4 % respecto a la deflexión máxima total generada sin el parche y una carga de 50 N, lo que ratifica el cumplimiento del último objetivo propuesto donde se comparan las deflexiones con y sin ayuda de actuadores. También cabe decir que en comparación con el caso óptimo de posicionamiento de la viga empotrada, la que mostró mejores resultados fue la viga simplemente apoyada. Estos resultados pueden ser producto de la restricción impuesta por los apoyos.
- La deducción de ecuaciones que se ajustaran a los datos extraídos de los diferentes modelos, fue un recurso valioso con el cual se pudo formalizar el algoritmo planteado. Además, las restricciones planteadas para la minimización de las funciones que relacionan los parámetros del problema, son muy necesarias y deben ser mejoradas para el uso de métodos de minimización más sofisticados. Estas son las que garantizan la aproximación ideal de los parámetros.
- Se obtuvo un comportamiento notoriamente no lineal en la relación del tamaño del parche y la deflexión máxima obtenida (ver figura 40). Según los resultados a medida que se aumenta el tamaño del actuador se generan menores deflexiones, sin embargo, por ser tan pequeña la longitud de la viga, no se

puede asegurar que con una dimensión mucho mayor de la longitud tanto de la viga como del actuador se obtengan resultados óptimos. Vale la pena volver resaltar, que el extremo izquierdo del parche se mantuvo a una posición cero respecto a la longitud de la viga, es decir, el tamaño del parche se aumentó hacia la derecha hasta 0.1 m.

- Algo concluyente en el estudio realizado es el hecho que en los lugares de mayor concentración de esfuerzos por flexión se presentó la posición óptima de los dos casos estudiados. Lo que puede llevar a la creación de metodologías de posicionamiento de los actuadores en próximos estudios

## **6. RECOMENDACIONES Y PERSPECTIVAS DE PRÓXIMOS ESTUDIOS CON MATERIAL PIEZOELÉCTRICO EN EL CONTROL DE ESTRUCTURAS**

- El estudio para la aplicación de los sistemas inteligentes en el área de las estructuras de ingeniería civil, debe seguir su proceso de investigación, puesto que es un tema al cual le apuestan las grandes potencias mundiales, no solo en ingeniería civil, sino en los demás campos del conocimiento. Como ya se ha mencionado antes, el control activo de estructuras civiles es un tema amplio y complejo, el cual necesita de estudios a fondo acerca de los algoritmos que se puedan implementar para lograr dicho control, hasta el punto de manipular el sistema completo estructura, sensor/actuador y controlador. Trabajos como el de la referencia (Irschik and Naderb, 2009) [8], exponen un procedimiento sistemático basado en el planteamiento analítico del comportamiento del sistema viga/actuador, este tipo de metodología debe ser utilizada pues a partir del estudio analítico del fenómeno se logrará manejar su comportamiento.
- Debido a que las investigaciones realizadas acerca de la utilización de materiales piezoeléctricos en el control estructural de vigas, han sido

mayoritariamente de tipo numérico o analítico, se hace necesario corroborar los resultados mediante informes con datos experimentales obtenidos de modelos reales estudiados en el laboratorio. Se deben garantizar modelos a escala que manifiesten que la interacción entre los materiales sea apropiada en una aplicación práctica.

- Se hacen necesarios también conocimientos avanzados en cuanto al manejo matemático, para el procesamiento de datos puesto que es la forma más viable al momento de caracterizar el comportamiento estructural de los materiales usados en el modelamiento, y así llegar a discretizar los resultados para obtener unas ecuaciones de diseño que se acomoden a las diferentes situaciones de contorno del elemento a diseñar. A su vez, es requisito indispensable la interdisciplinariedad para el entendimiento completo del fenómeno eléctrico y del control de sistemas mediante métodos como el “control de realimentación” (Feedback Control). A partir de la interacción de ingenierías como electrónica, civil y de sistemas, se podría llegar a generar un código propio que alcance a manipular desde el planteamiento del elemento finito utilizado, hasta el esquema de control para los sensores y actuadores.
- El empalme con los trabajos realizados en el campo del control de vibraciones es otro aspecto que debe ser tratado, pues es finalmente el análisis dinámico de la estructura o sus elementos lo que representará un mayor desarrollo en el campo del control activo.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Gaudenzi, P., and Yasuhide, S., 2005. "Modelling of smart structures", *Computers and Structures*, 83, 1151–1152.
- [2] Wadhawan, V. K., 2005. "Smart Structures and Materials", *Resonance (General Article)*, 27-41.
- [3] Cheng, Franklin, Jiang, Hongping, Lou, Kangyu. *Smart Structures "Innovative Systems for Seismic Response Control"*. United States of America: Taylor & Francis Group, 2008.
- [4] *Materiales Inteligentes (Discovery Channel) [Online]*. Latinoamérica. Discovery, 2010 - [Citado 2012-11-30]. Disponible en internet: <[http://www.tudiscovery.com/guiatecnologia/materiales\\_basicos/materiales\\_inteligentes/index.shtml](http://www.tudiscovery.com/guiatecnologia/materiales_basicos/materiales_inteligentes/index.shtml)>
- [5] *Materiales Inteligentes (Revista Actimat) [Online]*. País Vasco (España). *Revista Actimat*, octubre 2010 – [Citado 2012-11-02]. Disponible en internet: <<http://www.actimat.es/web/materiales-inteligentes.asp>>
- [6] *Materiales Inteligentes (Andragogy Internacional Universe) [Online]*. Miami (Estados Unidos). *Andragogy*, 2001 – [Citado 2012-11-02]. Disponible en internet: <[http://www.andragogy.org/\\_Cursos/Curso00188/Temario/pdf%20leccion%205/lecci%C3%B3n%205.pdf](http://www.andragogy.org/_Cursos/Curso00188/Temario/pdf%20leccion%205/lecci%C3%B3n%205.pdf)>
- [7] *Materiales Inteligentes (Materiales Inteligentes, s.l.) [Online]*. Valencia (España). *Materiales Inteligentes, s.l.*, 2001 - [Citado 2012-11-30]. Disponible en internet: <[http://www.inteligentes.org/index\\_MI\\_cuales\\_son.htm](http://www.inteligentes.org/index_MI_cuales_son.htm)>
- [8] Irschik H., Krommer M., Yury Vetyukov Y., 2010. On the Use of Piezoelectric Sensors in Structural Mechanics: Some Novel Strategies. *Sensors — Open Access Journal [Online]*. Vol. 10, no. 6 [Citado 2012-11-15]. Disponible en internet: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3247724/#b9-sensors-10-05626>>
- [9] Songa G., Sethi V., Li H. N., 2006. "Vibration control of civil structures using piezoceramic smart materials: A review", *Elsevier, Engineering Structures*, 28, 1513–1524.
- [10] Agrawal B. N. and Treanor K. E., 1999. "Shape control of a beam using piezoelectric actuators", *Smart Mater. Struct.*, 8, 729–740.

- [11] Trindade M. A., Benjeddou A., Ohayon R., 1999. "Parametric Analysis of the Vibration Control of Sandwich Beams Through Shear-Based Piezoelectric Actuation", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 10, 377–385.
- [12] Sun C. T. and Zhang X. D., 1995. "Use of thickness-shear mode in adaptive sandwich structures", *Smart Mater. Struct.*, 4, 202–6.
- [13] Osama J. A., Ahmed A. K., 2000. "Smart beams with extension and thickness-shear piezoelectric actuators", *Smart Mater. Struct.*, 9, 1–9.
- [14] Xu S. X., Koko T. S., 2004. "Finite element analysis and design of actively controlled piezoelectric smart structures", *Elsevier, Finite Elements in Analysis and Design*, 40, 241–262.
- [15] Piezoelectricidad (Ecurrred) [Online]. Cuba. EcuRed (La enciclopedia cubana en la red), Marzo 2012 – [Citado 2012-11-30]. Disponible en internet: <<http://www.ecured.cu/index.php/Piezoelectricidad>>
- [16] [Gonzales, A., F., 2009. "Materiales Piezoeléctricos y Efecto piezoeléctrico". Universidad Tecnológica Nacional, 1-19]
- [17] La piezoelectricidad (Scribd) [Online]. Distrito SOMA, San Francisco, costa oeste. Scribd – [Citado 2012-12-04]. Disponible en internet: <<http://es.scribd.com/doc/44664520/La-Piezoelectricidad>>
- [18] Sensores Generadores (Proyecto mediciones) [Online]. Proyecto Mediciones Blog, 2009 – [Citado 2012-12-6]. Disponible en internet: <<http://tareamediciones.blogspot.com/2009/02/entre-los-materiales-piezoelectricos.html>>
- [19] Santamaría, G. and Castejón, A., 2009. "Electrotecnia", Editex. 10-11.
- [20] Materiales Inteligentes (Google Sites) [Online]. [Citado: 2012-12-10]. Disponible en internet: <<https://sites.google.com/site/materialesinteligentesweb9/clasificacion-de-los-materiales-inteligentes>>
- [21] Pallás, A., R., 2004. "Sensores y Acondicionamiento de señal", Marcombo, 290-300.
- [22] Una aproximación a la naturaleza de la piezoelectricidad. Merino V., Jaramillo J., [Online]. [Citado: 2012-12-12] Disponible en internet

**[23]** Materiales piezoeléctricos y efecto piezoeléctrico, [Online]. [Citado: 2012-12-12] Disponible en internet: <<http://www.frm.utn.edu.ar/tecnologiae/apuntes/piezolectricidad.pdf>>

**[24]** Piezoelectric Ceramics, [Online]. [Citado: 2012-12-12]]. Disponible en internet: <[http://www.polytecpi.com/PDF/Piezoelectric\\_Ceramics.pdf](http://www.polytecpi.com/PDF/Piezoelectric_Ceramics.pdf)>

**[25]** Piezoelectric Ceramics. MORGAN, [Online]. [Citado: 2012-12-14]. Disponible en internet: <<http://www.morganelectroceramics.com/download.php?525a45634742566a533851336b524b5176316e582f552b4a487058464347712f6a464b786363425466776d4f45464b716941367a35632b6b775247666a56356d536f343d>>

**[26]** Guanghai, Q., Jiajun, Q. and Yanhong, L., 2006. “A semi-analytical solution for static and dynamic analysis of plates with piezoelectric patches”, International Journal of Solid and Structures, 43, 1388-1403.

**[27]** Bassi C. E., 2011. “Técnicas para monitoramento de integridade estrutural usando sensores e atuadores piezoelétricos”. Escola de Engenharia de Sao Carlos, Universidade de Sao Paulo.

**[28]** Tutorial ANSYS v11, Simulation Driven Product Development [Software License: 205553]. Swanson Analysis Systems.Inc. Pennsylvania-Estados Unidos, 2007.

**[29]** Koutsawa Y., Giunta G., Belouettar S., 2012. “Hierarchical FEM modelling of piezo-electric beam structures”, Elsevier, Composite Structures, 95, 705–718.

**[30]** Bruch J. C., et al, 2000. “Optimal piezo-actuator locations/lengths and applied voltage for shape control of beam”, Smart Mater. Struc., 9, 205–211.

**[31]** MATLAB R2012b, MATrix LABoratory [Software License: 691503]. The Math Works, Inc. 2012.

## ANEXOS

Anexo A. Código elaborado en (MATLAB R2012b, 2012) [56], para la minimización de las 3 funciones obtenidas de la relación entre la posición del actuador, el voltaje aplicado y la deflexión generada de cada rango estipulado.

%CODIGO MATLAB:

**%PLANO O RANGO 1:**

```
%Archiv.m (1)
function f = funobj1(x)
f = 0.00021783+0.00283333*x(1)-3e-8*x(2); (plano1)
%Archiv.m (2)
function [c,ceq] = condfun1(x)
c = [-x(1); x(1)-0.005; -x(2)+500; x(2)-1000]; (plano1)
ceq = [];

%Archiv.m (3)
clc
clear

x0 = [0,0];
options = optimset('LargeScale', 'off');
[x,fval] = fmincon(@funobj1,x0,[],[],[],[],[],[],[],@condfun1,options);
```

**%PLANO O RANGO 2:**

```
%Archiv.m (1)
function f = funobj2(x)
f = 0.0002189+0.0012025*x(1)-2.05e-8*x(2); (plano2)

%Archiv.m (2)
function [c,ceq] = condfun2(x)
c = [-x(1); x(1)-0.05; -x(2); x(2)-1000]; (plano2)
ceq = [];

%Archiv.m (3)
clc
clear

x0 = [0,0];
options = optimset('LargeScale', 'off');
[x,fval] = fmincon(@funobj2,x0,[],[],[],[],[],[],[],@condfun2,options);

if x0(1,2)<807
n=13;
elseif x0(1,2)>=807 && x0(1,2)<=971
n=12;
elseif x0(1,2)>971 && x0(1,2)<=1000
```

```

n=11;
else
n=10;
end

for i=1:n
if (fval-1.88e-08>6.5e-05)
a=x0(1,2)+99.999;
x0=[x0(1,1),a];
options = optimset('LargeScale', 'off');
[x,fval] = fmincon(@funobj2,x0,[],[],[],[],[],[],[],@condfun2,options);
end
end

%PLANO O RANGO 3:

%Archiv.m (1)
function f = funobj3(x)
f = 0.0002361+0.0005873*x(1)-7.41e-9*x(2); (plano3)

%Archiv.m (2)
function [c,ceq] = condfun3(x)
c = [-x(1)+0.03; x(1)-0.07; -x(2); x(2)-1000]; (plano3)
ceq = [];

%Archiv.m (3)
clc
clear

x0 = [0,0];
options = optimset('LargeScale', 'off');
[x,fval] = fmincon(@funobj3,x0,[],[],[],[],[],[],@condfun3,options);

n=x0(1,2)/100;
for i=1:n
if (fval-1.88e-08>1.6e-05)
a=x0(1,2)-100;
x0=[x0(1,1),a];
options = optimset('LargeScale', 'off');
[x,fval] = fmincon(@funobj3,x0,[],[],[],[],[],[],@condfun3,options);
end
end

```