

DESARROLLO DE UN MODELO NUMÉRICO TRIDIMENSIONAL EN
VOLUMENES FINITOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE FLUJO DE
FLUIDOS MONOFÁSICOS EN MALLAS ESTRUCTURADAS

JAIR ALFONSO CUESTA CIFUENTES
EDWARD JULIÁN LAGUADO PARDO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISCOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
BUCARAMANGA

2014

DESARROLLO DE UN MODELO NUMÉRICO TRIDIMENSIONAL EN
VOLUMENES FINITOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE FLUJO DE
FLUIDOS MONOFÁSICOS EN MALLAS ESTRUCTURADAS

JAIR ALFONSO CUESTA CIFUENTES
EDWARD JULIÁN LAGUADO PARDO

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OBTENER EL
TÍTULO DE
INGENIERO DE PETRÓLEOS

DIRECTOR:
M.SC. NELSON ENRIQUE QUINTERO VALERO
CODIRECTOR
M.SC. LUIS ANTONIO BAUTISTA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISCOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
BUCARAMANGA

2014

Agradecimientos

Gracias a esas personas importantes en mi vida, que siempre estuvieron listas para brindarme todo su incondicional apoyo durante mi carrera en especial a mi padre Abel Cuesta el cual siempre estará conmigo y por supuesto a toda mi familia.

A todas las personas que me apoyaron en su incondicional apoyo en la investigación y progreso del proyecto, en especial a mis directores Nelson quintero y Luis Bautista, a Nelson por su amistad, compañerismo y por llevarme por el camino de la simulación de yacimientos y a una mente brillante a Luis Bautista por su colaboración en el desarrollo de nuevos métodos aplicados a la simulación numérica, entre ellos la propuesta de una ecuación para el cálculo del gradiente del potencial de flujo.

A todas las personas que hicieron posible este proyecto, muchas gracias por su incondicional apoyo y enseñanza:

Carlos Andres Páez

Ninfa Días Ordoñez

Samuel Santafé Páez

Willian Navarro

Gracias a mis amigos Edward Laguado, Samary Espitia, Paola dela Peña por su comprensión y apoyo, durante mi carrera.

Finalmente agradezco a todas las personas que influyeron con sus lecciones para formarme como persona de bien y estar preparado para los retos que me impone la vida, a cada uno de ellos les dedico cada unas de las hojas escritas en esta tesis y los futuros triunfos que vienen a mi vida, de nuevo gracias.

Katty Monterrosa y Eduardo Cubaque

Sonia Fajardo

Fanny Aldana

Teresa y Efrain de Quitian

JAIR CUESTA

Agradecimientos

Ante todo le agradezco a Dios quien me permitió alcanzar este logro, ayudándome a superar momentos difíciles y guiándome por el camino correcto.

A mi mama quien me ha apoyado incondicionalmente, no me ha dejado solo en ningún momento y se ha esforzado por querer verme graduado ya que es uno de sus más grandes anhelos.

A la Universidad Industrial de Santander quien me abrió sus puertas para poder formarme como profesional.

A mi director de tesis Nelson Enrique Quintero y codirector Luis Antonio Bautista quienes con su experiencia, conocimientos y orientación nos permitieron hacer de esto una realidad.

Por ultimo agradezco a mis amigos y familiares quienes me han ayudado no solo en mi formación profesional sino en mi formación personal, brindándome su apoyo, consejos y compañía, algunos de ellos tal vez no están conmigo pero viven en mí y gracias a ellos es que sigo adelante.

Para todos ellos muchas gracias y que Dios los Bendiga.

EDWARD LAGUADO

TABLA DE CONTENIDO

1. ECUACIONES FUNDAMENTALES PARA FLUJO MONOFASICO	22
1.1 ECUACIONES DE ESTADO PARA DIFERENTES TIPOS DE FLUIDOS.....	27
1.1.1 Fluido incompresible	27
1.1.2 Fluido levemente compresible	27
1.1.3 Fluido compresible.....	28
2. TIPOS DE MALLA EN SIMULACION NUMERICA.....	29
2.1 MALLADO ESTRUCTURADO	30
3. TECNICAS DE DISCRETIZACION NUMERICA	33
3.1 MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS.....	34
3.3 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.....	34
3.4 MÉTODO DE GALERKIN.....	35
3.5 COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS MÁS USADOS	35
4. METODO DE VOLUMENES FINITOS PARA LA ECUACION DE DIFUSIVIDAD	36
4.1. ECUACION EN EL METODO DE VOLUMENES FINITOS PARA EL ACEITE.....	36
4.2 CALCULO DEL GRADIENTE DE POTENCIAL DE FLUJO POR SERIES DE TAYLOR MULTIVARIABLE (METODO CONVENCIONAL).....	39
4.2.2 Interpolación lineal mejorada	41
4.3 CALCULO DEL GRADIENTE DE POTENCIAL DE FLUJO POR METODO PROPUESTO	46
4.4 ECUACION DE DIFUSIVIDAD DISCRETIZADA ESPACIO-TIEMPO BAJO MÉTODO PROPUESTO.	50
4.5 CALCULO DE PARÁMETROS DE LA ECUACIÓN DISCRETIZADA	56
4.5.1 Calculo de la sección transversal del volumen de control por el teorema de Green	¡Error! Marcador no definido.
4.5.2 Calculo del volumen del bloque de control	58
4.5.3 Calculo de parámetros que cambian en el tiempo.....	61
4.5.3.1 Calculo del factor volumétrico en el tiempo	61
4.5.3.2 Calculo de la viscosidad en función de la temperatura.....	62
4.6 INICIALIZACIÓN Y CONDICIONES ESPECIALES DEL MÉTODO	63
4.6.1 Método propuesto para inicialización	70
4.7 ALMACENAMIENTO DE DATOS.....	72
4.7.1 Metodología para el manejo de matrices.....	72
4.7.1.1 Método convencional de almacenamiento disperso por coordenadas (COO).	72

4.7.1.2 Método convencional de almacenamiento disperso por fila comprimida (CSR). ...	73
4.7.1.3 Método convencional de almacenamiento disperso por fila comprimida modificada (MSR).....	74
4.7.2 Método optimizado propuesto.....	75
4.8 MÉTODOS DE SOLUCIÓN.....	77
4.8.1 Método del gradiente conjugado (CG).....	78
4.9. ECUACION EN EL METODO DE VOLUMENES FINITOS PARA EL GAS.....	87
4.9.1 Discretizacion de la ecuación de difusividad del gas en volúmenes finitos.....	89
4.9.2 Metodología para resolver la ecuación del gas en teoría de volúmenes finitos.....	90
5. VISUALIZACION.....	92
5.1 GENERACIÓN DE MALLA EN MATLAB.....	92
6. CONSTRUCCION DEL MODELO DE ESTUDIO.....	94
6.1 PROPIEDADES ESTÁTICAS DEL YACIMIENTO.....	94
6.2 INTERACCIÓN ROCA FLUIDO.....	95
6.3 PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS.....	96
6.4 CONDICIONES INICIALES DEL YACIMIENTO.....	96
6.5 CONDICIONES OPERATIVAS DEL ESQUEMA DE PRODUCCIÓN.....	97
7. COMPARACION DE RESULTADOS DE INICIALIZACION DEL MODELO GENERADO POR CMG VS EL METODO PROPUESTO.....	98
8. VISUALIZACION DE VARIABLES DE SALIDA ENTRE CMG Y METODO PROPUESTO.....	99
9. CONCLUSIONES.....	106
BIBLIOGRAFIA.....	110
ANEXOS.....	113

LISTA DE ECUACIONES

Ecuación 1. Ecuación de balance de masa sobre un elemento Infinitesimal.....	23
Ecuación 2. Masa que entra al volumen de control en términos de la velocidad lineal del fluido, área, densidad del fluido en el intervalo de tiempo estudiado	23
Ecuación 3. Masa que sale del volumen de control en términos de la velocidad lineal del fluido, área, densidad del fluido en el intervalo de tiempo estudiado	23
Ecuación 4. Masa que entra o sale por fuentes y sumideros en termino del caudal de fluido, volumen, tiempo, en el intervalo de tiempo estudiado.....	24
Ecuación 5. Masa que se acumula o agota en el volumen de control en el intervalo de tiempo estudiado	24
Ecuación 6. Volumen de aceite a condiciones normales	24
Ecuación 7. Ecuación de balance resultante de la sustitución de las ecuaciones 2, 3, 4, 5, 6.....	25
Ecuación 8. Formulación general de la ecuación 7 aplicando el concepto de derivada	25
Ecuación 9. Ecuación general aplicando el concepto de difusividad.....	25
Ecuación 10. Divergencia en coordenadas cartesianas	25
Ecuación 11. Vector velocidad de flujo	25
Ecuación 12. Ecuación general de Darcy	26
Ecuación 13. Potencial de flujo	26
Ecuación 14. Ecuación de difusividad para el aceite	26
Ecuación 15. Ecuación de estado para el flujo incompresible	27
Ecuación 16. Ecuación de estado para flujo levemente compresible	27
Ecuación 17. Ecuación de estado para flujo levemente compresible en terminos de densidad	28
Ecuación 18. Ecuación de estado para fluido compresible.....	28
Ecuación 19. Termino temporal de la ecuación de difusividad para fluido Monofásico.....	36
Ecuación 20. Ecuación de difusividad aplicando la integración del volumen de control	37
Ecuación 21. Teorema de la divergencia.....	37
Ecuación 22. Teorema de la divergencia aplicada a la ecuación de difusividad	38
Ecuación 23. Desarrollo de la integral triple para el termino de fuentes y Sumideros	38
Ecuación 24. Desarrollo de la integral triple para el termino temporal de la ecuación de difusividad	38

Ecuación 25. Termino temporal con la integral de superficie y la sumatoria debido a las seis caras del elemento	39
Ecuación 26. Potencial de flujo en la frontera de la celda en términos de expansión de potenciales de las series de Taylor multivariado	40
Ecuación 27. Coeficiente de interpolación.....	40
Ecuación 28. Vector de flujo en términos del coeficiente de interpolación	40
Ecuación 29. Gradiente en término obtenido por el teorema de Gauss	41
Ecuación 30. Integral de superficie y teorema de divergencia	41
Ecuación 31. Expansion en series de Taylor multivariable del potencial evaluado en un punto A en su forma general	42
Ecuación 32. Vector unidireccional de flujo	42
Ecuación 33. Gradiente del potencial en función de los potenciales en cada Dirección	42
Ecuación 34. Vector direccional de flujo	43
Ecuación 35. Vector potencial de flujo de un punto a otro.....	43
Ecuación 36. Ecuaciones de potencial de P_e y E_e para calcular el gradiente en la frontera del volumen de control.....	43
Ecuación 37. Sistema matricial para conocer el gradiente en la frontera del volumen de control.....	43
Ecuación 38. Coeficiente geométrico.....	44
Ecuación 39. Coeficiente geométrico en términos de los vectores conocidos a partir del centroide de una celda de control	44
Ecuación 40. Potencial unidireccional en la frontera corregido por geometría	44
Ecuación 41. Potencial direccional corregido por geometría	45
Ecuación 42. Potencial direccional en termino de los coeficientes de Interpolación	45
Ecuación 43. Coeficientes de interpolación unidireccional corregido por Geometría	45
Ecuación 44. Sistema matricial para obtener los coeficientes de interpolación corregida por geometría.....	45
Ecuación 45. Derivada direccional en función del gradiente y vector Unitario..	46
Ecuación 46. Derivada direccional en termino de las presiones y centroides de volumen de control	47
Ecuación 47. Ecuaciones para el cálculo de centroides de un tetraedro	48
Ecuación 48. Método propuesto para el cálculo del centroide del hexaedro	48
Ecuación 49. Ecuación propuesta para el cálculo del gradiente del Potencial .	49
Ecuación 50. Ecuación del gradiente propuesto en términos de un vector ∇ el cual es el resultado de la sumatoria.....	49
Ecuación 51. Ecuación resultante de la ecuación 50 y 46.....	49

Ecuación 52. Constante de Proporcionalidad del gradiente	50
Ecuación 53. Gradiente del potencial para los volúmenes de control método propuesto.....	50
Ecuación 54. Termino temporal de la ecuación de difusividad de forma General	50
Ecuación 55. Correlación del factor volumétrico.....	51
Ecuación 56. Derivada parcial del termino temporal de la ecuación de Difusividad	51
Ecuación 57. Derivada con respecto al tiempo de la ecuación 55.....	51
Ecuación 58. Ecuación de estado para la compresibilidad de la roca	51
Ecuación 59. Volumen total	52
Ecuación 60. Ecuación de porosidad.....	52
Ecuación 61. Sustitución de las ecuaciones 59, 60 en 58	52
Ecuación 62. Compresibilidad de la roca ecuación de estado.....	52
Ecuación 63. Correlación de la porosidad en función de la compresibilidad de la roca.....	52
Ecuación 64. Ecuación diferencial de la porosidad en el tiempo	53
Ecuación 65. Desarrollo del termino temporal de la ecuación de Difusividad...	53
Ecuación 66. Simplificación de la ecuación 65	53
Ecuación 67. Vector área de flujo	53
Ecuación 68. Ecuación discretizada propuesta como solución de la ecuación de difusividad con la técnica de volúmenes finitos.....	54
Ecuación 69. Permeabilidad promedio para la frontera del volumen de Control .	54
Ecuación 70. Factor volumétrico promedio para la frontera del volumen de control	54
Ecuación 71. Viscosidad promedio para la frontera del volumen de Control....	54
Ecuación 72. Coeficiente de flujo.....	54
Ecuación 73. Termino F como agrupación de las ecuaciones 69, 70, 71, 72	55
Ecuación 74. Termino B agrupando términos constantes de la variable temporal	55
Ecuación 75. Ecuación discretizada en función de las ecuaciones B, F y tiempo como solución implícita para la solución de la ecuación de difusividad	56
Ecuación 76. Vector área normal a las caras de flujo.....	56
Ecuación 77. Teorema de Green.....	57
Ecuación 78. Calculo integral del área	57
Ecuación 79. Parámetro para que se cumpla la condición de la ecuación 78 ...	57
Ecuación 80. Parámetro propuesto para la función P(X,Y)	57
Ecuación 81. Parámetro propuesto para la función Q(X,Y)	57

Ecuación 82. Calculo del área integral resultante de las ecuaciones 78, 80, 8157.	57
Ecuación 83. Calculo del área integral para valores discretos	58
Ecuación 84. Volumen del paralelepípedo	60
Ecuación 85. Volumen del tetraedro.....	61
Ecuación 86. Volumen del hexaedro en función de los 5 volúmenes tetrahedricos que forman un hexaedro	61
Ecuación 87. Correlación de la viscosidad para el aceite	62
Ecuación 88. Profundidad de referencia	64
Ecuación 89. Calculo de presión a condiciones de equilibrio hidrostático en su forma integral	65
Ecuación 90. Ecuación discretizada a partir de la ecuación 89	65
Ecuación 91. Ecuación del cálculo de la presión a partir del datum resultante de la ecuación 90.....	66
Ecuación 92. Calculo de la profundidad en un punto a partir del datum.....	66
Ecuación 93. Calculo de la presión en un punto con respecto a uno de referencia	67
Ecuación 94. Presión de referencia para el petróleo	67
Ecuación 95. Correlación para el cálculo de la viscosidad del aceite	67
Ecuación 96. Gradiente hidrostático de presión	68
Ecuación 97. Correlación del gradiente de presión para el aceite	68
Ecuación 98. Correlación lineal para cálculo de factor volumétrico	68
Ecuación 99. Correlación lineal para el cálculo de la solubilidad del gas en el aceite	68
Ecuación 100. Ecuación resultante de la sustitución de las ecuaciones 99,98, en la ecuación 97	69
Ecuación 101. Ecuación resultante de la sustitución de la ecuación 100 en la ecuación 93.....	69
Ecuación 102. Desarrollo matemático de la ecuación 101 en forma cuadrática..	69
Ecuación 103. Simplificación en coeficientes de la ecuación 102	69
Ecuación 104. Solución de la presión de la ecuación 103.....	70
Ecuación 105. Correlación lineal del gradiente de presión para $P > P_b$	71
Ecuación 106. Ecuación del datum -forma general	71
Ecuación 107. Sustitución de la ecuación 105 en la ecuación 106.....	71
Ecuación 108. Delta de profundidad con respecto al datum.....	71
Ecuación 109. Ecuación propuesta a partir de las ecuaciones 105,107,108.....	71
Ecuación 110. Simplificación de la ecuación 109	72
Ecuación 111. Función cuadrática para matrices cuadradas	79
Ecuación 112. Gradiente de la función cuadrática.....	79

Ecuación 113. Simplificación de la ecuación 112 considerando simetría de la matriz	¡Error! Marcador no definido.
Ecuación 114. Ecuación de difusividad para el gas.....	87
Ecuación 115. Correlación para el factor volumétrico del gas	87
Ecuación 116. Ecuación resultante de la sustitución de la ecuación 115 en el termino temporal de la ecuación de difusividad	87
Ecuación 117. Derivación implícita de la ecuación 116	88
Ecuación 118. Derivación implícita del termino temporal de la ecuación de difusividad.....	88
Ecuación 119. Ecuación para expresar la derivada de la porosidad en términos de la presión	88
Ecuación 120. Agrupación y desarrollo de todos los términos temporales de la ecuación de difusividad.....	88
Ecuación 121. Aplicación del MVF en la ecuación de difusividad para el gas	88
Ecuación 122. Aplicación del teorema de la divergencia en el término espacial de la ecuación de difusividad para el gas	89
Ecuación 123. Desarrollo de la integral del termino fuentes y sumideros para el gas	89
Ecuación 124. Factorización arreglo de la ecuación 120.....	89
Ecuación 125. Discretización de la ecuación de difusividad aplicando el método de los volúmenes finitos para el gas	89
Ecuación 126. Calculo del factor volumétrico del gas usando discretización lineal de Taylor en función de la presión y factor de compresibilidad del gas	90

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Elemento infinitesimal de volumen, flujo monofásico tridimensional en coordenadas cartesianas.....	22
Figura 2. Elementos finitos para enmallar regiones.	30
Figura 3. Enmallado estructurado en un dominio simple.	31
Figura 4. Enmallado no estructurado en un dominio simple.	32
Figura 5. Esquema del elemento de volumen de control P adyacente a E.	40
Figura 6. Volumen de control (elemento P) con elementos vecinos E,S,N,B,T para interpolación lineal mejorada.	42
Figura 7. Representación física para emplear derivada direccional.....	47
Figura 8. Centroide en un hexaedro corner point.....	47
Figura 10 Representación gráfica del área calculada con el teorema de Green.	56
Figura 11. Sección transversal por donde surge la trasferencia de volumen.	58
Figura 12. Planos de corte para sectorizar volumen de control corner point.	59
Figura 13. Representación de cinco tetraedros equivalentes al volumen de un	59
Figura 14. Concepto vectorial para el cálculo de volumen de medio paralelepípedo.	60
Figura 15. Curva del factor volumétrico vs presión, isoterma.	62
Figura 16. Curva viscosidad vs presión, isoterma.....	63
Figura 17. Representación gráfica de la coordenada Z'.....	66
Figura 18 Transformación de matrices dispersas en arreglos unidimensionales por.....	73
Figura 19 Transformación de matrices dispersas en arreglos unidimensionales por el método de almacenamiento disperso por fila comprimida (CSR).	74
Figura 20. Transformación de matrices dispersas en arreglos unidimensionales por el método de almacenamiento disperso por fila comprimida modificada (MSR).	75
Figura 22 Gradiente de la forma cuadrática apuntando en la dirección de máximo crecimiento de f y es ortogonal a la curva de nivel que pasa por x.	80
Figura 23. Forma cuadrática en 3D y 2D donde alcanza su valor mínimo, siendo este el que cumple la condición $Ax = b$	81
Figura 24. Formas cuadráticas de paraboloides que representan el sistema un sistema $Ax = b$	82
Figura 25 Algoritmo del método GC.....	83
Figura 26 Método iterativo de GC, oscilando en la dirección de máximo descenso.	84

Figura 27. Algoritmo de solución del sistema $Ax = b$ mediante el método GC..	86
Figura 28 Diagrama de flujo para la resolución en técnicas de volúmenes finitos aplicada al gas	91
Figura 29. Vista areal y en profundidad de la malla generada por matlab y CMG.	92
Figura 30. Sector model 3X3X3 generado en CMG y matlab.	93
Figura 31. Caso de estudio, enmallado del yacimiento-Permeabilidad.....	94
Figura 32. Curva de permeabilidad relativa, CMG.	96
Figura 33. Sección transversal donde se ubica el pozo productor.	97
Figura.34 Comparación de los esquemas de aproximación numérica.....	101
Figura 35. Comparación método propuesto vs CMG normal y refinado.	102
Figura 36. Información del modelo.....	103
Figura 37 Los resultados gráficos de la simulación para diferentes pasos de tiempo se muestran a continuación:	104
Figura 38 Visualización del modelo:.....	105

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Comparación de los métodos más usados.....	35
Tabla 2. Funciones de permeabilidad relativa Agua-Aceite.....	95
Tabla 3. Propiedades de los fluidos, modelo Black Oil.....	96
Tabla 4. Comparación de resultados de inicialización entre CMG y el método propuesto.....	98
Tabla 5. Comparación del modelo propuesto y el de simulación numérica.....	100
Tabla 6. Características del reservorio.....	105

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A. CÓDIGO PARA ALMACENAMIENTO DE DATOS (MÉTODO PROUESTO-OPTIMIZADO)	113
ANEXO B. CÓDIGO PARA LA GENERACIÓN DE MALLA EN MATLAB	116
ANEXO C. ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DEL FACTOR VOLUMÉTRICO EN FUNCIÓN DE LA PRESIÓN CON RESPECTO AL TIEMPO.	117
ANEXO D. ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LA VISCOSIDAD EN FUNCIÓN DE LA PRESIÓN CON RESPECTO AL TIEMPO.	118
ANEXO E. ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LA DENSIDAD EN FUNCIÓN DE LA PRESIÓN CON RESPECTO AL TIEMPO.	119
ANEXO F. ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DEL VECTOR GRADIENTE EN FUNCIÓN DE LA MATRIZ POZOS , DONDE SE ENCUENTRA LA DATA NECESARIA DE LOS POZOS PRODUCTORES.	120

RESUMEN

TITULO: DESARROLLO DE UN MODELO NUMÉRICO TRIDIMENSIONAL EN VOLUMENES FINITOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE FLUJO DE FLUIDOS MONOFÁSICOS EN MALLAS ESTRUCTURADAS*

AUTORES: JAIR ALFONSO CUESTA CIFUENTES**
EDWARD JULIÁN LAGUADO PARDO**

PALABRAS CLAVES: Simulación numérica, volúmenes finitos, elementos finitos, ecuación de difusividad, algoritmo optimizado, fluidos monofásicos, mallas estructuradas, tiempo de cómputo.

Gracias al avance tecnológico, la simulación numérica es actualmente una de las herramientas más usadas para comprender la dinámica de los fluidos en medios porosos, esta herramienta se ha usado en los últimos años bajo dos finalidades: la primera generar ajustes respecto a comportamientos pasados de un yacimiento y la segunda hacer predicciones del futuro desempeño de los campos.

La simulación depende fuertemente de las técnicas de aproximación numérica implícitas en los algoritmos de software comercial, siendo la más usada diferencias finitas bajo el uso de enmallado estructurado. En vista a la complejidad de los modelos simulados, en los últimos años se han usado técnicas numéricas que se adapten al enmallado no estructurado como lo son, elementos finitos y volúmenes finitos, estos últimos permiten modelar características físicas y geométricas mucho más robustas en los yacimientos.

Con este trabajo se pretende desarrollar un modelo matemático a partir de la ecuación de difusividad, basados en el concepto de volúmenes finitos sobre mallas estructuradas en un fluido monofásico, dando por resultado un sistema de ecuaciones lineales, generando una matriz simétrica, dispersa y bandeda de gran dimensión, dicho sistema se resuelve mediante el método iterativo de gradiente conjugado. Los resultados serán visualizados juntos con los obtenidos del simulador CMG-IMEX.

En este orden de ideas se propone un nuevo desarrollo matemático llevado a un algoritmo optimizado, con el fin de reducir el esfuerzo computacional a fin de modelar estructuras más complejas a un menor tiempo de cómputo.

*Proyecto de Grado

**Facultad de Ingenierías Físico-Química. Ingeniería de Petróleos

Director: M.Sc. Nelson Enrique Quintero Valero. Codirector: M.Sc. Luis Antonio Bautista.

ABSTRACT

TITLE: DEVELOPMENT OF A THREE-DIMENSIONAL NUMERICAL MODEL IN FINITE VOLUMES FOR SOLUTION OF EQUATIONS OF SINGLE-PHASE FLUID FLOW IN STRUCTURED MESH *

AUTHORS: JAIR ALFONSO CUESTA CIFUENTES **
EDWARD JULIÁN LAGUADO PARDO**

KEY WORDS: Numerical Simulation, finite volumes, finite elements, diffusivity equation, optimized algorithms, single-phase fluid, structured meshes, computation times.

Thanks to technological advances, the numerical simulation is currently one of the most used tools to understand the dynamics of fluids in porous media; this tool has been used in recent years under two purposes: first generate matching respects to past behavior of a reservoir and the second to make predictions of the future performance of the fields.

The simulation relies heavily on implicit numerical approximation techniques in commercial software algorithms, being the most widely used finite differences on the use of structured meshing. Viewing the complexity of the simulation models, in recent years, numerical techniques have been used to adapt to not structured meshing, finite elements and finite volumes, it allows to model physical and geometrical characteristics more complex in reservoirs.

This work aims to develop a mathematical model from diffusivity equation, based on the concept of finite volumes on unstructured meshes in a single-phase fluid, resulting in a system of linear equations, generating a symmetric matrix, sparse and banded of large-scale, solves this system by conjugate gradient iterative method. The results will be displayed together with those obtained from the simulator CMG- IMEX.

In this work we propose a new mathematical development and an optimized algorithm, in order to reduce the computational effort to model more complex structures at lower computation time.

* Graduation Project

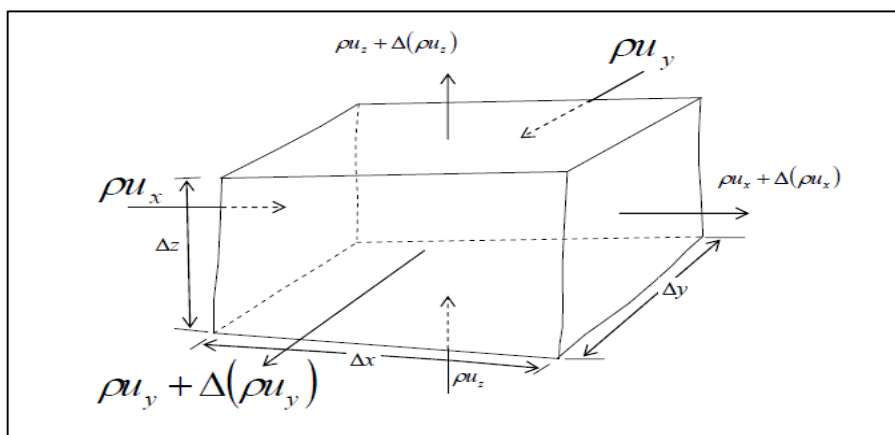
** Faculty of Physical - Chemical Engineering. Petroleum Engineering
Directed by M.Sc. Nelson Enrique Quintero Valero. Co: M.Sc. Luis Antonio Bautista.

1. ECUACIONES FUNDAMENTALES PARA FLUJO MONOFÁSICO

La ecuación fundamental de flujo es una forma diferencial de representar el principio de conservación de masa. La estructura algebraica que puede llegar a tomar esta ecuación depende de la geometría de flujo, naturaleza del fluido que se mueve internamente en el dominio de estudio, el número de fases presentes y el tipo de flujo.

En este trabajo de grado se enfocara en especificar la ecuación fundamental de flujo en medios porosos para sistemas monofásicos cuya fase presente en el modelo conceptual será el aceite, de igual forma se planteara el modelo matemático del gas. Para dar a conocer la procedencia de esta ecuación de flujo es necesario representar a través de un elemento infinitesimal el volumen de un medio poroso continuo a través del cual ocurre flujo monofásico en las tres direcciones ubicadas en un plano cartesiano como se muestra en la **Figura 1**.

Figura 1. Elemento infinitesimal de volumen, flujo monofásico tridimensional en coordenadas cartesianas.



Fuente. OSORIO, G. "Simulación Numérica de Yacimientos. Capítulo 2: Ecuaciones Fundamentales De Flujo En Medios Porosos". 2002, pág. 17.

Siendo:

u_x : La velocidad volumétrica de flujo en la dirección x

ρu_x : Flujo másico en la dirección x .

Al aplicar el principio de conservación de materia al elemento infinitesimal durante un intervalo de tiempo Δt se tiene:

Ecuación 1

$$[Masa_{entra}]_{\Delta t} - [Masa_{sale}]_{\Delta t} \pm \left[Masa_{Fuentes \text{ ó } Sumideros} \right]_{\Delta t} = [Masa_{Acumula \text{ ó } Agotamiento}]_{\Delta t}$$

Masa que entra:

Ecuación 2

$$[Masa_{entra}]_{\Delta t} = \rho_{ocn} u_{oxcn} A_{yz} \Delta t + \rho_{ocn} u_{oycn} A_{xz} \Delta t + \rho_{ocn} u_{ozcn} A_{xy} \Delta t$$

Siendo:

ρ_{ocn} : La densidad del petróleo a condiciones de superficie.

A : El área transversal al flujo.

u_{ocn} : La velocidad lineal en la dirección x, y, z respectivamente del petróleo a condiciones normales.

Masa que sale:

Ecuación 3

$$[Masa_{sale}]_{\Delta t} = \left(\rho_{ocn} u_{oxcn} A_{yz} + \Delta(\rho_{ocn} u_{oxcn} A_{yz}) \right) \Delta t \\ + \left(\rho_{ocn} u_{oycn} A_{xz} + \Delta(\rho_{ocn} u_{oycn} A_{xz}) \right) \Delta t \\ + \left(\rho_{ocn} u_{ozcn} A_{xy} + \Delta(\rho_{ocn} u_{ozcn} A_{xy}) \right) \Delta t$$

Masa que entra o sale por fuentes o sumideros:

Ecuación 4

$$[Masa_{Fuentes \text{ ó } Sumideros}]_{\Delta t} = q_{ocn} \Delta V \Delta t \rho_{ocn}$$

Siendo:

q_{ocn} : Flujo volumétrico del aceite que entra o sale por unidad de volumen de la celda

Masa que se acumula o se agota en el yacimiento:

Ecuación 5

$$[Masa_{Acumula \text{ ó } Agota}]_{\Delta t} = [\rho_{ocn} V_{ocn}]_{t+\Delta t} - [\rho_{ocn} V_{ocn}]_t$$

Siendo:

V_{ocn} : El volumen de petróleo a condiciones normales el cual puede ser representado como:

Ecuación 6

$$V_{ocn} = \Delta V \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)$$

Siendo:

ΔV : El volumen de control.

S_o : La fracción de petróleo en el volumen poroso.

B_o : El factor volumétrico del petróleo.

Reemplazando en la ecuación de balance se obtiene:

Ecuación 7

$$-\Delta(\rho_{ocn}u_{oxcn}A_{yz})\Delta t - \Delta(\rho_{ocn}u_{oycn}A_{xz})\Delta t - \Delta(\rho_{ocn}u_{ozcn}A_{xy})\Delta t \\ \pm q_{ocn}\Delta V\Delta t\rho_{ocn} = \rho_{ocn}\Delta V\left[\left(\frac{\varphi S_o}{B_o}\right)_{t+\Delta t} - \left(\frac{\varphi S_o}{B_o}\right)_t\right]$$

Dividiendo por ΔV , ρ_{ocn} y Δt luego aplicando el concepto de derivada se obtiene:

Ecuación 8

$$-\frac{\partial}{\partial x}(u_{oxcn}) - \frac{\partial}{\partial y}(u_{oycn}) - \frac{\partial}{\partial z}(u_{ozcn}) \pm q_{ocn} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi S_o}{B_o}\right)$$

Donde la formulación general más conocida es:

Ecuación 9

$$-\nabla \cdot (u_{ocn}) \pm q_{ocn} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi S_o}{B_o}\right)$$

Siendo:

$\nabla \cdot$: La divergencia en coordenadas cartesianas

Ecuación 10

$$\nabla \cdot = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

u_{ocn} : El vector de velocidad el cual está dado por:

Ecuación 11

$$u_{ocn} = u_{oxcn}\vec{i} + u_{oycn}\vec{j} + u_{ozcn}\vec{k}$$

Dónde:

u_{oxcn} , u_{oycn} y u_{ozcn} : son las componentes del vector velocidad para el aceite a condiciones normales en las direcciones x , y y z , respectivamente.

Esta expresión de velocidad puede ser representada mediante la ley de Darcy de la siguiente manera:

Ecuación 12

$$u_{ocn} = -c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \nabla \Phi_o$$

Siendo:

c_1 : Constante de conversión de unidades.

\mathbf{k} : El tensor de permeabilidad.

K_{ro} : La permeabilidad relativa al petróleo.

B_o : El factor volumétrico del petróleo.

μ_o : La viscosidad del petróleo.

Φ_o : El potencial del petróleo.

Referente al potencial de flujo es definido como:

Ecuación 13

$$\Phi_o = P_o - \rho_{ocy}gZ$$

Integrando estas expresiones en la forma generalizada se tiene:

Ecuación 14

$$\nabla \cdot \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \nabla (P_o - \rho_{ocy}gZ) \right) \pm q_{ocn} = \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)$$

Dónde:

c_2 : La constante que genera la conversión volumétrica.

Esta expresión es comúnmente conocida como ecuación de difusividad.

1.1 ECUACIONES DE ESTADO PARA DIFERENTES TIPOS DE FLUIDOS

Las ecuaciones de estado son las relaciones algebraicas que describen la relación entre la presión, el volumen y la temperatura, dicha relación es diferente dependiendo la naturaleza del fluido, para la simulación de yacimientos se emplean ecuaciones para fluidos compresibles, levemente compresibles o incompresibles¹.

1.1.1 Fluido incompresible

Para este caso se cumple que no hay cambio en la variación del volumen con respecto a la presión, como es el caso de yacimientos de petróleo de muy bajo Rs.

Ecuación 15

$$\frac{\partial V/m}{\partial P} = 0 = \frac{\partial 1/\rho}{\partial P} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial P}$$

Esta ecuación es válida si la densidad no cambia con respecto al cambio de presión $\rho = \text{constante}$.

1.1.2 Fluido levemente compresible

Partiendo de que la variación del volumen respecto a la presión es constante se tiene:

Ecuación 16

$$-\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \text{Constante} = c$$

Siendo c la compresibilidad del fluido-aceite $c = c_o$

¹ OSORIO, G. "Simulación Numérica de Yacimientos. Capítulo 2: Ecuaciones Fundamentales De Flujo En Medios Porosos". 2002, pág. 8.

Dónde se puede obtener la siguiente expresión:

Ecuación 17

$$c = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \frac{m}{m} = -\frac{m}{V} \frac{\partial \frac{V}{m}}{\partial P} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial P} = -\rho \left[-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial P} \right] = 0$$
$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = \text{constante}$$

Los fluidos que cumplen esta condición son el black oil y el agua.

1.1.3 Fluido compresible

Para este tipo de fluidos el volumen depende fuertemente del cambio de presión, generalmente se suele usar la ecuación de estado para gases reales en la representación de la ecuación de fluidos compresibles tal como se muestra en la siguiente ecuación:

Ecuación 18

$$PV = znRT = z \frac{m}{M} RT$$
$$P = z \frac{m}{VM} RT = z\rho \frac{RT}{M}$$
$$\rho = \frac{PM}{zRT}$$

Siendo Z la compresibilidad del gas, M el peso molecular, R la constante universal de los gases y T la temperatura.

Durante el desarrollo de este trabajo se centrara en especificar condiciones y propiedades aplicadas a flujo en una fase la cual hace alusión al petróleo, modelado como fluido ligeramente compresible lo cual es aplicable a la ecuación del gas en técnicas de volúmenes finitos como se explicara posteriormente.

2. TIPOS DE MALLA EN SIMULACIÓN NUMÉRICA

Se define como mallado a la discretización de volumen en porciones de tamaño finito. Dichas porciones se asocian a un tamaño característico llamado volumen de control en la técnica de volúmenes finitos, estas serán entidades geométricas elementales como tetraedros o prismas en tres dimensiones.

Esta discretización en estructuras más elementales es esencial para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales en dominios arbitrarios por el método de volúmenes finitos (FVM) o el método de elementos finitos (FEM).

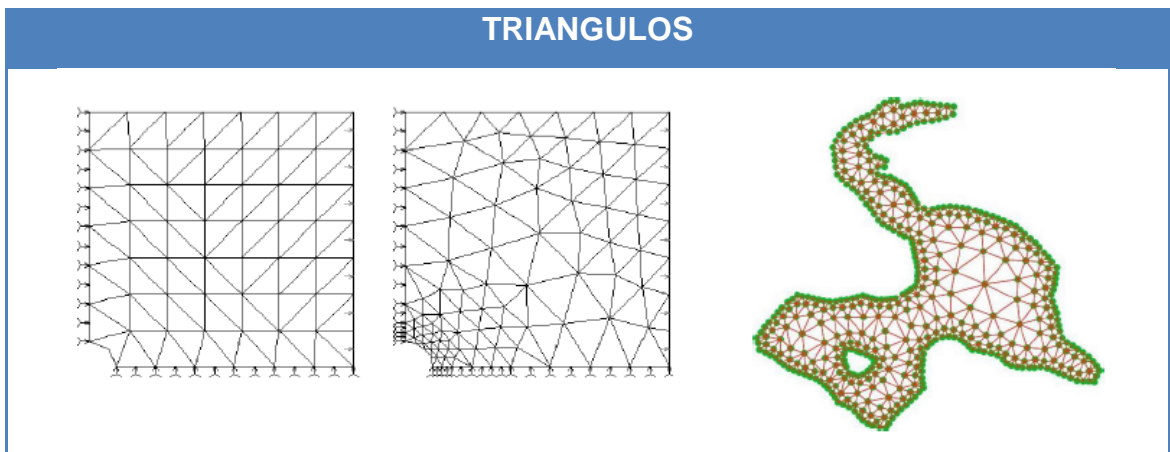
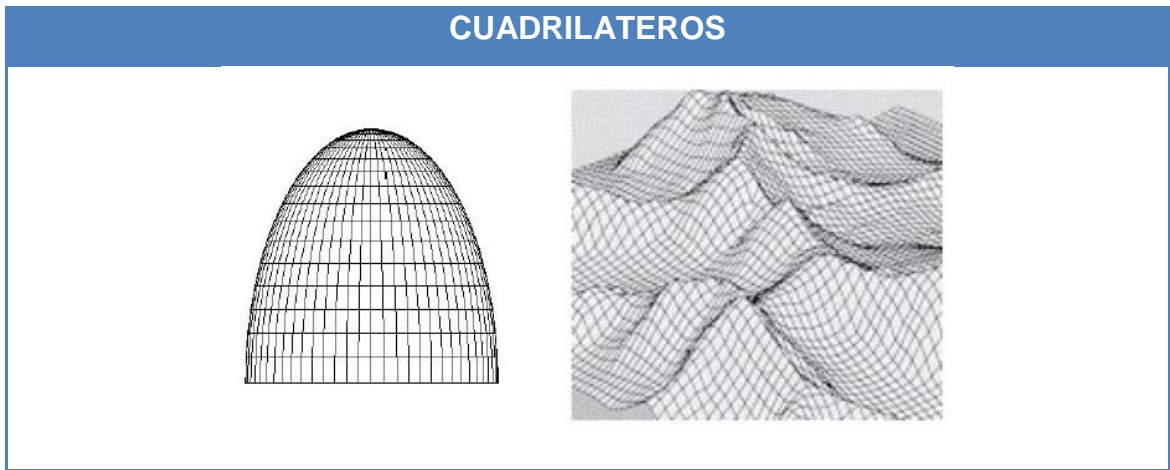
El proceso de enmallado comúnmente procede a discretizar sucesivamente elementos de gran dimensión a elementos más pequeños. Es importante recalcar que el enmallado es el primer paso de todo el ciclo de trabajo de la simulación numérica².

Una región o dominio de estudio se puede enmallar de dos formas principalmente, como se muestra en la **Figura 2**.

Existen esencialmente dos tipos de malla, la estructurada y la no estructurada.

² Manual GMSH, generador de mallas versátil para cualquier geometría bajo código abierto, libre y gratuito, 12 de noviembre de 2011, pág. 4.

Figura 2. Elementos finitos para enmallar regiones.



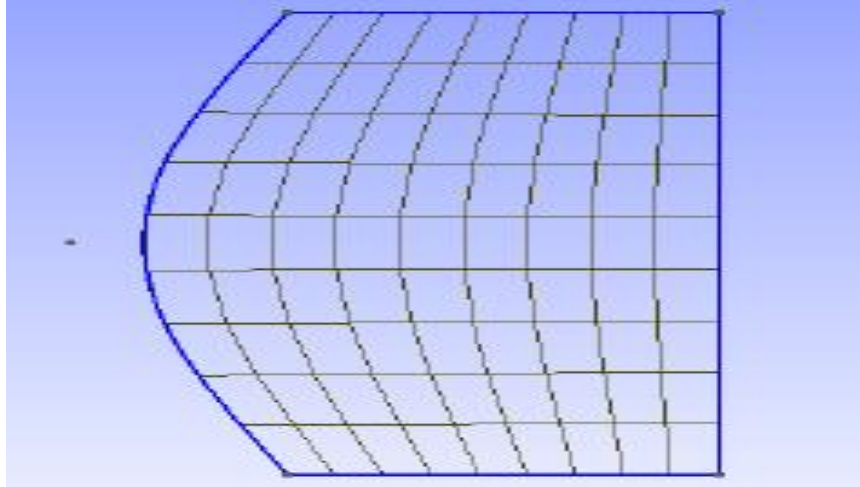
Fuente. VIQUEZ, M. “Un Sistema Para La Generación De Mallas Estructuradas Armónicas”, junio 2008, págs. 3-4.

2.1 MALLADO ESTRUCTURADO

Una malla estructurada es una malla con características nodales ortogonal o semi ortogonal, los cuales forman una especie de rectángulo permitiendo llevarlas a una especie de cuadrícula, ver **Figura 3**. En otras palabras cuando el dominio en este caso el yacimiento se discretiza en este tipo de malla, se puede realizar una transformación del espacio convirtiendo el dominio en una malla uniforme y rectangular, esto se realiza con ayuda de un jacobiano de transformación el cual

es invertible permitiendo realizar cálculos más simples en el modelamiento numérico.

Figura 3. Enmallado estructurado en un dominio simple.



Fuente. Manual GMSH, generador de mallas versátil para cualquier geometría bajo código abierto, libre y gratuito, 12 de noviembre de 2011, pág. 8.

Este tipo de enmallado puede representarse en un sistema cartesiano donde las líneas que configuran las celdas son siempre paralelas al sistema de ejes coordenados, por otro lado el sistema curvilíneo las celdas son deformadas para adaptarse a la geometría del objeto de estudio.

Ventajas:

- Tienen una mayor precisión numérica, especialmente en esquemas de volúmenes finitos, puesto que suelen maximizar la relación área/volumen del elemento.
- Permiten un mayor control sobre la geometría, especialmente con mallas multibloque.

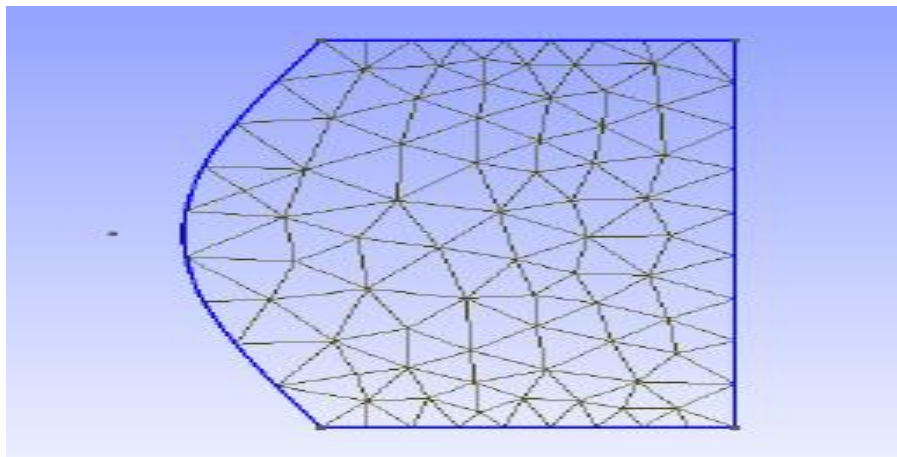
Desventajas:

- Su construcción es más laboriosa.
- Pueden ser difíciles de generar en geometrías muy complejas.
- Tienen menos opciones para el refinado en zonas del dominio dadas³.

2.2 MALLADO NO ESTRUCTURADO

Son apropiadas para geometrías irregulares donde es más difícil generar una malla estructurada, ver **Figura 4**. Este tipo de mallas parten de distribuciones de puntos que cumplen una serie de características, relacionadas principalmente con la distribución más uniforme posible dentro del contorno⁴.

Figura 4. Enmallado no estructurado en un dominio simple.



Fuente. Manual GMSH, generador de mallas versátil para cualquier geometría bajo código abierto, libre y gratuito, 12 de noviembre de 2011, pág. 9.

Ventajas:

- Facilidad para adaptarse a geometrías más robustas o complejas.

Desventajas:

- Requiere gran cantidad de memoria para el almacenamiento de datos.

³ Manual GMSH, Op cit pag. 8.

⁴ Manual GMSH, Ibíd. pág. 9.

3. TÉCNICAS DE DISCRETIZACIÓN NUMÉRICA

El principal objetivo de los problemas con dinámica de fluidos se centra en la resolución de la ecuación de difusividad, como ya se han formulado anteriormente estas ecuaciones constituyen un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, en síntesis es necesario transformarlas en ecuaciones algebraicas en determinados puntos del dominio físico conocidos comúnmente como nodos del enmallado mediante la técnica de discretización espacial.

Los métodos más usados actualmente para la solución de ecuaciones diferenciales parciales son las diferencias finitas y el método de elementos finitos. Algunas personas prefieren el método de diferencias finitas debido a la facilidad para numerar nodos y las celdas, los sistemas algebraicos arrojan matrices con estructuras de tipo banda por bloques y otras propiedades que resultan muy útiles en la solución numérica.

El problema asociado al método de diferencias finitas es que no se pueden aplicar fácilmente en dominios irregulares o con bastante complejidad estructural. Sin embargo hace aproximadamente medio siglo se propuso usar cambio de variables y transformar un problema sobre una región arbitraria a un problema sobre el cuadrado unitario⁵.

Existen muchas técnicas de discretización pero por efectos de simplicidad y aplicabilidad a los temas propuestos en este trabajo se destacaran cuatro técnicas que se extenderán a continuación:

⁵ VIQUEZ, M. "Un Sistema Para La Generación De Mallas Estructuradas Armónicas", junio 2008, pág. 4.

3.1 MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

Es un método de solución para aplicar directamente a la ecuación de difusividad, se emplea transformando las derivadas en series de Taylor. Este método requiere un mallado estructurado⁶.

3.2 MÉTODO DE LOS VOLÚMENES FINITOS

Este método se aplica a la ecuación de difusividad en forma integral mediante la discretización de un dominio físico en volúmenes de control. Se usan dos métodos para la creación de volúmenes de control:

Método del centro de la celda: El volumen de control coincide con la celda, además de eso el punto en el espacio donde se resuelven las ecuaciones es en el centro de la celda.

Método de los vértices de la celda: El volumen de control hace referencia bien sea a la unión de todas las celdas que comparten un nodo o bien el volumen cuyo centro es el nodo, los puntos en los que se resuelven las ecuaciones son los vértices de la celda⁷.

3.3 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método se aplica a la ecuación de difusividad en forma integral, discretizando el dominio físico en elementos triangulares o tetraédricos (2D o 3D respectivamente), formando una malla no estructurada. La precisión y tiempo de cómputo son variables importantes a la hora de definir la resolución de la discretización de la

⁶ DIAZ, J., "Modelamiento De Flujo Compresible Por El Método De Volúmenes Finitos En Gasoductos" , trabajo de grado Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga 2010, pág. 57.

⁷ DIAZ, J., Ibid pág. 57.

malla. El número total de nodos multiplicado por el número de variables del problema es el número de grados de libertad del mismo⁸.

3.4 MÉTODO DE GALERKIN

Es un método para resolver ecuaciones diferenciales. Se basa en la integración de los residuos ponderados sobre un intervalo. Este método se fundamenta en la teoría de funciones ortogonales. Uno de los métodos para resolver ecuaciones diferenciales consiste en suponer que su solución se puede aproximar mediante los términos de una suma de funciones⁹.

3.5 COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS MÁS USADOS

En resumen los métodos más usados son diferencias finitas, volúmenes finitos y elementos finitos los cuales se procede a explicar con sus pros y contras en la **Tabla 1**.

Tabla 1. Comparación de los métodos más usados.

METODO	VENTAJAS	DESVENTAJAS
DIFERENCIAS FINITAS	-Discretización sencilla.	-Problemas en geometrías complejas.
	-Aumento de la precisión numérica sin depender del orden de aproximación de las derivadas.	-Limitado a mallas estructuradas.
		-No aplicable directamente a coordenadas curvilíneas.
VOLÚMENES FINITOS	-Impone conservación de forma natural.	
	-Flexibilidad geométrica.	
	-Resuelve ecuaciones en forma integral.	
	-Discretización muy intuitiva.	
	-No presenta problemas con la transformación entre sistemas de coordenadas.	
	-Empleado en mallas estructuradas y no estructuradas.	
ELEMENTOS FINITOS	-Flexibilidad geométrica	-Base matemática muy rígida para problemas elípticos y parabólicos.
	-Versatilidad en diferentes áreas de aplicación con mallas no estructuradas.	-Mayor esfuerzo de cómputo.

Fuente. El autor.

⁸ QUINTERO, N., "Desarrollo De Un Modelo Computacional Para Flujo Bifásico En Tres Dimensiones Usando El Método De Volúmenes Finitos", Trabajo de grado a nivel de maestría Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga 2012, pág. 48.

⁹ BOSCH, J., "Métodos Finitos", trabajo de grado a nivel de especialización en modelación, simulación y optimización de sistemas, Universidad pontificia Bolivariana, Medellín, 2006, pág. 16.

4. MÉTODO DE VOLUMENES FINITOS PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD

4.1. ECUACIÓN EN EL MÉTODO DE VOLUMENES FINITOS PARA EL ACEITE

Como ya se explicó en capítulos anteriores el procedimiento y deducción de la ecuación de difusividad aplicada a dinámica de fluidos en medios porosos, serán omitidas en esta sección del trabajo y se tomara como punto de partida la forma generalizada a la cual se había llegado, con el fin de aplicar la discretización numérica por volúmenes finitos a la ecuación de difusividad (Ecuación 14).

El modelo propuesto anteriormente se formula basado en permeabilidades relativas, en vista que el desarrollo de este trabajo está orientado hacia flujo monofásico (petróleo y gas) se sustituye el término kK_{ro} por K (permeabilidad absoluta).

Por otra parte como se modela solo un fluido en este caso el aceite, entonces $S_o = 1$, por tanto el término temporal se simplifica a:

Ecuación 19

$$\frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi S_o}{B_o} \right) = \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi}{B_o} \right)$$

De acuerdo a la formulación requerida por el método de volúmenes finitos, el cual se centra en tomar la ecuación de difusividad sobre un volumen de control tridimensional comúnmente conocida como ecuación integral para el flujo de petróleo, en este caso ya modificada para flujo monofásico.

Ecuación 20

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \left(c_1 \frac{K}{B_o \mu_o} \nabla (P_o - \rho_{ocy} g Z) \right) \right) dv \pm \iiint_V (q_{ocn}) dV = \iiint_V \left(\frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi}{B_o} \right) \right) dV$$

Siendo:

$\vec{\nabla} \cdot$: Divergencia.

∇ : Gradiente de presión.

Z: Elevación del punto en el cual se requiere calcular el potencial con respecto al datum.

c_1 y c_2 : Constantes de conversión.

El teorema de la divergencia plantea que para un campo vectorial \vec{a} , en este caso aplicado representando el campo potencial de flujo (se desarrollara más adelante), se tiene la ecuación 21:

Ecuación 21

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) dV = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

Siendo:

\vec{n} : Vector normal.

\iint_S : Integral de superficie.

La interpretación física del producto punto entre $\vec{a} \cdot \vec{n}$ es el componente del vector \vec{a} en la dirección del vector normal \vec{n} a la superficie del elemento dS . Así que la integral de la divergencia de un vector \vec{a} sobre un volumen es igual a la componente de \vec{a} en la dirección normal a la superficie con límites del volumen de control, integrado sobre el límite entero de la superficie S^{10} . Aplicando este

¹⁰ QUINTERO, N., Op cit pág. 44.

teorema de la divergencia en la ecuación integral que rige el flujo monofásico obtenemos:

Ecuación integral para flujo monofásico de petróleo.

Ecuación 22

$$\oiint_S \left(c_1 \frac{K}{B_o \mu_o} \nabla (P_o - \rho_{ocv} gZ) \cdot \vec{n} \right) dS \pm \iiint_V (q_{ocn}) dV = \iiint_V \left(\frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi}{B_o} \right) \right) dV$$

La ecuación se aplica al enmallado hexaédrico, como no se considera fenómenos de subsidencia el volumen de control no cambia en el tiempo, de tal manera que para los siguientes términos tenemos:

Ecuación 23

$$\iiint_V (q_{ocn}) dV = q_{ocn} V = Q_{ocn}$$

Y para el término de la derecha de la ecuación se tiene la siguiente expresión:

Ecuación 24

$$\iiint_V \left(\frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi}{B_o} \right) \right) dV = \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi}{B_o} \right) V$$

Ahora se debe calcular el flujo en el área de la cara de cada volumen de control, debido a que se trabaja con hexaedros, se tiene seis caras para un volumen de control:

Ecuación 25

$$\oiint_S \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o\mu_o} \nabla(P_o - \rho_{ocy}gZ) \cdot \vec{n} \right) dS = \sum_{i=1}^6 \oiint_S \left(c_1 \frac{K}{B_o\mu_o} \nabla(P_o - \rho_{ocy}gZ) \cdot \vec{n} \right) dS$$

A continuación se procede a calcular el gradiente de esta expresión por el método convencional “series de Taylor multivariable”, simplemente para mostrar una solución con certeza en su precisión que previamente ha sido probada.

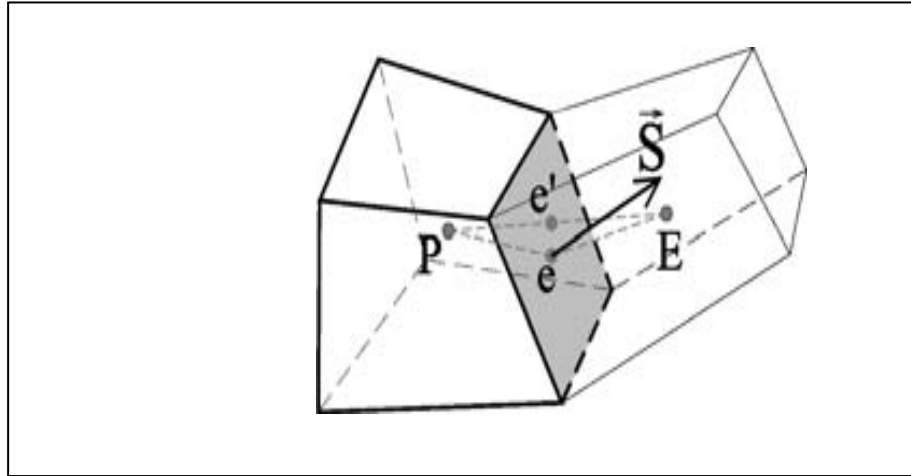
4.2 CÁLCULO DEL GRADIENTE DEL POTENCIAL DE FLUJO UTILIZANDO SERIES DE TAYLOR MULTIVARIABLE (MÉTODO CONVENCIONAL)

4.2.1 Interpolación del esquema de diferencia central (CDS)

El elemento de volumen de la **Figura 5**, centrado en P y en relación a un elemento E a través de la cara al este, esta representación gráfica es usada para explicar la interpolación CDS y el cálculo de los gradientes.

Se utiliza un arreglo donde serán alojadas las variables (u, v, w, p, φ) de esta forma la interpolación y aproximación de gradiente serán las mismas para todos los campos. El valor interpolado φ_e de un campo escalar φ en el baricentro de la cara al este, usando los valores centrados de la celda φ_p y φ_E se obtienen las ecuaciones que se muestran a continuación:

Figura 5. Esquema del elemento de volumen de control P adyacente a E.



Fuente. USERA, G., VERNET, A., "A Parallel Block-Structured Finite Volume Method for Flows in Complex Geometry with Sliding Interfaces", 13 April 2007, editorial Springer, page. 474.

Ecuación 26

$$\varphi_e = \varphi_E \alpha_{PE} + \varphi_P(1 - \alpha_{PE}) + (\nabla\varphi)_e \vec{e}'e$$

Donde del coeficiente de interpolación α_{PE} y el vector $\vec{e}'e$ se obtiene:

Ecuación 27

$$\alpha_{PE} = \frac{|\vec{Pe}|}{(|\vec{Pe}| + |\vec{eE}v|)^{-1}}$$

Ecuación 28

$$\vec{e}'e = \alpha_{PE} \vec{Ee} + (1 - \alpha_{PE}) \vec{Pe}$$

El término e de la expresión interpolada " φ_e " compensa el error introducido en los grids no ortogonales debido al desplazamiento del punto e' lejos del baricentro e . Este depende del gradiente $\nabla\varphi$ pre computado.

El gradiente de las variables de campo (u, v, w, p, φ) también se utiliza explícitamente en la discretización de los términos difusivos en todas las ecuaciones de conservación, y por el término de presión en la ecuación de momentum. Para un campo escalar φ , el gradiente en el centro de la celda es P obtenido usando el teorema de Gauss. Para cada componente del gradiente se tienen las siguientes expresiones:

Ecuación 29

$$(\nabla\varphi)_P \hat{e}_i \approx \frac{\int_{\Omega} \nabla(\varphi \hat{e}_i) d\Omega}{\Delta\Omega} = \frac{\int_S \varphi \hat{e}_i \hat{n}_s dS}{\Delta\Omega} = \frac{\sum_c \varphi_c S_c^i}{\Delta\Omega}$$

Siendo:

Ecuación 30

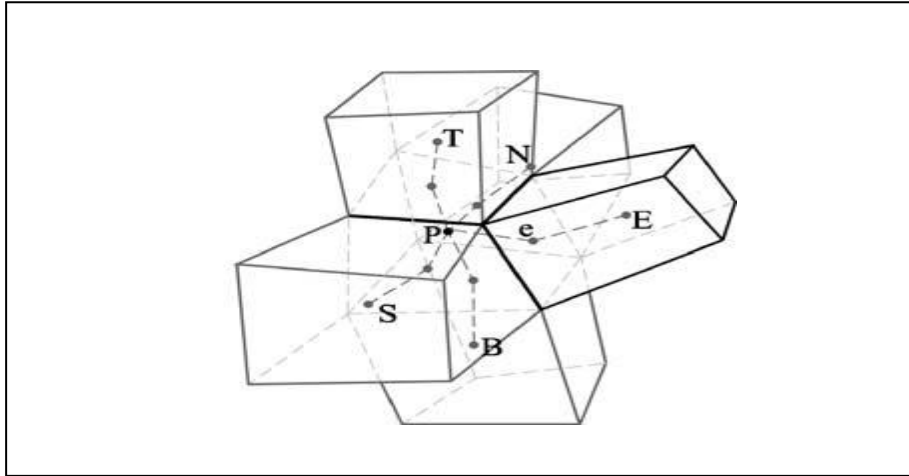
$$\Delta\Omega = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (x \hat{e}_1) d\Omega = \int_{\Omega} (x \hat{e}_1) \hat{n}_s dS = \sum_c x_c S_c^x$$

4.2.2 Interpolación lineal mejorada

El esquema de CDS solo sirve parcialmente en grids no ortogonales a través de la corrección explícita incorporado con φ_e . Esto podría conducir a una pérdida significativa de precisión en grids no ortogonales. La optimización de esquemas de interpolación lineal basado en series de Taylor multivariable dimensional han sido propuestos para mitigar este problema.

El esquema de CDS se presentó para el cálculo del valor φ_e de un campo escalar φ en el baricentro de la cara este, con respecto a un esquema similar al de la siguiente figura. El nuevo esquema mejorado para la interpolación de valor φ_e implica también nodos vecinos S, N, B y T, como se muestra en la **Figura 6**.

Figura 6. Volumen de control (elemento P) con elementos vecinos E, S, N, B, T para interpolación lineal mejorada.



Fuente. USERA, G., VERNET, A., "A Parallel Block-Structured Finite Volume Method for Flows in Complex Geometry with Sliding Interfaces", 13 April 2007, editorial Springer, page. 494.

El punto de partida es la expansión en series de Taylor para el campo φ alrededor del punto "e", evaluado en un punto genérico A. Con las notaciones de las siguientes ecuaciones y sustituyendo resulta:

Ecuación 31

$$\varphi_A = \varphi_e + (x_A - x_e) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e + (y_A - y_e) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_e + (z_A - z_e) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_e$$

Ecuación 32

$$x_{Ae} = (x_A - x_e) \quad ; \quad \varphi_{Ae} = (\varphi_A - \varphi_e)$$

Ecuación 33

$$\varphi_e^x = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e \quad ; \quad \nabla \varphi_e = (\varphi_e^x, \varphi_e^y, \varphi_e^z)$$

Ecuación 34

$$\vec{Ae} = (x_{Ae}, y_{Ae}, z_{Ae})$$

Ecuación 35

$$\varphi_{Ae} = x_{Ae}\varphi_e^x + y_{Ae}\varphi_e^y + z_{Ae}\varphi_e^z = \vec{Ae} \cdot \nabla\varphi_e$$

Se conocen los valores geométricos con la expresión de φ_{Ae} , así como los valores de φ en los nodos P, E, S, N, B y T . Por lo tanto un sistema de ecuaciones lineales, para determinar los valores desconocidos del gradiente $\nabla\varphi_e$, se pueden obtener mediante la combinación de la expresión φ_{Ae} en estos seis nodos, como se mostrara a continuación.

Evaluando φ_{Ae} en cada nodo nos arroja ecuaciones para los incrementos de φ , como lo serán para φ_{Pe} y φ_{Ee} . Expresiones similares son válidas para φ_{Se} , φ_{Ne} , φ_{Be} y φ_{Te} . El término desconocido φ_e es eliminado combinando estas ecuaciones en pares, como se muestra a continuación:

Ecuación 36

$$\begin{aligned}\varphi_{Pe} &= \vec{Pe} \cdot \nabla\varphi_e \\ \varphi_{Ee} &= \vec{Ee} \cdot \nabla\varphi_e\end{aligned}$$

Las ecuaciones φ_{SN} y φ_{BT} completan el sistema lineal de ecuaciones algebraicas, mostrado a continuación, donde las incógnitas son los componentes del gradiente $\nabla\varphi_e$ y pueden ser resueltos explícitamente.

Ecuación 37

$$\begin{bmatrix} \vec{PE} \\ \vec{SN} \\ \vec{BT} \end{bmatrix} \cdot \nabla\varphi_e = \begin{bmatrix} \varphi_{PE} \\ \varphi_{SN} \\ \varphi_{BT} \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema se expresa convenientemente en términos del coeficiente geométrico θ el cual se desarrollarla en la siguiente ecuación.

Ecuación 38

$$\theta = X_{PE}Y_{SN}Z_{BT} + X_{SN}Y_{BT}Z_{PE} + X_{BT}Y_{PE}Z_{SN} - (X_{PE}Y_{BT}Z_{SN} + X_{SN}Y_{PE}Z_{BT} + X_{BT}Y_{SN}Z_{PE})$$

La expresión compactada se muestra a continuación para los resultados θ utilizando el producto mixto.

Ecuación 39

$$\theta = \overline{PE} \cdot (\overline{SN} \times \overline{BT}) = \langle \overline{PE}, \overline{SN}, \overline{BT} \rangle$$

A partir de la solución del sistema de ecuaciones, la siguiente expresión muestra los resultados para φ_e^x con expresiones similares para φ_e^y y φ_e^z .

En estas expresiones, los componentes del gradiente dependen únicamente de los valores geométricos y los valores conocidos de φ en los nodos P, E, S, N, B y T .

Ecuación 40

$$\varphi_e^x \cdot \theta = \varphi_{PE}(Y_{SN}Z_{BT} - Y_{BT}Z_{SN}) + \varphi_{SN}(Y_{BT}Z_{PE} - Y_{PE}Z_{BT}) + \varphi_{BT}(Y_{PE}Z_{SN} - Y_{SN}Z_{PE})$$

Una expresión de φ_e en el baricentro de la cara este, puede ser dada ahora que se conocen los componentes del gradiente. La siguiente expresión se obtiene directamente a partir de $\varphi_{pe} = \overline{Pe} \cdot \nabla\varphi_e$. Puesto que los componentes del gradiente dependen linealmente de los incrementos $\varphi_{PE}, \varphi_{SN}$ y φ_{BT} entre nodos se puede plantear la siguiente expresión:

Ecuación 41

$$\varphi_e = \varphi_P - x_{Pe}\varphi_e^x - y_{Pe}\varphi_e^y - z_{Pe}\varphi_e^z = \varphi_P - \overrightarrow{Pe} \cdot \nabla\varphi_e$$

Esta ecuación puede expresarse de la siguiente forma, donde los coeficientes de interpolación γ_E, γ_N y γ_T dependen únicamente de la geometría del grid.

Ecuación 42

$$\varphi_e = \varphi_P + \gamma_E \cdot \varphi_{EP} + \gamma_N \cdot \varphi_{NS} + \gamma_T \cdot \varphi_{TB}$$

Por conveniencia, en la última expresión los incrementos de φ entre los nodos han sido definidos con signo opuesto con respecto a la ecuación original. Sustituyendo las expresiones explícitas que hacen referencia a " $\varphi_e^x \cdot \theta$ " y " φ_e " (ver ecuaciones anteriores), para obtener los coeficientes de interpolación como se muestra a continuación para obtener γ_E .

Ecuación 43

$$\begin{aligned} \gamma_E \cdot \theta = & x_{Pe}(Y_{SN}Z_{BT} - Y_{BT}Z_{SN}) + y_{Pe}(Z_{SN}X_{BT} - Z_{BT}X_{SN}) \\ & + z_{Pe}(X_{SN}Y_{BT} - X_{BT}Y_{SN}) \end{aligned}$$

Resultados similares para las expresiones γ_N y γ_T . Una vez más formas compactas pueden ser generadas utilizando el producto mixto. Las expresiones finales para el método de interpolación mejorado para hallar los coeficientes γ_E, γ_N y γ_T son mostrados a continuación.

Ecuación 44

$$\begin{aligned} \gamma_E &= \langle \overrightarrow{Pe}, \overrightarrow{SN}, \overrightarrow{BT} \rangle \cdot \theta^{-1} \\ \gamma_N &= \langle \overrightarrow{PE}, \overrightarrow{Pe}, \overrightarrow{BT} \rangle \cdot \theta^{-1} \\ \gamma_T &= \langle \overrightarrow{PE}, \overrightarrow{SN}, \overrightarrow{Pe} \rangle \cdot \theta^{-1} \end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones es complementado con las ecuaciones anteriores para el valor interpolado φ_e y para el denominador θ^{11} .

4.3 CÁLCULO DEL GRADIENTE DE POTENCIAL DE FLUJO POR MÉTODO PROPUESTO

Ahora en vista que este método requiere mucho tiempo de cómputo y su desarrollo algebraico es bastante robusto surge como medida mirar ciertas consideraciones que no han sido tenidas en cuenta. Basados en suposiciones, limitaciones y profundas investigaciones con ayuda del ING Luis Antonio Bautista a la hora de aplicar ciertos conceptos, a continuación se propone una nueva metodología para el desarrollo del modelo numérico en tres dimensiones con base en volúmenes finitos en mallas estructuradas con respecto al gradiente del potencial.

Partiendo del concepto de derivada direccional de un punto con respecto al otro:

Ecuación 45

$$D = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

Siendo:

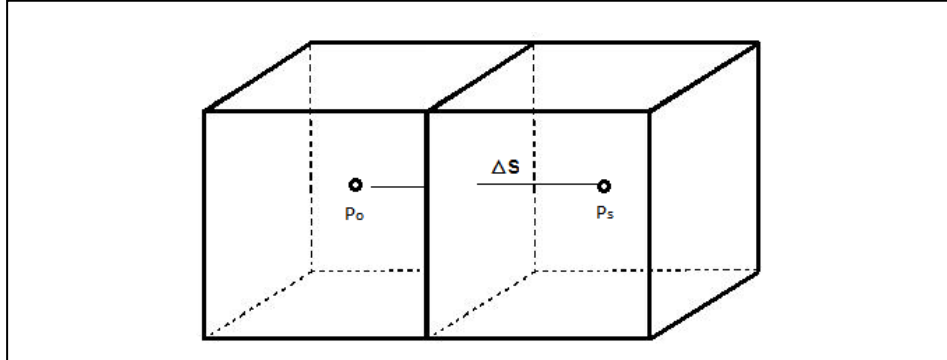
$\vec{\nabla}$: Gradiente de la función.

\vec{u} : Vector unitario en el cual se analiza el gradiente.

Sabiendo que la forma potencial en un punto está descrita por la ecuación 13, se considerando un elemento vecino como se muestra en la **Figura 7**.

¹¹ USERA, G., VERNET, A., "A Parallel Block-Structured Finite Volume Method for Flows in Complex Geometry with Sliding Interfaces", 13 April 2007, editorial Springer, page. 474-494.

Figura 7. Representación física para emplear derivada direccional.



Fuente. El autor.

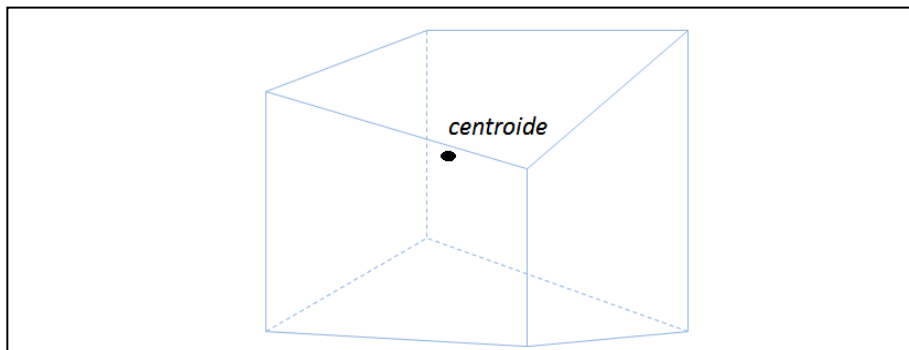
Siendo S un punto vecino, la derivada direccional está definida como:

Ecuación 46

$$D = \frac{(P_s - \rho_s g Z_s) - (P_o - \rho_o g Z_o)}{\Delta S} \quad (A)$$

Siendo Δs la distancia entre los centroides de bloques adyacentes, debido que no se trabajan bloques ortogonales como se observa en la **Figura 8**, sino corner point es necesario definir como se calcula el centroide de un volumen de control.

Figura 8. Centroide en un hexaedro corner point.



Fuente. El autor.

Revisando muchas fuentes bibliográficas no se encuentra una formula específica para el cálculo de centroide de esta geometría en especial. En vista a esto se

analizó la formulación establecida para geometrías regulares y luego de mirar varias opciones, se logra deducir una buena aproximación para el centroide. Haciendo analogías a partir de la ecuación dada para tetraedros los cuales establecen matemáticamente que el centroide es:

Ecuación 47

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n=5} \bar{x}_i * Vol_{tetraedroi}}{Vol_{hexaedro}}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n=5} \bar{y}_i * Vol_{tetraedroi}}{Vol_{hexaedro}}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n=5} \bar{z}_i * Vol_{tetraedroi}}{Vol_{hexaedro}}$$

El límite de la sumatoria se debe a que en total se obtienen 5 tetraedros de un hexaedro, como se explica más adelante.

Haciendo varias pruebas y comprobado por otros métodos más complejos se logró tener una muy buena aproximación del cálculo del centroide en un volumen de control corner point, la cual establece la relación directa entre la suma de las coordenadas de cada vértice, sobre el número de vértices, como se muestra de la siguiente manera:

Ecuación 48

$$\bar{x}_{hexaedro} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8}$$

$$\bar{y}_{hexaedro} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8}{8}$$

$$\bar{z}_{hexaedro} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7 + z_8}{8}$$

Hay que aclarar, este método no está explícitamente formulado, se propuso durante el desarrollo de este trabajo, bajo varias pruebas hechas a un hexaedro donde los vértices no son ortogonales.

Continuando con la formulación del potencial, se sabe que el gradiente del potencial se ve afectado por la presión y por el caudal, se propone la siguiente ecuación para el gradiente de potencial de flujo.

Ecuación 49

$$\nabla = K \sum_{i=1}^n Q_i e^{-\alpha r} U_{ri}$$

Dónde:

K: Constante de proporcionalidad la cual depende de la presión.

Q: Peso (fracción) de los nodos que actúan como sumideros y fuentes en el yacimiento.

r: Distancia de la celda de control al nodo donde se encuentra un sumidero o una fuente.

Uri: Vector unitario de la celda de control al nodo o nodos donde existan sumideros.

α : Constante de proporcionalidad.

La anterior es una sumatoria ya que pueden existir diferentes nodos donde se actúa o comporta como sumideros o fuentes, hay que aclarar que un sumidero sería un pozo productor y una fuente sería un pozo inyector.

El ∇ es el gradiente el cual es un vector, puede formularse así:

Ecuación 50

$$\nabla = K \sum_{i=1}^n Q_i e^{-\alpha r} U_{ri} = K(V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}) \cdot (B)$$

Partiendo del concepto de la derivada direccional mostrado en la ecuación 45 y sustituyendo A y B, queda:

Ecuación 51

$$\frac{(P_s - \rho_s g Z_s) - (P_o - \rho_o g Z_o)}{\Delta s} = K(V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}) \cdot (U_x \hat{i} + U_y \hat{j} + U_z \hat{k})$$

El vector $\vec{\nabla}$ y el unitario \vec{u} , su producto punto es un escalar, por tanto se puede conocer K.

Ecuación 52

$$K = \frac{(P_s - \rho_s g Z_s) - (P_o - \rho_o g Z_o)}{\Delta s (V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}) \cdot (U_x \hat{i} + U_y \hat{j} + U_z \hat{k})}$$

De esta forma el gradiente sería:

Ecuación 53

$$\vec{\nabla} = \frac{((P_s - \rho_s g Z_s) - (P_o - \rho_o g Z_o)) (V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k})}{\Delta s (V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}) \cdot (U_x \hat{i} + U_y \hat{j} + U_z \hat{k})}$$

Lo cual ahorra el tiempo de cómputo propuesto por diferentes autores con el método de series de Taylor multivariable y demuestra que no se debe amarrar este gradiente a la geometría del volumen de control.

4.4 ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD DISCRETIZADA ESPACIO-TIEMPO BAJO MÉTODO PROPUESTO.

Ahora por otra parte se desarrollara el término de derecho de la ecuación de difusividad.

Ecuación 54

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi}{B_o} \right)$$

Para el desarrollo de esta derivada parcial se requiere conocer una correlación del factor volumétrico del petróleo, esta fue tomada del libro de correlaciones de Banzer¹².

Ecuación 55

$$\frac{1}{B_o} = \frac{e^{-c_o(P_b - P)}}{B_{ob}}$$

B_{ob} = factor volumétrico.

P_b = Presión de burbuja.

P = la presión a la cual se quiere conocer el factor volumétrico.

c_o = la compresibilidad de la roca.

Ecuación 56

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi}{B_o} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi * \frac{1}{B_o} \right) = \frac{1}{B_o} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi) + \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_o} \right) \quad (c)$$

Ecuación 57

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_o} \right) = \frac{e^{-c_o(P_b - P)}}{B_{ob}} C_o \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_o} \right) = \frac{C_o}{B_o} \frac{\partial P}{\partial t}$$

Por otra parte para el término $\frac{\partial}{\partial t} (\varphi)$, se usa una ecuación de estado, conociendo que la porosidad es función de la presión, para esto se usa la ecuación 58.

Ecuación 58

$$C_R = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$$

¹² BÁNZER, C., "Correlaciones Numéricas P.V.T.", Universidad del Zulia, Maracaibo, Enero de 1996, pág. 77.

Partiendo por definición de

Ecuación 59

$$V_t = V_R - V_p$$

Ecuación 60

$$\varphi = \frac{V_p}{V_t}; V_t = \frac{V_p}{\varphi}$$

Ecuación 61

$$\frac{\partial V_t}{\partial P} = -\frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial P} V_p$$

Siendo:

C_R : Compresibilidad de la roca.

φ : Porosidad.

V_t : Volumen total.

V_p : Volumen poroso.

Se sustituye y se simplifica obteniendo:

Ecuación 62

$$C_R = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial P}$$

Reorganizando los términos e integrando:

Ecuación 63

$$C_R \int_{P_{ref}}^P \partial P = \int_{\varphi_{ref}}^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\varphi}$$
$$\varphi = \varphi_{ref} e^{C_R(P-P_{ref})}$$

Ecuación 64

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_{ref} e^{C_R(P-P_{ref})} C_R \frac{\partial P}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi C_R \frac{\partial P}{\partial t}$$

Llevando las expresiones a la ecuación C, se tiene:

Ecuación 65

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi}{B_o} \right) = \left(\frac{1}{B_o} \right) \varphi C_R \frac{\partial P}{\partial t} + \varphi \frac{C_o}{B_o} \frac{\partial P}{\partial t}$$

Simplificando:

Ecuación 66

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi}{B_o} \right) = \left(\frac{\varphi}{B_o} \right) (C_R + C_o) \frac{\partial P}{\partial t}$$

Retornando a la expresión dada en la ecuación 25, se planteó un término para el gradiente, con respecto al vector normal, el cual representa la normal de la superficie de flujo, por tanto con la integral doble se calcula el área por el cual fluye el fluido, de esta forma se asignara la siguiente expresión:

Ecuación 67

$$\iint_S (\vec{f} \cdot \vec{n}) dS = \vec{f} (S_x \hat{i} + S_y \hat{j} + S_z \hat{k})$$

Donde el vector \vec{S} es el vector unitario normal a la cara de análisis, multiplicando por el área de flujo, por tanto la ecuación de difusividad en volúmenes puede ser escrita como se muestra a continuación:

Ecuación propuesta donde se discretiza la ecuación de difusividad por el método de volúmenes finitos, en tiempo y espacio.

Ecuación 68

$$\sum_{i=1}^n c_1 \left(\frac{K_o + K_{si}}{2} \right) * \frac{1}{\left(\frac{B_{oo} + B_{osi}}{2} \right) \left(\frac{\mu_{oo} + \mu_{osi}}{2} \right)} * \frac{(P_{si}^{t+1} - \rho_{si}^t g Z_{si}) - (P_o^{t+1} - \rho_o^t g Z_o)}{\Delta S_i (V_{xi} U_{xi} + V_{yi} U_{yi} + V_{zi} U_{zi})} *$$

$$[V_{xi} S_{xi} + V_{yi} S_{yi} + V_{zi} S_{zi}]^+ q V_i = \frac{1}{c_2} V_i \left[\left(\frac{\phi_i}{\frac{B_o + B_{osi}}{2}} \right) (C_R + C_o) \right] \frac{P_o^{t+1} - P_o^t}{\Delta t}$$

Si bien se desea expresar los términos desconocidos (t+1) en función de los ya conocidos (t), para ello se procede a condensar partes de la ecuación en coeficientes de la siguiente manera:

Ecuación 69

$$K_{prom} = \left(\frac{K_o + K_{si}}{2} \right)$$

Ecuación 70

$$B_{oprom} = \left(\frac{B_{oo} + B_{osi}}{2} \right)$$

Ecuación 71

$$\mu_{isco} = \left(\frac{\mu_{oo} + \mu_{osi}}{2} \right)$$

Ecuación 72

$$CoeF = \frac{[V_{xi} S_{xi} + V_{yi} S_{yi} + V_{zi} S_{zi}]}{\Delta S_i (V_{xi} U_{xi} + V_{yi} U_{yi} + V_{zi} U_{zi})}$$

Ecuación 73

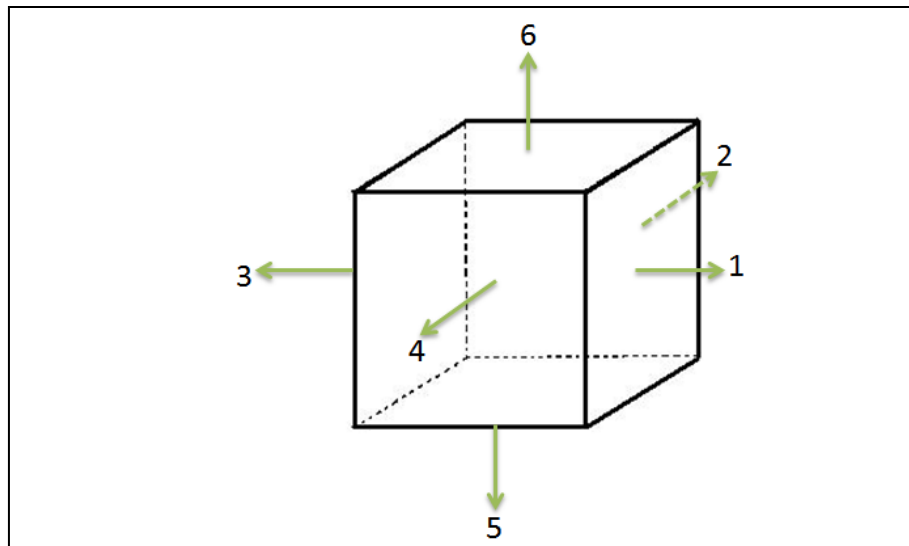
$$F = c_1 \frac{K_{prom}}{B_{oprom} * \mu_{isco}} CoeF$$

Ecuación 74

$$B = \frac{1}{c_2} V_i \frac{\varphi_i(C_R + C_o)}{B_{oprom}}$$

En vista que se tiene un hexaedro, se asigna a cada cara un número para aplicar la expresión sumatoria a fin de que dé la totalidad del volumen de control, para la conservación de volumen, como se muestra en la **Figura 9**.

Figura 9. Asignación de números a cada cara del volumen de control, para aplicar la solución propuesta por métodos finitos de la ecuación de difusividad.



Fuente. El autor.

Aplicando la ecuación para cada cara, simplificando y reorganizando términos se tiene finalmente la ecuación implícita para el llenado matricial en técnicas de volúmenes finitos basados en la ecuación de difusividad.

Ecuación 75

$$\begin{aligned} & [P_1^{t+1}]F_1\Delta t + [P_2^{t+1}]F_2\Delta t + [P_3^{t+1}]F_3\Delta t + [P_4^{t+1}]F_4\Delta t + [P_5^{t+1}]F_5\Delta t + [P_6^{t+1}]F_6\Delta t - \\ & [P_0^{t+1}][F_1\Delta t + F_2\Delta t + F_3\Delta t + F_4\Delta t + F_5\Delta t + F_6\Delta t + B] = [\rho_1^t g Z_1]F_1\Delta t + \\ & [\rho_2^t g Z_2]F_2\Delta t + [\rho_3^t g Z_3]F_3\Delta t + [\rho_4^t g Z_4]F_4\Delta t + [\rho_5^t g Z_5]F_5\Delta t + [\rho_6^t g Z_6]F_6\Delta t - \\ & [\rho_0^t g Z_0][F_1\Delta t + F_2\Delta t + F_3\Delta t + F_4\Delta t + F_5\Delta t] + F_6\Delta t + qV_0\Delta t - BP_0^t \end{aligned}$$

4.5 CÁLCULO DE PARÁMETROS DE LA ECUACIÓN DISCRETIZADA

Con base al vector área de flujo se tiene:

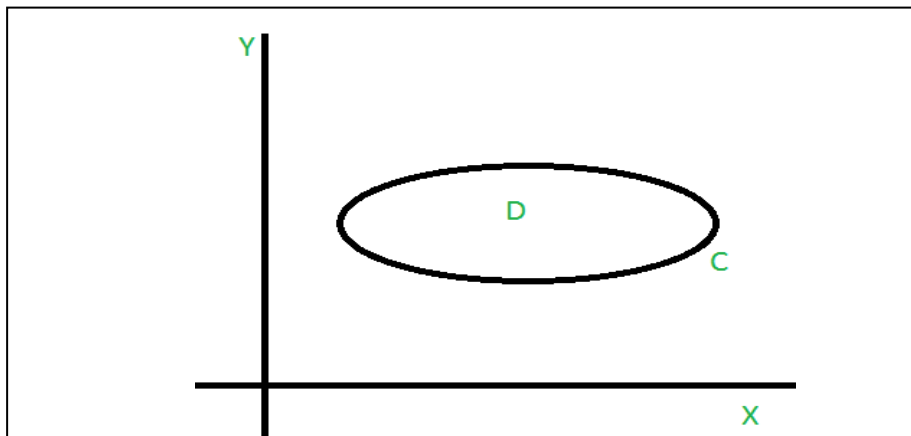
Ecuación 76

$$\vec{S} = S_x\hat{i} + S_y\hat{j} + S_z\hat{k} = Area[\vec{n}]$$

4.5.1 Cálculo de la sección transversal del volumen de control por el teorema de Green

Relaciona una integral de línea alrededor de una curva cerrada que la cual se llamara "C" y una integral doble sobre la región "D" limitada por C, como se muestra en la **Figura 10**.

Figura 10. Representación gráfica del área calculada con el teorema de Green.



Fuente. Autor.

Ecuación 77

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Sea:

Ecuación 78

$$Area = \iint_D 1 * dA$$

Entonces se plantea que:

Ecuación 79

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Ahora se propone la solución:

Ecuación 80

$$P(x, y) = -\frac{1}{2}y$$

Ecuación 81

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}x$$

Sustituyendo resulta:

Ecuación 82

$$Area = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$$

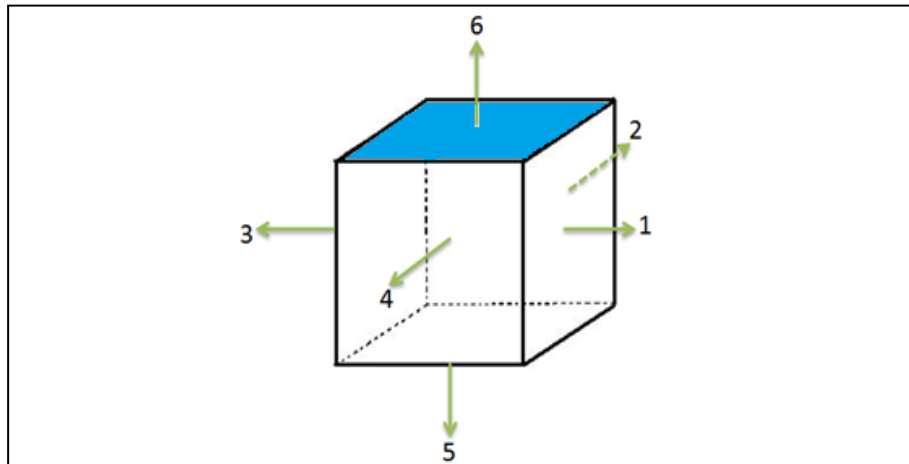
Para valores discretos se tiene:

Ecuación 83

$$Area = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i(y_i + 1) - y_i(x_i + 1)$$

De esta forma se calcula el área o sección transversal por el cual se genera el desplazamiento de volumen (cara del hexaedro), se halla por los cuatro puntos de la cara del mismo (ver **Figura 11**) y \vec{n} se calcula con el producto cruz.

Figura 11. Sección transversal por donde surge la transferencia de volumen.



Fuente. El autor.

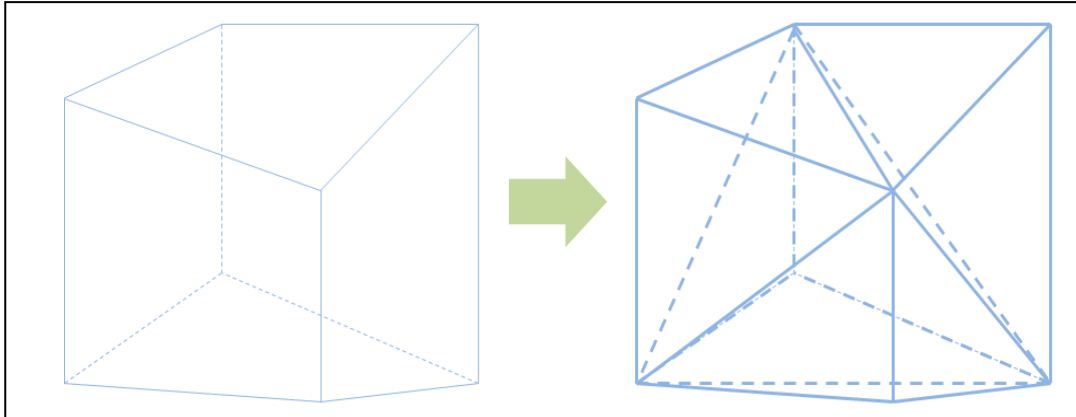
4.5.2 Cálculo del volumen del bloque de control.

Como se observó en la solución propuesta por la ecuación de difusividad aparece un término " V_i " el cual hace referencia al espacio ocupado del volumen de control, es decir, el hexaedro irregular o bloque corner point.

En función de optimizar el tiempo de cómputo en los procesos numéricos internos, para el cálculo de este término se propone la siguiente discretización la cual

funciona para cualquier hexaedro irregular. De tal forma se divide el hexaedro por los planos que se muestran en la **Figura 12**:

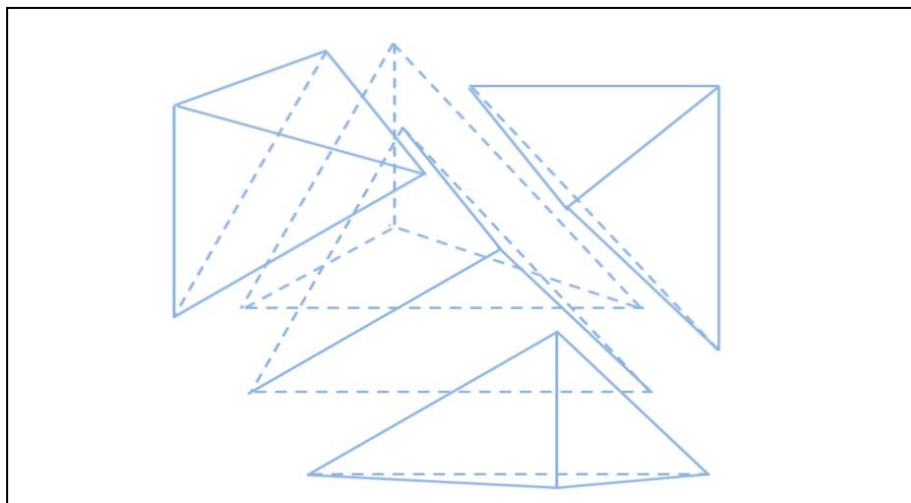
Figura 12. Planos de corte para sectorizar volumen de control corner point.



Fuente. El autor.

Luego de varios estudios de geometría descriptiva en AUTOCAD, la propuesta de cálculo de volumen es trabajar con poliedros más simples como lo son los tetraedros, separando de acuerdo a la división anteriormente mencionada se obtiene cinco tetraedros como se muestra en la **Figura 13**.

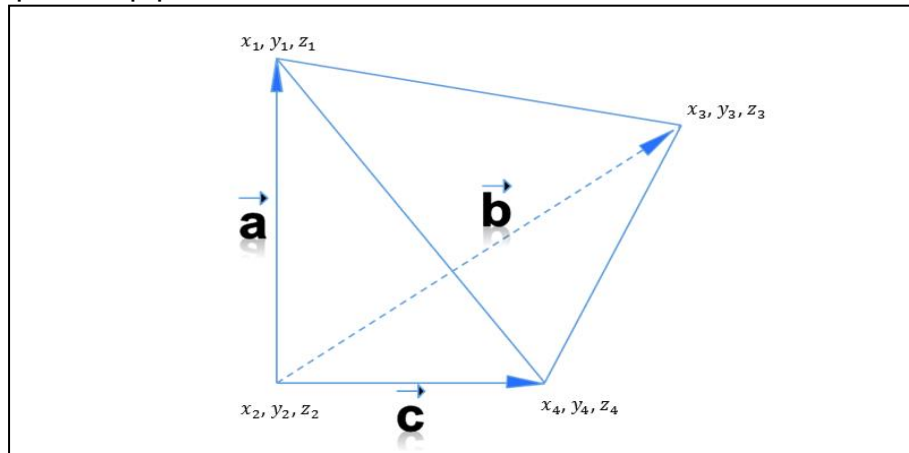
Figura 13. Representación de cinco tetraedros equivalentes al volumen de un hexaedro irregular.



Fuente. El autor.

Se propone el cálculo de volumen de un hexaedro a partir de cinco tetraedros, están referenciados en los textos matemáticos y literaturas de espacios vectoriales, con apoyo de conceptos de producto punto y producto cruz se tiene que para un paralelepípedo su volumen se calcula con un triple producto vectorial, por medio de sus tres vectores, ver **Figura 14**.

Figura 14. Concepto vectorial para el cálculo de volumen de medio paralelepípedo.



Fuente. El autor.

El volumen se define como el valor absoluto entre el producto punto entre la dimensión de altura por el producto cruz entre la dimensión de ancho y profundidad.

Ecuación 84

$$\text{Vol. Paralelepipedo} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Ahora conceptualmente se tiene que de un paralelepípedo regular se pueden obtener seis tetraedros por tal razón:

Ecuación 85

$$Vol. \text{ tetraedro} = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{6}$$

Como ya se explicó previamente de un hexaedro (volumen de control) se pueden extraer cinco tetraedros por tal razón en el algoritmo implícito para la solución de volumen del bloque de control se tiene que sumar dichos volúmenes para tener un volumen equivalente, de una forma más simple.

Ecuación 86

$$Vol. \text{ hexaedro} = Vol. \text{ total de los 5 tetraedros}$$

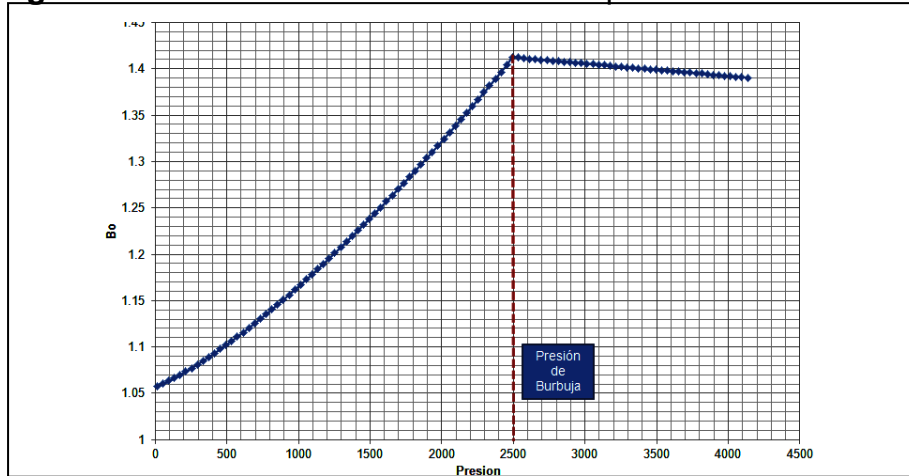
4.5.3 Cálculo de parámetros que cambian en el tiempo

4.5.3.1 Calculo del factor volumétrico en el tiempo

Debido a que las presiones en los nodos cambian en el tiempo y el factor volumétrico es función de la presión, implícitamente el cambio del factor volumétrico en el tiempo está directamente relacionado, por tanto es necesario utilizar una correlación¹³ para el cálculo del mismo (Ecuación 55), su comportamiento se observa en la **Figura 15**.

¹³ BÁNZER, C., "Correlaciones Numéricas P.V.T.", Universidad del Zulia, Maracaibo, Enero de 1996, pág. 77.

Figura 15. Curva del factor volumétrico vs presión.



Fuente. QUINTERO, N., “Desarrollo De Un Modelo Computacional Para Flujo Bifásico En Tres Dimensiones Usando El Método De Volúmenes Finitos”, Trabajo de grado a nivel de maestría Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga 2012, pág. 21.

4.5.3.2 Cálculo de la viscosidad en función de la temperatura. Por otra parte la viscosidad es fuertemente influenciada por la temperatura, sin embargo vale aclarar que en este trabajo se trabajara un escenario completamente isotérmico además hay que aclarar que también se ve afectada por la presión, por tanto se muestra la correlación para el cálculo de la viscosidad en el tiempo a medida que cambia la presión en cada volumen de control¹⁴, el comportamiento de la viscosidad se observa en la **Figura 16**.

Ecuación 87

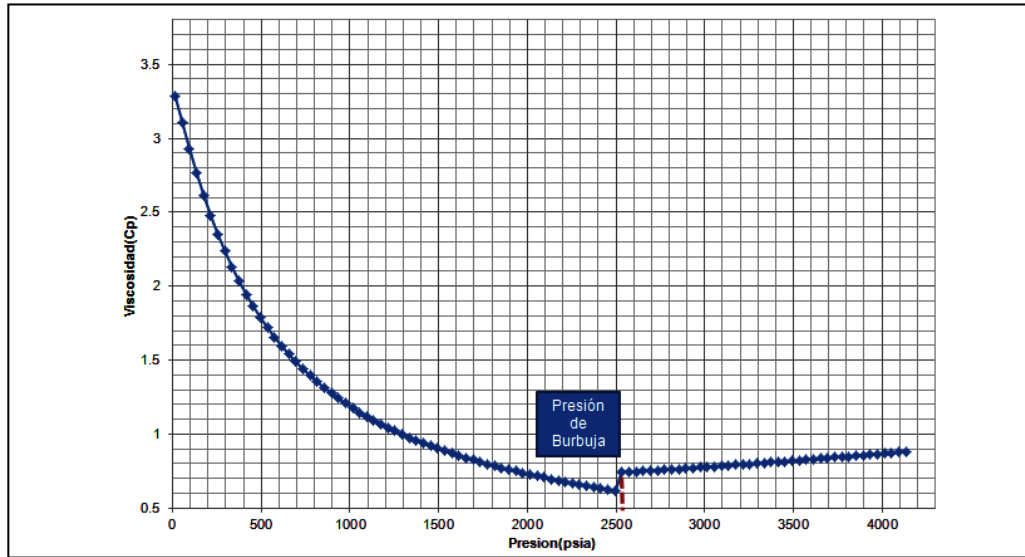
$$\mu_o = \mu_{ob} \left(\frac{P}{P_b} \right)^m$$

$$m = 2,6P^{1,187} e^{(-11,513-8,98 \times 10^{-5}P)}$$

$$\mu_{od} = 16 \times 10^8 T^{-2,8177} \log(\gamma_{API})^{5,7526 \log T - 26,9718}$$

¹⁴ BÁNZER, C., Op cit pág. 100 y 105.

Figura 16. Curva viscosidad vs presión.



Fuente. QUINTERO, N., “Desarrollo De Un Modelo Computacional Para Flujo Bifásico En Tres Dimensiones Usando El Método De Volúmenes Finitos”, Trabajo de grado a nivel de maestría Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga 2012, pág. 24.

4.6 INICIALIZACIÓN Y CONDICIONES ESPECIALES DEL MÉTODO

La inicialización del modelo consiste en el chequeo de datos de presión y saturación de los fluidos in situ, generados en el tiempo cero. Entre las acciones efectuadas al momento de validar los datos se tienen:

- Elaboración de perfiles de presión inicial del yacimiento y de saturación versus profundidad, con la finalidad de chequear la ubicación del GOC y el nivel de agua libre.
- Calculo de gradientes de los fluidos presentes en el yacimiento, para establecer la comparación con los datos obtenidos de mediciones de campo.
- Usando las condiciones de equilibrio de la inicialización, se calculan los volúmenes móviles de petróleo para cada capa del modelo y el volumen móvil total de todo el modelo, los cuales se comparan y deben ajustar.

- Se grafican datos de roca, como espesores, porosidades, permeabilidad horizontal y vertical, estos se comparan con los datos reportados por el modelo propuesto, para chequear la consistencia de los mismos.
- Se realiza una corrida con el modelo propuesto de los últimos años de producción, para comprobar la estabilidad del modelo en cuanto a las condiciones iniciales de los fluidos como volúmenes, saturaciones y presiones¹⁵.

Para la construcción y aplicación de la inicialización es necesario que el yacimiento este en equilibrio. El proceso de inicialización debe estimar los volúmenes correctos de fluidos en sitio en cada celda o volumen de control, como también mantener las condiciones de equilibrio y consistencia en las propiedades de la roca y los fluidos, así como también las leyes físicas que gobiernan la distribución inicial de fluidos en el yacimiento.

Cuando en el yacimiento se asume el estado de equilibrio la tasa de flujo de cualquier fase en todas las conexiones entre celdas adyacentes se considera cero.

Sin embargo en este proyecto solo se trabaja con presiones para posteriormente compararlas con CMG, no se inicializara en saturación, una de las consideraciones que se tiene en cuenta es que la profundidad de referencia “datum” debe cumplir con la siguiente restricción para cualquier tipo de modelo:

Ecuación 88

$$WOC \geq Datum \geq GOC$$

¹⁵ BÁRCENAS, L., “Implantación De Un Algoritmo De Inicialización En El Simulador De Yacimientos SYEP”, trabajo de grado, Universidad Central de Venezuela, Caracas 2006, pág. 25-26.

Siendo.

WOC: La profundidad del contacto agua aceite.

Datum: La profundidad de referencia.

GOC: La profundidad del contacto gas aceite.

La condición de equilibrio hidrostático que hasta el momento se ha expresado con mayor exactitud es:

Ecuación 89

$$P_{f,j} = P_{f,i} - \int_{Z_j}^{Z_i} \gamma_f dz$$

Dónde:

$P_{f,j}$: Presión de la fase f en la posición j.

$P_{f,i}$: Presión de la fase f en la posición i.

Z_j : Profundidad de la posición j.

Z_i : Profundidad de la posición i.

γ_f : Gradiente de la fase f.

Esta ecuación expresada en su forma discreta se tiene:

Ecuación 90

$$P_{f,j} - P_{f,i} + (Z_i - Z_j)\gamma_{f,ij} = 0$$

Reagrupando y redefiniendo las siguientes variables para mayor comprensión en la aplicación de este trabajo se tiene:

$P_{f,i}$: Es la presión de la fase a la profundidad de un plano de referencia o datum P_{fDATUM} .

$(Z_i - Z_j)$: Diferencia de profundidad entre el datum y la profundidad a la cual se desea conocer la presión.

$P_{f,j}$: La presión P que se desea conocer.

$\gamma_{f,ij}$: Como γ_f , gradiente de presión.

Aplicando estos cambios se tiene:

Ecuación 91

$$P = P_{fdatum} - \Delta Z \gamma_f$$

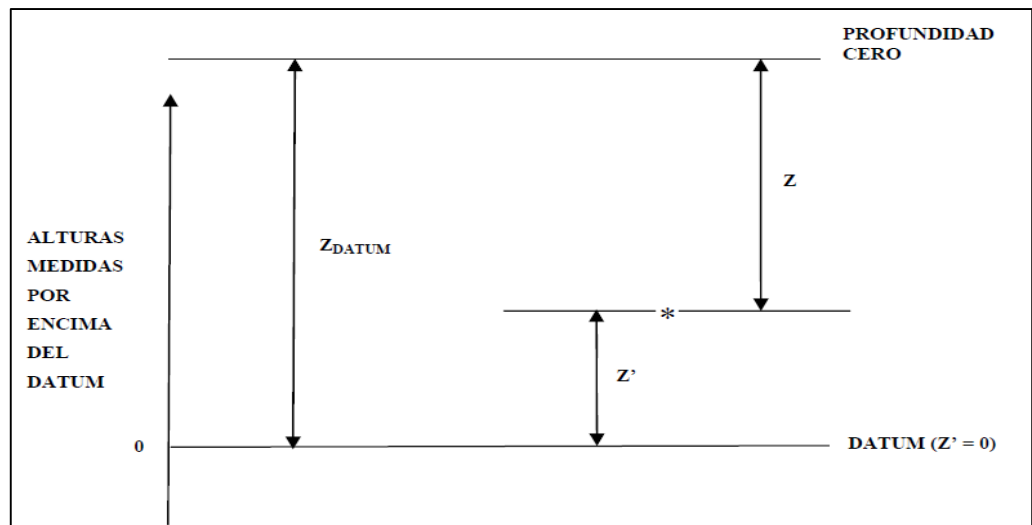
Azis y Durlofsky en el 2002 definen a Z' como la altura media por encima del datum:

Ecuación 92

$$Z' = Z_{datum} - Z$$

En la **Figura 17** se pueden visualizar los parámetros que intervienen en la definición de la coordenada Z' , para el punto que se desea conocer la coordenada se representa con un asterisco (*).

Figura 17. Representación gráfica de la coordenada Z' .



Fuente. BÁRCENAS, L., "Implantación De Un Algoritmo De Inicialización En El Simulador De Yacimientos SYEP", trabajo de grado, Universidad Central de Venezuela, Caracas 2006, pág. 49.

La ecuación para el petróleo en términos de Z' es:

Ecuación 93

$$P_o = P_{o_{datum}} - Z' \gamma_o$$

Siendo:

P_o : Presión del petróleo a Z' .

$P_{o_{datum}}$: Presión del petróleo al datum.

γ_o : Gradiente hidrostático del petróleo.

Z' : Altura medida por encima del datum.

Gracias a esta ecuación se puede concluir que el datum está ubicado en la zona de petróleo, entre la capa de gas y el acuífero (si lo existiese). Por tanto, la presión al datum corresponde a la presión del petróleo a la profundidad del datum, en otras palabras:

Ecuación 94

$$P_{o_{datum}} = P_{datum}$$

Por otra parte la densidad del petróleo de una presión P viene expresada por:

Ecuación 95

$$\rho_o = \frac{1}{\beta_o} (\rho_{osc} + R_s * \rho_{Gsc})$$

El gradiente hidrostático de una fase se relaciona con su densidad en unidades de campo por:

Ecuación 96

$$\gamma_f = \frac{\rho_f}{144}$$

Integrando estas dos últimas consideraciones en una misma expresión se tiene:

Ecuación 97

$$\gamma_o = \frac{1}{\beta_o} (\gamma_{osc} + R_s * \gamma_{Gsc})$$

Dónde:

γ_o : Gradiente hidrostático del petróleo a la presión P.

γ_{osc} : Gradiente hidrostático de la presión a condiciones estándar.

β_o : Factor volumétrico de formación del petróleo a la presión P.

γ_{Gsc} : Gradiente hidrostático del gas a condiciones estándar.

R_s : Solubilidad del gas a la presión P.

De esta última expresión se deduce que el gradiente hidrostático del petróleo es función de la presión. Si se supone que esta dependencia es lineal, se puede expresar el factor volumétrico de formación de petróleo y la solubilidad del gas en función de la presión de la siguiente manera:

Ecuación 98

$$\beta_o = m * P_o + b$$

Ecuación 99

$$R_s = n * P_o + c$$

Siempre y cuando se cumpla que $P_o < P_b$.

Siendo:

P_o : Presión del petróleo.

m: Pendiente obtenida del ajuste por mínimos cuadrados de la curva Bo vs Po.

b: Ordenada obtenida del ajuste por mínimos cuadrados de la curva Bo vs Po.

n: Pendiente obtenida del ajuste por mínimos cuadrados de la curva Rs vs Po.

c: Ordenada obtenida por mínimos cuadrados de la curva Rs vs Po.

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación principal del gradiente, y expresando el gradiente hidrostático en función de la presión del petróleo se tiene:

Ecuación 100

$$\gamma_o = \frac{1}{m * P_o + b} (\gamma_{osc} + (n * P_o + c) * \gamma_{Gsc})$$

Sustituyendo este gradiente hidrostático en la expresión de presión en función de Z' se tiene:

Ecuación 101

$$P_o = P_{datum} - \left(\frac{1}{m * P_o + b} (\gamma_{osc} + (n * P_o + c) * \gamma_{Gsc}) \right) Z'$$

Reordenando esta expresión en función de Po se obtiene:

Ecuación 102

$$mP_o^2 + (b - mP_{datum} + n\gamma_{Gsc} * Z')P_o - bP_{datum} + (\gamma_{osc} + c\gamma_{Gsc})Z' = 0$$

Esta ecuación presenta la presión del petróleo en función de la altura Z', para cualquier valor de Z', la ecuación es un polinomio de segundo grado de la forma:

Ecuación 103

$$A * P_o^2 + B P_o + C = 0$$

Siendo:

$$A = m$$

$$B = b - mP_{datum} + n\gamma_{Gsc} * Z'$$

$$C = bP_{datum} + (\gamma_{osc} + c\gamma_{Gsc})Z'$$

Las raíces de esta ecuación vienen dadas por la ecuación cuadrática aplicada a la ecuación 103 como se muestra:

Ecuación 104

$$P_o = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

La resolución de la ecuación genera dos soluciones para P_o . Dichas soluciones pueden ser iguales o distintas de cero, sin embargo se tendría que tener en cuenta un sentido físico sobre los resultados para la elección correcta asignada a P_o .

Esta expresión al convertirse en un polinomio de segundo grado arroja dos posibles soluciones (se tendría que condicionar con respecto a la profundidad evaluada), para evitar eso se propone un nuevo método, netamente estable explicado a continuación, este es lineal por tal razón no habrá inconvenientes a la hora de elección de la respuesta, como lo es el método anteriormente explicado.

4.6.1 Método propuesto para inicialización

Como ya se explicó, existe un método con alta precisión a la hora de poblar un modelo con presiones, sin embargo este consume mucho tiempo de computo, por tal razón se analizan ciertas condiciones, restricciones para hacer analogías y finalmente proponer un método más eficiente en términos de tiempo de llenado para modelos de cualquier tipo, incluso con estructuras complejas donde el número de celda es muy grande.

Partiendo que para $P > P_b$, se tiene un buen ajuste lineal de γ_o vs P :

Ecuación 105

$$\gamma_o = mP + b$$

Por otra parte con respecto a la presión al datum, se tiene:

Ecuación 106

$$P = P_{datum} - \Delta z \gamma_o$$

Sustituyendo en una misma expresión resulta:

Ecuación 107

$$P = P_{datum} - \Delta z(mP + b)$$

Siendo:

Ecuación 108

$$\Delta z = Z_{datum} - Z$$

Finalmente se tiene la expresión de llenado del modelo:

Ecuación 109

$$P = \frac{P_{datum} - b(Z_{datum} - Z)}{1 + (Z_{datum} - Z)m}$$

Luego de varios análisis y visualizaciones de los valores de m , se concluye que este término tiende a cero, por tal razón simplifica la expresión y tiempo de cómputo, por tal razón los modelos serán inicializados en presión de la siguiente manera:

Ecuación 110

$$P = P_{datum} - b(Z_{datum} - Z)$$

4.7 ALMACENAMIENTO DE DATOS

La solución propuesta ya desarrollada para la ecuación de difusividad por el método de volúmenes finitos arroja un sistema de ecuaciones lineales las cuales se pueden almacenar en una matriz, esta presenta ciertas características tales como, simetría, dispersa con patrón regular de banda (matriz ancho de banda definido equivalente a siete). En este módulo se pretende dar a conocer algunos métodos para almacenar los datos no nulos de una matriz, para ello se utiliza una estructura diferente a la tradicional para matrices densas. Estos almacenamientos hacen necesario modificar algoritmos que normalmente recorren las matrices convencionales.

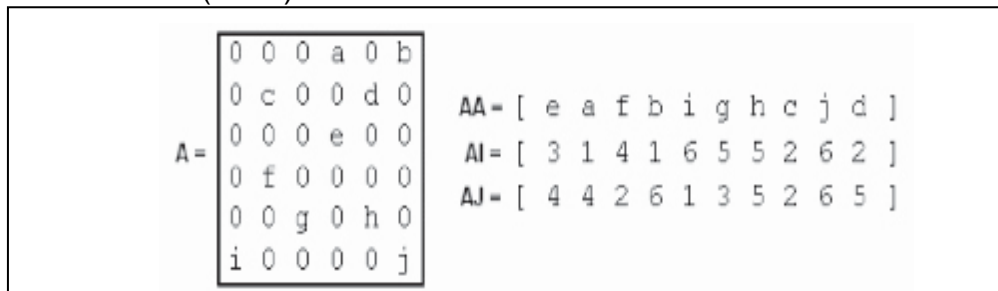
Se explicaran a continuación los métodos convencionales conocidos como COO, CSR Y MSR, sin embargo como uno de los objetivos en el desarrollo de este proyecto es reducir el tiempo de cómputo para optimizar los procesos computacionales internos de toda la metodología en general propuesta, estos métodos se podrán optimizar ya que la matriz generada es simétrica, por esta razón fue necesario implementar un algoritmo de cómputo para el almacenamiento de datos no nulos de la matriz directamente en un vector sin necesidad de hacer el llenado matricial.

4.7.1 Metodología para el manejo de matrices

4.7.1.1 Método convencional de almacenamiento disperso por coordenadas (COO). El esquema de almacenamiento más sencillo usado para matrices dispersas y base para los demás esquemas conocidos es el formato coordinado (COO). Como se muestra en la **Figura 18**, consiste en tres arreglos: el primero (AA) contiene todos los valores reales o complejos de los elementos no nulos de la

matriz, el segundo (AI) es un arreglo de enteros y contiene los índices de la fila de los elementos correspondientes, el ultimo arreglo propuesto corresponde a los números enteros que identifican las columnas de los elementos no nulos de la matriz.

Figura 18 Transformación de matrices dispersas en arreglos unidimensionales por el método de almacenamiento disperso por coordenadas (COO).

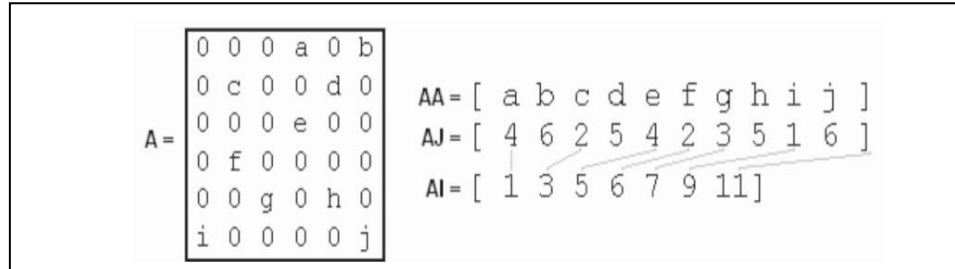


Fuente. JARAMILLO, J. "Métodos Directos Para La Solución De Sistemas De Ecuaciones Lineales Simétricos, Indefinidos, Dispersos Y De Gran Dimensión", Universidad EAFIT, Medellín febrero de 2006, pág. 10.

Para mejorar este método se pueden utilizar dos variantes sencillas una de comprensión por filas CSR (Compressed Sparse Row) y otra de comprensión por columnas CSC (Compressed Sparse Column).

4.7.1.2 Método convencional de almacenamiento disperso por fila comprimida (CSR). Igualmente se desglosa una matriz en tres arreglos independientes, en este caso los valores de la matriz A diferentes de cero son almacenados en orden por filas desde la primera hasta la fila n, como se muestra en **Figura 19**, este vector se denomina AA y tiene un tamaño nz.

Figura 19 Transformación de matrices dispersas en arreglos unidimensionales por el método de almacenamiento disperso por fila comprimida (CSR).



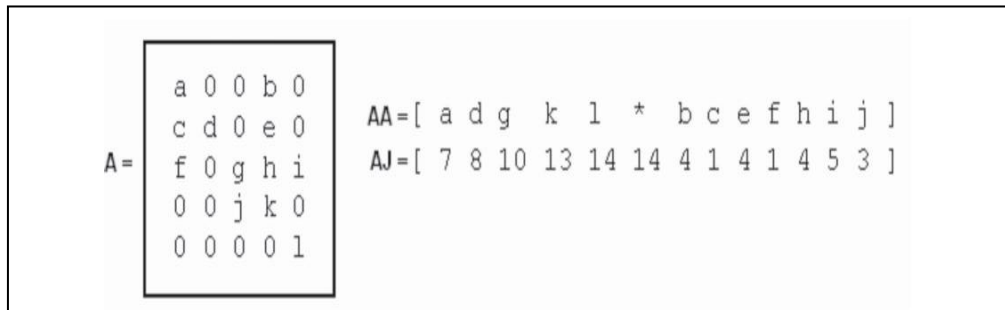
Fuente. JARAMILLO, J. "Métodos Directos Para La Solución De Sistemas De Ecuaciones Lineales Simétricos, Indefinidos, Dispersos Y De Gran Dimensión", Universidad EAFIT, Medellín febrero de 2006, pág. 10.

El segundo arreglo (AJ) de enteros contiene los índices de columna de los elementos de A almacenado en AA y del mismo tamaño que el primero. El último arreglo (AI) es de enteros que contiene apuntes a la posición en los arreglos AA y AJ donde esté ubicado el primer elemento de cada fila, el contenido de este arreglo es la posición en los arreglos AA y AJ donde comienza la fila i, y su tamaño es n+1, siendo n el número de filas de la matriz. El formato de almacenamiento por CSC puede ser fácilmente deducible a partir de CSR.

4.7.1.3 Método convencional de almacenamiento disperso por fila comprimida modificada (MSR). El formato modificado de la compresión por filas MSR contiene solo dos arreglos, el primero llamado AA contiene las entradas diferentes de cero de la matriz comenzando por la diagonal principal seguida de un marcador asterisco (*) y finalmente las demás entradas no nulas en el orden de almacenamiento CSR. El segundo arreglo es llamado AJ y contiene en los primeros n elementos las posiciones de los elementos en el primer arreglo que corresponden a primeras entradas en cada fila.

En la posición $n+1$ aparece el número $nz+1$ indicando que termina la diagonal y continuando con los otros elementos. A partir de la posición $n+2$ en adelante están los índices de columna de los elementos AA, como se muestra en la **Figura 20**.

Figura 20. Transformación de matrices dispersas en arreglos unidimensionales por el método de almacenamiento disperso por fila comprimida modificada (MSR).



Fuente. JARAMILLO, J. "Métodos Directos Para La Solución De Sistemas De Ecuaciones Lineales Simétricos, Indefinidos, Dispersos Y De Gran Dimensión", Universidad EAFIT, Medellín febrero de 2006, pág. 10.

Existen diversos algoritmos de conversión del formato de almacenamiento con el fin de calcular propiedades específicas en cada problema, además es necesario asignar un formato deseable más apropiado a las condiciones del sistema llevados a métodos ya programados, sin embargo, se deja una noción de las técnicas empleadas actualmente, en vista a que en simulación se trabajan con matrices de gran dimensión fue necesario proponer un nuevo método cambiando el formato y algoritmo para optimizar el tiempo de cómputo que se explicara en la siguiente sección.

4.7.2 Método optimizado propuesto

Inicialmente teniendo claras las siguientes consideraciones para los problemas de simulación de yacimientos, como: sistema matricial disperso, simétrico y ancho de banda definido, se reducirá el tiempo de cómputo almacenando solo los términos

de la triangular inferior (diagonal principal implícita), con este método se propone transformar un sistema matricial en cuatro arreglos unidimensionales de mayor flexibilidad de cómputo.

Primero, con respecto a una matriz A se procede a generar el primer arreglo llamado Ad el cual asocia todos los elementos contenidos en la diagonal principal, un segundo arreglo llamado AA contiene todos los elementos no nulos que se ubican por debajo de la diagonal principal. El tercer y cuarto arreglo llamados AJ y AI llevan reservados el valor de la posición de los índices en columnas y filas respectivamente de la matriz A. En la **Figura 21** se muestra un ejemplo del formato propuesto para el almacenamiento de datos en arreglos unidimensionales de una matriz simétrica, dispersa, diagonalmente dominante de 5x5, las cuales son típicas para cualquier modelo de simulación.

Figura 21. Transformación de matrices dispersas en arreglos unidimensionales por el método propuesto (BC).

A=	4	2	0	-1	0	X1	20
	2	7	2	4	3	X2	35
	0	2	10	0	0	X3	40
	-1	4	0	11	0	X4	55
	0	3	0	0	17	X5	60

Ad	4	7	10	11	17
AA	2	2	-1	4	3
AJ	1	2	1	2	2
AI	2	3	4	4	5

Fuente. El autor.

La implementación de este método en un algoritmo programado en matlab (ver anexo A), es usado para omitir el llenado matricial generando ahorro de tiempo y procesamiento, por tanto se debe acoplar al método de solución deseado que generalmente va enfocado a matrices mas no a vectores.

4.8 MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Los métodos de solución para sistemas lineales se dividen en dos grandes grupos: directos e indirectos. Los métodos directos buscan la solución en un número finito de pasos y cada paso en las operaciones intermedias depende de pasos previos. Los métodos iterativos generan una sucesión cuyos valores se espera converjan a la solución del sistema. Un error que caracteriza a estos dos grupos es el de redondeo.

A medida que se aumenta la dimensión de los sistemas de ecuaciones lineales, aumenta el error acumulado en el tiempo, ya que la principal desventaja de los métodos directos frente a los iterativos es que los errores de redondeo se acumulan durante el proceso, además de requerir mayor espacio de memoria debido al efecto de llenado (fill-in). Por otra parte los métodos iterativos aprovechan como aproximación inicial una solución obtenida en el tiempo anterior. Esta gran ventaja hace que actualmente se modelen este tipo de complejidades matriciales iterativamente.

En vista que en este proyecto se trabaja con matrices de gran dimensión se usaran métodos iterativos donde tendrá como punto de partida una solución inicial y se irán modificando sus valores hasta alcanzar una convergencia deseada, esto se halla mediante el uso de una tolerancia de convergencia o error mínimo.

La mayoría de los métodos iterativos para la solución de sistemas de ecuaciones utilizan de alguna manera un método de proyección. Un proceso de proyección

representa una forma canónica de encontrar una aproximación a la solución de un sistema lineal de un subespacio.

Los dos grandes principios o requerimientos básicos, para que estos métodos de solución sean utilizados en grandes sistemas lineales son: minimizar la norma del vector residuo generado por la matriz del sistema lo cual se traduce en una convergencia suave sin grandes fluctuaciones, por otro lado favorecer un bajo costo computacional por iteración y no exigir capacidad excesiva de almacenamiento.

Para este caso de aplicación y resolución del sistema de ecuaciones lineales propuestas a partir de la integración de la ecuación de difusividad y el método de volúmenes finitos se usara el algoritmo de Gradiente conjugado que se explicara a continuación.

4.8.1 Método del gradiente conjugado (CG)

Es un método iterativo de proyección propuesto por Hestenes y Stiefel en 1952 y desarrollado en práctica a partir de 1970, alcanza teóricamente la solución (salvo errores de truncamiento) en un número de iteraciones igual a dos veces la dimensión del sistema y verifica los requisitos esenciales de optimizar. Cuando la matriz no cumple las condiciones de ser simétrica y positiva, el método no es aplicable, en general no existen métodos que cumplan los dos requisitos antes mencionados, sin añadir inconvenientes y desventajas¹⁶.

Inicialmente se tiene que definir una función cuadrática como una función escalar definida sobre un espacio vectorial de dimensión n de la forma:

¹⁶ JARAMILLO, J. "Métodos Directos Para La Solución De Sistemas De Ecuaciones Lineales Simétricos, Indefinidos, Dispersos Y De Gran Dimensión", Universidad EAFIT, Medellín febrero de 2006, pág. 28.

Ecuación 111

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{x}^t A \vec{x} - \vec{b}^t \vec{x} + c$$

Donde A es una matriz cuadrada, \vec{x} y \vec{b} son vectores y c una constante escalar, siendo A una matriz simétrica definida positiva.

El gradiente de una función se define como:

Ecuación 112

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(\vec{x}) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

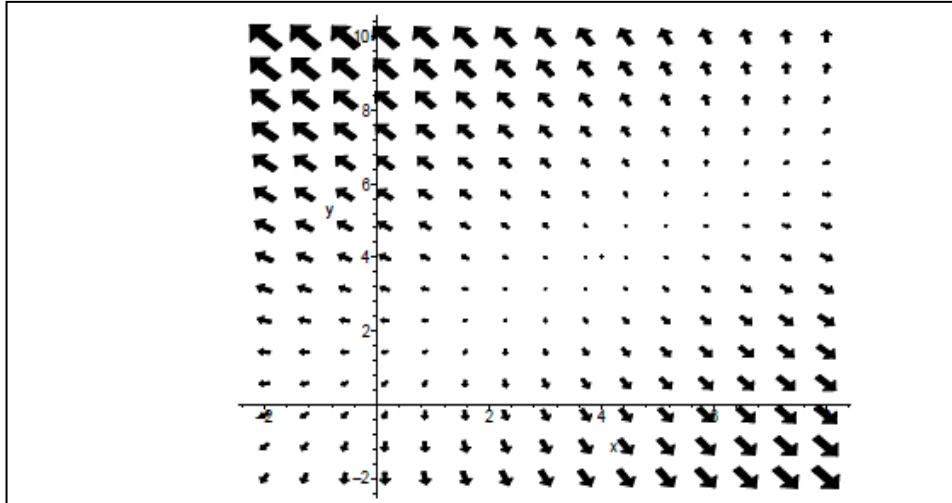
El gradiente es un campo vectorial que tiene la importante propiedad de que en un punto dado \vec{x} , el vector del campo correspondiente apunta en la dirección del máximo crecimiento de f , una clara representación dentro de un campo vectorial se muestra en la **Figura 22**.

Derivando parcialmente la expresión cuadrática $f(\vec{x})$ y sabiendo que la matriz es simétrica se simplifica a:

Ecuación 113

$$\nabla f(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$$

Figura 22 Gradiente de la forma cuadrática apuntando en la dirección de máximo crecimiento de f y es ortogonal a la curva de nivel que pasa por \vec{x} .

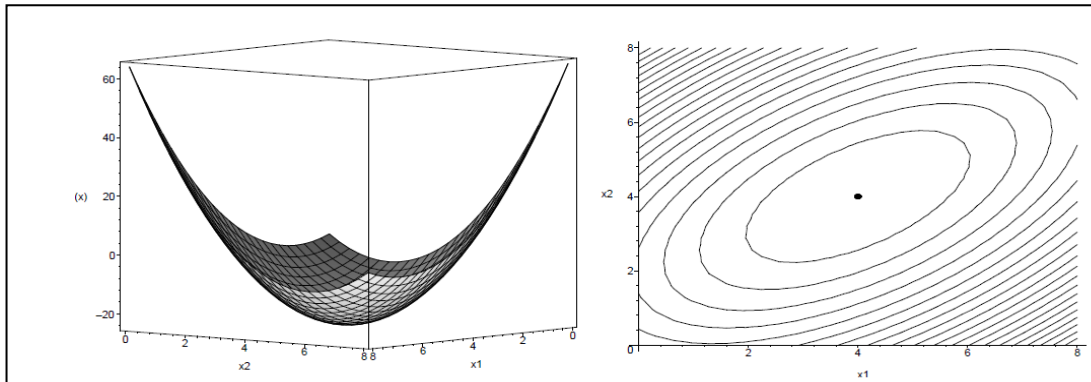


Fuente. Kindelán, U., “Resolución De Sistemas Lineales De Ecuaciones: Método Del Gradiente Conjugado”, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior De Ingenieros De Minas, pág. 10.

Igualando el gradiente a cero se llega a que $A\vec{x} = \vec{b}$, donde el punto evaluado en términos iterativos se denominara \vec{x}^* , siendo este último un punto crítico de $f(\vec{x})$. Ya que la matriz A además de ser simétrica es positiva, entonces la solución al sistema planteado será un mínimo de f .

En conclusión la solución al sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ se halla cuando se encuentra el punto \vec{x}^* que minimice $f(\vec{x})$.

Figura 23. Forma cuadrática en 3D y 2D donde alcanza su valor mínimo, siendo este el que cumple la condición $A\vec{x} = \vec{b}$.

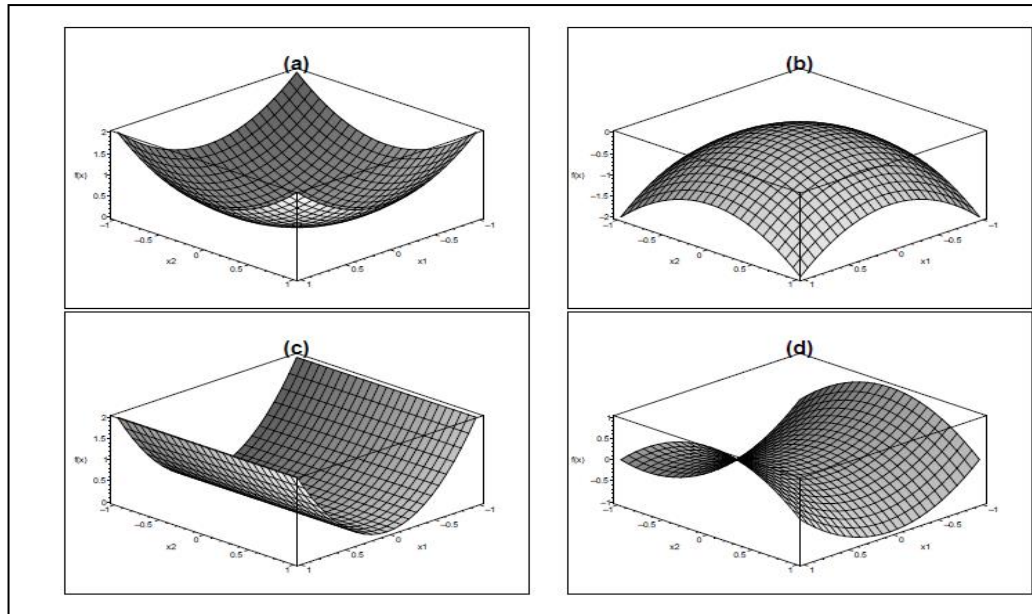


Fuente. Kindelán, U., “Resolución De Sistemas Lineales De Ecuaciones: Método Del Gradiente Conjugado”, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior De Ingenieros De Minas, pág. 9.

El hecho de que en \mathbb{R}^2 f sea un paraboloides, permite interpretar geoméricamente el que A sea una matriz definida positiva, es decir: la función f alcanza un mínimo absoluto y a partir del punto en el que alcanza dicho mínimo la función crece en todas las direcciones, ver **Figura 23**. Si A no es definida positiva, se pueden dar los siguientes casos:

A puede ser definida negativa, en este caso la función f será un paraboloides abierto hacia abajo, alcanzara un máximo absoluto y a partir del punto en el que se alcanzase el máximo la función decrecerá en todas las direcciones (**Figura 24** caso b). A puede ser una matriz singular en cuyo caso la solución del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, si existiera, no sería única: existirán infinitos puntos críticos formando una recta o un plano dependiendo del rango de A (**Figura 24** caso c). En los casos en los que A no es definida ni singular, será una matriz indefinida. En estos casos el punto \vec{x}^* será un “punto silla” y tanto el método del gradiente como el método del gradiente conjugado fallaran (**Figura 24** caso d).

Figura 24. Formas cuadráticas de paraboloides que representan el sistema un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.



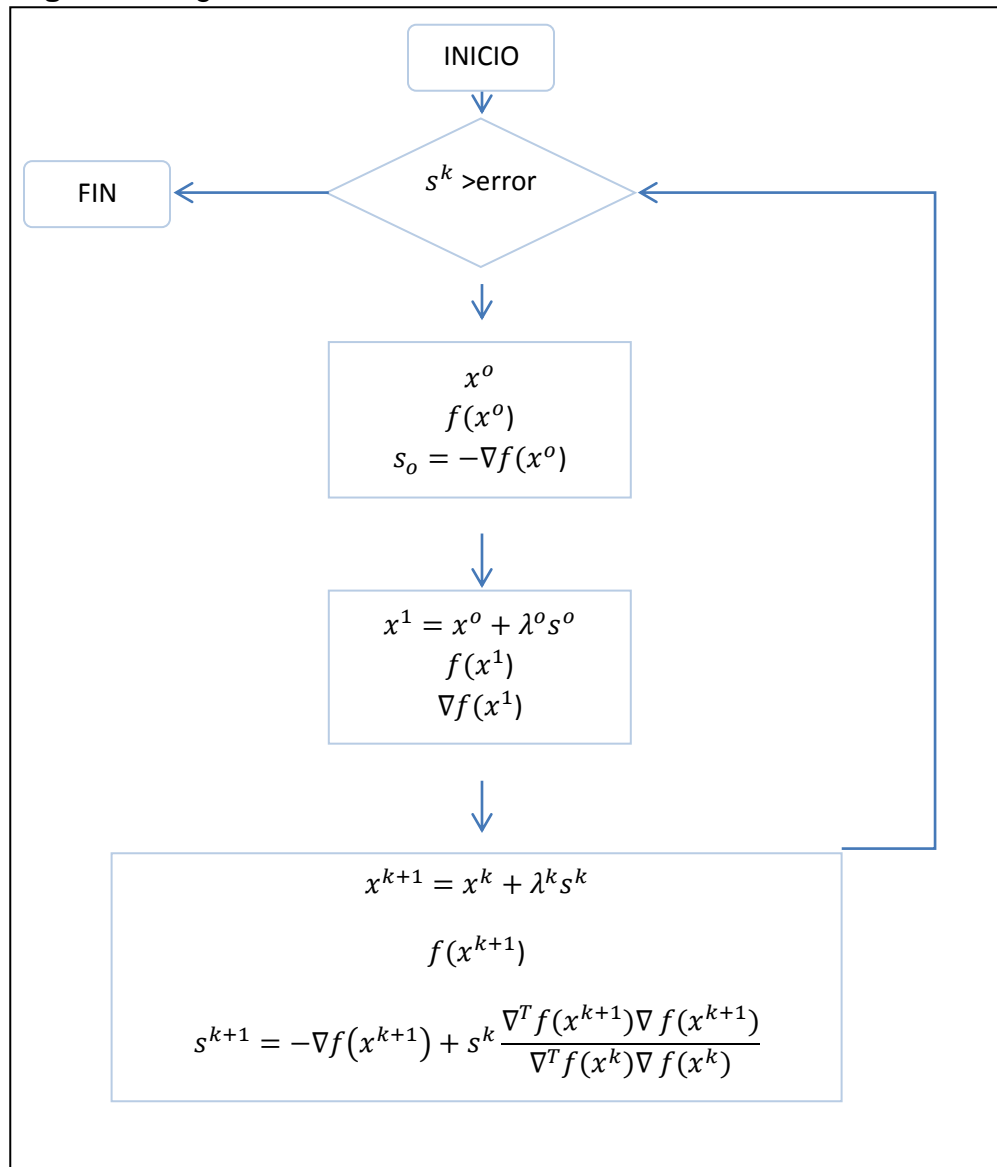
Fuente. Kindelán, U., “Resolución De Sistemas Lineales De Ecuaciones: Método Del Gradiente Conjugado”, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior De Ingenieros De Minas, pág. 11.

El método de gradiente conjugado supone una importante mejora del método del gradiente con sólo un pequeño incremento en el esfuerzo de cálculo. El método del gradiente conjugado, esencialmente, combina la información obtenida del vector gradiente con la información acerca del vector gradiente de iteraciones previas. Lo que hace el método es calcular la nueva dirección de búsqueda utilizando una combinación lineal del gradiente en la etapa considerada y el de la etapa anterior. La principal ventaja del método es que necesita almacenar muy poca cantidad de información con lo que puede ser programado fácilmente incluso en calculadoras¹⁷, el algoritmo del método GC se muestra en la **Figura 25**.

¹⁷ Recuperado de Calculo Numérico en Ingeniería, Tema 8: “Introducción a la Optimización Numérica”, disponible en línea: <http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/16373/8/Microsoft%20Word%20-%208.%20INTRODUCCION%20A%20LA%20OPTIMIZACION%20NUMERICA-1.pdf> capítulo 6.2, pág. 33.

Para una función cuadrática se puede demostrar que dos direcciones de búsqueda son conjugadas. Después de n iteraciones conviene comenzar otra vez desde el principio tomando el último punto $k = n$ como nuevo punto de partida. El test de convergencia se controla mediante el algoritmo cuando s^k sea menor que alguna tolerancia o error preestablecido.

Figura 25 Algoritmo del método GC

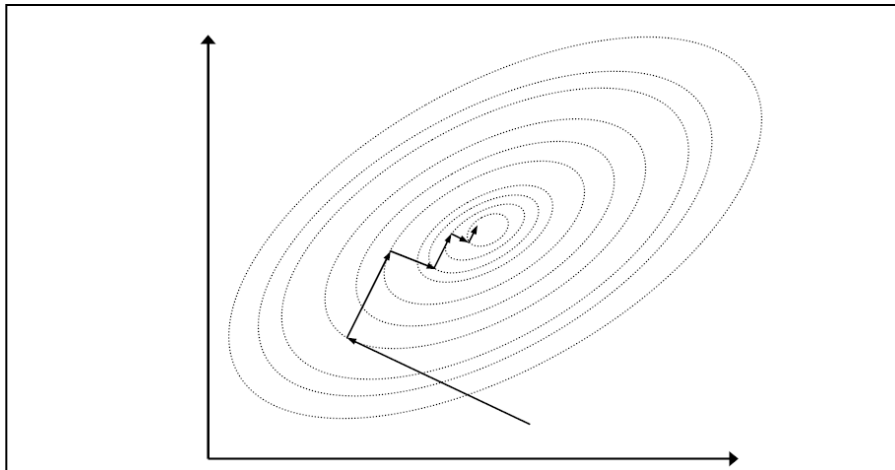


Fuente. Modificado de cálculo numérico en ingeniería, Tema 8 “Introducción a la Optimización Numérica”, pág. 34.

Para una función cuadrática se puede demostrar que dos direcciones de búsqueda son conjugadas. Después de n iteraciones conviene comenzar otra vez desde el principio tomando el último punto $k = n$ como nuevo punto de partida. El test de convergencia se controla mediante el algoritmo cuando s^k sea menor que alguna tolerancia o error preestablecido.

En la **Figura 26** se muestra como es el proceso iterativo de búsqueda de la raíz del sistema de ecuaciones, presentando la matriz simétrica, dispersa y bandeda en un plano cartesiano bidimensional.

Figura 26 Método iterativo de GC, oscilando en la dirección de máximo descenso.



Fuente. Cálculo numérico en ingeniería, Tema 8 “Introducción a la Optimización Numérica”, pág. 32.

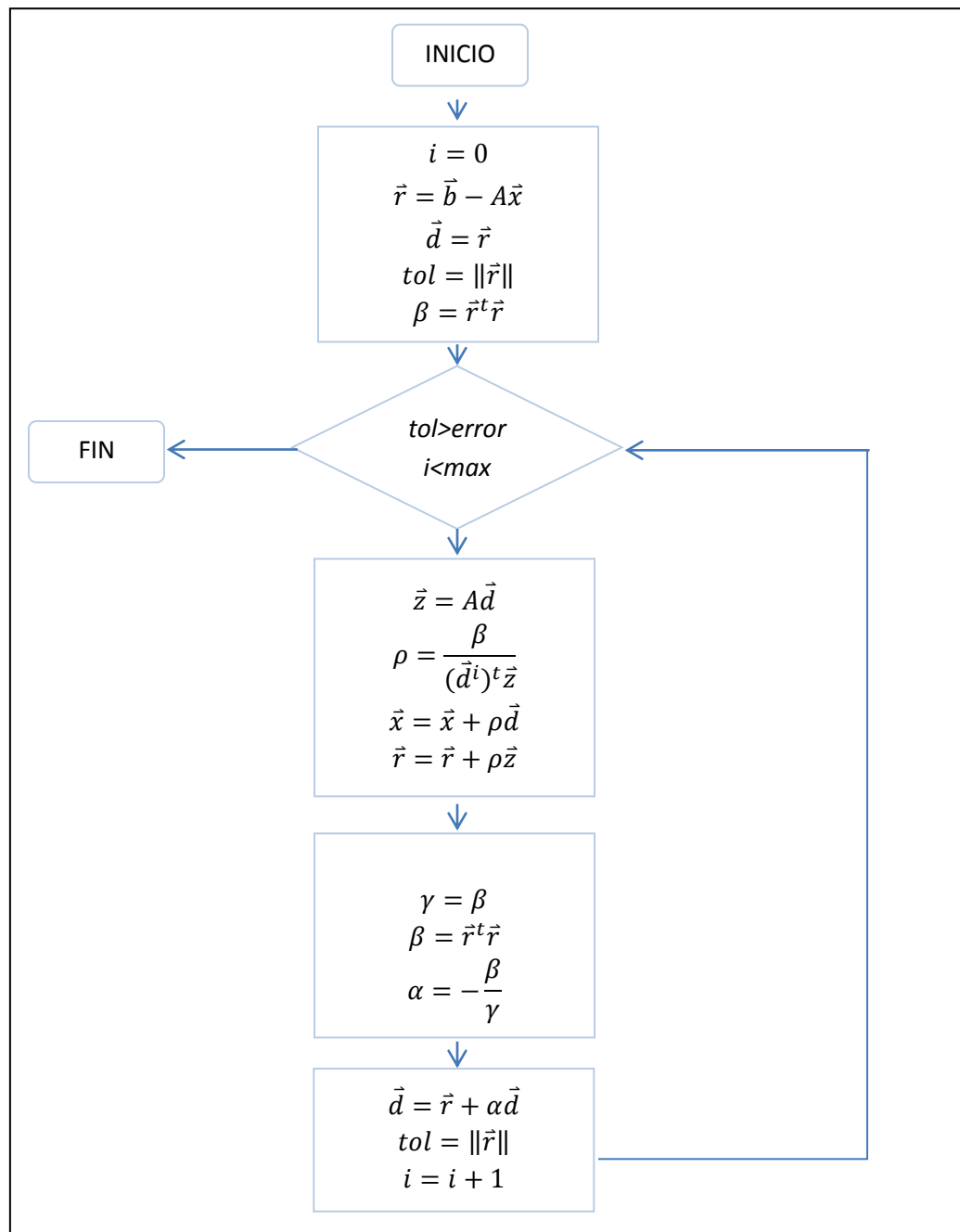
El gradiente negativo da la dirección de movimiento, pero no la longitud de dicho movimiento, por lo tanto existen varios procedimientos posibles dependiendo de la elección de λ^k (longitud del paso).

Debido que se trabajaran sistemas lineales de gran dimensión, en este módulo también es necesario optimizar el esfuerzo computacional para reducir el tiempo de cómputo, por ende se procede a mostrar una versión más eficiente del método

GC para la obtención de los parámetros implícitos en la técnica, apoyándose de suposiciones y consideraciones, (ver figura 27).

La elección de este algoritmo para implementarlo como método de solución mediante una función en matlab, es debido a que solo se realiza un producto entre matriz y vector, dando por resultado un número de operaciones igual a $2n^2 + 11n$. Por lo tanto el número de operaciones por iteración es relativamente igual al método del gradiente conjugado, esto aplica para los contextos aplicativos en simulación de yacimientos (para n grande) ya que se tendrán matrices de gran dimensión, arrojando una semejanza en iteraciones aproximadamente igual a $2n^2$. Sin embargo, a la hora de escoger entre los dos métodos, siempre se debería escoger el del gradiente conjugado puesto que el número de iteraciones necesarias para alcanzar una reducción del error dado (velocidad de convergencia) es menor en el método del gradiente conjugado que en el método del gradiente, en la **Figura 27** se muestra el algoritmo de solución del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ mediante el método GC.

Figura 27. Algoritmo de solución del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ mediante el método GC.



Fuente. Modificado de Kindelán, U., “Resolución De Sistemas Lineales De Ecuaciones: Método Del Gradiente Conjugado”, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior De Ingenieros De Minas, pág. 23.

4.9. ECUACIÓN DESARROLLADA POR EL MÉTODO DE VOLUMENES FINITOS PARA EL GAS.

Partiendo de:

Ecuación 114

$$\nabla \cdot \left(c_1 \frac{k}{B_g \mu_g} \nabla (P - \rho_{gcy} g Z) \right) \pm q_g = \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B_g} \right)$$

El termino

Ecuación 115

$$B_g = \frac{(\rho_g)_{CN}}{(\rho_g)_{CY}} = \frac{(PM/ZRT)_{CN}}{(PM/ZRT)_{CY}}$$

$$B_g = \frac{P_{CN} Z T}{T_{CN} P} = 0.00503 \frac{Z T}{P}$$

$$B_g = C_3 \frac{Z T}{P}$$

Donde se reemplazaron las variables a condiciones normales por los siguientes valores:

$$P_{CN} = 14.7 \text{ psi}$$

$$T_{CN} = 520 \text{ } ^\circ R$$

$$Z_{CN} = 1$$

Por tanto:

Ecuación 116

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_g} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{Z} \right) \frac{1}{T C_3}$$

Sabiendo que T es constante tenemos:

Ecuación 117

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{Z} \right) = \frac{1}{Z} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial t} P$$

De esta forma:

Ecuación 118

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi}{B_g} \right) = \frac{1}{B_g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \left(\frac{1}{B_g} \right)}{\partial t}$$

$$\frac{1}{B_g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \left[\frac{1}{Z} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial t} P \right]$$

De manera análoga a la ecuación de un black oil se tiene:

Ecuación 119

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi C_R \frac{\partial P}{\partial t}$$

Por tanto el tiempo en la ecuación de difusividad queda:

Ecuación 120

$$\frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi}{B_g} \right) = \frac{1}{c_2} \left[\frac{1}{B_g} \varphi C_R \frac{\partial P}{\partial t} + \varphi \left[\frac{1}{Z} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial t} P \right] \right]$$

$$= \frac{1}{c_2} \left(\frac{P}{c_3 T Z} \right) \varphi C_R \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\varphi}{Z} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\varphi}{Z^2} P \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\varphi}{Z} \frac{\partial P}{\partial t} \left[\frac{C_R}{c_2 c_3 T} P + 1 \right] - \frac{\varphi}{Z} P \frac{\partial Z}{\partial t}$$

Ahora se implementa la teoría de los volúmenes finitos:

Ecuación 121

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \left(c_1 \frac{k}{B_g \mu_g} \nabla (P - \rho_{gcy} g Z) \right) \right) dv \pm \iiint_V (q_g) dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\varphi}{Z} \frac{\partial P}{\partial t} \left[\frac{C_R}{c_2 c_3 T} P + 1 \right] \right) dV - \iiint_V \left(\frac{\varphi}{Z} P \frac{\partial Z}{\partial t} \right) dV$$

4.9.1 Discretización de la ecuación de difusividad del gas en volúmenes finitos.

Teorema de la divergencia:

Ecuación 122

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \left(c_1 \frac{k}{B_g \mu_g} \nabla (P - \rho_{gcy} gZ) \right) \right) dv = \iint_S \left(c_1 \frac{k}{B_g \mu_g} \nabla (P - \rho_{gcy} gZ) \right) \vec{n} dS$$

Con respecto a fuentes y sumideros tenemos:

Ecuación 123

$$\iiint_V (q_g) dV = q_g V$$

V Es el volumen del elemento

Término temporal:

Ecuación 124

$$\frac{\varphi}{Z} V \frac{\partial P}{\partial t} \left[\frac{C_R}{C_2 C_3} \frac{P}{T} + 1 \right] - \frac{\varphi}{Z} V P \frac{\partial Z}{\partial t}$$

Discretización para un elemento:

Ecuación 125

$$\sum_{j=1}^n C_1 \left(\frac{K_{i+1} + K_i}{2} \right) * \frac{1}{\left(\frac{B_{gi+1} + B_{gi}}{2} \right) \left(\frac{\mu_{gi+1} + \mu_{gi}}{2} \right)}$$

$$* \frac{(P_{i+1}^{t+1} - \rho_{i+1} g h_{i+1}) - (P_i^{t+1} - \rho_i g h_i)}{\Delta s} A_T$$

$$+ q V_i = \frac{\varphi_i}{Z_i} V_i \left[\frac{C_R}{C_2 C_3} \frac{P_i^t}{T} + 1 \right] \left[\frac{P_i^{t+1} - P_i^t}{\Delta t} \right] - \frac{\varphi_i}{Z_i} V_i P_i \left(\frac{Z_i^{t+1} - Z_i^t}{\Delta t} \right)$$

Donde B_g en el término izquierdo se calcula como:

Ecuación 126

$$B_g = 0.00503 \frac{Z_i^{t+1} T}{P_i} = C_3 \frac{Z_i^{t+1} T}{P_i}$$
$$B_g \text{ Promedio} = \frac{C_3 T}{2} \left[\frac{Z_{i+1}}{P_{i+1}^t} + \frac{Z_i}{P_i^t} \right]$$

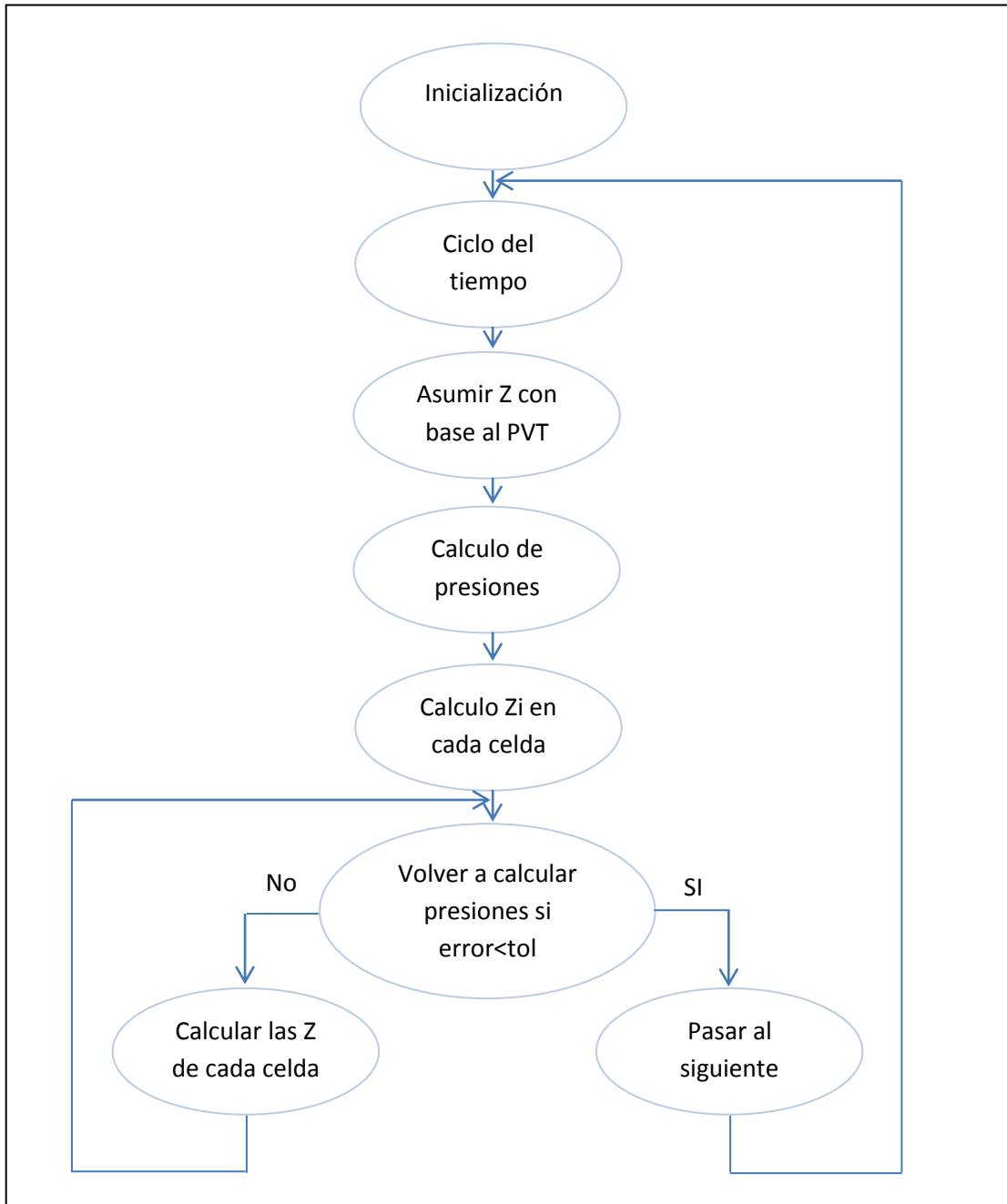
Manejando un esquema explícito para que no se convierta en un problema no lineal.

4.9.2 Metodología para resolver la ecuación del gas con la teoría de volúmenes finitos.

En la **figura 28** se muestra la metodología a seguir para la solución de la ecuación de gas en volúmenes finitos, a continuación se explican cada uno de los pasos:

- En el input de la simulación se debe tener el PVT con datos del factor de compresibilidad.
- Se asume un valor de z cercano a la presión promedio inicial ayudado del PVT.
- Se plantean y resuelven los sistemas de ecuaciones obteniendo las presiones de cada elemento, se procede a calcular cada factor de compresibilidad de cada celda interpolando con la celda PVT
- Se vuelven a calcular las presiones y se mira el porcentaje de error, hasta que sea menor a una tolerancia establecida
- Cuando se establecen los cálculos de Z dentro de la tolerancia establecida se obtienen las presiones para ese tiempo, luego se repite el procedimiento esta vez para el tiempo $n+1$

Figura 28 Diagrama de flujo para la resolución en técnicas de volúmenes finitos aplicada al gas.



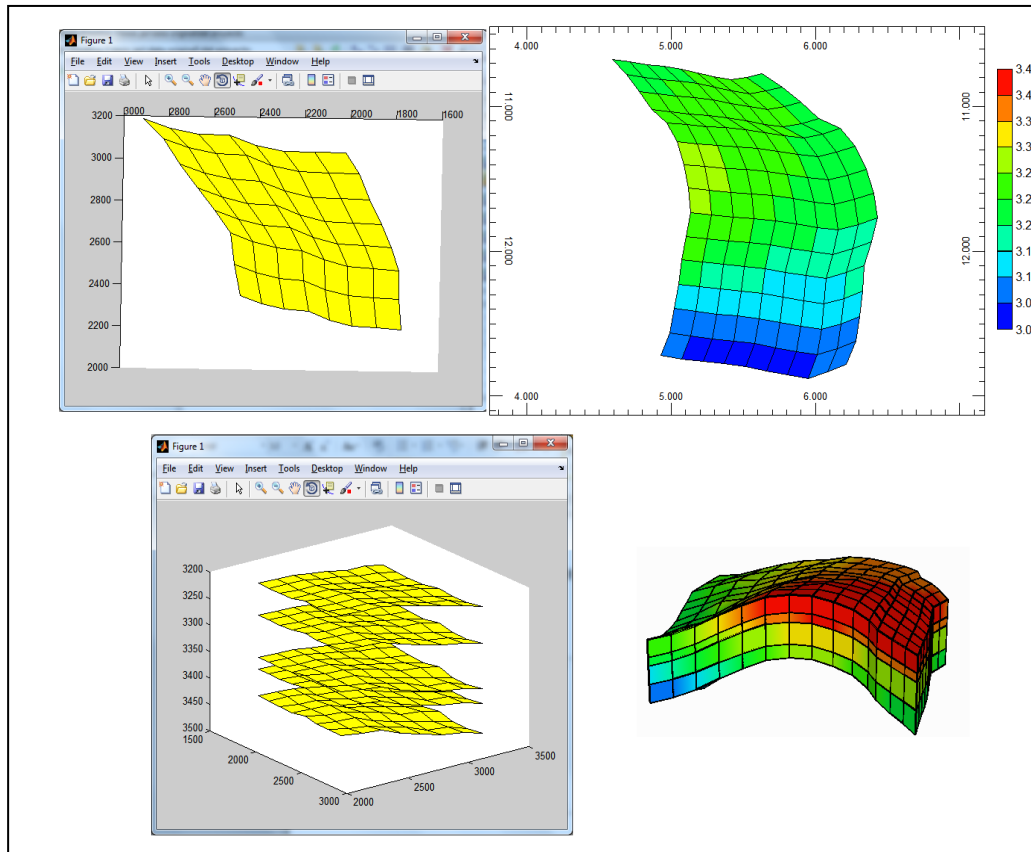
Fuente. El autor

5. VISUALIZACIÓN

5.1 GENERACIÓN DE MALLA EN MATLAB

Se procede a la discretización del modelo bajo el formato y código trabajado en este proyecto (matlab-ver anexo A). Por medio de parches y funciones se logra tener nuestra primera visualización del modelo estático generado en matlab, este está programado bajo la lectura de un archivo plano exportado por CMG el cual hace referencia a las keywords del grid (especificaciones de coordenadas de los vértices del volumen de control), ver **Figura 29**.

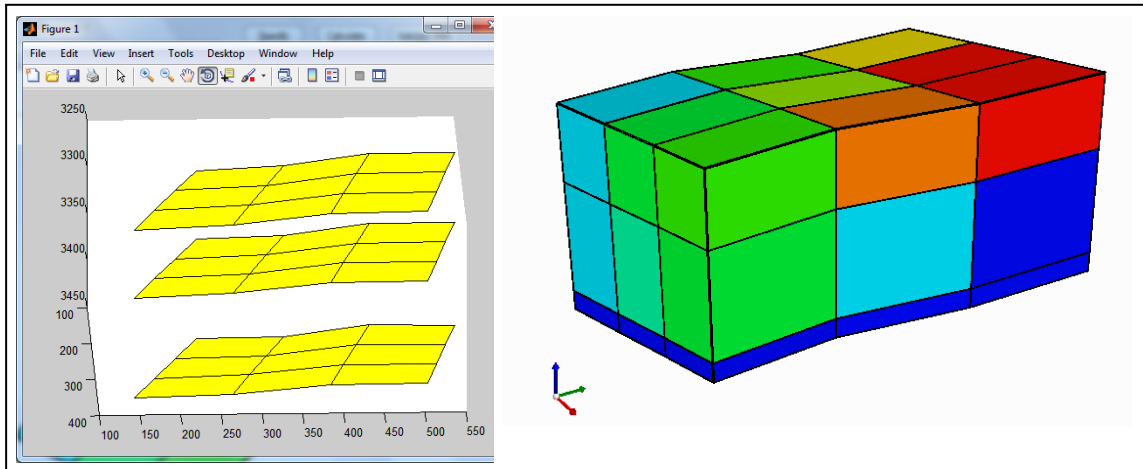
Figura 29. Vista areal y en profundidad de la malla generada por matlab y CMG.



Fuente. Tomado de Matlab 7.10.0 y CMG- Builder 2009.10.

Otro caso de prueba tomado a la hora de depurar el código de enmallado fue un sector model del campo mucho más pequeño correspondiendo sus dimensiones a un modelo de 3X3X3 con un pozo drenando esta región ubicado en la celda (2,2,2), como se muestra en la **Figura 30**.

Figura 30. Sector model 3X3X3 generado en CMG y matlab.



Fuente. Tomado de Matlab 7.10.0 y CMG- Builder 2009.10.

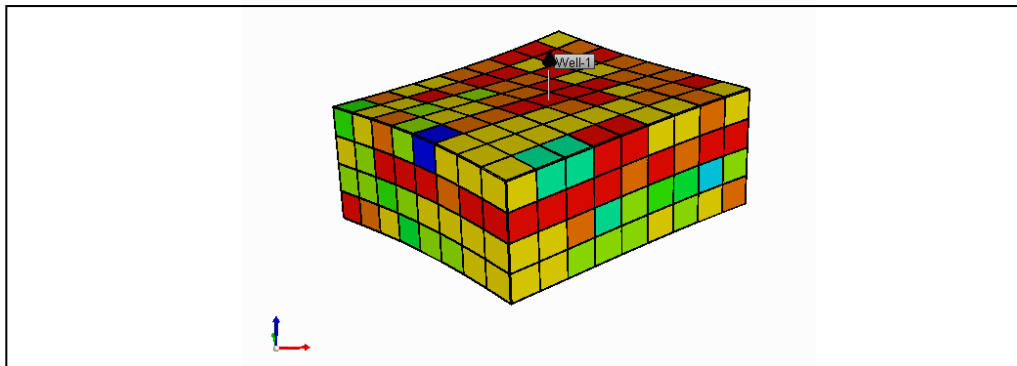
6. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO DE ESTUDIO

En primera instancia se tienen en cuenta las características esenciales para la construcción de nuestro modelo de estudio que será procesado con el simulador IMEX-CMG (aproximación por diferencias finitas), posteriormente con estas mismas condiciones se cargara en el algoritmo de MATLAB propuesto para posteriormente comparar, analizar y visualizar las discrepancias emitidas por dichos resultados.

6.1 PROPIEDADES ESTÁTICAS DEL YACIMIENTO

Se construye un modelo conceptual de 8X9X4 heterogéneo en permeabilidad y porosidad con alta continuidad geológica sin presencia de fallas como se muestra en la **Figura 31**.

Figura 31. Caso de estudio, enmallado del yacimiento-Permeabilidad I.



Fuente. Tomado de CMG- Builder 2009.10.

El modelo presenta la misma permeabilidad tanto en la dirección I como en la dirección J, pero en la dirección K presenta un multiplicador de 0.12 debido a los efectos de presión litostática a la cual está sometida la roca, haciendo que el flujo en dicha dirección sea un poco más complejo.

6.2 INTERACCIÓN ROCA FLUIDO

La formación tiene preferencia a estar humectada por agua, y presenta menor resistencia al flujo de aceite cuando se tienen bajas saturaciones de agua y viceversa, los end points dados a fin de ser usados en una correlación permiten poblar el modelo de interacción roca fluido como se muestra en la **Tabla 2**, sin embargo el modelo trabajara con la permeabilidad absoluta debido a que se condiciona una saturación del 100% de aceite para este modelo, en la **Figura 32** se observan las curvas de permeabilidad.

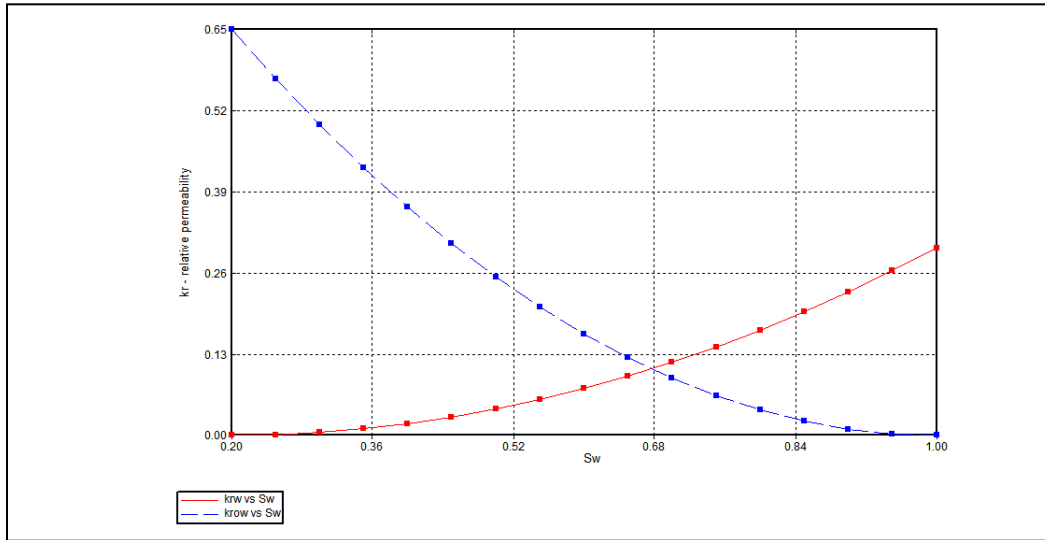
Tabla 2. Funciones de permeabilidad relativa Agua-Aceite.

Sw	krw	krow
0.2	0	0.65
0.25	0.00117187	0.571289
0.3	0.0046875	0.497656
0.35	0.0105469	0.429102
0.4	0.01875	0.365625
0.45	0.0292969	0.307227
0.5	0.0421875	0.253906
0.55	0.0574219	0.205664
0.6	0.075	0.1625
0.65	0.0949219	0.124414
0.7	0.117187	0.0914063
0.75	0.141797	0.0634766
0.8	0.16875	0.040625
0.85	0.198047	0.0228516
0.9	0.229688	0.0101562
0.95	0.263672	0.00253906
1	0.3	0

Fuente. El autor.

En este modelo ideal solo hay presencia de aceite, con un Rs muy bajo, lo cual es despreciable tener en cuenta la curva de gas-aceite.

Figura 32. Curva de permeabilidad relativa, CMG.



Fuente. Tomado de CMG- Builder 2009.10.

6.3 PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

Se modela un Black Oil con las características mostradas en la **Tabla 3**.

Tabla 3. Propiedades de los fluidos, modelo Black Oil.

DESCRIPCION	VALOR
Temp yacimiento	125 F
Densidad Aceite	57.867 lb/ft3
GE del gas	0.65
Densidad del agua	62.4 lb/ft3
Bw	1.00731
Cw	3.01E-6 1/psi
Pref para el agua	1600 psi

Fuente. Tomado y modificado de CMG- Builder 2009.10.

6.4 CONDICIONES INICIALES DEL YACIMIENTO

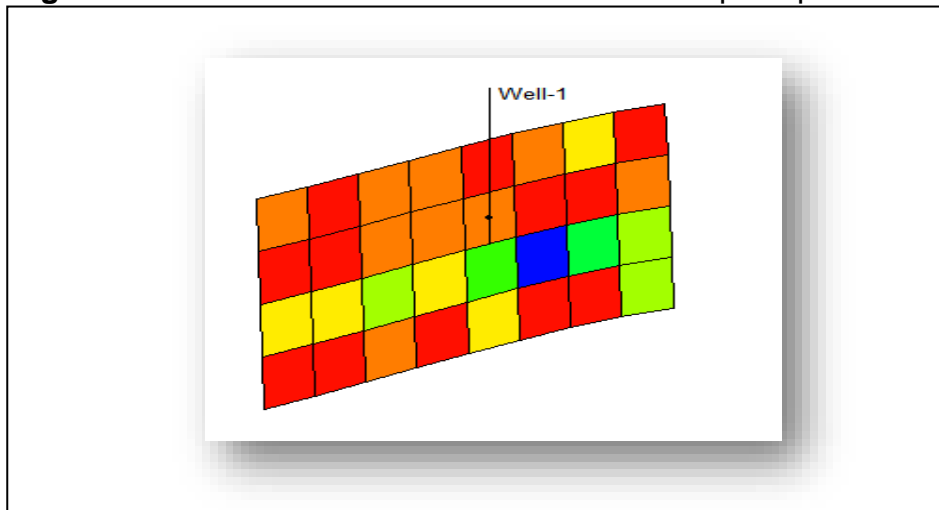
Como ya se ha mencionado anteriormente el equilibrio hidrostático se establece solo con la fase aceite, por lo tanto el contacto aceite-agua se establece a 4000 ft,

quedando fuera de los límites del modelo, la presión de burbuja será de 991 psi y la presión de referencia al datum es de 1650 psi a una profundidad de 3535 ft, garantizando de esta forma una saturación del 100% del fluido.

6.5 CONDICIONES OPERATIVAS DEL ESQUEMA DE PRODUCCIÓN

Como ya se pudo apreciar el sistema de explotación del modelo se debe al drenaje constante provocado por la perturbación de un pozo productor el cual estimula el drenaje del yacimiento, este pozo se ubica en todo el centro geométrico del modelo, completado únicamente en la celda (5,5,2), como se muestra en la **Figura 33**.

Figura 33. Sección transversal donde se ubica el pozo productor.



Fuente. Tomado de CMG- Builder 2009.10.

El pozo se controla únicamente por una restricción operativa que es la tasa máxima de aceite en superficie equivalente a 100 bbl diarios. Se simula un periodo de 5 años, con un time step de 1 mes.

7. COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE INICIALIZACIÓN DEL MODELO GENERADO POR CMG VS EL MÉTODO PROPUESTO

Como se explicó previamente en el capítulo 4.6.1 el algoritmo para poblar el modelo en presión en el tiempo cero, se procede a contrastar la discrepancia generada por la aproximación propuesta frente a los datos cargados internamente por el procesador de CMG, ver **Tabla 4**.

Tabla 4. Comparación de resultados de inicialización entre CMG y el método propuesto.

Presion-celda	Inicializacion-CMG	Inicializacion-Metodo Propuesto	Error
1	1726.08	1726	0.00463478
2	1723.73	1723.7	0.00174041
3	1721.46	1721.4	0.00348541
4	1719.37	1719.3	0.00407126
5	1717.56	1717.5	0.00349333
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
284	1749.09	1748.9	0.01086279
285	1747.18	1747	0.01030232
286	1745.13	1745	0.0074493
287	1743.03	1742.9	0.00745828
288	1741.01	1740.9	0.00631817
Promedio	1733.4858	1733.380208	1.75177556

Fuente. El autor.

Los resultados son muy dicentes en el hecho que la discrepancia es mínima, lo cual nos permite tener control y seguridad sobre los datos cargados para ser usados en el algoritmo optimizado propuesto para la solución de la ecuación de difusividad por el método de aproximación numérica de volúmenes finitos.

8. VISUALIZACIÓN DE VARIABLES DE SALIDA ENTRE CMG Y MÉTODO PROPUESTO

Como parámetro de salida se decidió escoger la presión promedio del yacimiento y compararla entre el método de aproximación por diferencias finitas (CMG) y el método de aproximación de volúmenes finitos (método propuesto optimizado), se escoge este parámetro para evaluar el comportamiento a nivel global de yacimiento como solución general promedio de la ecuación de difusividad como se mostró previamente (ver módulo 4.3).

Los resultados de presión se comparan con la variable Average POVO SCTR ambas en psi generados en el visualizador de CMG.

Para descartar cualquier tipo de error asociado en la formulación propuesta, en el método de volúmenes finitos se procede a compararlos con un modelo de igual dimensión y uno refinado en IMEX-CMG (simulador comercial), es decir los resultados que a continuación se van a presentar corresponden a un modelo en CMG con 288 celdas, un modelo de 288 celdas en MATLAB y un modelo refinado en CMG de 18720 celdas, **ver Tabla 4.**

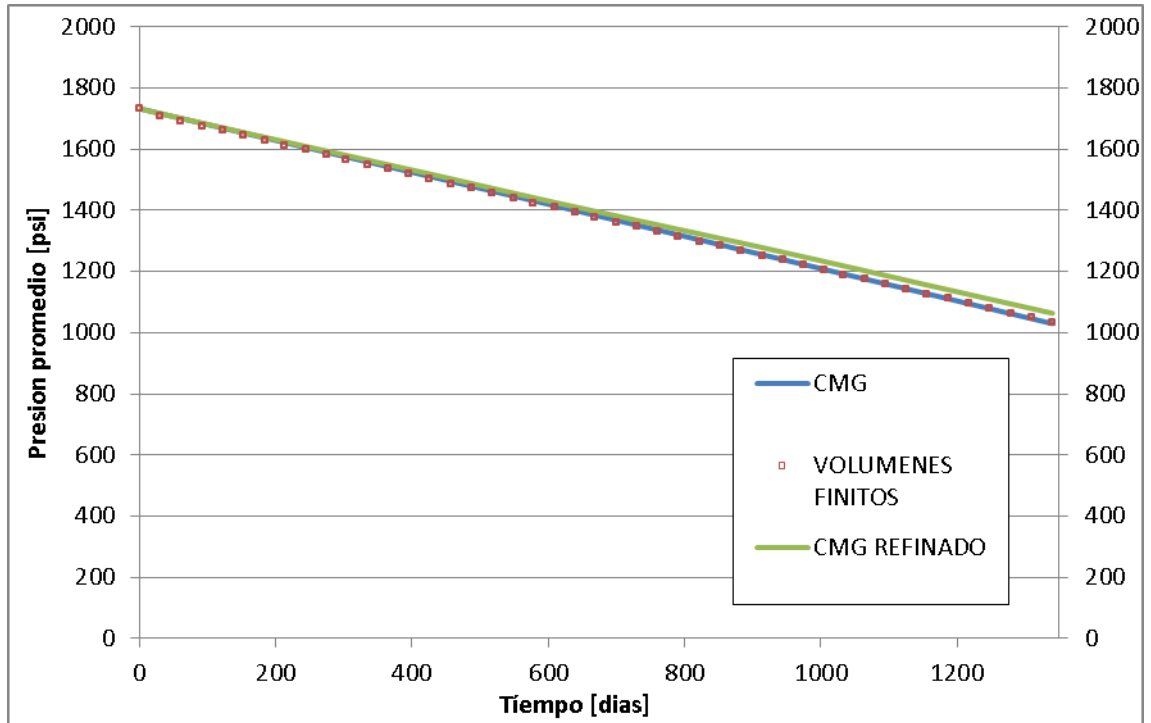
Tabla 5. Comparación del modelo propuesto y el de simulación numérica.

TIME (day)	DATE (d/mes/año)	Ave Pres POVO SCTR -(psi)			18720 CELDAS	ERROR CMG REFINADO/ MATLAB
		CMG	MATLAB 288 CELDAS	ERROR CMG/MATLAB	CMG- REFINADO-	
0	1-5-08	1733.4858	1733.38021	0.00609121	1732.83899	0.03123309
31	1-6-08	1716.7876	1706.787	0.58251805	1716.875	0.58757918
61	1-7-08	1701.24683	1691.11958	0.59528377	1701.46729	0.60816363
92	1-8-08	1685.17822	1675.44924	0.57732663	1685.78296	0.61299226
123	1-9-08	1669.09961	1659.77385	0.55872995	1670.1355	0.62040763
153	1-10-08	1653.52979	1644.09417	0.57063473	1655.12329	0.6663625
184	1-11-08	1637.43152	1628.40938	0.55099334	1639.6106	0.68316317
214	1-12-08	1621.84265	1612.71993	0.56249115	1624.69702	0.73718923
.
.
.
1218	1-9-11	1094.63794	1095.10817	0.04295777	1124.80774	2.64041282
1248	1-10-11	1078.71851	1079.4234	0.06534524	1109.99646	2.75433877
1279	1-11-11	1062.25842	1063.73862	0.13934461	1094.33423	2.79581914
1309	1-12-11	1046.31921	1048.05385	0.16578444	1079.43091	2.90681503
1340	1-1-12	1029.83862	1032.36907	0.24571335	1063.75464	2.9504515
1371	1-2-12	1013.34753	1016.6843	0.32928145	1048.45093	3.02986313

Fuente. Tomado y modificado de Matlab 7.10.0 y CMG- IMEX 2009.10.

Numéricamente se comprueba que el método de volúmenes finitos es más efectivo que el de diferencias finitas, también corrobora las premisas de ser conservativo en volumen ya que tiene tendencias de acercarse al modelo refinado, como se aprecia en la **figura 34**, se muestra el comportamiento de la presión promedio del yacimiento por los tres métodos para un tiempo aproximado de 4 años, validando los resultados bajo las consideraciones planteadas en este trabajo.

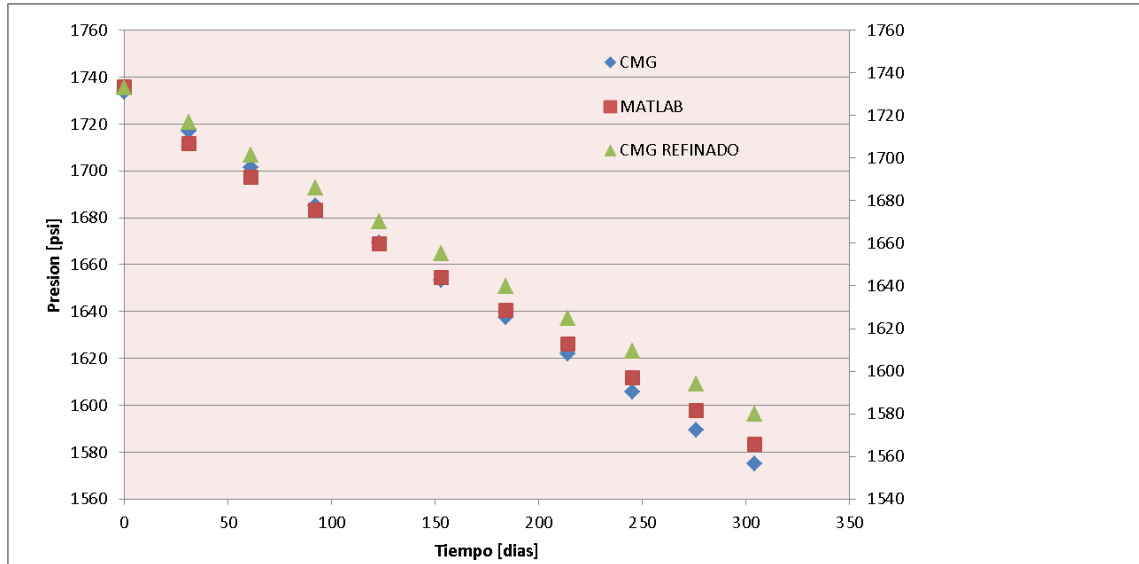
Figura 34 Comparación de los esquemas de aproximación numérica.



Fuente. Tomado y modificado de Matlab 7.10.0 y CMG- IMEX 2009.10.

Sin embargo, teniendo una apreciación gráfica, más cercana a dicha región en el periodo de simulación se ve como el método de volúmenes finito tiende a ser más compatible y cercano al modelo con refinamiento, como se muestra en la **Figura 35**.

Figura 35. Comparación método propuesto vs CMG normal y refinado.



Fuente. Tomado y modificado de Matlab 7.10.0 y CMG- IMEX 2009.10.

Se puede observar claramente como la técnica de los volúmenes finitos con 288 celdas tiende a los valores del método de diferencias finitas con 18720 celdas, por tanto se deja en claro que el método de los volúmenes finitos es más efectivo que el de diferencias finitas, se podría llegar a un mismo resultado con una partición del dominio menor; sin embargo, para tener una mayor visión de los cambios en presión del yacimiento se procedió a visualizar dichos cambios tanto en el simulador IMEX-CMG como en la técnica de volúmenes finitos a través del visualizador PARAVIEW 4.0, por tanto para evaluar el comportamiento del método con una mayor discretización se procedió a tratar con otro modelo el cual cuenta con 6400 celdas y se especifica a continuación.

Construcción modelo 40 40 4

Con los datos mostrados en la **Figura 36**, se correlaciono para poblar las propiedades estáticas del yacimiento, de esta forma se exporto el modelo estático al algoritmo en MATLAB, y las presiones se compararon gráficamente, las de

MATLAB se visualizaron con PARAVIEW 4.0 y las IMEX se visualizó con el módulo RESULT 3D.

Figura 36. Información del modelo

TOPES A			
POZO	X	Y	Z
1	4500	6200	3250
2	5800	4300	3300
3	3600	5500	3210
4	2750	6800	3280
5	6280	2900	3015
6	3900	3500	3120
7	4900	5150	3225

ESPEORES NETOS A			
POZO	X	Y	H
1	4500	6200	50
2	5800	4300	45
3	3600	5500	60
4	2750	6800	80
5	6280	2900	75
6	3900	3500	30
7	4900	5150	80

ESPEORES NETOS B			
POZO	X	Y	H
1	4500	6200	60
2	5800	4300	75
3	3600	5500	80
4	2750	6800	120
5	6280	2900	60
6	3900	3500	76
7	4900	5150	91

ESPEORES NETOS C			
POZO	X	Y	H
1	4500	6200	25
2	5800	4300	33
3	3600	5500	22
4	2750	6800	18
5	6280	2900	32
6	3900	3500	15
7	4900	5150	28

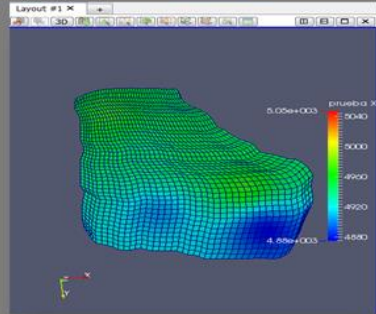
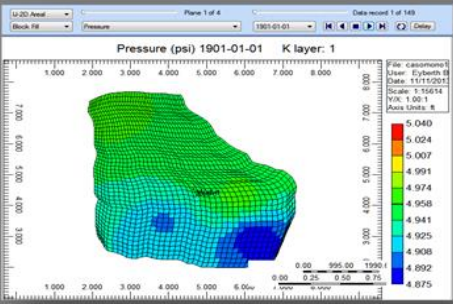
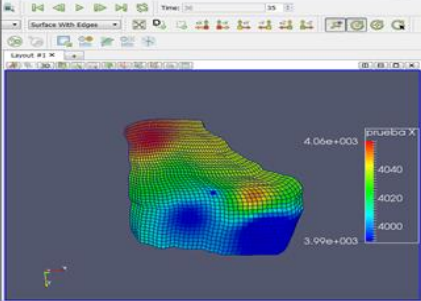
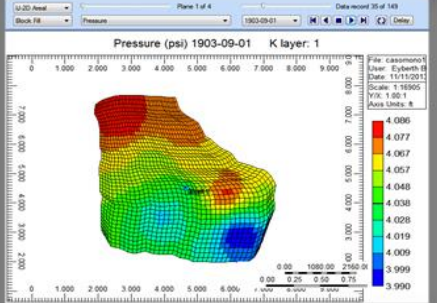
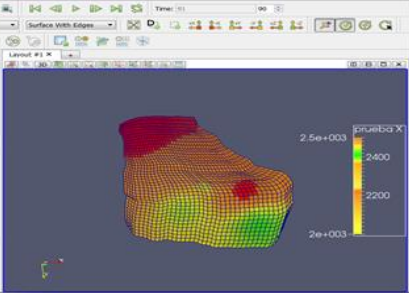
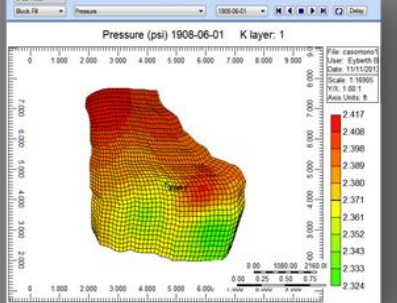
ESPEORES NETOS D			
POZO	X	Y	H
1	4500	6200	65
2	5800	4300	58
3	3600	5500	49
4	2750	6800	70
5	6280	2900	61
6	3900	3500	79
7	4900	5150	53

POROSIDAD A			
POZO	X	Y	PHI
1	4500	6200	0.32
2	5800	4300	0.26
3	3600	5500	0.2
4	2750	6800	0.34
5	6280	2900	0.28
6	3900	3500	0.22
7	4900	5150	0.26

POROSIDAD B			
POZO	X	Y	PHI
1	4500	6200	0.28
2	5800	4300	0.22
3	3600	5500	0.17
4	2750	6800	0.30
5	6280	2900	0.15
6	3900	3500	0.19
7	4900	5150	0.24

Fuente. El autor.

Figura 37 Los resultados gráficos de la simulación para diferentes pasos de tiempo se muestran a continuación en la **Figura 37**:

Paso de tiempo	Modelo Black oil Celdas=6400	1 Well Rate =6400 BPD
	Modelo Volumenes Finitos	Metodo de Diferencias finitas
	Paraview	CMG-Result 3D
0		
35		
91		

Fuente. El autor

Como se puede observar la dispersión de colores muestra que la distribución de presión en el yacimiento visualizadas en PARAVIEW para esos tiempos es similar

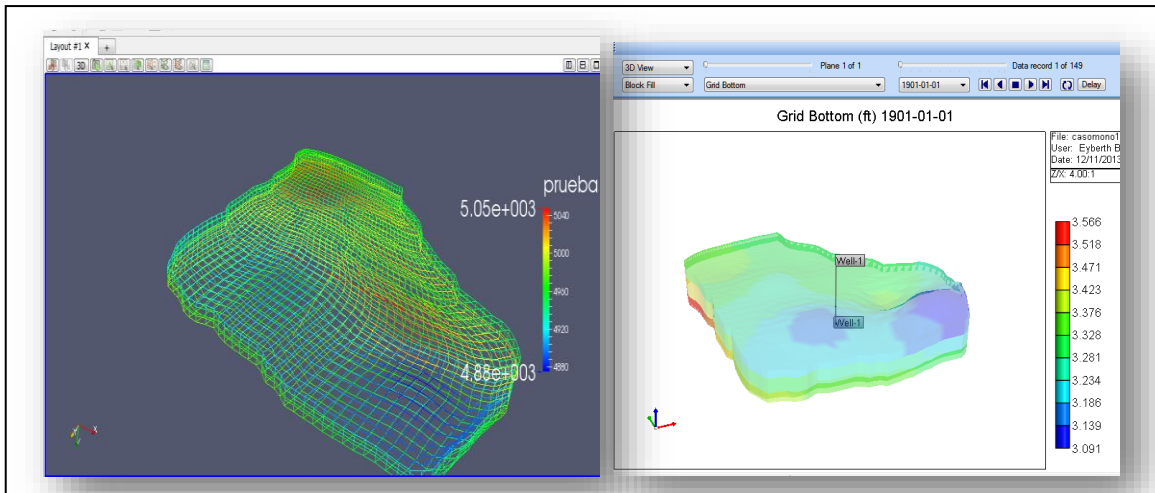
a la generada por el simulador IMEX vistas en RESULT 3D, por tanto se comprueba una vez más la efectividad del método propuesto en técnicas de volúmenes finitos probado con un tamaño de grilla de 6400 celdas. Otras características del reservorio se muestran en la **Tabla 6**. La visualización del modelo se encuentra en la **Figura 38**:

Tabla 6. Características del reservorio

Descripción	Valor
Total Block Volume:	5.217146e+009 ft3
Caution: Porosity at reference	not adjusted for Pore Pressure
Total Pore Volume:	1.149736e+009 ft3
Avg. Pore Volume per active:	179646.2 ft3
Total Pore Volume:	2.047767e+008 bbl
Statistics for:	Grid Top (ft)
01/01/1901	0 day
Minimum Value:	3020.543 at block 32,35,1
Maximum Value:	3494.911 at block 11,7,4
Sum:	21114670
Average:	3299.168
Block Volume Weighted Average:	3277.43
Pore Volume Weighted Average:	3277.9

Fuente. El autor.

Figura 38. Visualización del modelo



Fuente. El autor.

9. CONCLUSIONES

Bajo una profunda investigación se puede concluir que cualquier figura geométrica hexaédrica irregular siempre se puede fraccionar en cinco tetraedros.

El producto punto entre una función campo y la normal de una superficie de área, representa el flujo de ese campo, que es igual a la suma de los flujos en cada dirección coordinada lo cual es de suma importancia en el desarrollo del potencial de flujo.

Es de gran importancia optimizar los procesos para mejorar el tiempo de cómputo cuando se trabaja problemas a escala real, los cuales corresponden a grandes dimensiones, un ejemplo claro es el caso de una matriz de 27×27 el cual tiene 729 elementos donde se debe operar con cada uno de ellos, sin embargo la gran mayoría de los elementos son nulos, con las técnicas expuestas en esta tesis se puede vectorizar usando solo 135 elementos de la matriz y si esta es simétrica se usaría tan solo 81 elementos, lo que equivale al 11.11 % de la matriz original por tanto se ahorraría en tiempo de computo optimizando las corridas y de esta forma dinero referente a las licencias de los simuladores que presten el servicio de modelamiento.

Las proyecciones de flujo en la dirección i, j, k permiten trabajar con geometrías planas las cuales son las proyecciones en cada dirección, lo cual simplifica el problema dependiendo de la complejidad de la estructura analizada.

La técnica de volúmenes finitos es conservativa en volumen, a pesar que la técnica de diferencias finitas teóricamente es conservativa en masa, el truncamiento de las derivadas hace que la masa no se conserve obteniendo resultados diferentes.

El gradiente de presión no es función de la geometría de los elementos del dominio del yacimiento, conceptualmente es un vector de múltiples direcciones siendo función de fuentes y sumideros.

Se concluye que el gradiente de presión para el proceso de inicialización es sensible a las variables PVT, lo cual puede afectar la presión de la celda, generado por errores acumulados en las regresiones de las variables PVT.

El cálculo del gradiente del potencial de presión no se debe hacer como una derivada direccional en mallas no ortogonales tanto en la técnica de volúmenes finitos como en la de diferencias finitas, ya que se incurre en un error matemático acumulado por cada cara del elemento, debido a que la derivada direccional solo aplica cuando los elementos conservan ortogonalidad lo que no sucede en las mallas no ortogonales.

Se concluye que al ser el método de los volúmenes finitos conservativo en volumen, se requiere un menor número de mallas a un enmallado en diferencias finitas para obtener resultados similares, por lo tanto se ganaría en tiempo de cómputo siendo competitivo para el modelamiento de yacimientos a gran escala.

RECOMENDACIONES

Implementar la técnica de los volúmenes finitos en mallas no estructuradas y realizar un análisis de sensibilidad con respecto a la ubicación geométrica de los pozos con respecto a una malla estructurada.

Acoplar las ecuaciones que se plantean en este trabajo a modelos bifásicos, se recomienda manejar un esquema IMPES, implícito en presión y explícito en saturación, correlacionándolo a través de la presión capilar y la suma de fracciones de fluidos igual a 1, antes de trabajar un modelo con la técnica Newton Rapson multivariado.

Trabajar con las funciones implementadas en este trabajo, la elaboración de las mismas con librerías mex, permitiendo combinar lenguaje matlab y C, a fin de trabajar con punteros para agilizar el tiempo de computo.

Evaluar el valor óptimo de alfa en la ecuación propuesta en el desarrollo del gradiente del potencial para diferentes esquemas y modelos de simulación.

Realizar un estudio más detallado sobre la ecuación del gas con énfasis en el término temporal, se debe revisar la forma de discretizar y derivar el factor volumétrico, como también tener presente los tratamientos de la relación presión (P)/ factor de compresibilidad (z).

Continuar evaluando los métodos para la resolución de la matriz diagonalmente dominante, a pesar que el método del gradiente conjugado es bueno, es posible optimizarlo aún más trabajando técnicas en los pasos de tiempo.

Implementar un algoritmo que permita transformar la malla no ortogonal, para resolverla en técnicas de diferencias finitas y compararla con la de los volúmenes finitos con la malla sin transformar.

BIBLIOGRAFIA

B.C CRAFT, M Hawkins, applied petroleum reservoir engineering, second edition, 1991.

BÁNZER, C., "Correlaciones Numéricas P.V.T.", Universidad del Zulia, Maracaibo, Enero de 1996, pág. 77.

BÁRCENAS, L., "Implantación De Un Algoritmo De Inicialización En El Simulador De Yacimientos SYEP", trabajo de grado, Universidad Central de Venezuela, Caracas 2006, pág. 25-26

BOSCH, J., "Métodos Finitos", trabajo de grado a nivel de especialización en modelación, simulación y optimización de sistemas, Universidad pontificia Bolivariana, Medellín, 2006, pág. 16.

DE LA CRUZ SALAS Luis M., Método de volumen finito para flujo en una fase, 2011.

G. SHAW AND T.STONE, STONE, Schlumberger information and production services, finite volume methods for coupled stress/ fluid flow in a commercial reservoir simulator, SPE 93430, 2005.

J. ROZON Brad, computer modelling group, a generalized finite volume discretization method for reservoir simulation, SPE 18414, 1989.

JARAMILLO Juan David. Métodos directos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales simétricos, indefinidos, disperses y de gran dimensión. Universidad EAFIT. Ingeniería de sistemas e Ingeniería Matemáticas. Febrero del 2006. Pag 18.20.

KINDELAN Ultano, resolución de sistemas lineales de ecuaciones: Método del gradiente conjugado. Universidad politécnica de Madrid, escuela técnica Superior de Ingenieros de Minas.

L.S.K. Fung, A.D. Hiebert and L.X Nghlem, computer modeling group, Reservoir simulation with a control-volume finite-element method, SPE reservoir engineering, 1992.

Manual GMSH, generador de mallas versátil para cualquier geometría bajo código abierto, libre y gratuito, 12 de noviembre de 2011, pág. 4-8.

Modelamiento De Flujo Compresible Por El Método De Volúmenes Finitos En Gasoductos”, trabajo de grado Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga 2010, pág. 57

MONKEBERG Fabian. Finite volume methods for fluid flow in porous media, Zurich, Junio 27 del 2011

MORALES CONTRERAS, Oscar Adrián. Estudio numérico-experimental tridimensional laminar en un conducto rectangular con cambio de sección. Instituto Politécnico Nacional, escuela superior de ingeniería mecánica y eléctrica, Junio de 2011.

MORCILLO Alejandro. métodos de mallado y algoritmos adaptativos en dos y tres dimensiones para la resolución de problemas electromagnéticos cerrados mediante el método de los elementos finitos, Universidad politécnica de valencia, Escuela técnica superior de ingenieros de telecomunicación departamento de comunicaciones valencia febrero2011

N.MENENDEZ Angel, MATIAS H. Pomata, VALLE Jorge, LACIVITA Alejandro, KIND Martin, Implementación computacional de un simulador de reservorios de petróleo y gas por el método de los volúmenes finitos, 2005.

PEACEMAN, Donald. Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation. Elsevier Scientific Publishing Company, 1977.

QUINTERO, N., “Desarrollo De Un Modelo Computacional Para Flujo Bifásico En Tres Dimensiones Usando El Método De Volúmenes Finitos”, Trabajo de grado a nivel de maestría Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga 2012, pág. 48.

R. FANCHI Jhon and M.FANCHI Shirley, principles of applied reservoir simulation, tercera edición, 2006.

Recuperado de Calculo Numérico en Ingeniería, Tema 8: “Introducción a la Optimización Numérica”, disponible en línea: [Http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/16373/8/Microsoft%20Word%20-%208.%20INTRODUCCI%20A%20LA%20OPTIMIZACION%20NUMERICA-1.pdf](http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/16373/8/Microsoft%20Word%20-%208.%20INTRODUCCI%20A%20LA%20OPTIMIZACION%20NUMERICA-1.pdf) capítulo 6.2, pág.

S.H. Lee, P. Jenny and H.A. Tchelepi. A finite-volume method with hexahedral multiblock grids for modeling flow in porous media. Chevron Texaco EPTC, San Ramon, CA 94583, USA.

SANTAFÉ, E.R. y SIERRA, E.R. Estudio Comparativo De Las Técnicas De Enmallado Empleadas En Simulación Numérica De Yacimientos, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Ingeniería de Petróleos, Dic. 2004. Pag 105-166.

TURKEY Ertekin, ABOU-KASSEM Jamal H and Gregory R. King, basic applied reservoir simulation, 200, Pag. 11- 378.

USERA, G., VERNET, A., “A Parallel Block-Structured Finite Volume Method for Flows in Complex Geometry with Sliding Interfaces”, 13 April 2007, editorial Springer, page. 474-494.

VELÁZQUEZ GUERRERO Luis Carlos, un sistema experimental para generar mallas No-estructuradas en regiones planas irregulares. Universidad Politécnica de Madrid Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas 12 de junio de 2009.

VERSTEEG H.K. and W. MALALASEKERA. An introduction to computational fluid dynamics the finite volume method, United States 1995.

VIQUEZ, M. “Un Sistema Para La Generación De Mallas Estructuradas Armónicas”, Junio 2008, págs. 3-4.

ANEXOS

**ANEXO A. CÓDIGO PARA ALMACENAMIENTO DE DATOS (MÉTODO
PROUESTO-OPTIMIZADO)**

```

for k=1:p1
  for j=1:n1
    for i=1:m1

      vi=volumenh(i,j,k,a,b);
      L1=indice(i,j,k);
      P=Pr(L1);
      FVF=Bo(P,Pb,Bob,Co);%factor volumétrico Banzer
      viscooil=visco(P,Uob,Pb);
      poro=poro1(L1);
      beta1=beta(i,j,k,poro,FVF,Cr,Co,a,b);
      Ad(L1)=Ad(L1)-beta1;
      Po=datacentroidal(L1,[1 2 3]);
      Ind(L1)=-beta1*P+Ind(L1)+caudal(L1)*deltat;

      if(k>1)
        L2=indice(i,j,k-1);
        flux=areaU(i,j,k,a,b);
        P1=datacentroidal(L2,[1 2 3]);
        kpro=(per(L1)+per(L2))/2;
        Bopro=(Bo(Pr(L2),Pb,Bob,Co)+FVF)/2;
        vispro=(visco(Pr(L2),Uob,Pb)+viscooil)/2;
        ds=norm(P1-Po);
        f1=c1*kpro*flux*deltat/(Bopro*vispro*ds);
        AA(c)=f1;
        Ad(L1)=Ad(L1)-f1;
        Aj(c)=min(L1,L2);
        Ai(c)=max(L1,L2);
        c=c+1;

      Ind(L1)=Ind(L1)+f1*g*density(Pb,Pr(L2),densityb,Co)*datacentroidal(L2,[3])-
      f1*g*density(Pb,Pr(L1),densityb,Co)*datacentroidal(L1,[3]);
        Ad(L2)=Ad(L2)-f1;
        Ind(L2)=Ind(L2)-
      f1*g*density(Pb,Pr(L2),densityb,Co)*datacentroidal(L2,[3])+f1*g*density(Pb,Pr(L1),
      densityb,Co)*datacentroidal(L1,[3]);
      end
      if(j>1)
        L2=indice(i,j-1,k);
        flux=areaE(i,j,k,a,b);

```

```

P1=datacentroidal(L2,[1 2 3]);
kpro=(per(L1)+per(L2))/2;
Bopro=(Bo(Pr(L2),Pb,Bob,Co)+FVF)/2;
vispro=(visco(Pr(L2),Uob,Pb)+viscooil)/2;
ds=norm(P1-Po);
f1=c1*kpro*flux*deltat/(Bopro*vispro*ds);
AA(c)=f1;
Ad(L1)=Ad(L1)-f1;
Aj(c)=min(L1,L2);
Ai(c)=max(L1,L2);
c=c+1;
Ind(L1)=Ind(L1)+f1*g*density(Pb,Pr(L2),densityb,Co)*datacentroidal(L2,[3])-
f1*g*density(Pb,Pr(L1),densityb,Co)*datacentroidal(L1,[3]);
Ad(L2)=Ad(L2)-f1;
Ind(L2)=Ind(L2)-
f1*g*density(Pb,Pr(L2),densityb,Co)*datacentroidal(L2,[3])+f1*g*density(Pb,Pr(L1),
densityb,Co)*datacentroidal(L1,[3]);
end
if(i>1)

L2=indice(i-1,j,k);
flux=areaS(i,j,k,a,b);
P1=datacentroidal(L2,[1 2 3]);
kpro=(per(L1)+per(L2))/2;
Bopro=(Bo(Pr(L2),Pb,Bob,Co)+FVF)/2;
vispro=(visco(Pr(L2),Uob,Pb)+viscooil)/2;
ds=norm(P1-Po);
f1=c1*kpro*flux*deltat/(Bopro*vispro*ds);
AA(c)=f1;
Ad(L1)=Ad(L1)-f1;
Aj(c)=min(L1,L2);
Ai(c)=max(L1,L2);
c=c+1;
Ind(L1)=Ind(L1)+f1*g*density(Pb,Pr(L2),densityb,Co)*datacentroidal(L2,[3])-
f1*g*density(Pb,Pr(L1),densityb,Co)*datacentroidal(L1,[3]);
Ad(L2)=Ad(L2)-f1;
Ind(L2)=Ind(L2)-
f1*g*density(Pb,Pr(L2),densityb,Co)*datacentroidal(L2,[3])+f1*g*density(Pb,Pr(L1),
densityb,Co)*datacentroidal(L1,[3]);
end
end
end
end
end

```

Algoritmo de acople entre método CG en vector que representa a la matriz.

```
function y=acopleGCarreglo(ad,aa,aj,ai,b)
b=transpose(b);
ne=size(aa);
nd=size(ad);
n1=ne(1,2);
n2=nd(1,2);
error=0.001;
tol=error*20;
i=0;
x=transpose(ad);
r(n2,1)=0;
c(n2,1)=0;
aj=transpose(aj);
ai=transpose(ai);
aa=transpose(aa);
ad=transpose(ad);
    c(n2,1)=0;
    j(n2,1)=0;
while (tol>error)
    c(:,1)=0;
    j(:,1)=0;
    for k=1:n1
        j(aj(k,1),1)=j(aj(k,1),1)+aa(k,1)*x(ai(k,1),1);
        j(ai(k,1),1)=j(ai(k,1),1)+aa(k,1)*x(aj(k,1),1);
    end
    for k=1:n2
        j(k,1)=j(k,1)+ad(k,1)*x(k,1);
    end
    r=b-j;
    for k=1:n1
        c(aj(k,1),1)=c(aj(k,1),1)+aa(k,1)*r(ai(k,1),1);
        c(ai(k,1),1)=c(ai(k,1),1)+aa(k,1)*r(aj(k,1),1);
    end
    for k=1:n2
        c(k,1)=c(k,1)+ad(k,1)*r(k,1);
    end
    ro=transpose(r)*r/(transpose(r)*c);
x=x+ro*r;
    tol=norm(r);
    i=i+1;
end
y=x;
```

ANEXO B. CÓDIGO PARA LA GENERACIÓN DE MALLA EN MATLAB

```
a=xycoor(matriz(XY(archivo('submodelo.txt'))),7,7);
b=zcoor(matriz(Z(archivo('submodelo.txt'))),7,7,4);
for s=1:5
    for i=1:7
        for j=1:7
            t1=p1(i,j,s,7,a,b);
            t2=p2(i,j,s,7,a,b);
            t3=p3(i,j,s,7,a,b);
            t4=p4(i,j,s,7,a,b);
            patch([t1(1) t2(1) t4(1) t3(1)],[t1(2) t2(2) t4(2) t3(2)],[t1(3) t2(3) t4(3)
t3(3)],'y');
        end
    end
end
set(gca,'ZDir','reverse');
```

**ANEXO C. ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DEL FACTOR
VOLUMÉTRICO EN FUNCIÓN DE LA PRESIÓN CON RESPECTO AL
TIEMPO.**

```
function y=Bo(P,Pb,Bob,Co)  
y=Bob*exp(Co*(Pb-P));
```

ANEXO D. ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LA VISCOSIDAD EN FUNCIÓN DE LA PRESIÓN CON RESPECTO AL TIEMPO.

```
function y=visco(P,Uob,Pb)
m=2.6*P^(1.187)*exp(-11.513-8.98*10^(-5)*P);
y=Uob*(P/Pb)^m;
```

**ANEXO E. ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LA DENSIDAD EN
FUNCIÓN DE LA PRESIÓN CON RESPECTO AL TIEMPO.**

```
function y=density(Pb,P,densityb,Co)  
y=densityb*exp(Co*(-Pb+P));
```

ANEXO F. ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DEL VECTOR GRADIENTE EN FUNCIÓN DE LA MATRIZ POZOS, DONDE SE ENCUENTRA LA DATA NECESARIA DE LOS POZOS PRODUCTORES.

```
function ps=dir_grad(p,pozos)
a=0.001;
t=size(pozos);
n=t(1);
s=0;
pozos;
p1=p;
for i=1:n
    r=p1-pozos(i,[1 2 3]); %verificar signo
    rm=norm(r);

    Ur=r/rm;
    s=s+pozos(i,4)*exp(-a*rm)*Ur;
end
ps=s;
```

ALGORITMO PARA IDENTIFICAR QUE ELEMENTO ES EN FUNCIÓN DE I,J,K.

```
function y=indice(i,j,k)
p=TAM; % lee el tamaño de la malla ingresada.
M=p(1);N=p(2);P=p(3);
y=i+(j-1)*M+(k-1)*M*N;
```

ALGORITMO DE INICIALIZACIÓN PARA EL CÁLCULO DE LAS PRESIONES EN CADA CELDA.

```
gen_cen;
m=datacentroidal;
Pdatum=1487;% según el modelo
hdatum=3400;
b=0.33925;%optimo para este PVT
b1=size(datacentroidal);
b2=b1(1);
for i=1:b2
    z=m(i,3);
    Pr(i)=Pdatum-b*(hdatum-z);
End
```