

Transferencia radiativa polarizada: Discos de acreción alrededor de objetos compactos.

Jennyfer Camila Acevedo Muñoz

Trabajo de grado para optar por el título de Magister en Física

Director

Fabio Duván Lora Clavijo

PhD en Física

Codirector

Alejandro Cruz Osorio

PhD en Física Teórica

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Maestría en Física

Bucaramanga

2026

Agradecimientos

A mis padres, por su apoyo incondicional a lo largo de este camino.

A mi director, por su orientación y acompañamiento durante el desarrollo de este trabajo.

Tabla de Contenido

Introducción	10
1 Polarización de la luz	18
1.1 Elipse de polarización	18
1.2 Estados degenerados de la elipse de polarización	20
1.3 Parámetros de Stokes	22
1.3.1 Vector de Stokes	25
1.3.2 Significado geométrico y esfera de Poincaré	26
1.4 Matriz de Mueller	28
2 Fundamentos de transferencia radiativa	30
2.1 Intensidad específica	30
2.2 Emisión	32
2.3 Absorción	33
2.4 Ecuación de transferencia radiativa	34
2.4.1 Profundidad óptica	35
3 Formalismo covariante de transferencia radiativa polarizada	37
3.1 Ecuación de Maxwell en el gauge de Lorenz	37
3.2 Formalismo covariante de la óptica geométrica	38
3.2.1 Aproximación WKB	38
3.2.2 Leyes de la óptica geométrica	39
3.3 Tensor de respuesta lineal	40

TRANSFERENCIA RADIATIVA POLARIZADA	4
3.4 Tensor de polarización	41
3.4.1 Relación con la Intensidad Específica	43
4 OSIRIS y trazado inverso de rayos	46
5 Resultados	51
5.1 Test de integración	51
5.2 Disco de Page-Thorne	57
5.3 Disco de Komissarov	63
5.3.1 Modelo del disco	63
5.3.2 Test de integración	65
5.3.3 Disco de Komissarov ópticamente delgado	67
6 Conclusiones	73
Referencias Bibliográficas	76
Apéndices	85

Lista de Figuras

1	<i>Ubicaciones de los radiotelescopios del EHT.</i>	10
2	<i>Estructuras polarizadas observadas por el EHT en los agujeros negros supermasivos M87* y Sgr A*.</i>	13
3	<i>Entorno dinámico alrededor del agujero negro supermasivo M87*.</i>	14
4	<i>Elipse de polarización</i>	19
5	<i>Significado geométrico de los parámetros de Stokes.</i>	27
6	<i>Esfera de Poincaré.</i>	28
7	<i>Construcción geométrica usada para definir la intensidad específica.</i>	30
8	<i>Modelo macroscópico de partículas absorbentes.</i>	33
9	<i>Trayectoria de los fotones en presencia de un agujero negro.</i>	47
10	<i>Lente gravitacional producido por un agujero negro de Kerr.</i>	48
11	<i>Prueba numérica del integrador RKDP.</i>	54
12	<i>Prueba numérica del integrador RKDP.</i>	55
13	<i>Mapa de intensidad y polarización de un disco geoméricamente delgado y ópticamente grueso.</i>	60
14	<i>Mapas de NMSE para intensidad y polarización del disco de Page–Thorne.</i>	62
15	<i>Estructura del disco de Komissarov.</i>	64
16	<i>Mapa de NMSE para la intensidad de un disco de Komissarov ópticamente delgado.</i>	66
17	<i>Mapa de intensidad y polarización para un disco de Komissarov ópticamente delgado, usando coeficientes constantes.</i>	70

Lista de Tablas

1 *Parámetros utilizados para validar el funcionamiento del integrador RKDP.* 52

Lista de Apéndices

- Apéndice A
- Apéndice B

Resumen

Título: Transferencia radiativa polarizada: discos de acreción alrededor de objetos compactos ¹

Autor: Jennyfer Camila Acevedo Muñoz ²

Palabras Clave: polarización, parámetros de Stokes, discos de acreción.

Descripción: El estudio de la transferencia radiativa polarizada alrededor de objetos compactos es fundamental para interpretar observaciones astronómicas de alta resolución y caracterizar la radiación emitida por discos de acreción. El análisis de la polarización permite comprender los fenómenos físicos en los discos, restringir sus parámetros geométricos y físicos, y obtener información clave sobre la estructura de los campos magnéticos en el entorno relativista de los agujeros negros. Predecir esta emisión polarizada requiere resolver numéricamente las ecuaciones acopladas de transferencia radiativa polarizada. Por ello, en este trabajo se desarrolló e implementó dicha ecuación en el código OSIRIS, extendiendo su capacidad para simular mapas de intensidad y parámetros de Stokes en discos de Page–Thorne y discos ópticamente delgados de Komissarov.

Para el disco de Page–Thorne se generaron mapas de intensidad y polarización para distintos valores de espín, evidenciando la asimetría lumínica por efecto Doppler, la sombra del agujero negro y la variación del tamaño aparente del disco. Los parámetros de Stokes muestran patrones de polarización lineal con una curvatura consistente con el frame-dragging. La morfología coincide con la reportada por otros códigos, y la estabilidad numérica se verificó mediante el NMSE, con valores del orden de 10^{-4} entre distintas resoluciones, confirmando la convergencia de las simulaciones.

Para el disco de Komissarov se realizó un test entre la solución numérica y la analítica del parámetro I . La comparación para ángulos de $\theta = 75^\circ$, $\theta = 45^\circ$ y $\theta = 15^\circ$ arrojó valores de NMSE del orden de 10^{-3} o menores, demostrando alta fidelidad reproductiva. Las simulaciones para $a = 0,9$ y $\theta = 15^\circ$ muestran el anillo de fotones y patrones de polarización lineal en Q y U , mientras que V permanece nulo bajo las condiciones adoptadas. Estos resultados validan la implementación y demuestran la capacidad de OSIRIS para estudiar la emisión polarizada en entornos relativistas cercanos a agujeros negros.

¹Trabajo de grado

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física. Director: Dr. Fabio Duván Lora Clavijo. Codirector: Dr. Alejandro Cruz

Abstract

Title: Polarized radiative transfer: Accretion disks around compact objects ¹

Author: Jennyfer Camila Acevedo Muñoz ²

Key words: polarization, stokes parameters, accretion disks.

Description: The study of polarized radiative transfer around compact objects is fundamental for interpreting high-resolution astronomical observations and characterizing radiation emitted by accretion disks. Analyzing the polarization state of radiation allows us to understand the physical phenomena present in these disks, constrain their geometric and physical parameters, and obtain key information about the magnetic field structure in the relativistic environment surrounding black holes. Predicting this polarized emission requires numerically solving the coupled equations of polarized radiative transfer. For this reason, this work develops and implements these equations in the OSIRIS code, extending its capability to simulate intensity maps and Stokes parameters in geometrically thin Page–Thorne disks and optically thin Komissarov disks.

For the Page–Thorne disk, we generated intensity and polarization maps for different spin values, revealing the luminous asymmetry produced by the Doppler effect, the black hole shadow, and the variation in the apparent size of the disk. The Stokes parameters display linear polarization patterns with a curvature consistent with frame-dragging. The overall morphology agrees closely with results reported by other codes, and numerical stability was verified through the NMSE, yielding values on the order of 10^{-4} across different resolutions, confirming the convergence of the simulations.

For the Komissarov disk, we conducted a direct test between the numerical and analytical solutions of the parameter I . The comparison for angles of $\theta = 75^\circ$, $\theta = 45^\circ$, and $\theta = 15^\circ$ yielded NMSE values typically on the order of 10^{-3} or lower, demonstrating that the numerical solution reproduces the analytical one with high fidelity. The simulations for $a = 0,9$ and $\theta = 15^\circ$ reveal the photon ring and linear polarization patterns in Q and U , while V remains zero under the adopted conditions. Together, these results numerically validate the implementation and demonstrate the capability of OSIRIS to study polarized emission in relativistic environments near black holes.

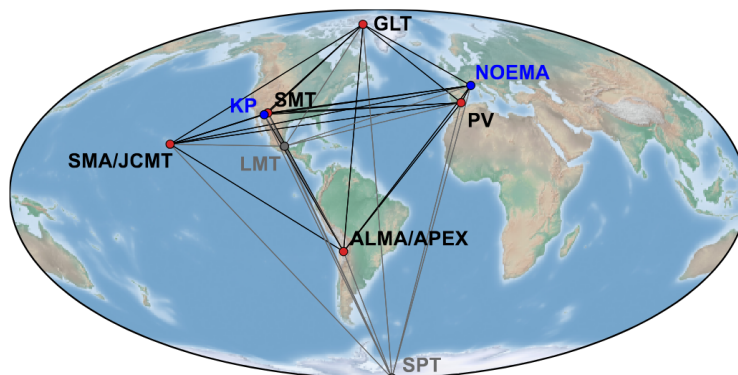
¹Degree work

²Faculty of Sciences, School of Physics. Advisor: Dr. Fabio Duván Lora Clavijo. Co-advisor: Dr. Alejandro Cruz

Introducción

Después de más de 100 años, la teoría de la relatividad general sigue siendo uno de los pilares de la física moderna. Durante décadas, esta teoría ha sido sometida a rigurosas pruebas mediante diversos experimentos y observaciones, demostrando su solidez de manera constante y ampliando la comprensión de muchos fenómenos y sistemas físicos presentes en el universo (Dreyer y col., 2004; Ishak, 2019; Johannsen y col., 2016; Touboul y col., 2017). Una de las predicciones más exitosas de la teoría de la relatividad general es la existencia de agujeros negros. En los últimos años, la existencia de estos objetos ha recibido respaldo de numerosas observaciones. Entre estas se encuentra la detección de ondas gravitacionales, medidas a partir de colaboraciones como LIGO y VIRGO (LIGO-VIRGO collaboration, 2017; McIsaac y col., 2020), las observaciones del Event Horizon Telescope (EHT) en el centro de la galaxia M87 (EHT Collaboration, 2019b), y más recientemente, la observación de Sgr A* (EHT Collaboration, 2022). De esta forma, los agujeros negros se han convertido en objetos astronómicos ampliamente reconocidos y estudiados.

Figura 1. Ubicaciones de los radiotelescopios del EHT.



Nota. Mapa de las ubicaciones de los radiotelescopios del Event Horizon Telescope (EHT), conectados mediante la técnica VLBI para formar un telescopio virtual del tamaño de la Tierra. Imagen tomada de la colaboración EHT.

En el caso de las observaciones realizadas por el EHT, la obtención de imágenes del horizonte de eventos de agujeros negros como M87* y Sgr A* requiere emplear técnicas avanzadas de interferometría de muy larga base (VLBI) (Thompson y col., 2017). Esta técnica fundamental en radioastronomía permite obtener imágenes de alta resolución de objetos celestes combinando señales de múltiples radiotelescopios distribuidos globalmente, generando un telescopio virtual con un tamaño equivalente al diámetro de la Tierra, como se observa en la figura (1). Esta técnica ha permitido observar agujeros negros supermasivos con una resolución angular y sensibilidad suficiente para reconstruir imágenes de la sombra producida por el agujero negro (EHT Collaboration, 2019a, 2019c).

Es importante resaltar que, si bien estos objetos compactos no emiten luz por sí mismos, las imágenes obtenidas por el EHT son posibles debido a la materia que orbita y cae hacia el agujero negro, formando el disco de acreción (M. A. Abramowicz & Fragile, 2013). Debido a la fricción generada entre partículas, este disco disipa energía en forma de radiación electromagnética, generando enormes cantidades de energía que crean efectos observables. Por lo tanto, este proceso de acreción es fundamental para estudiar estos objetos, ya que la radiación constituye una de las principales fuentes de información tanto del propio espacio-tiempo como de la materia que compone el disco (Chakrabarti, 1996). Cabe destacar que la radiación emitida proveniente del disco de acreción es generada a partir de la interacción compleja de partículas cargadas, campos magnéticos e incluso procesos de ionización y recombinación (Pineault, 1982; Ricotti & Ostriker, 2004; Shields, 1978).

La teoría de los discos de acreción constituye un campo de estudio ampliamente investigado, con diversos modelos que intentan describir la compleja estructura espacio-temporal de estos sistemas (Kozłowski y col., 1978; Novikov & Thorne, 1973). En la mayoría de estos modelos, los campos magnéticos juegan un papel fundamental. En particular, los campos internos son considerados responsables de generar inestabilidades, como la conocida inestabilidad magneto-rotacional (MRI) (Balbus & Hawley, 1991; Chandrasekhar, 1960; Velikhov, 1959). Esta inestabilidad induce una viscosidad efectiva en los discos, facilitando el transporte de momento angular necesario para

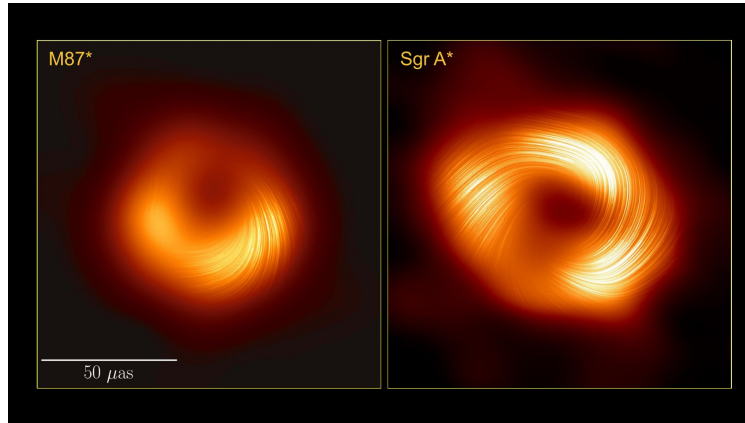
que se produzca el proceso de acreción. Además, los campos magnéticos también han sido implicados en la formación de jets relativistas, estructuras altamente colimadas que pueden transportar energía a escalas cosmológicas (Blandford & Znajek, 1977). Por otro lado, la mayoría de las observaciones de objetos compactos se han llevado a cabo mediante la medición de radiación y espectros de emisión, lo que ejemplifica la importancia de estudiar en detalle los procesos de transferencia radiativa y, en particular, cómo la presencia de campos magnéticos influye en los mecanismos de emisión.

De esta manera, la interacción entre la materia circundante, la intensa fuerza gravitatoria y los campos magnéticos dan lugar a procesos físicos complejos. Uno de estos fenómenos se conoce como emisión de radiación sincrotrón. Esta radiación proviene de las cargas eléctricas que describen un movimiento helicoidal a velocidades comparables con la velocidad de la luz alrededor de una línea de campo magnético (Elder y col., 1947; Ivanenko & Pomeranchuk, 1944; Rybicki & Lightman, 1991). Es en este contexto en el cual, en el año 2017, el EHT reveló las primeras imágenes de la estructura a escala del horizonte de eventos alrededor del agujero negro supermasivo en el núcleo de la galaxia elíptica M87. Las observaciones mostraron una estructura en forma de anillo cuya temperatura, forma y asimetría se interpretan como emisión sincrotrón de electrones girando alrededor de líneas de campo magnético cercanas al horizonte de eventos (EHT Collaboration, 2019c).

Otro aspecto importante en los discos de acreción relativistas es el grado de polarización de la luz, que resulta fundamental para caracterizar la radiación emitida. Este grado de polarización puede verse significativamente afectado por la presencia y orientación de los campos magnéticos. Por ejemplo, el plano de polarización de una onda electromagnética puede rotar al interactuar con un campo magnético, un fenómeno conocido como rotación de Faraday (Agol y col., 1998; Piller, 1972). Se espera, por tanto, que la emisión proveniente de un disco de acreción alrededor de objetos compactos, como estrellas de neutrones y agujeros negros, presente un alto grado de polarización. Analizar en detalle esta polarización resulta esencial, ya que permite imponer restricciones sobre parámetros geométricos y físicos de las fuentes compactas, como su radio, masa o espín (Li y col.,

2009; Silant'ev y col., 2011).

Figura 2. Estructuras polarizadas observadas por el EHT en los agujeros negros supermasivos M87* y Sgr A*.



Nota. Comparación de las estructuras polarizadas observadas por el EHT en los agujeros negros supermasivos M87* (izquierda) y Sgr A* (derecha). Tratando la polarización lineal como un campo vectorial, las líneas curvas en la imagen representan las líneas de corriente de dicho campo y, por lo tanto, trazan los patrones del ángulo de polarización. Imagen tomada de la colaboración EHT.

Recientemente, la colaboración EHT ha logrado avances significativos en el estudio de la polarización emitida por discos de acreción alrededor de agujeros negros supermasivos. En 2021, se presentó por primera vez un análisis polarimétrico detallado de las emisiones cercanas al horizonte de eventos del agujero negro supermasivo en M87, basado en observaciones a una frecuencia de 230 GHz (EHT Collaboration, 2021a). Los resultados revelaron que una fracción significativa del anillo observado presenta una polarización lineal fraccional que alcanza un máximo aproximado del 15%. Este comportamiento es consistente con radiación sincrotrón generada en un plasma altamente magnetizado, y representa un avance crucial para deducir la estructura y la intensidad de los campos magnéticos en las cercanías del horizonte de eventos. Además, se identificaron efectos de rotación de Faraday, los cuales sugieren la existencia de campos magnéticos dinámicamente relevantes en el entorno (EHT Collaboration, 2021b).

En el año 2024, se obtuvo por primera vez un análisis polarimétrico detallado del agujero negro

supermasivo Sgr A*. Las imágenes obtenidas revelaron una emisión altamente polarizada, con una polarización lineal fraccional que alcanza un máximo de aproximadamente el 40% en la región occidental del anillo. También se detectó polarización circular, con una distribución dipolar donde la polarización es negativa en la región occidental del anillo y positiva en la región oriental (EHT Collaboration, 2024a). Además, la orientación de los ángulos de polarización presenta un patrón espiral, lo que indica la presencia de campos magnéticos altamente organizados en el entorno del horizonte de eventos (EHT Collaboration, 2024b). La figura (2) muestra una representación de las observaciones polarimétricas de los agujeros negros supermasivos M87* y Sgr A*. En ambas, las líneas superpuestas sobre el anillo de emisión representan los patrones de polarización de la radiación, lo que proporciona información acerca de la orientación y grado de orden de los campos magnéticos. Estas observaciones resultan fundamentales para comprender los procesos de acreción, emisión y la formación de jets relativistas.

Figura 3. Entorno dinámico alrededor del agujero negro supermasivo M87*.



Nota. Entorno dinámico alrededor del agujero negro supermasivo M87*, caracterizado por patrones de polarización en sus campos magnéticos que evolucionan con el tiempo. El campo magnético de M87* presentó un patrón espiral en una dirección en 2017, se estabilizó en 2018 y revirtió su orientación en 2021. Imagen tomada de la colaboración EHT.

En 2025 se publicó un nuevo estudio del Event Horizon Telescope (EHT) centrado en las propiedades polarimétricas de M87*. En este trabajo se analizó la variabilidad temporal de la emisión y de la polarización en escalas comparables al horizonte de eventos, utilizando observaciones a 230 GHz obtenidas en tres épocas: 2017, 2018 y 2021. Las imágenes reconstruidas muestran de

manera consistente un anillo brillante y asimétrico con un diámetro estable en todas las observaciones, resultado compatible con emisión sincrotrón afectada por la fuerte curvatura gravitacional del agujero negro. Sin embargo, se detectaron variaciones significativas tanto en la intensidad total como en la polarización lineal. En particular, el estudio evidenció un cambio en el patrón de polarización a lo largo de los años: mientras que en 2017 la orientación de la polarización seguía una determinada helicidad, en 2018 esta configuración se mantuvo estable, y en 2021 se observó una inversión en la dirección de la helicidad, posiblemente asociada con cambios en el flujo de acreción magnetizado o con efectos de rotación de Faraday externos (EHT Collaboration, 2025). La figura (3) ilustra de manera cualitativa estos cambios en la morfología de la polarización entre las tres épocas, no obstante, el análisis detallado de la inversión de helicidad proviene del estudio completo del EHT (EHT Collaboration, 2025). En conjunto, estas variaciones sugieren que M87* y su entorno inmediato se encuentran en estado de evolución constante.

Asimismo, gracias a la incorporación de nuevas estaciones a la red del EHT, como el telescopio de Kitt Peak y el interferómetro NOEMA, las observaciones de 2021 permitieron detectar por primera vez emisión extendida fuera del anillo principal, correspondiente a las regiones internas del jet relativista de M87*. Esta detección constituye un avance importante, ya que conecta directamente la estructura del flujo de acreción cerca del horizonte con la base del jet, ofreciendo evidencia observacional de la relación entre el campo magnético del disco y el lanzamiento del jet (EHT Collaboration, 2025).

Para interpretar estas observaciones polarimétricas, el equipo del EHT desarrolló modelos del plasma en acreción alrededor del agujero negro utilizando simulaciones magnetohidrodinámicas relativistas (GRMHD). La predicción de la emisión polarizada requiere resolver ecuaciones acopladas de transferencia radiativa polarizada, un problema computacionalmente complejo que motivó la comparación entre diferentes códigos numéricos para garantizar la consistencia en los resultados (Gold y col., 2020). Entre los códigos más destacados se encuentran [Ipole](#) (Mościbrodzka & Gammie, 2018; Noble y col., 2007), [grtrans](#) (Dexter, 2016; Dexter & Agol, 2009; Rees y col., 1989) y [RAPTOR](#) (Bronzwaer y col., 2018; Bronzwaer y col., 2020), junto con otros como BHOSS

(Younsi y col., 2020; Younsi y col., 2012) y [Odyssey](#) (Pu y col., 2016). Si bien cada código presenta enfoques distintos, se verificó que los parámetros de precisión por defecto de cada código permiten que coincidan con una solución analítica dentro de errores aceptables. La consistencia entre las simulaciones numéricas y las predicciones observacionales brinda robustez a las simulaciones de discos de acreción polarizados.

Como bien se ha mencionado, la presencia de campos magnéticos puede afectar no solo la intensidad total, sino también el grado y el ángulo de polarización, representados mediante los parámetros de Stokes. En esta línea, en trabajos anteriores se ha estudiado el impacto de la polarización magnética en el mapa de intensidades proveniente del disco, utilizando el código OSIRIS (Velásquez-Cadavid y col., 2022). Este código se basa en el formalismo hamiltoniano y resuelve la ecuación geodésica para fotones mediante el trazado inverso de rayos. OSIRIS se ha utilizado para reproducir órbitas tipo-tiempo y nulas alrededor de agujeros negros de Kerr, así como para simular sombras de agujeros negros, lentes gravitacionales e imágenes de discos de acreción delgados (Arrieta-Villamizar y col., 2020). Además, ha permitido simular trayectorias tipo-tiempo alrededor de objetos compactos con parámetros de deformación cuadrupolar arbitrarios, los cuales pueden representar singularidades desnudas. Más recientemente, con este código se realizaron por primera vez simulaciones del mapa de intensidad y de los perfiles de emisión para un toro magnetizado alrededor de un agujero negro de Kerr, considerando propiedades magnéticas del fluido como el diamagnetismo y el paramagnetismo (Velásquez-Cadavid y col., 2023). Asimismo, se ha empleado para estudiar la emisión en singularidades desnudas (Prada-Méndez y col., 2023). En un estudio reciente, este código se adaptó para investigar la acreción de un campo escalar en un agujero negro y analizar las variaciones en la sombra producida por dicho sistema. Para ello fue necesario generalizar OSIRIS a espacio-tiempos no estacionarios, lo que demuestra su capacidad para aplicarse también al análisis de espacio-tiempos dinámicos, ampliando así su rango de aplicación (Acevedo-Muñoz y col., 2025).

En el marco de esta investigación, el objetivo general consiste en abordar el estudio de la transferencia radiativa polarizada en las proximidades de agujeros negros mediante simulaciones

realizadas con el código OSIRIS, desarrollado por nuestro grupo de investigación. Se examinarán diversas configuraciones de disco de acreción, incluyendo el modelo de Page-Thorne y, por primera vez, el disco de Komissarov, con el propósito de generar mapas de intensidad y polarización asociados a estas estructuras. Con el fin de verificar la convergencia del código, se llevarán a cabo diversos test numéricos de la ecuación de transferencia radiativa polarizada, contrastando los resultados con aquellos previamente documentados en la literatura.

La estructura del presente documento es la siguiente: en el capítulo (1) se describe la teoría de polarización de la luz, incluyendo la definición de los parámetros de Stokes; en el capítulo (2) se definen aspectos importantes de la transferencia radiativa polarizada, tales como los mecanismos de emisión y absorción; en el capítulo (3) se desarrolla el formalismo covariante de transferencia radiativa polarizada; en el capítulo (4) se describe el código OSIRIS utilizado para las simulaciones; finalmente, en el capítulo (5) se describen los resultados correspondientes a discos de Page-Thorne y Komissarov. Cabe mencionar que, a lo largo de este documento se emplearon unidades geometrizadas donde $G = c = 1$, siendo G la constante gravitatoria y c la velocidad de la luz en el vacío.

1 Polarización de la luz

La naturaleza vectorial de la luz es una propiedad fundamental que define su comportamiento como onda electromagnética. Cuando la luz interactúa con la materia, tiene lugar un fenómeno conocido como polarización, que altera la orientación de las oscilaciones del campo eléctrico. En este capítulo, se examinan los conceptos esenciales de la polarización, incluyendo la elipse de polarización y los parámetros de Stokes. Este análisis establece una base sólida para comprender cómo la interacción con la materia influye en el comportamiento de la luz.

1.1 Elipse de polarización

La luz es una onda electromagnética, la cual consiste en un campo eléctrico oscilante, \mathbf{E} , acoplado a un campo magnético \mathbf{B} , los cuales son perpendiculares entre sí. La propagación de esta onda está descrita a partir de la ecuación de onda. Para una onda propagándose en la dirección z

$$\nabla^2 E_x(z, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 E_y(z, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y(z, t)}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

siendo v la velocidad de la onda. La solución a estas ecuaciones tienen la forma

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_x), \quad (1.3)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_y). \quad (1.4)$$

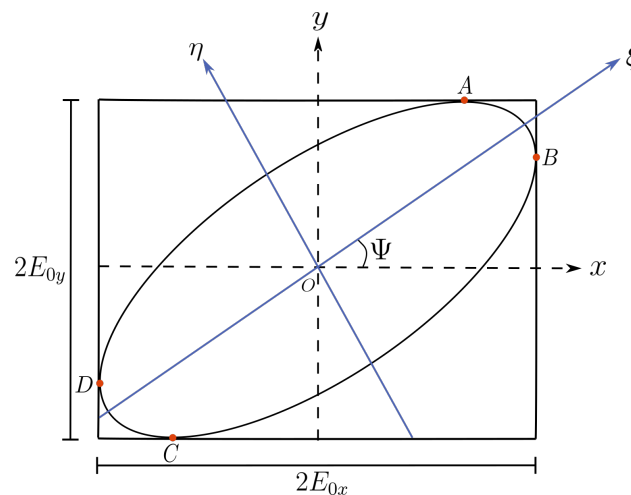
Esta solución se encuentra escrita en términos de la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$, el número de

onda $k = 2\pi/\lambda$ y las fases arbitrarias δ_x, δ_y . A medida que los campos se propagan, el vector resultante describe una curva conocida como elipse de polarización. Esta elipse se obtiene al eliminar el término $\omega t - kz$ de las ecuaciones (1.3) y (1.4). Haciendo todo el procedimiento algebraico (para más detalles ver Apéndice A.1), se obtiene la ecuación de la elipse de polarización

$$\frac{E_x^2(z,t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(z,t)}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} \frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta, \quad (1.5)$$

siendo $\delta = \delta_y - \delta_x$. El punto final del vector campo eléctrico de una onda monocromática describe una elipse fija en el plano transversal; esta situación corresponde a la superposición coherente de componentes con la misma frecuencia, por lo que la onda está totalmente polarizada. Como se observa, el término cruzado en la ecuación (1.5) indica que la elipse se encuentra rotada respecto a los ejes coordenados. Tanto la excentricidad como la orientación de dicha elipse dependen únicamente de la diferencia de fase δ (Goldstein, 2017).

Figura 4. *Elipse de polarización*



En la figura (4) se observa la elipse de polarización rotada un ángulo Ψ , de forma que los ejes de la elipse no corresponden con los ejes xy . Dicha elipse se encuentra contenida en un rectángulo, donde las coordenadas de los puntos tangentes a este rectángulo se pueden obtener a partir de la

solución de la ecuación (1.5)

$$E_y = \frac{E_{0y}E_x \cos \delta}{E_{0x}} \pm \frac{E_{0y} \sin \delta}{E_{0x}} (E_{0x}^2 - E_x^2)^{1/2}, \quad (1.6)$$

así las coordenadas A, C se pueden obtener de $dE_y/dE_x = 0$ y las coordenadas B, D se pueden obtener de la condición $dE_y/dE_x = \infty$

$$\begin{aligned} A &: +E_{0x} \cos \delta, +E_{0y}, \\ B &: +E_{0x}, +E_{0y} \cos \delta, \\ C &: -E_{0x} \cos \delta, -E_{0y}, \\ D &: -E_{0x}, -E_{0y} \cos \delta. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Es posible encontrar una relación entre los parámetros de la elipse y E_{0x}, E_{0y}, δ . Para esto, se relaciona el vector de campo eléctrico en los dos sistemas coordenados, xy y $x'y'$. De esta forma, los ángulos de la elipse se escriben como

$$\tan 2\psi = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos \delta, \quad 0 \leq \psi \leq \pi \quad (1.8)$$

$$\sin 2\chi = \frac{2E_{0x}E_{0y} \sin \delta}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}, \quad -\pi/4 < \chi \leq \pi/4 \quad (1.9)$$

siendo Ψ el ángulo de orientación y χ se conoce como ángulo de elípticidad.

1.2 Estados degenerados de la elipse de polarización

Los estados degenerados de la elipse de polarización representan casos especiales y fundamentales en el estudio de la luz polarizada. Estos estados ocurren cuando la elipse de polarización, que describe la trayectoria del vector de campo eléctrico de la luz en un plano perpendicular a su dirección de propagación, se simplifica a otras formas geométricas. Estos estados degenerados dependen de los valores de amplitud y de fase. A continuación se presentan algunos de estos estados

de polarización.

La polarización lineal ocurre cuando el campo eléctrico oscila en una sola dirección. Cuando el campo oscila en dirección x se dice que la luz se encuentra polarizada horizontalmente, por el contrario, cuando el campo oscila en dirección y se dice que la luz posee polarización vertical. Adicionalmente, cuando las componentes del campo están en fase y sus amplitudes son iguales, se obtiene una polarización lineal a 45° . Por el contrario, cuando están desfasadas en π radianes, y sus amplitudes son opuestas, se obtiene una polarización lineal a -45° . Por otro lado, en la polarización circular el vector del campo eléctrico describe un círculo en un plano perpendicular a la dirección de propagación. Se produce cuando las componentes ortogonales del campo eléctrico tienen igual amplitud y están desfasadas en $\pi/2, 3\pi/2$. Se dice entonces que existen dos tipos de polarización circular dependiendo del sentido de rotación del vector del campo eléctrico visto desde la fuente: hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente. Para más detalles ver el Apéndice A.1.1.

La representación de la elipse de polarización, aunque útil en muchos aspectos, presenta ciertas desventajas y limitaciones. La polarización de la luz, representada por la elipse que traza el vector eléctrico en un plano perpendicular a la dirección de propagación, es un fenómeno extremadamente rápido, del orden de femtosegundos. Debido a esto, no es posible su observación directa. Además, esta representación se limita a luz completamente polarizada. Dado que la luz natural, tales como la emitida por fuentes como el sol o las bombillas es principalmente no polarizada, y su interacción con la materia a menudo altera su estado de polarización, el concepto de elipse de polarización es una idealización útil pero no realista. Por ello, se buscan descripciones alternativas basadas en magnitudes medibles. Es así como George Gabriel Stokes descubrió que el comportamiento de la polarización podía ser representado en términos de cantidades observables. Encontró que cualquier estado de luz polarizada podía ser descrito completamente por cuatro cantidades medibles, conocidas hoy como parámetros de Stokes (Stokes, 1851).

1.3 Parámetros de Stokes

Se ha establecido previamente que la amplitud del campo eléctrico es una magnitud inaccesible para ser medida. No obstante, la intensidad, calculada como el promedio temporal del cuadrado de la amplitud, sí puede ser determinada de manera experimental. Esta relación sugiere que al aplicar un promedio temporal a la elipse de polarización se deben obtener parámetros medibles asociados a dicha elipse. Este procedimiento conduce a los cuatro parámetros de Stokes, como se muestra a continuación.

Partiendo de la ecuación de la elipse de polarización, (1.5), las componentes del campo eléctrico, $E_x(z,t)$ y $E_y(z,t)$, experimentan variaciones relativamente lentas en comparación con el período natural promedio de oscilación. Como resultado, la forma de la elipse de polarización permanece estable durante intervalos de tiempo inferiores al tiempo de coherencia. Aunque es necesario un período de observación igual o superior al periodo natural de oscilación para que el extremo del vector de campo eléctrico complete una elipse, la fluctuación lenta permite denominar a la ecuación (1.5) *elipse de polarización instantánea* (Gil & Ossikovski, 2022).

En el caso de ondas monocromáticas, las cantidades E_{0x} , E_{0y} y δ permanecen constantes en el tiempo, por lo tanto, la forma y el tamaño de la elipse de polarización son fijos. Tomando el promedio sobre el tiempo de observación de la elipse de polarización

$$\frac{\langle E_x^2(z,t) \rangle}{E_{0x}^2} + \frac{\langle E_y^2(z,t) \rangle}{E_{0y}^2} - 2 \frac{\langle E_x(z,t)E_y(z,t) \rangle}{E_{0x}E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta, \quad (1.10)$$

donde

$$\langle E_i(z,t)E_j(z,t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_i(z,t)E_j(z,t)dt. \quad i, j = x, y \quad (1.11)$$

En esta expresión, se ha tenido en cuenta que el tiempo de una sola oscilación es mucho mas pequeño que el tiempo de observación, de forma que este último puede tomarse al infinito. Realizando un procedimiento algebraico y utilizando la definición (1.11) (ver Apéndice A.2) se obtiene

la siguiente expresión

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 - (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)^2 - (2E_{0x}E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2. \quad (1.12)$$

Las cantidades dentro de los paréntesis se definen como

$$I = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \quad (1.13)$$

$$Q = E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \quad (1.14)$$

$$U = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta, \quad (1.15)$$

$$V = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta. \quad (1.16)$$

Estas últimas expresiones son los correspondientes parámetros de Stokes para una onda plana monocromática. Dichos parámetros describen completamente el estado de polarización de la luz. El parámetro I representa la intensidad total de la luz, independientemente de su polarización. El parámetro Q cuantifica la diferencia de intensidad entre la luz polarizada linealmente a 0° y la polarizada linealmente a 90° . El parámetro U describe la diferencia de intensidad entre la luz polarizada linealmente a 45° y la polarizada linealmente a -45° . Finalmente, el parámetro V mide el grado de polarización circular de la luz, diferenciando entre polarización circular derecha e izquierda. Es importante resaltar que estos parámetros son cantidades reales y corresponden a los observables de la elipse de polarización (Collett, 2005).

Note que, de esta forma, la ecuación (1.12) se reescribe en términos de los parámetros de Stokes como

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2. \quad (1.17)$$

Esta última expresión se cumple para luz totalmente polarizada. No obstante, en el caso de luz parcialmente polarizada, las magnitudes E_{0x} , E_{0y} y δ cambian en el tiempo. En este caso, la definición de elipse de polarización puede no ser válida porque la elipticidad y la orientación de la elipse de polarización pueden fluctuar de manera aleatoria. Aún así, las definiciones de los parámetros

de Stokes son válidas para intervalos de tiempo muy cortos, debido a que las amplitudes y fases fluctúan lentamente. Así, para cualquier estado de luz polarizada los parámetros de Stokes siempre satisfacen la relación

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2. \quad (1.18)$$

A partir de los parámetros de Stokes se puede definir el grado de polarización

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{tot}} = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}, \quad (1.19)$$

siendo I_{pol} la intensidad de la suma de las componentes polarizadas e I_{tot} es la intensidad total de la luz. En esta expresión, el grado de polarización, P , puede tomar valores entre 0 y 1. Cuando $P = 1$ corresponde a luz completamente polarizada, $P = 0$ corresponde a luz no polarizada y un valor entre 0 y 1 corresponde a luz parcialmente polarizada (Schaefer y col., 2007).

De forma general, es posible representar luz no polarizada o parcialmente polarizada a partir de los parámetros de Stokes. Por ejemplo, la luz no polarizada puede ser descrita por un vector de campo eléctrico que en cualquier instante de tiempo corresponde a un estado de polarización bien definido, pero que fluctúa aleatoriamente entre diferentes formas de polarización en una escala de tiempo pequeña comparada con la frecuencia de la luz. Por lo tanto, durante un período de tiempo relativamente grande, los estados de polarización se promedian y el haz se considera no polarizado (Sharma, 2006).

Note que, las ecuaciones (1.8), (1.9) se pueden reescribir en términos de los parámetros de Stokes. Dividiendo los parámetros (1.15) sobre (1.14) se obtiene el primer parámetro. De manera similar, dividiendo (1.16) sobre (1.13) se obtiene el ángulo de elipticidad

$$\tan 2\psi = \frac{U}{Q}, \quad (1.20)$$

$$\sin 2\chi = \frac{V}{I}. \quad (1.21)$$

De este modo, el ángulo de polarización y el ángulo de elípticidad quedan completamente determinados en función de cantidades observables.

1.3.1 Vector de Stokes

Los parámetros de Stokes pueden reescribirse como un vector columna, llamado vector de Stokes (Stokes, 1851). Este vector permite describir de manera completa la intensidad y el estado de polarización de un haz de luz. Se define como

$$S = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \\ 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

que corresponde al vector de Stokes para una onda plana monocromática (Born & Wolf, 2013). Teniendo en cuenta esta definición, cada estado de polarización puede representarse a partir de dicho vector, donde los subíndices identifican la orientación de la polarización: lineal horizontal (LHP), lineal vertical (LVP), lineal a $+45^\circ$ (L+45P), lineal a -45° (L-45P), circular derecha (RCP) y circular izquierda (LCP). De este modo, se tiene

$$S_{\text{LHP}} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_{\text{LVP}} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_{\text{L+45P}} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

$$S_{\text{L-45P}} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_{\text{RCP}} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S_{\text{LCP}} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

También es posible escribir los parámetros de Stokes, por ende el vector de Stokes, en términos de los ángulos de la elipse. Los detalles del procedimiento se encuentran en A.2.1. De esta forma

$$Q = I \cos 2\chi \cos 2\psi, \quad (1.25)$$

$$U = I \cos 2\chi \sin 2\psi, \quad (1.26)$$

$$V = I \sin 2\chi, \quad (1.27)$$

y el vector de Stokes se reescribe como

$$S = I \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\chi \cos 2\psi \\ \cos 2\chi \sin 2\psi \\ \sin 2\chi \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

En la siguiente sesión se determina cuál es el significado geométrico de estos parámetros.

1.3.2 Significado geométrico y esfera de Poincaré

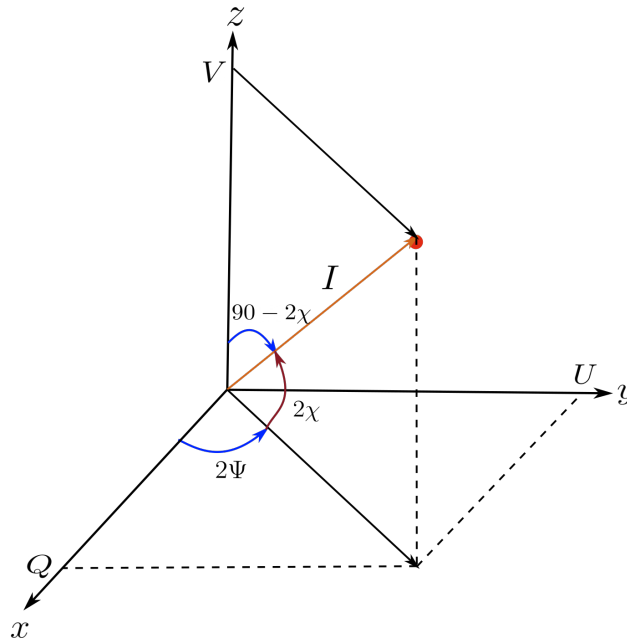
A partir de la sección anterior, y de las ecuaciones (1.25), (1.26) y (1.27) se observa que estos parámetros de Stokes pueden expresarse como las componentes cartesianas de un vector cuya magnitud es la intensidad total, I . Reescribiendo los parámetros de Stokes, se obtiene

$$Q = I \sin(90 - 2\chi) \cos 2\psi, \quad (1.29)$$

$$U = I \sin(90 - 2\chi) \sin 2\psi, \quad (1.30)$$

$$V = I \cos(90 - 2\chi). \quad (1.31)$$

La figura (5) ilustra esta interpretación geométrica. En ella, los parámetros Q , U y V se representan como las tres componentes ortogonales de un vector de intensidad. Dicho vector apunta en una dirección definida por los ángulos 2χ y 2ψ .

Figura 5. Significado geométrico de los parámetros de Stokes.

Nota. Los parámetros Q, U, V se consideran las componentes de la intensidad para luz completamente polarizada.

Note que, las expresiones para Q, U, V tienen la misma estructura que las relaciones entre coordenadas cartesianas y esféricas para un vector de posición

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (1.32)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (1.33)$$

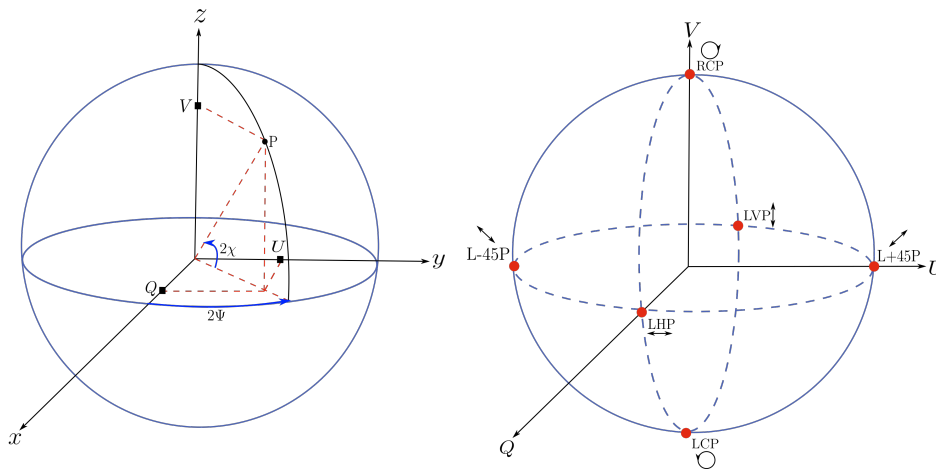
$$z = r \cos \theta. \quad (1.34)$$

Estas ecuaciones son equivalentes si se cumplen las relaciones $\theta = 90 - 2\chi$ y $\phi = 2\Psi$.

Se puede concluir que, expresar el estado de polarización de un haz en términos de χ y Ψ permite describir su elipticidad y orientación en una esfera de radio unitario. Esta esfera fue introducida por primera vez por Henri Poincaré en 1892 y recibe el nombre de esfera de Poincaré (Poincaré, 1889). Cada punto en la superficie de esta esfera corresponde a un estado de polariza-

ción único, definido por los valores de los parámetros de Stokes. La posición de un punto en la esfera proporciona información sobre el tipo de polarización, su orientación y su elipticidad (Born & Wolf, 2013).

Figura 6. Esfera de Poincaré.



Nota. Esfera de Poincaré. Cada punto sobre la esfera representa un estado de polarización.

Como se observa en la figura (6), todos los estados de polarización lineal se encuentran en el ecuador de la esfera. Los polos de la esfera representan los estados de polarización circular. El polo norte corresponde a la polarización circular derecha, mientras que el polo sur representa la polarización circular izquierda. Adicionalmente, cualquier punto que no esté en el ecuador ni en los polos representa un estado de polarización elíptica.

1.4 Matriz de Mueller

Otra de las definiciones importantes en el estudio de la polarización de la luz corresponde a la matriz de Mueller. Es una herramienta matemática fundamental en óptica que permite describir y cuantificar cómo ciertos elementos ópticos pueden afectar el estado de polarización de la luz

(Azzam, 2016). Se define como

$$\begin{bmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

Note que, en esta ecuación, la matriz actúa sobre el vector de Stokes, que representa el estado de polarización de la luz incidente. Al multiplicar el vector de Stokes por la matriz de Mueller correspondiente a un elemento óptico específico, se obtiene el nuevo vector de Stokes a la salida del elemento. De esta manera, la matriz de Mueller brinda toda la información necesaria para caracterizar completamente la interacción de la luz con un sistema óptico (Mueller, 1948). Esta herramienta ha sido de gran utilidad en diversas aplicaciones, desde el diseño de polarizadores y filtros hasta el análisis de la luz dispersada por materiales. Generalmente, cuando un rayo de luz interactúa con la materia, su estado de polarización cambia. Esto puede ocurrir cuando cambian las amplitudes, fases o dirección del campo electromagnético.

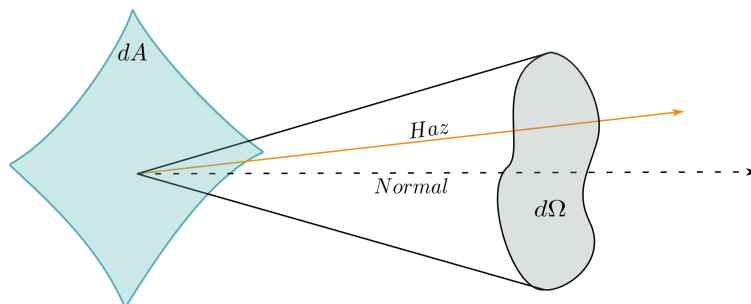
2 Fundamentos de transferencia radiativa

La transferencia radiativa describe cómo la radiación electromagnética se propaga e interactúa con la materia en un medio. En este capítulo se introducen los conceptos fundamentales asociados a este proceso, incluyendo la definición de intensidad específica, los mecanismos de emisión y absorción, así como la ecuación de transferencia radiativa. Estos elementos constituyen la base teórica necesaria para abordar posteriormente el estudio de la transferencia radiativa polarizada en medios astrofísicos.

2.1 Intensidad específica

Para definir la intensidad específica, considere la construcción geométrica ilustrada en la figura (7). En ella se introduce un área diferencial dA perpendicular a la dirección de propagación de un rayo, y se toma en cuenta el conjunto de rayos que atraviesan dicha superficie dentro de un ángulo sólido $d\Omega$

Figura 7. Construcción geométrica usada para definir la intensidad específica.



La energía transportada por estos rayos, por unidad de tiempo y por unidad de frecuencia,

puede expresarse como

$$dE = I_\nu dA dt d\Omega d\nu.$$

A partir de esta relación, la intensidad específica se puede definir a partir de

$$I_\nu = \frac{dE}{dA dt d\Omega d\nu} \quad [\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{ster}^{-1} \text{Hz}^{-1}]. \quad (2.1)$$

La intensidad específica es una magnitud fundamental en transferencia radiativa, pues cuantifica la energía transportada por la radiación por unidad de área, por unidad de tiempo, por unidad de frecuencia y por unidad de ángulo sólido. El calificativo específica indica que esta cantidad depende explícitamente de la frecuencia de la radiación, y además puede variar con la posición y con la dirección de propagación del rayo. En muchos problemas resulta útil considerar la contribución total de la radiación en todas las frecuencias. Esta cantidad, denominada simplemente intensidad, se obtiene al integrar la intensidad específica sobre el dominio espectral (Chandrasekhar, 2013)

$$I = \int I_\nu d\nu, \quad [\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{ster}^{-1}]. \quad (2.2)$$

Una propiedad esencial de la intensidad específica es que en el espacio libre permanece invariante a lo largo de la trayectoria del rayo. Matemáticamente, esta condición se expresa como

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0, \quad (2.3)$$

lo que refleja que, sin procesos que añadan o sustraigan energía, el haz conserva su intensidad específica durante la propagación. Cuando la radiación interactúa con la materia, la situación cambia: el medio puede absorber parte de la energía o emitir radiación adicional en la misma dirección del rayo. Como consecuencia, la intensidad específica ya no se mantiene constante.

2.2 Emisión

El proceso de emisión se describe mediante el coeficiente de emisión específico, j_ν , el cual cuantifica la energía radiada por un volumen de material en una determinada dirección. De manera precisa, j_ν se define como la energía emitida por unidad de volumen, por unidad de tiempo, por unidad de ángulo sólido y por unidad de frecuencia

$$dE = j_\nu dV d\Omega dt d\nu.$$

A partir de esta relación, se obtiene la expresión para el coeficiente de emisión

$$j_\nu = \frac{dE}{dV d\Omega dt d\nu} \quad [\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{ster}^{-1} \text{Hz}^{-1}]. \quad (2.4)$$

Este coeficiente depende, en general, de la dirección en la que ocurre la emisión, lo que refleja la posible anisotropía del medio emisor.

Considerando una distancia recorrida ds , el diferencial de volumen se puede escribir como $dV = dA ds$, de forma que la ecuación anterior se transforma en

$$j_\nu = \frac{dE}{dA ds d\Omega dt d\nu} = \frac{dI_\nu}{ds},$$

donde se ha tenido en cuenta la definición de la intensidad específica (2.1). En consecuencia

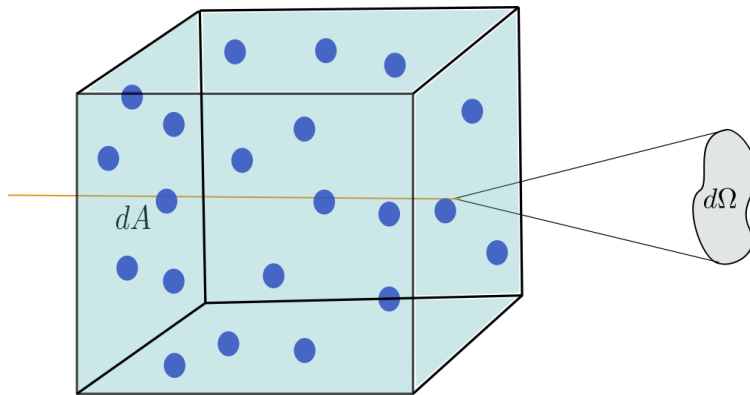
$$j_\nu = \frac{dI_\nu}{ds}. \quad (2.5)$$

Esta última expresión relaciona el coeficiente de emisión con el cambio en la intensidad específica a lo largo del camino óptico. En general, el coeficiente de emisión indica cuánta energía se añade al campo de radiación debido a los procesos emisivos presentes en el material (Rybicki & Lightman, 1991).

2.3 Absorción

Para encontrar la definición del coeficiente de absorción, considere el siguiente modelo macroscópico, en el cual el medio está compuesto por partículas absorbentes que tienen un área absorbente o sección eficaz, σ_v .

Figura 8. Modelo macroscópico de partículas absorbentes.



Considerando una sección transversal dA , con ángulo sólido $d\Omega$, el número total de absorbentes está dada por

$$N = ndAds,$$

siendo n la densidad de partículas. De esta forma, el área absorbente o el área total de estas partículas es

$$A_a = N\sigma_v = n\sigma_v dAds.$$

Ahora, considerando la conservación de la energía, la energía que pierde el haz

$$-dI_v dA dt dv d\Omega,$$

es la misma energía que gana el medio

$$I_v (n\sigma_v dAds) dt dv d\Omega,$$

la cual es proporcional al número de partículas en el volumen y el área de absorción. Igualando estas dos expresiones se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{dI_v}{v} = -\alpha_v I_v, \quad (2.6)$$

siendo $\alpha_v = n\sigma_v$ el coeficiente de absorción. El signo negativo indica que la intensidad específica del haz está disminuyendo a medida que atraviesa el medio.

2.4 Ecuación de transferencia radiativa

Teniendo en cuenta lo anterior, si se considera que en el medio existen ambos procesos, de emisión y absorción, se obtiene la ecuación de transferencia radiativa

$$\frac{dI_v}{ds} = -\alpha_v I_v + j_v. \quad (2.7)$$

Esta ecuación relaciona los dos coeficientes de emisión y absorción. Si estos coeficientes se conocen, es posible encontrar una expresión para la intensidad. En conclusión, la ecuación de transferencia radiativa describe cómo un haz cambia al atravesar un medio debido a los procesos de emisión y absorción. A partir de la ecuación se pueden analizar los siguientes casos:

- En el caso que sólo exista proceso de emisión, entonces el coeficiente de absorción es cero. En este caso la radiación está aumentando su intensidad, y la ecuación de transferencia radiativa (2.7) se reduce a

$$\frac{dI_v}{ds} = j_v. \quad (2.8)$$

La solución a esta ecuación diferencial es

$$I_v(s) = I_v(s_0) + \int_{s_0}^s j_v(s') ds'. \quad (2.9)$$

Esta expresión indica que el cambio en la intensidad es igual al coeficiente de emisión integrado a lo largo del camino óptico.

- Para el caso de sólo absorción, la ecuación de transferencia radiativa se reduce a

$$\frac{dI_V}{ds} = -\alpha_V I_V, \quad (2.10)$$

y su solución se puede encontrar fácilmente a partir de separación de variables

$$I_V(s) = I_V(s_0) \exp \left[- \int_{s_0}^s \alpha_V(s') ds' \right]. \quad (2.11)$$

Esta ecuación indica que la intensidad disminuye como la exponencial del coeficiente de absorción integrado a lo largo del camino óptico.

Antes de considerar el caso general es necesario definir la profundidad óptica.

2.4.1 Profundidad óptica

La profundidad óptica, τ_V , se define en términos de qué tanta radiación se absorbe cuando esta pasa a través de un medio. Una mayor profundidad óptica indica una mayor absorción total a lo largo del trayecto, es decir, la radiación se atenúa más en un medio con mayor profundidad óptica

$$\tau_V = \int_{s_0}^s \alpha_V(s') ds', \quad \longrightarrow d\tau_V = \alpha_V ds. \quad (2.12)$$

A partir de la profundidad óptica se puede definir el tipo de medio. Se dice que un medio es ópticamente delgado o traslúcido cuando $\tau_V < 1$. En este caso, el rayo pasa a través del medio sin perder mucha intensidad. Por el contrario, si $\tau_V > 1$ se dice que el medio es ópticamente grueso u opaco. De esta forma, τ_V es una medida del “obstáculo óptico” que presenta el medio al paso de la radiación.

- Finalmente, considere el caso general, en el cual se tienen los dos procesos: emisión y absorción. En este caso, se debe resolver la ecuación de transferencia radiativa (2.7). Dividiendo toda esta ecuación por el coeficiente de absorción

$$\frac{dI_V}{\alpha_V ds} = -I_V + \frac{j_V}{\alpha_V}, \quad (2.13)$$

$$\frac{dI_V}{d\tau_V} = -I_V + S_V, \quad (2.14)$$

siendo $S_V = j_V/\alpha_V$ la función fuente. Esta función fuente indica qué tanta cantidad de radiación se emite con qué tanta se absorbe. En general, las cantidades S_V y τ_V son más utilizadas en transferencia radiativa que los coeficientes de emisión y absorción. Multiplicando por un factor de integración e^{τ_V} , la solución a la ecuación de transferencia radiativa está dada por

$$I_V(\tau_V) = I_V(0)e^{-\tau_V} + \int_0^{\tau_V} e^{-(\tau_V-\tau'_V)} S_V(\tau'_V) d\tau'_V. \quad (2.15)$$

El primer término de esta ecuación indica la disminución de la intensidad inicial debido al proceso de absorción. Por otro lado, el segundo término describe cómo la radiación emitida por el medio contribuye a la intensidad total, teniendo en cuenta que esa emisión también puede ser absorbida antes de alcanzar el observador (Rybicki & Lightman, 1991).

Si se considera que la función de fuente es constante, la solución anterior se reduce a

$$I_V(\tau_V) = I_V(0)e^{-\tau_V} + S_V(1 - e^{-\tau_V}) \quad (2.16)$$

$$= S_V + e^{-\tau_V}(I_V(0) - S_V). \quad (2.17)$$

Note que en esta expresión si $\tau_V \rightarrow \infty$ entonces $I_V \rightarrow S_V$. Esto indica que en un medio tan opaco toda la radiación inicial es absorbida por el medio. La radiación que se observa proviene exclusivamente de la radiación generada por el medio cercano al observador.

3 Formalismo covariante de transferencia radiativa polarizada

El objetivo de este capítulo es escribir la ecuación de transferencia radiativa de manera general, incluyendo el fenómeno de polarización. Es importante destacar que es necesario escribir dicha ecuación en términos de cantidades independientes de los sistemas coordenados; por esta razón, en este capítulo se presenta la ecuación de transferencia radiativa en su forma tensorial.

3.1 Ecuación de Maxwell en el gauge de Lorenz

Primero, es necesario partir de las ecuaciones de Maxwell en un espacio-tiempo curvo, escritas en su forma covariante

$$\nabla_{\beta} F^{\alpha\beta} = 4\pi J^{\alpha}, \quad (3.1)$$

$$\nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \nabla_{\beta} F_{\gamma\alpha} = 0, \quad (3.2)$$

donde $F_{\alpha\beta}$ es el tensor electromagnético y J^{α} es la cuadri-corriente, con componentes $J^0 = \rho$ (densidad de carga) y (J^1, J^2, J^3) (densidad de corriente).

El tensor electromagnético puede expresarse en términos del vector potencial A^{α}

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} A_{\beta} - \nabla_{\beta} A_{\alpha}. \quad (3.3)$$

Al sustituir la ecuación (3.3) en (3.1) y aplicar el gauge de Lorenz, se obtiene que la ecuación de Maxwell en este gauge implica

$$(\Delta_{dR} A^{\alpha}) = -\nabla^{\beta} \nabla_{\beta} A^{\alpha} + R^{\alpha}_{\beta} A^{\beta} = 4\pi J^{\alpha}. \quad (3.4)$$

El término a la izquierda, $(\Delta_{dR}A^\alpha) = -\nabla^\beta \nabla_\beta A^\alpha + R^\alpha{}_\beta A^\beta$ se conoce como el operador de onda de Rham. Este operador es una generalización del operador d'Alembertiano en espacio-tiempos curvos (De Rham, 1955; Thorne y col., 2000). Los detalles completos de estos cálculos se presentan en el Apéndice B.1.

3.2 Formalismo covariante de la óptica geométrica

3.2.1 Aproximación WKB

La aproximación WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) es una herramienta matemática que permite describir la propagación de ondas en medios donde las variaciones ocurren de forma gradual en comparación con la longitud de onda de la radiación. Esto implica que la onda puede descomponerse en una fase rápida oscilante y una amplitud que varía lentamente, lo que simplifica el análisis de su evolución, especialmente en el espacio-tiempo curvo. La aproximación WKB es válida bajo una condición específica que asegura que las ondas pueden considerarse localmente planas (Keller y col., 1956; Thorne y col., 2000). Esta condición establece que la longitud de onda debe ser mucho menor que las escalas características del problema, tales como:

- La escala de variación del medio, que mide la longitud característica sobre la cual cambian propiedades del sistema, como puede ser la amplitud, la polarización o el frente de onda.
- La escala de curvatura del espacio-tiempo, que caracteriza dicha curvatura a través del tensor de Riemann.

A partir de esta aproximación es posible considerar que la amplitud se mantiene invariante. Es útil introducir un parámetro ε que indica qué tan rápido los términos se aproximan a cero o infinito cuando λ tiende a cero

$$A^\mu = (a^\mu + \varepsilon b^\mu + \varepsilon^2 c^\mu + \dots) \exp\left(i \frac{\theta}{\varepsilon}\right). \quad (3.5)$$

A partir de esta expresión para el vector potencial se obtienen las bases de la óptica geométrica.

3.2.2 Leyes de la óptica geométrica

Para establecer las leyes de la óptica geométrica en el contexto de este proyecto, se utiliza la aproximación WKB para expandir el vector potencial en términos de un parámetro pequeño ε . Al aplicar la aproximación WKB al vector potencial A^μ , se obtiene una expansión que facilita la identificación de diferentes órdenes de ε . Este procedimiento conduce a encontrar las leyes fundamentales de la óptica geométrica.

1. **Primera Ley:** *El vector de onda es nulo y sigue una geodésica nula.* Matemáticamente, esto se expresa como:

$$k^\beta \nabla_\beta k^\alpha = 0. \quad (3.6)$$

Esta ley implica que los rayos de luz se propagan a lo largo de geodésicas nulas en el espacio-tiempo curvo, lo que significa que la radiación electromagnética viaja a la velocidad de la luz y sigue trayectorias determinadas por la geometría del espacio-tiempo. Esta es una generalización de la primera ley de la óptica geométrica.

2. **Segunda Ley:** *El vector de polarización es perpendicular al rayo.* Esta ley se formula como

$$k^\beta \nabla_\beta f^\alpha = 0. \quad (3.7)$$

Aquí, f^α representa el vector de polarización de la onda electromagnética. Esta ley asegura que la polarización de la radiación está siempre perpendicular a la dirección de propagación del rayo.

3. **Tercera Ley:** *Se conserva la densidad de flujo del número de fotones a lo largo del haz.* En ausencia de interacción con el medio, esta ley se reduce a

$$\nabla_\kappa (k^\kappa a^2) = 0. \quad (3.8)$$

Esto significa que el flujo de fotones se conserva a lo largo de la trayectoria de propagación,

asegurando que no haya creación ni destrucción de fotones en el vacío.

Es importante resaltar que las dos últimas leyes descritas se cumplen cuando se considera el vacío. En el caso de interacción con la materia, $k^\beta \nabla_\beta f^\alpha \neq 0$, $\nabla_\kappa (k^\kappa a^2) \neq 0$. Estas leyes son fundamentales para entender la propagación de la radiación polarizada en medios astrofísicos complejos (Gammie & Leung, 2012; Thorne y col., 2000). Los cálculos detallados y las derivaciones completas de estas leyes se presentan en el Apéndice B.2.

3.3 Tensor de respuesta lineal

En el Apéndice B.2 se definió el tensor lineal de respuesta en términos de la cuadri-corriente y el vector potencial

$$J^\alpha = \frac{1}{\epsilon} \Pi^{\alpha\beta} A_\beta. \quad (3.9)$$

Es importante aclarar el significado físico de este tensor. En términos generales, la respuesta de un medio ante una perturbación electromagnética puede expresarse a través de ciertas cantidades físicas específicas. En el caso de la descripción covariante desarrollada en este proyecto, la respuesta del medio se describe a partir de la cuadri-corriente, mientras que la perturbación se describe a partir del vector potencial. Si se considera que las respuestas no lineales son débiles, es posible expandir la respuesta del medio en términos de la perturbación, donde el término lineal está dado por el tensor lineal de respuesta, $\Pi^{\alpha\beta}$. De esta forma, dicho tensor caracteriza de manera completa las propiedades electromagnéticas del medio. En otras palabras, el tensor lineal de respuesta es una herramienta que permite describir cómo una perturbación interactúa con el medio (D. B. Melrose, 2008).

Teniendo en cuenta que cualquier tensor se puede escribir en términos de su parte hermítica y antihermítica, el tensor de respuesta se puede reescribir como

$$\Pi^{\alpha\beta} = \Pi_h^{\alpha\beta} + \Pi_a^{\alpha\beta}, \quad (3.10)$$

donde

$$\Pi_h^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Pi^{\alpha\beta} + \Pi^{*\beta\alpha}), \quad \Pi_a^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Pi^{\alpha\beta} - \Pi^{*\beta\alpha}). \quad (3.11)$$

La parte hermítica, $\Pi_h^{\alpha\beta}$, se relaciona con la conservación de la energía. Mientras que la parte antihermítica, $\Pi_a^{\alpha\beta}$, consiste en los términos que inducen disipación. De esta manera, la ecuación (B.20) se reescribe tal que

$$H^{\alpha\beta\kappa\lambda} = A^{\alpha\beta\kappa\lambda} + R^{\alpha\beta\kappa\lambda}, \quad (3.12)$$

siendo

$$A^{\alpha\beta\kappa\lambda} \equiv 2\pi i \left(g^{\beta\lambda} \Pi_a^{\alpha\kappa} + g^{\alpha\kappa} \Pi_a^{\lambda\beta} \right), \quad (3.13)$$

$$R^{\alpha\beta\kappa\lambda} \equiv 2\pi i \left(g^{\beta\lambda} \Pi_h^{\alpha\kappa} - g^{\alpha\kappa} \Pi_h^{\lambda\beta} \right). \quad (3.14)$$

El tensor lineal de respuesta desempeña un papel central en la descripción de la interacción entre la radiación electromagnética polarizada y un medio como el plasma. El fenómeno de absorción se representa por la parte anti-hermítica del tensor. Esta cantidad describe la pérdida de energía debido a la interacción con el medio (Gammie & Leung, 2012). Por el contrario, el fenómeno de rotación de Faraday se representa por la parte hermítica. Este fenómeno describe cómo el plano de polarización rota en presencia de campos magnéticos. Si se considera el vacío, claramente $H^{\alpha\beta\kappa\lambda} = 0$.

3.4 Tensor de polarización

El tensor de energía-momentum para una onda monocromática se define como

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[(F^\mu{}_\rho)(F^{\nu\rho}) - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}(F_{\rho\sigma})(F^{\rho\sigma}) \right], \quad (3.15)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético. Al promediar esta expresión en el tiempo sobre un periodo y utilizando la aproximación WKB para el potencial vectorial, es posible extender la

definición a una onda polarizada

$$(T^{\mu\nu})^{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi} \langle a^\alpha a^{*\beta} \rangle k^\mu k^\nu, \quad (3.16)$$

siendo a la amplitud y $*$ denota el conjugado. Esta expresión generaliza la descripción de ondas electromagnéticas al incluir el caso de polarización.

Ahora, para un grupo de fotones propagándose a través de un medio, el tensor de energía-momentum puede analizarse estadísticamente. En el espacio de momentum, este tensor se puede escribir en términos de la función de distribución $f(x, p)$

$$T^{\mu\nu}(x) = \int f(x, p) p^\mu p^\nu dV_p, \quad (3.17)$$

donde p^μ es el momento del fotón, dV_p es el elemento diferencial del volumen en el espacio de momento y $f(x, p)$ especifica la cantidad de fotones, N , que se encuentran en el volumen del espacio de fase $dV = d^3x d^3p$ (Huang y col., 2024). En otras palabras, los estados accesibles están definidos por

$$f(x, p) = \frac{dN(x, p)}{d^3x d^3p}. \quad (3.18)$$

De manera similar, esta definición puede generalizarse para ondas monocromáticas polarizadas, considerando ahora una función de distribución de polarización, $f^{\alpha\beta}(x, p)$. Utilizando esta función y la definición del tensor de energía momentum, se obtiene

$$f^{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta V_p} \frac{1}{8\pi} \sum_i \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle.$$

Al analizar cómo varía esta función a lo largo de las geodésicas, se introduce un parámetro afín λ y se emplea el teorema de Liouville. Esto conduce a la ecuación

$$k^\mu \nabla_\mu f^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta\mu\nu} f_{\mu\nu}, \quad (3.19)$$

donde $J^{\alpha\beta}$ describe el término de emisión y $H^{\alpha\beta\mu\nu}$ representa las interacciones con el medio. Para más detalles, ver el Apéndice B.3.

3.4.1 Relación con la Intensidad Específica

Observe que esta última expresión 3.19 tiene una forma muy similar a la ecuación de transferencia radiativa, lo que permite establecer una relación entre el tensor de distribución de polarización y la intensidad específica. Para un conjunto de rayos que pasan a través de una superficie diferencial dA y dentro de un ángulo sólido $d\Omega$, la intensidad específica está definida por

$$I_{\nu} = \frac{dE_{\nu}}{dAdtd\nu d\Omega}, \quad (3.20)$$

siendo $dV = cdAdt$ y el volumen en frecuencia es $dV_{\nu} = \nu^2 d\Omega d\nu$ en coordenadas esféricas.

La energía de los fotones está dada por $E_{\nu} = Npc = Nh\nu$, de modo que $dE_{\nu} = dNh\nu$. Adicional a esto, existe la siguiente relación entre el diferencial de volumen en frecuencia y en momentum

$$dV_{\nu} = \frac{c^3}{h^3} d^3 p. \quad (3.21)$$

Reemplazando estas expresiones en la definición de la intensidad se obtiene

$$I_{\nu} = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} f. \quad (3.22)$$

De esta manera, se establece una relación entre la función de distribución escalar y la intensidad. Es importante destacar que, dado que f es invariante, la cantidad I_{ν}/ν^3 también lo es.

Para generalizar esta relación a ondas polarizadas, se define el tensor de polarización

$$S^{\alpha\beta} = \frac{h^4}{c^2} f^{\alpha\beta}. \quad (3.23)$$

Dado que $S^{\alpha\beta}$ y $f^{\alpha\beta}$ solo difieren por un factor constante, la ecuación de movimiento para el tensor

de polarización en la formulación covariante es

$$k^\mu \nabla_\mu \mathcal{S}^{\alpha\beta} = \mathcal{J}^{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta\mu\nu} \mathcal{S}_{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

La ecuación (3.24) es una formulación covariante de la ecuación de transferencia radiativa polarizada, que describe cómo evoluciona la polarización de la radiación electromagnética a medida que se propaga en un medio, considerando tanto el efecto del espacio-tiempo curvo como las interacciones con el medio. En esta ecuación, el tensor $H^{\alpha\beta\mu\nu}$ contiene la respuesta del medio a la radiación electromagnética polarizada. Este término es esencial para estudiar cómo la polarización observada está influenciada por las condiciones físicas del entorno (Gammie & Leung, 2012; Huang y col., 2024). Todos los detalles del cálculo y la derivación de esta ecuación se encuentran en el Apéndice B.3.

Ahora, es importante aclarar que para las simulaciones que se van a realizar, es necesario escoger un marco de referencia específico en el cual se llevan a cabo las mediciones. En este marco, la ecuación deja de ser covariante, ya que se fija un sistema de coordenadas y una base local para describir la polarización de la radiación. Los vectores base de este sistema coordinado son

$$e_{(0)}^\mu = u^\mu, \quad (3.25)$$

$$e_{(1)}^\mu = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} u_\nu k_\sigma d_\rho}{\omega \sqrt{d^2 + \beta^2 - C^2}}, \quad (3.26)$$

$$e_{(2)}^\mu = \frac{\left(d^\mu + \beta u^\mu - C e_{(3)}^\mu \right)}{\sqrt{d^2 + \beta^2 - C^2}}, \quad (3.27)$$

$$e_{(3)}^\mu = \frac{k^\mu}{\omega} - u^\mu, \quad (3.28)$$

donde

$$d^2 = d_\mu d^\mu, \quad \beta = u_\mu d^\mu, \quad \omega = -k_\mu u^\mu, \quad C = \frac{k_\mu d^\mu}{\omega} - \beta. \quad (3.29)$$

En esta base, u^μ corresponde a la cuadrivelocidad del fluido, k^μ es el vector de onda, ω la frecuencia de la luz y d^μ generalmente puede corresponder naturalmente al campo magnético. Note que, el vector $e_{(0)}^\mu$ es un vector tipo tiempo y $e_{(3)}^\mu$ corresponde a un vector tipo espacio en la dirección de propagación de la luz. Los vectores $e_{(1)}^\mu$ y $e_{(2)}^\mu$ son vectores perpendiculares a la dirección de propagación, es decir, están definidos sobre el plano de polarización (Bronzwaer y col., 2020; Gammie & Leung, 2012).

Teniendo en cuenta que la polarización es un fenómeno transversal, es decir, sólo depende de las componentes del campo electromagnético que son transversales a la dirección de propagación, es posible restringir el estudio al subespacio formado por $e_{(1)}^\mu, e_{(2)}^\mu$, en el plano de polarización. Al proyectar el tensor de polarización en este subespacio se obtiene

$$\hat{S}^{ab} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} + \mathcal{Q} & \mathcal{U} + i\mathcal{V} \\ \mathcal{U} - i\mathcal{V} & \mathcal{I} - \mathcal{Q} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

donde $\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ corresponden a los parámetros de Stokes invariantes. En esta base local, las ecuaciones de evolución para los parámetros de Stokes vienen dadas por

$$\frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} \mathcal{I} \\ \mathcal{Q} \\ \mathcal{U} \\ \mathcal{V} \end{pmatrix} = \frac{1}{v^2} \begin{pmatrix} j_I \\ j_Q \\ j_U \\ j_V \end{pmatrix} - v \begin{pmatrix} \alpha_I & \alpha_Q & \alpha_U & \alpha_V \\ \alpha_Q & \alpha_I & \rho_V & -\rho_U \\ \alpha_U & -\rho_V & \alpha_I & \rho_Q \\ \alpha_V & \rho_U & -\rho_Q & \alpha_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I} \\ \mathcal{Q} \\ \mathcal{U} \\ \mathcal{V} \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

siendo α los coeficientes de absorción asociados con cada parámetro, j los coeficientes de emisión, ρ los coeficientes de rotación de Faraday y v la frecuencia de los fotones registrada por un observador comovil al fluido.

4 OSIRIS y trazado inverso de rayos

En este proyecto, las simulaciones numéricas se realizan utilizando un código propio llamado OSIRIS (Orbits and Shadows In Relativistic Spacetimes). Este código, desarrollado en Fortran, está diseñado específicamente para el trazado de rayos en entornos relativistas y se especializa en simular los efectos de la luz alrededor de objetos compactos, como los agujeros negros. Basado en la formulación hamiltoniana, OSIRIS resuelve las ecuaciones de las geodésicas nulas

$$\frac{dp_\mu}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu}, \quad \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu}, \quad (4.1)$$

donde x^μ representa las coordenadas, p_μ corresponde al cuadrimomento, y λ parametriza la trayectoria del fotón. En este caso en particular, al considerar fotones, el hamiltoniano se expresa como

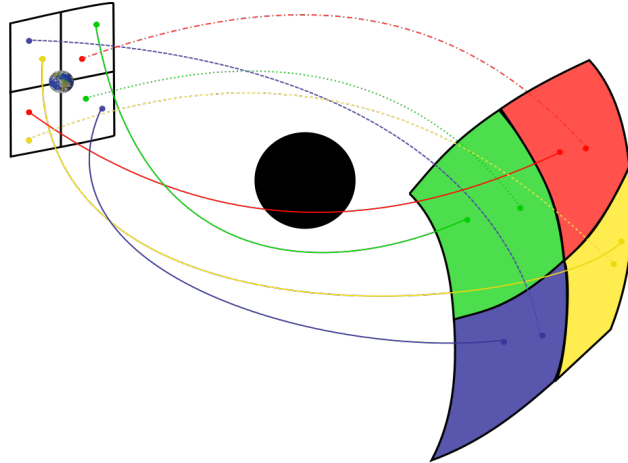
$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0. \quad (4.2)$$

Esta formulación hamiltoniana permite analizar fenómenos como la sombra de un agujero negro y el lente gravitacional, incorporando efectos relativistas como el corrimiento al rojo. Además, OSIRIS emplea un enfoque de trazado inverso de rayos, en el cual el observador se considera el origen de las geodésicas nulas que evolucionan hacia el entorno del agujero negro. Este enfoque permite clasificar las órbitas de los fotones según su trayectoria: aquellos que alcanzan el horizonte de eventos y los fotones que logran escapar de la atracción gravitacional y son detectados.

Para clasificar las órbitas de los fotones, se utiliza una esfera celeste dividida en cuatro cuadrantes, cada uno identificado con un color diferente: rojo, amarillo, azul y verde. Esta esfera es concéntrica con el agujero negro y rodea al observador. Si un fotón cae en el horizonte de eventos, se le asigna el color negro. Por el contrario, si el fotón logra escapar de la atracción gravitacional,

el proceso de integración se detiene, y se le asigna un color correspondiente al cuadrante de la esfera donde impacta. La representación gráfica de la trayectoria de los fotones se observa en la Figura (9). En esta imagen se representa la curvatura en la trayectoria debido a la presencia del agujero negro.

Figura 9. Trayectoria de los fotones en presencia de un agujero negro.



Nota. Representación gráfica de la trayectoria de los fotones en presencia de un agujero negro. Se observa la deflexión de la luz debido a la presencia de éste objeto compacto.

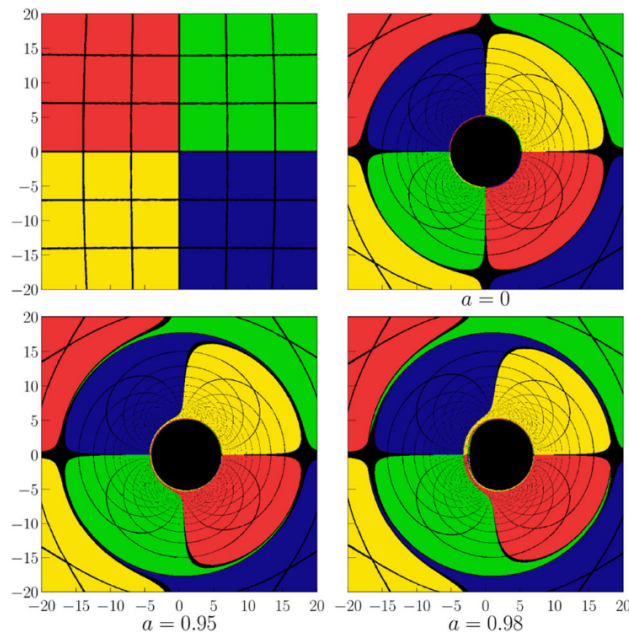
Adicionalmente, es importante mencionar que cada pixel en el plano imagen corresponde a una condición inicial para cada fotón, estas condiciones iniciales se calculan a partir de

$$\begin{aligned}
 p_t &= \frac{1}{A_t} + \frac{xg_{t\phi}}{r_0\sqrt{g_{\phi\phi}}}, \\
 p_r &= \sqrt{g_{rr} \left[1 - (\mathcal{P}^\theta)^2 - (\mathcal{P}^\phi)^2 \right]}, \\
 p_\theta &= \frac{y\sqrt{g_{\theta\theta}}}{r_0}, \\
 p_\phi &= -\frac{x\sqrt{g_{\phi\phi}}}{r_0},
 \end{aligned}$$

donde \mathcal{P}^μ son las componentes del cuadrimomento medidas por el observador, r_0 es la distancia del observador al agujero negro y (x,y) la coordenada sobre el plano imagen.

Teniendo en cuenta estas condiciones iniciales, se asigna a cada pixel un color de acuerdo a la clasificación anterior. Es importante mencionar que para obtener el mapa de intensidad proveniente de la radiación emanada del disco de acreción, se debe añadir una clasificación adicional. Si el fotón proviene de un punto del disco, al pixel correspondiente se le asigna un color particular que representa el valor de la intensidad calculada mediante la ecuación de transferencia radiativa. En otras palabras, al trazar las trayectorias de un conjunto de fotones emitidos desde el disco y detectados por un observador distante, el conjunto de las intensidades calculadas para cada fotón conforma el mapa de intensidad. Adicionalmente, cabe resaltar que la geometría del disco se define numéricamente suponiendo una región de densidad de masa constante. Por lo tanto, si el código determina que la densidad ρ supera un valor adecuado establecido, se interpreta que el fotón se encuentra dentro del disco.

Figura 10. Lente gravitacional producido por un agujero negro de Kerr.



Nota. Lente gravitacional producido por un agujero negro de Kerr para diferentes valores de espín. En esta imagen se observan algunos fenómenos relativistas, tales como el anillo de Einstein y la sombra producida por el objeto compacto. Imagen tomada de (Velásquez-Cadavid y col., 2022).

El código OSIRIS ha sido empleado en diversas investigaciones relacionadas con objetos com-

pactos, abarcando desde la reproducción de órbitas temporales y nulas en torno a agujeros negros de Kerr hasta la simulación de sombras de agujeros negros e imágenes de discos de acreción (Velásquez-Cadavid y col., 2022). A modo de ejemplo, la figura (10) ilustra el efecto de lente gravitacional, es decir, la deflexión de la luz causada por la curvatura del espacio-tiempo producida por un agujero negro de Kerr para distintos valores del espín (Schneider y col., 1999). El panel superior izquierdo muestra el caso del espacio-tiempo de Minkowski, donde se aprecia una ligera curvatura debida a la proyección de la esfera celeste. El panel superior derecho corresponde a la lente gravitacional generada por un agujero negro de Schwarzschild. Los paneles inferiores presentan el efecto de lente gravitacional para agujeros negros de Kerr ¹. Cabe destacar que OSIRIS permite visualizar fenómenos característicos como el anillo de Einstein, que corresponde a una imagen anular formada cuando la fuente, el lente y el observador están alineados (Taylor & Wheeler, 2000). En esta configuración puede observarse una inversión cromática y la aparición de un segundo anillo concéntrico alrededor de la sombra del agujero negro.

Asimismo, ha sido utilizado en el estudio de la sombra generada por un objeto compacto descrito por la q -métrica, la cual constituye la solución estática y axialmente simétrica más simple de las ecuaciones de Einstein que incorpora un momento cuadrupolar distinto de cero (Arrieta-Villamizar y col., 2020). Más recientemente, a partir de este código se han desarrollado, por primera vez, simulaciones del mapa de intensidad y de los perfiles de emisión de un toro magnetizado alrededor de un agujero negro de Kerr, incorporando propiedades magnéticas del fluido como el diamagnetismo y el paramagnetismo (Velásquez-Cadavid y col., 2023). Adicionalmente, se ha empleado para analizar la emisión proveniente de singularidades desnudas (Prada-Méndez y col., 2023). En su aplicación más reciente, OSIRIS se empleó para estudiar la interacción entre agujeros negros y campos escalares ultraligeros. En este trabajo se analizó la evolución dinámica y no lineal de las sombras de agujeros negros, así como los efectos de lente gravitacional asociados a la acreción de

¹La solución de Schwarzschild describe un agujero negro estático con simetría esférica, caracterizado por un momento angular nulo ($J = 0$). Por el contrario, la métrica de Kerr describe un objeto compacto en rotación con simetría axial. Su rotación puede parametrizarse mediante el momento angular J o, de forma adimensional, mediante el parámetro de espín $a = J/M^2$. El rango físico permitido es $|a| \leq 1$, donde el caso $|a| = 1$ corresponde a un agujero negro de Kerr en rotación máxima

un campo escalar real sobre un agujero negro no rotante. Los resultados evidenciaron un aumento significativo en el tamaño del horizonte aparente, del anillo de fotones y del anillo de Einstein, en comparación con los correspondientes a un agujero negro de Schwarzschild. Para llevar a cabo este estudio fue necesario extender las capacidades del código, incorporando el tratamiento de espacios-tiempo dinámicos (Acevedo-Muñoz y col., 2025).

5 Resultados

Finalmente, en este capítulo se presenta el análisis de la polarización producida por diferentes tipos de discos de acreción. Los resultados se obtuvieron a partir del código OSIRIS, el cual permitió la evolución de los parámetros de Stokes.

5.1 Test de integración

Antes de analizar la evolución de los parámetros de Stokes en el contexto de la polarización generada por los discos de acreción, es esencial llevar a cabo pruebas preliminares que garanticen el correcto funcionamiento del integrador. Para ello, se ha implementado el método de Runge-Kutta Dormand-Prince (RKDP) como técnica de integración numérica para estos parámetros (Dormand & Prince, 1980). El RKDP pertenece a la familia de métodos Runge-Kutta de órdenes 4 y 5, lo que le permite alcanzar una alta precisión en la integración numérica. Además, su capacidad para estimar el error en cada paso lo hace muy adecuado para sistemas complejos (Dormand & Prince, 1986). Cabe precisar que, si bien este esquema admite un control adaptativo, para los tests de validación presentados en esta sección se utiliza un paso de integración constante. Esta configuración permite evaluar con rigor la convergencia del método y confirmar que el error disminuye según el orden teórico esperado.

Adicionalmente, para contextualizar la precisión de los resultados numéricos, es necesario caracterizar la aritmética empleada por el código. Las simulaciones se implementaron en Fortran utilizando tipos de datos de doble precisión, lo que define un ϵ de máquina de $\epsilon \approx 2,2 \times 10^{-16}$. Esta especificación garantiza que el límite de redondeo numérico se sitúe varios órdenes de magnitud por debajo de los errores de truncamiento reportados.

El primer problema de prueba tiene como objetivo validar los resultados de la ecuación de transferencia radiativa polarizada considerando coeficientes constantes. Los coeficientes de emisión, absorción y rotación de Faraday utilizados en cada caso se presentan en la tabla (1). Cabe mencionar que, para todos estos casos de prueba, los parámetros de Stokes se inicializan en cero.

Tabla 1. *Parámetros utilizados para validar el funcionamiento del integrador RKDP.*

<i>Prueba</i>	j_I	j_Q	j_U	j_V	α_I	α_Q	α_U	α_V	ρ_Q	ρ_U	ρ_V
<i>Emisión y absorción</i>	2	1	0	0	1	1.2	0	0	0	0	0
<i>Rotación</i>	0	0.1	0.1	0.1	0	0	0	0	10	0	-4

El primer test consiste en considerar solamente coeficientes de emisión y absorción. De esta forma, el sistema de ecuaciones (3.31) se reduce a

$$\frac{dI}{d\lambda} = j_I - (\alpha_I I + \alpha_Q Q), \quad (5.1)$$

$$\frac{dQ}{d\lambda} = j_Q - (\alpha_Q I + \alpha_I Q), \quad (5.2)$$

$$\frac{dU}{d\lambda} = -(\alpha_I U), \quad (5.3)$$

$$\frac{dV}{d\lambda} = -(\alpha_I V). \quad (5.4)$$

Las soluciones analíticas de estas ecuaciones (Dexter, 2016; Mościbrodzka & Gammie, 2018) están dadas por

$$I(\lambda) = \frac{1}{\alpha(\alpha_I - \alpha_Q)} \left\{ (j\alpha_I - j\alpha_Q) \left[\frac{e^{-\alpha\lambda}}{2} (1 + e^{2\alpha a\lambda}) \right] + (j\alpha_Q - j\alpha_I) \frac{e^{-\alpha\lambda}}{2} (1 - e^{2\alpha a\lambda}) \right\}, \quad (5.5)$$

$$Q(\lambda) = \frac{1}{\alpha(\alpha_I - \alpha_Q)} \left\{ (j_Q\alpha_I - j_I\alpha_Q) \left[1 - \frac{e^{-\alpha\lambda}}{2} (1 + e^{2\alpha_Q\lambda}) \right] \right\} \quad (5.6)$$

$$\left. + (j_Q \alpha_Q - j_I \alpha_I) \frac{e^{-\alpha \lambda}}{2} (1 - e^{2\alpha_Q \lambda}) \right\},$$

$$U(\lambda) = U(0)e^{-\alpha_I \lambda}, \quad (5.7)$$

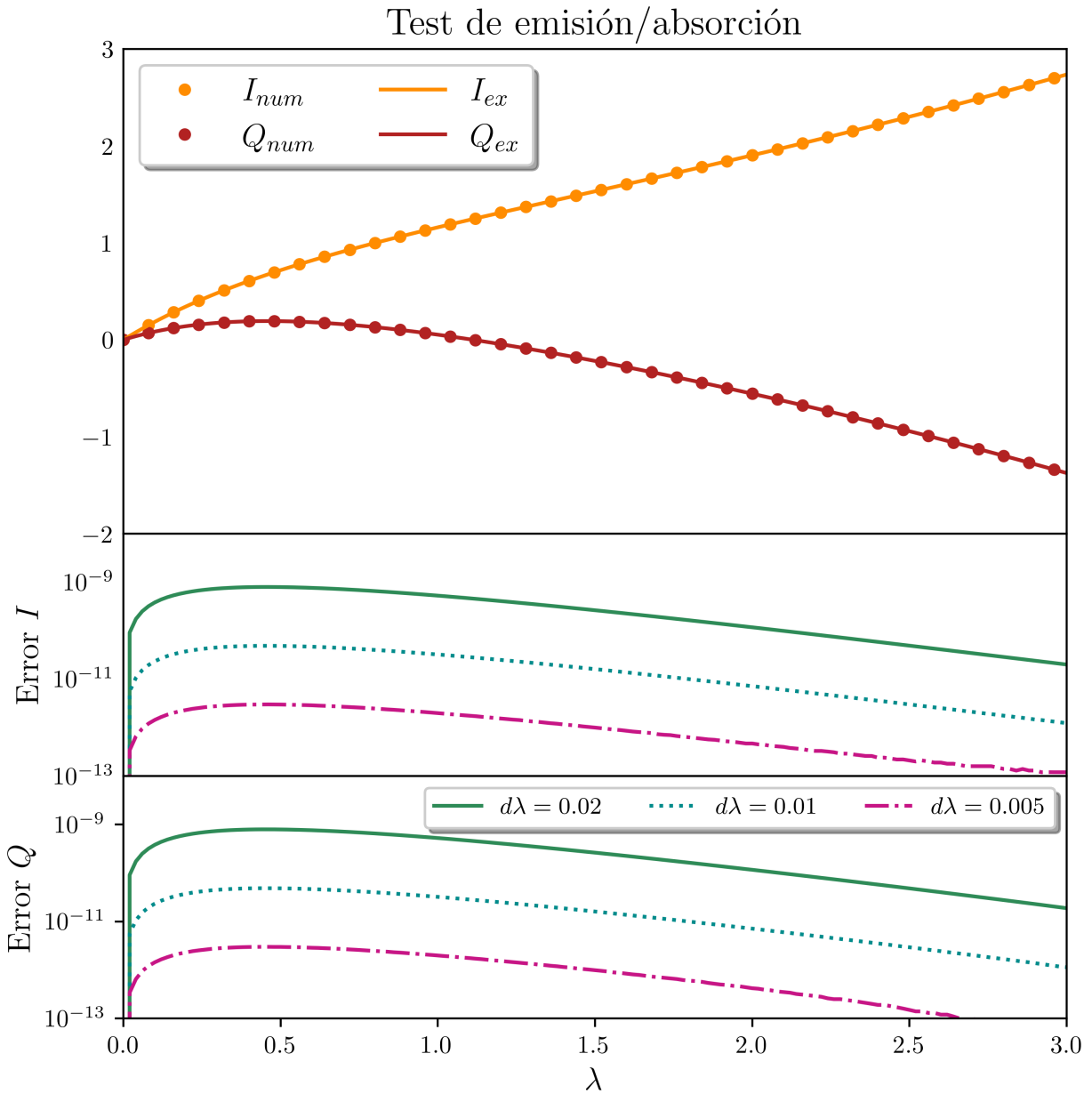
$$V(\lambda) = V(0)e^{-\alpha_I \lambda}, \quad (5.8)$$

siendo $\alpha = \alpha_I + \alpha_Q$.

Los resultados del primer test se muestran en la figura (11). En la primera subgráfica se comparan las soluciones numérica y analítica para los dos primeros parámetros de Stokes, I y Q , dado que, por las condiciones iniciales, los parámetros U y V son nulos. Como puede observarse, la solución numérica se superpone a la analítica. Las subgráficas inferiores presentan el error absoluto para cada parámetro, calculado como la diferencia entre las soluciones numérica y exacta. Se observa que, para el paso de integración más grande, $d\lambda = 0,02$, el error máximo es del orden de 10^{-9} , mientras que para $d\lambda = 0,01$ disminuye a valores del orden de 10^{-11} , y alcanza 10^{-13} cuando se emplea $d\lambda = 0,005$. Esta reducción sistemática del error al refinar el paso de integración es consistente con el comportamiento esperado del método RKDP, cuya convergencia es de cuarto orden: al reducir $d\lambda$ a la mitad, el error disminuye aproximadamente un factor de 2^4 . La figura ilustra este comportamiento de manera clara, mostrando cómo la precisión mejora de forma significativa al utilizar pasos de integración más pequeños.

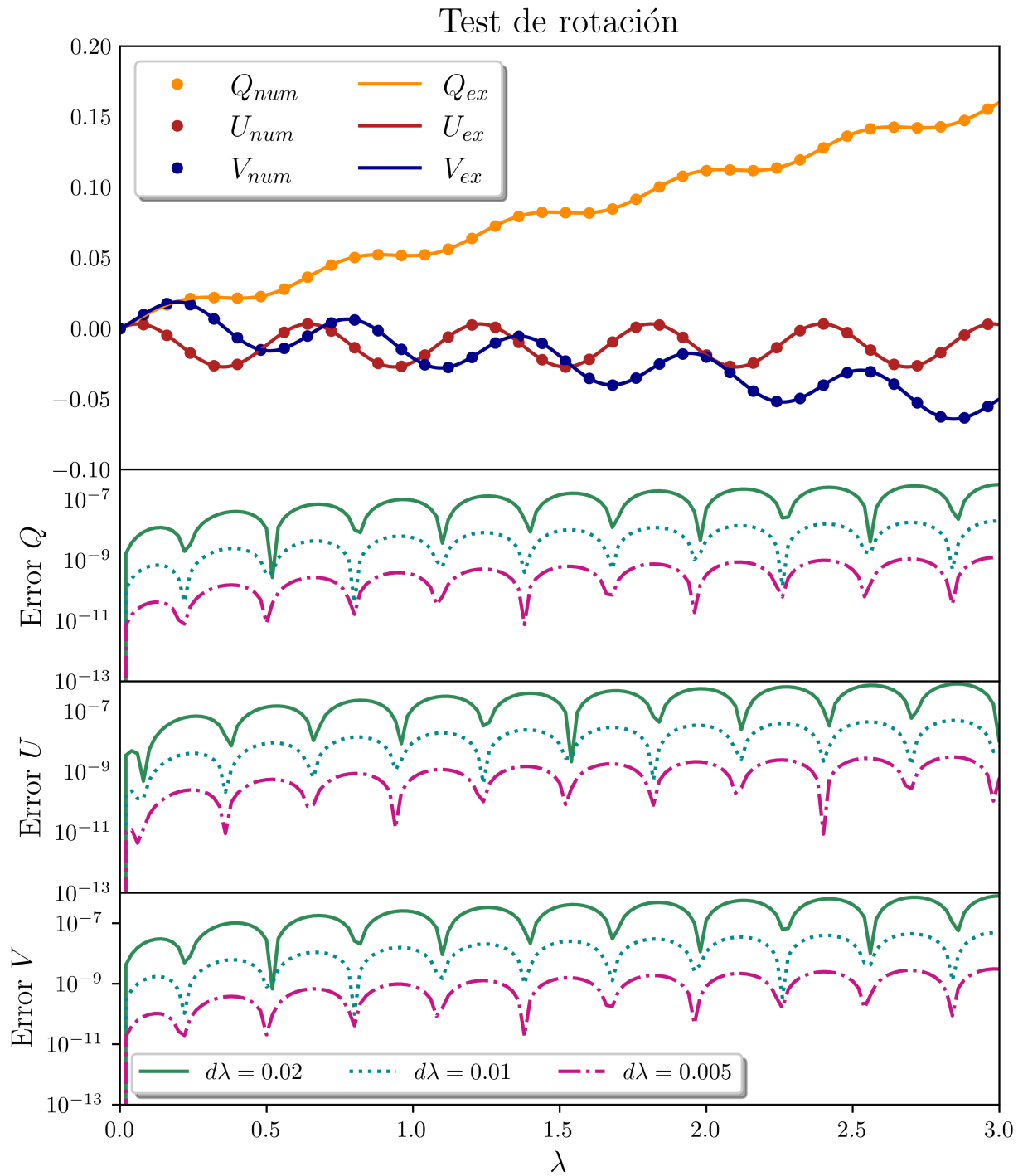
El segundo test consiste en considerar solamente coeficientes de rotación de Faraday, sin tener en cuenta el proceso de absorción. Bajo estas condiciones, el sistema de ecuaciones (3.31) se

Figura 11. Prueba numérica del integrador RKDP.



Nota. Prueba numérica del integrador RKDP utilizando coeficientes de emisión y absorción.

Figura 12. Prueba numérica del integrador RKDP.



Nota. Prueba numérica del integrador RKDP utilizando coeficientes de rotación de Faraday.

reduce a

$$\frac{dI}{d\lambda} = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{dQ}{d\lambda} = j_Q - \rho_V U, \quad (5.10)$$

$$\frac{dU}{d\lambda} = j_U + \rho_V Q - \rho_Q V, \quad (5.11)$$

$$\frac{dV}{d\lambda} = j_V + \rho_Q U. \quad (5.12)$$

Las soluciones analíticas de estas ecuaciones están dadas por

$$Q(\lambda) = \frac{\rho_Q}{\rho^2} (j_Q \rho_Q + j_V \rho_V) \lambda - \frac{\rho_V}{\rho^3} (j_V \rho_Q - j_Q \rho_V) \sin \rho \lambda - \frac{j_U \rho_V}{\rho^2} (1 - \cos \rho \lambda), \quad (5.13)$$

$$U(\lambda) = \frac{j_Q \rho_V - j_V \rho_Q}{\rho^2} (1 - \cos \rho \lambda) + \frac{j_U}{\rho} \sin \rho \lambda, \quad (5.14)$$

$$V(\lambda) = \frac{\rho_V}{\rho^2} (j_Q \rho_Q + j_V \rho_V) \lambda - \frac{\rho_Q}{\rho^3} (j_Q \rho_V - j_V \rho_Q) \sin \rho \lambda + \frac{j_U \rho_Q}{\rho^2} (1 - \cos \rho \lambda), \quad (5.15)$$

donde $\rho = \sqrt{\rho_Q^2 + \rho_V^2}$. Para más detalles acerca de las soluciones analíticas de cada test, ver apéndice C de (Dexter, 2016).

Los resultados del segundo test se presentan en la figura (12). En la primera subgráfica se compara la solución numérica con la solución analítica para los parámetros de Stokes Q , U y V . Al igual que en el test anterior, ambas soluciones muestran una coincidencia casi exacta en todo el dominio. Las subgráficas inferiores muestran el error absoluto para cada parámetro, calculado como la diferencia entre las soluciones numérica y analítica. Se observa que, para el paso de integración

más grande, $d\lambda = 0,02$, el error se encuentra en torno a 10^{-8} , mientras que al refinar el paso a $d\lambda = 0,01$ el error se reduce a valores del orden de 10^{-10} , alcanzando 10^{-12} cuando se emplea $d\lambda = 0,005$. Este comportamiento confirma nuevamente la convergencia de cuarto orden del integrador RKDP. Adicionalmente, el patrón periódico en las curvas refleja la naturaleza oscilatoria de la solución, la cual se presenta al incluir coeficientes de rotación de Faraday.

Es importante resaltar que estos test numéricos han sido utilizados de forma estándar en la literatura de transferencia radiativa polarizada para validar tanto implementaciones analíticas como distintos esquemas de integración (Bronzwaer y col., 2020; Dexter, 2016; Mościbrodzka & Gammie, 2018; Prather y col., 2023). En dichos trabajos se reportan errores típicos del orden de 10^{-5} y 10^{-6} para los parámetros de Stokes en los test de emisión/absorción y rotación. La implementación presentada en este trabajo no solo reproduce dichos órdenes de magnitud, sino que alcanza precisiones del orden de 10^{-13} , lo que sugiere una mejor eficiencia numérica del esquema adoptado. Esta concordancia cuantitativa con códigos independientes demuestra que el método numérico aquí empleado reproduce con precisión la evolución analítica de los parámetros de Stokes y presenta el mismo comportamiento de convergencia observado en la literatura. La consistencia entre nuestros resultados y los reportados previamente valida la correcta formulación de las ecuaciones implementadas, la robustez del integrador adoptado y su aplicabilidad en problemas de transferencia radiativa polarizada.

5.2 Disco de Page-Thorne

El disco de acreción de Page-Thorne (Page & Thorne, 1974) es un modelo relativista que describe el comportamiento de la materia alrededor de un agujero negro de Kerr. El modelo considera que el agujero negro posee una geometría del espacio-tiempo que es estacionaria, axialmente simétrica y asintóticamente plana. Para su descripción, el modelo se fundamenta en varias suposiciones clave:

- El disco se considera ópticamente grueso y geoméricamente delgado, lo que significa que su espesor es significativamente menor que su radio.
- El plano central del disco está situado en el plano ecuatorial del agujero negro.
- El modelo asume que la materia en el disco sigue trayectorias geodésicas circulares en el plano ecuatorial.
- El transporte radial de calor dentro del disco se considera despreciable, y el único flujo de calor significativo se produce en la dirección vertical.
- Se establece que la energía emitida desde el disco es transportada exclusivamente por fotones.

A partir de las leyes de conservación de masa, momento angular y energía, se derivan tres ecuaciones fundamentales que describen la estructura radial del disco de acreción

$$\dot{M}_0 = -2\pi e^{\nu+\psi+\mu} \Sigma u^r, \quad (5.16)$$

$$F(r) = (\dot{M}_0/4\pi) e^{-(\nu+\psi+\mu)} f, \quad (5.17)$$

$$W_\phi^r = (\dot{M}_0/2\pi) e^{-(\nu+\psi+\mu)} [(E^\dagger - \Omega L^\dagger)/(-\Omega_r)] f. \quad (5.18)$$

La primera ecuación, (5.16), establece la tasa de acreción de masa en el disco, donde Σ representa la densidad superficial del disco, u^r denota la velocidad radial y ν, ψ, μ son factores métricos asociados a la geometría del espacio-tiempo. La segunda ecuación, (5.17), describe el flujo de energía radiante promediado en el tiempo. Este flujo es medido por un observador situado en la superficie del disco. En esta ecuación, f es una función que depende de las propiedades orbitales del disco. Finalmente, (5.18), define el torque promedio por unidad de circunferencia que actúa en el disco debido a las tensiones internas. Este torque depende de la energía específica E^\dagger , el momento angular específico L^\dagger y la velocidad angular del material en el disco Ω . Es importante mencionar que estas ecuaciones se encuentran expresadas en su forma general, y adoptan una

forma explícita al aplicarse a la métrica de Kerr. Para más detalles, véase (Bardeen y col., 1972; Page & Thorne, 1974).

En el primer análisis se estudia un disco de acreción geoméricamente delgado y ópticamente grueso, con el objetivo de calcular la intensidad y los parámetros de Stokes de la radiación emitida. Dado que el disco es ópticamente grueso, se asume que los fotones provienen únicamente de la superficie. Esto último implica que los parámetros de Stokes no dependen del camino óptico, en consecuencia, no se requiere resolver la ecuación de transferencia radiativa. Para calcular el flujo radiativo se utiliza el modelo de Page-Thorne, y la intensidad se obtiene a partir de una temperatura efectiva asumiendo una distribución espectral de cuerpo negro, como se muestra en las siguientes ecuaciones

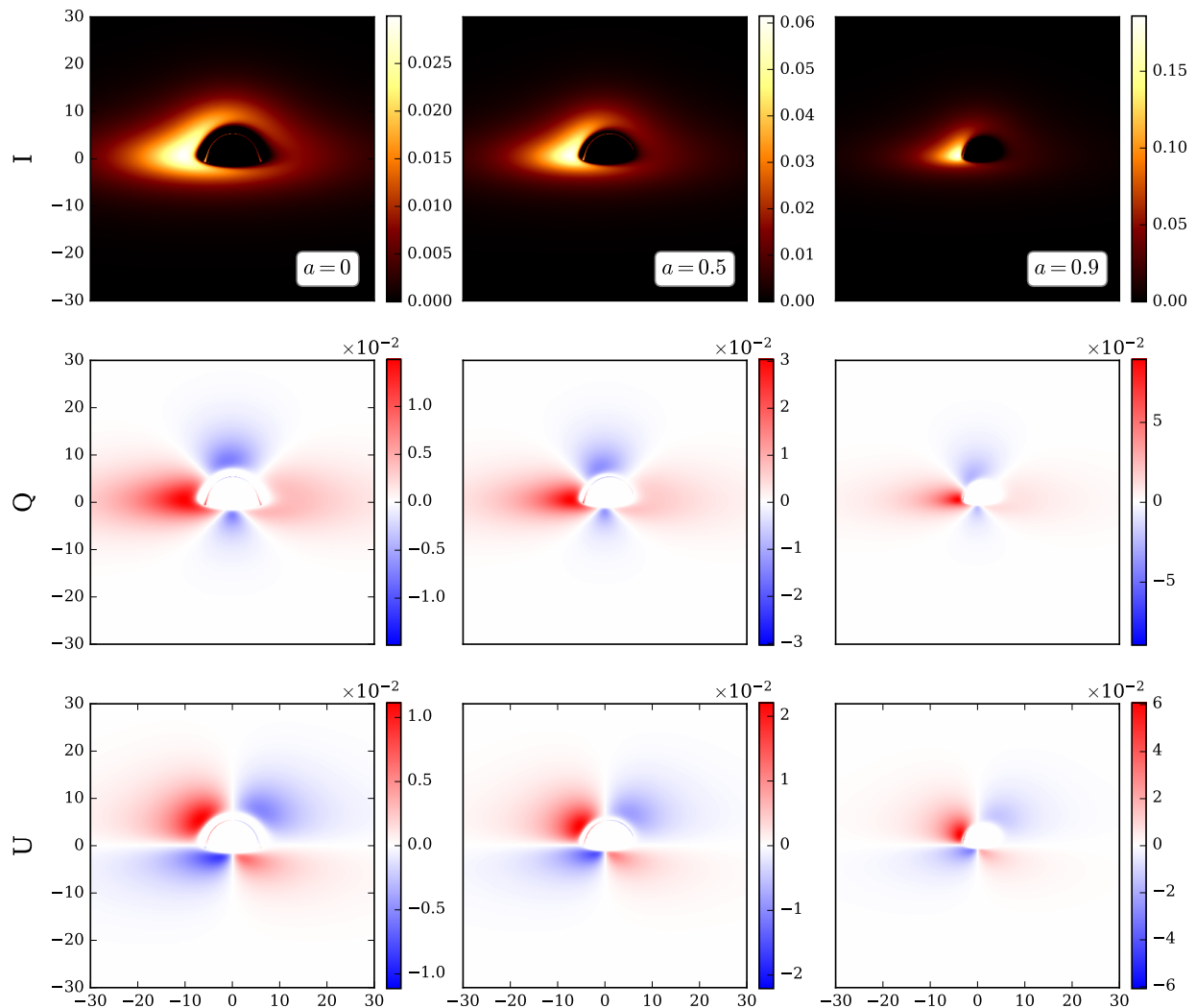
$$T_{eff} \equiv \left(\frac{F}{\sigma} \right)^{1/4}, \quad (5.19)$$

$$I_{\nu} = \frac{1}{n^4} B_{\nu}(n \cdot T_{eff}), \quad (5.20)$$

siendo F la potencia total emitida, n un factor de corrección espectral y $B_{\nu}(T)$ la distribución espectral de Planck para un cuerpo negro.

El mapa de intensidad y polarización para este disco, bajo las condiciones descritas, se presenta en la figura (13). Esta simulación, realizada para un ángulo de observación de $\theta = 75^{\circ}$, considera un disco delimitado interiormente por la órbita circular estable más interna (ISCO) y exteriormente por un radio arbitrario, $r_{out} = 100$, ubicado en el plano ecuatorial. El mapa de intensidad y polarización se generó para diferentes valores de espín. En los tres casos se evidencian con claridad los efectos relativistas sobre la intensidad. Se destaca una marcada asimetría lumínica entre los lados izquierdo y derecho del disco, causada por el efecto beaming relativista: el material que se aproxima al observador aparece significativamente más brillante. También se observa una región central oscura correspondiente a la sombra del agujero negro, delimitada por la última órbita estable. Es importante resaltar, además, la diferencia en el tamaño aparente del disco. Esta variación se debe a que la posición del borde interno del disco de acreción, definida por la ISCO, depende directamente del valor del espín. Para agujeros negros no rotantes, la ISCO se encuentra a mayor

Figura 13. Mapa de intensidad y polarización de un disco geoméricamente delgado y ópticamente grueso.



Nota. Mapas de intensidad y polarización de un disco geoméricamente delgado y ópticamente grueso, calculados con el modelo de Page–Thorne. La primera fila muestra la intensidad total, mientras que la segunda y tercera filas corresponden a los parámetros de Stokes Q y U , respectivamente. El ángulo de observación es $\theta = 75^\circ$.

distancia del horizonte de eventos, mientras que para agujeros negros con espín alto, esta órbita se aproxima significativamente al horizonte, reduciendo el tamaño aparente del disco. Respecto a la polarización, en estas simulaciones se asumió polarización lineal. La segunda y tercera fila de la figura muestran los mapas de los parámetros de Stokes Q, U para cada valor del espín. En ambos mapas se distinguen claramente regiones con valores positivos y negativos, que representan cambios en el estado de polarización lineal. Además, note que, a medida que aumenta el espín del agujero negro se aprecia una curvatura progresiva de los patrones de color, evidenciando un fenómeno de frame dragging.

También es importante destacar que, en las simulaciones del disco de Page–Thorne realizadas con OSIRIS, la morfología global del disco, incluyendo la estructura de intensidad y la posición del máximo de emisión, muestra una excelente consistencia con los resultados obtenidos por otros códigos de transferencia radiativa polarizada (Prather y col., 2023). Cabe aclarar que, las escalas absolutas de los parámetros de Stokes pueden presentar diferencias respecto a dichas implementaciones. Estas variaciones se explican porque cada código adopta un sistema de unidades propio, en este caso, OSIRIS opera exclusivamente en unidades geometrizadas.

Por otro lado, para evaluar la estabilidad numérica y la convergencia de los resultados al variar la resolución de la simulación, se emplea el error cuadrático medio normalizado (Normalized Mean Squared Error, NMSE). Este indicador compara dos mapas píxel por píxel y se define como

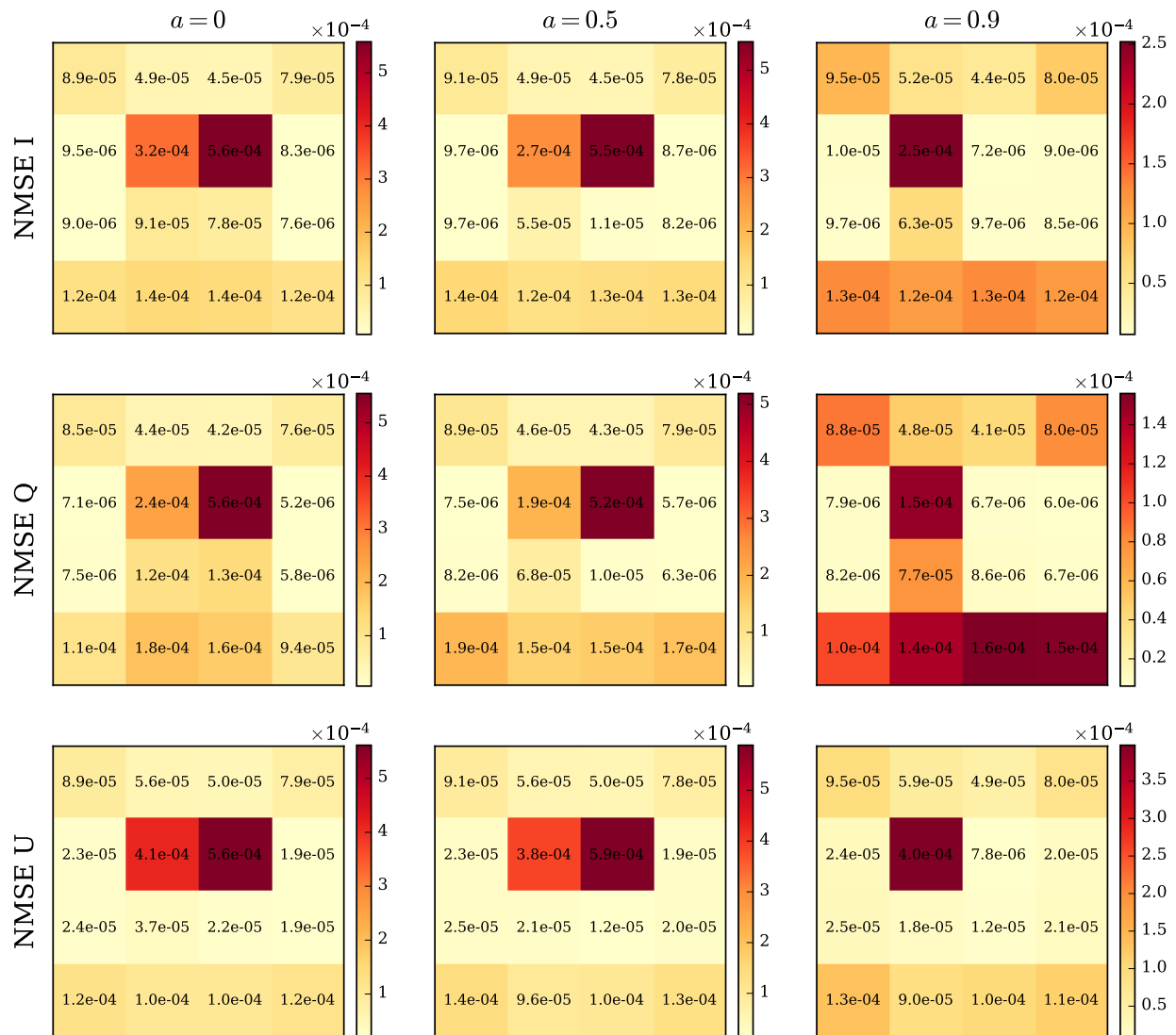
$$\text{NMSE}(A, B) = \frac{\sum_{i,j} |A(i, j) - B(i, j)|^2}{\sum_{i,j} |A(i, j)|^2}, \quad (5.21)$$

donde $A(i, j)$ y $B(i, j)$ corresponden a los valores de los parámetros de Stokes en el píxel (i, j) de cada imagen, respectivamente.

Para su cálculo se generan dos conjuntos de mapas de intensidad y polarización: uno con resolución de 1024×1024 píxeles y otro con resolución de 512×512 píxeles. El mapa de mayor resolución se reescala de modo que ambos tengan el mismo tamaño y permitan la comparación directa píxel a píxel. Con el fin de obtener una medida local de las discrepancias, la imagen se

subdivide en 16 bloques de 128×128 píxeles, sobre los cuales se evalúa el NMSE de forma independiente. Este procedimiento permite identificar regiones donde la diferencia entre resoluciones es más pronunciada.

Figura 14. Mapas de NMSE para intensidad y polarización del disco de Page–Thorne.



Nota. Mapas del error cuadrático medio normalizado (NMSE) calculados para los parámetros de Stokes I , Q y U del disco de Page–Thorne, comparando simulaciones con resoluciones de 1024×1024 y 512×512 píxeles. Cada panel muestra la distribución espacial del NMSE en 16 subregiones para tres valores diferentes del espín

El calculo del error cuadrático medio normalizado para los mapas de intensidad y polarización del disco de Page-Thorne se encuentran en la figura (14). Los valores de NMSE cercanos a cero indican una alta similitud entre los mapas, lo que respalda la convergencia de las simulaciones frente a cambios de resolución. Como se observa en la imagen, el valor de error mas grande que se obtiene para todas las simulaciones es del orden de 10^{-4} , lo cual evidencia que las diferencias introducidas por el cambio de resolución son prácticamente despreciables. Este resultado confirma que las principales estructuras de intensidad y polarización del disco (incluyendo las variaciones debidas a los efectos relativistas en las proximidades del agujero negro) se reproducen de manera consistente.

5.3 Disco de Komissarov

5.3.1 Modelo del disco

El disco de Komissarov es una solución analítica de discos de acreción geoméricamente gruesos alrededor de agujeros negros de Kerr (Komissarov, 2006; Pimentel y col., 2018). Estos discos generalizan los modelos clásicos de discos hidrodinámicos de Abramowicz (M. Abramowicz y col., 1978) al incluir un campo magnético toroidal. Para este trabajo, se asume que el espacio-tiempo es estacionario y axialmente simétrico, de forma que $\partial_t g_{\mu\nu} = \partial_\phi g_{\mu\nu} = 0$, siendo (t, ϕ, r, θ) las coordenadas. Asimismo, se considera un campo magnético azimutal, por lo tanto $b^r = b^\theta = 0$.

La estructura del disco está determinada a partir de la conservación del tensor de energía-momentum, de la cual se obtiene la condición de equilibrio en el disco

$$\partial_\nu (\ln |u_t|) - \frac{\Omega}{1 - l\Omega} \partial_\nu l + \frac{\partial_\nu p}{w} + \frac{\partial_\nu (\mathcal{L} p_m)}{\mathcal{L} w} = 0, \quad (5.22)$$

donde la presión magnética se define como $p_m = b^2/2$ y $\mathcal{L} = g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$, además, la velocidad

angular, Ω , y el momento angular específico, l , están dados por

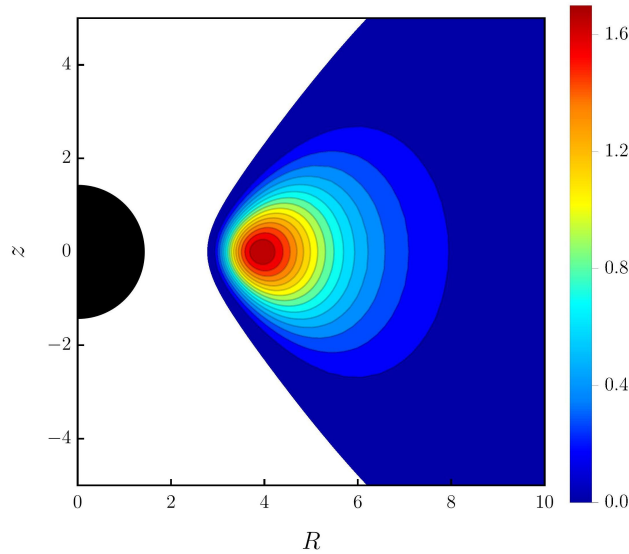
$$\Omega = \frac{u^\phi}{u^t} = -\frac{g_{\phi t} + l_{tt}}{g_{\phi\phi} + lg_{t\phi}}, \quad l = -\frac{u_\phi}{u_t} = -\frac{g_{\phi t} + \Omega g_{\phi\phi}}{g_{tt} + \Omega g_{t\phi}}. \quad (5.23)$$

Siguiendo el procedimiento de Komissarov, las condiciones de integrabilidad permiten expresar la solución de la ecuación de equilibrio (5.22) en términos de un potencial efectivo W_{in} dentro del disco, de forma que

$$W - W_{in} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{w} + \frac{\eta}{\eta - 1} \frac{p_m}{w} = 0, \quad (5.24)$$

siendo $W = \ln|u_t|$, κ una constante, p la presión del gas, p_m la presión magnética y w la entalpía. Para un análisis detallado, véase (Komissarov, 2006; Pimentel y col., 2018).

Figura 15. Estructura del disco de Komissarov.



Nota. Estructura del disco de Komissarov. En la figura se muestra la distribución de densidad de masa en el plano zR , donde se usaron valores de $l_0 = 2,8$ y $W_{in} = -0,050$.

El análisis de esta solución revela la necesidad de introducir especificaciones adicionales al modelo. En este caso, se considera un toro cuyo fluido presenta momento angular constante, l_0 , junto con una ecuación de estado politrópica para describir la presión. La estructura de este dis-

co se presenta en la figura (15), donde se observa la distribución espacial de densidad de masa, considerando $l_0 = 2,8$ y un potencial efectivo de $W_{in} = -0,050$.

5.3.2 Test de integración

Con el fin de validar la implementación numérica desarrollada, se realiza un segundo test que consiste en comparar directamente los mapas de intensidad obtenidos mediante la solución analítica y los generados a partir de la integración numérica, ambos calculados con la misma resolución espacial (512×512). Este test se realiza para el disco de Komissarov ópticamente delgado, teniendo en cuenta que para este disco se integra numéricamente la ecuación de transferencia radiativa, definida previamente como

$$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{I} = \frac{1}{v^2} j_I - v(\alpha_I \mathcal{I} + \alpha_Q \mathcal{Q} + \alpha_U \mathcal{U} + \alpha_V \mathcal{V}), \quad (5.25)$$

como primer acercamiento, el test se limita únicamente al parámetro de Stokes \mathcal{I} , asumiendo que $\mathcal{Q} = \mathcal{U} = \mathcal{V} = 0$.

En contraste, la solución analítica está dada por

$$\mathcal{I}_V(\tau_V) = \mathcal{I}_V(0) e^{-\tau_V} + S_V (1 - e^{-\tau_V}), \quad (5.26)$$

donde se asume que la función fuente $S_V = j_V/\alpha_V$ es constante. Adicionalmente, se considera que la intensidad inicial en la fuente, $\mathcal{I}_V(0) = 1$.

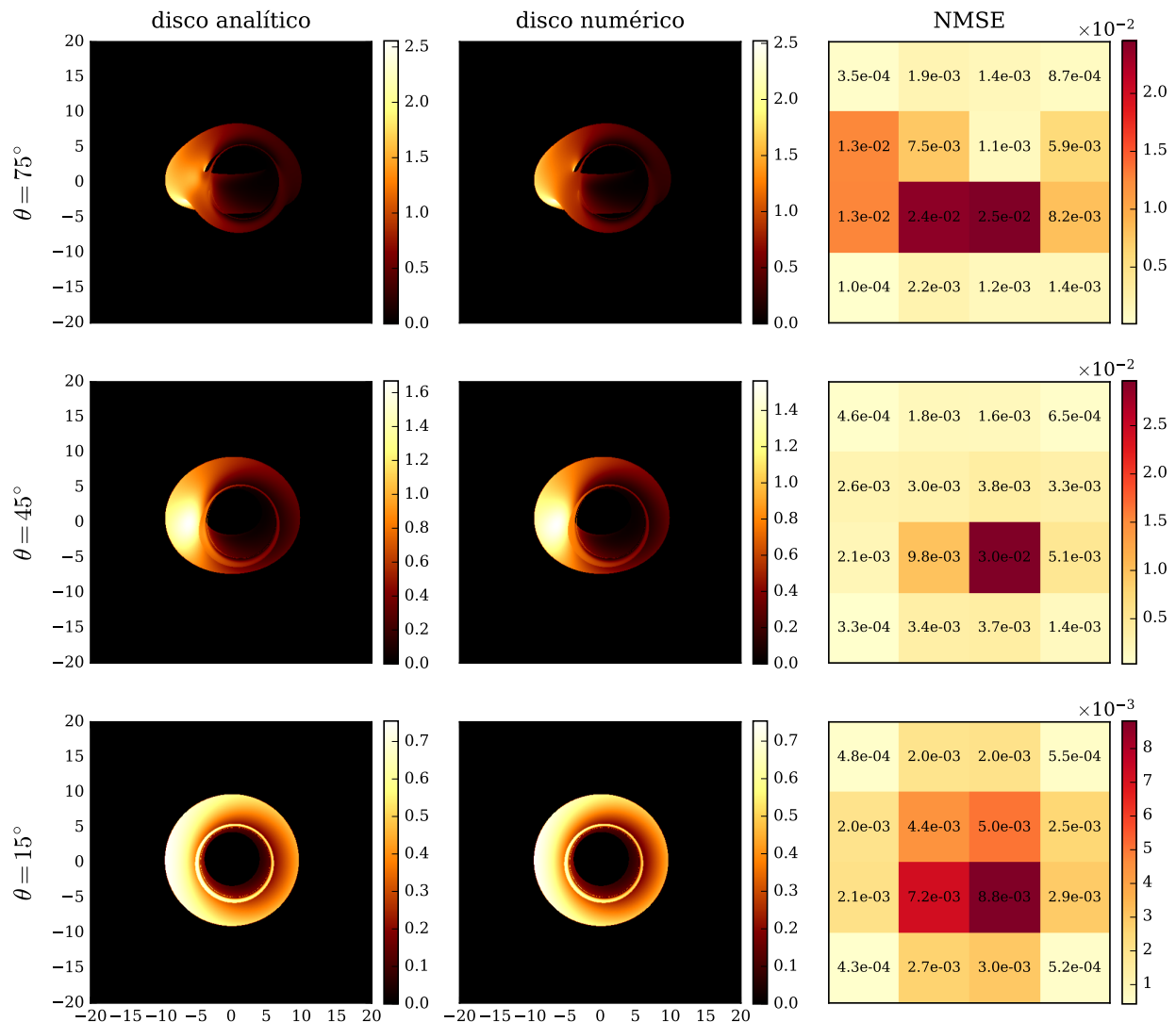
Obsérvese que estas soluciones se expresan en términos de los coeficientes de emisión y absorción, cuya forma depende del modelo físico adoptado. En este caso, al considerar radiación sincrotrón no térmica, dichos coeficientes presentan una dependencia explícita con el campo magnético, dada por

$$j_V \propto B^{(\gamma+1)/2}, v^{(1-\gamma)/2}, \quad \alpha_V \propto B^{(\gamma+2)/2}, v^{-(\gamma+4)/2}, \quad (5.27)$$

donde B representa el campo magnético, ν la frecuencia emitida y γ el índice espectral.

Es posible cuantificar el grado de consistencia entre ambos enfoques bajo las mismas condiciones. La diferencia entre ambas soluciones se mide mediante el error cuadrático medio normalizado (NMSE), definido con anterioridad en la ecuación (5.21). Esto permite determinar si la simulación numérica reproduce las características globales y locales de la solución analítica.

Figura 16. Mapa de NMSE para la intensidad de un disco de Komissarov ópticamente delgado.



Nota. Mapa de NMSE para la intensidad de un disco de Komissarov ópticamente delgado, comparando la solución analítica y la solución numérica. La resolución espacial utilizada corresponde a 512×512 .

Para generar los mapas de intensidad se utiliza una pantalla de observación con tamaño $-20 \leq x, y \leq 20$, donde la posición del observador se establece en $\{t_0, r_0, \theta_0, \phi_0\} = \{0, 1000, \theta_0, 0\}$. La figura (16) muestra la comparación entre los mapas de intensidad obtenidos mediante la solución analítica y la solución numérica para el disco ópticamente delgado de Komissarov. Se presentan tres ángulos de visión: $\theta = 75^\circ$, $\theta = 45^\circ$ y $\theta = 15^\circ$. La columna derecha muestra el mapa del error cuadrático medio normalizado. Se observa que la intensidad calculada numéricamente reproduce de manera muy cercana la solución analítica, incluso en las regiones donde existe mayor intensidad. Los valores de NMSE, que se indican en cada celda del mapa, son en general del orden de 10^{-3} o menores. Se destacan valores mayores en algunas regiones centrales, correspondientes a las zonas con mayor gradiente de intensidad. Esto confirma que la implementación numérica es capaz de reproducir de manera consistente la solución analítica, validando así el correcto tratamiento de la transferencia radiativa en el caso del disco ópticamente delgado.

5.3.3 *Disco de Komissarov ópticamente delgado*

A continuación, se presentan por primera vez los mapas de intensidad y polarización correspondientes a un disco de Komissarov ópticamente delgado. La elección de este modelo se debe a sus propiedades ópticas particulares, que permiten analizar con mayor detalle la interacción entre la radiación y el medio circundante. Al tratarse de un disco ópticamente delgado, los fotones emitidos desde su interior pueden interactuar con la materia del entorno, generando efectos de polarización. Por esta razón, para este modelo fue necesario resolver numéricamente la ecuación de transferencia radiativa polarizada, previamente analizada en la sección teórica, con el fin de obtener una descripción completa del comportamiento de la radiación.

Es importante mencionar que, en los test presentados en la sección (5.1), la ecuación de transferencia radiativa se resolvió numéricamente mediante un integrador de tipo Dormand–Prince, con el propósito de validar el correcto funcionamiento del código. Por el contrario, en las simulaciones que se presentan a continuación, es necesario relacionar dos marcos de referencia distintos:

el marco local del fluido y el marco del observador. En consecuencia, la ecuación de transferencia debe expresarse en el sistema del observador, lo que requiere realizar una transformación de coordenadas mediante una matriz de rotación. Así, la ecuación (3.31) se reescribe como

$$\frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} \mathcal{I} \\ \mathcal{Q} \\ \mathcal{U} \\ \mathcal{V} \end{pmatrix} = \frac{1}{v^2} R(\chi) \begin{pmatrix} j_I \\ j_Q \\ j_U \\ j_V \end{pmatrix} - v R(\chi) \begin{pmatrix} \alpha_I & \alpha_Q & \alpha_U & \alpha_V \\ \alpha_Q & \alpha_I & \rho_V & -\rho_U \\ \alpha_U & -\rho_V & \alpha_I & \rho_Q \\ \alpha_V & \rho_U & -\rho_Q & \alpha_I \end{pmatrix} R(-\chi) \begin{pmatrix} \mathcal{I} \\ \mathcal{Q} \\ \mathcal{U} \\ \mathcal{V} \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

siendo $R(\chi)$ la matriz de rotación y χ el ángulo que relaciona los dos marcos

$$R(\chi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\chi & -\sin 2\chi & 0 \\ 0 & \sin 2\chi & \cos 2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Realizando el desarrollo algebraico correspondiente, incluyendo la multiplicación de matrices, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales que se resuelve numéricamente en OSIRIS

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\lambda} = \frac{1}{v^2} j_I - v [\alpha_I \mathcal{I} + \alpha_Q \mathcal{Q} \cos(2x) - \alpha_U \mathcal{Q} \sin(2x) + \alpha_Q \mathcal{U} \sin(2x) + \alpha_U \mathcal{U} \cos(2x) + \alpha_V \mathcal{V}],$$

$$\frac{d\mathcal{Q}}{d\lambda} = \frac{1}{v^2} [j_Q \cos(2x) - j_U \sin(2x)] - v [\alpha_Q \mathcal{I} \cos(2x) - \alpha_U \mathcal{I} \sin(2x) + \alpha_I \mathcal{Q} + \rho_V \mathcal{U} - \rho_U \mathcal{V} \cos(2x) - \rho_Q \mathcal{V} \sin(2x)],$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{U}}{d\lambda} &= \frac{1}{v^2} [j_Q \sin(2x) + j_U \cos(2x)] \\ &\quad - v [\alpha_Q I \sin(2x) + \alpha_U I \cos(2x) - \rho_V Q + \alpha_I U - \rho_U V \sin(2x) + \rho_Q V \cos(2x)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{d\lambda} &= \frac{1}{v^2} j_V \\ &\quad - v [\alpha_V I + \rho_U Q \cos(2x) + \rho_Q Q \sin(2x) + \rho_U U \sin(2x) - \rho_Q U \cos(2x) + \alpha_I V]. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones describen la evolución de los parámetros de Stokes a lo largo de la trayectoria de los fotones, incorporando tanto los procesos de emisión y absorción como los efectos de rotación. De esta manera, permiten analizar de forma completa cómo la radiación emitida por el disco adquiere un estado de polarización dependiente de las propiedades locales del medio.

Como primer acercamiento, en la simulación inicial se emplearon coeficientes de emisión y absorción constantes, idénticos a los utilizados en el primer test de integración, con valores $j_I = 2$, $j_Q = \alpha_I = 1$ y $\alpha_Q = 1,2$. Los demás coeficientes se consideran nulos. Teniendo en cuenta estos coeficientes, el sistema de ecuaciones anterior se reduce a

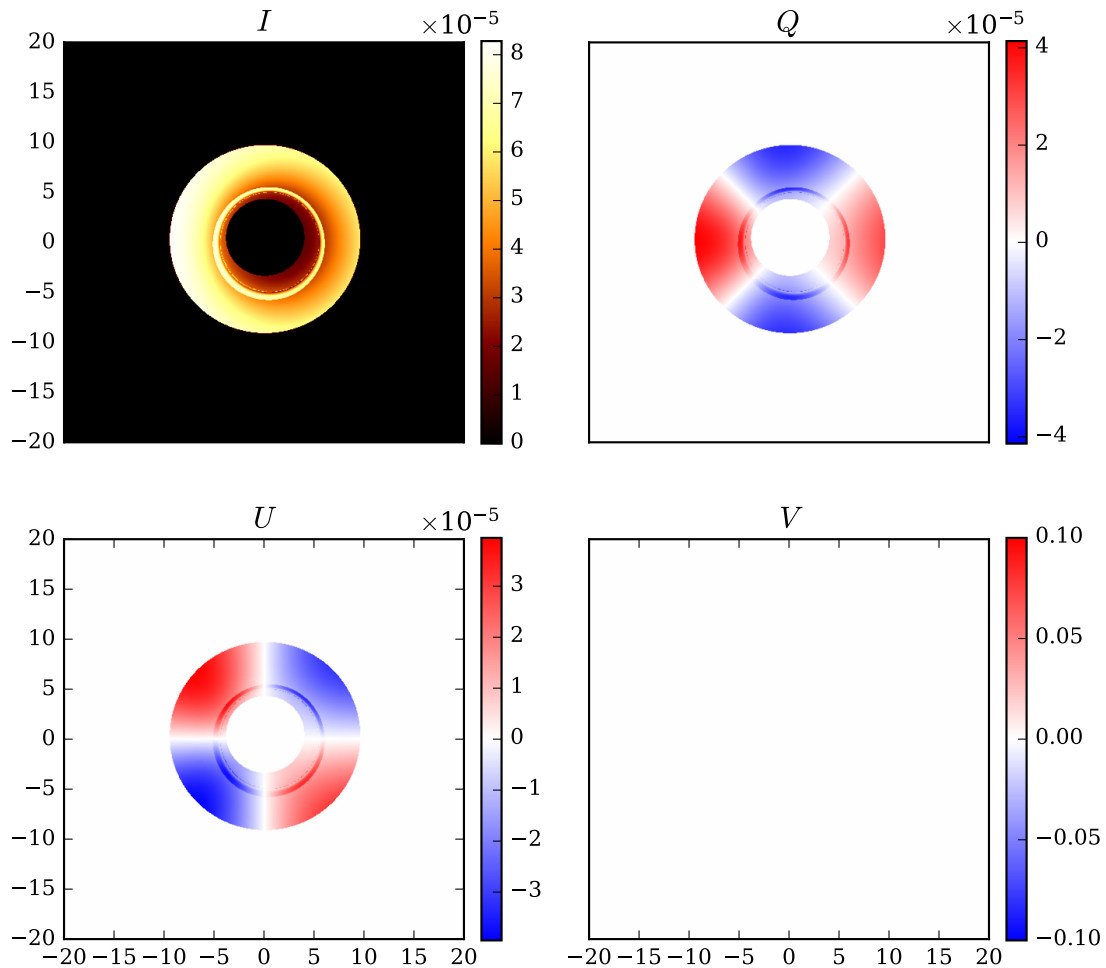
$$\frac{d\mathcal{I}}{d\lambda} = \frac{1}{v^2} j_I - v [\alpha_I I + \alpha_Q Q \cos(2x) + \alpha_Q U \sin(2x)], \quad (5.30)$$

$$\frac{d\mathcal{Q}}{d\lambda} = \frac{1}{v^2} [j_Q \cos(2x)] - v [\alpha_Q I \cos(2x) + \alpha_I Q], \quad (5.31)$$

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\lambda} = \frac{1}{v^2} [j_Q \sin(2x)] - v [\alpha_Q I \sin(2x) + \alpha_I U], \quad (5.32)$$

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\lambda} = -v [\alpha_I V]. \quad (5.33)$$

Figura 17. Mapa de intensidad y polarización para un disco de Komissarov ópticamente delgado, usando coeficientes constantes.



Nota. Mapa de intensidad y polarización para un disco de Komissarov ópticamente delgado, usando coeficientes constantes de emisión y absorción. El ángulo de observación es $\theta = 15^\circ$ y el espín $a = 0,9$.

Las simulaciones se realizaron para un parámetro de espín de $a = 0,9$ y un ángulo de observación de $\theta = 15^\circ$. Además, se consideran como condiciones iniciales para los parámetros de Stokes los valores $I(0) = 0$, $Q(0) = U(0) = V(0) = 0$. Bajo estas condiciones, y considerando únicamente los coeficientes de emisión y absorción, los mapas de intensidad y polarización obtenidos para este disco se presentan en la figura (17). En esta figura se presenta el mapa de intensidad, en el cual

se puede observar la presencia del anillo de fotones. Adicionalmente, se presentan los parámetros de Stokes que representan la polarización lineal y circular. Se observa que los parámetros Q y U presentan contribuciones positivas y negativas en la polarización lineal, representadas en la figura mediante los colores rojo y azul. Por su parte, el parámetro V resulta nulo bajo las condiciones adoptadas, lo que indica la ausencia de polarización circular en este caso.

Es importante mencionar que, al comparar con la figura (11), correspondiente al primer test con coeficientes constantes de emisión y absorción, no se observan contribuciones en los parámetros de Stokes U y V . En contraste, para este mismo test bajo el modelo del disco de Komissarov, sí se evidencia una componente no nula en el parámetro U , como se muestra en la figura (17). Este resultado es particularmente relevante, ya que indica que al relacionar el marco del fluido con el marco del observador mediante la matriz de rotación se introduce un acoplamiento entre los parámetros de Stokes, de modo que la radiación observada presenta una componente adicional de polarización lineal que no estaba presente en el marco local del fluido. Esta conclusión también se puede corroborar al comparar las ecuaciones (5.32) con (5.3), donde se evidencia la dependencia del parámetro U con el parámetro I al introducir la matriz de rotación.

Un aspecto central evidenciado en las simulaciones y pruebas numéricas realizadas en este proyecto es la fuerte sensibilidad de los parámetros de polarización a las condiciones iniciales y a los valores adoptados para los coeficientes de emisión, absorción y rotación. En esta primera etapa se presentaron mapas de polarización empleando coeficientes constantes; no obstante, para realizar comparaciones cuantitativas robustas será necesario examinar con mayor profundidad la pertinencia física de dichas elecciones, las cuales dependen en gran medida del modelo de radiación considerado.

En general, los coeficientes de emisión, absorción y rotación que aparecen en la ecuación de transferencia radiativa polarizada dependen de las propiedades locales del plasma emisor. En escenarios donde domina la emisión sincrotrón, frecuentemente considerada en el estudio de flujos de acreción alrededor de agujeros negros, estos coeficientes están determinados por magnitudes

como la densidad electrónica, la intensidad y orientación del campo magnético, la temperatura de los electrones, la frecuencia de observación y la función de distribución de energías de las partículas radiantes. Distintas hipótesis sobre estas cantidades pueden modificar de manera significativa los coeficientes de transferencia y, en consecuencia, la estructura de los mapas de polarización obtenidos.

En los códigos de transferencia radiativa relativista de uso extendido, los coeficientes de emisión y absorción se calculan a partir de modelos físicos específicos, por ejemplo, emisión sincrotrón generada por distribuciones térmicas relativistas o distribuciones de ley de potencia de electrones. Sin embargo, si bien la literatura suele presentar las expresiones generales para dichos coeficientes junto con sus dependencias funcionales, no siempre especifica de forma completamente explícita todos los parámetros físicos adoptados en las simulaciones: perfiles de densidad, temperatura electrónica o configuración del campo magnético, entre otros (D. Melrose, 1971; Zhao y col., 2023). Del mismo modo, las condiciones iniciales empleadas, como los valores de las componentes de Stokes al inicio de la integración, tampoco se reportan siempre con el detalle suficiente. Estas omisiones pueden comprometer la reproducibilidad directa de algunos resultados y ponen de manifiesto la importancia de documentar con rigor tanto los parámetros físicos como las hipótesis numéricas que sustentan la construcción de los modelos.

En este contexto, la adopción de coeficientes constantes en el presente trabajo responde principalmente al objetivo de validar la implementación numérica del esquema de transferencia radiativa polarizada y analizar su comportamiento en un entorno controlado. Una vez establecida la consistencia de la implementación, la incorporación de coeficientes derivados de modelos físicos más realistas constituye una extensión natural para futuros desarrollos.

6 Conclusiones

En este proyecto de investigación se abordó el estudio de la transferencia radiativa polarizada en las proximidades de agujeros negros. Para desarrollar este análisis fue necesario reproducir tanto las formulaciones analíticas como las implementaciones numéricas del modelo de transferencia. En primera instancia, con el propósito de comprender la interacción entre la radiación y la materia, se revisaron los conceptos fundamentales de polarización y los parámetros de Stokes, que describen los observables asociados al estado de polarización de la luz. Del mismo modo, se examinaron las definiciones de intensidad y los principales mecanismos de emisión y absorción, los cuales constituyen la base teórica del estudio. Finalmente, considerando la naturaleza tensorial del problema, se realizó un tratamiento covariante de la ecuación de transferencia, lo que permitió establecer su forma general en el contexto de la radiación polarizada.

Para realizar las simulaciones se empleó el código OSIRIS, un programa desarrollado en lenguaje Fortran que permite analizar la propagación de geodésicas alrededor de objetos compactos. Originalmente, este código estaba diseñado para calcular únicamente el mapa de intensidad de la radiación. En el marco de este proyecto, se amplió su funcionalidad mediante la implementación de la ecuación completa de transferencia radiativa, incorporando así los efectos de la polarización.

Para validar el funcionamiento y la convergencia del código se realizaron diversas pruebas numéricas. En primer lugar, se llevó a cabo un test destinado a verificar la correcta solución numérica de la ecuación de transferencia radiativa polarizada, utilizando coeficientes constantes de emisión, absorción y rotación de Faraday. Este caso de prueba permite analizar el comportamiento de los parámetros de Stokes en un medio donde las soluciones analíticas son conocidas. Los resultados obtenidos se compararon con los reportados por otros códigos de referencia, tales como *ipole*, *raptor* y *grtrans*, mostrando una excelente concordancia. Esto confirma la correcta

implementación del integrador numérico Dormand–Prince y respalda la confiabilidad de los resultados obtenidos con OSIRIS.

Para las simulaciones se consideraron distintos modelos de disco de acreción. En particular, se trabajó con un disco geoméricamente delgado de Page–Thorne y con un disco ópticamente delgado de Komissarov. En el caso del modelo de Page–Thorne, se asumió que la intensidad de la radiación proviene de una temperatura efectiva y sigue una distribución espectral de cuerpo negro. A partir de este modelo fue posible obtener analíticamente la intensidad y los parámetros de Stokes Q , U y V . El análisis de dichos parámetros permitió identificar efectos relativistas característicos, como el corrimiento Doppler y la presencia del anillo de fotones, además de variaciones en el estado de polarización con contribuciones positivas y negativas.

Finalmente, se presentaron por primera vez las simulaciones de los parámetros de Stokes correspondientes a un disco ópticamente delgado de Komissarov. Para este modelo fue necesario implementar de forma numérica la ecuación completa de transferencia radiativa polarizada, ampliando así las capacidades del código OSIRIS. Como primer paso para evaluar el desempeño del método numérico, se llevó a cabo un test de integración, en el que se compararon los mapas de intensidad obtenidos mediante la solución analítica y la solución numérica. El análisis mostró que el error cuadrático medio es del orden de 10^{-3} o menor, con valores puntuales de hasta 10^{-2} en regiones donde existen mayores gradientes de intensidad. En conjunto, estos resultados demuestran que la implementación numérica reproduce con alta precisión la solución analítica, validando la consistencia y confiabilidad del tratamiento de la transferencia radiativa polarizada en discos ópticamente delgados.

En continuidad con este análisis, se realizaron simulaciones de los mapas de intensidad y polarización para el disco ópticamente delgado de Komissarov, utilizando los mismos coeficientes empleados en el primer test de integración. A partir de estas simulaciones se identificaron contribuciones tanto positivas como negativas en los parámetros de polarización lineal, asociadas a los parámetros de Stokes Q y U . Estos resultados ponen de manifiesto cómo los procesos de emi-

sión, absorción y rotación de Faraday influyen directamente en el estado final de polarización de la radiación.

Las simulaciones evidenciaron que las condiciones iniciales de los parámetros de Stokes ejercen una influencia significativa sobre el estado de polarización obtenido, lo que subraya la necesidad de fundamentar físicamente su elección en coherencia con el modelo de radiación adoptado. En la misma línea, la incorporación de coeficientes de emisión, absorción y rotación de Faraday con mayor sustento físico (dependientes explícitamente del modelo de radiación) constituye el paso natural hacia simulaciones más realistas. Ambos aspectos representan extensiones directas del presente trabajo y consolidan el código desarrollado como una base sólida para el estudio de la polarización en entornos relativistas.

Referencias Bibliográficas

- Abramowicz, M., Jaroszynski, M., & Sikora, M. (1978). Relativistic, accreting disks. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 63, no. 1-2, Feb. 1978, p. 221-224., 63, 221-224.
- Abramowicz, M. A., & Fragile, P. C. (2013). Foundations of black hole accretion disk theory. *Living Reviews in Relativity*, 16, 1-88.
- Acevedo-Muñoz, J., Lora-Clavijo, F., & Cruz-Osorio, A. (2025). Shadow and gravitational lensing produced by the nonlinear accretion of a scalar field onto a black hole. *Physical Review D*, 111(8), 084022.
- Agol, E., Blaes, O., & Ionescu-Zanetti, C. (1998). Polarization from magnetized accretion discs-II. The effects of absorption opacity on Faraday rotation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 293(1), 1-17.
- Arrieta-Villamizar, J., Velásquez-Cadavid, J., Pimentel, O., Lora-Clavijo, F., & Gutiérrez-Piñeres, A. (2020). Shadows around the q-metric. *Classical and Quantum Gravity*, 38(1), 015008.
- Azzam, R. M. (2016). Stokes-vector and Mueller-matrix polarimetry. *JOSA A*, 33(7), 1396-1408.
- Balbus, S. A., & Hawley, J. F. (1991). A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. I. Linear Analysis. *The Astrophysical Journal*, 376, 214.

- Bardeen, J. M., Press, W. H., & Teukolsky, S. A. (1972). Rotating black holes: locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *Astrophysical Journal, Vol. 178*, pp. 347-370 (1972), 178, 347-370.
- Blandford, R. D., & Znajek, R. L. (1977). Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 179*(3), 433-456.
- Born, M., & Wolf, E. (2013). *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier.
- Bronzwaer, T., Davelaar, J., Younsi, Z., Mościbrodzka, M., Falcke, H., Kramer, M., & Rezzolla, L. (2018). RAPTOR-I. Time-dependent radiative transfer in arbitrary spacetimes. *Astronomy & Astrophysics, 613*, A2.
- Bronzwaer, T., Younsi, Z., Davelaar, J., & Falcke, H. (2020). RAPTOR-II. Polarized radiative transfer in curved spacetime. *Astronomy & Astrophysics, 641*, A126.
- Chakrabarti, S. K. (1996). Accretion processes on a black hole. *Physics Reports, 266*(5-6), 229-390.
- Chandrasekhar, S. (1960). The stability of non-dissipative Couette flow in hydromagnetics. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 46*(2), 253-257.
- Chandrasekhar, S. (2013). *Radiative transfer*. Courier Corporation.
- Collett, E. (2005). *Field Guide to Polarization*. SPIE Press.
- De Rham, G. (1955). *Variétés différentiables: formes, courants, formes harmoniques*. FeniXX.
- Dexter, J. (2016). A public code for general relativistic, polarised radiative transfer around spinning black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 462*(1), 115-136.

- Dexter, J., & Agol, E. (2009). A fast new public code for computing photon orbits in a Kerr spacetime. *The Astrophysical Journal*, 696(2), 1616.
- Dormand, J. R., & Prince, P. J. (1980). A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of computational and applied mathematics*, 6(1), 19-26.
- Dormand, J. R., & Prince, P. J. (1986). Runge-kutta triples. *Computers & Mathematics with Applications*, 12(9), 1007-1017.
- Dreyer, O., Kelly, B., Krishnan, B., Finn, L. S., Garrison, D., & Lopez-Aleman, R. (2004). Black-hole spectroscopy: testing general relativity through gravitational-wave observations. *Classical and Quantum Gravity*, 21(4), 787.
- EHT Collaboration. (2019a). First M87 Event Horizon Telescope Results. III. Data Processing and Calibration. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1), L3. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0c57>
- EHT Collaboration. (2019b). First M87 event horizon telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole.
- EHT Collaboration. (2019c). First M87 event horizon telescope results. V. Physical origin of the asymmetric ring. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1), L5.
- EHT Collaboration. (2021a). First M87 event horizon telescope results. VII. Polarization of the ring. *910(1)*, L12.
- EHT Collaboration. (2021b). First M87 event horizon telescope results. VIII. Magnetic field structure near the event horizon. *910(1)*, L13.

- EHT Collaboration. (2022). First Sagittarius A* Event Horizon Telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole in the center of the Milky Way. *The Astrophysical Journal Letters*, 930(2), L12.
- EHT Collaboration. (2024a). First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. VII. Polarization of the Ring. 964(2), L25.
- EHT Collaboration. (2024b). First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. VIII. Physical Interpretation of the Polarized Ring. *The Astrophysical Journal Letters*, 964(2), L26.
- EHT Collaboration. (2025). Horizon-scale variability of M87* from 2017-2021 EHT observations. *Astronomy and Astrophysics*. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202555855>
- Elder, F., Gurewitsch, A., Langmuir, R., & Pollock, H. (1947). Radiation from electrons in a synchrotron. *Physical Review*, 71(11), 829.
- Gammie, C. F., & Leung, P. K. (2012). A formalism for covariant polarized radiative transport by ray tracing. *The Astrophysical Journal*, 752(2), 123.
- Gil, J. J., & Ossikovski, R. (2022). *Polarized light and the Mueller matrix approach*. CRC press.
- Gold, R., Broderick, A. E., Younsi, Z., Fromm, C. M., Gammie, C. F., Mościbrodzka, M., Pu, H.-Y., Bronzwaer, T., Davelaar, J., Dexter, J., y col. (2020). Verification of radiative transfer schemes for the EHT. *The Astrophysical Journal*, 897(2), 148.
- Goldstein, D. H. (2017). *Polarized light*. CRC press.
- Huang, J., Zheng, L., Guo, M., & Chen, B. (2024). Coport: a new public code for polarized radiative transfer in a covariant framework. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2024(11), 054.

- Ishak, M. (2019). Testing general relativity in cosmology. *Living Reviews in Relativity*, 22, 1-204.
- Ivanenko, D., & Pomeranchuk, I. (1944). Radiation losses in circular accelerating motions. *Dokl. Akad. Nauk*, 44, 315.
- Johannsen, T., Broderick, A. E., Plewa, P. M., Chatzopoulos, S., Doeleman, S. S., Eisenhauer, F., Fish, V. L., Genzel, R., Gerhard, O., & Johnson, M. D. (2016). Testing general relativity with the shadow size of Sgr A. *Physical review letters*, 116(3), 031101.
- Keller, J. B., Lewis, R. M., & Seckler, B. D. (1956). Asymptotic solution of some diffraction problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 9(2), 207-265.
- Komissarov, S. (2006). Magnetized tori around Kerr black holes: analytic solutions with a toroidal magnetic field. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 368(3), 993-1000.
- Kozłowski, M., Jaroszynski, M., & Abramowicz, M. (1978). The analytic theory of fluid disks orbiting the Kerr black hole. *Astronomy and Astrophysics*, 63, 209-220.
- Li, L.-X., Narayan, R., & McClintock, J. E. (2009). Inferring the inclination of a black hole accretion disk from observations of its polarized continuum radiation. *The Astrophysical Journal*, 691(1), 847.
- LIGO-VIRGO collaboration. (2017). GW170814: a three-detector observation of gravitational waves from a binary black hole coalescence. *Physical review letters*, 119(14), 141101.
- McIsaac, C., Keitel, D., Collett, T., Harry, I., Mozzon, S., Edy, O., & Bacon, D. (2020). Search for strongly lensed counterpart images of binary black hole mergers in the first two LIGO observing runs. *Physical Review D*, 102(8), 084031.

- Melrose, D. (1971). On the degree of circular polarization of synchrotron radiation. *Astrophysics and Space Science*, 12(1), 172-192.
- Melrose, D. B. (2008). *Quantum plasmadynamics: unmagnetized plasmas* (Vol. 735). Springer.
- Mościbrodzka, M., & Gammie, C. F. (2018). ipole–semi-analytic scheme for relativistic polarized radiative transport. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 475(1), 43-54.
- Mueller, H. (1948). *The foundation of optics*.
- Noble, S. C., Leung, P. K., Gammie, C. F., & Book, L. G. (2007). Simulating the emission and outflows from accretion discs. *Classical and Quantum Gravity*, 24(12), S259.
- Novikov, I. D., & Thorne, K. S. (1973). Astrophysics of black holes. *Black holes (Les astres occlus)*, 1, 343-450.
- Page, D. N., & Thorne, K. S. (1974). Disk-accretion onto a black hole. Time-averaged structure of accretion disk. *Astrophysical Journal*, Vol. 191, pp. 499-506 (1974), 191, 499-506.
- Piller, H. (1972). Faraday rotation. En *Semiconductors and Semimetals* (pp. 103-179). Elsevier.
- Pimentel, O. M., Lora-Clavijo, F. D., & Gonzalez, G. A. (2018). Analytic solution of a magnetized tori with magnetic polarization around Kerr black holes. *Astronomy & Astrophysics*, 619, A57.
- Pineault, S. (1982). Non-thermal emission from relativistic accretion disks-A simple model for axisymmetric inhomogeneous sources. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 109, no. 2, May 1982, p. 294-300., 109, 294-300.

Poincaré, H. (1889). *Théorie mathématique de la lumière II.: Nouvelles études sur la diffraction.— Théorie de la dispersion de Helmholtz. Leçons professées pendant le premier semestre 1891-1892* (Vol. 1). G. Carré.

Prada-Méndez, G. D., Lora-Clavijo, F., & Velásquez-Cadavid, J. (2023). Synchrotron emitting Komissarov torus around naked singularities. *Classical and Quantum Gravity*, 40(19), 195011.

Prather, B. S., Dexter, J., Moscibrodzka, M., Pu, H.-Y., Bronzwaer, T., Davelaar, J., Younsi, Z., Gammie, C. F., Gold, R., Wong, G. N., y col. (2023). Comparison of polarized radiative transfer codes used by the EHT Collaboration. *The Astrophysical Journal*, 950(1), 35.

Pu, H.-Y., Yun, K., Younsi, Z., & Yoon, S.-J. (2016). Odyssey: a public GPU-based code for general relativistic radiative transfer in Kerr spacetime. *The Astrophysical Journal*, 820(2), 105.

Rees, D. E., Murphy, G. A., & Durrant, C. J. (1989). Stokes Profile Analysis and Vector Magnetic Fields. II. Formal Numerical Solutions of the Stokes Transfer Equations. *The Astrophysical Journal*, 339, 1093.

Ricotti, M., & Ostriker, J. P. (2004). X-ray pre-ionization powered by accretion on the first black holes—I. A model for the WMAP polarization measurement. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 352(2), 547-562.

Rybicki, G. B., & Lightman, A. P. (1991). *Radiative processes in astrophysics*. John Wiley & Sons.

Schaefer, B., Collett, E., Smyth, R., Barrett, D., & Fraher, B. (2007). Measuring the Stokes polarization parameters. *American Journal of Physics*, 75(2), 163-168.

Schneider, P., Ehlers, J., & Falco, E. (1999). *Gravitational Lenses*. Springer.

Sharma, K. K. (2006). *Optics: principles and applications*. Elsevier.

Shields, G. (1978). Thermal continuum from accretion disks in quasars. *Nature*, 272(5655), 706-708.

Silant'ev, N., Piotrovich, M. Y., Gnedin, Y. N., & Natsvlshvili, T. (2011). Polarimetric differences between Schwarzschild and Kerr black holes in active galactic nuclei. *Astronomy reports*, 55, 683-688.

Stokes, G. G. (1851). On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9, 399.

Taylor, E. F., & Wheeler, J. A. (2000). *Exploring black holes* (Vol. 98). Addison Wesley Longman San Francisco.

Thompson, A. R., Moran, J. M., & Swenson, G. W. (2017). *Interferometry and synthesis in radio astronomy*. Springer Nature.

Thorne, K. S., Misner, C. W., & Wheeler, J. A. (2000). *Gravitation*. Freeman San Francisco.

Touboul, P., Métris, G., Rodrigues, M., André, Y., Baghi, Q., Bergé, J., Boulanger, D., Bremer, S., Carle, P., Chhun, R., y col. (2017). MICROSCOPE mission: first results of a space test of the equivalence principle. *Physical review letters*, 119(23), 231101.

Velásquez-Cadavid, J., Arrieta-Villamizar, J., Lora-Clavijo, F., Pimentel, O., & Osorio-Vargas, J. (2022). OSIRIS: a new code for ray tracing around compact objects. *The European Physical Journal C*, 82(2), 103.

Velásquez-Cadavid, J., Lora-Clavijo, F. D., Pimentel, O. M., & Arrieta-Villamizar, J. (2023). Synchrotron emitting Komissarov torus with magnetic polarization around Kerr black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 519(3), 3584-3594.

Velikhov, E. (1959). Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic field. *Sov. Phys. JETP*, 36(9), 995-998.

Younsi, Z., Porth, O., Mizuno, Y., Fromm, C. M., & Olivares, H. (2020). Modelling the polarised emission from black holes on event horizon-scales. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 14(S342), 9-12.

Younsi, Z., Wu, K., & Fuerst, S. V. (2012). General relativistic radiative transfer: formulation and emission from structured tori around black holes. *Astronomy & Astrophysics*, 545, A13.

Zhao, S.-S., Huang, L., Lu, R.-S., & Shen, Z. (2023). Impact of non-thermal electron radiation effects on the horizon scale image structure of Sagittarius A. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 519(1), 340-351.

A Apéndice A: Polarización

A.1 Elipse de polarización

Reescribiendo estas ecuaciones

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y, \quad (\text{A.2})$$

multiplicando (A.1) por $\sin \delta_y$ y (A.2) por $\sin \delta_x$ y restando estas dos expresiones se obtiene

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \sin \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \sin \delta_x = \cos \tau \sin (\delta_y - \delta_x), \quad (\text{A.3})$$

de igual forma, multiplicando (A.1) por $\cos \delta_y$ y (A.2) por $\cos \delta_x$ y restando se obtiene

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta_x = \sin \tau \sin (\delta_y - \delta_x). \quad (\text{A.4})$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (A.3) y (A.4) y sumando, se obtiene la ecuación de la elipse de polarización.

A.1.1 Estados degenerados de la elipse de polarización

A continuación se encuentran algunos de los estados degenerados de la elipse de polarización, y bajo qué condiciones se obtienen.

- $E_{0y} = 0$

Para este caso las ecuaciones (1.3) y (1.4) se simplifican a

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x), \quad (\text{A.5})$$

$$E_y(z, t) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Se dice entonces que la luz está linealmente polarizada en dirección x , o se tiene una *polarización lineal horizontal*.

- $E_{0x} = 0$

Para este caso las ecuaciones (1.3) y (1.4) se simplifican a

$$E_x(z, t) = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\tau + \delta_y). \quad (\text{A.8})$$

Se dice entonces que la luz está linealmente polarizada en dirección y , o se tiene una *polarización lineal vertical*.

- $\delta = 0, \pi$

Para este caso, la ecuación de la elipse (1.5) se simplifica a

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} \pm 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = 0, \quad (\text{A.9})$$

note que esta ecuación tiene la forma de una cuadrática, de forma que la solución para E_y está dada por

$$E_y = \pm \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right) E_x. \quad (\text{A.10})$$

Esta solución tiene la forma de una línea recta con pendiente $\pm E_{0y}/E_{0x}$. Si en este caso se

cumple que $E_{0x} = E_{0y}$ entonces

$$E_y = E_x \quad \text{para } \delta = 0, \quad (\text{A.11})$$

y se dice que la luz posee *polarización lineal a $+45^\circ$* .

Por otro lado

$$E_y = -E_x \quad \text{para } \delta = \pi, \quad (\text{A.12})$$

en este caso la luz tiene una *polarización lineal a -45°* .

- $\delta = \pi/2, 3\pi/2$

Note que, para estos valores de fase la ecuación de la elipse es

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1, \quad (\text{A.13})$$

siendo esta ecuación la correspondiente a una elipse que no se encuentra rotada (los ejes de la elipse coinciden con el sistema xy). Además, es importante resaltar que la elipse es indistinguible para estas dos fases.

- $\delta = \pi/2, 3\pi/2, E_{0x} = E_{0y} = E_0$

La ecuación de la elipse se reduce a

$$\frac{E_x^2}{E_0^2} + \frac{E_y^2}{E_0^2} = 1, \quad (\text{A.14})$$

que corresponde a la ecuación de un círculo de radio 1. Si $\delta = \pi/2$ se dice que la luz tiene una *polarización circular a la derecha*, por otro lado, si $\delta = 3\pi/2$ se tiene *polarización circular a la izquierda*.

A.2 Parámetros de Stokes

Para determinar los parámetros de Stokes se requiere realizar el siguiente procedimiento. Multiplicando la ecuación (1.10) por $4E_{0x}^2E_{0y}^2$

$$4E_{0y}^2\langle E_x^2(t) \rangle + 4E_{0x}^2\langle E_y^2(t) \rangle - 8E_{0x}E_{0y}\langle E_x(t)E_y(t) \rangle \cos \delta = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2, \quad (\text{A.15})$$

es posible utilizar la definición del promedio temporal (1.11) para calcular cada término

$$E_x^2(t) = E_{0x}^2 \cos^2(\omega t + \delta_x(t)),$$

$$\langle E_x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_{0x}^2 \cos^2[\omega t + \delta_x(t)] dt,$$

resolviendo y evaluando se obtiene

$$\langle E_x^2(t) \rangle = \frac{1}{2}E_{0x}^2.$$

Análogamente, es fácil obtener

$$\langle E_y^2(t) \rangle = \frac{1}{2}E_{0y}^2,$$

$$\langle E_x(t)E_y(t) \rangle = \frac{1}{2}E_{0x}E_{0y} \cos(\delta).$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (A.15) se obtiene

$$4E_{0y}^2\langle E_x^2(t) \rangle + 4E_{0x}^2\langle E_y^2(t) \rangle - 8E_{0x}E_{0y}\langle E_x(t)E_y(t) \rangle \cos \delta = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2,$$

$$4E_{0y}^2 \frac{1}{2}E_{0x}^2 + 4E_{0x}^2 \frac{1}{2}E_{0y}^2 - 8E_{0x}E_{0y} \frac{1}{2}E_{0x}E_{0y} \cos^2 \delta = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2,$$

$$4E_{0x}^2E_{0y}^2 - (2E_{0x}E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2,$$

como se quiere expresar todo en términos de la intensidad, se suma y resta por $E_{0x}^4 + E_{0y}^4$

$$4E_{0x}^2 E_{0y}^2 - 4E_{0x}^2 E_{0y}^2 \cos^2 \delta + E_{0x}^4 + E_{0y}^4 - E_{0x}^4 - E_{0y}^4 = (2E_{0x} E_{0y} \sin \delta)^2,$$

y agrupando términos se obtiene

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 - (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)^2 - (2E_{0x} E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x} E_{0y} \sin \delta)^2,$$

donde las cantidades dentro de los paréntesis corresponden a los parámetros de Stokes (1.13)-(1.16).

A.2.1 Vector de Stokes en términos de los parámetros de la elipse

Para encontrar el vector de Stokes en términos de los parámetros χ y ψ es necesario reescribir las definiciones (1.20) y (1.21) como

$$V = I \sin 2\chi, \tag{A.16}$$

$$U = Q \tan 2\psi, \tag{A.17}$$

reemplazando (A.16) y (A.17) en la relación $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2,$$

$$I^2 = Q^2 + Q^2 \tan^2 2\psi + I^2 \sin^2 2\chi,$$

$$I^2 - I^2 \sin^2 2\chi = Q^2 + Q^2 \tan^2 2\psi,$$

$$I^2 - I^2 \sin^2 2\chi = Q^2 (1 + \tan^2 2\psi),$$

$$I^2 - I^2 \sin^2 2\chi = Q^2 \sec^2 2\psi,$$

$$I^2 - I^2 \sin^2 2\chi = Q^2 \frac{1}{\cos^2 2\psi},$$

$$I^2 \cos^2 2\psi (1 - \sin^2 2\chi) = Q^2,$$

$$I^2 \cos^2 2\psi \cos^2 2\chi = Q^2,$$

obteniéndose $Q = I \cos(2\psi) \cos(2\chi)$.

Finalmente, reemplazando $Q = I \cos(2\psi) \cos(2\chi)$ en (A.17) se obtiene $U = I \cos(2\chi) \sin(2\psi)$.

De esta forma, el vector de Stokes en términos de los parámetros de la elipse se define como (1.28).

B Apéndice B: Formalismo covariante de transferencia radiativa polarizada

B.1 Derivación de la ecuación de Maxwell en el gauge de Lorenz

En este apéndice se presentan los pasos detallados para derivar la ecuación de Maxwell en el gauge de Lorenz a partir de las ecuaciones de Maxwell en un espacio-tiempo curvo.

Iniciando con las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla_{\beta} F^{\alpha\beta} = 4\pi J^{\alpha}, \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \nabla_{\beta} F_{\gamma\alpha} = 0, \quad (\text{B.2})$$

donde $F_{\alpha\beta}$ es el tensor electromagnético y J^{α} es la cuadri-corriente.

El tensor electromagnético se expresa en términos del vector potencial A^{α}

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} A_{\beta} - \nabla_{\beta} A_{\alpha}. \quad (\text{B.3})$$

Sustituyendo la ecuación (B.3) en (B.1) se obtiene

$$\nabla_{\beta} (\nabla^{\alpha} A^{\beta} - \nabla^{\beta} A^{\alpha}) = 4\pi J^{\alpha}, \quad (\text{B.4})$$

$$\nabla_{\beta} \nabla^{\alpha} A^{\beta} - \nabla_{\beta} \nabla^{\beta} A^{\alpha} = 4\pi J^{\alpha}. \quad (\text{B.5})$$

Considerando que las derivadas covariantes no conmutan, se define el tensor de Riemann

$$\nabla_{\nu} \nabla_{\mu} A^{\alpha} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} A^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\nu\mu} A^{\beta}, \quad (\text{B.6})$$

contrayendo los índices α y ν

$$\nabla_\alpha \nabla_\mu A^\alpha - \nabla_\mu \nabla_\alpha A^\alpha = R_{\beta\mu} A^\beta, \quad (\text{B.7})$$

imponiendo el gauge de Lorenz $\nabla_\alpha A^\alpha = 0$, se anula el segundo término.

Elevando el índice de la derivada

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\mu A^\alpha &= R_{\beta\mu} A^\beta, \\ \nabla_\alpha g_{\mu\lambda} \nabla^\lambda A^\alpha &= R_{\beta\mu} A^\beta, \\ g_{\mu\lambda} \nabla_\alpha \nabla^\lambda A^\alpha &= R_{\beta\mu} A^\beta, \end{aligned}$$

y multiplicando por la métrica $g^{\mu\delta}$

$$\begin{aligned} g^{\mu\delta} g_{\mu\lambda} \nabla_\alpha \nabla^\lambda A^\alpha &= g^{\mu\delta} R_{\beta\mu} A^\beta, \\ \delta^\delta_\lambda \nabla_\alpha \nabla^\lambda A^\alpha &= R^\delta_\beta A^\beta, \\ \nabla_\alpha \nabla^\delta A^\alpha &= R^\delta_\beta A^\beta, \\ \nabla_\beta \nabla^\alpha A^\beta &= R^\alpha_\beta A^\beta. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando la expresión para $\nabla_\beta \nabla^\alpha A^\beta$ en (B.5) se obtiene que

$$-\nabla^\beta \nabla_\beta A^\alpha + R^\alpha_\beta A^\beta = 4\pi J^\alpha. \quad (\text{B.8})$$

B.2 Derivación de las leyes de la óptica geométrica

En esta sección se presentan los pasos detallados para derivar las leyes de la óptica geométrica utilizando la aproximación WKB.

Teniendo en cuenta la aproximación WKB, el vector potencial se puede expandir en términos de

un parámetro pequeño ε

$$A^\mu = (a^\mu + \varepsilon b^\mu + \varepsilon^2 c^\mu + \dots) \exp\left(i\frac{\theta}{\varepsilon}\right), \quad (\text{B.9})$$

donde $\theta = k_\alpha x^\alpha$ corresponde a un término de fase, el cual se puede escribir en términos del vector de onda, k_α .

Reemplazando la expresión para el vector potencial en el gauge de Lorenz

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha A^\alpha &= 0, \\ \nabla_\alpha [(a^\alpha + \varepsilon b^\alpha + \varepsilon^2 c^\alpha + \dots) e^{i\theta/\varepsilon}] &= 0, \\ [\nabla_\alpha (a^\alpha + \varepsilon b^\alpha + \varepsilon^2 c^\alpha + \dots)] e^{i\theta/\varepsilon} + \frac{i}{\varepsilon} k_\alpha (a^\alpha + \varepsilon b^\alpha + \varepsilon^2 c^\alpha + \dots) e^{i\theta/\varepsilon} &= 0, \\ e^{i\theta/\varepsilon} [\nabla_\alpha a^\alpha + \varepsilon \nabla_\alpha b^\alpha + \varepsilon^2 \nabla_\alpha c^\alpha + \dots] &= - \left(i \frac{k_\alpha a^\alpha}{\varepsilon} + i k_\alpha b^\alpha + i \varepsilon k_\alpha c^\alpha + \dots \right) e^{i\theta/\varepsilon}, \end{aligned}$$

De esta expresión, analizando el orden de cada término, se obtiene

$$O(1) \rightarrow \nabla_\alpha a^\alpha = -i k_\alpha b^\alpha, \quad (\text{B.10})$$

$$O(1/\varepsilon) \rightarrow k_\alpha a^\alpha = 0, \quad (\text{B.11})$$

$$O(\varepsilon) \rightarrow \nabla_\alpha b^\alpha = -i k_\alpha c^\alpha, \quad (\text{B.12})$$

$$O(\varepsilon^2) \rightarrow \nabla_\alpha c^\alpha = 0. \quad (\text{B.13})$$

La segunda expresión indica que a orden $1/\varepsilon$, la amplitud es perpendicular al vector de onda.

Considere la siguiente definición $J^\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \Pi^{\alpha\beta} A_\beta$, donde $\Pi^{\alpha\beta}$ se conoce como el tensor lineal de respuesta. Posteriormente, se encontrará que este tensor está relacionado con el proceso de absorción y rotación de Faraday. Reemplazando esta definición y la expresión para el vector potencial en (3.4)

$$-\nabla^\beta \nabla_\beta A^\alpha + R^\alpha{}_\beta A^\beta = 4\pi J^\alpha,$$

$$-\nabla^\beta \nabla_\beta \left[(a^\alpha + \varepsilon b^\alpha + \varepsilon^2 c^\alpha) e^{i\theta/\varepsilon} \right] + R^\alpha_\beta \left((a^\beta + \varepsilon b^\beta + \varepsilon^2 c^\alpha) e^{i\theta/\varepsilon} \right) = 4\pi \frac{1}{\varepsilon} \Pi^{\alpha\beta} (a_\beta + \varepsilon b_\beta + \varepsilon^2 c^\alpha) e^{i\theta/\varepsilon},$$

$$\begin{aligned} & -\nabla^\beta \left\{ e^{i\theta/\varepsilon} \left[\nabla_\beta (a^\alpha + \varepsilon b^\alpha + \varepsilon^2 c^\alpha) \right] + \frac{i}{\varepsilon} k_\beta e^{i\theta/\varepsilon} (a^\alpha + \varepsilon b^\alpha + \varepsilon^2 c^\alpha) \right\} + R^\alpha_\beta (a^\beta + \varepsilon b^\beta + \varepsilon^2 c^\alpha) e^{i\theta/\varepsilon} \\ & = 4\pi \frac{1}{\varepsilon} \Pi^{\alpha\beta} (a_\beta + \varepsilon b_\beta + \varepsilon^2 c^\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left[\nabla^\beta \nabla_\beta (a^\alpha + \varepsilon b^\alpha + \varepsilon^2 c^\alpha) \right] e^{i\theta/\varepsilon} - \frac{i}{\varepsilon} k^\beta e^{i\theta/\varepsilon} \nabla_\beta (a^\alpha + \varepsilon b^\alpha + \varepsilon^2 c^\alpha) \\ & - \frac{i}{\varepsilon} k_\beta e^{i\theta/\varepsilon} \nabla^\beta (a^\alpha + \varepsilon b^\alpha + \varepsilon^2 c^\alpha) - \frac{i}{\varepsilon} k_\beta (a^\alpha + \varepsilon b^\alpha + \varepsilon^2 c^\alpha) \frac{i}{\varepsilon} k^\beta e^{i\theta/\varepsilon} \\ & - \frac{i}{\varepsilon} e^{i\theta/\varepsilon} (a^\alpha + \varepsilon b^\alpha + \varepsilon^2 c^\alpha) \nabla^\beta k_\beta + R^\alpha_\beta (a^\beta + \varepsilon b^\beta + \varepsilon^2 c^\alpha) = 4\pi \frac{1}{\varepsilon} \Pi^{\alpha\beta} a_\beta + 4\pi \Pi^{\alpha\beta} b_\beta \\ & + 4\pi \varepsilon \Pi^{\alpha\beta} c_\beta \end{aligned}$$

Observe que los términos en la última ecuación involucran distintas potencias de ε : $\varepsilon^0, \varepsilon^1, 1/\varepsilon, 1/\varepsilon^2$. Por lo tanto, es posible igualar los términos que corresponden a cada orden de ε , obteniendo así

$$O(1/\varepsilon^2) \rightarrow k_\beta k^\beta a^\alpha = 0, \quad (\text{B.14})$$

$$O(1/\varepsilon) \rightarrow k^\beta \nabla_\beta a^\alpha + \frac{1}{2} a^\alpha \nabla_\beta k^\beta = 2\pi i \Pi^\alpha_\beta a^\beta. \quad (\text{B.15})$$

Es importante mencionar que los términos de orden $O(\varepsilon^0), O(\varepsilon)$ se desprecian en la aproximación WKB porque representan correcciones no dominantes de la óptica geométrica. Note que en la ecuación (B.14) la solución trivial corresponde a $a^\alpha = 0$, por ende, $k_\beta k^\beta = 0$. A partir de esta

expresión se puede obtener la ecuación geodésica

$$\begin{aligned} k_\beta k^\beta &= 0, \\ \nabla_\alpha (k_\beta k^\beta) &= 0, \\ k^\beta (\nabla_\alpha k_\beta) + k_\beta (\nabla_\alpha k^\beta) &= 0, \end{aligned}$$

utilizando la métrica para subir índices

$$\begin{aligned} k^\beta (\nabla_\alpha k_\beta) + g_{\beta\lambda} k^\lambda (\nabla_\alpha g^{\rho\beta} k_\rho) &= 0, \\ k^\beta (\nabla_\alpha k_\beta) + k^\lambda g_{\beta\lambda} g^{\rho\beta} (\nabla_\alpha k_\rho) &= 0, \\ k^\beta (\nabla_\alpha k_\beta) + k^\rho (\nabla_\alpha k_\rho) &= 0, \\ 2k^\beta (\nabla_\alpha k_\beta) &= 0, \end{aligned}$$

recordando que $k_\beta = \partial_\beta \theta$ es el gradiente de un escalar es posible intercambiar índices

$$2k^\beta (\nabla_\alpha \partial_\beta \theta) = 0,$$

$$k^\beta \nabla_\beta k^\alpha = 0. \tag{B.16}$$

Esta última ecuación corresponde a la ecuación de propagación para el vector de onda. Esta es una generalización de la primera ley de la óptica geométrica en el espacio-tiempo curvo.

Por otro lado, para obtener la tercera ley de la óptica geométrica, es necesario multiplicar la ecuación (B.15) por el conjugado

$$a^{*\beta} k^\mu \nabla_\mu a^\alpha = -\frac{1}{2} a^{*\beta} a^\alpha \nabla_\mu k^\mu + 2\pi i \Pi^\alpha{}_\mu a^\mu a^{*\beta}, \tag{B.17}$$

y aplicando la regla de Liebniz para la derivada covariante

$$\nabla_{\mu} \left(k^{\mu} a^{\alpha} a^{*\beta} \right) = a^{*\beta} k^{\mu} \nabla_{\mu} a^{\alpha} + a^{\alpha} k^{\mu} \nabla_{\mu} a^{*\beta} + a^{\alpha} a^{*\beta} \nabla_{\mu} k^{\mu}, \quad (\text{B.18})$$

observe que el primer término después del igual corresponde a la ecuación anterior (B.17). Reemplazando $a^{*\beta} k^{\mu} \nabla_{\mu} a^{\alpha}$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \left(k^{\mu} a^{\alpha} a^{*\beta} \right) &= -\frac{1}{2} a^{*\beta} a^{\alpha} \nabla_{\mu} k^{\mu} + 2\pi i \Pi^{\alpha}_{\mu} a^{\mu} a^{*\beta} + a^{\alpha} k^{\mu} \nabla_{\mu} a^{*\beta} + a^{\alpha} a^{*\beta} \nabla_{\mu} k^{\mu}, \\ &= \frac{1}{2} a^{*\beta} a^{\alpha} \nabla_{\mu} k^{\mu} + 2\pi i \Pi^{\alpha}_{\mu} a^{\mu} a^{*\beta} + a^{\alpha} k^{\mu} \nabla_{\mu} a^{*\beta}, \\ &= a^{\alpha} \left(\frac{1}{2} a^{*\beta} \nabla_{\mu} k^{\mu} + k^{\mu} \nabla_{\mu} a^{*\beta} \right) + 2\pi i \Pi^{\alpha}_{\mu} a^{\mu} a^{*\beta}, \end{aligned}$$

donde la expresión dentro del paréntesis corresponde a la ecuación (B.15) para el conjugado, así

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \left(k^{\mu} a^{\alpha} a^{*\beta} \right) &= 2\pi i a^{*\beta} \Pi^{\alpha}_{\mu} a^{\mu} - 2\pi i a^{\alpha} \Pi^{*\beta}_{\mu} a^{*\mu}, \\ &= 2\pi i (a^{*\beta} \Pi^{\alpha}_{\mu} a^{\mu} - a^{\alpha} \Pi^{*\beta}_{\mu} a^{*\mu}), \\ &= 2\pi i (g^{\beta\lambda} a^{*}_{\lambda} \Pi^{\alpha\mu} a_{\mu} - g^{\alpha\kappa} a_{\kappa} \Pi^{*\beta\mu} a^{*}_{\mu}), \\ &= 2\pi i (g^{\beta\lambda} \Pi^{\alpha\kappa} - g^{\alpha\kappa} \Pi^{*\beta\lambda}) a_{\kappa} a^{*}_{\lambda}, \end{aligned}$$

$$\nabla_{\kappa} \left(k^{\kappa} a^{\alpha} a^{*\beta} \right) = H^{\alpha\beta\kappa\lambda} a_{\kappa} a^{*}_{\lambda}, \quad (\text{B.19})$$

siendo

$$H^{\alpha\beta\kappa\lambda} = 2\pi i \left(g^{\beta\lambda} \Pi^{\alpha\kappa} - g^{\alpha\kappa} \Pi^{*\beta\lambda} \right). \quad (\text{B.20})$$

Finalmente, multiplicando la expresión (B.19) por la métrica a ambos lados de la igualdad se

obtiene

$$g_{\beta\alpha}\nabla_{\kappa}\left(k^{\kappa}a^{\alpha}a^{*\beta}\right)=2\pi i(g_{\beta\alpha}g^{\beta\lambda}\Pi^{\alpha\kappa}-g_{\beta\alpha}g^{\alpha\kappa}\Pi^{*\beta\lambda}),$$

teniendo en cuenta que la métrica permite subir índices, y $g_{\beta\alpha}g^{\beta\lambda}=\delta^{\lambda}_{\alpha}$ la expresión anterior se reescribe como

$$\nabla_{\kappa}(k^{\kappa}a^2)=2\pi i(\Pi^{\lambda\kappa}-\Pi^{*\kappa\lambda})a_{\kappa}a_{\lambda}^*. \quad (\text{B.21})$$

Note que si se tiene el caso específico del vacío, el tensor de respuesta se elimina y

$$\nabla_{\kappa}(k^{\kappa}a^2)=0. \quad (\text{B.22})$$

Esta última expresión es muy importante ya que corresponde a una ecuación de conservación. El término $k^{\kappa}a^2$ corresponde a una densidad de flujo del número de fotones a lo largo del haz.

B.3 Tensor de polarización

Antes de definir el tensor de polarización es importante considerar el tensor de energía momentum para una onda monocromática. Este se define como

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left[(F^{\mu}_{\rho})(F^{\nu\rho})-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}(F_{\rho\sigma})(F^{\rho\sigma})\right], \quad (\text{B.23})$$

y considerando un promedio temporal sobre un periodo

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\langle\text{Re}\{F^{\mu}_{\rho}\}\text{Re}\{F^{\nu\rho}\}-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\text{Re}\{F_{\rho\sigma}\}\text{Re}\{F^{\rho\sigma}\}\rangle=\frac{1}{8\pi}\langle a_{\rho}a^{*\rho}\rangle k^{\mu}k^{\nu}, \quad (\text{B.24})$$

la segunda igualdad se obtiene al reemplazar la definición del tensor electromagnético y la aproximación WKB para el potencial vectorial. Esta última expresión se puede extender para el caso de

una onda polarizada

$$(T^{\mu\nu})^{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi} \langle a^\alpha a^{*\beta} \rangle k^\mu k^\nu, \quad (\text{B.25})$$

esta expresión corresponde al tensor energía momentum para ondas electromagnéticas con un estado específico de polarización.

Ahora se considera un grupo de fotones, de forma que los haces se generalizan a un tubo de fotones. De esta forma, el tensor de energía momentum para este sistema se puede analizar estadísticamente. En el espacio de momentum, este tensor se puede escribir en términos de la función de distribución

$$T^{\mu\nu}(x) = \int f(x, p) p^\mu p^\nu dV_p, \quad (\text{B.26})$$

donde la función de distribución, $f(x, p)$, especifica la cantidad total de fotones que se encuentran en el volumen del espacio de fase $dV = d^3x d^3p$, en otras palabras, los estados accesibles del sistema

$$f(x, p) = \frac{dN(x, p)}{d^3x d^3p}. \quad (\text{B.27})$$

En el espacio de fase, el elemento de volumen espacial y de momentum se definen como

$$dV_x = \sqrt{-g} p^0 d^3x, \quad (\text{B.28})$$

$$dV_p = \frac{d^3p}{\sqrt{-g} p^0}. \quad (\text{B.29})$$

Es importante mencionar que, el volumen del espacio de fase ocupado por un conjunto de partículas es independiente de la posición a lo largo de las líneas de mundo de las partículas. Es decir, dicho volumen no cambia a medida que los fotones se desplazan a lo largo de sus trayectorias

$$\frac{dV}{d\lambda} = 0, \quad (\text{B.30})$$

siendo λ el parámetro afín de las geodésicas. Esta condición se conoce como teorema de Liouville. Note que las definiciones anteriores del elemento de volumen coinciden con este teorema,

su definición permite mantener invariante V . De igual manera, como el número de fotones es un invariante, entonces la función de distribución también lo es.

Considerando una onda monocromática con un momentum $k^\mu = (k^0, \vec{k})$, la función de distribución solo debe contribuir en el punto $\vec{p} = \vec{k}$ en el espacio de fase. De esta forma, la función de distribución puede escribirse como

$$f(x, p) = \frac{dN(x)}{d^3x} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{k}), \quad (\text{B.31})$$

sustituyendo esta expresión en la definición del tensor energía impulso

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) &= \int f(x, \vec{p}) p^\mu p^\nu dV_p \\ T^{\mu\nu}(x) &= \int \frac{dN(x)}{d^3x} \delta(\vec{p} - \vec{k}) p^\mu p^\nu dV_p, \\ &= \int \frac{dN(x)}{\sqrt{-g} d^3x} \delta(\vec{p} - \vec{k}) \frac{p^\mu p^\nu}{p^0} d^3p \\ T^{\mu\nu}(x) &= \frac{dN(x)}{\sqrt{-g}} \frac{k^\mu k^\nu}{k^0}. \end{aligned}$$

Generalizando para una onda monocromática polarizada, la función de distribución se considera ahora el tensor de distribución de polarización $f^{\alpha\beta}$, y el tensor de energía momentum se define como

$$(T^{\mu\nu})^{\alpha\beta} = \int f^{\alpha\beta}(x, \vec{p}) p^\mu p^\nu dV_p, \quad (\text{B.32})$$

siendo

$$f^{\alpha\beta}(x, \vec{p}) = \frac{dN^{\alpha\beta}(x, p)}{d^3x d^3p},$$

y en el espacio de momentum

$$f^{\alpha\beta}(x, \vec{p}) = \frac{dN^{\alpha\beta}(x)}{d^3x} \delta(\vec{p} - \vec{k}). \quad (\text{B.33})$$

Sustituyendo esto en (B.32) se obtiene

$$(T^{\mu\nu})^{\alpha\beta} = \frac{dN^{\alpha\beta}(x)}{\sqrt{-g}k^0 d^3x} k^\mu k^\nu, \quad (\text{B.34})$$

comparando (B.25) y esta última expresión se deriva que

$$\frac{dN^{\alpha\beta}(x)}{\sqrt{-g}k^0 d^3x} = \frac{1}{8\pi} \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle. \quad (\text{B.35})$$

Ahora, se hace necesario analizar la evolución de $f^{\alpha\beta}$ a lo largo de las geodésicas. Considere la distribución de $f^{\alpha\beta}$ en el volumen ΔV_p en un punto (x, p) , se tiene

$$\begin{aligned} f^{\alpha\beta} &= \frac{dN^{\alpha\beta}(x, \vec{p})}{d^3x d^3p} = \frac{dN^{\alpha\beta}(x, \vec{p})}{d^3x} \frac{1}{d^3p}, \\ &= \frac{1}{\Delta V_p} \sum_i \frac{1}{\sqrt{-g}k^0} \frac{dN^{\alpha\beta}}{d^3x}, \end{aligned}$$

$$f^{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta V_p} \frac{1}{8\pi} \sum_i \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle,$$

donde la sumatoria sobre i se considera al tener en cuenta todos los posibles modos de vibración.

Para considerar como cambia $f^{\alpha\beta}$ a lo largo de las geodésicas se usa el parámetro afín λ

$$\begin{aligned}
 k^\mu \nabla_\mu f^{\alpha\beta} &= k^\mu \nabla_\mu \left[\frac{1}{\Delta V_p} \frac{1}{8\pi} \sum_i \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle \right], \\
 &= \frac{1}{8\pi} k^\mu \nabla_\mu \left[\frac{1}{\Delta V_p} \sum_i \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle \right], \\
 &= \frac{1}{8\pi} \left[k^\mu \nabla_\mu \left(\frac{1}{\Delta V_p} \right) \sum_i \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle + \frac{1}{\Delta V_p} k^\mu \nabla_\mu \sum_i \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle \right], \\
 &= \frac{1}{8\pi \Delta V_p} \left[\Delta V_p k^\mu \nabla_\mu \left(\frac{1}{\Delta V_p} \right) \sum_i \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle + k^\mu \nabla_\mu \sum_i \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle \right].
 \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que, para un campo escalar el término $k^\mu \nabla_\mu$ corresponde a la derivada direccional, es decir

$$\frac{\partial V_p}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V_p}{\partial t} dt + \frac{\partial V_p}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial V_p}{dx^\mu},$$

$$\frac{dV_p}{d\lambda} = \frac{\partial V_p}{dx^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = k^\mu \frac{\partial V_p}{dx^\mu}.$$

Utilizando esto, la expresión anterior se reescribe como

$$k^\mu \nabla_\mu f^{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi \Delta V_p} \left[\Delta V_p \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\Delta V_p} \right) \sum_i \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle + k^\mu \nabla_\mu \sum_i \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle \right],$$

note que el segundo término de esta expresión está relacionado con (B.19)

$$H^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} a^\mu a^{*\nu} - a^\alpha a^{*\beta} \nabla_\mu k^\mu = k^\mu \nabla_\mu a^\alpha a^{*\beta}, \tag{B.36}$$

reemplazando

$$\begin{aligned} k^\mu \nabla_\mu f^{\alpha\beta} &= \frac{1}{8\pi\Delta V_p} \sum_i \left[-\langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle \frac{d}{d\lambda} \ln \Delta V_p + H^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \langle a_i^\mu a_i^{*\nu} \rangle - \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle \nabla_\mu k^\mu \right], \\ &= \frac{1}{8\pi\Delta V_p} \sum_i \left[H^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \langle a_i^\mu a_i^{*\nu} \rangle - \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle \left(\nabla_\mu k^\mu + \frac{d}{d\lambda} \ln V_p \right) \right]. \text{Orden } 0 \end{aligned}$$

Utilizando la condición de continuidad del tubo de fotones, se reemplaza el segundo término por

$$\nabla_\mu k^\mu = \frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{d\lambda}, \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned} k^\mu \nabla_\mu f^{\mu\alpha\beta} &= \frac{1}{8\pi\Delta V_p} \sum_i \left[H^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \langle a_i^\mu a_i^{*\nu} \rangle - \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle \left(\frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{d\lambda} + \frac{d}{d\lambda} \ln \Delta V_p \right) \right], \\ &= \frac{1}{8\pi\Delta V_p} \sum_i \langle a_i^\mu a_i^{*\nu} \rangle H^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi\Delta V_p} \sum_i \langle a_i^\alpha a_i^{*\beta} \rangle \left(\frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{d\lambda} + \frac{d}{d\lambda} \ln \Delta V_p \right), \end{aligned}$$

el primer y segundo término son exactamente la definición del tensor de distribución de polarización

$$\begin{aligned} k^\mu \nabla_\mu f^{\mu\alpha\beta} &= H^{\alpha\beta\mu\nu} f_{\mu\nu} - f^{\alpha\beta} \frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{d\lambda} - f^{\alpha\beta} \frac{d}{d\lambda} \ln \Delta V_p, \\ &= H^{\alpha\beta\mu\nu} f_{\mu\nu} - f^{\alpha\beta} \frac{d}{d\lambda} [\ln \Delta V \Delta V_p], \end{aligned}$$

utilizando el teorema de Liouville, el segundo término se elimina

$$k^\mu \nabla_\mu f^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\mu\nu} f_{\mu\nu}. \quad (\text{B.38})$$

Es importante aclarar que en este procedimiento no se tuvo en cuenta el origen de los fotones,

por ende, es necesario agregar un término de fuente. Finalmente

$$k^\mu \nabla_\mu f^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta\mu\nu} f_{\mu\nu}. \quad (\text{B.39})$$