

CONTINUOS G-PSEUDO-CONTRAÍBLES.

MARÍA ANGÉLICA OLIVEROS CAICEDO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2022

CONTINUOS G-PSEUDO-CONTRAÍBLES.

MARÍA ANGÉLICA OLIVEROS CAICEDO

Trabajo de Grado para optar al título de
Magíster en Matemáticas

Director

Javier Enrique Camargo García

Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2022

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al profesor Javier Enrique Camargo García por su apoyo, tiempo y dedicación que me brindó para la realización de este trabajo. A mi padre, hermanas, amigos y compañeros por el apoyo durante este proceso para titularme como magister.

CONTENIDO

	pág.
1. INTRODUCCIÓN	9
2. PRELIMINARES	11
2.1. Sobre continuos	11
2.2. Límite superior e inferior.	27
3. UN DENDROIDE NO g-CONTRÁCTIL	32
3.1. Imágenes y preimágenes del cono de Cantor	32
3.2. Sobre contráctil y g -contráctil	39
3.3. El dendroide X_L	53
4. PSEUDO Y g-PSEUDO CONTRACTIBILIDAD.	63
4.1. Pseudo-contráctil	63
4.2. G -pseudo-contráctil	74
BIBLIOGRAFÍA	83

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Curva senoidal del topólogo.	12
Figura 2. Círculo de Varsovia.	13
Figura 3. Doble curva senoidal.	15
Figura 4. Abanico armónico.	16
Figura 5. Unicoherente y no unicoherente.	17
Figura 6. La circunferencia unitaria S^1 .	18
Figura 7. La espiral \bar{R} .	18
Figura 8. Espacio Peine.	20
Figura 9. Abanico estrellado.	21
Figura 10. Sucesión de abanicos armónicos	23
Figura 11. Continuo de Knaster	26
Figura 12. Sucesión de segmentos	28
Figura 13. Abanico no suave.	31
Figura 14. Espacio de Cantor \mathcal{C} .	34
Figura 15. Cono(\mathcal{C})	34
Figura 16. El dendroide V .	45
Figura 17. El dendroide F .	46
Figura 18. El dendroide Z	46
Figura 19. Abanico como imagen continua de $Cono(\mathcal{C})$	50
Figura 20. El dendroide Z	54
Figura 21. El dendroide X_L	55
Figura 22. El conjunto $N(X_L)$.	56
Figura 23. El conjunto $K(X_L)$.	57

Figura 24. Continuo de Kuperberg.

65

RESUMEN

TÍTULO: CONTINUOS G-PSEUDO-CONTRAÍBLES. *

AUTOR: MARÍA ANGÉLICA OLIVEROS CAICEDO. **

PALABRAS CLAVE: CONTINUO, HOMOTOPÍA, PSEUDO-HOMOTOPÍA.

DESCRIPCIÓN:

Un continuo es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un continuo X es contraíble si existen una función continua $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ y un punto p de X tales que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = p$, para cada $x \in X$. R H Bing introduce la noción de pseudo-contraíble de la siguiente forma: Un continuo X es pseudo-contraíble si existen un continuo K , dos puntos a y b en K , un punto p en X y una función continua $H: X \times K \rightarrow X$ tales que $H(x, a) = x$ y $H(x, b) = p$, para cada $x \in X$. Años más tarde, David Bellamy generaliza la noción de contractibilidad de la siguiente manera: Un continuo X es g -contraíble si existen una función continua y sobreyectiva $f: X \rightarrow X$, un punto p de X y una función continua $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tales que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = p$, para cada $x \in X$. Con las ideas de Bing y Bellamy, resulta natural definir la noción de g -pseudo-contraíble, que fue definido posteriormente, de la siguiente manera: Un continuo X es g -pseudo-contraíble si existen un continuo K , dos puntos a y b de K , una función sobreyectiva $f: X \rightarrow X$, un punto p de X y una función continua $H: X \times K \rightarrow X$ tales que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = p$, para cada $x \in X$.

Mostraremos propiedades, ejemplos y relaciones entre estas nociones derivadas de la contractibilidad en continuos.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Ph.D. en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: CONTINUOUS G -PSEUDO-CONTRACTIBLE. *

AUTHOR: MARÍA ANGÉLICA OLIVEROS CAICEDO **

KEYWORDS: CONTINUOUS, HOMOTOPY, PSEUDO-HOMOTOPY.

DESCRIPTION:

A continuum is a nonempty, compact and connected metric space. A continuum X is contractible if there exist a continuous function $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ and a point p of X such that $H(x, 0) = x$ and $H(x, 1) = p$, for each $x \in X$. R H Bing introduces the notion of pseudo-continuum as follows: A continuum X is pseudo-contractible if there exist a continuum K , two points a and b in K , a point p in X and a continuous function $H: X \times K \rightarrow X$ such that $H(x, a) = x$ and $H(x, b) = p$, for each $x \in X$. Later, David Bellamy generalizes the notion of contractibility as follows: A continuum X is g -contractible if there exist a continuous and sobrejective function $f: X \rightarrow X$, a point p of X and a continuous function $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ such that $H(x, 0) = f(x)$ and $H(x, 1) = p$, for each $x \in X$. With the ideas of Bing and Bellamy, it is natural to define the notion of g -pseudo-contractible, which was subsequently defined, as follows: A continuum X is g -pseudo-contractible if there exist a continuum K , two points a and b of K , an sobrejective function $f: X \rightarrow X$, a point p of X and a continuous function $H: X \times K \rightarrow X$ such that $H(x, a) = f(x)$ and $H(x, b) = p$, for each $x \in X$. We will show properties, examples and relations between these notions derived from contractibility in continua.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Javier Enrique Camargo García, Ph.D. in Mathematics.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de continuos es la rama de la topología que estudia los espacios métricos no vacíos, compactos y conexos. Sobre estos espacios desarrollaremos las distintas nociones relacionadas con la contractibilidad.

Intuitivamente, dos funciones continuas son homotópicas si una de ellas puede deformarse continuamente en la otra. La noción de homotopía permite introducir el concepto de contractibilidad. Se dice que un espacio topológico X es contráctil, si la función identidad es homotópica a una función constante. Podemos pensar que un continuo X es contráctil, si se deforma de manera continua dentro de sí mismo hasta llegar a un punto en él. Ejemplos sencillos de continuos contráctiles son: el intervalo cerrado $[0, 1]$, cualquier n -celda $[0, 1]^n$, o más general, cualquier convexo contenido en un espacio euclídeo \mathbb{R}^n .

En 1970 el profesor David Bellamy en ¹ introduce una generalización de la contractibilidad conocida como g -contractibilidad o contractibilidad generalizada.

Definición 1.0.1 *Un continuo X es g -contráctil si existe una función continua y sobreyectiva $f: X \rightarrow X$ tal que es homotópica a una función constante.*

Veremos que la clase de continuos g -contráctiles incluye propiamente a los continuos localmente conexos, los continuos contráctiles y aquellos que son imagen y preimagen continuas del cono de Cantor.

Włodzimirz Kuperberg en ² introduce los continuos uniformemente conexos por ca-

¹ D. BELLAMY. "Mapping continua onto the cone over the Cantor set". En: *Studies in Topology*. Elsevier, 1975, págs. 43-45.

² W. KUPERBERG. "Uniformly pathwise connected continua". En: *Studies in Topology*. Elsevier, 1975, págs. 315-324.

minos (definición que mostraremos en su momento) y caracteriza a estos continuos de la siguiente forma.

Teorema 1.0.2 *Un continuo es uniformemente conexo por caminos si, y solo si, es imagen continua del cono de Cantor.*

Luego, el profesor Bellamy mostró que todo continuo g -contráctil es uniformemente conexo por caminos. Preguntando luego si su recíproco se cumplía. Iwona Krezemiska y Janusz Prajs en ³ dan respuesta negativa a su pregunta. Por otra parte, en ⁴, se construye una familia de dendroides que son uniformemente conexos por caminos y no son g -contráctiles. Esta construcción es mucho más simple que el ejemplo de Krezemiska y Prajs. Además, en ⁴, se muestran más propiedades de estos dendroides que presentaremos en el desarrollo de este trabajo.

Por otra parte, R. H. Bing introduce el concepto de pseudo-contractibilidad, generalizando la noción de homotopía a pseudo-homotopía, donde se modifica al dominio de la homotopía de $X \times [0, 1]$ a $X \times K$, donde K es un continuo arbitrario. Esta variación da origen a los conceptos de pseudo-contráctil y g -pseudo-contráctil.

En el desarrollo de nuestro trabajo mostraremos un estudio de estas clases de continuos, mostraremos diversos ejemplos de continuos e intentaremos hacer una recopilación alrededor de estos importantes conceptos en la topología general.

³ I KRZEMIŃSKA y J. PRAJS. "A non- g -contractible uniformly path connected continuum". En: *Topology and its Applications* 91.2 (1999), págs. 151-158.

⁴ J. CAMARGO, P. PELLICER-COVARRUBIAS y M. RINCÓN. "On g -contractibility of continua". En: *Topology and its Applications* 160.3 (2013), págs. 461-474.

2. PRELIMINARES

En este capítulo introducimos los conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Este capítulo lo dividimos en dos secciones: La Sección 1.1 es dedicada a mostrar propiedades generales de los continuos, y la Sección 1.2 donde estudiamos aspectos relacionados con convergencia de conjuntos.

2.1. Sobre continuos

Un *continuo* es un espacio métrico compacto y conexo diferente de vacío. En esta sección daremos algunas definiciones, proposiciones y teoremas en continuos. Un *arco* es un continuo homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Si α es un arco y $h: [0, 1] \rightarrow \alpha$ es un homeomorfismo, entonces los puntos $h(0)$ y $h(1)$ en α serán los puntos extremos o puntos de no corte del arco α . En este caso, también nos referiremos al arco α como: el arco entre $h(0)$ y $h(1)$.

Definición 2.1.1 Un continuo X es *localmente conexo* si, para todo $x_0 \in X$ y para cada abierto U de X con $x_0 \in U$, existe un abierto conexo V de X tal que $x_0 \in V \subseteq U$.

Los continuos localmente conexo son llamados también continuos de Peano.

Definición 2.1.2 Un continuo X se dice *arcoconexo*, si para cualesquiera x e y en X , existe un encaje $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Esto es, $\alpha([0, 1])$ es un arco entre x e y .

Notemos que por ⁵, un continuo X es arcoconexo si, y solo si, para cada x e y en X existe una función continua $f: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Veamos

⁵ J. CAMARGO y E. VILLAMIZAR. *Topología general*. Colombia: Ediciones UIS, 2020.

algunos continuos que satisfacen y no satisfacen la propiedad de ser arcoconexo y localmente conexo.

Ejemplo 2.1.3 El continuo $[0, 1]^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, se conoce como n -celda, es arcoconexo; pues, si $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ y $y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ son puntos de $[0, 1]^n$, tenemos que $tx + (1-t)y = \langle tx_1 + (1-t)y_1, tx_2 + (1-t)y_2, \dots, tx_n + (1-t)y_n \rangle \in [0, 1]^n$, para cada $0 \leq t \leq 1$.

Con el mismo argumento se puede probar que el Cubo de Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ es un continuo arcoconexo.

Ejemplo 2.1.4 Sea $S = \{(x, \text{sen}(1/x)) : x \in (0, 1]\}$. Observe que S es conexo pues, es la imagen del intervalo $(0, 1]$ bajo la función continua $f(x) = (x, \text{sen}(1/x))$. Así, la adherencia \bar{S} es la unión de S con el intervalo $\{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$, es un continuo. El continuo \bar{S} es conocido como la curva senoidal del topólogo. \bar{S} no es arcoconexo ni localmente conexo.

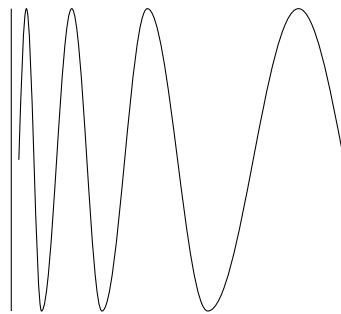


Figura 1. Curva senoidal del topólogo.

Si llamamos W al continuo definido a partir de tomar a \bar{S} unido con un arco que vaya de $(1, \text{sen}(1))$ al punto $(0, -1)$, tendremos el continuo conocido como el círculo de Varsovia. El círculo de Varsovia lo describimos en la Figura 2. El círculo de Varsovia es un continuo arcoconexo que no es localmente conexo.

La siguiente proposición nos permite dar la propiedad de arcoconexo a la imagen continua de un arcoconexo, de la siguiente manera. Sean X y Y continuos. Si

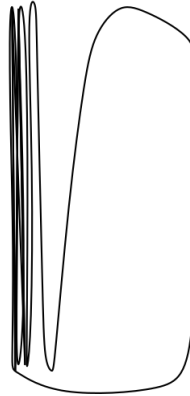


Figura 2. Círculo de Varsovia.

X es arcoconexo y $f: X \rightarrow Y$ es una función continua y sobreyectiva, entonces Y es arcoconexo. Sean X y Y continuos y $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Sean y_1 y y_2 puntos en Y . Como f es sobreyectiva, existen x_1 y x_2 puntos en X tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Como X es arcoconexo, tenemos que dados existe $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_1$ y $\alpha(1) = x_2$. Así, $\beta = f \circ \alpha: [0, 1] \rightarrow Y$ es una función continua tal que $\beta(0) = f(\alpha(0)) = y_1$ y $\beta(1) = f(\alpha(1)) = y_2$, por tanto, Y es arcoconexo.

Para los continuos localmente conexos, tenemos un resultado similar. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Si f es abierta o cerrada y X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.

Note que toda función continua entre continuos es cerrada pues, dados $f: X \rightarrow Y$ continua entre continuos y A un cerrado de X , como X es compacto, A es compacto; así, $f(A)$ es compacto. Como todo compacto en un espacio de Hausdorff es cerrado, $f(A)$ es cerrado y f es cerrada. De lo anterior es inmediata la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.1.5 *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Definición 2.1.6 Sea $M \subseteq X$, diremos que $L \subseteq M$ es llamada *arccomponente* si

L es un arcoconexo máximo de M , es decir, si N es un arcoconexo en M y $L \subseteq N$, entonces $L = N$.

Entendemos que un espacio es conexo, si no se puede separar en subconjuntos propios abiertos y cerrados. Para estudiar aquellos pedazos, podemos estudiarlos a partir de dos puntos distintos que están en un mismo conexo, es decir, en el conjunto de conexos que une a un punto con otro punto en el espacio. Con esto generamos una partición de la siguiente manera. Sea X un espacio topológico. Decimos que $x \sim y$ si existe un conexo Z tal que $\{x, y\} \subseteq Z$. De esto, una clase, también llamada componente de X , se define para cada $x \in X$ por:

$$C_x = \{y \in X : \text{existe un subconjunto conexo } Z \text{ de } X \text{ tal que } \{x, y\} \subseteq Z\}.$$

Estas componentes también las podemos definir como mostramos a continuación.

Definición 2.1.7 Dados X un continuo y $M \subseteq X$, diremos que $L \subseteq M$ es una *componente* de M , si L es un conexo maximal de M ; es decir, siempre que N es un conexo de M y $L \subseteq N$, entonces $N = L$.

Dado un punto $x \in M$ y M un subconjunto de un continuo X , la componente que tiene al punto x en M , se puede describir como:

$$C_x = \bigcup \{Z \subseteq M : Z \text{ es conexo y } x \in Z\}.$$

Con la definición anterior, puede verse que toda arcocomponente está contenida en una componente. Sin embargo, existen arcocomponentes que no son componentes, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.8 Sea $V = \{(x, \text{sen}(1/x)) : x \in [-1, 1] \setminus \{0\}\}$. No es difícil ver que \bar{V} es un continuo y por tanto conexo, pero tiene tres arcocomponentes. Véase la Figura 3.

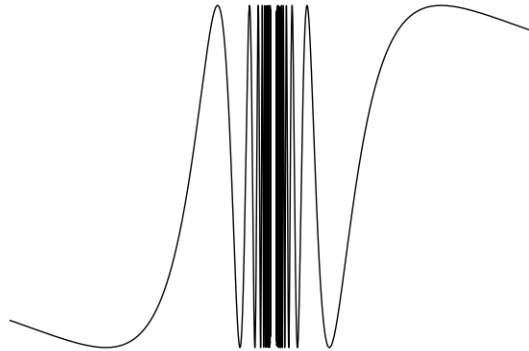


Figura 3. Doble curva senoidal.

El siguiente teorema caracteriza los continuos localmente conexos.

Teorema 2.1.9 *Sea X un continuo. Entonces, X es localmente conexo si, y solo si, cada componente de cualquier abierto en X es abierta.*

Sea X un continuo. Supongamos primero que X es localmente conexo. Sean U un abierto de X y C una componente de U . Sea $p \in C$. Como X es localmente conexo, existe un abierto conexo V tal que $p \in V \subseteq U$. Como C es componente de U , $V \subseteq C$. Así, C es abierto.

Recíprocamente, sean $p \in X$ y U un abierto de X tal que $p \in U$. Sea V la componente de U tal que $p \in V$. Por hipótesis, V es abierto. Así, $p \in V \subseteq U$ y X es localmente conexo en p . Como p se tomó de manera arbitraria, X es localmente conexo.

La siguiente definición nos será de utilidad más adelante.

Definición 2.1.10 *Sea X un continuo. Diremos que X es hereditariamente arcoconexo si cada subcontinuo de X es arcoconexo.*

El arco es hereditariamente arcoconexo. Una n -celda $[0, 1]^n$ es arcoconexo, como mostramos en el Ejemplo 2.1.3, pero no es hereditariamente arcoconexo. De la misma manera, el círculo de Varsovia, definido en el Ejemplo 2.1.4, es arcoconexo pero

no hereditariamente arcoconexo; pues, contiene una curva senoidal del topólogo que no es arcoconexo.

El abanico armónico es otro ejemplo de un continuo hereditariamente arcoconexo, que usaremos con mucha frecuencia en este trabajo, y definiremos con detalle a continuación.

Ejemplo 2.1.11 Sea L el continuo definido en \mathbb{R}^2 por:

$$L = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = tp \text{ con } p \in P \text{ y } t \in [0, 1]\},$$

donde $P = \{(1, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 0)\}$. El continuo \bar{L} es conocido como el abanico armónico. No es difícil ver que \bar{L} es un continuo hereditariamente arcoconexo que lo representamos en la Figura 4.

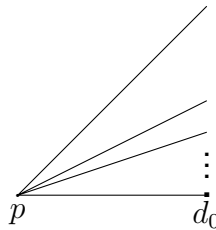


Figura 4. Abanico armónico.

Definición 2.1.12 Diremos que un continuo X es *únicamente arcoconexo* si dados $x, y \in X$ existe un único arco en X entre x y y .

El arco, el círculo de Varsovia definido en el Ejemplo 2.1.4 y el abanico armónico son ejemplos de continuos únicamente arcoconexos. Por otra parte, la 2-celda $[0, 1]^2$, no es únicamente arcoconexo; pues, si tomamos los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$, los conjuntos

$$A = \{(x, y) : x = y\}; \mathbf{y}$$

$$B = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, 1]),$$

son arcos distintos en $[0, 1]^2$, con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Definición 2.1.13 Un continuo X se dice *unicoherente*, si cuando $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de X , tenemos que $A \cap B$ es conexo. Además, diremos que X es hereditariamente unicoherente si todo subcontinuo es unicoherente.

Una de las caracterizaciones de la unicoherencia hereditaria es: X es hereditariamente unicoherente si, y solo si, $A \cap B$ es conexo para cualesquiera subcontinuos A y B de X .

La unicoherencia y la no unicoherencia de un continuo puede verse como las representamos en la Figura 5.

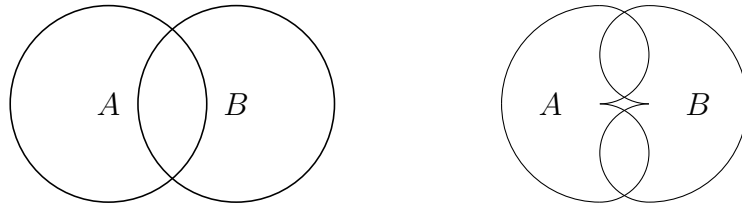


Figura 5. Unicoherente y no unicoherente.

Ejemplo 2.1.14 Sea el continuo $[0, 1]$. Veamos que $[0, 1]$ es unicoherente. Sean A y B subcontinuos de $[0, 1]$ tales que $[0, 1] = A \cup B$. Observe que es suficiente considerar $A = [0, a]$ y $B = [b, 1]$. Así,

$$[0, a] \cap [b, 1] = \begin{cases} [b, a], & \text{si } b < a; \\ a, & \text{si } a = b, \end{cases}$$

el cual es conexo. Por otra parte, la circunferencia unitaria $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ no es unicoherente; pues, si A y B son arcos que unen los puntos p y q con $p, q \in S^1$, como se puede ver en la Figura 6, $A \cup B = S^1$ y $A \cap B = \{p\} \cup \{q\}$ el cual no es conexo. Así, S^1 no es unicoherente.

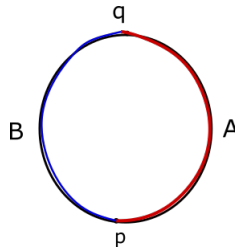


Figura 6. La circunferencia unitaria S^1 .

A continuación mostramos un ejemplo de un continuo unicoherente que no es hereditariamente unicoherente.

Ejemplo 2.1.15 Sea $R = \{((1 + \frac{1}{t}) \cos t, (1 + \frac{1}{t}) \sin t) \mid t \in [1, \infty)\}$. No es difícil ver que el continuo $\bar{R} = R \cup S^1$ es unicoherente y no es hereditariamente unicoherente. Ver Figura 7.

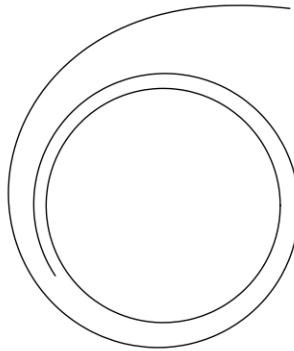


Figura 7. La espiral \bar{R} .

La siguiente propiedad es útil para el estudio de los continuos unicoherentes.

Definición 2.1.16 Sea X un espacio topológico. Decimos que X tiene la *propiedad b)*, si para cada función continua $f: X \rightarrow S^1$, existe una función continua $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = e^{ig(x)}$, para todo $x \in X$. A la función g se le llama levantamiento de f .

Si un continuo tiene la propiedad *b)* mencionada anteriormente, tendremos que éste es unicoherente, veamos el siguiente teorema.

Teorema 2.1.17 *Todo continuo X con la propiedad b) es unicoherente.*

Sea X un continuo que tiene la propiedad b). Supongamos que X no es unicoherente. Entonces existen subcontinuos A y B de X , tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ desconexo. Entonces, $A \cap B = F_1 \cup F_2$, donde F_1 y F_2 son cerrados, disjuntos y no vacíos de X .

Definimos $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$\varphi(x) = \pi \cdot \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$$

y $f: X \rightarrow S^1$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{i\varphi(x)}, & \text{si } x \in A; \\ e^{-i\varphi(x)}, & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Observe que si $x \in A \cap B$, entonces $\varphi(x) = 0$ o $\varphi(x) = \pi$ y por tanto, $e^{i\varphi(x)} = e^{-i\varphi(x)}$ para toda $x \in A \cap B$. Así, f es continua. Por hipótesis X tiene la propiedad b), entonces existe una función continua $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\phi(x)}$ para cada $x \in X$, esto implica que $f(x) = e^{i\phi(x)} = e^{i\varphi(x)}$ para cada $x \in A$ y $f(x) = e^{-i\phi(x)} = e^{-i\varphi(x)}$ para cada $x \in B$. Puesto que A y B son conexos, entonces existe $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(x) = 2k_1\pi + \phi(x)$ para cada $x \in A$ y $-\varphi(x) = 2k_2\pi + \phi(x)$ para cada $x \in B$. Por lo tanto, $\varphi(x) = \pi(k_1 - k_2)$ con $x \in A \cap B$ lo cual es una contradicción. Luego $A \cap B$ es conexo. Así, X es unicoherente. Sea $r: \overline{W} \rightarrow S^1$ definida por $r(z) = z/\|z\|$, para cada $z \in \overline{W}$, donde W se definió en el Ejemplo 2.1.15. Como $r|_{S^1}$ es la función identidad, no existe una función continua $g: \overline{W} \rightarrow S^1$ tal que $f(z) = e^{ig(z)}$ para cada $z \in \overline{W}$. Esto es, \overline{W} no tiene la propiedad b). Sin embargo, como mencionamos en el Ejemplo 2.1.15, \overline{W} es unicoherente. Esto muestra que el recíproco del Teorema 2.1.17 no se tiene.

Teniendo las definiciones de hereditariamente unicoherente y arcoconexo, podre-

mos como Knaster, en los años 60, introducir la noción de dendroide, la cual definió de la siguiente manera:

Definición 2.1.18 Un continuo X es llamado *dendroide* si es arcoconexo y hereditariamente unicoherente.

El arco y el abanico armónico son ejemplos de dendroides. Veamos algunos otros ejemplos de dendroides.

Ejemplo 2.1.19 Sea

$$X = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \right) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\}).$$

No es difícil ver que X es un dendroide y se conoce como el *Espacio Peine*. El espacio Peine lo describimos en la Figura 8,

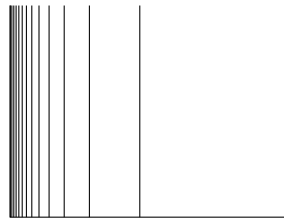


Figura 8. Espacio Peine.

En los siguientes ejemplos, dados dos puntos a y b de \mathbb{R}^2 , denotaremos por ab la combinación convexa entre a y b ; esto es, $ab = \{ta + (1 - t)b : t \in [0, 1]\}$.

Ejemplo 2.1.20 Tomamos los siguientes puntos en \mathbb{R}^2 : $o = (0, 0)$, $p = (-1, 0)$, $q = (1, 0)$, $r = (0, 1)$, $s = (0, -1)$ y sean $p_n = (-1, -\frac{1}{n})$, $q_n = (1, \frac{1}{n})$, $u_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $v_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $w_n = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$, $z_n = (-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$, $s_n = (0, -1 - \frac{1}{n})$ y $r_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Defina

$$X = pq \cup rs \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (pu_n \cup u_n r_n \cup r_n v_n \cup v_n q_n) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (qw_n \cup w_n s_n \cup s_n z_n \cup z_n p_n)$$

como puede verse en la Figura 9.

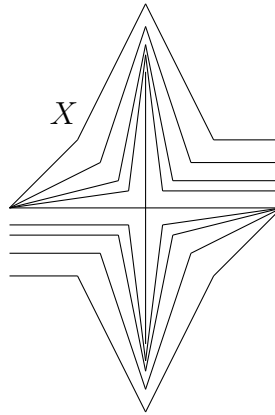


Figura 9. Abanico estrellado.

Una propiedad en los dendroides es que dados $p, q \in X$, existe un único arco que los une, esto se puede evidenciar en los ejemplos 2.1.19 y 2.1.20. A partir de esta propiedad se define la siguiente caracterización en los dendroides.

Sea X un continuo. Entonces, X es un dendroide si, y solo si, X es hereditariamente arcoconexo y únicamente arcoconexo.

Sea X un dendroide. Veamos primero que X es únicamente arcoconexo. Supongamos lo contrario; es decir, supongamos que existen dos puntos x y y , y dos encajes diferentes $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$ tales que $\alpha(0) = \beta(0) = x$, $\alpha(1) = \beta(1) = y$. Sabemos que $\{t \in [0, 1] : \alpha(t) = \beta(t)\}$ es cerrado de $[0, 1]$ (véase en ⁵). Sea U una componente de $[0, 1] \setminus \{t \in [0, 1] : \alpha(t) = \beta(t)\}$. Por el Teorema 2.1.9, U es abierto y por tanto $U = (a, b)$, donde $\{a, b\} \subseteq \{t \in [0, 1] : \alpha(t) = \beta(t)\}$. Nótese que $\alpha([a, b]) \cup \beta([a, b])$ es homeomorfo a S^1 . Esto contradice que X es hereditariamente unicoherente. Así, X es únicamente arcoconexo.

Probemos ahora que X es hereditariamente arcoconexo. Supongamos ahora que existe un subcontinuo Z de X tal que Z no es arcoconexo; esto es, existen z_1 y z_2 en Z que no se pueden unir por un arco en Z . Como estos puntos están en X y X es arcoconexo, tenemos que existe un arco λ en X con puntos extremos z_1 y z_2 . De lo anterior, $Z \cap \lambda$ no es conexo. Pero esto contradice que X es hereditariamente unicoherente, y X es hereditariamente arcoconexo.

Recíprocamente, sea X un continuo hereditariamente arcoconexo y únicamente arcoconexo. Como X es hereditariamente arcoconexo, X es arcoconexo. Supongamos que X no es hereditariamente unicoherente, es decir, existen subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ es desconexo. Sean p y q puntos en diferentes componentes de $A \cap B$. Como A y B son arcoconexos, existen arcos λ y ω en A y B , respectivamente, tales que unen a p y q . Esto contradice que X es únicamente arcoconexo. De lo anterior, X es hereditariamente unicoherente y por tanto, un dendroide.

La siguiente proposición es inmediata de Proposición 2.1.

Todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide.

Continuaremos dando definiciones y propiedades que podemos destacar en continuos y en particular, en dendroides.

Definición 2.1.21 Dado un continuo X , definimos:

$$N(X) = \{x \in X : X \text{ no es localmente conexo en } x\}.$$

El conjunto de los puntos donde el continuo X es localmente conexo lo denotaremos por $L(X) = X \setminus N(X)$.

Como se puede verificar fácilmente, el abanico armónico, el círculo de Varsovia y la curva senoidal del topólogo son continuos en donde $\overline{N(X)}$ es un arco.

Definición 2.1.22 Un continuo X se llama *conexo pequeño en x* si para cada vecindad V de x , existe una vecindad conexa W de x tal que $W \subseteq V$. Diremos que X es conexo en pequeño, si lo es en todo punto. Definimos

$$K(X) = \{x \in X : X \text{ no es conexo en pequeño en } x\}.$$

Nótese que, por definición, si X es localmente conexo en un punto p , entonces X es conexo en pequeño en p . El siguiente ejemplo muestra que el recíproco no es cierto.

Ejemplo 2.1.23 Sea X la sucesión de abanicos armónicos que convergen a un punto p , como se muestra en la Figura 10.

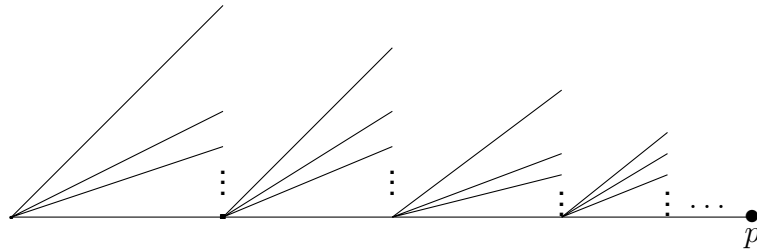


Figura 10. Sucesión de abanicos armónicos

El continuo X es conexo en pequeño en p , pero no es localmente conexo en p .

Sin embargo, estos conceptos son equivalentes de manera global; esto es, un continuo es localmente conexo si, y solo si, es conexo en pequeño (véase en ⁵).

En los siguientes teoremas involucramos a ciertas familias de puntos, las funciones continuas. Estos resultados serán usados con frecuencia en los siguientes capítulos.

Lema 2.1.24 Sean X y Y continuos y $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Si $y \in Y$ y K es un subcontinuo de X tal que $f^{-1}(y) \subseteq \text{Int}_X(K)$, entonces $y \in \text{Int}_Y f(K)$.

Supongamos que $y \notin \text{Int}_Y(f(K))$; es decir, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ en $Y \setminus f(K)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Note que $f^{-1}(y_n) \cap (X \setminus K) \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $X \setminus K$ tal que $x_n \in f^{-1}(y_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X es compacto, existen una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, y $x \in X$, tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Claramente $x \in \text{Cl}_X(X \setminus K) = X \setminus \text{Int}_X(K)$. Ahora bien, por la continuidad de f , $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Como $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y$, tenemos que $f(x) = y$. Así, $x \in f^{-1}(y) \cap X \setminus \text{Int}_X(K)$. Esto contradice que $f^{-1}(y) \subseteq \text{Int}_X(K)$. Los puntos de conexidad en pequeño de X tienen sus imágenes en los puntos de conexidad en pequeño de Y . Veamos el Lema 2.1.25.

Lema 2.1.25 Sean X y Y continuos y $f: X \rightarrow Y$ continua y sobreyectiva. Si $y \in Y$ es tal que $f^{-1}(y) \subseteq X \setminus K(X)$ entonces $y \in Y \setminus K(Y)$.

Sea U un abierto de Y tal que $y \in U$. Es claro que $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(U)$. Observe que $z \in X \setminus K(X)$ siempre que $z \in f^{-1}(y)$; por tanto, existe una vecindad conexa V_z tal que $z \in V_z \subseteq f^{-1}(U)$. Sea $V = \cup_{z \in f^{-1}(y)} V_z$.

Sabemos que $f^{-1}(y) \subseteq \text{Int}_X(V) \subseteq f^{-1}(U)$. Note que por el Lema 2.1.24, $y \in \text{Int}_Y(f(V)) \subseteq f(f^{-1}(U)) = U$. Ahora bien, $f(V) = \cup_{z \in f^{-1}(y)} f(V_z)$ es conexo, pues $f(V_z)$ es conexo y $y \in f(V_z)$ para cada $z \in f^{-1}(y)$. Luego $f(V)$ es una vecindad conexa de y que está contenida en U . Así, $y \in Y \setminus K(Y)$.

El siguiente Teorema 2.1.26 nos mostrará que bajo funciones continuas y sobreyectivas, los puntos de no conexidad en pequeño están contenidos en la imagen de los puntos de no conexidad en pequeño, formulado de la siguiente manera.

Teorema 2.1.26 Sean X y Y continuos y $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces $K(Y) \subseteq f(K(X))$.

Veamos que $Y \setminus f(K(X)) \subseteq Y \setminus K(Y)$. Sea $y \in Y \setminus f(K(X))$. Luego, $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(Y \setminus f(K(X))) = X \setminus f^{-1}(f(K(X)))$, puesto que $X \setminus f^{-1}(f(K(X))) \subseteq X \setminus K(X)$, tenemos que $f^{-1}(y) \subseteq X \setminus K(X)$. Así, por el Lema 2.1.25 $y \in Y \setminus K(Y)$. Así mismo

pasa con la adherencia de los puntos de no conexidad local bajo funciones continuas y sobreyectivas.

Corolario 2.1.27 Sean X y Y continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces $Cl_Y(N(Y)) \subseteq f(Cl_X(N(X)))$.

Como $K(Y) \subseteq f(K(X))$, tenemos que $K(Y) \subset f(N(X))$ y $f(N(X)) \subseteq f(Cl_X(N(X)))$. Así, $K(Y) \subset f(Cl_X(N(X)))$. Puesto que f es cerrada, entonces $Cl_Y(K(Y)) \subset f(Cl_X(N(X)))$.

Además veamos que para Y continuo $N(Y) \subset Cl_Y(K(Y))$. Sea $U = Y \setminus Cl_Y(K(Y))$, es decir, $U \subset L(Y)$. Puesto que U es conexo en pequeño en cada punto tenemos que cada componente de U es abierta y por lo tanto U es localmente conexo. Así $U \subset L(Y)$. Luego, $N(Y) \subset Cl_Y(K(Y))$. Por tanto, $N(Y) \subset f(Cl_X(N(X)))$. Así, $Cl_Y(N(Y)) \subset f(Cl_X(N(X)))$. Veamos otras definiciones presentes en continuos y en dendroides.

Definición 2.1.28 Sea X un continuo, diremos que X es:

1. *descomponible*, si existen subcontinuos propios A y B de X , tales que $X = A \cup B$. Además, X es *hereditariamente descomponible*, si todo subcontinuo es descomponible.
2. *indescomponible*, si X no es descomponible. Además, X es *hereditariamente indescomponible*, si todo subcontinuo es indescomponible.
3. λ -*dendroide*, si es hereditariamente unicoherente y hereditariamente descomponible.

La siguiente proposición caracteriza los continuos hereditariamente indescomponibles.

sea X un continuo. Entonces, X es hereditariamente indescomponible si, y solo si, dados A y B subcontinuos cualesquiera de X tales que $A \cap B \neq \emptyset$, tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$.

Supongamos que existen subcontinuos A y B de X tales que $A \cap B \neq \emptyset$, $A \setminus B \neq \emptyset$ y $B \setminus A \neq \emptyset$. Note que $Y = A \cup B$ es un subcontinuo descomponible de X . Así, X no es hereditariamente indescomponible.

Recíprocamente, supongamos que X no es hereditariamente indescomponible; esto es, existe un subcontinuo Y de X tal que Y es descomponible. Así, existen A y B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$. Note que $A \cap B \neq \emptyset$, $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$.

Ejemplos de continuos descomponibles son: el intervalo $[0, 1] = [0, \frac{3}{4}] \cup [\frac{1}{4}, 1]$, S^1 como se vió en el Ejemplo 2.1.14, el abanico armónico dado en el Ejemplo 2.1.11, la curva senoidal del topólogo definido en el Ejemplo 2.1.4 o cualquier n -celda $[0, 1]^n$. Un ejemplo de un continuo indescomponible, es el conocido como *continuo de Knaster*. La definición detallada de este continuo se puede ver en ⁶. La Figura 11 muestra la representación del continuo de Knaster. El continuo de Knaster puede construirse como subespacio de $[0, 1]^2$. Luego, $[0, 1]^2$ es descomponible pero no es hereditariamente descomponible.

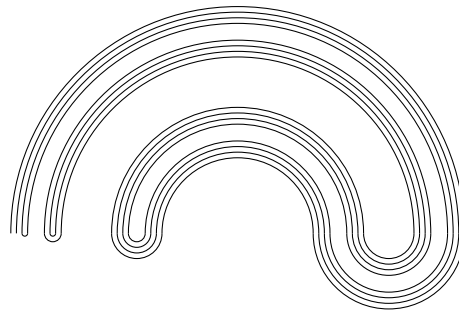


Figura 11. Continuo de Knaster

⁶ C. KURATOWSKI. *Topology Vol. II. English Edition*. 1966.

2.2. Límite superior e inferior.

Aquí, dado un espacio métrico (X, d) determinamos el límite inferior y superior de una sucesión de subconjuntos. Asociamos estos límites con la métrica de Hausdorff, cuando los subconjuntos sean cerrados.

Definición 2.2.1 Sean X un continuo con métrica d , un subconjunto $F \subseteq X$ cerrado y no vacío y $\varepsilon > 0$, se define:

$$\mathcal{N}_d(\varepsilon; F) = \{x \in X : d(x, F) < \varepsilon\}.$$

A $\mathcal{N}_d(\varepsilon; F)$ se le conoce como la nube de radio ε alrededor de F en X .

Definimos *la métrica de Hausdorff* para todo subconjunto cerrado no vacío de X inducida por d , denotada por \mathcal{H} , como:

$$\mathcal{H}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq \mathcal{N}_d(\varepsilon; B) \text{ y } B \subseteq \mathcal{N}_d(\varepsilon; A)\},$$

para cada cerrados y no vacíos A, B de X .

Definición 2.2.2 Sean (X, τ) un espacio topológico y una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X . Definimos:

$\liminf A_n = \{x \in X : \text{para cada vecindad } U \text{ de } x, \text{ existe}$

$N \in \mathbb{N}, \text{ tal que } U \cap A_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \geq N\}.$

$\limsup A_n = \{x \in X : \text{para cada vecindad } U \text{ de } x, \text{ existe una}$

$\text{sucesión } (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ de } \mathbb{N}, \text{ tal que } U \cap A_{n_k} \neq \emptyset, \text{ para todo } k \geq N\}.$

Nótese que $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. Diremos que $\lim A_n = A$ para algún subcon-

junto A de X si $A = \liminf A_n = \limsup A_n$. Equivalentemente, podemos decir que $\lim A_n = A$ si, y solo si, $A \subseteq \liminf A_n$ y $\limsup A_n \subseteq A$, esto puede verse en ⁷.

Veamos un ejemplo de la definición anterior.

Ejemplo 2.2.3 Sea (\mathbb{R}^2, τ) y $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ con $A_n = p_n q_n$ donde $p_n = (\frac{1}{n}, 1)$ y $q_n = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{2})$ para $n = 2k + 1$, y $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{2})$ y $q_n = (\frac{1}{n}, -1)$ para $n = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$, esta sucesión se ve como mostramos en la Figura 12.

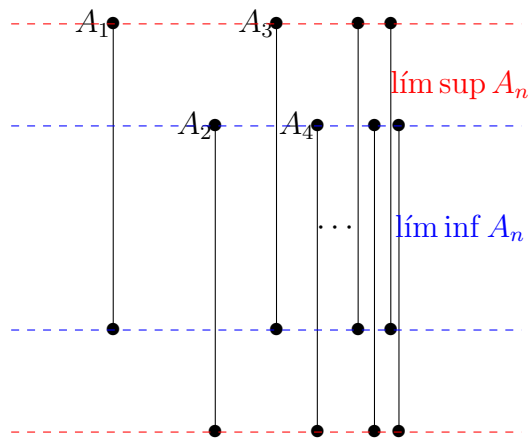


Figura 12. Sucesión de segmentos

De esto $\liminf A_n = \{0\} \times [-1/2, 1/2]$ y $\limsup A_n = \{0\} \times [-1, 1]$.

En los teoremas 2.2.4 y 2.2.5 vemos condiciones para que los límites superiores e inferiores preserven algunas propiedades topológicas.

Teorema 2.2.4 Sean X un continuo y $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de conexos de X . Si $\liminf C_n \neq \emptyset$, entonces $\limsup C_n$ es conexo.

Supongamos que $\limsup C_n$ no es conexo; esto es, existen cerrados disjuntos A y B tales que $\limsup C_n = A \cup B$. Como $\liminf C_n \neq \emptyset$ y $\liminf C_n \subseteq \limsup C_n$,

⁷ S. NADLER. *Continuum Theory: An Introduction*. Vol. 158. Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong: Monographs, Textbooks in Pure y Applied Math, 1992.

tenemos que $\limsup C_n \neq \emptyset$. Además, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\liminf C_n \cap A \neq \emptyset$. Sean U y V abiertos disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Por la Definición 2.2.2, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $C_n \subseteq U \cup V$ para todo $n \geq N$. Como $\liminf C_n \cap A \neq \emptyset$ y $A \subseteq U$, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que $C_n \cap U \neq \emptyset$ para cada $n \geq M$. Como cada C_n es conexo, $C_n \subseteq U$ para cada $n \geq M$. De lo anterior, $B = \emptyset$ y por tanto, $\limsup C_n$ es conexo.

Teorema 2.2.5 *Sean X un continuo y $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X . Entonces, $\limsup C_n$ y $\liminf C_n$ son compactos ($\liminf C_n$ podría ser vacío).*

Debemos ver que $\limsup C_n$ y $\liminf C_n$ son cerrados de X y, puesto que X es compacto, $\limsup C_n$ y $\liminf C_n$ serán compactos. Veamos que $\limsup C_n$ es cerrado. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria de $\limsup C_n$ convergente a x . Veamos que $x \in \limsup C_n$, puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, para cada $U \in \mathcal{V}_x$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. Así, por la Definición 2.2.2, existe $(n_k) \subseteq \mathbb{N}$ con $x \in U$, $U \cap C_{n_k} \neq \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}$. De lo anterior, $x \in \limsup C_n$ y $\limsup C_n$ es compacto. De la misma forma se prueba que $\liminf C_n$ es compacto. De los teoremas 2.2.4 y 2.2.5 podemos afirmar el siguiente corolario.

Corolario 2.2.6 *Sea X un espacio métrico y $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos de X tal que $\liminf C_n \neq \emptyset$ entonces, $\limsup C_n$ es un continuo.*

Definición 2.2.7 *Sea X un continuo. Diremos que X es irreducible si existen $a, b \in X$ tales que si $K \subseteq X$ continuo y $\{a, b\} \subseteq K$, entonces $K = X$. Además, diremos que X es irreducible entre los puntos a y b , a los cuales llamaremos puntos de irreducibilidad de X .*

Ejemplo 2.2.8 *La curva senoidal del topólogo es irreducible. Sea \bar{S} esta curva definida en el Ejemplo 2.1.4. Sean $p \in \{0\} \times [1, -1]$ y $q = (1, \text{sen}(1))$. Veamos que es*

un continuo irreducible entre p y q . Sea K un subcontinuo de \bar{S} tal que $\{p, q\} \subseteq K$. Como K es conexo, se tiene que $S \subseteq K$. Además, como K es compacto, $K = \bar{S}$. De lo anterior, \bar{S} es irreducible entre p y q . Puesto que p fue tomado arbitrariamente de $\{0\} \times [1, -1]$, cada punto de $\{0\} \times [1, -1]$ es un punto de irreducibilidad de la curva senoidal del topólogo.

Veamos que todo continuo con dos puntos distintos contiene un subcontinuo irreducible.

Lema 2.2.9 ⁵ Sea X un continuo. Si a y b son puntos diferentes en X , entonces existe un subcontinuo $I(a, b)$ de X irreducible entre a y b . Además, si X es hereditariamente unicoherente, $I(a, b)$ es único.

Definición 2.2.10 Un dendroide X es suave en el punto p si para cualquier sucesión de puntos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X que converja a un punto a de X , se tiene que la sucesión de arcos $\{pa_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al arco pa . Diremos que un dendroide X es suave si existe un punto p en X tal que X es suave en p .

Definición 2.2.11 Sean X un dendroide y $p \in X$. El grado de p en X lo denotamos por $gr(p, X)$ y se define como el número de arcocomponentes de $X \setminus \{p\}$. Si $gr(p, X) \geq 3$ diremos que p es un punto de ramificación.

Esta propiedad de suavidad en abanicos se puede definir usando el punto de ramificación, como puede verse en la siguiente definición.

Definición 2.2.12 Un abanico X con punto de ramificación t se dice suave si para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, tenemos que la sucesión de arcos $\{ta_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ta_n = ta.$$

El abanico armónico visto en el Ejemplo 2.1.11 es suave. El Espacio peine definido en el Ejemplo 2.1.19, es suave en el origen y el cono de Cantor visto en la Figura 15 es suave.

Ejemplo 2.2.13 *Existe un dendroide que no es suave.*

Sea $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} pq_n \cup q_n s_n \cup s_n w_n$, donde:

$$p = (0, 0), q_n = \left(1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), s_n = \left(1 + \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) \text{ y } w_n = \left(0, -\frac{1}{n}\right).$$

El dendroide \bar{U} lo representamos en la Figura 13.

La sucesión $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = p$ y la sucesión de arcos $\lim_{n \rightarrow \infty} pw_n = pz$ con $z = (1, 0)$ el cual es distinto del arco p . Luego, \bar{U} no es suave.

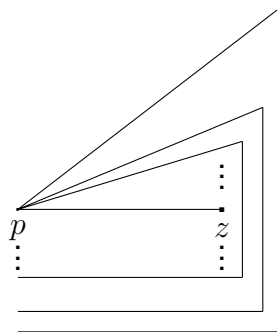


Figura 13. Abanico no suave.

3. UN DENDROIDE NO g -CONTRÁCTIL

El objetivo principal de este capítulo es definir un dendroide uniformemente conexo por caminos que no es g -contráctil. Este capítulo lo dividimos en 3 secciones. En la Sección 2.1, vemos condiciones para que un continuo sea imagen y preimagen del cono de Cantor, $Cono()$. En la Sección 2.2, definimos continuo contráctil y g -contráctil. Además de estudiar algunas propiedades de estas clases de continuos, vemos que estos son imágenes continuas del cono de Cantor. Finalmente, en la Sección 2.3, mostramos un dendroide uniformemente conexo por caminos que no es g -contráctil.

Los resultados y las construcciones presentadas en este capítulo los tomamos principalmente de ¹ y ⁸.

3.1. Imágenes y preimágenes del cono de Cantor

Un resultado muy interesante en topología general afirma que todo espacio métrico compacto es imagen continua del espacio de Cantor ⁵. Además, el Teorema 8.14 de ⁷, establece que todo continuo localmente conexo es imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$. En la literatura se pueden encontrar enunciados de propiedades y teoremas que afirmen cuándo un continuo es imagen continua de otro. En general, es interesante determinar condiciones para que un continuo sea imagen o preimagen de un espacio dado. Tomando el cono de Cantor, $Cono()$, el profesor David Bellamy estudió condiciones necesarias y suficientes para que un continuo sea imagen y preimagen de este cono ⁷. En esta sección incluimos algunos de sus resultados. Dado un espacio métrico X , definimos el cono de X como el espacio cociente $(X \times$

⁸ M. RINCÓN. "Continuos g -contraíbles". En: *Revista Integración* 30.1 (2012), págs. 43-55.

$[0, 1]) / (X \times \{1\})$ y lo denotamos por $Cono(X)$. Si $q_X: X \times [0, 1] \rightarrow Cono(X)$ es la función cociente, entonces el punto $q_X(X \times \{1\})$ de $Cono(X)$ es llamado el vértice de $Cono(X)$ y lo denotamos por v_X .

Definición 3.1.1 Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Definimos la función inducida a los conos $Cono(f): Cono(X) \rightarrow Cono(Y)$ por:

$$Cono(f)(\chi) = \begin{cases} q_Y(f(x), t), & \text{si } \chi = q_X(x, t), \text{ donde } t \neq 1; \\ v_Y, & \text{si } \chi = v_X. \end{cases}$$

para cada $\chi \in Cono(X)$.

No es difícil mostrar que $Cono(f)$ es una función continua ⁵.

Un ejemplo de un espacio métrico compacto muy conocido y de gran utilidad en topología es el conjunto de Cantor. El conjunto o espacio de Cantor que denotaremos por \mathcal{C} , en este trabajo lo tomaremos como un subespacio de $[0, 1]$ que definimos por:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i;$$

donde, $C_1 = [0, 1] \setminus \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$, $C_2 = C_1 \setminus \{(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\}$ y así, de manera inductiva, dado C_n , definimos C_{n+1} quitando de C_n el tercio medio de cada intervalo de C_n . El espacio de Cantor \mathcal{C} lo representamos como en la Figura 14. Los puntos $x \in \mathcal{C}$ pueden verse como aquellos en el intervalo unidad $[0, 1]$, que en base 3, se pueden representar sin usar un 1; es decir, los puntos $x = 0.a_0a_1a_2 \dots$, tales que $a_i \in \{0, 2\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, véase ⁹.

Así, el cono de Cantor lo denotamos por $Cono(\mathcal{C})$, y lo representamos en la Figura 15.

⁹ E. VILLAREAL et al. "Georg Cantor: Conjunto de Cantor". En: *ASOiMAT 2.1* (2020), págs. 13-15.

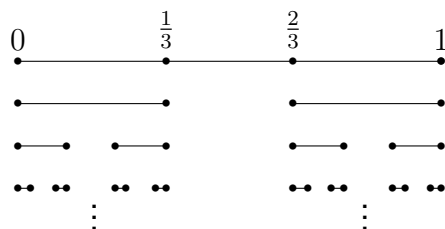


Figura 14. Espacio de Cantor \mathcal{C} .

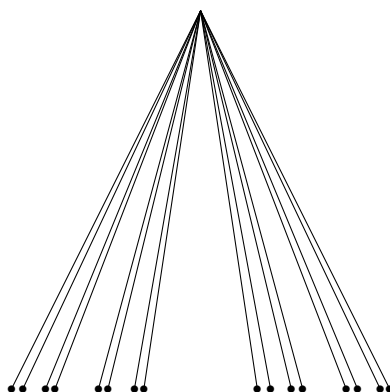


Figura 15. $\text{Cono}(\mathcal{C})$

La siguiente definición será de gran utilidad en este trabajo.

Definición 3.1.2 Un continuo X se dice *uniformemente conexo por caminos* si existe una familia de caminos $\mathcal{F} = \{\alpha_i\}_{i \in I}$, donde un camino es una función continua $\alpha_i: [0, 1] \rightarrow X$, tal que:

1. Para cualesquiera dos puntos x y y en X , existe $\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $\{\alpha(0), \alpha(1)\} = \{x, y\}$; y
2. para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, donde para toda $\alpha \in \mathcal{F}$ existe una partición $\mathcal{P} = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = 1\} \subseteq [0, 1]$ tal que $(\alpha([t_{i-1}, t_i])) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \dots, N\}$.

W. Kuperberg en ², definió los continuos uniformemente conexos por caminos y probó que estos continuos caracterizan los continuos que son imagen continua de $Cono(\mathcal{C})$, como mostramos a continuación.

Teorema 3.1.3 ² *Un continuo X es uniformemente conexo por caminos si, y solo si, es imagen continua del $Cono(\mathcal{C})$, es decir, existe una función continua y sobreyectiva $f: Cono(\mathcal{C}) \rightarrow X$.*

El siguiente teorema muestra que la propiedad de ser uniformemente conexo por caminos se mantiene por productos.

Teorema 3.1.4 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos. Entonces, X_i es uniformemente conexo por caminos, para cada $i \in \mathbb{N}$, si, y solo si, $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ es uniformemente conexo por caminos.*

Supongamos primero que X es uniformemente conexo por caminos. Luego, por el Teorema 3.1.3, existe una función continua y sobreyectiva $f: Cono() \rightarrow X$. Sea $\pi_i: X \rightarrow X_i$ la proyección a la i -ésima componente. Definimos,

$$\pi_i \circ f: Cono() \rightarrow X_i.$$

Nótese que $\pi_i \circ f$ es continua y sobreyectiva. Así, X_i es uniformemente conexo por caminos, para cada $i \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.1.3.

Recíprocamente, supongamos que X_i es uniformemente conexo por caminos, para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, por el Teorema 3.1.3, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe una función continua y sobreyectiva $f_i: Cono() \rightarrow X_i$. Sea $f: (Cono()) \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ definida por $f((y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (f_i(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$, continua.

Sea v el vértice en $Cono()$. Definamos:

$$G: (Cono()) \times [0, 1] \rightarrow (Cono()) \text{ por } G((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, t) = (tv + (1 - t)x_i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Es fácil notar que $G((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, 0) = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $G((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, 1) = (v, v, \dots)$. Denotamos por $G': \text{Cono}(\text{Cono}()) \rightarrow (\text{Cono}())$ como $G'((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, t) = G((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, t)$ si $t \neq 1$ y $G'((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, 1) = G((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, 1) = (v, v, \dots)$. Como $(\text{Cono}())$ es compacto, existe $h: \text{Cono}() \rightarrow (\text{Cono}())$ continua y sobreyectiva. Definimos $\text{Cono}(h)$ continua y sobreyectiva como

$$\text{Cono}(h): \text{Cono}() \rightarrow \text{Cono}(\text{Cono}())$$

Así tomamos a $g: \text{Cono}() \rightarrow (\text{Cono}())$, con $g(x) = G' \circ \text{Cono}(h)(x)$ continua y sobreyectiva. Luego tomamos a

$$f \circ g: \text{Cono}() \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

continua y sobreyectiva. Por tanto, X es imagen continua del $\text{Cono}()$, luego, uniformemente conexo por caminos.

Hay dendroides que se pueden encajar en el cono de Cantor, veamos la siguiente caracterización.

Sea X un continuo. Entonces, X es un abanico suave si, y solo si, X puede ser encajado en el cono de Cantor. Supongamos que X está encajado en $\text{Cono}()$. Como todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide y $\text{Cono}()$ es un dendroide, X es un dendroide. Además, X tiene máximo un punto de ramificación. Así, X es un abanico. Como $\text{Cono}()$ es suave, X es suave.

Recíprocamente, supongamos que X es un abanico suave con vértice v' . Sabemos que existe $f: X \rightarrow [0, 1]$ continua y sobreyectiva, que además $f|_{v'x}$ es inyectiva para todo $x \in X$. Sean $Y \subseteq X$ con X suave. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ en Y y v el vértice en Y $v'y_n = v'v \cup vy_n$, puesto que X es suave, $\lim_{n \rightarrow \infty} v'y_n = v'y_0$ así, $\lim_{n \rightarrow \infty} v'v \cup vy_n = v'v \cup vy_0$, por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} vy_n = vy_0$.

Veamos que existe $g: X \setminus \{v'\} \rightarrow \text{Cono}()$ continua tal que $g^{-1}(c)$ es una componente de $X \setminus \{v'\}$ para toda $c \in \text{Cono}()$. Para ver esto, probaremos que existe $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección

numerable de abiertos y cerrados de $X \setminus \{v'\}$ tal que para cualesquiera p y q en diferente componentes de $X \setminus \{v'\}$, existe un F_n tal que $p \in F_n$ y $q \notin F_n$.

Sea $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base numerable para X . Para cualesquiera R_i y R_j tales que $X \setminus \{v'\}$ no es conexo entre ellos, existe un abierto y cerrado $F_{i,j}$ tal que $R_i \subseteq F_{i,j}$ y $F_{i,j} \cap R_j = \emptyset$. Si F es un abierto y cerrado tal que $p \in F$ y $q \in X \setminus F$, entonces existe un R_i y R_j tales que $p \in R_i \subseteq F$ y $q \in R_j \subseteq X \setminus F$, es decir X no es conexo entre R_i y R_j . Por tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \in R_i \subseteq F_n$ y $q \in R_j \subseteq X \setminus F_n$.

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n: X \setminus \{v'\} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in F_n; \\ 0, & \text{si } x \in X \setminus F_n. \end{cases}$$

Sea $g: X \setminus \{v'\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{3^n}$. Como cada F_n es abierto y cerrado, f_n es continua y puesto que:

$$\left| \frac{f_n(x)}{3^n} \right| \leq \frac{1}{3^{n-1}} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} \text{ converge,}$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{3^n}$ es continua. Si p y q pertenecen a dos componentes distintas de $X \setminus \{v'\}$, entonces existe un F_n tal que $p \in F_n$ y $q \in X \setminus F_n$. Note que $f_n(p) = 2$ y $f_n(q) = 0$ y por tanto, $g(p) \neq g(q)$. Así $g^{-1}(c)$ está contenido en una componente de $X \setminus \{v'\}$ para cada $c \in \mathbb{R}$.

Ahora, de lo anterior, si Q es una componente de $X \setminus \{v'\}$ se tiene que $Q \subseteq F_n$ o $Q \subseteq (X \setminus \{v'\}) \setminus F_n$. De donde Q está contenido en a lo más uno de los conjuntos $g^{-1}(c)$ con $c \in \mathbb{R}$. Pero las componentes de $X \setminus \{v'\}$ son de la forma $v'e \setminus \{v'\}$ con $e \in E(X)$, donde $E(X)$ son los puntos finales de X . Entonces, para cualquier $c \in \mathbb{R}$ se tiene $g^{-1}(c) = v'e_x \setminus \{v'\}$ para algún $e_x \in E(X)$.

Supongamos que en \mathbb{R}^2 tenemos un sistema de coordenadas polares (r, θ) y consideremos el conjunto de Cantor en el arco $0 \leq \theta \leq 1$ de la circunferencia $r = 1$. Es decir,

el conjunto de puntos $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ donde $p_i = (1, \theta_i)$, con $\theta_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2c_j}{3^j}$ y $c_i = 1$ ó $c_i = 0$. Sea $O = (0, 0)$ y Op_i es el segmento del origen a p_i . La unión $Y = \cup_{i=1}^{\infty} Op_i$ es homeomorfo a $Cono()$ y definimos $h: X \rightarrow Y$ como $h(v') = (0, 0)$ y $h(x) = (f(x), g(x))$ continua. Además, como $f|_{v'e}$ es un homeomorfismo y $g^{-1}(c)$ es una componente, h es inyectiva. Por tanto, h es homeomorfismo.

Teniendo presente que dado X un abanico suave, por la Proposición 3.1, X es encajado en el cono de Cantor. Así, no es difícil ver que X es uniformemente conexo por caminos.

Teorema 3.1.5 ¹ *Sea X un continuo. Si X contiene un abierto G y un conjunto perfecto y no vacío $A \subseteq G$ tal que puntos distintos de A pertenecen a componentes distintas de G , entonces existe $f: X \rightarrow Cono()$ continua y sobreyectiva.*

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado que tomamos de ¹.

Teorema 3.1.6 *Sea X un continuo. Entonces, X es preimagen continua de $Cono()$ si, y solo si, X contiene un abierto G con una cantidad no numerable de componentes.*

Sea X un continuo que es preimagen continua de $Cono()$, esto es, existe $f: X \rightarrow Cono()$ continua y sobreyectiva. Sea $G = f^{-1}(Cono() \setminus \{v\})$ es un abierto de X con una cantidad no numerable de componentes.

Recíprocamente, sea G un abierto de X con una cantidad no numerable de componentes. Por el axioma de elección, existe un subconjunto A_0 de G tal que A_0 contiene un elemento de cada componente de G . Sea

$$L = \{x \in A_0 : \text{existe un abierto } U \text{ de } G, \text{ tal que } x \in U \text{ y } U \cap A_0 \text{ es numerable}\}.$$

Sea $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de X . Luego, para cada $x \in L$, existe un

abierto B_x en \mathcal{B} , tal que $x \in B_x$ y $B_x \cap A_0$ es numerable. Sea

$$\mathcal{U} = \{B \in \mathcal{B} : B \cap A_0 \text{ es numerable}\}.$$

Note que $L \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Además, como \mathcal{U} es numerable, L es numerable.

Sea $A = A_0 \setminus L$. Como A_0 es no numerable, A es no numerable. Ahora, si $x \in A$ y U es un abierto tal que $x \in U$, entonces U es no es numerable. En particular, $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, x no es un punto aislado de A . Así, A es perfecto. De lo anterior, A y G satisfacen las condiciones del Teorema 3.1.5. Por tanto, existe una función continua y sobreyectiva $f: X \rightarrow \text{Cono}()$ y X es preimagen continua del $\text{Cono}()$.

El siguiente teorema resume las propiedades mostradas en esta sección.

Teorema 3.1.7 *Sea X un continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existen funciones $f: X \rightarrow \text{Cono}()$ y $g: \text{Cono}() \rightarrow X$ continuas y sobreyectivas;*
2. *X es uniformemente conexo por caminos y contiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes.*

3.2. Sobre contráctil y g -contráctil

En esta sección introducimos las nociones de contráctil y g -contráctil, y mostraremos algunas propiedades.

Definición 3.2.1 Sean X y Y espacios topológicos y $f, g: X \rightarrow Y$ funciones continuas. Una *homotopía entre f y g* es una función continua

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, para cada $x \in X$. En este caso diremos que f y g son homotópicas y lo denotamos por $f \simeq g$.

Es posible mostrar que la relación “ser homotópica a” es una relación de equivalencia en la colección de funciones continuas de X en Y . En particular, si consideramos las funciones continuas de X en X , existe una clase de espacios topológicos donde las funciones constantes están en la clase de la función identidad. Estos espacios se conocen como *contráctiles*, definidos de la siguiente manera:

Definición 3.2.2 Sea X un continuo. Diremos que es *contráctil* si la función identidad $i_X: X \rightarrow X$ es homotópica a una función constante. Diremos que X es *contráctil* con respecto a Y si cada función continua $f: X \rightarrow Y$ es homotópica a una función constante.

Intuitivamente un continuo es *contráctil* si es posible deformarlo continuamente un punto. Ejemplos de *contráctiles* son: el arco, cualquier n -celda y el abanico armónico, como se puede verificar fácilmente. En general, todo espacio convexo X es *contráctil*; puesto que, si tomamos x_0 en X y definimos la homotopía $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(x, t) = (1 - t)x + tx_0$, para cada $x \in X$ y algún $x_0 \in X$ fijo, tenemos que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x_0$, satisfaciendo nuestra definición de contractibilidad. Veremos continuos que tienen la propiedad de contractibilidad. Consideramos importante resaltar que la noción de espacio *contráctil* se puede dar en general para cualquier espacio topológico. Sin embargo, la enunciamos en continuos por conveniencia del presente trabajo.

Teorema 3.2.3 *Todo continuo contráctil es uniformemente conexo por caminos.*

Sea X un continuo *contráctil*. Entonces, existe una función continua $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x$ para todo $x \in X$, y $H(x, 1) = p$ para algún p fijo. Así, por el Teorema 3.44 de ⁵, existe una función continua y sobreyectiva $G: \text{Cono}(X) \rightarrow X$ tal que

$$G \circ q_X = H.$$

Como X es métrico compacto, por ⁵, existe una función continua y sobreyectiva $f: \rightarrow X$. De lo anterior, $G \circ \text{Cono}(f): \text{Cono}() \rightarrow X$ es continua y sobreyectiva. Así, X es uniformemente conexo por caminos, por el Teorema 3.1.3.

Los dendroides suaves son contráctiles. Sea X un dendroide suave. Luego existe $p \in X$ tal que, para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} pa_n = pa$.

Puesto que X es continuo, entonces en ¹⁰ existe la función de Whitney $\mu: C(X) \rightarrow X$ continua tal que $\mu(\{x\}) = 0$ si $x \in X$ y $\mu(A) < \mu(B)$ si $A \subseteq B$.

Definamos $F: X \times [0, 1] \rightarrow X$ como $F(x, t) = z$ tal que z satisface $\mu(pz) = (1 - t)px$. Note que $F(x, 0) = z$ tal que $\mu(pz) = px$; es decir $z = x$. Así $F(x, 0) = x$ para cada $x \in X$. Además, $F(x, 1) = z$ tal que $\mu(pz) = 0$ es decir $z = p$, por tanto $F(x, 1) = p$ para cada $x \in X$.

Nos resta ver que F es continua. Sea $\{(x_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $X \times [0, 1]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, t_n) = (x, t)$, y veamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, t_n) = F(x, t)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $z_n = F(x_n, t_n)$. Como X es compacto, existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z_0$, para algún $z_0 \in X$. Por definición, sabemos que $\mu(pz_{n_k}) = (1 - t_{n_k})\mu(px_{n_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Como X es suave en p , $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(pz_{n_k}) = \mu(pz_0) = (1 - t)\mu(px)$. Así, $F(x, t) = z_0$. Lo anterior muestra que cualquier subsucesión convergente de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, converge a $F(x, t)$; es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = F(x, t)$ y F es continua. Con esto concluimos que X es contráctil.

No todo dendroide es contráctil, un ejemplo es el continuo que presentamos en la Figura 13. Es importante resaltar que este continuo es además uniformemente conexo por caminos. Así, el recíproco del Teorema 3.2.3 no es cierto.

Teorema 3.2.4 *Todo retracto de un continuo X contráctil es contráctil.*

¹⁰ M. CASTRO. "Introducción a las funciones de Whitney". Tesis doct. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2013.

Sean X un espacio contráctil y A un retracto de X . Sea $r: X \rightarrow A$ una retracción. Como X es contráctil, existen un punto x_0 en X y una función continua $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tales que $H((x, 0)) = x$ y $H((x, 1)) = x_0$, para toda $x \in X$. Sea $F: A \times [0, 1] \rightarrow A$ definida por $F((a, t)) = r \circ H((a, t))$, para cada $(a, t) \in A \times [0, 1]$. Entonces F es una función bien definida y continua tal que para toda $a \in A$, se tiene que

$$F((a, 0)) = r \circ H((a, 0)) = r(a) = a$$

$$F((a, 1)) = r \circ H((a, 1)) = r(x_0).$$

Por tanto, A es contráctil.

En la siguiente definición, aunque no profundizaremos demasiado, definimos unas clases especiales de conjuntos que nos servirán para determinar cuando un continuo no es contráctil, como mostramos en la Proposición 3.2.6.

Definición 3.2.5 Sean X un continuo y K un subconjunto cerrado de X . Diremos que K es un:

1. R^1 -conjunto si existe un abierto U con $K \subseteq U$ y dos sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U tal que $K = \limsup A_n \cap \limsup B_n$.
2. R^2 -conjunto si existe un abierto U con $K \subseteq U$ y dos sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U tal que $K = \lim A_n \cap \lim B_n$.
3. R^3 -conjunto si existe un abierto U y una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U tal que $K = \liminf A_n$.

Todo R^2 -conjunto es a la vez un R^1 y R^3 -conjunto. Y todo R^1 -conjunto contiene un R^2 -conjunto y también contiene un R^3 -conjunto. Esto se puede ver en ¹¹ bajo la

¹¹ B. BAIK, K. HUR y C. RHEE. " R^i -sets and contractivity". En: *Journal of the Korean Mathematical*

definición de R^i -conjunto para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, los recíprocos no son ciertos.

Teorema 3.2.6 *Sea X un continuo. Si X contiene un R^i -conjunto, entonces X no es contráctil.*

Sea $A \subseteq X$ un R^i -conjunto. Si A es un R^2 -conjunto, entonces A es un R^3 -conjunto y, si A es un R^1 -conjunto, entonces A contiene un R^3 -conjunto. Por tanto, es suficiente demostrar que si el espacio X contiene un R^3 -conjunto, entonces X no es contráctil. Sea A un R^3 -conjunto en X . Entonces existe un conjunto abierto U que contiene a A y una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U tales que $\liminf C_n = A$. Dado que $A \subseteq U$, tenemos que existe $r > 0$ tal que

$$r < \inf\{d(a, z) : a \in A \text{ y } z \notin U\}. \quad (1)$$

Supongamos que X es contráctil. Entonces existen una homotopía $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = p$ para algún $p \in X$ y todo $x \in X$. Puesto que H es continua y $X \times [0, 1]$ es compacto, por el Teorema de Heine, se sigue que H es uniformemente continua. Luego, en particular, existe $\delta > 0$ tal que $(H(K \times \{t\})) < r$, siempre que $(K \times \{t\}) < \delta$. Es decir:

$$\text{Si } (K) < \delta, \text{ entonces } (H(K \times \{t\})) < r, \text{ para todo } t \in [0, 1]. \quad (2)$$

Consideramos el conjunto $P = \{c, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\} \subseteq U$ con $c \in A$, $c_i \in C_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\lim c_i = c$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(P) < \delta$.

Sea

$$V = \{t \in [0, 1] : H(P \times \{t\}) \subset U\}.$$

Mostraremos algunas propiedades de este conjunto V :

Society 34.2 (1997), págs. 309-319.

1. $V \neq \emptyset$. Dado que $H(P \times \{0\}) = P$ y $P \subseteq U$, tenemos que $0 \in V$ y $V \neq \emptyset$.
2. $V \neq [0, 1]$. Si $V = [0, 1]$, entonces $1 \in V$. Por lo tanto, $H(P \times \{1\}) = \{p\} \subseteq U$, por definición de V . Sea D la componente de U tal que $p \in D$. Consideremos una componente C_j de U tal que $C_j \neq D$. Puesto que, $c_j \in C_j$, $\{c_j\} \times [0, 1]$ es conexo y H es continua, tenemos que $H(\{c_j\} \times [0, 1])$ es conexo en U tal que $p, c_j \in H(\{c_j\} \times [0, 1])$; lo cual es una contradicción, pues p y c_j están en diferentes componentes de U . Por lo tanto, $V \neq [0, 1]$.
3. V es abierto en $[0, 1]$. Sea $t_0 \in [0, 1]$. Sabemos que $H(P \times \{t_0\}) \subseteq U$. Así, $H(p, t_0) \in U$, para cada $p \in P$. Puesto que H es continua en $X \times [0, 1]$, H es continua en $P \times [0, 1]$. Así, existe Q_p y R_p abiertos básicos de P y $[0, 1]$ respectivamente, tal que $H(Q_p \times R_p) \subseteq U$. Así tenemos que $\{Q_p\}_{p \in P}$ es una cubierta abierta de P . Ya que P es compacto, existen $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$ tales que $P = \cup_{i=1}^n Q_{p_i}$. Denotamos por $R = \cap_{i=1}^n R_{p_i}$ subconjunto abierto en $[0, 1]$ tal que $t_0 \in R$. Sea $s \in R$, entonces

$$H(P \times \{s\}) = H(\cup_{i=1}^n Q_{p_i} \times \{s\}) = \cup_{i=1}^n H(Q_{p_i}, \{s\}) \subseteq U.$$

Por tanto, existe un abierto R en $[0, 1]$ tal que $t_0 \in R \subseteq V$. Así, V es abierto en $[0, 1]$.

Sea V_0 la componente de V con $0 \in V_0$. Ya que $H(\{c_j\} \times V_0)$ es conexo que contiene a c_i y $H(\{c_j\} \times V_0) \subseteq U$, tenemos que $H(\{c_i\} \times V_0) \subseteq C_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Por continuidad de H , $\lim_{n \rightarrow \infty} H(c_n, t) = H(c, t)$. Luego, $H(c, t) \in \liminf C_n = A$ para todo $t \in V_0$.

Probemos ahora que $H(c, t_0) \in A$ para todo $c \in A$ y $t_0 \in Fr(V_0)$. Sea $t_0 \in Fr(V_0)$. Luego, existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en V_0 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$. Así, por la continuidad de H , $\lim_{n \rightarrow \infty} H(c, t_n) = H(c, t_0)$. Ya que A es cerrado, $H(c, t_0) \in A$.

Por ¹², $\overline{V_0} \cap ([0, 1] \setminus V) \neq \emptyset$. Sea $t' \in \overline{V_0} \cap [0, 1] \setminus V$. Note que $t' \in Fr(V_0) \setminus V$. Así, por definición de V , $H(P \times \{t'\}) \not\subseteq U$. Luego, existe $d \in P$ tal que $H(d, t') \in X \setminus U$. Por el párrafo anterior tenemos que $H(c, t') \in A$. Por (1), $d(H(c, t'), H(d, t')) > r$. Una contradicción, pues $c, d \in P$ y $(P \times \{t'\}) < r$ (ver (2)).

A continuación mostramos ejemplos de continuos que contienen estas clases especiales de conjuntos, y por tanto, serán continuos que no son contráctiles.

Ejemplo 3.2.7 Sea V el subcontinuo del plano \mathbb{R}^2 , definido como lo representa la Figura 16. Note que V contiene a K como un R^1 -conjunto, que tomando las com-

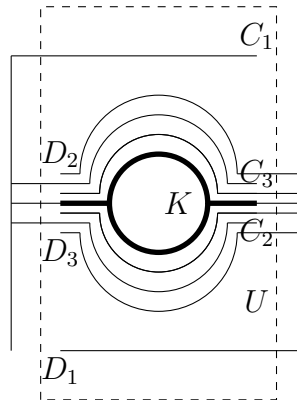


Figura 16. El dendroide V .

ponentes C_i y D_i como en la figura, tenemos que se satisface que $\limsup C_i \cap \limsup D_i = K$.

El Ejemplo 3.2.7 es un R^1 -conjunto que no es ni R^2 -conjunto, ni R^3 -conjunto. Pero, contiene a un R^2 -conjunto y un R^3 -conjunto.

Ejemplo 3.2.8 Sea F un continuo de \mathbb{R}^2 , como representamos en la Figura 17. Note que F contiene a K como R^2 -conjunto que satisface $\lim C_{2n} \cap \lim C_{2n-1} = K$. Este K es también un R^1 -conjunto y R^3 -conjunto.

¹² V. GUTIÉRREZ. "Semi fronteras en hiperespacios de continuos". Tesis doct. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2012.

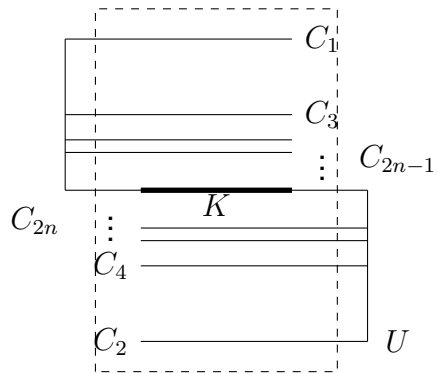


Figura 17. El dendroide F .

Ejemplo 3.2.9 Sean $a = (-1, 0)$, $p = (0, 0)$, $b = (1, 0)$ y, para cualquier entero positivo n , $d_n = (0, \frac{1}{n})$ y $e_n = (0, -\frac{1}{n})$. Definimos:

$$Z = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} ad_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} be_n \right) \cup ab.$$

Tenemos que Z es un dendroide en \mathbb{R}^2 y gráficamente se representa en la Figura 18.

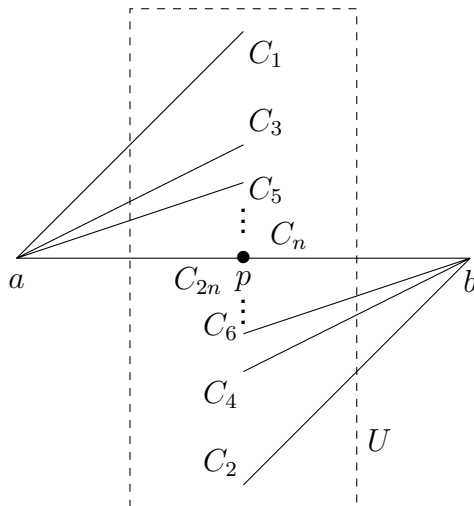


Figura 18. El dendroide Z

Notemos que $\{p\}$ es un \mathbb{R}^3 -conjunto, donde U es un abierto que contiene a $\{p\}$ y $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de componentes que están contenidas en U como puede verse

en la Figura 18, notemos que $\liminf C_i = \{p\}$, así $\{p\}$ es un R^3 -conjunto, luego Z no es contráctil.

El Ejemplo 3.2.9 muestra que el conjunto $\{p\}$ es un R^i -conjunto, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

El profesor David Bellamy en ¹ generaliza la propiedad de contráctil que llamó contráctil generalizado o, como llamaremos en este escrito, g -contráctil, de la siguiente manera:

Definición 3.2.10 Un continuo X se dice g -contráctil, si existe una función continua y sobreyectiva $f: X \rightarrow X$ que es homotópica a una función constante.

Bajo la definición de contráctil y g -contráctil, notamos que todo espacio contráctil es g -contráctil, aquí tomamos como función continua y sobreyectiva a la función identidad i_X . El recíproco no se tiene, ejemplos de espacios g -contráctiles que no son contráctiles son: S^1 , cualquier n -esfera S^n y el abanico no suave definido en el Ejemplo 13.

Definición 3.2.11 Dos continuos X y Y se dicen *continuamente equivalentes* si existen funciones continuas y sobreyectivas $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow X$.

El siguiente teorema nos permite mostrar ejemplos de continuos g -contráctiles.

Teorema 3.2.12 Sean X y Y continuos tal que X es g -contráctil. Si X y Y son *continuamente equivalentes*, entonces Y es g -contráctil.

Sean X y Y continuos *continuamente equivalentes* tales que X es g -contráctil. Sean $h: X \rightarrow X$ una función continua y sobreyectiva, $p \in X$ y $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ una función continua tales que $H(x, 0) = h(x)$ y $H(x, 1) = p$ para cada $x \in X$. Sean $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow X$ funciones continuas y sobreyectivas. Definimos $G: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ por

$$G(y, t) = f(H(g(y), t)),$$

para cada $(y, t) \in Y \times [0, 1]$. Es claro que G es continua. Además, $G(y, 0) = f(h(g(y)))$ y $G(y, 1) = f(p)$ para cada $y \in Y$. Como f, g y h son sobreyectivas, $f \circ h \circ g$ es sobreyectiva y Y es g -contráctil.

A continuación mostramos que todo continuo localmente conexo es g -contráctil. En particular, como mencionamos anteriormente, S^1 es g -contráctil.

Teorema 3.2.13 *Todo continuo localmente conexo es g -contráctil.*

Sea X un continuo localmente conexo. Como X es normal y conexo, por el Teorema de extensión de Tietze ⁵, existe una función continua y sobreyectiva $f: X \rightarrow [0, 1]$. Además, por el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz ⁷, existe una función continua y sobreyectiva $g: [0, 1] \rightarrow X$. Así, X es continuamente equivalente a $[0, 1]$. Como $[0, 1]$ es contráctil, $[0, 1]$ es g -contráctil. Luego, por el Teorema 3.2.12, X es g -contráctil.

Teorema 3.2.14 *Sea X un continuo. Si X es g -contráctil, entonces existe una función continua y sobreyectiva del $Cono(X)$ en X .*

Supongamos que X es g -contráctil. Luego, existe una función continua y sobreyectiva $f: X \rightarrow X$, una homotopía $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ y un punto $x_0 \in X$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = x_0$ para todo $x \in X$. Sea $G: Cono(X) \rightarrow X$ definida para cada $\chi \in Cono(X)$, por:

$$G(\chi) = \begin{cases} H(x, t), & \text{si } \chi = q_X(x, t) \text{ y } t \neq 1; \\ x_0, & \text{si } \chi = v_X. \end{cases}$$

Entonces, G es una función continua y sobreyectiva. Estos espacios g -contráctiles pueden verse como imagen continua del cono sobre el espacio g -contráctil, pero más aún, como imagen continua del cono de Cantor como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.15 *Sea X un continuo. Si X es g -contráctil, entonces X es imagen continua del $Cono(\mathcal{C})$.*

Por el Teorema 3.2.14 existe una función $G: Cono(X) \rightarrow X$ continua y sobreyectiva. Puesto que todo espacio métrico compacto es imagen continua de \mathcal{C} , existe una función continua y sobreyectiva $g: \mathcal{C} \rightarrow X$. Sea $Cono(g): Cono(\mathcal{C}) \rightarrow Cono(X)$ la función cono dada en la Definición 3.1.1. Como G y $Cono(g)$ son sobreyectivas, $G \circ Cono(g): Cono() \rightarrow X$ es continua y sobreyectiva.

Por el Teorema 3.2.15 y el Teorema 3.1.3 se puede afirmar lo siguiente,

Corolario 3.2.16 *Sea X un continuo g -contráctil, entonces X es uniformemente conexo por caminos.*

En el siguiente ejemplo veremos que el abanico armónico es uniformemente conexo por caminos viéndolo como imagen continua del cono de Cantor.

Ejemplo 3.2.17 *En la Figura 19 mostramos que el abanico armónico definido en el Ejemplo 2.1.11, es uniformemente conexo por caminos al ser g -contráctil, y por la equivalencia dada en el Teorema 3.1.3, es imagen continua de $Cono(\mathcal{C})$ definido en el Ejemplo 15. Veámoslo de la siguiente manera, sea $f: \rightarrow$ dada por $f(0.a_1a_2a_3\dots) = 0.a_1a_2\dots a_n\bar{2}$, con $a_n = 2$ y $a_i = 0$ para todo $i < n$. Por la Definición 3.1.1, sea $Cono(h): Cono() \rightarrow Cono()$. No es difícil ver que la imagen de $Cono(h)$ es el abanico armónico.*

En el siguiente teorema vemos una caracterización de los continuos que son imagen y preimagen continua del $Cono()$.

Teorema 3.2.18 *Sea X un continuo. Entonces, X es imagen y preimagen continua de $Cono()$ si, y solo si, X es g -contráctil y contiene un abierto G con una cantidad no numerable de componentes.*

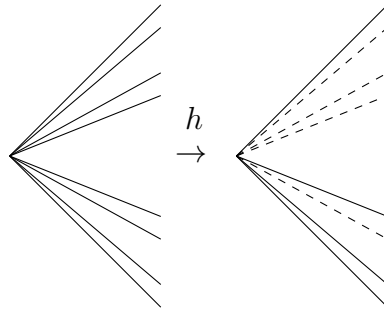


Figura 19. Abanico como imagen continua de $Cono(\mathcal{C})$

Si $f: X \rightarrow Cono()$ y $g: Cono() \rightarrow X$ son continuas y sobreyectivas, entonces X es continuamente equivalente a $Cono()$. Como $Cono()$ es contráctil, $Cono()$ es g -contráctil. Así, X es g -contráctil, por el Teorema 3.2.12. Además, $G = f^{-1}(Cono() \setminus \{v\})$ es un abierto con una cantidad no numerable de componentes.

Recíprocamente, si X es un continuo g -contráctil, entonces X es imagen continua de $Cono()$, por el Teorema 3.2.15. Además, como X tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes, por el Teorema 3.1.6, tenemos que es preimagen continua de $Cono()$.

El teorema anterior lo podemos escribir de la siguiente manera:

Corolario 3.2.19 *Sea X un continuo. Entonces, X es uniformemente conexo por caminos y preimagen continua de $Cono()$ si, y solo si, X es g -contráctil y contiene un abierto G con una cantidad no numerable de componentes.*

Sea X un continuo. Si X es un continuo g -contráctil, entonces X es arcoconexo.

Por el Teorema 3.2.15, existe una función continua y sobreyectiva $f: Cono() \rightarrow X$.

Como $Cono()$ es arcoconexo, X es arcoconexo, por la Proposición 2.1.

Así, la curva senoidal del topólogo es un ejemplo de un continuo que no es g -contráctil, puesto que no es arcoconexo. Además, el círculo de Varsovia es arcoconexo y no es g -contráctil. Véase ¹.

Podemos definir espacios g -contráctiles a partir de otros, de la siguiente manera.

Teorema 3.2.20 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos. Si X_i es g -contráctil, para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ es g -contráctil.*

Denotemos $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Sabemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe una función continua y sobreyectiva $f_i: X_i \rightarrow X_i$ que es homotópica a una función constante, digamos $x_0^i \in X_i$; esto es, existe una homotopía $H_i: X_i \times [0, 1] \rightarrow X_i$ tal que $H_i(x, 0) = f_i(x)$ y $H_i(x, 1) = x_0^i$ para cada $x \in X_i$.

Definimos $f: X \rightarrow X$ por $f(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = \{f_i(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ continua y sobreyectiva. Definimos la homotopía $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ por $H(x, t) = \{H_i(x_i, t)\}_{i=1}^{\infty}$, donde $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, que satisface:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= \{H_i(x_i, 0)\}_{i=1}^{\infty} = \{f_i(x_i)\}_{i=1}^{\infty}; \\ H(x, 1) &= \{H_i(x_i, 1)\}_{i=1}^{\infty} = \{x_0^i\}_{i=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

así f es homotópica a una constante y por tanto, X es g -contráctil. Veamos la siguiente equivalencia sobre el cilindro de X , cuando éste es g -contráctil.

Teorema 3.2.21 *Sea X un continuo. Entonces, existe una función continua y sobreyectiva de $\text{Cono}(X)$ en X si, y solo si, $X \times [0, 1]$ es g -contráctil.*

Sea $g: \text{Cono}(X) \rightarrow X$ continua y sobreyectiva. Definimos la función $g \times 1: \text{Cono}(X) \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$ definida por $(g \times 1)(x, t) = (g(x), t)$ continua y sobreyectiva. Por otra parte, en ¹ existe $\varphi: \text{Cono}(X) \rightarrow \text{Cono}(X) \times [0, 1]$. Así $(g \times 1) \circ \varphi: \text{Cono}(X) \rightarrow X \times [0, 1]$ es continua y sobreyectiva, y tomamos la función cociente $q_X: X \times [0, 1] \rightarrow \text{Cono}(X)$ continua y sobreyectiva, tenemos que, $X \times [0, 1]$ es continuamente equivalente a $\text{Cono}(X)$ y $\text{Cono}(X)$ es g -contráctil. Así, $X \times [0, 1]$ es g -contráctil.

Recíprocamente, supongamos $X \times [0, 1]$ es g -contráctil; así por el Teorema 3.2.15 entonces $X \times [0, 1]$ es imagen continua del $\text{Cono}(X)$, así existe una función continua y sobreyectiva $f: \text{Cono}(X) \rightarrow X \times [0, 1]$. Si $\pi_X: X \times [0, 1] \rightarrow X$ definida por

$\pi_X(x, t) = x$, entonces $\pi_X \circ f: \text{Cono}(X) \rightarrow X$ continua y sobreyectiva. Bajo las mismas hipótesis del Teorema 3.2.21 podremos probar que X es g -contráctil, veamos el siguiente teorema. Sea X un continuo. Si existe una función continua y sobreyectiva de $\text{Cono}(X)$ en X , entonces X es g -contráctil. Sea X un continuo. Supongamos existe $f: \text{Cono}(X) \rightarrow X$ continua y sobreyectiva. Definimos $F: (\text{Cono}(X)) \rightarrow X$ por $F(\{\chi_i\}_{i=1}^{\infty}) = \{f(\chi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ continua y sobreyectiva. Por el Teorema de extensión de Tietze ⁵, existe una función continua y sobreyectiva $\mu: X \rightarrow [0, 1]$. Sea $g: X \times X \rightarrow \text{Cono}(X)$ definida por $g(x, y) = q_X(x, \mu(y))$. Observe que g es continua y sobreyectiva.

Sea $G: (X \times X) \rightarrow (\text{Cono}(X))$ definida por $G(\{x_i, y_i\}_{i=1}^{\infty}) = \{g(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ continua y sobreyectiva. Nótese que $X \cong (X \times X)$; es decir, existe un homeomorfismo $h: X \rightarrow (X \times X)$. Por lo tanto, $G \circ h: X \rightarrow (\text{Cono}(X))$ es continua y sobreyectiva. Así, X es continuamente equivalente a $(\text{Cono}(X))$ y, por el Teorema 3.2.22, $(\text{Cono}(X))$ es g -contráctil. Así, X es g -contráctil por el Teorema 3.2.12. Así, si $X \times [0, 1]$ es g -contráctil, usando la equivalencia del Teorema 3.2.21, tenemos que existe una función continua y sobreyectiva $f: \text{Cono}(X) \rightarrow X$ y, por la Proposición 3.2, tendremos que X es g -contráctil. Con esta observación se sigue el siguiente corolario.

Corolario 3.2.22 *Sea X un continuo. Si $X \times [0, 1]$ es g -contráctil, entonces X es g -contráctil.*

Finalizamos esta sección con la siguiente proposición y algunas preguntas abiertas. Sea X un continuo. Si $X \times [0, 1]$ es g -contráctil, entonces $X^n \times [0, 1]$ es g -contráctil, para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos $X \times [0, 1]$ es g -contráctil, luego por el Teorema 3.2.22, $(X \times [0, 1])^n$ es g -contráctil para cada $n \in \mathbb{N}$, además $(X \times [0, 1])^n \cong X^n \times [0, 1]^n$, así $X^n \times [0, 1]^n$ es g -contráctil. Notemos que $[0, 1]^n$ es continuamente equivalente a $[0, 1]$. Así, $X^n \times [0, 1]^n$ es continuamente equivalente a $X^n \times [0, 1]$. Luego, por el Teorema 3.2.12, $X^n \times [0, 1]$ es g -contráctil. Veamos algunas preguntas abiertas presentes, con las propiedades de contractibilidad y g -contractibilidad. Sean X y Y

continuos.

1. ¿Si $X \times Y$ es g -contráctil, entonces X o Y deben ser g -contráctiles? El Teorema 3.3.5 que mostraremos más adelante, muestra que no necesariamente los dos continuos X y Y serán g -contráctiles.
2. ¿Si X^n es g -contráctil para algún $n \geq 2$, entonces X es g -contráctil?
3. ¿Si X es g -contráctil, entonces existe un continuo contráctil continuamente equivalente a X ?

3.3. El dendroide X_L

En esta sección definimos un dendroide que denotaremos por X_L . El dendroide X_L es uniformemente conexos por caminos y no es g -contráctil. Este dendroide fue introducido en 2013 en ⁴. Este dendroide X_L es un ejemplo interesante pues, en el momento que se introdujeron los continuos g -contráctiles, se creía que todo continuo uniformemente conexo por caminos tenía que ser g -contráctil. Mostraremos además algunas propiedades interesantes del dendroide X_L .

Las construcciones las realizaremos en el plano cartesiano \mathbb{R}^2 . Para esto, denotaremos por $xy = \{tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1\}$ para cualesquiera dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Por L denotaremos el abanico armónico (ver Ejemplo 2.1.11); esto es,

$$L = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = tp \text{ con } p \in P \text{ y } t \in [0, 1]\},$$

donde $P = \{(1, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 0)\}$.

Por otra parte, sea Z el dendroide mencionado en el Ejemplo 3.2.9, representado como en la Figura 20.

Recordemos que dado un continuo X , $N(X)$ denota el conjunto de puntos de no conexidad local. Observe que L es un subcontinuo del plano tal que $N(L) \neq \emptyset$,

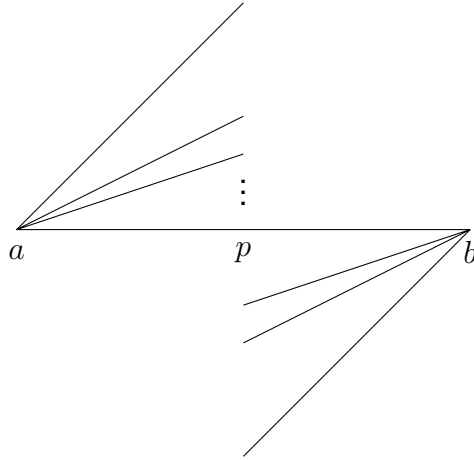


Figura 20. El dendroide Z

$Cl_{\mathbb{R}^2}(N(L))$ es localmente conexo y L es uniformemente conexo por caminos. Teniendo presente estas características; sean $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de continuos disjuntos dos a dos, donde además $D_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$, cada uno de ellos es homeomorfo a L y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (E_n) = 0.$$

Sean $d_n = (0, \frac{1}{n})$ y $e_n = (0, -\frac{1}{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, puntos de Z . Definimos al continuo X_L como:

$$X_L = Z \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right),$$

donde $Z \cap D_n = \{d_n\}$ y $Z \cap E_n = \{e_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y d_n y e_n son vértices de los abanicos D_n y E_n , respectivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ver la Figura 21 para la representación del dendroide X_L .

Sea $p = (0, 0)$. Con la construcción de las sucesiones $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \{p\}$.

Como ya lo mencionamos, el objetivo de este capítulo es mostrar que X_L no es g -

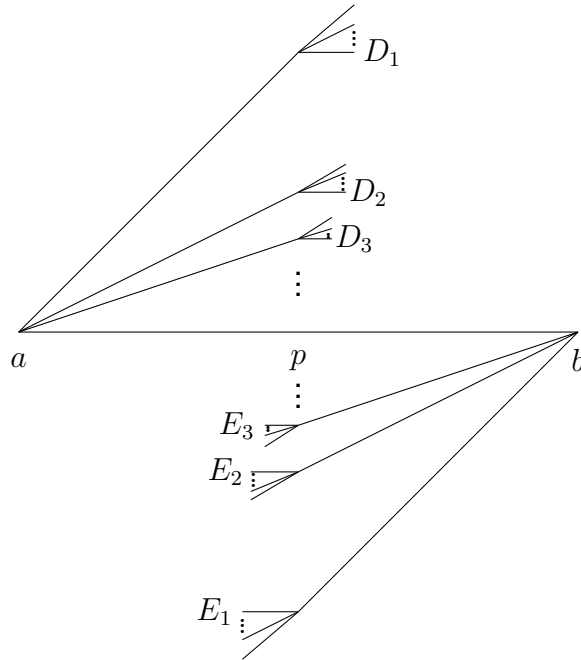


Figura 21. El dendroide X_L

contráctil, es uniformemente conexo por caminos, pero además, en el Teorema 3.3.5, demostramos que los continuos $X_L \times [0, 1]$ y $X_L^n \times [0, 1]$ son g -contráctiles, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Para efectos de las pruebas que presentaremos, describiremos los abanicos D_n y E_n de manera más detallada. Sean $q_m^n = (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2 \cdot m})$, $q_m^m = (-\frac{1}{2n}, -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2 \cdot m})$, $p_n = (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n})$ y $p_n' = (-\frac{1}{2n}, -\frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, consideraremos los espacios D_n y E_n de la siguiente manera:

$$D_n = d_n p_n \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} d_n q_m^n \right) \quad \text{y} \quad E_n = e_n p_n \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} e_n q_m^m \right).$$

El siguiente lema será fundamental para cumplir los objetivos de esta sección.

Lema 3.3.1 Sea $f: X_L \rightarrow X_L$ una función continua y sobreyectiva. Si

$$Q = ab \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{N(D_n)} \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{N(E_n)} \right),$$

entonces:

1. $Q \subset f(Q)$;
2. Para cada componente C de Q , $f(C)$ intersecciona sólo un número finito de componentes de Q .

1. Por la definición de X_L , no es difícil ver que:

$$N(X_L) = ab \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N(D_n) \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N(E_n) \right).$$

Por las propiedades del operador clausura, tenemos que $\overline{N(X_L)} = Q$. Por el Corolario 2.1.27, $\overline{N(X_L)} \subset f(\overline{N(X_L)})$ y por lo tanto, $Q \subseteq f(Q)$.

El conjunto Q lo representamos en la Figura 22.

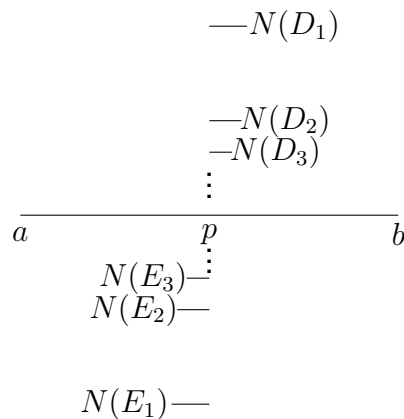


Figura 22. El conjunto $N(X_L)$.

2. Como cada componente C de Q es localmente conexo, $f(C)$ es localmente conexo, por Teorema 2.1 y Proposición 2.1.9. Supongamos que existe una componente C_0 tal que $f(C_0)$ intersecta a un número infinito de componentes de Q . Luego existe una sucesión en $f(C_0)$ que converge a p , es decir, $f(C_0)$ no es localmente conexo. Contradicción. Con lo anterior, completamos la prueba de nuestro lema. En nuestro dendroide X_L la componente es el arco, por tanto, intersecta con un número finito de componentes de Q .

Si queremos ver los $K(X_L)$ estos serán todos los puntos de ramificación y todas las ramas del abanico, excluyendo la barra límite, véase Figura 23. En esta sección

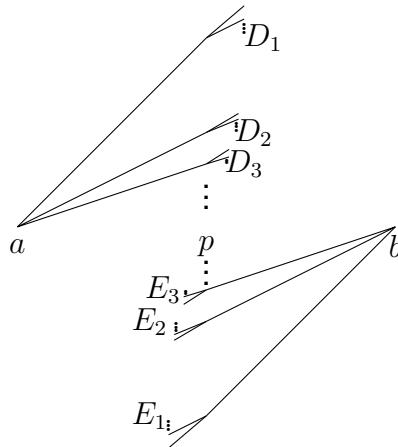


Figura 23. El conjunto $K(X_L)$.

denotaremos por $Q = ab \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{N(D_n)} \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{N(E_n)} \right)$.

Lema 3.3.2 Si $f: X_L \rightarrow X_L$ una función continua y sobreyectiva, entonces

$$p \in \limsup f^{-1}(d_n) \cap \limsup f^{-1}(e_n).$$

Supongamos $p \notin \limsup f^{-1}(d_n)$, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $f^{-1}(d_n) \cap B(p, \varepsilon_0) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \{p\}$ tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $D_n \cup E_n \subseteq B(p, \varepsilon_0)$. Sea Q definida anteriormente. Por el ítem I del Lema 3.3.1, existe $z_n \in Q$ tal que $f(z_n) = d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Puesto que $z_n \in f^{-1}(d_n)$ se sigue que $z_n \notin D_n \cup E_n$ para cada $n \geq N$. Por lo tanto,

$$f^{-1}(d_n) \cap \left[\left(\bigcup_{j=1}^{N-1} K_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N-1} T_j \right) \right] \neq \emptyset,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Nótese que cada K_n es un arco y así, conexo. De esto,

$$ab \cup \left[\left(\bigcup_{j=1}^{N-1} K_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N-1} T_j \right) \right]$$

tiene un número finito de componentes.

Luego, existe una componente C de Q y una subsucesión $\{d_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $C \cap f^{-1}(d_{n_k}) \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $f(C)$ interseca a un número infinito de componentes de Q , por el ítem II del Lema 3.3.1, esto es absurdo. Por tanto, $p \in \limsup f^{-1}(d_n)$. De la misma forma se prueba para $p \in \limsup f^{-1}(e_n)$. El siguiente lema nos mostrará el comportamiento de los vértices a y b en X_L cuando los evaluamos en una homotopía.

Lema 3.3.3 *Sea $f: X_L \rightarrow X_L$ una función continua y sobreyectiva. Si*

$$H: X_L \times [0, 1] \rightarrow X_L$$

es una homotopía tal que $H(x, 0) = f(x)$ para cada $x \in X_L$ y $H(p, s) = a$ para algún $s \in [0, 1]$ (o $H(p, s) = b$ para algún $s \in [0, 1]$), entonces existe $t_0 \in [0, s]$ tal que $H(p, t_0) = b$ (o $H(p, t_0) = a$, respectivamente).

Supongamos $H(p, s) = a$, la prueba se hace análoga para $H(p, s) = b$. Por el Lema 3.3.2, $p \in \limsup f^{-1}(d_n) \cap \limsup f^{-1}(e_n)$, así $p \in \limsup f^{-1}(e_n)$, por definición de \limsup , existe una sucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ en X_L tal que,

$$z_{n_k} \in f^{-1}(e_{n_k}) \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = p.$$

Por la continuidad de la homotopía, tenemos que $H(z_{n_k}, 1) = a$. Sean L_a y L_b las componentes de $X_L \setminus \{p\}$ que contienen a a y b , respectivamente, las cuales corresponden a los abanicos que se generan al dividir el continuo Z en el punto p .

Sea U un abierto de X tal que $a \in U$ y $U \subset X \setminus Cl_X(L_b)$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(z_{n_k}, 1) \in U$, si $k \geq N$. Como $H(z_{n_k}, 0) = f(z_{n_k}) = e_{n_k}$, $e_{n_k} \in H(\{z_{n_k}\} \times [0, 1])$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Note que si $k \geq N$, entonces $H(\{z_{n_k}\} \times [0, 1]) \cap U \neq \emptyset$. Por la Proposición 2.1, tenemos que $H(\{z_{n_k}\} \times [0, 1])$ es un continuo arco conexo y por la Proposición 2.1, Z es únicamente arco conexo. Así, se sigue que $b \in H(\{z_{n_k}\} \times [0, 1])$ para cualquier $k \geq N$. Sea $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0, 1]$ tal que $H(z_{n_k}, t_k) = b$ para todo $k \geq N$. Por la compacidad de $[0, 1]$, podemos afirmar que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0$ con $t_0 \in [0, 1]$, así la continuidad de H nos dice que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(z_{n_k}, t_k) = H(p, t_0).$$

Recordando la Definición 2.1.27 en el Lema 3.3.2 veremos que X_L contiene a $\{p\}$ como un R^1 -conjunto y por tanto, no es contráctil. Además, dadas las propiedades anteriores, veamos ahora unos de los teoremas más importantes de este capítulo, y es ver que el continuo X_L no es g -contráctil.

Teorema 3.3.4 *El continuo X_L no es g -contráctil*

Supongamos que X_L es g -contráctil. Entonces existe una función continua y sobreyectiva $f: X_L \rightarrow X_L$, tal que f es homotópica a una función constante; es decir, existen $a \in X_L$ y $H: X_L \times [0, 1] \rightarrow X_L$ una función continua tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = a$ para cada $x \in X_L$.

Nótese que $H(p, 1) = a$. Luego, por el Lema 3.3.3, existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $H(p, t_0) = b$. Por ser X_L arco conexo, podemos definir $t_a = \min\{t \in [0, 1] : H(p, t) = a\}$ y $t_b = \min\{t \in [0, 1] : H(p, t) = b\}$. Claramente $t_a \neq t_b$.

Supongamos $t_a < t_b$. Note que $H|_{X_L \times [0, t_a]}$ es una homotopía tal que $H(x, 0) = f(x)$

para todo $x \in X_L$ y $H(p, t_a) = a$. Usando nuevamente el Lema 3.3.3, tenemos que existe $t_1 \in [0, t_a]$ tal que $H(p, t_1) = b$; esto contradice la minimalidad de t_b y el hecho que $t_a < t_b$. De manera análoga llegamos a una contradicción si $t_b < t_a$. Por tanto, f no es homotópica a una constante, y X_L no es g -contráctil.

Con lo anterior veremos que el continuo X_L es uniformemente conexo y que además, no es g -contráctil.

El continuo X_L es uniformemente conexo por caminos. Como X_L es un dendroide, tenemos que para cada par de puntos x e y de X_L existe un único arco que los une; llamémoslo xy . Tomemos $\alpha_{q_1^1 q_1'^1} : [0, 1] \rightarrow X_L$ donde $q_1^1 = (1/2, 2)$ y $q_1'^1 = (-1/2, -2)$, un camino donde

$$\alpha_{q_1^1 q_1'^1}(0) = q_1^1, \alpha_{q_1^1 q_1'^1}(1) = q_1'^1 \text{ y } \alpha_{q_1^1 q_1'^1}([0, 1]) = q_1^1 q_1'^1.$$

Note que $q_1^1 q_1'^1$ es el arco más largo en X_L .

Así, para cada $x, y \in X_L$ definimos el homomorfismo $f_{xy} : q_1^1 q_1'^1 \rightarrow xy$ tal que $d(f_{xy}(r), f_{xy}(s)) \leq d(r, s)$ para todo $r, s \in q_1^1 q_1'^1$. Para cada $x, y \in X$, definimos $\alpha_{xy} = f_{xy} \circ \alpha_{q_1^1 q_1'^1}$. Observe que,

$$\alpha_{xy}(0) = f_{xy} \circ \alpha_{q_1^1 q_1'^1}(0) = f_{xy}(q_1^1) = x$$

$$\alpha_{xy}(1) = f_{xy} \circ \alpha_{q_1^1 q_1'^1}(1) = f_{xy}(q_1'^1) = y.$$

Sea

$$\mathcal{F} = \{\alpha_{xy} : x, y \in X_L\}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\alpha_{q_1^1 q_1'^1}$ es uniformemente continua, existe $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1\} \subseteq [0, 1]$ tal que $(\alpha_{q_1^1 q_1'^1}([t_{i-1}, t_i])) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \dots, N\}$. De lo anterior, dado $\alpha_{xy} \in \mathcal{F}$, tenemos que $\alpha_{xy} = f_{xy} \circ \alpha_{q_1^1 q_1'^1}$, y

$$(\alpha_{xy}([t_{i-1}, t_i])) < (\alpha_{q_1^1 q_1'^1}([t_{i-1}, t_i])) < \varepsilon,$$

satisfaciendo el ítem 2. de la Definición 3.1.2. Por tanto, X_L es uniformemente conexo por caminos.

Sobre el dendroide X_L afirmamos las siguientes propiedades.

Teorema 3.3.5 *Para el dendroide X_L tenemos las siguientes propiedades:*

1. X_L es uniformemente conexo por caminos y no es g -contráctil.
2. $X_L \times [0, 1]$ es g -contráctil.
3. $X_L^n \times [0, 1]$ es g -contráctil, para cada $n \in \mathbb{N}$.
4. $X_L^{\mathbb{N}}$ es g -contráctil.

1. Consecuencia del Teorema 3.3.4 y la Proposición 3.3.

2. Sean L_a y L_b las componentes de $X_L \setminus \{p\}$ que contienen a a y b , respectivamente. Nótese que $B_1 = L_a \cup \{p\}$ y $B_2 = L_b \cup \{p\}$ son subcontinuos propios de X_L tales que $X_L = B_1 \cup B_2$ y $B_1 \cap B_2 = \{p\}$. Además, existe un homeomorfismo $h: B_2 \rightarrow B_1$ tal que $h(p) = p$. Sea $f_1: X_L \rightarrow B_1$ definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in B_1; \\ h(x), & \text{si } x \in B_2. \end{cases}$$

La función f_1 está bien definida, pues $f_1(p) = p$ y es continua, ya que $f_1|_{B_1} = id_{B_1}$, f_1 es continua. De igual forma podemos definir $f_2: X_L \rightarrow B_2$.

Nótese que B_1 y B_2 son subcontinuos de X_L contráctiles. Así, para cada $i \in \{1, 2\}$ existe una homotopía $H_i: X_L \times [0, 1] \rightarrow B_i$ tal que $H_i(x, 0) = f_i(x)$ y $H_i(x, 1) = p$ para cada $x \in X_L$. Ya que, f_i es sobreyectiva, luego H_i es sobreyectiva, para cada $i \in \{1, 2\}$.

Sea $H: X_L \times [0, 1] \rightarrow X_L$ definida por

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 3t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}; \\ H_2(x, 2 - 3t), & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}; \\ H_2(x, 3t - 2), & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Es fácil ver que H está bien definida y es continua. Nótese que $H(x, 0) = f_1(x)$ y $H(x, 1) = p$ para cada $x \in X_L$. Sea $G: \text{Cono}(X_L) \rightarrow X_L$ definida como

$$G(x, t) = \begin{cases} H(x, t), & \text{si } t \neq 1; \\ p, & \text{si } (x, t) = v_X. \end{cases}$$

con G continua y sobreyectiva, aplicando el Teorema 3.2.21, $X_L \times [0, 1]$ es g -contráctil.

3. Consecuencia del ítem 2 y la Proposición 3.2.

4. Por el ítem 2 probado anteriormente, existe una función continua y sobreyectiva $G: \text{Cono}(X_L) \rightarrow X_L$. Así, X_L es g -contráctil, por el Teorema 3.2.

Por lo visto anteriormente, el recíproco del Corolario 3.2.16 no es cierto y un ejemplo de esto es el continuo X_L definido anteriormente; esto es, X_L es un continuo uniformemente conexo por caminos que no es g -contráctil, puesto que nuestro dendroide X_L no es preimagen continua del $\text{Cono}()$, ya que por el Teorema 3.1.6 es posible demostrar que X_L no contiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes.

4. PSEUDO Y g -PSEUDO CONTRACTIBILIDAD.

Ahora, en conexión con los conceptos anteriores, en esta sección introducimos las nociones de pseudo-contractibilidad y g -pseudo-contractibilidad. Veremos que todo continuo g -contráctil es g -pseudo-contráctil y todo continuo pseudo-contráctil es g -pseudo-contráctil. Por tanto, todo continuo contráctil es g -pseudo-contráctil. El objetivo de este trabajo es presentar resultados generales relacionados con la g -pseudo-contractibilidad.

Así como David Bellamy generaliza la definición de contractibilidad, R. H. Bing introduce la noción de pseudo-contráctil modificando la homotopía, como detallaremos en este capítulo. De lo anterior, es natural introducir el concepto de g -pseudo-contráctil. Estos conceptos los abordaremos con detalle en este capítulo.

4.1. Pseudo-contráctil

Empezamos este capítulo con la definición formal de pseudo-contráctil. A continuación, mostraremos algunas propiedades y ejemplos.

Definición 4.1.1 Sea X y Y espacios topológicos y $f, g: X \rightarrow Y$ funciones continuas. Se dice que f es *pseudo-homotópica a g* , si existe un continuo K , dos puntos $a, b \in K$ y una función continua

$$G: X \times K \rightarrow Y,$$

tales que $G(x, a) = f(x)$ y $G(x, b) = g(x)$, para cada $x \in X$. La función G es llamada una pseudo-homotopía entre f y g con espacio factor K y lo denotamos por $f \simeq_K g$.

La contractibilidad tiene como espacio factor el intervalo $[0, 1]$, R.H. Bing cambia este espacio factor a un continuo cualquiera, esto permite generalizar la definición de

contráctil a pseudo-contráctil modificando el espacio factor a un continuo cualquiera que satisfaga la definición de pseudo-homotopía.

Definición 4.1.2 Un continuo X es llamado *pseudo-contráctil* si su función identidad, $i_X: X \rightarrow X$ es pseudo-homotópica a una función constante en X .

Así, si dos funciones continuas son homotópicas, entonces son pseudo-homotópicas, con espacio factor $[0, 1]$. Es decir, si X es contráctil entonces es pseudo-contráctil. El recíproco no es cierto, un ejemplo de esto es el llamado continuo de Kuperberg, que describimos enseguida.

Ejemplo 4.1.3 *Existe un continuo pseudo-contráctil que no es contráctil.*

En el plano complejo \mathbb{C} , sean:

$$X_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{t+2}{t+1}e^{it}, t \in [0, \infty) \right\}, S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\},$$

$$X_1 = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0 \text{ y } 0 \leq Re(z) \leq 1\} \text{ y } D = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| \leq 1\}.$$

Definimos a $X = X_0 \cup D$ y el espacio factor $K = X_0 \cup S^1 \cup X_1$.

Veamos que es X es pseudo-contráctil. Sean:

$$H_1: X_0 \times X_0 \rightarrow X_0 : H_1 \left(\frac{t+2}{t+1}e^{it}, \frac{t'+2}{t'+1}e^{it'} \right) = \frac{t+t'+2}{t+t'+1}e^{i(t+t')}$$

$$H_2: D \times X_0 \rightarrow D : H_2 \left(z, \frac{t+2}{t+1}e^{it} \right) = ze^{it};$$

$$H_3: D \times (S^1 \cup X_1) \rightarrow D : H_3(z, w) = zw;$$

$$H_4: X_0 \times (S^1 \cup X_1) \rightarrow D : H_4 \left(\frac{t+2}{t+1}e^{it}, w \right) = we^{it}.$$

Observe que las funciones H_1, H_2, H_3 y H_4 son continuas. Sea $H: X \times K \rightarrow X$ dada por:

$$H(z, c) = \begin{cases} H_1(z, c), & \text{si } (z, c) \in X_0 \times X_0; \\ H_2(z, c), & \text{si } (z, c) \in D \times X_0; \\ H_3(z, c), & \text{si } (z, c) \in D \times (S^1 \cup X_1); \\ H_4(z, c), & \text{si } (z, c) \in X_0 \times (S^1 \cup X_1). \end{cases}$$

La pseudo-homotopía H la representamos en la Figura 24.

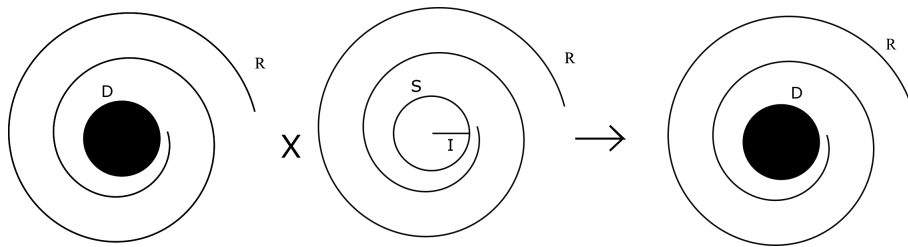


Figura 24. Continuo de Kuperberg.

Nótese que H es continua, pues H_i es continua, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Tomando $a = (2, 0)$ y $b = (0, 0)$ en C , obtenemos que X es pseudo-contráctil. No es contráctil debido a que el continuo X no es arcoconexo, por la Proposición 3.2.

La siguiente proposición nos permite afirmar que si X es contratil, entonces será pseudo-contráctil con cualquier espacio factor K . Veamos la prueba a continuación: Sea X un continuo. Si X es contráctil, entonces X es pseudo-contráctil con cualquier continuo C como espacio factor. Sean C un continuo no degenerado y $a, b \in C$ distintos. Dado que C es métrico, entonces es T_1 , por lo tanto los conjuntos $\{a\}$ y $\{b\}$ son cerrados en C disjuntos. Como C es normal, entonces por el Lema de Urysohn existe $\varphi: C \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $\varphi(\{a\}) \subseteq \{0\}$ y $\varphi(\{b\}) \subseteq \{1\}$, lo que implica que $\varphi(a) = 0$ y $\varphi(b) = 1$. Como X es contráctil, existe una función continua

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow X \text{ tal que } H(x, 0) = i_X(x) \text{ y } H(x, 1) = x_0,$$

con $x_0 \in X$ y para toda $x \in X$. Definamos la siguiente función $G: X \times C \rightarrow X$ dada

por $G(x, c) = H(x, \varphi(c))$. Notemos que G es continua y cumple que

$$G(x, a) = H(x, \varphi(a)) = H(x, 0) = i_X(x) \text{ y } G(x, b) = H(x, \varphi(b)) = H(x, 1) = x_0$$

para cada $x \in X$. Por lo tanto, $i_X \cong_C x_0$, es decir, X es pseudo-contráctil con C como espacio factor. En la pseudo-contractibilidad deformaremos al espacio X continuamente a un punto en el espacio. Introducimos la definición de pseudo-contráctil con respecto a un continuo Y deformando el espacio X en Y y a Y en un punto en sí mismo.

Definición 4.1.4 Sean X y Y continuos. Diremos que X es *pseudo-contráctil con respecto a Y* si toda función continua $f: X \rightarrow Y$ es pseudo-homotópica a una función constante.

Además, si tenemos un continuo pseudo-contráctil, este será pseudo-contráctil con respecto a Y , para cualquier continuo Y . Sea X un continuo. Si X es pseudo-contráctil, entonces, X es pseudo-contráctil con respecto a Y , para todo continuo Y . Supongamos que X es pseudo-contráctil. Esto es, existen un continuo K , dos puntos a y b en K y $G: X \times K \rightarrow X$ continua, tales que $G(x, a) = id(x)$ y $G(x, b) = x_0$ para todo $x \in X$. Dados Y un continuo y $f: X \rightarrow Y$ continua, definimos $H: X \times K \rightarrow Y$ por $H(x, y) = f(G(x, y))$ para cada $(x, y) \in X \times K$. Nótese que $H(x, a) = f(G(x, a)) = f(x)$ y $H(x, b) = f(G(x, b)) = f(x_0)$ para todo $x \in X$. Así, X es pseudo-contráctil con respecto a Y .

La propiedad de pseudo-homotopía se puede heredar como mostramos en la siguiente proposición.

Sea X un continuo pseudo-contráctil con espacio factor K con $a, b \in K$ que satisface la definición de pseudo-homotopía. Si C es un subcontinuo de K irreducible entre a y b , entonces X es pseudo-contráctil con espacio factor C . Sea X pseudo-contráctil

con espacio factor K y $a, b \in K$, luego existe

$$H: X \times K \rightarrow X$$

continua tal que $H(x, a) = x$ y $H(x, b) = p_0$ para todo $x \in X$ y algún $p_0 \in X$. Sea $C \subseteq K$ un subcontinuo irreducible entre a y b , definimos $F: X \times C \rightarrow X$ como $F = H|_{X \times C}$. De la continuidad de H , se tiene que F es continua. Además,

$$F(x, a) = H|_{X \times C}(x, a) = H(x, a) = x \text{ y } F(x, b) = H|_{X \times C}(x, b) = H(x, b) = p_0.$$

Luego, X es pseudo-contráctil con espacio factor C . De la prueba anterior, es suficiente que C sea un subcontinuo del espacio factor que contenga a los puntos a, b de K .

W. Kuperberg fue el primer matemático que probó que las nociones de pseudo-contractibilidad y contractibilidad son diferentes con el espacio que mostramos en el Ejemplo 4.1.3. Aquí nos preguntamos que condiciones debe tener el espacio factor K o el continuo X para que la propiedad de pseudo-contractibilidad coincida con la contractibilidad. De esto se tienen los siguientes resultados. Sean X un continuo y $f, g: X \rightarrow X$ funciones continuas. Si f y g son pseudo-homotópicas y su espacio factor K es arcoconexo, entonces las dos funciones son homotópicas. Sean $f, g: X \rightarrow X$ funciones continuas y pseudo-homotópicas con espacio factor K . Esto es, existen $a, b \in X$ y $H: X \times K \rightarrow X$ continua con $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$ para todo $x \in X$. Puesto que K es un continuo arcoconexo, entonces existe $\alpha: [0, 1] \rightarrow K$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$. Así, definimos la homotopía $G: X \times [0, 1] \rightarrow X$, como $G(x, t) = H(x, \alpha(t))$, donde:

$$G(x, 0) = H(x, \alpha(0)) = H(x, a) = f(x);$$

$$G(x, 1) = H(x, \alpha(1)) = H(x, b) = g(x).$$

Así, f y g son homotópicas. Con la proposición anterior, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1.5 *Sea X un continuo. Si X es pseudo-contráctil con algún espacio factor arcoconexo, entonces X es contráctil.*

En particular, si X es pseudo-contráctil y el espacio factor K es un continuo de Peano, entonces X es contráctil. El siguiente resultado nos permite construir ejemplos de continuos que no son pseudo-contráctiles.

La Definición 4.1.6 y el Teorema de Eilenberg (Teorema 4.1.7 a continuación), nos permite probar que todo continuo pseudo-contráctil tiene la propiedad b). Los detalles pueden verse en ¹³.

Definición 4.1.6 Sean X continuo y $f: X \rightarrow S^1$ continua. Decimos que f tiene *logaritmo continuo* si existe una función continua $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\phi(x)}$, para cada $x \in X$.

Teorema 4.1.7 (Teorema de Eilenberg) ¹³ *Sean X un continuo y $f: X \rightarrow S^1$ continua. Entonces, f tiene logaritmo continuo si, y solo si, f es homotópica a la función constante 1.*

Teorema 4.1.8 *Sea X un continuo. Si X es pseudo-contráctil, entonces X tiene la propiedad b).*

Sea X un continuo pseudo-contráctil. Veamos que X tiene la propiedad b). Sea $f: X \rightarrow S^1$ una función continua. Por la Proposición 4.1, X es pseudo-contráctil con respecto a Y , para cada continuo Y ; en particular, con respecto a S^1 . Así, por ¹⁴,

¹³ G. WHYBURN. *Analytic topology*. Vol. 28. American Mathematical Soc., 1948.

¹⁴ M. GASCA. "Pseudo-contractibilidad en espacios topológicos". En: (2021).

$f: X \rightarrow S^1$ es homotópica a un punto. Así, por el Teorema 4.1.7, f tiene logaritmo continuo. Como f se tomó de manera arbitraria, X tiene la propiedad b). Así, si X es pseudo-contráctil, entonces X tiene la propiedad b), y aplicando el Teorema 2.1.17, tenemos que X es uncoherente.

Corolario 4.1.9 *Sea X un continuo. Si X es pseudo-contráctil, entonces X es uncoherente.*

De lo anterior, el espacio S^1 o el Círculo de Varsovia definido en la Figura 2, no son pseudo-contráctiles, ya que no son uncoherente.

El recíproco no se tiene, pues la curva senoidal del topólogo definida en el Ejemplo 2.1.4, es uncoherente pero W. Debski en ¹⁵ probó que no es pseudo-contráctil. El siguiente teorema es más complicado de demostrar, sin embargo lo presentamos, pues nos dice que un continuo pseudo-contráctil de dimensión uno, tiene todos sus subcontinuos uncoherentes.

Teorema 4.1.10 ¹⁴ *Sea X un continuo. Si X es un espacio de dimensión uno y pseudo-contráctil, entonces es hereditariamente uncoherente.*

Como un λ -dendroide es un continuo hereditariamente descomponible y hereditariamente uncoherente, el siguiente corolario se sigue directamente del Teorema 4.1.10.

Corolario 4.1.11 *Sea X un continuo hereditariamente descomponible. Si X es pseudo-contráctil, entonces X es un λ -dendroide.*

El recíproco no es cierto pues, como lo mencionamos anteriormente, la curva senoidal es un λ -dendroide que no es pseudo-contráctil.

¹⁵ W. DEBSKI. "Pseudo-contractibility of the $\sin(1/x)$ -curve". En: 365–367. KATSUYA EDA, UMED H. KARIMOV, AND DU ~ SAN REPOV ~ S. Citeseer. 1994.

Recuerde que, dados un continuo X y Y un subcontinuo de X , una función continua $r: X \rightarrow Y$ es una *retracción* si $r(y) = y$ para cada $y \in Y$.

Teorema 4.1.12 Sean X continuo, $Y \subseteq X$ y $r: X \rightarrow Y$ una retracción. Si X es pseudo-contráctil, entonces Y es pseudo-contráctil.

Supongamos X es pseudo-contráctil, luego existen un espacio C , una función continua $H: X \times C \rightarrow X$ y dos puntos $p, q \in C$ tales que:

$$H(x, p) = x, \quad H(x, q) = c_0 \text{ para algún } c_0 \in X \text{ y todo } x \in X.$$

Sea $G: Y \times C \rightarrow Y$, definida para cada $(z, y) \in Y \times C$ como:

$$G(z, x) = r(H(z, x)).$$

Es claro que G es continua, y además

$$G(z, p) = r(H(z, p)) = r(z) = z \text{ y } G(z, q) = r(H(z, q)) = r(c_0)$$

para todo $z \in Y$. Luego Y es pseudo-contráctil.

Ejemplo 4.1.13 Sea $X = X_0 \cup X_1 \cup S^1$ el continuo definido en el Ejemplo 4.1.3. Notemos que X no es pseudo-contráctil.

Sea $r: X \rightarrow S^1$ la función continua definida por:

$$r(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|}, & \text{si } x \in X_0; \\ e^{ix}, & \text{si } x \in X_1; \\ x, & \text{si } x \in S^1. \end{cases}$$

Note que r es una retracción. Puesto que S^1 no es pseudo-contráctil, X no es pseudo-contráctil, por el Teorema 4.1.12.

Bajo ciertas condiciones presentes en nuestro continuo podemos decir cuando no es pseudo-contráctil.

Definición 4.1.14 Se dice que un continuo X es *homogéneo* si para cualesquiera $x, y \in X$, existe un homeomorfismo $h: X \rightarrow X$ tal que $h(x) = y$.

No profundizaremos sobre los continuos homogéneos. Solo mostramos un par de resultados para ampliar la teoría relacionada con los espacios pseudo-contráctiles.

Lema 4.1.15 *Sea X un continuo. Si X es un espacio de dimensión uno, descomponible y homogéneo, entonces X no es pseudo-contráctil.*

Supongamos que X es pseudo-contráctil. Puesto que X es un espacio de dimensión uno, por el Teorema 4.1.10, X es hereditariamente unicoherente. Así, X es homogéneo y hereditariamente unicoherente. Por ¹⁶, X es indescomponible. Lo cual es absurdo, pues X es descomponible.

Por ¹⁴, todo continuo hereditariamente descomponible es de dimensión uno. Así, el siguiente teorema se sigue del Lema 4.1.15.

Teorema 4.1.16 *Si X es un continuo homogéneo hereditariamente descomponible, entonces X no es pseudo-contráctil.*

En este punto retomaremos los R^i -conjuntos, ahora, aplicados a los continuos pseudo-contráctiles. La prueba del siguiente teorema es similar a la presentada en el Teorema 3.2.6 del capítulo 2.

¹⁶ F. JONES. "Certain homogeneous unicoherent indecomposable continua". En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 2.6 (1951), págs. 855-859.

Teorema 4.1.17 *Sea X un continuo. Si X contiene un R^i -conjunto, para algún $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces X no es pseudo-contráctil.*

Sea $A \subseteq X$ un R^i -conjunto. Si A es un R^2 -conjunto, entonces A es un R^3 -conjunto y, si A es un R^1 -conjunto, entonces A contiene un R^3 -conjunto. Por tanto, es suficiente demostrar que si el espacio X contiene un R^3 -conjunto, entonces X no es pseudo-contráctil.

Sea A un R^3 -conjunto en X . Entonces existe un conjunto abierto U que contiene a A y una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U tales que $\liminf C_n = A$. Dado que $A \subseteq U$, tenemos que existe $r > 0$ tal que

$$r < \inf\{d(a, z) : a \in A \text{ y } z \notin U\}. \quad (3)$$

Supongamos que X es pseudo-contráctil. Entonces existen Y continuo, $a, b \in Y$ y una pseudo-homotopía $H: X \times Y \rightarrow X$ tal que $H(x, a) = x$ y $H(x, b) = p$ para algún $p \in X$ y todo $x \in X$. Puesto que H es continua y $X \times Y$ es compacto, por el Teorema de Heine se sigue que H es uniformemente continua. Luego, en particular, existe $\delta > 0$ tal que $(H(K \times \{t\})) < r$, si $(K \times \{t\}) < \delta$. Es decir,

$$\text{si } (K) < \delta, \text{ entonces } (H(K \times \{t\})) < r, \text{ para todo } t \in Y. \quad (4)$$

Consideramos el conjunto $P = \{c, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\} \subseteq U$ con $c \in A$, $c_i \in C_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\lim c_i = c$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(P) < \delta$.

Sea

$$V = \{t \in Y : H(P \times \{t\}) \subset U\}.$$

Mostraremos algunas propiedades de este conjunto V :

1. $V \neq \emptyset$. Dado que $H(P \times \{a\}) = P$ y $P \subseteq U$, tenemos que $a \in V$ y $V \neq \emptyset$.

2. $V \neq Y$. Si $V = Y$, entonces $b \in V$. Por lo tanto, $H(P \times \{b\}) = \{p\} \subseteq U$, por definición de V . Sea D la componente de U tal que $p \in D$. Consideremos una componente C_j de U tal que $C_j \neq D$. Puesto que, $c_j \in C_j$, $\{c_j\} \times Y$ es conexo y H es continua, tenemos que $H(\{c_j\} \times Y)$ es conexo en U tal que $p, c_j \in H(\{c_j\} \times Y)$ lo cual es una contradicción pues p y c_j están en diferentes componentes de U . Por lo tanto, $V \neq Y$.
3. V es abierto en Y . Sea $t_0 \in Y$. Entonces $H(P \times \{t_0\}) \subseteq U$, así para cada $p \in P$ $H(p, t_0) \in U$. Puesto que H es continua en $X \times Y$, luego es continua en $P \times Y$. Así, existe un subconjunto W_p abierto de $P \times Y$ tal que $H(W_p) \subseteq U$. Por lo tanto, existe un abierto básico $Q_p \times R_p$ de $P \times Y$ tal que Q_p y R_p son abiertos de P y Y respectivamente, tal que $p \in Q_p$ y $t_0 \in R_p$ con $Q_p \times R_p \subseteq W_p$. Así tenemos que $\{Q_p\}_{p \in P}$ es una cubierta abierta de P . Ya que P es compacto, existen $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$ tales que $P = \cup_{i=1}^n Q_{p_i}$. Denotamos por $R = \cap_{i=1}^n R_{p_i}$ subconjunto abierto en Y tal que $t_0 \in R$. Sea $s \in R$, entonces

$$H(P \times \{s\}) = H(\cup_{i=1}^n Q_{p_i} \times \{s\}) = \cup_{i=1}^n H(Q_{p_i}, \{s\}) \subseteq U.$$

Por tanto, existe un abierto R en Y tal que $t_0 \in R \subseteq V$. Así, V es abierto en Y .

Sea V_0 la componente de V con $a \in V_0$. Ya que $H(\{c_j\} \times V_0)$ es conexo que contiene a c_i y $H(\{c_j\} \times V_0) \subseteq U$, tenemos que $H(\{c_i\} \times V_0) \subseteq C_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Por continuidad de H , $\lim_{n \rightarrow \infty} H(c_n, t) = H(c, t)$. Luego, $H(c, t) \in \liminf C_n = A$ para todo $t \in V_0$.

Probemos ahora que $H(c, t_0) \in A$ para todo $c \in A$ y $t_0 \in Fr(V_0)$. Sea $t_0 \in Fr(V_0)$.

Luego, existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en V_0 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$. Así, por la continuidad de H , $\lim_{n \rightarrow \infty} H(c, t_n) = H(c, t_0)$. Ya que A es cerrado, $H(c, t_0) \in A$.

Por ¹², $\overline{V_0} \cap (Y \setminus V) \neq \emptyset$. Sea $t' \in \overline{V_0} \cap Y \setminus V$. Note que $t' \in Fr(V_0) \setminus V$. Así, por definición de V , $H(P \times \{t'\}) \not\subseteq U$. Luego, existe $d \in P$ tal que $H(d, t') \in X \setminus U$. Con el párrafo anterior tenemos que $H(c, t') \in A$. Por lo tanto, por (3),

$d(H(c, t'), H(d, t')) > r$. Una contradicción, pues $c, d \in P$ y $(P \times \{t'\}) < r$ (ver (4)). En la Figura 20, mostramos un ejemplo de un continuo que contiene un R^3 -conjunto. Luego, por el Teorema 4.1.17, este continuo no es pseudo-contráctil. De la misma forma, el continuo X_L contiene a $\{p\}$ como R^3 -conjunto y, por tanto, X_L no es pseudo-contráctil.

Veamos algunas preguntas abiertas presentes en las propiedades de pseudo-contractibilidad. Dado un continuo X :

1. ¿Qué condiciones debe tener un continuo X pseudo-contráctil para ser contráctil?
2. ¿Todo dendroide pseudo-contráctil es contráctil?
3. ¿Existe un continuo de dimensión uno que sea pseudo-contráctil pero no contráctil?
4. ¿Existe un continuo no degenerado (hereditariamente) indescomponible que es pseudo-contráctil?

4.2. G-pseudo-contráctil

Generalizando la propiedad de pseudo-contractibilidad, aparece la propiedad llamada g -pseudo-contráctil, que se define de la siguiente forma:

Definición 4.2.1 Un continuo X es llamado g -pseudo-contráctil si existen $k \in X$ y una función continua y sobreyectiva $f: X \rightarrow X$ que es pseudo-homotópica a una función constante k_X .

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.2 Sea Y el continuo de Kumperberg descrito en el Ejemplo 4.1.3. Denotamos por $S^+ = \{3+e^{it} : t \in [0, \pi]\}$ y $S^- = \{3+e^{it} : t \in [\pi, 2\pi]\}$. Sea $S = S^+ \cup S^-$.

Sea $X = Y \cup S$. Tomamos $f: X \rightarrow X$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in Y; \\ 3 + e^{i(2t-3\pi)}, & \text{si } x = 3 + e^{it} \in S^+; \\ 3 + e^{i(-2t+\pi)}, & \text{si } x = 3 + e^{it} \in S^-. \end{cases}$$

Observe que f es continua y sobreyectiva. Tomamos a $K = C \cup [2, 3]$ donde C es el espacio factor tomado en el Ejemplo 24. Definimos la pseudo-homotopía $H: X \times K \rightarrow X$ definida por:

$$H(x, c) = \begin{cases} \frac{t+s+2}{t+s+1} e^{i(t+s)}, & \text{si } x = \frac{t+2}{t+1} e^{it} \text{ y } c = \frac{s+2}{s+1} e^{is} \in R \times R; \\ c, & \text{si } (x, c) \in S \times C; \\ x, & \text{si } (x, c) \in Y \times [2, 3]; \\ \frac{xc}{\max\{\|x\|, \|c\|, 1\}}, & \text{si } (x, c) \in (D \times C) \cup (Y \times S^1) \cup (Y \times [0, 1]); \\ 3 + e^{i(2t-3\pi)}, & \text{si } x = 3 + e^{it} \in S^+; \\ 3 + e^{i(-2t+\pi)}, & \text{si } x = 3 + e^{it} \in S^-. \end{cases}$$

Tomamos los puntos $a = 0 + 0i$ y $b = 3 + 0i$ en K tal que $H(x, b) = f(x)$ y $H(x, a) = (0, 0)$.

A partir de una familia numerable de continuos g -pseudo-contráctiles podemos definir más continuos g -pseudo-contráctiles, veamos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.3 Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de continuos g -pseudo-contráctiles, entonces $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es g -pseudo-contráctil.

Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de continuos g -pseudo-contráctiles. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un continuo C_n , puntos $a_n, b_n \in C_n$ y una función $f_n: X_n \rightarrow X_n$ continua y sobreyectiva y una pseudo-homotopía $H_n: X_n \times C_n \rightarrow X_n$, tal que $H_n(x, a_n) = f(x)$ y

$H_n(x, b_n) = p_n$, para algún $p_n \in X_n$ y para todo $x \in X_n$. Ahora, definimos

$$H: \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \prod_{n \in \mathbb{N}} C_n \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

$$((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}) \rightarrow (H_n(x_n, c_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Es inmediato verificar que:

$$H((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (H_n(x_n, a_n))_{n \in \mathbb{N}} = (f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}};$$

$$H((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (H_n(x_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}} = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Por tanto, $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es g -pseudo-contráctil. Del teorema anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.2.4 ¹⁷ *Si X es un continuo g -pseudo-contráctil, entonces:*

1. X^n es g -pseudo-contráctil, para cada $n \in \mathbb{N}$.
2. $X \times [0, 1]$ es g -pseudo-contráctil.
3. X es g -pseudo-contráctil.

El siguiente teorema presenta todas las posibles relaciones entre las cuatro propiedades topológicas relacionadas con la contractibilidad en un continuo X .

Teorema 4.2.5 ¹⁷ *Sea X un continuo.*

1. *Si X es contráctil, entonces X es g -contráctil.*
2. *Si X es contráctil, entonces X es pseudo-contráctil.*

¹⁷ J. ANAYA et al. "On g -pseudo-contractibility of continua". En: *Topology and its Applications* 276 (2020), pág. 107169.

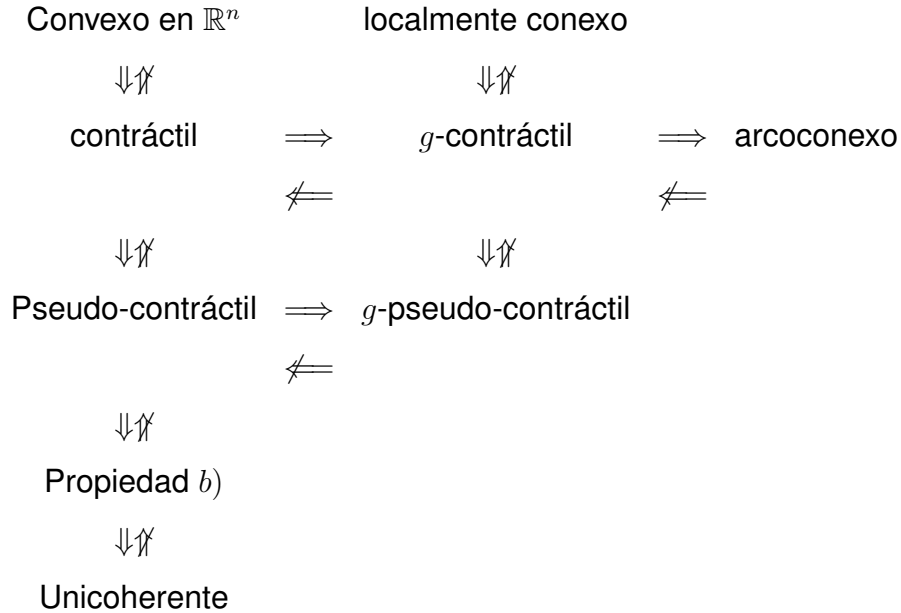
3. Si X es g -contráctil, entonces X es g -pseudo-contráctil.

4. Si X es pseudo-contráctil, entonces X es g -pseudo-contráctil.

Notemos que los conceptos no son equivalentes, a través de los siguientes ejemplos:

1. Notemos que todo continuo localmente conexo es g -contráctil y además cada continuo contráctil es unicoherente, así S^1 es g -contráctil, pero no contráctil.
2. La circunferencia unitaria S^1 es también un ejemplo de un continuo pseudo-contráctil que no es contráctil.
3. En el plano complejo, sea $R = \{\frac{t+2}{t+1}e^{it} : t \in [0, \infty)\}$ y le unimos a $D = \{re^{it} : r \in [0, 1], t \in [0, 2\pi]\}$. Sea $Y = R \cup D$ es un pseudo-contráctil que no es contráctil, además que todo g -contráctil es arcoconexo, tenemos que Y no es arcoconexo y por tanto, no es g -contráctil. Como se vió en el Ejemplo 24.
4. En el plano complejo \mathbb{C} , sea $Y = R \cup D$ definido en el item anterior, definamos $S^+ = \{3 + e^{it} : t \in [0, \pi]\}$ y $S^- = \{3 + e^{it} : t \in [\pi, 2\pi]\}$. Sea $S = S^- \cup S^+$ el círculo unitario en $3 + 0i$. Sea $X = Y \cup S$ no es un continuo unicoherente es decir, no es pseudo-contráctil y si es g -pseudo-contráctil como puede verse en el Ejemplo 4.2.2.

Tenemos el siguiente diagrama:



Pensamos qué condiciones deben tener las pseudo-homotopías u homotopías, para que se tengan las equivalencias entre la pseudo-contractibilidad y la g -pseudo-contractibilidad, así también entre la g -contractibilidad y la g -pseudo-contractibilidad.

Teorema 4.2.6 *Sea X es un continuo g -pseudo-contráctil con espacio factor K . Si K es arcoconexo, entonces X es g -contráctil.*

Sea X continuo g -pseudo-contráctil. Existe K continuo, $a, b \in K$, $f: X \rightarrow X$ continua y sobreyectiva y $H: X \times K \rightarrow X$ tal que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = p$ para algún $p \in X$. Puesto que K es arcoconexo, existe $\alpha: [0, 1] \rightarrow K$ continua tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$. Definimos la homotopía $G: X \times [0, 1] \rightarrow X$ por $G(x, t) = H(x, \alpha(t))$, para cada $(x, t) \in X \times [0, 1]$. Notemos que $G(x, 0) = H(x, \alpha(0)) = H(x, a) = f(x)$ y $G(x, 1) = H(x, \alpha(1)) = H(x, b) = p$ para algún $p \in X$ y para todo $x \in X$.

Lema 4.2.7 *Sean X, C y D continuos. Si X es g -pseudo-contráctil con espacio factor C . Si a, b son los puntos destacados de C en la pseudo-homotopía dada para*

X y existe una función continua $g: D \rightarrow C$ tales que $a, b \in g(D)$, entonces X es g -pseudo-contráctil con espacio factor D .

Por hipótesis X es g -pseudo-contráctil, luego existen $a, b \in C$, $f: X \rightarrow X$ continua y sobreyectiva y $H: X \times C \rightarrow X$ tal que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = p$ para algún $p \in X$ y todo $x \in X$. Además, existen $c, d \in D$ tales que $g(c) = a$ y $g(d) = b$. Sea $G: X \times D \rightarrow X$ definida por $G(x, t) = H(x, g(t))$ para cada $(x, t) \in X \times D$. Observe que $G(x, c) = H(x, g(c)) = H(x, a) = f(x)$ y $G(x, d) = H(x, g(d)) = H(x, b) = p$ para algún $p \in X$ y para todo $x \in X$. Así, X es g -pseudo-contráctil con espacio factor D .

Teorema 4.2.8 *Sea X un continuo g -pseudo-contráctil con espacio factor C . Si a, b son los puntos destacados de C en la pseudo-homotopía dada para X y existe una arcocomponente D de C tal que $a, b \in D$, entonces X es g -contráctil.*

Por hipótesis X es g -pseudo-contráctil con espacio factor C , $a, b \in C$ y existe una arcocomponente D de C tal que $a, b \in D$, es decir, existe una función $f: [0, 1] \rightarrow C$ con $f(0) = a$ y $f(1) = b$. Entonces por el Lema 4.2.7, X es g -pseudo-contráctil con espacio factor $[0, 1]$ y por tanto, X es g -contráctil. También podemos dar condiciones sobre nuestro continuo X para que este no sea g -pseudo-contráctil.

Definición 4.2.9 Diremos que $K \subseteq X$ cerrado es g -pseudo-homotópicamente fijo si para todo C continuo y $H: X \times C \rightarrow X$ que satisface $H(X \times \{a\}) = X$ para algún $a \in C$. Se tiene

$$H(K \times C) = H(K \times \{a\}) \subsetneq X.$$

Teorema 4.2.10 *Sea X un continuo. Si X contiene un cerrado g -pseudo-homotópicamente fijo, entonces X no es g -pseudo-contráctil.*

Supongamos X es g -pseudo-contráctil, entonces existe $f: X \rightarrow X$ continua y sobreyectiva que es pseudo-homotópica a una función constante, es decir, existe un continuo C , dos puntos $a, b \in C$ y $H: X \times C \rightarrow X$ tal que $H(X \times \{a\}) = X$ y $H(X \times \{b\}) =$

$\{p\}$ para algún $p \in X$. Sea $K \subseteq X$ un cerrado g -pseudo-homotópicamente fijo, luego por definición K satisface que si $H: X \times C \rightarrow X$ cumple $H(X \times \{a\}) = X$ entonces $H(K \times C) = H(K \times \{a\})$ para todo C continuo. Definimos $C' = C \cup X$ un continuo, definimos $G: X \times C' \rightarrow X$ definida como

$$G(x, d) = \begin{cases} H(x, d), & \text{si } d \in C; \\ d, & \text{si } d \in X. \end{cases}$$

Para todo $x \in X$, notemos que $G(X \times \{a\}) = H(X \times \{a\}) = X$ y $G(K \times C') \neq G(K \times \{a\})$ puesto que cuando $d \in X$ tenemos que $G(K \times \{d\}) = \{d\} \neq H(K \times \{a\})$. Lo cual es absurdo, por tanto X no es g -pseudo-contráctil.

Cuando vemos estas proposiciones, corolarios o teoremas, pensamos en sí sus recíprocos se tienen o contraejemplos para el recíproco, veremos que el continuo X_L es un contraejemplo para algunos de estos recíprocos. Sea el continuo X_L definido anteriormente, entonces X_L satisface:

1. X_L no es g -pseudo-contráctil.
2. $X_L \times I$ es g -pseudo-contráctil.

Probemos cada enunciado independientemente. Probemos primero que X_L es g -pseudo-contráctil. Por definición, existen un continuo C , $c, d \in C$, una función continua y sobreyectiva $f: X_L \rightarrow X_L$ y una pseudo-homotopía $H: X_L \times C \rightarrow X_L$ que satisface $H(x, c) = f(x)$ y $H(x, d) = x_0$ para todo $x \in X_L$ y algún $x_0 \in X_L$.

Sean $U = X_L \setminus \{a, b\}$ abierto y $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de componentes de U . Nótese que $\liminf C_n = \{p\}$.

Recordemos que $N(X_L)$ denota el conjunto de puntos de no conexidad local representados en la Figura 22 y

$$Q = ab \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{N(D_n)} \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{N(E_n)} \right).$$

Sea $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq N(X_L)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = p$. Además, por el Corolario 2.1.27, tenemos que $\overline{N(X_L)} \subseteq f(\overline{N(X_L)})$. Entonces, existe $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de X_L tal que $f(p_n) = w_n$. Denotemos por $P = \{p, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$. Notemos que $\lim p_n = p$ y $p_n \in f^{-1}(C_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(p, X_L \setminus U) = \min\{d(p, x) : x \in X_L \setminus U\} \geq \varepsilon$. Puesto que H es continua, H es uniformemente continua. Luego, existe $\delta > 0$ tal que $d_{X_L}(H(x, s), H(y, r)) < \varepsilon$ con $d_{X_L \times C}((x, s), (y, r)) < \delta$. Podemos suponer que $(P) < \delta$. Entonces, $(H(P \times \{z\})) < \varepsilon$ para todo $z \in C$.

Sea $V = \{z \in C : H(P \times \{z\}) \subseteq U\}$. Mostraremos algunas propiedades en este conjunto:

1. Veamos que $V \neq \emptyset$. Como $f(p) = p$, $H(p, c) = p$ y $H(p_n, c) = f(p_n) \in C_n \subseteq U$. Así, $c \in V$ y $V \neq \emptyset$.
2. Probemos que $V \neq C$. Supongamos que $V = C$. Luego, $\{x_0\} = H(P \times \{d\}) \subseteq U$. Sea M la componente conexa de U tal que $x_0 \in M$. Sea $j \in \mathbb{N}$ note que j satisface que, $H(\{p_j\} \times C)$ es subconjunto conexo de U tal que $x_0 \in H(\{p_j\} \times C) \subseteq C_j$. Por lo tanto, $M = C_j$. Así, $\overline{M} = \liminf C_n = \{p\} \subseteq U$. Por lo tanto M es una componente de $U \subseteq X_L$ abierto tal que $\overline{M} \subseteq U$. Y esto es absurdo, por tanto $V \neq C$.
3. Veamos que V es abierto de C . Sea $t \in V$, entonces $H(P \times \{t\}) \subseteq U$. Por tanto, $P \times \{t\} \subseteq H^{-1}(U)$. Luego existen $U_1, U_2 \subseteq X_L$ abiertos tales que $P \times \{t\} \subseteq U_1 \times U_2 \subseteq H^{-1}(U)$. Luego, $P \times U_2 \subseteq U_1 \times U_2 \subseteq H^{-1}(U)$. Así, $t \in U_2 \subseteq V$. Por tanto, V es abierto.

Sea V_0 la componente de V tal que $c \in V_0$. Puesto que $H(\{p_n\} \times V_0)$ es conexo de U y $H(p_n, c) = f(p_n) \in C_n$, tenemos que $H(\{p_n\} \times V_0) \subseteq C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $m \in \overline{V_0}$, entonces existe una sucesión $\{m_n\}_{n=1}^{\infty} \in V_0$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m$. Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} H(p_n, m_n) = H(p, m)$ en X_L y $H(p_n, m_n) \in H(\{p_n\} \times V_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $H(\{p\} \times \overline{V_0}) \subseteq \liminf H(\{p_n\} \times V_0) \subseteq \liminf C_n = \{p\}$.

Puesto que V_0 es una componente de V , por ¹², tenemos que $\overline{V_0} \cap (C \setminus V) \neq \emptyset$. Sea $z \in \overline{V_0} \cap (C \setminus V)$. Entonces $z \in Fr(V_0) \setminus V$. Por tanto, $H(P \times \{z\}) \not\subseteq U$. Luego existe $x \in P$ tal que $H(x, z) \notin U$. Usando la condición de $H(p, t) = p$ y tomando ε , nos queda que $d(H(p, z), H(x, z)) \geq \varepsilon$. Lo cual es absurdo pues H es uniformemente continua. Así, si $(P) < \delta$, entonces $(H(P \times \{z\})) < \varepsilon$. Por lo que concluimos que X_L no es g -pseudo-contráctil.

Finalmente, por el Teorema 3.3.5 ítem 2, $X_L \times [0, 1]$ es g -contráctil y por tanto g -pseudo-contráctil.

Así el dendroide X_L no es g -contráctil y además no es g -pseudo-contráctil.

Veamos algunas preguntas abiertas presentes en la propiedad de g -pseudo-contráctibilidad. Sean X y Y continuos:

1. ¿Si $X \times Y$ es g -pseudo-contráctil, entonces X o Y son g -pseudo-contráctiles?
2. Si X g -pseudo-contráctil ¿Cuales son las condiciones necesarias para que sea pseudo-contráctil?
3. Si X es g -pseudo-contráctil ¿Cuales son las condiciones necesarias para que sea g -contráctil?
4. Si X es g -pseudo-contráctil ¿Cuales son las condiciones necesarias para que sea contráctil?

BIBLIOGRAFÍA

- ANAYA, J. et al. "On g-pseudo-contractibility of continua". En: *Topology and its Applications* 276 (2020), pág. 107169 (vid. pág. 76).
- BAIK, B., K. HUR y C. RHEE. " R^i -sets and contractivity". En: *Journal of the Korean Mathematical Society* 34.2 (1997), págs. 309-319 (vid. pág. 42).
- BELLAMY, D. "Mapping continua onto the cone over the Cantor set". En: *Studies in Topology*. Elsevier, 1975, págs. 43-45 (vid. págs. 9, 32, 38, 47, 50, 51).
- CAMARGO, J., P. PELLICER-COVARRUBIAS y M. RINCÓN. "On g-contractibility of continua". En: *Topology and its Applications* 160.3 (2013), págs. 461-474 (vid. págs. 10, 53).
- CAMARGO, J. y E. VILLAMIZAR. *Topología general*. Colombia: Ediciones UIS, 2020 (vid. págs. 11, 21, 23, 30, 32, 33, 40, 41, 48, 52).
- CASTRO, M. "Introducción a las funciones de Whitney". Tesis doct. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2013 (vid. pág. 41).
- DEBSKI, W. "Pseudo-contractibility of the $\sin(1/x)$ -curve". En: 365–367. *KATSUYA EDA, UMED H. KARIMOV, AND DU ˇ SAN REPOV ˇ S*. Citeseer. 1994 (vid. pág. 69).
- GASCA, M. "Pseudo-contractibilidad en espacios topológicos". En: (2021) (vid. págs. 68, 69, 71).

- GUTIÉRREZ, V. "Semi fronteras en hiperespacios de continuos". Tesis doct. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2012 (vid. págs. 45, 73, 82).
- JONES, F. "Certain homogeneous unicoherent indecomposable continua". En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 2.6 (1951), págs. 855-859 (vid. pág. 71).
- KRZEMIŃSKA, I y J. PRAJS. "A non-g-contractible uniformly path connected continuum". En: *Topology and its Applications* 91.2 (1999), págs. 151-158 (vid. pág. 10).
- KUPERBERG, W. "Uniformly pathwise connected continua". En: *Studies in Topology*. Elsevier, 1975, págs. 315-324 (vid. págs. 9, 35).
- KURATOWSKI, C. *Topology Vol. II. English Edition*. 1966 (vid. pág. 26).
- NADLER, S. *Continuum Theory: An Introduction*. Vol. 158. Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong: Monographs, Textbooks in Pure y Applied Math, 1992 (vid. págs. 28, 32, 48).
- RINCÓN, M. "Continuos g-contraíbles". En: *Revista Integración* 30.1 (2012), págs. 43-55 (vid. pág. 32).
- VILLAREAL, E. et al. "Georg Cantor: Conjunto de Cantor". En: *ASOiMAT* 2.1 (2020), págs. 13-15 (vid. pág. 33).
- WHYBURN, G. *Analytic topology*. Vol. 28. American Mathematical Soc., 1948 (vid. pág. 68).