

EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET: FUNDAMENTOS, DEMOSTRACIÓN Y
APLICACIONES

SAMUEL FELIPE DOMINGUEZ ALVARADO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA PURA
BUCARAMANGA
2025

EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET: FUNDAMENTOS, DEMOSTRACIÓN Y
APLICACIONES

SAMUEL FELIPE DOMINGUEZ ALVARADO

Trabajo de grado para optar al título de Matemático

Director

Jurgen Alfredo Julio Batalla
Doctor en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICA PURA

BUCARAMANGA

2025

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi familia, por su apoyo incondicional y por enseñarme a perseverar en cada etapa de la vida.

De manera muy especial, a mi ahijada, amiga y confidente, Karla Gabrielle Molina Mayorga, con quien compartí no solo largas horas de esfuerzo y estudio, sino también risas, conversaciones interminables y una que otra locura que hicieron de este camino algo único e inolvidable.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de grado no habría sido posible sin el apoyo de las personas que, de diferentes maneras, han acompañado mi vida académica y personal. A todos ellos les expreso mi más sincera gratitud.

A mis padres y hermana, quienes con su amor, esfuerzo y apoyo incondicional han sido la base de mi vida y mis estudios. Sin ellos, este logro no habría sido posible.

Al profesor Jurgen Alfredo Julio Batalla, director de este trabajo de grado, por su orientación, paciencia y acompañamiento constante durante el desarrollo de esta investigación.

Al profesores Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas y Elder Jesús Villamizar Roa, por acompañarme a lo largo de la carrera, siendo siempre una guía fundamental en las tutorías y en mi formación académica, y por su apoyo tanto académico como personal.

A la familia Miranda y a Brenda, que con su amistad y generosidad me acogieron y gracias a ellos pude superar muchos retos durante mi paso por la universidad.

A Martha Inés Pineda Daza, quien junto con Simba, me otorgaron un cariño sincero y duradero que apreciaré y recordaré para siempre.

Y, de manera muy especial a Karla Gabrielle Molina Mayorga, quien con su compañía, comprensión y afecto se convirtió en un apoyo invaluable en este camino, dándome la fuerza necesaria para culminar con éxito esta etapa.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	9
1 Preliminares: Introducción al álgebra exterior	11
2 Curvas, Superficies y Curvaturas	26
3 Teorema de Gauss-Bonnet	47
4 Aplicaciones	54
BIBLIOGRAFÍA	58

LISTA DE FIGURAS

		pág.
Figura 1	Campos vectoriales constantes	13
Figura 2	Ejemplo de Campo Vectorial no constante	14
Figura 3	Ejemplo de Campo Vectorial en \mathbb{R}^3 , $T(x, y, z) = (x, y, 0)$	14
Figura 4	Ejemplos de curvas con sus trazas	27
Figura 5	Curvas cerradas y simples	28
Figura 6	Ejemplos superficies	31
Figura 7	Representación gráfica del cambio de coordenadas	32
Figura 8	Plano tangente a un punto de la esfera	33
Figura 9	Ejemplo superficie no orientable	34
Figura 10	Ángulo tangente	41
Figura 11	Pentágono curvo orientado positivamente	43
Figura 12	Construcción de la curva suave	44
Figura 13	Defecto angular en un triángulo curvo	44
Figura 14	Intersecciones entre triángulos	45

RESUMEN

TÍTULO EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET: FUNDAMENTOS, DEMOSTRACIÓN Y APLICACIONES *

AUTOR: SAMUEL FELIPE DOMINGUEZ ALVARADO **

PALABRAS CLAVE: CURVAS, SUPERFICIES, CURVATURA, CARACTERÍSTICA DE EULER, ÁLGEBRA EXTERIOR.

DESCRIPCIÓN: Este trabajo está dedicado al estudio del Teorema de Gauss-Bonnet y su relación entre geometría y topología. Para ello, se introducen primero las herramientas matemáticas necesarias, asegurando que el texto sea autocontenido y accesible para quienes no estén familiarizados con el tema. Se inicia con una exposición del álgebra exterior, presentando los elementos y operaciones fundamentales que se utilizarán más adelante. Luego, se estudian las propiedades de curvas y superficies, poniendo énfasis en la curvatura y en cómo esta influye en la estructura geométrica de una superficie. Se destacan resultados importantes que permiten entender la interacción entre la curvatura y las propiedades globales del espacio. A partir de estos conceptos, se formula el Teorema de Gauss-Bonnet. Se muestra cómo este resultado proporciona una conexión profunda entre la geometría local y la topología de una superficie, estableciendo que la curvatura integrada sobre una región está directamente relacionada con su estructura topológica. Se presentan las demostraciones correspondientes, resaltando la intuición detrás del teorema y su relevancia en geometría diferencial. El trabajo concluye con una exploración de aplicaciones tanto de la fórmula como del teorema. Se analiza cómo la fórmula se emplea para demostrar resultados en superficies bidimensionales, y se examinan las implicaciones del teorema en la clasificación de superficies, permitiendo extraer conclusiones sobre su curvatura y estructura topológica. A través de estos ejemplos, se evidencia la amplitud y la utilidad del Teorema de Gauss-Bonnet en distintos contextos matemáticos.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Matemática Pura. Director: Jurgen Alfredo Julio Batalla. Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: THE GAUSS-BONNET THEOREM: FUNDAMENTALS, PROOF AND APPLICATIONS *

AUTHOR: SAMUEL FELIPE DOMINGUEZ ALVARADO **

Keywords: CURVES, SURFACES, CURVATURE, EULER CHARACTERISTIC, EXTERIOR ALGEBRA.

Description: This work is dedicated to the study of the Gauss-Bonnet Theorem and its relationship between geometry and topology. To achieve this, the necessary mathematical tools are first introduced, ensuring that the text is self-contained and accessible to those unfamiliar with the topic.

It begins with an exposition of exterior algebra, presenting the fundamental elements and operations that will be used later. Then, the properties of curves and surfaces are studied, with an emphasis on curvature and how it influences the geometric structure of a surface. Important results are highlighted, providing insight into the interaction between curvature and the global properties of space.

Building on these concepts, the Gauss-Bonnet Theorem is formulated. This result establishes a deep connection between the local geometry and the topology of a surface, showing that the integrated curvature over a region is directly related to its topological structure. The corresponding proofs are presented, emphasizing the intuition behind the theorem and its significance in differential geometry.

The work concludes with an exploration of applications of both the formula and the theorem. The formula is analyzed in its role in proving results for two-dimensional surfaces, while the theorem's implications in surface classification are examined, allowing conclusions to be drawn about curvature and topological structure. Through these examples, the breadth and utility of the Gauss-Bonnet Theorem in various mathematical contexts are demonstrated.

* DEGREE WORK

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Matemática Pura. Director: Jurgen Alfredo Julio Batalla. Doctor en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

La geometría diferencial nace en el siglo XVIII como una evolución de la geometría clásica, cuando los matemáticos comenzaron a aplicar las ideas del cálculo diferencial e integral al estudio de curvas y superficies. Su desarrollo fue posible gracias al trabajo de figuras como Leonhard Paul Euler (1707 – 1783), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) y Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), quienes mostraron como obtener algunas propiedades tanto locales como globales en el espacio.

Al observar una superficie, se puede analizar desde dos puntos de vista distintos: el geométrico y el topológico. Mientras que en la geometría interesa cómo se curva, dobla o cambia su forma en distintas zonas, por otro lado, la topología se enfoca en propiedades globales, como la cantidad de agujeros que posee. A simple vista, estos enfoques parecen muy distintos, pero la geometría diferencial permite unir ambos mundos. Gracias a ella, es posible descubrir que ciertos aspectos locales de una superficie, como su curvatura, pueden revelar información sobre su forma global, es decir, su estructura topológica.

El teorema de Gauss-Bonnet surge precisamente como una expresión clara de esta unión entre lo local y lo global. A partir de los estudios de Carl Friedrich Gauss y Pierre Ossian Bonnet en el siglo XIX, se estableció cómo la curvatura local de una superficie se relaciona directamente con su estructura topológica global. Gauss definió la curvatura como una propiedad intrínseca de las superficies, mientras que Bonnet amplió estos resultados para vincular la curvatura total con invariantes topológicos como el número de agujeros. Así, este teorema revela una conexión fundamental entre la geometría y la topología.

El propósito central de este trabajo es estudiar el teorema de Gauss-Bonnet. En el primer capítulo, *Preliminares: Introducción al álgebra exterior*, se establecen las herramientas fundamentales, como formas diferenciales y campos vectoriales, necesarias para anali-

zar objetos geométricos desde una perspectiva intrínseca. El segundo capítulo, *Curvas, Superficies y Curvaturas*, explora cómo la curvatura gaussiana determina la estructura local de superficies, destacando su relación con la aplicación de Gauss y el tensor de curvatura. En el tercer capítulo, se demostrará tanto la Fórmula de Gauss-Bonnet como el Teorema de Gauss-Bonnet, de la cual se extrae este teorema. Finalmente, en el cuarto capítulo, se ilustra la versatilidad del teorema en problemas concretos: desde generalizar el teorema de la suma de ángulos en triángulos curvos hasta clasificar superficies compactas según su curvatura. El documento contiene imágenes elaboradas con GeoGebra y otras tomadas de fuentes externas, las cuales se mencionan según corresponda.

1. Preliminares: Introducción al álgebra exterior

En este capítulo se estudiarán algunos aspectos del álgebra exterior asociados a objetos fundamentales en geometría diferencial, tales como los campos vectoriales y las formas diferenciales. Hacia el final del capítulo, se discutirá la noción de derivada exterior de formas.

El álgebra exterior, también conocida como *álgebra del producto cuña*, es una extensión del álgebra lineal que permite trabajar con combinaciones de múltiples vectores o formas diferenciales. Esta herramienta es ampliamente utilizada áreas como la física y la en geometría diferencial, ya que proporciona un lenguaje natural para describir el cambio y la orientación de objetos. El producto exterior, o producto cuña, permite construir nuevos elementos llamados k -vectores, que representan áreas, volúmenes o hipervolúmenes dentro de un espacio.

Suponiendo que el lector posee familiaridad con el álgebra lineal y el cálculo multivariable, se presentarán definiciones y ejemplos que conduzcan a los resultados necesarios para la demostración del teorema central de este trabajo: el teorema de Gauss–Bonnet. Antes de ello, se introducirán algunas nociones básicas sobre campos de vectores que tendrán un papel fundamental más adelante.

Se usará como apoyo principal el libro[5], junto con[1]. Se denotará por x^1, \dots, x^n las coordenadas canónicas del espacio \mathbb{R}^n . Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y $p = (p^1, \dots, p^n)$ un punto en U .

Definición 1. Funciones de clase C^k

Sea k un entero no negativo, una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ se nombra de clase C^k en $p \in U$ si sus derivadas parciales $\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_j}}$, son continuas en p para todos los órdenes $j \leq k$. La función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ o "suave" en p si es de clase C^k para todo $k \geq 0$.

Una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice de clase C^k en p si todas sus funciones componentes f^1, \dots, f^m son C^k en p . Así mismo, una función es de clase C^k en U si es C^k para todo punto en U y es suave en U si es de clase C^∞ sobre U .

Ejemplo.

1. Una función continua en U es de clase C^0 en U .
2. La función $f(x) = |x|$ es C^0 en los reales, y es C^∞ sobre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. Las funciones polinómicas, exponenciales, seno y coseno son suaves sobre los reales.

En estos textos es importante poder distinguir entre puntos y vectores, por lo tanto, para un punto $p \in \mathbb{R}^n$, se denota el espacio tangente $T_p(\mathbb{R}^n)$ en p , como el espacio de todos los vectores v anclados en p . Y se escriben como:

$$v = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \langle v^1, \dots, v^n \rangle.$$

Definición 2. Derivada direccional

Dada una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^∞ , para un punto $p \in U$ y una dirección $v = \langle v^1, \dots, v^n \rangle$, la derivada direccional de f en dirección v de p se define por:

$$D_v f = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Ya que esto es un número y no una función, se puede definir

$$D_v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

como la función que manda f al número $D_v f$. Con el fin de simplificar la notación, ya que v es un vector sobre p , se omitirá el subíndice p si es claro para el contexto. Además, se pueden identificar estos vectores tangentes en p , con las derivaciones en p^1 , por lo tanto es posible escribir que

$$v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

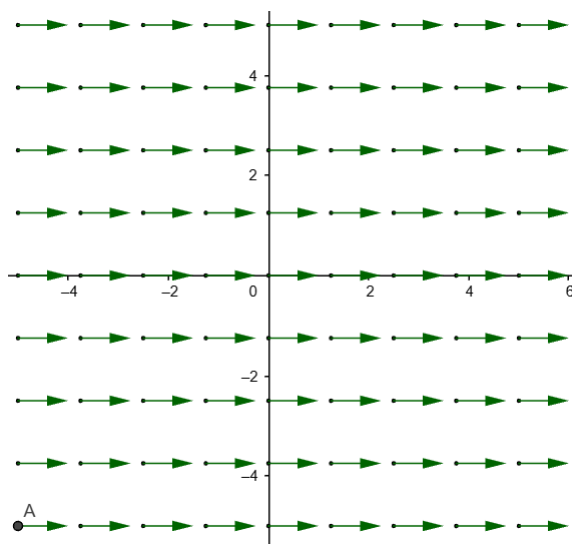
Definición 3. Campo Vectorial

Un *campo vectorial* sobre un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, es una función $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde a cada punto $u \in U$ se le asigna un vector $v = X(u) \in \mathbb{R}^m$.

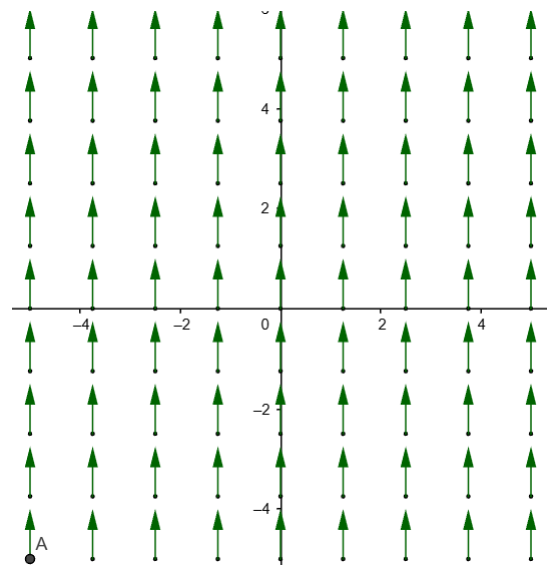
Ejemplo. Como ejemplos sencillos se presenta el campo horizontal (H) y el campo vertical (V) en \mathbb{R}^2 . En estos casos, para cada punto $p \in \mathbb{R}^2$, se tiene $H(p) = (1, 0)$ y $V(p) = (0, 1)$.

Figura 1: Campos vectoriales constantes

Campo Horizontal



Campo Vertical.



¹ Para más detalles sobre esta identificación, véase Tu (2011, p. 13), *An Introduction to Manifolds*, sección "Derivations at a point".

También es posible considerar campos vectoriales no constantes cuyo dominio no sea todo el plano. Por ejemplo, se considera el campo vectorial $X : [-5, 5] \times [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por: $X(a, b) = (ab/5, b/5)$, ver figura 2.

Figura 2: Ejemplo de Campo Vectorial no constante

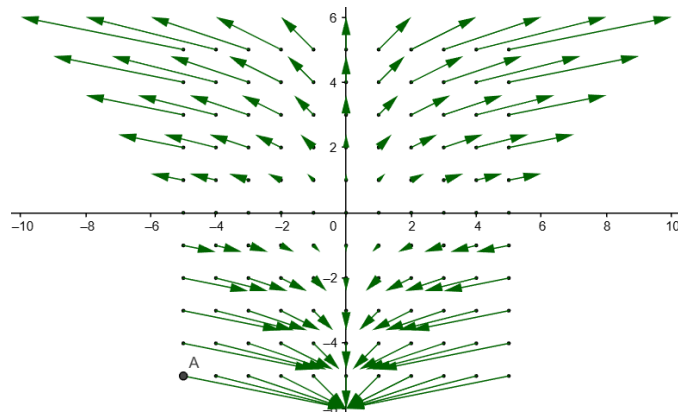
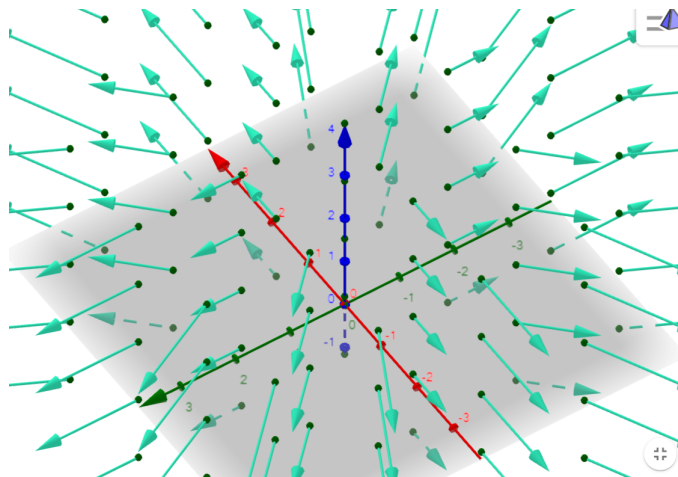


Figura 3: Ejemplo de Campo Vectorial en \mathbb{R}^3 , $T(x, y, z) = (x, y, 0)$



También se puede definir un campo vectorial como una función que asigna a cada punto $p \in U$ un vector tangente X_p , por lo que se puede expresar como la combinación lineal

$$X_p = \sum a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad p \in U, \quad a^i(p) \in \mathbb{R}.$$

Omitiendo p , y siguiendo el convenio de usar la notación Einstein para eliminar la sumatoria, se puede escribir

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

donde cada a^i son ahora funciones sobre U .

Por ejemplo, si se considera el campo vectorial X sobre $U \in \mathbb{R}^3$, entonces existen funciones A, B y C definidas sobre U tales que:

$$X = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial z}.$$

X será un campo vectorial C^∞ o campo vectorial suave sobre un conjunto abierto U si A, B y C son suaves sobre U .

Definición 4. Campos vectoriales como operadores diferenciales

Dado un campo vectorial suave X sobre un conjunto abierto $U \in \mathbb{R}^n$ y f una función suave sobre U , se puede definir una nueva función Xf sobre U dada por $(Xf)(p) = X_p f$ para cualquier $p \in U$.

Al tomar $X = \sum a^i \partial / \partial x^i$ se tiene:

$$(Xf)(p) = \sum a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Si se hacen las simplificaciones de notación se resume a

$$Xf = a^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

donde se tiene que Xf es una función suave sobre U .

Ejemplo. Sea el campo $X = (x, y, 0)$ que se expresa como la siguiente combinación

lineal:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$$

para la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, se tiene que X actúa en f así:

$$X(f) = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 + y^2) = x(2x) + y(2y) = 2x^2 + 2y^2.$$

Este resultado representa la tasa de cambio de $f(x, y, z)$ en la dirección del campo $X(x, y, z)$. También se puede definir esta notación con más de un campo vectorial, de la siguiente manera:

Dados dos campos vectoriales C^∞ , $X, Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$, teniendo un sistema de coordenadas locales (x^i) , al tomar los campos como:

$$X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = b^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Entonces para una función f suave sobre U :

$$XY(f) = X(Y(f)) = X\left(b^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + a^i b^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Definición 5. Corchete de Lie

Dados dos campos vectoriales C^∞ , $X, Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$, se define el *conmutador o corchete de Lie* de los campos vectoriales X y Y como el único campo vectorial $[X, Y]$ que satisface:

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f).$$

Note que el sumando $a^i b^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ existe en la definición de ambas funciones, por lo que se

puede escribir que

$$[X, Y](f) = \sum a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \sum b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Similar a los puntos anteriores, si se escribe como función, y se reorganizan los índices

$$[X, Y] = \sum a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \sum b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Este corchete cuenta con las siguientes propiedades.

- Bilinealidad: $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$[aX + bY, Z] = [aX, Z] + [bY, Z],$$

$$[X, aY + bZ] = [X, aY] + [X, bZ].$$

- Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X]$.
- Propiedad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.
- Para funciones f y g se cumple:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

Ejemplo. *Dados los campos vectoriales $X = (y, 0)$ y $Y = (0, x)$, al escribirlos como combinación lineal:*

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y} = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = 0 \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Entonces el corchete de Lie

$$[X, Y] = XY - YX,$$

$$[X, Y] = y \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} = -x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} = (-x, y).$$

Ejemplo. Tome ahora el campo horizontal $H(p) = (1, 0)$ y el campo vertical $V(p) = (0, 1)$ para el corchete $[H, V]$. Se escribe su forma en combinación lineal.

$$H = \frac{\partial}{\partial x} \text{ texty}, V = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Entonces el corchete de Lie entre los dos campos es:

$$[H, V] = 1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) - 1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = 1 \cdot 0 \frac{\partial}{\partial x} + 1 \cdot 0 \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

Es decir, el campo es constante 0, también llamado nulo.

Definición 6. Espacio Dual

Sea V un espacio vectorial real, se conoce el espacio dual V^* como el espacio vectorial de todas las funciones lineales a valores reales sobre V , $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Dado un vector $v \in V$, siendo e_1, \dots, e_n una base para V , se puede escribir el vector $v = \sum v^i e_i$ con $v^i \in \mathbb{R}$. Se denotará $\alpha^i : V \rightarrow \mathbb{R}$ la función que recoge la i -ésima coordenada, es decir, $\alpha^i(v) = v^i$. Estas funciones $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ son una base del espacio V^* y se denominan la base dual a la base e_1, \dots, e_n para V .

Sobre bases canónicas, estas funciones se escribirán como $\alpha^i = dx^i$. Por ejemplo, sobre \mathbb{R}^3 , la base dual que se tiene es $\{dx, dy, dz\}$. Mientras que para \mathbb{R}^n se denotarán como $\{dx^1, \dots, dx^n\}$.

Las formas diferenciales son funciones que actúan sobre una amplia variedad de objetos matemáticos. Se iniciará introduciendo los casos más simples para, gradualmente, llegar a una definición general.

Definición 7. 0-formas diferenciales

Una 0-forma es una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal y como se conoce del cálculo multivariable, si es al menos de clase C^1 se define como una 0-forma diferenciable.

Ejemplo. $f(x, y, z) = 2x + y^2 - z$ es una 0-forma diferenciable.

Definición 8. 1-formas diferenciales

Una 1-forma es una función ω que asigna a cada punto de \mathbb{R}^n un elemento $\omega(p) \in (\mathbb{R}_p^n)^*$, es decir, al espacio dual asignado al espacio tangente en p . Que de forma escrita sería:

$$\omega(p) = a_1(p)\alpha^1 + \dots + a_n\alpha^n,$$

donde a_i son funciones reales sobre \mathbb{R}^n .

Al asignarle un vector director $v \in \mathbb{R}_p^n$ estas funciones dan el número,

$$\omega(v)(p) = a_1(p)\alpha^1(v) + \dots + a_n\alpha^n(v).$$

De forma reducida se puede escribir la 1-forma como $\omega = a_i\alpha^i$.

Ejemplo. $\omega(x, y, z) = 3x dx + z^2 dy + 3xyz dz$ es una 1-forma diferenciable, tal que si se le asigna el vector $v = \langle 1, 2, 3 \rangle$ se obtiene que $\omega(v)(x, y, z) = 3x + 2z^2 + 9xyz$, una función con imagen en los reales.

Sea $p \in \mathbb{R}^n$, se define $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ como el conjunto de funciones $\varphi : \underbrace{\mathbb{R}_p^n \times \dots \times \mathbb{R}_p^n}_k \rightarrow \mathbb{R}$ que son bilineales y alternantes. Con las operaciones usuales entre funciones, este conjunto $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ es un espacio vectorial. Sobre este espacio se define una nueva operación, el producto exterior.

Definición 9. Producto Exterior

Dados $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$. Se define el producto exterior entre $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ como,

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)), \quad i, j = 1, \dots, k.$$

El producto exterior cumple con las siguientes propiedades, usadas para poder simplificar

los cálculos:

- Anti conmutativo: $V \wedge W = -W \wedge V$.
- Alternante: $V \wedge V = 0$.
- Distributiva: $V \wedge (W + Y) = (V \wedge W) + (V \wedge Y)$.
- Asociatividad: $(V \wedge W) \wedge Y = V \wedge (W \wedge Y)$.

Ejemplo. Sean A, B vectores sobre $(\mathbb{R}_p^2)^*$.

$$A \wedge B = (a_1 dx + a_2 dy) \wedge (b_1 dx + b_2 dy),$$

$$A \wedge B = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Al final, el resultado es el determinante de la matriz formada por los coeficientes de los dos vectores, dispuestos en columnas.

Ejemplo. Para 2 vectores de $(\mathbb{R}_p^3)^*$ se tendría de la siguiente manera

$$A \wedge B = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \wedge \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$$

$$A \wedge B = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Note que en las matrices no se toman todas las componentes del vector, sino únicamente las componentes correspondientes a cada base del espacio dual.

A continuación un ejemplo entre 3 vectores:

Ejemplo. Sean los vectores $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle, C = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$.

$$A \wedge B \wedge C = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Definición 10. k-formas diferenciales

Una k -forma sobre \mathbb{R}^n es una función ω que asocia a cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ un elemento $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$, la cual se puede escribir como,

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}), i_j \in \{1, \dots, n\}.$$

Ejemplo. Una 4-forma sobre \mathbb{R}^3 es:

$$\omega(x, y, z, t) = 3x + 2y + z^t(dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt).$$

Donde si se le asignan vectores v_1, v_2, v_3, v_4 , entonces

$$\omega(v_1, v_2, v_3, v_4)(x, y, z, t) = 3x + 2y + z^t \cdot \det \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 & v_4^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & v_4^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 & v_4^3 \\ v_1^4 & v_2^4 & v_3^4 & v_4^4 \end{bmatrix}.$$

Al operar con k -formas, la suma y la resta requieren que las formas tengan el mismo grado, y el resultado también es de grado k . En cambio, el producto cuña permite combinar formas de distinto grado.

Sea ω una k -forma, ρ una s -forma y θ una r -forma, el producto cuña cumple con:

- Asociatividad: $(\omega \wedge \rho) \wedge \theta = \omega \wedge (\rho \wedge \theta)$.
- Anti-conmutatividad: $\omega \wedge \rho = (-1)^{ks}(\rho \wedge \omega)$.
- Distributiva: $\omega \wedge (\rho + \theta) = \omega \wedge \rho + \omega \wedge \theta$, si $r = s$.

El producto definido en este campo es el producto cuña, la operación entre una k -forma y una p -forma da como resultado una $(k + p)$ -forma como se obtiene a continuación:

Ejemplo. Siendo ω una 1-forma, y ρ una 2-forma definidas por

$$\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2,$$

$$\rho = b_1 dx^2 \wedge dx^3.$$

Entonces el producto cuña entre las 1-formas se da por

$$\omega \wedge \rho = a_1 b_1 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + a_2 b_1 dx^2 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Como $(dx^2 \wedge dx^2) = 0$ todo el segundo sumando se anula, dejando como resultado la 3-forma:

$$\omega \wedge \rho = a_1 b_1 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Terminando con las operaciones algebraicas, se enunciará cómo se comportan las k -formas al derivarse.

Definición 11. Derivada exterior

Dada una k -forma $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, su derivada se define por

$$d\omega = d\left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right).$$

$$d\omega = \sum_j^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}).$$

Note que la derivada de una n-forma, da como resultado una (n+1)-forma, además se obtienen las siguientes propiedades:

Siendo λ_i escalares, α una m-forma y β una n-forma se cumple que:

- $d(\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta) = \lambda_1d\alpha + \lambda_2d\beta.$
- $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k(\alpha \wedge d\beta).$
- $d(d\alpha) = 0.$
- α es una forma cerrada sii $d(\alpha) = 0.$

Esta derivada es difícil de entender de manera general, por lo tanto se reducirá la expresión para cada caso específico que se considere. Entonces, siendo f una 0-forma en \mathbb{R}^3

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz,$$

note que f_i es la derivada de la función f respecto la variable i y $\{dx, dy, dz\}$ es la base para el espacio de 1-forma.

El diferencial de una 1-forma $\alpha = Adx + Bdy + Cdz$ con A, B, C 0-formas

$$d\alpha = d(Adx + Bdy + Cdz) = d(Adx) + d(Bdy) + d(Cdz)$$

$$d\alpha = (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge dx +$$

$$(B_x dx + B_y dy + B_z dz) \wedge dy +$$

$$(C_x dx + C_y dy + C_z dz) \wedge dz.$$

Simplificando, se obtiene $d\alpha = (A_y - B_x)dy \wedge dx + (C_x - A_z)dx \wedge dz + (C_y - B_z)dy \wedge dz$.
Entonces se puede escribir derivadas de 1-formas sobre \mathbb{R}^n como $d\alpha = \frac{\partial a^j}{\partial x^i} - \frac{\partial a^i}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j$.

Otra forma de derivar 1-formas, útil para este trabajo, ya que no depende de las coordenadas.

Definición 12. Forma invariante de la derivada de 1-formas

Dada una 1-forma α y dos campos vectoriales V, W sobre \mathbb{R}^n , entonces:

$$d\alpha(V, W) = V \cdot \alpha(W) - W \cdot \alpha(V) - \alpha([V, W]).$$

Demostración. Como cualquier 1-forma diferencial α se puede expresar de la forma $\sum a^i dx^i$ con a^i funciones suaves. Suponga $\alpha = \sum a^i dx^i$ y V, W campos vectoriales suaves sobre \mathbb{R}^n , si se toman los campos vectoriales como combinación lineal,

$$V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, W = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Entonces, la parte derecha de la ecuación se vería como,

$$V \cdot \alpha(W) - W \cdot \alpha(V) - \alpha([V, W]) = V(a^i dx^i(W)) - W(a^i dx^i(V)) - a^i dx^i([V, W]).$$

Al tomar el primer sumando y ver cómo se comporta se tiene

$$V(a^i dx^i(W)) = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(a^i dx^i \left(w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} (a^i w^i).$$

Los coeficientes a^i y w^i son funciones escalares dependientes del punto en que se trabaja, por lo tanto

$$v^j \frac{\partial}{\partial x^j} (a^i w^i) = v^j \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j} w^i + a^i \frac{\partial w^i}{\partial x^j} \right) = v^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} w^i + a^i v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j},$$

de igual manera, el segundo sumando se reduce a

$$-W(a^i dx^i(V)) = -w^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} v^i - a^i w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j}.$$

Se considera ahora el tercer sumando

$$-a^i dx^i([V, W]) = -a^i dx^i \left(\left[v^j \frac{\partial w^k}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^k}{\partial x^j} \right] \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = -a^i \left(v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right),$$

$$-a^i dx^i([V, W]) = a^i w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - a^i v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j},$$

como resultado, la suma de los términos es

$$\sum \left(v^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} w^i + a^i v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} \right) + \sum \left(-w^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} v^i - a^i w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) + \sum \left(a^i w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - a^i v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} \right).$$

Al simplificar el resultado eliminando términos iguales, se obtiene

$$\sum v^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} w^i - \sum w^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} v^i,$$

reorganizando índices y juntando términos se concluye

$$\left(\frac{\partial a^j}{\partial x^i} v^i w^j - \frac{\partial a^i}{\partial x^j} v^j w^i \right) = \left(\frac{\partial a^j}{\partial x^i} - \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right) v^i w^j = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial a^j}{\partial x^i} - \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right) (v^i w^j - v^j w^i),$$

lo cual coincide con la 2-forma $d\alpha$,

$$d\alpha = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial a^j}{\partial x^i} - \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial a^j}{\partial x^i} - \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right) (v^i w^j - v^j w^i).$$

□

2. Curvas, Superficies y Curvaturas

Este capítulo está dedicado, principalmente, a objetos de la geometría diferencial que sirven como insumos geométrico-topológicos para la prueba del teorema de Gauss-Bonnet. A continuación se presentan algunos teoremas y conceptos fundamentales que aplican lo visto en el capítulo anterior, los campos vectoriales y las formas diferenciales.

Se iniciará con la noción de curva y su clasificación, para luego adentrarnos en el estudio de superficies y los objetos diferenciales que pueden definirse sobre ellas. A lo largo del capítulo, se introducirá progresivamente los elementos necesarios para comprender y demostrar el teorema de Gauss–Bonnet.

Este desarrollo se basa en diversas referencias fundamentales en el área, como *Differential Geometry of Curves and Surfaces* de Do Carmo[2], las notas *Introduction to Smooth Manifolds (REU)*[4], y el texto *Riemannian Geometry* de Lee[3].

Definición 13. Curva diferenciable parametrizada

Se denota por curva diferenciable parametrizada (o bien simplemente curva) a una función diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$.

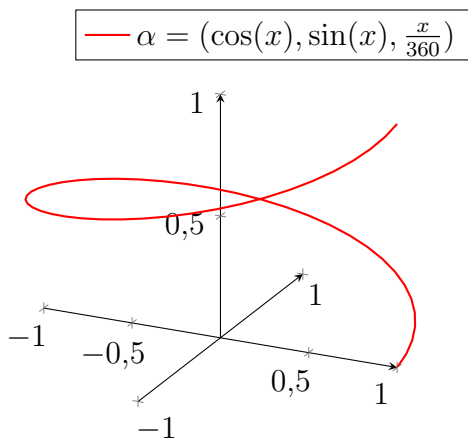
Una función diferenciable sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, es la restricción de una función diferenciable definida en un intervalo abierto que contenga a $[a, b]$. Así se pueden definir curvas sobre cualquier intervalo, sea abierto o cerrado, para poder darle puntos de extremos a las curvas.

Ejemplo.

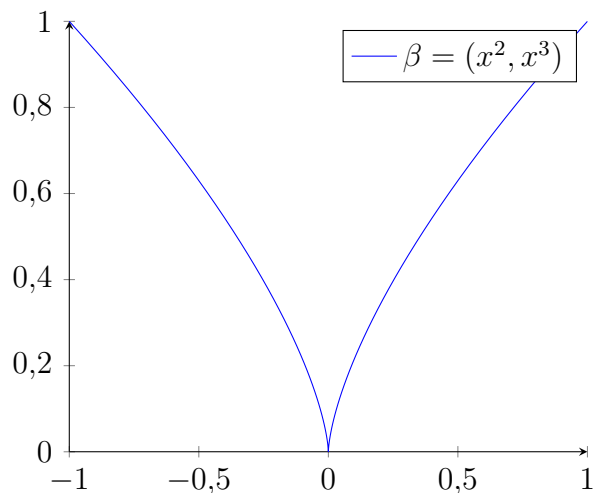
En esta parte de curvas se tratará la primera y segunda derivada de la curva α como α' y α'' respectivamente.

Figura 4: Ejemplos de curvas con sus trazas

Curva en 3 dimensiones



Curva en 2 dimensiones



Siendo $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable, en cada t donde $\alpha(t) \neq 0$ existe una línea recta que contiene al punto $\alpha(t)$ y al vector $\alpha'(t)$, llamada recta tangente a α en t . Para el estudio de curvas esta línea es esencial, por tanto considere la siguiente definición.

Definición 14. Curva regular

Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ será regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

En la figura 4, la curva α es regular, mientras que la curva β no lo es.

Definición 15. Curva parametrizada por longitud de arco (PPLA)

Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada por longitud de arco si $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$.

Ejemplo. *Fácilmente se puede parametrizar una circunferencia de radio r y centro (h, k) como $\alpha(t) = (r \cdot \cos(t) + h, r \cdot \sin(t) + k)$, con esta parametrización se tiene que*

$$\alpha'(t) = (-r \cdot \sin(t), r \cdot \cos(t)),$$

por lo tanto,

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(-r \cdot \sin(t))^2 + (r \cdot \cos(t))^2}$$

$$|\alpha'(t)| = r.$$

Se observa que $|\alpha'(t)|$ depende del radio, por lo tanto para radios distintos de 1, esta no es una parametrización por longitud de arco.

Por ende, una parametrización por longitud de arco para cualquier circunferencia de radio r y centro (h, k) sería $\alpha(t) = (r \cdot \cos(\frac{t}{r} + h), r \cdot \sin(\frac{t}{r} + k))$.

Definición 16. Curvas cerradas

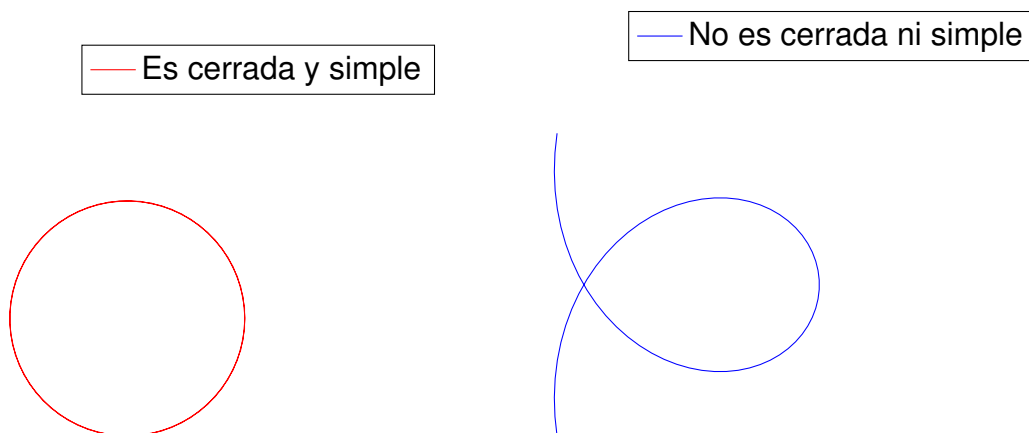
Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva PPLA. Se dice que α es cerrada si $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Definición 17. Curvas simples

Se le llama a una curva α "simple" si la función α es inyectiva, es decir, no tiene autointersecciones, exceptuando extremos.

Ejemplo.

Figura 5: Curvas cerradas y simples



A continuación se introducirá un invariante geométrico fundamental para la descripción de curvas en el plano y el espacio 3 dimensional.

Definición 18. Curvatura de una curva

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva PPLA. Se define $|\alpha''(t)| = K(t)$ como la curvatura de α en t .

Ejemplo.

- Las rectas $\alpha(x) = ux + v$, siendo u un vector unitario fijo y v un punto, tienen curvatura constante $k \equiv 0$.

Para esto, note que para todo x en el dominio, $\alpha'(x) = u$, al ser u un vector unitario se tiene que $\alpha''(x) = 0$, por lo tanto, $k \equiv 0$.

- Las circunferencias de radio r tienen curvatura constante $k = \frac{1}{r}$.

Sea $\alpha(t) = (r \cdot \cos(\frac{t}{r}), r \cdot \sin(\frac{t}{r}))$ la curva parametrizada por longitud de arco de la circunferencia de radio r .

$$\alpha'(t) = \left(-\sin\left(\frac{t}{r}\right), \cos\left(\frac{t}{r}\right) \right)$$

$$\alpha''(t) = \left(-\frac{1}{r} \cdot \cos\left(\frac{t}{r}\right), -\frac{1}{r} \cdot \sin\left(\frac{t}{r}\right) \right)$$

$$|\alpha''(t)| = \sqrt{\left(-\frac{1}{r} \cdot \cos\left(\frac{t}{r}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{r} \cdot \sin\left(\frac{t}{r}\right)\right)^2} = \frac{1}{r}.$$

Definición 19. Superficie regular

Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular, si para cada $p \in S$ existe una vecindad $V \in \mathbb{R}^3$ y una función $X : U \rightarrow V \cap S$ de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

1. X sea diferenciable.
2. X sea un homeomorfismo.
3. Para cada $q \in U$, el diferencial $d_{Xq} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sea uno a uno.

Ejemplo. ■ Un plano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; ax + by + cz = d\}$.

Si $c \neq 0$ se usará la parametrización $X(x, y) = (x, y, \frac{d-ax-by}{c})$, al ser cada coordenada una función lineal, es inmediato ver que la parametrización es diferenciable e invertible,

además note que la matriz jacobiana $dX_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$ es constante, es decir que el diferencial es inyectivo, esto garantiza que el plano es una superficie regular.

■ La esfera unitaria $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Siendo $V = \{(\theta, \phi); 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$, la función $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$X(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Ya que para cualesquiera θ y ϕ que se use, $\|X(\theta, \phi)\| = 1$, entonces $X(V) \subset S^2$, además X es diferenciable, e inyectiva. Ya que θ se puede determinar por $\theta = \cos^{-1} z$, al conocer θ es posible encontrar $\sin \phi$ y $\cos \phi$ tal que $x = \sin \theta \cos \phi$, $y = \sin \theta \sin \phi$ y así determinar un único $\phi \in [0, 2\pi)$. Entonces X tiene una inversa X^{-1} , además, ésta también es continua, por ende es un homeomorfismo. Por último, el diferencial

$$dX_p = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \cos \phi_0 & -\sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ \cos \theta_0 \sin \phi_0 & \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ -\sin \theta_0 & 0 \end{pmatrix},$$

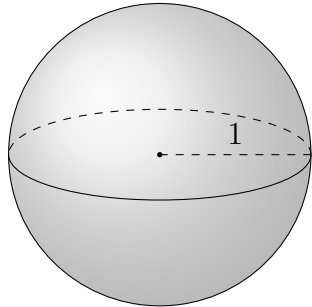
es inyectivo. Por tanto, al cumplir las tres condiciones, esta función parametriza la superficie. Sin embargo, no cubre toda la esfera, ya que deja fuera un semicírculo (incluyendo los polos). Así, usando como segunda parametrización

$$X_2(\theta, \phi) = (-\sin \theta \cos \phi, \cos \theta, \sin \theta \sin \phi)$$

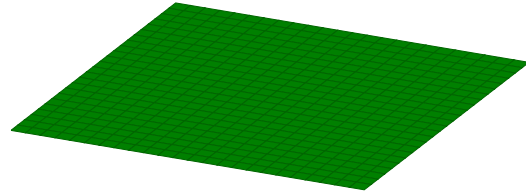
, la cual intercambia los ejes y y z e invierte el eje x , se logra cubrir completamente la esfera, demostrando que es una superficie.

Figura 6: Ejemplos superficies

Esfera de radio r



Planos



Una vez definidos los objetos sobre los que se trabajará, se procede a describir las propiedades y conceptos fundamentales sobre estos.

Definición 20. Área superficial de una superficie

Sea S una superficie regular parametrizada por $X(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, el área superficial $A(S)$ se define como

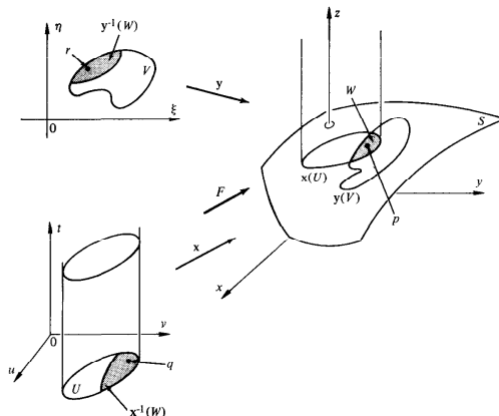
$$A(S) = \iint_U \| X_u \times X_v \| \, dudv,$$

donde $X_u = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})$ y $X_v = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$.

Teorema 1. *Sea p un punto de una superficie regular S , y sean $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dos parametrizaciones de S tal que $p \in x(U) \cap y(V) = W$. Entonces el cambio de coordenadas $h = x^{-1} \circ y$ es un difeomorfismo, es decir, un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable.*

Esta afirmación es necesaria para poder manipular el dominio de las parametrizaciones de las superficies a placer, para así, conseguir una función diferenciable sobre una superficie regular.

Figura 7: Representación gráfica del cambio de coordenadas



Fuente: DO CARMO, Manfredo P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Revised and updated second edition. Mineola, N.Y.: Dover Publications, Inc., 2016. p. 73.

Definición 21. Función diferenciable sobre una superficie regular

Sea V un subconjunto abierto de una superficie S , y la función $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es diferenciable en $p \in V$ si para alguna parametrización $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ con $p \in x(U) \subset V$, la composición $f \circ x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $x^{-1}(p)$. Así, f es diferenciable en V si es diferenciable en todo punto de V .

Definición 22. Plano Tangente

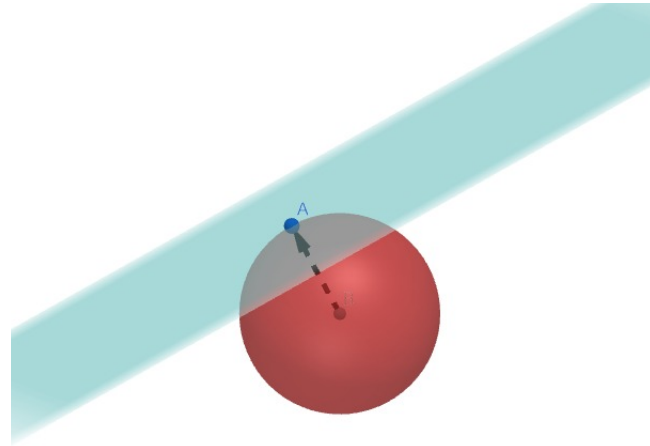
Sea $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de una superficie regular, y $q \in U$ un punto. Los vectores $v \in dx_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ son tangentes a S en el punto $x(q)$. La colección de estos vectores forman el *plano tangente* $T_p(S)$.

El plano tangente puede verse también como la colección de los vectores de velocidad (o primera derivada) de todas las curvas definidas sobre la superficie S que pasan por el punto $x(q)$.

Considere, por ejemplo, el plano tangente a una esfera en un punto de su superficie (Figura 8).

Ejemplo.

Figura 8: Plano tangente a un punto de la esfera



Definición 23. Superficie orientable

Una superficie S es *orientable* si existe un campo unitario normal diferenciable de vectores $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre S .

Ejemplo. La esfera unitaria \mathbb{S}^2 es una superficie orientable, ya que para todo punto $p \in \mathbb{S}^2$, $\|p\| = 1$, se toma la parametrización $X(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, con lo cual $X_\phi = (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0)$ y $X_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$ entonces se calcula el vector normal unitario de la forma

$$N(\theta, \phi) = \frac{X_\theta \times X_\phi}{\|X_\theta \times X_\phi\|} = \frac{(\sin^2 \theta \cos \phi, \sin^2 \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \theta)}{\sin \theta},$$

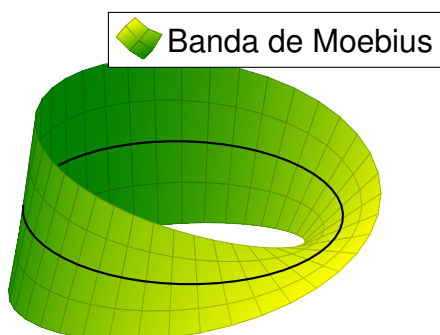
$$N(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = X(\theta, \phi),$$

con esto se observa que la propia parametrización es su propio campo normal unitario, es decir, para todo $p \in \mathbb{S}^2$ se cumple que $N(p) = p$. Con este campo normal, la esfera está orientada hacia el exterior, mientras que si se toma su opuesto (intercambiando el orden de los tangentes en la fórmula) se obtiene que $N(p) = -p$, una orientación hacia el interior.

Así como hay superficies orientables, también hay superficies no orientables, como la banda de Moebius, que a pesar de ser diferenciable, no se puede orientar.

Ejemplo.

Figura 9: Ejemplo superficie no orientable



Definición 24. Plano proyectivo

El plano proyectivo \mathbb{RP}^2 es el conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$, con \sim una relación de equivalencia, donde $x \sim y$ si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces para cualquier $[x] \in \mathbb{RP}^2$, se dice que $[x] = \{y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid \text{exists } k \in \mathbb{R}, y = k \cdot x\}$. Gráficamente, la clase de equivalencia $[x]$ es la recta que pasa por el origen y el punto x , pero, sin tomar el origen.

Esta superficie no orientable también se puede asociar a la esfera unitaria, donde para cada clase $[x] \in \mathbb{RP}^2$, se relaciona con los puntos $\frac{x}{|x|} \in \mathbb{S}^2$, por lo tanto la función proyección $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ definida por $\pi(x) = [x]$ cumple una relación 2 a 1 de la esfera sobre el plano.

La orientabilidad es una de las características más importantes que puede haber en una superficie, ya que se pueden definir conceptos y teoremas sobre las superficies solamente si son orientables, brindando facilidad sobre cálculos al poder asociar las superficies a unas más conocidas, como ejemplo de esto se tiene lo siguiente.

Definición 25. Aplicación de Gauss

Sea S una superficie, y N su orientación (Campo normal unitario). La función $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ se define como la aplicación de Gauss de S .

Ejemplo. ■ *Un plano definido por $ax + by + cz = 0$, tiene un vector normal unitario constante $N(p) = \frac{p}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, por tanto, $dN \equiv 0$.*

■ *Sea la esfera unitaria \mathbb{S}^2 , sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva parametrizada sobre la esfera, entonces $2xx' + 2yy' + 2zz' = 0$, muestra que el vector (x, y, z) es normal a la esfera en el punto (x, y, z) . Así, $N(x, y, z) = (x, y, z)$ es un campo normal unitario, que apunta al exterior de la esfera, se define este campo como la orientación de la esfera, por lo tanto $dN((x'(t), y'(t), z'(t))) = N'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, esto es, $dN_p(v) = v$ para todo punto $p \in \mathbb{S}^2$ y toda $v \in T_p\mathbb{S}^2$*

■ *En un cilindro $C : \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$, y la aplicación de Gauss $N(x, y, z) = (x, y, 0)$. Dada una curva $(x(t), y(t), z(t))$ sobre el cilindro, se tiene que $dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = (x'(t), y'(t), 0)$. Entonces en direcciones paralelas al eje z $dN(v) = 0$, mientras que en direcciones paralelas al plano xy , $dN(w) = -w$.*

Un aspecto interesante de la aplicación de Gauss es que permite relacionar superficies orientables con subconjuntos de la esfera unitaria. Por otro lado, la noción de orientabilidad también permite desarrollar la teoría de integración de funciones (para más detalles se recomienda ver: do Carmo (1994, cap. 4)).

Teorema 2. Teorema de Stokes

Sea Ω una superficie orientada y compacta, cuya frontera γ una curva cerrada simple con orientación positiva. Dada una 1-forma ω , se tiene que:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\Omega} d\omega.$$

Este teorema nos sirve para cambiar los valores de integración de una superficie a su frontera o viceversa.

Ejemplo. Tome la 1-forma en \mathbb{R}^2 $\omega = x \, dy$, y la superficie Ω como el interior del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, siendo γ la frontera de este triángulo recorrido en sentido antihorario. Sea $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ donde γ_1 es el segmento de recta desde el punto $(0, 0)$ al punto $(1, 0)$, γ_2 es el segmento de recta desde el punto $(1, 0)$ al punto $(0, 1)$ y γ_3 es el segmento de recta desde el punto $(0, 1)$ al punto $(0, 0)$.

De la parte izquierda del teorema de Stokes:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} x \, dy = \int_{\gamma_1} x \, dy + \int_{\gamma_2} x \, dy + \int_{\gamma_3} x \, dy,$$

donde \int_{γ_i} es la integral de línea a lo largo de los segmentos γ_i . Se parametrizan las integrales dependiendo de un t de la siguiente forma: $\gamma_1(t) = (x(t), y(t)) = (t, 0)$, $\gamma_2(t) = (1 - t, t)$ y $\gamma_3(t) = (0, 1 - t)$ donde $t \in [0, 1]$, por lo tanto

$$\int_{\gamma} x \, dy = \int_0^1 t \cdot 0 \, dt + \int_0^1 1 - t \cdot 1 \, dt + \int_0^1 0 \cdot 1 \, dt$$

$$\int_{\gamma} x \, dy = 0 + \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + 0 = 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Mientras que en la parte derecha de la igualdad en el teorema de Stokes, primero se calcula que $d\omega = d(x \, dy) = dx \wedge dy$. Entonces, la integral en el triángulo es:

$$\int_{\Omega} dx \wedge dy.$$

Como se mencionó anteriormente, $dx \wedge dy$ es el área formada por el polígono, al estar en \mathbb{R}^2 la figura existe sobre el plano euclideo, por lo tanto: $\int_{\gamma} \omega = \frac{1}{2} = \int_{\Omega} d\omega$.

Definición 26. Derivada covariante

Dada una superficie S , sea X un campo vectorial diferenciable sobre un conjunto abierto $U \subset S$ y $p \in U$, $Y \in T_p S$. Considere la curva parametrizada

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U,$$

con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = y$. Siendo $X(t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la restricción de el campo vectorial X a la curva α . El vector obtenido de la proyección de $(dX/dt)(0)$ al plano $T_p S$ se llama la derivada covariante en p de el campo vectorial X relativo al vector y . Denotado como $\nabla_y X(p)$, donde:

$$\nabla_y X(p) = d_y X(p) - \langle d_y(X(p)), N \rangle N.$$

Para simplificar la notación se omitirá la dependencia sobre p , por tanto al trabajar sobre dos campos vectoriales X, Y , se tiene:

$$\nabla_{Y(p)} X(p) = \nabla_Y X = Y(X) - \langle Y(X), N \rangle N.$$

Definición 27. Segunda forma fundamental

En una superficie S , dado un punto $p \in S$ y una dirección $v \in T_p S$, la segunda forma fundamental $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ se define como:

$$II_p(v) = - \langle dN_p(v), v \rangle .$$

Ejemplo. 1. Sea P un plano, la aplicación de Gauss N es constante, por lo tanto la derivada dN es 0 en todo punto p . De esta manera la segunda forma fundamental de cualquier plano P sería:

$$II = 0.$$

2. Sea S una esfera de radio r , la aplicación de Gauss $N(p) = \frac{p}{\|p\|} = \frac{p}{r}$, entonces

$dN_p(v) = \frac{v}{r}$, por lo tanto la segunda forma fundamental es:

$$II = -\left\langle \frac{v}{r}, v \right\rangle = -\frac{\|v\|^2}{r},$$

por ende para vectores unitarios, la segunda forma fundamental de la esfera es constante.

3. En un cilindro de radio r , la segunda forma fundamental no es constante, pues en las direcciones paralelas al vector director del cilindro $II_p(v) = 0$ y en direcciones perpendiculares al vector director $II_p(v) = \frac{\|v\|^2}{r}$.

Definición 28. Curvatura Normal

Sea α una curva regular contenida en una superficie S , que pasa por un punto $p \in S$. Denote por k la curvatura de α en el punto p , y sea θ el ángulo entre el vector normal n de la curva α y el vector normal N de la superficie S en p , de modo que $\cos \theta = \langle n, N \rangle$. El número $k_n = k \cos \theta$ se denomina la curvatura normal de la curva $\alpha \subset S$ en el punto p .

Para dar una interpretación a la segunda forma fundamental, si se considera una curva parametrizada $\alpha(s) \subset S$, con $\alpha(0) = p$. Se tiene que

$$II_p(\alpha'(0)) = k_n(p).$$

Definición 29. Curvaturas principales

Dada una superficie S , la máxima curvatura normal k_1 y la mínima curvatura normal k_2 en el punto $p \in S$, son llamadas las curvaturas principales en p .

Las direcciones correspondientes dadas por los vectores propios e_1, e_2 son llamadas las direcciones principales en p .

Ejemplo. ■ Sobre un plano P , todas las direcciones son principales en cada punto, y sus curvaturas principales son 0. Para las esferas ocurre algo similar, donde la segunda

forma fundamental es constante en vectores unitarios.

- *En un cilindro, las direcciones paralelas y perpendiculares al vector director son direcciones principales, correspondiendo a las curvaturas principales máxima y mínima respectivamente.*

Definición 30. Curvatura de Gauss y curvatura media de una superficie

Existen dos posibles definiciones de las curvaturas de una superficie S :

1. Sea $p \in S$ y $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ el diferencial de la aplicación de Gauss. El determinante de dN_p es la curvatura de Gauss K de S en P , es decir, $K = \det(dN_p)$, mientras que a el opuesto de la mitad de la traza de dN_p se le denomina la curvatura media H de S en p , es decir, $H = -\text{tr}(dN_p)/2$.
2. Siendo k_1 y k_2 las curvaturas principales de la superficie, se define la curvatura de Gauss como $K = k_1 \cdot k_2$ y la curvatura media como $H = \frac{k_1+k_2}{2}$.

Estas curvaturas permiten describir localmente el comportamiento de la superficie en el punto evaluado, ya sea como plano o con alguna forma de curvatura.

Definición 31. Marco ortonormal

Un marco ortonormal es un conjunto de vectores que forman una base para el espacio, y tal como su nombre lo indica, son unitarios y ortogonales entre sí.

Ejemplo. *Los vectores $(0, 1), (1, 0)$ para \mathbb{R}^2 , y los vectores $(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)$ para \mathbb{R}^3 .*

No siempre deben ser paralelos a los ejes, pues los vectores $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ también definen un marco ortonormal para \mathbb{R}^2 .

No todos los marcos sobre un espacio son ortonormales, por esto es necesario contar

con el **Algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt**, que permite crear un marco ortonormal de la siguiente manera:

Dada una base $\{v_i\}$, $1 \leq i \leq n$ para \mathbb{R}^n . Primero se define la proyección entre vectores como

$$Proy_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u.$$

Ahora se obtiene la base ortogonal $\{u_i\}$ de la siguiente forma

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - Proj_{u_1}(v_2)$$

$$u_3 = v_3 - Proj_{u_1}(v_3) - Proj_{u_2}(v_3)$$

Generalizando para k ,

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} Proj_{u_i}(v_k).$$

Consiguiendo así una base ortogonal $\{u_i\}$ para el espacio que se trabajará. Finalmente, para conseguir el marco ortonormal, basta con normalizar los vectores de la base $\{u_i\}$.

Con estos conceptos se puede ver cómo se juntan la geometría y el álgebra exterior, y para enfatizar más en ello, se mencionarán unos teoremas que asocian formas con la curvatura de una superficie, pero primero es necesario conocer el tensor de curvatura:

Definición 32. Tensor de curvatura

El tensor de curvatura es una 4-forma definida de la siguiente manera

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle.$$

Con el tensor de curvatura se puede ver la curvatura gaussiana de una superficie como

una 2-forma dependiente de una base de la superficie, siguiendo el teorema de Egregium.

Teorema 3. Teorema de Egregium

Sea S una superficie, para cualquier punto p y cualquier base $\{X, Y\}$ para el T_pS , la curvatura se define de la forma:

$$K(X, Y) = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}.$$

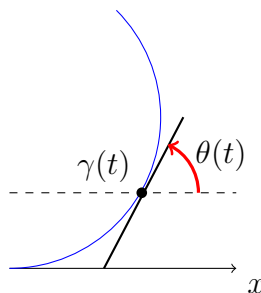
El Teorema de Egregium muestra que la curvatura de una superficie depende solo de su forma interna, sin importar como esté doblada o ubicada en el espacio. Esto permitirá, más adelante, comparar superficies no orientables usando el teorema de Gauss-Bonnet, tema que se tratará en el próximo capítulo.

Es importante tener conceptos claves sobre geometría plana, para ver la relación entre la curva γ y el ángulo entre γ' con el eje x positivo.

Definición 33. Ángulo tangente

Dada una curva suave $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, se puede definir la función $\theta(t) : I \rightarrow [-\pi, 2\pi)$ como la única función continua tal que $\gamma'(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ para todo $t \in I$, esta función define el ángulo entre el eje x positivo y la recta tangente a la curva γ en el punto $\gamma(t)$.

Figura 10: Ángulo tangente



Definiendo un ángulo en cada punto de la curva, se estudia el cambio de este ángulo a lo largo de la curva con lo siguiente.

Definición 34. Ángulo de rotación

Dada una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se define el ángulo de rotación de γ como

$$Rot(\gamma) = \int_a^b \dot{\theta}(t) dt = \theta(b) - \theta(a),$$

donde θ es la función del ángulo tangente definida previamente.

Si $\theta(t_i)$ no existe (por no ser suave la curva o por estar definida sobre un intervalo abierto), tome el $\lim_{t \rightarrow t_i^\pm} \theta(t)$ según corresponda. Si γ es una curva cerrada sobre el plano se tiene que $Rot(\gamma) = 2\pi$.

Tradicionalmente, un polígono se define como una figura cerrada compuesta por un número finito de segmentos lineales. No obstante, es posible generalizar este concepto permitiendo que las aristas sean curvas suaves. Dichas figuras reciben el nombre de polígonos curvos.

Definición 35. Polígono curvo

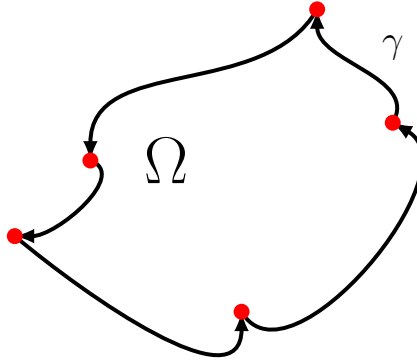
Un polígono curvo en un plano, es una curva simple, cerrada, suave a trozos y parametrizada por longitud de arco, donde ninguno de sus ángulos internos es de $\pm\pi$. Es la frontera Γ de una región Ω abierta y acotada, donde $\Gamma(a_i)$ son los vértices y $\Gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ son las aristas curvas del polígono, con $i \leq n$ siendo n el número de lados del polígono.

Ejemplo.

Un polígono curvo sobre una superficie sigue la misma idea, con la diferencia de que las curvas no se encuentran en el plano, sino en la superficie.

Para poder aplicar ciertos teoremas, es necesario que estos polígonos se vuelvan curvas suaves, como en el teorema de Stokes, para esto, se usa el siguiente teorema..

Figura 11: Pentágono curvo orientado positivamente



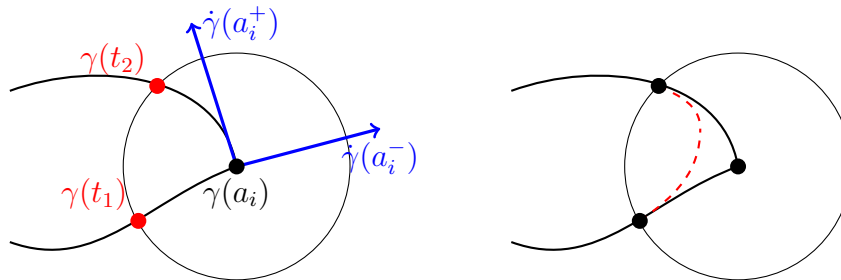
Teorema 4. Aproximación de un polígono curvo a una curva suave. Sea γ una polígono curvo, se puede aproximar a una curva completamente suave.

Demostración. Suponga que un vértice del polígono se encuentra en $\gamma(a_i)$ y tiene de ángulo exterior a ϵ_i . Tome α_i un número positivo pequeño dependiente de ϵ_i (más adelante se verá cómo se define), note que $\lim_{t \rightarrow a_i} \theta(t) = \theta(a_i) - \epsilon_i$. Entonces se puede escoger un δ suficientemente pequeño tal que $|\theta(t) - (\theta(a_i) - \epsilon_i)| < \alpha$ cuando $t \in (a_i - \delta, a_i)$ y $|\theta(t) - \theta(a_i)| < \alpha$ cuando $t \in (a_i, a_i + \delta)$. Ahora, se toma un r tal que γ no exista dentro de $\bar{B}_r(\gamma(a_i))$, exceptuando cuando $t \in (a_i - \delta, a_i + \delta)$. Sea $t_1 \in (a_i - \delta, a_i + \delta)$ el punto en que γ entra en $\bar{B}_r(\gamma(a_i))$ y t_2 el punto en el que sale. Ya que el cambio total de $\theta(t)$ no es mayor que α cuando $t \in [t_1, a_i]$ ni cuando $t \in (a_i, t_2]$, entonces si α es suficientemente pequeño el cambio total $\Delta\theta$ de $\theta(t)$ durante el intervalo $[t_1, t_2]$ está en el intervalo $(\epsilon_i - d\alpha, \epsilon_i + 2\alpha)$. Si se toma $\alpha < (\pi - |\epsilon_i|)/2$, se satisface que $-\pi < \Delta\theta < \pi$.

Por último, se reemplaza la porción de γ en el intervalo $[t_1, t_2]$ por un segmento curvo suave, tangente a γ en $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$ donde el ángulo tangente crece o decrece monótonamente de $\theta(t_1)$ a $\theta(t_2)$. Note que este segmento no es necesariamente igual de largo a la parte de la curva γ que se removió. Repitiendo este proceso en todos los vértices del polígono se obtiene una curva con un campo de vectores tangente continuo, cuyo ángulo

de rotación es el mismo que el de γ .

Figura 12: Construcción de la curva suave



Cuando se aproxima el radio de la bola r a cero, se obtiene una curva con similar área a la del polígono. □

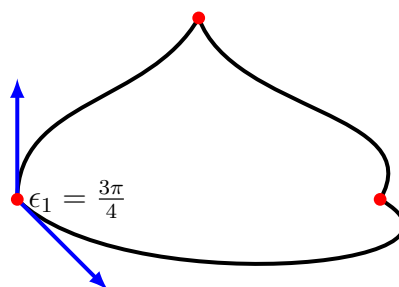
Al ser polígonos curvos, estos pueden tomar varias formas, por ejemplo un círculo puede verse como cualquier polígono, desde un triángulo curvo, hasta un n -ágono, dependiendo de cuantos vértices tenga, esto nos sirve para trazar distintas definiciones.

Definición 36. Defecto angular

Dado un polígono curvo sobre una superficie M , el defecto angular es el ángulo formado por las rectas tangentes a las aristas unidas en un vértice. Definido como ϵ_i para cada vértice i .

Ejemplo.

Figura 13: Defecto angular en un triángulo curvo

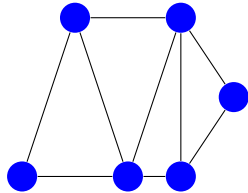


Definición 37. Superficie triangulada

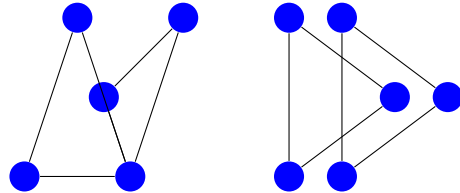
Se dice que una superficie M es triangulada si existe una colección finita de triángulos curvos $\{\Omega_n\}$, tal que la unión de las regiones cerradas $\bigcup \bar{\Omega}_i$ sea M , vértices intersecando vértices y aristas intersecando aristas.

Figura 14: Intersecciones entre triángulos

Intersecciones válidas



Intersecciones no válidas



Por definición, toda superficie triangulada debe ser acotada.

Ya que toda superficie compacta puede ser triangulada, se puede observar el siguiente concepto dependiente de esto, que logra clasificar cada superficie.

Definición 38. Característica de Euler

Sea M una superficie triangulada, la característica de Euler dada su triangulación se define por:

$$\chi(M) := N_v - N_e + N_f$$

Donde N_v es el número de vértices, N_e el número de lados y N_f el número de caras.

Si las superficies son conexas, el máximo que toma esta característica es 2, si son superficies no conexas, como 2 esferas separadas, la característica se toma como la suma de las dos superficies dando un total de 4, pudiendo tomar valores positivos infinitos.

Con la definición de la característica de Euler, se puede añadir propiedades que generalizan todas las superficies compactas con un número. En el libro "*Differential Geometry of*

Curves and Surfaces” de Manfredo Do Carmo se presentan 5, pero solo se mencionarán las primeras 3, que son importantes para el teorema.

- **Propiedad 1:** Toda región regular de una superficie regular se puede triangular.
- **Propiedad 2:** Si una superficie orientable se puede triangular, existe una triangulación Θ tal que todos los triángulos estén orientados positivamente.
- **Propiedad 3:** La característica de Euler no depende de la triangulación de la superficie.

Ejemplo.

1. La esfera \mathbb{S}^2 ,

$$\chi(\mathbb{S}^2) = 2.$$

2. Para un n -toro (toro con n huecos) T_n , $\chi(T_n) = -2(n - 1)$.

3. Para un plano o un subconjunto del plano P , $\chi(P) = 1$.

Con esto se clasifican de la siguiente manera, logrando simplificar la caracterización de superficies en una cantidad numerable.

Teorema 5. Teorema de clasificación de superficies compactas conexas

Todas las superficies compactas, orientables y conexas son homeomorfas a esferas o n -toros.

Esto depende sencillamente del género de la superficie, es decir, si es de género n , la superficie tiene n agujeros, por lo tanto es un n -toro, y siendo género 0, sin agujeros, es una esfera.

3. Teorema de Gauss-Bonnet

El Teorema de Gauss-Bonnet tiene sus raíces en el trabajo de Carl Friedrich Gauss a principios del siglo *XIX*. En su estudio de la geometría diferencial de superficies, Gauss introdujo el concepto de curvatura intrínseca y demostró el *Theorema Egregium*, el cual establece que la curvatura de Gauss es una propiedad intrínseca de la superficie, es decir, permanece invariante bajo isometrías (transformaciones que preservan las distancias sobre la superficie).

Sin embargo, fue Pierre Ossian Bonnet quien, a mediados del mismo siglo, amplió este resultado al incluir la relación entre la curvatura y la topología de las superficies. Bonnet estudió cómo la curvatura total de una superficie está vinculada con sus propiedades geométricas y topológicas, lo que llevó a la formulación completa del teorema que hoy lleva su nombre junto al de Gauss.

El Teorema de Gauss-Bonnet establece que la integral de la curvatura de Gauss sobre una superficie cerrada sin borde está relacionada únicamente con su característica de Euler. En otras palabras, este resultado muestra que la geometría local de una superficie tiene una conexión profunda con su estructura global.

A lo largo del siglo *XX*, el teorema se extendió a variedades más generales y se convirtió en una piedra angular de la geometría diferencial y la topología. Hoy en día, se aplica en física teórica, análisis geométrico y en la teoría de la relatividad, demostrando su importancia en el desarrollo de la matemática moderna.

Las demostraciones tanto de la fórmula local como del Teorema de Gauss-Bonnet siguen el desarrollo presentado en[3].

Teorema 6. Fórmula de Gauss-Bonnet

Sea γ un polígono curvo sobre una superficie orientable M que está orientado positivamente, Ω un subconjunto abierto de la superficie M con cerradura compacta, y además $\partial\Omega = \gamma$, entonces,

$$\int_{\Omega} K dA + \int_{\gamma} k_N ds + \sum_i \epsilon_i = 2\pi,$$

donde k_n es la curvatura con signo de γ , y ϵ_i son los defectos angulares del polígono γ .

Demostración. Sea $a = a_0 < \dots < a_k = b$ una subdivisión de $[a, b]$ en segmentos donde γ es suave. Usando el teorema del ángulo de rotación, se tiene que con respecto a un eje fijo, la curva γ presenta un cambio total del ángulo igual a 2π , el cual incluye tanto los ángulos en los vértices como el cambio acumulado a lo largo de cada arista. Aplicando el teorema fundamental del cálculo se tiene,

$$2\pi = \sum_{i=1}^k \epsilon_i + \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} \dot{\theta}(t) dt, \quad (1)$$

note ya la aparición de dos términos de la fórmula, así que ahora se considerará la relación que existe entre $\dot{\theta}$, k_N y K .

Se introduce un sistema de coordenadas locales (x, y) en un abierto U que contiene a γ y a Ω , tal que la base $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ está positivamente orientada, en el sentido de la orientación sobre M . Aplicando el algoritmo de Gram–Schmidt al marco $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$, se obtiene un marco ortonormal (E_1, E_2) tal que E_1 es un múltiplo positivo de $\frac{\partial}{\partial x}$. Entonces, dado que $\theta(t)$ representa el ángulo entre E_1 y $\dot{\gamma}(t)$, se obtienen las expresiones del vector tangente $\dot{\gamma}(t)$

y de su vector normal $N(t)$ en los puntos regulares de γ ,

$$\dot{\gamma}(t) = \cos \theta(t)E_1 + \sin \theta(t)E_2$$

$$N(t) = -\sin \theta(t)E_1 + \cos \theta(t)E_2.$$

Ahora en adelante se omitirá la dependencia respecto a t de la notación para simplificar las expresiones, denotando así la derivada respecto a t de $\dot{\gamma}$,

$$\begin{aligned} D_t \dot{\gamma} &= -\dot{\theta}(\sin \theta)E_1 + (\cos \theta)\nabla_{\dot{\gamma}}E_1 + \dot{\theta}(\cos \theta)E_2 + (\sin \theta)\nabla_{\dot{\gamma}}E_2 \\ &= \dot{\theta}N + (\cos \theta)\nabla_{\dot{\gamma}}E_1 + (\sin \theta)\nabla_{\dot{\gamma}}E_2. \end{aligned}$$

Lo siguiente es calcular cómo se comportan las derivadas covariantes de E_1 y E_2 . Puesto que (E_1, E_2) es un marco ortonormal, para cualquier vector X se tiene,

$$X(|E_1|^2) = X(\langle E_1, E_1 \rangle) = 2\langle \nabla_X(E_1), E_1 \rangle = 0,$$

$$X(|E_2|^2) = X(\langle E_2, E_2 \rangle) = 2\langle \nabla_X(E_2), E_2 \rangle = 0,$$

$$X(\langle E_1, E_2 \rangle) = \langle \nabla_X(E_1), E_2 \rangle + \langle E_1, \nabla_X(E_2) \rangle = 0.$$

En las dos primeras ecuaciones se muestra que $\nabla_X E_1$ es un múltiplo de E_2 y $\nabla_X E_2$ es un múltiplo de E_1 . Ahora se define la 1-forma ω como

$$\omega(X) := \langle E_1, \nabla_X(E_2) \rangle = -\langle \nabla_X(E_1), E_2 \rangle,$$

entonces las derivadas covariantes de los elementos de la base están dadas por

$$\nabla_X(E_1) = -\omega(X)E_2,$$

$$\nabla_X(E_2) = \omega(X)E_1.$$

Esta 1-forma ω determina la conexión en U , expresada en términos del marco local $\{E_i\}$.

Usando la 1-forma es posible decir,

$$\begin{aligned} k_N &= \langle D_t \dot{\gamma}, N \rangle \\ &= \langle \dot{\theta} N, N \rangle + \cos \theta \langle \nabla_{\dot{\gamma}}(E_1), N \rangle + \sin \theta \langle \nabla_{\dot{\gamma}}(E_2), N \rangle \\ &= \dot{\theta} - \cos \theta \langle \omega(\dot{\gamma}) E_2, N \rangle + \sin \theta \langle \omega(\dot{\gamma}) E_1, N \rangle \\ &= \dot{\theta} - \cos^2 \theta \omega(\dot{\gamma}) - \sin^2 \theta \omega(\dot{\gamma}) \\ &= \dot{\theta} - \omega(\dot{\gamma}). \end{aligned}$$

Por lo tanto la fórmula (1) se convierte en

$$\begin{aligned} 2\pi &= \sum_{i=1}^k \epsilon_i + \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} k_N(t) dt + \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} \omega(\dot{\gamma}(t)) dt \\ &= \sum_{i=1}^k \epsilon_i + \int_{\gamma} k_N(t) ds + \int_{\gamma} \omega, \end{aligned}$$

y solo faltaría mostrar que

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\Omega} K dA.$$

Si γ fuese una curva cerrada suave, el teorema de Stokes implicaría que $\int_{\gamma} \omega = \int_{\Omega} d\omega$.

Usando la demostración para el teorema de ángulo de rotación se puede aproximar γ a un γ_j suave donde el área entre Ω y Ω_j se aproxime a 0, por lo que usando el teorema de Stokes sobre Ω_j y tomando su límite cuando $j \rightarrow \infty$ se concluye,

$$2\pi = \sum_{i=1}^k \epsilon_i + \int_{\gamma} k_N(t) ds + \int_{\Omega} d\omega.$$

Como último paso queda probar que $d\omega = K dA$. Este resultado se obtiene al relacionar la fórmula del tensor de curvatura y la 1-forma ω . Además, puesto que (E_1, E_2) es un marco ortonormal orientado, por la definición del volumen Riemanniano se tiene que $dA(E_1, E_2) = 1$, por lo tanto, usando el teorema de Egregium

$$K dA(E_1, E_2) = K = \frac{Rm(E_1, E_2, E_2, E_1)}{|E_1|^2 |E_2|^2 - \langle E_1, E_2 \rangle^2},$$

y dado que tanto E_1 como E_2 son unitarios y ortogonales, la expresión se reduce únicamente al tensor de curvatura. Es decir,

$$K = Rm(E_1, E_2, E_2, E_1) = \langle \nabla_{E_1}(\nabla_{E_2}(E_2)) - \nabla_{E_2}(\nabla_{E_1}(E_2)) - \nabla_{[E_1, E_2]}(E_2), E_1 \rangle,$$

reemplazando mediante la 1-forma ω definida anteriormente, se obtiene

$$K = \langle \nabla_{E_1}(\omega(E_2)E_1) - \nabla_{E_2}(\omega(E_1)E_1) - \omega([E_1, E_2])E_1, E_1 \rangle,$$

aplicando la regla del producto a las derivadas covariantes, resulta

$$K = \langle E_1(\omega(E_2)E_1) + \omega(E_2)\nabla_{E_1}(E_1) - E_2(\omega(E_1)E_1) - \omega(E_1)\nabla_{E_2}(E_1) - \omega([E_1, E_2])E_1, E_1 \rangle,$$

al resolver el producto interno, algunos términos se anulan, y se reduce a

$$K = E_1(\omega(E_2)) - E_2(\omega(E_1)) - \omega([E_1, E_2]),$$

finalmente, al aplicar la definición de la derivada exterior $d\omega$ evaluada en (E_1, E_2) , se concluye que:

$$K = d\omega(E_1, E_2).$$

□

Teorema 7. Teorema de Gauss-Bonnet

Sea M una superficie regular, compacta, orientada y triangulada, se tiene que

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M).$$

Este es un teorema local-global, ya que establece la igualdad de dos cantidades definidas de maneras muy diferentes, dada una superficie M : la integral de la curvatura de Gauss, determinada por la geometría local de M ; y $2\pi\chi(M)$, el cual es un invariante topológico global.

Demostración. Sea $\{\Omega_i : i = 1, \dots, N_f\}$ la notación para las caras de la triangulación, y para cada i sea $\{\gamma_{ij} : j = 1, 2, 3\}$ las aristas de Ω_i y $\{\theta_{ij} : j = 1, 2, 3\}$ sus ángulos interiores. Puesto que cada ángulo exterior es π menos el ángulo interior correspondiente, aplicando la fórmula de Gauss-Bonnet a cada triángulo y sumando sobre i se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N_f} \int_{\Omega_i} K dA + \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_{ij}} k_N ds + \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 (\pi - \theta_{ij}) = \sum_{i=1}^{N_f} 2\pi.$$

Note que cada integral de borde aparece exactamente dos veces entre todas las sumatorias pero en orientaciones opuestas, así que las integrales de k_N se cancelan, simplificando la ecuación anterior se tiene

$$\int_M K dA + 3\pi N_f - \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 \theta_{ij} = 2\pi N_f.$$

Ya que cada ángulo interior θ_{ij} aparece exactamente una vez, en cada vértice, los ángulos que tocan cada vértice deben sumar 2π ; Puesto esto, la suma de los ángulos se puede reescribir exactamente como $2\pi N_v$, dando como resultado

$$\int_M K dA = 2\pi N_v - \pi N_f.$$

Finalmente, como cada arista aparece en exactamente dos triángulos, y cada triángulo tiene 3 aristas, el número total de aristas contadas con multiplicidad es $2N_e = 3N_f$, es decir, $N_f = 2N_e - 2N_f$, por tanto reemplazando en la anterior, y usando la característica de Euler se concluye

$$\int_M K dA = 2\pi N_v - 2\pi N_e + 2\pi N_f = 2\pi\chi(M).$$

□

4. Aplicaciones

Gracias a los teoremas previos y, en particular, al teorema de Gauss-Bonnet, es posible demostrar una serie de resultados importantes que profundizan en la relación entre la geometría y la topología de las superficies. A continuación, se presentan algunos de estos teoremas.

Corolario 1. Teorema de la suma de ángulos

La suma de los ángulos interiores de un triángulo euclidiano es π .

Demostración. Usando la fórmula de Gauss-Bonnet, se tiene que

$$\int_{\Omega} K dA + \int_{\gamma} k_n ds + \sum_i \epsilon_i = 2\pi.$$

Al ser un triángulo, se puede dejar que la triangulación sea el propio objeto. Además, como se está en un plano, las aristas son líneas rectas, por lo tanto $\int_{\Omega} K dA = \int_{\gamma} k_n ds = 0$. Por otra parte, ϵ_i son ángulos externos, es decir $\epsilon_i = \pi - \theta_i$ siendo θ_i el ángulo interno, lo que nos deja:

$$\sum_i^3 (\pi - \theta_i) = 2\pi.$$

$$\sum_i^3 \theta_i = 3\pi - 2\pi = \pi.$$

□

Corolario 2. Teorema del largo de la circunferencia

La longitud L de la circunferencia de un círculo euclidiano de radio R es $2\pi R$.

Demostración. Al ser un círculo, se puede dejar que la triangulación sea el propio objeto (un triángulo curvo con ángulos exteriores de 0, para que sea una curva suave), al vivir

sobre un plano la curvatura de la superficie es 0, por lo tanto la fórmula se reduce a

$$\int_{\gamma} k_n ds = 2\pi,$$

la curvatura de una circunferencia de radio R es $1/R$ constante, dejando que la integral a lo largo de la curva sea la longitud de la circunferencia L , es decir,

$$\int_{\gamma} k_n ds = \int_{\gamma} \frac{1}{R} ds = \frac{1}{R} \int_{\gamma} ds = \frac{L}{R} = 2\pi.$$

Multiplicando a ambos lados se obtiene que la longitud L es igual a $2\pi R$. □

Para casos más generales se utiliza el teorema de curvatura total.

Corolario 3. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva simple, cerrada y PPLA tal que $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$, entonces, bajo la orientación positiva N , se tiene:

$$\int_a^b k_N dt = 2\pi.$$

Corolario 4. Sea S una superficie compacta con curvatura Gaussiana K , si S es homeomorfo a la esfera o al plano proyectivo, entonces $K > 0$ en algún punto.

Demostración. Si S es orientable y homeomorfa a la esfera, entonces su característica de Euler es 2, por tanto, el resultado de la integral debe ser igual a 4π , lo que indica que debe existir al menos un punto p donde la curvatura sea positiva, ya que de lo contrario, la integral tampoco lo sería.

Si S no es orientable pero homeomorfa al plano proyectivo, el resultado se obtiene de aplicar el teorema a la cobertura del plano $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ con la métrica inducida $g_s = \pi^* g$, donde g es la métrica dada en la superficie. De esta forma, como la curvatura es un invariante isométrico (ver el teorema de Egregium), $\int_S K_g dA = \int_S K_{g_s}$. □

De manera similar se obtienen más corolarios.

Corolario 5. Sea S una superficie compacta con curvatura Gaussiana K , si S es homeomorfo a el toro o a la botella de Klein, entonces $K \equiv 0$ o K toma valores positivos y negativos.

Corolario 6. Sea S una superficie compacta con curvatura Gaussiana K , si S no es homeomorfa a la esfera, toro, plano proyectivo o botella de Klein, entonces $K < 0$ en algún punto.

También es posible usar este corolario de manera inversa.

Corolario 7. Sea S una superficie compacta y orientable, y K su curvatura Gaussiana.

- Si $K > 0$, entonces S es homeomorfa a la esfera.
- Si $K \leq 0$, entonces S tiene al menos 1 agujero.

Demostración. Si la curvatura de la superficie es estrictamente positiva, la integral también debe ser positiva, por Gauss-Bonnet la característica de Euler debe ser mayor a 0, con única opción posible ser 2, por el teorema de clasificación de superficies compactas y conexas, la superficie debe ser homeomorfa a la esfera. Si la curvatura de Gauss es menor o igual que cero en toda la superficie, entonces, por el teorema de Gauss-Bonnet, la característica de Euler χ de la superficie satisface $\chi \leq 0$.

Por otro lado, según el teorema de clasificación de superficies compactas orientables sin borde, la característica de Euler está relacionada con el género g por la fórmula:

$$\chi = 2 - 2g.$$

Así, si $\chi \leq 0$, entonces $g \geq 1$, lo cual implica que la superficie no puede ser una esfera ($g = 0$) y debe tener al menos un agujero, esto significa, es homeomorfa a un n -toro con $n \geq 1$. □

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Manfredo P Do Carmo. *Differential forms and applications*. Springer Science & Business Media, 1998.
- [2] Manfredo P Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications, 2016.
- [3] John M Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. Vol. 176. Springer Science & Business Media, 2006.
- [4] John M Lee. *Submanifolds: Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2012.
- [5] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. 2.^a ed. Springer, 2011. ISBN: 978-1-4419-7400-1.