

**ESTUDIO Y CLASIFICACIÓN ALGEBRAICA DEL TENSOR
MOMENTO-ENERGÍA EN RELATIVIDAD GENERAL**

HEINER RENÉ SARMIENTO COGOLLO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2006**

**ESTUDIO Y CLASIFICACIÓN ALGEBRAICA DEL TENSOR
MOMENTO-ENERGÍA EN RELATIVIDAD GENERAL**

HEINER RENÉ SARMIENTO COGOLLO

Tesis para optar al título de Físico

Director
GUILLERMO A. GONZÁLEZ V., Ph. D.
Físico

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2006

A mi querida Madre.

A mis Abuelos...

...y todos mis familiares.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

Al Dr. Guillermo Alfonso González Villegas. Sus explicaciones son palabras que alientan a seguir investigando.

Al Dr. Yeinzón Rodríguez. Sus aportes fueron fundamentales para la culminación exitosa del proyecto.

Al Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG). Por hacerme parte de ellos y aceptarme “en el grupo que era”.

A mi Grupo de Estudio. Por todos los buenos momentos que pasamos.

Y a todos aquellos que me apoyaron durante este proceso, gracias.

TÍTULO : ESTUDIO Y CLASIFICACIÓN ALGEBRAICA DEL TENSOR MOMENTO-ENERGÍA EN RELATIVIDAD GENERAL. *.

AUTOR : SARMIENTO COGOLLO, Heiner René **.

PALABRAS CLAVES : Tensor de Energía-Momento, Polinomio Característico, Clasificación de Segrè, Condiciones de Energía.

DESCRIPCIÓN: El propósito de este trabajo es reproducir un método para el estudio y clasificación, desde el punto de vista algebraico, de un tensor simétrico de segundo orden en un espacio Lorentziano de cuatro dimensiones. Esta meta es alcanzada por medio del polinomio característico asociado al tensor, para el cual se encuentran invariantes, que permiten conocer la naturaleza y multiplicidad de las raíces en términos de sus signos.

El polinomio mínimo es considerado con el fin de encontrar el número de vectores propios linealmente independientes del tensor, los cuales sirven de ayuda a la construcción de una tétrada que permite expresar el tensor de una manera mas simple; a su vez, sirven de criterio para la clasificación del tensor. El método encontrará las formas canónicas de dicho tensor, que corresponden a las formas adoptadas por el tensor en la tétrada construida con la ayuda de los vectores propios, y su clasificación algebraica será dada por medio de los tipos de Segrè. Esto será usado para dar una descripción sistemática del tensor de energía-momento en relatividad general.

Los resultados derivados de este estudio serán utilizados, junto con las condiciones de energía, para analizar y clasificar varios tensores estándar de energía-momento, así como combinaciones no interactuantes de dichos tensores.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Director).

TITLE : ALGEBRAIC STUDY AND CLASSIFICATION OF THE ENERGY-MOMENTUM TENSOR IN GENERAL RELATIVITY. *.

AUTOR : SARMIENTO COGOLLO, Heiner René **.

KEYWORDS : Energy-momentum Tensor, Characteristic Polynomial, Types of Segrè, Energy Conditions.

DESCRIPTION: The aim of this work is to reproduce a method for the study and classification, from the algebraic point of view, of a symmetric tensor of second rank in a four dimensional Lorentzian space. This goal is reached by the characteristic polynomial related to the tensor, for which is found invariants, that allow us know the nature and multiplicity of the roots in terms of its sings.

The minimal polynomial is taking into account in order to finds the number of linearly independent eigenvectors of the tensor, the which is useful to the building of a tetrad that allow us to express the tensor in easier form; in turn, these is used of criterion for the clasification of the tensor. The method will allow us to find the canonical forms of such a tensor, that are the forms taking for the tensor in the tetrad building with the help of the eigenvectors, and the algebraic classification will be given in terms of the Segrè types. This will be used to give a systematic description of the energy-momentum tensor in general relativity.

The results obtained from this study will be used, together with the energy conditions, to analyze and classify several standard energy-momentum tensors, as well as some non-interacting combinations of them.

*Degree work.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Director).

Índice general

Introducción	vii
1. Caracterización Algebraica del Tensor Momento-Energía	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Polinomio Característico de un Tensor	2
1.3. Raíces del Polinomio de Cuarto Orden	4
1.4. Formas Canónicas, Valores y Vectores Propios del Tensor Momento-Energía .	8
2. Aplicaciones	12
2.1. Preliminares	12
2.2. Las Condiciones de Energía	13
2.2.1. Condición Débil de Energía	13
2.2.2. Condición Nula de Energía	13
2.2.3. Condición Fuerte de Energía	13
2.2.4. Condición Dominante de Energía	14
2.3. Aplicación de las Condiciones de Energía a las formas Canónicas	14
2.3.1. Tensor Tipo I	15
2.3.2. Tensor Tipo II	16

2.3.3. Tensores del Tipo III y IV	17
2.4. Ejemplos de Tensores Momento-Energía	17
2.4.1. Tensor de Campo Electromagnético	18
2.4.2. Tensor de un Fluido de Polvo	18
2.4.3. Tensor de un Fluido Perfecto	19
2.4.4. Tensor de un Fluido Isótropo con Flujo de Calor	19
2.4.5. Combinación de Dos Campos de Radiación	20
2.4.6. Combinación de Dos Fluidos Perfectos No-Interactuantes	20
2.4.7. Combinación de un Campo de Radiación y un Fluido Perfecto No-Interactuantes	20
Conclusiones	22

Índice de cuadros

1.1. Naturaleza y multiplicidad de las raíces de $P(\lambda)$	4
1.2. Naturaleza y multiplicidad de las raíces de $P(\lambda)$ en términos de los Invariantes I_i . . .	8
1.3. Naturaleza y multiplicidad de los valores propios del tensor de segundo orden en un espacio Lorentziano	9
1.4. Determinación del tipo algebraico de un tensor simétrico en el espacio-tiempo . . .	10

Introducción

Contrario a lo que su nombre podría sugerir, *La Teoría de la Relatividad General* es una teoría, entre otras cosas, interesada en la búsqueda de cantidades que sean invariantes, es decir, que no cambien bajo ciertas transformaciones, especialmente bajo transformaciones del sistema de coordenadas. En dicha teoría los tensores juegan un papel protagónico: ellos permiten formular las leyes de la naturaleza de manera covariante, es decir, formularlas de tal forma que no dependen del marco de referencia utilizado para describirlas; además los tensores poseen un extraordinario poder para agrupar distintas leyes físicas, como expresiones diferentes de una misma cosa.

En especial, los tensores simétricos de segundo orden tienen una importancia relevante en relatividad general. El campo gravitacional mismo es descrito por el tensor de Riemann el cual es obtenido a partir de un tensor simétrico de segundo orden llamado la métrica; la distribución física de materia está relacionada a un tensor simétrico de segundo orden llamado el tensor de momento-energía; el tensor de Ricci y el tensor de Einstein, son otros ejemplos de dichos tensores simétricos. El conocimiento de las propiedades de éstos tensores, implica directamente un conocimiento sobre las propiedades físicas de las cantidades que ellos representan.

Sin embargo, cuando el tensor es escrito en un sistema de coordenadas particular, las componentes del tensor no son cantidades invariantes, en general. Entonces, surge la cuestión de cuáles son las cantidades invariantes del tensor. Es bien conocido que la traza y el determinante del tensor son cantidades invariantes [2], pero existen otras cantidades asociadas al tensor que también son invariantes, estas cantidades son conocidas como los *Valores Propios* del tensor. Además, los valores propios del tensor están íntimamente relacionados con las cantidades físicas que los tensores representan.

De otra parte, existe un problema frecuente en relatividad general. Las ecuaciones de campo de Einstein establecen que la curvatura del espacio-tiempo está relacionada a la distribución de materia. Luego, conocida una determinada métrica, uno puede hallar el tensor momento-energía asociada a la métrica y así conocer acerca de la distribución física de materia. No obstante, el tensor así obtenido tiene una forma tal que no es simple identificarlo con tensores ya conocidos, como el de un fluido, o el de campos electromagnéticos. Entonces, es necesario desarrollar algún mecanismo que permita describir el tensor en una tétrada donde sea posible asociarlo con tensores ya conocidos. Esta tétrada se puede formar con la ayuda de

los *Vectores Propios*, y la forma adoptada por el tensor en dicha tétrada es conocida como la *Forma Canónica* del tensor.

Entonces, el problema de hallar los valores y vectores propios asociados a un tensor es de importancia en relatividad general porque nos brinda información de los invariantes asociados al tensor, además de permitirnos escribir el tensor en un forma más simple de la cual podemos extraer una mayor cantidad de información. Este trabajo se centra en el tensor momento-energía y su objetivo principal es desarrollar un método algebraico para el estudio, clasificación e interpretación física del tensor momento-energía en relatividad general.

La clasificación algebraica de un tensor simétrico de segundo orden, en un espacio Lorentziano de cuatro dimensiones, es bastante conocida [7], y existen cuatro tipos de tensores dependiendo de la estructura algebraica de la transformación lineal que ellos definen. Esta clasificación se realiza considerando las posibles formas canónicas del tensor simétrico en una base ortonormal [7] o en una tétrada real nula [8]. Los tipos y sus subtipos (caso degenerado) pueden ser representados de varias maneras siendo la de Segrè la más usual. El tensor pertenece al tipo I, II o III si él tiene cuatro, tres o dos vectores propios linealmente independientes, respectivamente; además, en estos tres casos todos los valores propios son reales. De otra parte, el tensor pertenece al tipo IV si tiene un par de valores propios que son complejos conjugados.

En el primer capítulo se describe el procedimiento matemático para encontrar los valores propios del tensor así como el procedimiento para determinar cuantos vectores propios linealmente independientes tiene, y de esta manera determinar el tipo de Segrè del tensor. Los vectores propios son utilizados para formar una tétrada que permite escribir el tensor en una forma más simple, su forma canónica. Los resultados obtenidos en este capítulo son utilizados en el segundo capítulo, junto con las condiciones de energía, para listar y clasificar varios tensores estándar de momento-energía en relatividad general tales como el de un fluido o el del campo electromagnético. En todo este trabajo la signatura utilizada para la métrica será asumida $(-1, +1, +1, +1)$, además los índices griegos corren de cero a tres y los índices latinos de uno a tres.

CAPÍTULO 1

Caracterización Algebraica del Tensor Momento-Energía

1.1 Preliminares

Un tensor de rango n es, por definición, una función lineal de n vectores, evaluada en los reales, el cual puede ser representado, en un espacio de N dimensiones, por un conjunto de N vectores linealmente independientes; y cuyo espacio tiene asociado una forma cuadrática no-singular indefinida, llamada la *métrica*. En este capítulo se considera, en particular, un tensor de segundo rango en un espacio de cuatro dimensiones asociado a una métrica Lorentziana.

La sección 1.2 plantea el problema central, obtener el polinomio característico del tensor, expresando los coeficientes del polinomio en términos de las componentes del tensor. Dado que el tensor reside en un espacio de cuatro dimensiones, su polinomio característico es de cuarto grado.

Las raíces de un polinomio de cuarto grado son halladas analíticamente, siguiendo métodos algebraicos estándar, uno de los cuales es reproducido en la sección 1.3.

Frecuentemente, de las posibles soluciones matemáticas de un problema no todas son soluciones permitidas desde el punto de vista físico. La sección 1.4 adapta los resultados obtenidos en las secciones precedentes al caso de interés, el tensor momento-energía de la relatividad general. Formas canónicas, valores y vectores propios, son hallados en esta sección.

1.2 Polinomio Característico de un Tensor

Considere un tensor, \mathbf{T} , de segundo orden en un espacio de cuatro dimensiones, dotado de un tensor métrico *Lorentziano*, \mathbf{g} . Es de interés físico y matemático, conocer un vector, $\vec{\xi}$, o conjunto de vectores, $\{\vec{\xi}\}$, tal que al evaluarlos en el tensor \mathbf{T} , el vector resultante sea paralelo al vector $\vec{\xi}$. Es decir, escrito en notación tensorial, se desea que

$$T_{\mu\nu}\xi^\nu = \lambda\xi_\mu. \quad (1.1)$$

Los vectores ξ^μ que cumplen con la ecuación (1.1) son conocidos como *Vectores Propios* del tensor \mathbf{T} , y las constantes de proporcionalidad λ , asociadas a cada uno de los vectores propios son llamadas *Valores Propios*.

Para encontrar los valores y vectores propios del tensor \mathbf{T} se debe resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneas dado por (1.1), el cual se puede reescribir de la siguiente manera,

$$(T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu})\xi^\nu = 0. \quad (1.2)$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución no-trivial si se cumple que

$$|T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}| = 0, \quad (1.3)$$

donde el término del lado izquierdo de la ecuación (1.3) define el polinomio característico del tensor \mathbf{T} , es decir, $P(\lambda) \equiv |T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}|$. Dicho polinomio, es de cuarto grado dado que el espacio del tensor es de cuatro dimensiones, por lo tanto el polinomio característico posee la forma general

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d, \quad (1.4)$$

donde los coeficientes del polinomio se expresan en términos de las componentes del tensor \mathbf{T} y la métrica \mathbf{g} , esto es

$$\begin{aligned} a &= a(T_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}), & b &= b(T_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}), \\ c &= c(T_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}), & d &= d(T_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

La expresión funcional dada por (1.5) puede ser simplificada con el propósito de encontrar la forma explícita de los coeficientes del polinomio en términos de las componentes del tensor \mathbf{T} y la métrica \mathbf{g} . Con el fin de hallar una expresión más simple, considere la ecuación (1.2) multiplicada por la métrica inversa, es decir,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(T_{\gamma\nu} - \lambda g_{\gamma\nu})\xi^\nu &= 0, \\ (T_\nu^\mu - \lambda\delta_\nu^\mu)\xi^\nu &= 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

de esta manera el polinomio característico del tensor queda definido por la expresión

$$P(\lambda) = |T_\nu^\mu - \lambda\delta_\nu^\mu|, \quad (1.7)$$

donde los coeficientes del polinomio siguen siendo los mismos debido a su invariancia, y δ_ν^μ son las componentes del tensor métrico de un espacio *euclidiano*.

Hallar la dependencia de los coeficientes es, ahora, más sencillo dado que éstos solo dependen de las componentes del tensor \mathbf{T} , ya que la arbitrariedad de las componentes de la métrica Lorentziana fue removida. Considere el tensor métrico del espacio euclidiano, $\mathbf{g} = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$, y tomando un tensor \mathbf{T} de la forma

$$\mathbf{T} = (T_\nu^\mu) = \begin{pmatrix} T_0^0 & T_1^0 & T_2^0 & T_3^0 \\ T_0^1 & T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 \\ T_0^2 & T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 \\ T_0^3 & T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

se puede hallar los coeficientes del polinomio en términos de las componentes del tensor \mathbf{T} resolviendo el siguiente determinante,

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} T_0^0 - \lambda & T_1^0 & T_2^0 & T_3^0 \\ T_0^1 & T_1^1 - \lambda & T_2^1 & T_3^1 \\ T_0^2 & T_1^2 & T_2^2 - \lambda & T_3^2 \\ T_0^3 & T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 - \lambda \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Después de unas cuantas hojas de cálculo para el desarrollo del determinante se puede finalmente escribir los coeficientes del polinomio característico como

$$a = -\text{tra}(\mathbf{T}), \quad (1.10a)$$

$$b = \frac{1}{2!}[\text{tra}^2(\mathbf{T}) - \text{tra}(\mathbf{T}^2)], \quad (1.10b)$$

$$c = -\frac{1}{3!}[\text{tra}^3(\mathbf{T}) + 2\text{tra}(\mathbf{T}^3) - 3\text{tra}(\mathbf{T})\text{tra}(\mathbf{T}^2)], \quad (1.10c)$$

$$d = \frac{1}{4!}[\text{tra}^4(\mathbf{T}) - 6\text{tra}(\mathbf{T}^4) + 8\text{tra}(\mathbf{T})\text{tra}(\mathbf{T}^3) - 6\text{tra}^2(\mathbf{T})\text{tra}(\mathbf{T}^2) + 3\text{tra}^2(\mathbf{T}^2)], \quad (1.10d)$$

donde $\text{tra}(\mathbf{T})$ representa la traza del tensor \mathbf{T} , $\text{tra}^n(\mathbf{T})$ es la potencia *n-ésima* de la traza y \mathbf{T}^n es el producto interno de *n* tensores \mathbf{T} . Obsérvese que debido a la invariancia de la traza del tensor [2] inmediatamente queda claro que los coeficientes del polinomio son invariantes. No importa como se halla definido el polinomio característico de \mathbf{T} , si por el lado izquierdo de la ecuación (1.2) o por la expresión (1.7), los coeficientes serán los mismos.

Un caso de especial interés, debido a razones que se harán claras más adelante, es el de un tensor libre de traza. Sea \mathbf{N} un tensor de segundo orden libre de traza, definido por

$$\mathbf{N} = \mathbf{T} - \frac{1}{4}\mathbf{g}\text{tra}(\mathbf{T}), \quad (1.11)$$

o escrito en componentes

$$N_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}T, \quad (1.12)$$

donde $T = \text{tra}(\mathbf{T})$. Entonces los coeficientes del polinomio característico de \mathbf{N} están dados por

$$a = 0, \quad (1.13a)$$

$$b = -\frac{1}{2}\text{tra}(\mathbf{T}^2), \quad (1.13b)$$

$$c = -\frac{1}{3}\text{tra}(\mathbf{T}^3), \quad (1.13c)$$

$$d = -\frac{1}{4}\left[\text{tra}(\mathbf{T}^4) - \frac{1}{2}\text{tra}^2(\mathbf{T}^2)\right], \quad (1.13d)$$

que son notablemente más simples que los dados por (1.10). Los coeficientes del polinomio característico del tensor libre de traza son los encontrados normalmente en la literatura y el sistema de ecuaciones dado por (1.13) concuerda con ellos [3].

Encontrada la relación entre los coeficientes del polinomio y las componentes del tensor, se debe proceder a encontrar las cuatro raíces que, dado el *teorema fundamental del álgebra* [4] nos asegura, tiene el polinomio característico.

1.3 Raíces del Polinomio de Cuarto Orden

En esta sección además de estar interesados en conocer las raíces del polinomio característico hallado en la sección precedente, se desea también conocer la naturaleza y multiplicidad de éstas raíces. Naturaleza que queda determinada por el cuerpo al que pertenece la raíz encontrada: el cuerpo de los reales, \mathbb{R} , o el cuerpo de los complejos, \mathbb{C} . Por multiplicidad se debe entender el número de veces que se repite una determinada raíz.

Denótese por $\{\lambda_i\}$, $i = 0, 1, 2, 3$, el conjunto de las raíces de un polinomio $P(\lambda)$ de cuarto orden, teniendo presente que si $\lambda_i \in \mathbb{C}$ será escrito como z_i , y z_i^* su complejo conjugado. De acuerdo al teorema del álgebra según el cual *las raíces en \mathbb{C} de un polinomio sobre \mathbb{R} son o*

1	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Cuatro reales diferentes
2	z_1, z_1^*, z_2, z_2^*	Dos pares de complejos conjugados diferentes
3	$\lambda_0 = \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$	Dos reales iguales y dos diferentes
4	$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_3, \lambda_4$	Tres reales iguales
5	$\lambda_0 = \lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3$	Dos pares de dos reales iguales
6	$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	Cuatro reales iguales
7	$\lambda_0 = \lambda_1, z_1, z_1^*$	Dos reales iguales y un par de complejos conjugados
8	$z_1 = z_2, z_1^* = z_2^*$	Dos pares de complejos conjugados iguales
9	$\lambda_0, \lambda_1, z_1, z_1^*$	Dos reales diferentes y un par de complejos conjugados

Cuadro 1.1: Naturaleza y multiplicidad de las raíces de $P(\lambda)$

bien reales, o bien complejos conjugados dos a dos, y con el mismo orden de multiplicidad, $\{\lambda_i\}$, debe pertenecer a una de las nueve posibilidades dadas por la naturaleza y multiplicidad de las raíces, y listadas en la tabla 1.1.

Para hallar las raíces del polinomio característico, se debe resolver,

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0. \quad (1.14)$$

Realizando la sustitución $\lambda = x - a/4$ se obtiene,

$$P(x) = x^4 + mx^2 + nx + l = 0 \quad (1.15)$$

con

$$m = b - \frac{3}{8}a^2, \quad (1.16a)$$

$$n = c - \frac{a}{2} \left(\frac{a^2}{8} + m \right), \quad (1.16b)$$

$$l = d - \frac{a}{4} \left[n + \frac{a}{4}m + \left(\frac{a}{4} \right)^3 \right]. \quad (1.16c)$$

La sustitución realizada revela un resultado importante: un tensor cuya traza sea diferente de cero se le puede asignar un único polinomio de cuarto orden cuyo coeficiente del monomio cúbico es nulo. Esta es la razón por la cual se trató en la sección 1.2 el caso especial de un tensor libre de traza.

El polinomio sin término cúbico dado por el lado izquierdo de (1.15) puede ser pensado como el polinomio característico de un tensor libre de traza, por lo tanto, se puede asignar un tensor libre de traza al tensor caracterizado por el polinomio característico dado por el lado izquierdo de (1.14).

Obsérvese además, que la naturaleza de las raíces del polinomio (1.14) es la misma que la de las de el polinomio (1.15), puesto que la diferencia es el término $a/4$ el cual es real, no alterando dicha naturaleza.

En adelante se trabajará con el polinomio (1.15), luego los coeficientes del polinomio en términos del tensor \mathbf{T} vienen dados por

$$m = \frac{1}{2!} \left[\frac{1}{4} \text{tra}^2(\mathbf{T}) - \text{tra}(\mathbf{T}^2) \right], \quad (1.17a)$$

$$n = \frac{1}{3!} \left[\frac{1}{4} \text{tra}^3(\mathbf{T}) + 2\text{tra}(\mathbf{T}^3) - \frac{3}{2} \text{tra}(\mathbf{T})\text{tra}(\mathbf{T}^2) \right], \quad (1.17b)$$

$$l = \frac{1}{4!} \left[\frac{15}{32} \text{tra}^4(\mathbf{T}) - 6\text{tra}(\mathbf{T}^4) + 6\text{tra}(\mathbf{T})\text{tra}(\mathbf{T}^3) - \frac{15}{4} \text{tra}^2(\mathbf{T})\text{tra}(\mathbf{T}^2) + 3\text{tra}^2(\mathbf{T}^2) \right]. \quad (1.17c)$$

Todo polinomio de la forma dada por (1.15) admite la descomposición [4]

$$\begin{aligned} (x^2 + \xi x + \eta)(x^2 - \xi x + \theta) &= 0, \\ x^4 + (\eta + \theta - \xi^2)x^2 + (\theta - \eta)x + \eta\theta &= 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

en el cuerpo de los complejos, donde,

$$m = \eta + \theta - \xi^2, \quad (1.19a)$$

$$n = (\theta - \eta)\xi, \quad (1.19b)$$

$$l = \eta\theta. \quad (1.19c)$$

De (1.19a) y (1.19b) se obtiene,

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \left(m + \xi^2 + \frac{n}{\xi} \right), \\ \eta &= \frac{1}{2} \left(m + \xi^2 - \frac{n}{\xi} \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Dado que el polinomio de cuarto orden admite cuatro raíces, uno puede escribirlo como

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4), \quad (1.21)$$

de manera que la descomposición dada por (1.18) se puede realizar de tres formas diferentes, que corresponden a las tres formas en que se pueden agrupar los monomios de la ecuación (1.21) en parejas. De otra parte, la ecuación (1.19c) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \xi^6 + 2m\xi^4 + (m^2 - 4l)\xi^2 - n^2 &= 0, \\ u^3 + 2mu^2 + (m^2 - 4l)u - n^2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

con $u = \xi^2$, la cual se puede llevar a la forma

$$R(y) = y^3 + py + q = 0, \quad (1.23)$$

a través del cambio de variable $u = y - 2m/3$, y donde

$$p = -\frac{1}{3}(m^2 + 12l), \quad (1.24a)$$

$$q = n^2 - \frac{2}{3}m \left[\left(\frac{2}{3}m \right)^2 + p \right], \quad (1.24b)$$

siguen siendo invariantes.

La ecuación (1.23) es llamada *La Ecuación Resolvente*. Observese que es una ecuación que determina tres soluciones para ξ^2 , correspondientes a las tres maneras de descomponer (1.15) en la forma dada por (1.18). Esta ecuación de tercer grado caracteriza completamente la naturaleza de las raíces de la ecuación de cuarto grado. De ella podemos definir invariantes

que caractericen la naturaleza y multiplicidad de las raíces. Los invariantes a definir son los siguientes:

$$I_1 = I_3^3 - I_4^2, \quad (1.25a)$$

$$I_2 = -4m - \sqrt{|I_3|}, \quad (1.25b)$$

$$I_3 = -12 \left[-\frac{1}{3}(m^2 + 12l) \right], \quad (1.25c)$$

$$I_4 = -108 \left\{ n^2 - \frac{2}{3}m \left[\left(\frac{2}{3}m \right)^2 + p \right] \right\}. \quad (1.25d)$$

El invariante I_1 está asociado al discriminante de la ecuación resolvente; el invariante I_2 , al máximo relativo de la ecuación resolvente; los invariantes I_3 , y I_4 , a los coeficientes p , y q , respectivamente, de la ecuación resolvente.

Utilizando solamente el signo de los invariantes dados por (1.25), y analizando las ecuaciones (1.18) a (1.20), se sigue que de acuerdo al discriminante de la ecuación resolvente, las raíces de (1.15) son diferentes si $I_1 \neq 0$, y son de la misma o distinta naturaleza de acuerdo a $I_1 > 0$ o $I_1 < 0$, respectivamente. Si $I_1 > 0$ entonces $I_2 \neq 0$ y las raíces son reales (resp., complejas) si $I_2 > 0$ (resp., $I_2 < 0$); esto se obtiene directamente de tomar en cuenta que, para $I_3 > 0$, el polinomio (1.23) tiene un máximo relativo para $u = I_2/6$. Cuando $I_1 = 0$, las raíces de (1.23) son [5] $\Phi/6$, $\Phi/6$, y $-2m - \Phi/3$ con Φ dado por

$$\Phi = -4m - \epsilon_4 \sqrt{I_3}, \quad (1.26)$$

donde ϵ_4 es el signo de I_4 . Como las raíces de esta ecuación satisfacen las formulas de Vieta [6], se tiene que

$$\Phi^2(-2m - \Phi/3) = 36n^2, \quad (1.27)$$

y esto conlleva al siguiente lema:

Lema 1. *si $I_1 = 0$ y $\Phi \neq 0$, las raíces de $P(x)$ son $3n/\Phi$, $3n/\Phi$, $-3n/\Phi + \sqrt{\Phi/6}$, y $-3n/\Phi - \sqrt{\Phi/6}$. Si $I_1 = \Phi = 0$, hay dos pares de raíces iguales dadas por $\pm \sqrt{-m/2}$.*

En los casos dados por $I_1 = 0$, se tiene que $I_3 \geq 0$ luego degeneraciones adicionales ocurren cuando I_2 o I_3 se hacen cero. Como $I_2 > 0$ (resp., $I_2 = 0$) implica $\Phi > 0$ (resp., $\Phi = 0$ y $b \geq 0$), del lema anterior sigue que todas las raíces son reales si $I_2 \geq 0$. Así, se tiene (i) una raíz doble si $I_2 > 0$ y $I_3 > 0$, (ii) una raíz triple si $I_2 > 0$ y $I_3 = 0$, (iii) un par de raíces iguales si $I_2 = 0$ y $I_3 > 0$, y (iv) una raíz cuádruple -que puede ser cero- si $I_2 = I_3 = 0$. Además, si $I_2 < 0$ entonces $I_4 \neq 0$, y $\Phi = I_2$ o $\Phi = 0$ según si $I_4 > 0$ o $I_4 < 0$; en el primer caso hay una raíz doble real y un par de complejos conjugados, y en el segundo caso, se tiene dos pares de complejos conjugados.

Los resultados anteriores están resumidos en la tabla (1.2). Además, si en determinada situación se desean conocer las raíces del polinomio, estas se pueden hallar por medio de la ecuación resolvente de tercer grado y la extracción de dos raíces cuadradas.

$I_1 > 0$	$I_2 > 0$	Cuatro raíces reales diferentes
	$I_2 < 0$	Dos pares diferentes de raíces complejos conjugados
$I_1 = 0$	$I_2 > 0$	$I_3 > 0$ Dos raíces reales iguales y dos diferentes
		$I_3 = 0$ Tres raíces reales iguales
	$I_2 = 0$	$I_3 > 0$ Dos pares de raíces de dos reales iguales
		$I_3 = 0$ Cuatro raíces reales iguales
$I_2 < 0$	$I_4 > 0$ Dos raíces reales iguales y un par de complejos conjugados	
	$I_4 < 0$ Dos pares de raíces complejos conjugados iguales	
$I_1 < 0$		Dos raíces reales diferentes y un par de complejos conjugados

Cuadro 1.2: Naturaleza y multiplicidad de las raíces de $P(\lambda)$ en términos de los Invariantes I_i

1.4 Formas Canónicas, Valores y Vectores Propios del Tensor Momento-Energía

Hasta el momento no se han hecho consideraciones sobre el tensor, ni del espacio en el cual reside, luego todas las relaciones antes encontradas aplican a una amplia gama de tensores, los tensores de segundo orden. Desde ahora se considera un tensor simétrico de segundo orden en un espacio-tiempo Lorentziano de cuatro dimensiones y se clasifica siguiendo la notación hecha por Segrè [8]; el tensor es del tipo I, y representado por $\{1, 111\}$, si posee cuatro vectores propios linealmente independientes, donde el dígito separado por la coma representa el valor propio asociado al vector propio tipo tiempo. El tensor es del tipo II, y representado por $\{211\}$, si posee tres vectores propios linealmente independientes. El tensor es del tipo III, y representado por $\{31\}$, si posee dos vectores propios linealmente independientes. Y finalmente, es del tipo IV, y representado por $\{zz^*11\}$, si posee y par de valores propios que son complejos conjugados. Degeneraciones adicionales de los valores propios son representadas encerrando los dígitos entre paréntesis. Considere nuevamente la ecuación (1.1), de ella se deduce que [1]

$$(\lambda_{(i)} - \lambda_{(j)})\xi_{(i)\mu}\xi_{(j)}^\mu = 0 \tag{1.28}$$

donde $\lambda_{(i)}$ es la i -ésima raíz del polinomio característico, y $\xi_{(i)\mu}$ es el vector propio asociado a $\lambda_{(i)}$. De la ecuación (1.28) se observa que los vectores propios asociados a valores propios diferentes, son ortogonales. Además si (1.1) tiene raíces complejas conjugadas, $z_{(i)}$ y $z_{(i)}^*$, sus vectores propios asociados, $\xi_{(i)}^\mu$ y $\xi_{(i)}^{*\mu}$, son complejos conjugados ortogonales, $\xi_{(i)}^\mu\xi_{(i)\mu}^* = 0$. Sean $\xi_{(i)}^\mu$ y $\xi_{(i)}^{*\mu}$ representados de la forma $a_{(i)\mu} \pm ib_{(i)\mu}$ [7]; puesto que dichos vectores están definidos salvo un factor complejo arbitrario, se pueden normalizar mediante la condición $\xi_{(i)}^\mu\xi_{(i)\mu} = \xi_{(i)}^{*\mu}\xi_{(i)\mu}^* = 1$. Dado que los vectores complejos conjugados son ortogonales, se encuentra que

$$a_{(i)\mu}a_{(i)}^\mu = \frac{1}{2}, \quad b_{(i)\mu}b_{(i)}^\mu = -\frac{1}{2}, \tag{1.29}$$

por lo tanto, uno de los vectores debe ser espacial y el otro temporal. Como sólo uno de los vectores puede ser temporal, se sigue de aquí que la ecuación (1.1) no puede tener dos

Polinomio Mínimo				
$I_1 > 0$	$\mathbf{N}^4 + m\mathbf{N}^2 + n\mathbf{N} + l\mathbf{g} = 0$ $\equiv P(\mathbf{N}) = 0$			
$I_1 = 0$	$I_2 > 0, I_3 > 0$	$\mathbf{N}^3 + \frac{3n}{\phi}\mathbf{N}^2 + \left(\frac{9n^2}{\phi} + m\right)\mathbf{N} + \frac{3n}{4}\left(\frac{2m}{\phi} + 1\right)\mathbf{g} = 0$	$P(\mathbf{N}) = 0$	
	$I_2 = 0, I_3 > 0$	$\mathbf{N}^2 + \frac{m}{2}\mathbf{g} = 0$	$\mathbf{N}^3 - \sqrt{-\frac{m}{2}}\epsilon\left(\mathbf{N}^2 + \sqrt{-\frac{m}{2}}\epsilon\mathbf{N} + \frac{m}{2}\mathbf{g}\right) = 0$	
	$I_2 > 0, I_3 = 0$	$\mathbf{N}^2 - \frac{3n}{2n}\mathbf{N} + \frac{m}{2}\mathbf{g} = 0$	$\mathbf{N}^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{3n}{2m}\mathbf{N}^2 - \frac{5}{3}m\mathbf{N} - \frac{3}{4}n\mathbf{g}\right) = 0$	$P(\mathbf{N}) = 0$
	$I_2 = I_3 = 0$	$\mathbf{N} = 0$	$\mathbf{N}^2 = 0$	$\mathbf{N}^3 = 0$
Tipo	I		II	
			III	

Cuadro 1.4: Determinación del tipo algebraico de un tensor simétrico en el espacio-tiempo

Sí $I_1 = I_3 = 0$ y $I_2 > 0$, de (1.26) y el Lemma 1 se tiene

$$m(x) = x^2 - \frac{3n}{2n}x + \frac{m}{2}, \quad (1.33)$$

para el tipo I, y

$$m(x) = x^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{3n}{2m}x^2 - \frac{5}{3}mx - \frac{3}{4}n\right), \quad (1.34)$$

para el tipo II. Evidentemente $m(x) = P(x)$ para el tipo III.

Sí $I_1 = I_2 = I_3 = 0$ se tiene que $m(x) = x$ para el tipo I, $m(x) = x^2$ para el tipo II, y $m(x) = x^3$ para el tipo III. Todas las posibles ecuaciones mínimas, $m(\mathbf{N}) = 0$, son dadas en la tabla (1.4).

Entonces, sea \mathbf{N} un tensor simétrico de segundo rango libre de traza del tipo real. El polinomio mínimo de \mathbf{N} es la primera de las ecuaciones, de izquierda a derecha, que se satisface en la fila de la tabla (1.4) seleccionada por los signos de sus invariantes I_1, I_2, I_3 . El tipo de \mathbf{N} es el indicado en la correspondiente columna.

Una vez conocida la naturaleza y multiplicidad de los valores propios del tensor y conocido el tipo al cual pertenece el tensor, se procede a expresar el tensor de momento-energía en una tétrada construida con los vectores propios del tensor; esta expresión del tensor momento energía es conocida como su forma *canónica*.

Considere un tensor del tipo I. Este caso es el único que es diagonalizable sobre \mathbb{R} y es evidente que la tétrada utilizada para describirlo debe ser la formada por sus vectores propios, $\{\xi_{(i)}^\mu\}$ para $i = 0, 1, 2, 3$. En esta tétrada el tensor tiene la forma

$$\mathbf{T} = (T_{(i)(j)}) = \begin{pmatrix} \lambda_{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

y escrito en componentes

$$T^{\mu\nu} = \lambda_{(0)}\xi_{(0)}^\mu\xi_{(0)}^\nu + \lambda_{(1)}\xi_{(1)}^\mu\xi_{(1)}^\nu + \lambda_{(2)}\xi_{(2)}^\mu\xi_{(2)}^\nu + \lambda_{(3)}\xi_{(3)}^\mu\xi_{(3)}^\nu. \quad (1.36)$$

Ahora, considere un tensor del tipo II. En este caso el tensor tiene un vector nulo que será representado por n^μ , el cual está asociado a los valores propios $\lambda = \lambda_{(0)} = \lambda_{(1)}$; se puede, entonces, elegir el plano $\xi_{(0)}^\mu \xi_{(1)}^\mu$ de manera que el vector nulo esté contenido en él. Como $n^\mu n_\mu = 0$, entonces, $n_{(0)}^\mu = n_{(1)}^\mu$, y en virtud de la ecuación (1.1) tenemos $T_{(1)(1)}^{\mu\nu} + T_{(0)(1)}^{\mu\nu} = \lambda_{(0)}$, $T_{(0)(0)}^{\mu\nu} + T_{(0)(1)}^{\mu\nu} = -\lambda_{(0)}$ de manera que $T_{(1)(1)}^{\mu\nu} = \lambda_{(0)} + \mu$, $T_{(0)(0)}^{\mu\nu} = -\lambda_{(0)} + \mu$, $T_{(0)(1)}^{\mu\nu} = -\mu$, donde μ es una cantidad que no es invariante, sino que cambia en las rotaciones en el plano $\xi_{(0)}^\mu \xi_{(1)}^\mu$. Eligiendo los otros dos ejes en el sentido de los otros dos vectores espaciales, el tensor se reduce a la forma

$$\mathbf{T} = (T_{(i)(j)}) = \begin{pmatrix} -\lambda_{(0)} + \mu & -\mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda_{(0)} + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

y escrito en componentes,

$$T^{\mu\nu} = (-\lambda_{(0)} + \mu)\xi_{(0)}^\mu \xi_{(0)}^\nu + (\lambda_{(0)} + \mu)\xi_{(1)}^\mu \xi_{(1)}^\nu - \mu(\xi_{(0)}^\mu \xi_{(1)}^\nu + \xi_{(0)}^\nu \xi_{(1)}^\mu) + \lambda_{(2)}\xi_{(2)}^\mu \xi_{(2)}^\nu + \lambda_{(3)}\xi_{(3)}^\mu \xi_{(3)}^\nu. \quad (1.38)$$

El procedimiento para encontrar la forma canónica del tensor del tipo III es semejante a la seguida para el tensor del tipo II; en este caso hay tres valores propio iguales asociados a un único vector propio nulo, por tanto éste debe estar contenido en la hipersuperficie $\xi_{(0)}^\mu \xi_{(1)}^\mu \xi_{(2)}^\mu$. Como existen muchas maneras de seleccionar el vector nulo en ésta hipersuperficie, escojamos aquella en la que el vector nulo esté contenido en el plano $\xi_{(0)}^\mu \xi_{(1)}^\mu$. En ésta tétrada el tensor se reduce a la forma

$$\mathbf{T} = (T_{(i)(j)}) = \begin{pmatrix} -\lambda_{(0)} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda_{(0)} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda_{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

y escrito en componentes,

$$T^{\mu\nu} = -\lambda_{(0)}\xi_{(0)}^\mu \xi_{(0)}^\nu + \lambda_{(0)}\xi_{(1)}^\mu \xi_{(1)}^\nu - \xi_{(0)}^\nu \xi_{(1)}^\mu + \xi_{(1)}^\nu \xi_{(0)}^\mu + \lambda_{(0)}\xi_{(2)}^\mu \xi_{(2)}^\nu + \lambda_{(3)}\xi_{(3)}^\mu \xi_{(3)}^\nu. \quad (1.40)$$

El caso complejo, tipo IV, se discutió al inicio de ésta sección. Se hizo notar que el vector complejo se puede expresar como $a_{(i)\mu} \pm ib_{(i)\mu}$, donde $b_{(i)\mu}$ es un vector tipo tiempo y $a_{(i)\mu}$ es un vector tipo espacio. Utilizando como base estos dos vectores junto, con los dos vectores propios asociados a las raíces reales, y representando los valores propios complejos en la forma $\lambda_R \pm \lambda_I$, el tensor se reduce a la forma

$$\mathbf{T} = (T_{(i)(j)}) = \begin{pmatrix} -\lambda_R & \lambda_I & 0 & 0 \\ \lambda_I & \lambda_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

y escrito en componentes se obtiene

$$T^{\mu\nu} = -\lambda_R \xi_{(0)}^\mu \xi_{(0)}^\nu + \lambda_R \xi_{(1)}^\mu \xi_{(1)}^\nu + \lambda_I (\xi_{(0)}^\mu \xi_{(1)}^\nu + \xi_{(0)}^\nu \xi_{(1)}^\mu) + \lambda_{(2)} \xi_{(2)}^\mu \xi_{(2)}^\nu + \lambda_{(3)} \xi_{(3)}^\mu \xi_{(3)}^\nu. \quad (1.42)$$

De esta manera, la caracterización del tensor de momento-energía se completa, dando una descripción de la estructura de los valores y vectores propios, así como sus formas canónicas.

CAPÍTULO 2

Aplicaciones

2.1 Preliminares

En la sección anterior, al trabajar con la estructura algebraica del tensor momento-energía, se encontró una restricción sobre el tensor impuesta por la forma Lorentziana de la métrica: *el tensor momento-energía no puede tener dos pares de valores propios complejos conjugados*. Adicional a esta restricción, existen condiciones que físicamente uno esperaría que el tensor momento-energía las cumpliera. Estas condiciones son conocidas como *Las Condiciones de Energía*.

El capítulo empieza en la sección 2.2 con una breve descripción de cada una de las condiciones de energía y su interpretación física. En la siguiente sección, restricciones adicionales, que determinan la viabilidad de un tensor momento-energía dado, son halladas para cada una de las formas canónicas del tensor descritas en el capítulo anterior. Se muestra brevemente que los tensores del tipo III y IV no satisfacen las condiciones de energía

Finalmente, todo el estudio físico-matemático hecho hasta aquí es utilizado en la sección 2.4 para listar y clasificar algunos tensores de momento-energía estándar en relatividad general. En esta sección también se considera la clasificación algebraica de combinaciones no interactuantes de tensores de energía-momento.

2.2 Las Condiciones de Energía

En el contexto de la relatividad general, es razonable esperar que el tensor de momento-energía satisfaga ciertas condiciones [10], por ejemplo que la densidad de energía sea positiva. Tales requerimientos están contenidos en las condiciones de energía, las cuales se describen a continuación.

2.2.1. Condición Débil de Energía

La condición débil de energía establece que la densidad de energía de cualquier distribución de materia, medida por cualquier observador en el espacio-tiempo, debe ser no-negativa. Dado que un observador con una quadri-velocidad v^μ mide la densidad de energía $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$, se debe tener

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \quad (2.1)$$

para cualquier vector v^μ tipo tiempo dirigido hacia el futuro. Es físicamente razonable pensar que para toda materia, la densidad de energía debe ser no-negativa.

2.2.2. Condición Nula de Energía

La condición nula de energía establece que la densidad de energía de cualquier distribución de materia, medida por cualquier observador nulo, debe ser no-negativa. Así, se debe tener que

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0 \quad (2.2)$$

para cualquier vector nulo k^μ . La condición nula de energía es el caso límite de la condición débil de energía en el sentido que la velocidad del observador tiende a ser la velocidad de la luz.

2.2.3. Condición Fuerte de Energía

La condición fuerte de energía en realidad es una condición sobre el tensor de Ricci. Para entender su significado físico considérese la aproximación de campo débil, en la cual las ecuaciones de campo de Einstein se pueden escribir como [11]

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^\alpha\partial_\alpha\gamma_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T), \quad (2.3)$$

donde $\gamma_{\mu\nu}$ representa una pequeña desviación del espacio-tiempo plano, $\eta_{\mu\nu}$. En el límite Newtoniano existe un sistema de coordenadas inercial global en el cual el tensor de momento-energía puede escribirse como $T_{\mu\nu} = \rho t_\mu t_\nu$, donde t^μ es la “dirección del tiempo” en este sistema

de coordenadas. Entonces, se obtiene para el límite Newtoniano

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2\gamma_{00} = \nabla^2\Phi = 4\pi\rho. \quad (2.4)$$

Luego, la condición fuerte de energía exige, de alguna manera, que la densidad de energía sea no-negativa para que la gravedad sea atractiva. Así, la condición fuerte de energía se puede formular como sigue:

El tensor de momento-energía de cualquier distribución de materia debe satisfacer que, para cualquier vector unitario, temporal dirigido hacia el futuro, v^α ,

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \Rightarrow \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)v^\mu v^\nu \geq 0. \quad (2.5)$$

Sin embargo, en la presencia de fluidos con presión negativa, y magnitud mayor a $\rho/3$, la gravedad no es atractiva y la condición se puede relajar, tal como es el caso de la constante cosmológica.

2.2.4. Condición Dominante de Energía

La cantidad $-T_\nu^\mu v^\nu$ es la densidad de momento de materia medida por un observador con cuadri-velocidad v^μ , y es razonable esperar que ésta densidad sea un vector campo tipo-tiempo o nulo. Luego, la condición dominante de energía establece que si v^μ es un vector tipo-tiempo arbitrario dirigido hacia el futuro, entonces

$$-T_\nu^\mu v^\nu \text{ es un vector campo tipo-tiempo o nulo, dirigido hacia el futuro.} \quad (2.6)$$

2.3 Aplicación de las Condiciones de Energía a las formas Canónicas

En esta sección se aplican las condiciones de energía, descritas en la sección anterior, a cada una de las formas canónicas del tensor momento-energía, encontrando restricciones adicionales que dictan la viabilidad o no del tensor dado.

Para aplicar las condiciones de energía permitamos que v^μ represente la cuadri-velocidad de un observador arbitrario en el espacio-tiempo,

$$v^\mu = \gamma(\xi_{(0)}^\mu + a_{(1)}\xi_{(1)}^\mu + a_{(2)}\xi_{(2)}^\mu + a_{(3)}\xi_{(3)}^\mu), \quad \gamma = (1 - a_{(1)}^2 - a_{(2)}^2 - a_{(3)}^2)^{-1/2}, \quad (2.7)$$

donde $a_{(i)}$ son las componentes de la 3-velocidad, y está restringida por $a_{(1)}^2 + a_{(2)}^2 + a_{(3)}^2 < 1$, además, $1 \leq \gamma < +\infty$.

También será necesario un vector nulo arbitrario dirigido hacia el futuro, k^μ , el cual puede ser expresado como

$$k^\mu = \xi_{(0)}^\mu + a'_{(1)}\xi_{(1)}^\mu + a'_{(2)}\xi_{(2)}^\mu + a'_{(3)}\xi_{(3)}^\mu, \quad (2.8)$$

donde $a'_{(i)}$ son funciones arbitrarias de las coordenadas, restringidas por $a'_{(1)}{}^2 + a'_{(2)}{}^2 + a'_{(3)}{}^2 = 1$.

2.3.1. Tensor Tipo I

Recordemos que el tensor del tipo I puede ser escrito en la forma

$$T^{\mu\nu} = \rho\xi_{(0)}^\mu\xi_{(0)}^\nu + p_1\xi_{(1)}^\mu\xi_{(1)}^\nu + p_2\xi_{(2)}^\mu\xi_{(2)}^\nu + p_3\xi_{(3)}^\mu\xi_{(3)}^\nu. \quad (2.9)$$

- Entonces, reemplazando (2.7) y (2.9) en la condición débil de energía se tiene que

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = \rho\gamma^2 + A_{(i)}^2 p_{(i)} \geq 0, \quad (2.10)$$

con $A_{(i)} = \gamma a_{(i)}$ y $-\infty < A_{(i)} < +\infty$. Entonces utilizando la condición de normalización del vector velocidad del observador, $v^\mu v_\mu = -\gamma^2 + A_{(i)}A_{(i)} = -1$, se encuentra que

$$\rho + (\rho + p_{(1)})A_{(1)} + (\rho + p_{(2)})A_{(2)} + (\rho + p_{(3)})A_{(3)} \geq 0, \quad (2.11)$$

de donde se concluye que

$$\rho \geq 0 \quad \rho + p_{(i)} \geq 0. \quad (2.12)$$

- Si siguiendo el mismo procedimiento para la condición nula de energía se obtiene

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = \gamma^2(\rho + a'_{(i)}{}^2 p_{(i)}) \geq 0. \quad (2.13)$$

Escogiendo $a'_{(2)} = a'_{(3)} = 0$ y por tanto $a'_{(1)} = 1$, se concluye que $\rho + p_{(1)} \geq 0$, con expresiones similares para $p_{(2)}$ y $p_{(3)}$. La condición nula de energía por consiguiente implica

$$\rho + p_{(i)} \geq 0. \quad (2.14)$$

- Para la condición fuerte de energía tenemos

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = \gamma^2(\rho + a_{(1)}^2 p_{(1)} + a_{(2)}^2 p_{(2)} + a_{(3)}^2 p_{(3)}) \geq -\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}(\rho - p_{(1)} - p_{(2)} - p_{(3)}). \quad (2.15)$$

Escogiendo $a_{(1)} = a_{(2)} = a_{(3)} = 0$ por lo tanto $\gamma = 1$, se concluye que $\rho + p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)} \geq 0$. De igual manera, escogiendo $a_{(2)} = a_{(3)} = 0$ implica $\gamma^2 = 1/(1 - a_{(1)}^2)$, y después de un poco de álgebra simple se obtiene $\rho + p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)} \geq a_{(1)}^2(-\rho - p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)})$. Dado que $a_{(1)}^2 < 1$ uno obtiene $\rho + p_{(1)} \geq 0$, con relaciones similares para $p_{(2)}$ y $p_{(3)}$. La condición fuerte de energía por consiguiente implica

$$\rho + p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)} \geq 0, \quad \rho + p_{(i)} \geq 0. \quad (2.16)$$

- Para la condición dominante de energía tenemos

$$-T_{\nu}^{\mu}T_{\mu\sigma}v^{\nu}v^{\sigma} = \gamma^2(\rho^2 - a_{(1)}^2p_{(1)}^2 - a_{(2)}^2p_{(2)}^2 - a_{(3)}^2p_{(3)}^2) \geq 0. \quad (2.17)$$

Escogiendo $a_{(1)} = a_{(2)} = a_{(3)} = 0$ obtenemos $\rho^2 \geq 0$, y dado que $-T_{\nu}^{\mu}v^{\nu}$ debe estar dirigido hacia el futuro se selecciona la raíz positiva: $\rho \geq 0$. De igual manera, escogiendo $a_{(2)} = a_{(3)} = 0$ da $\rho^2 \geq a_{(1)}^2p_{(1)}^2$. Dado que $a_{(1)}^2 < 1$ uno obtiene $\rho \geq |p_{(1)}|$, habiendo tomado la dirección futura para $-T_{\nu}^{\mu}v^{\nu}$. Relaciones similares se mantienen para $p_{(2)}$ y $p_{(3)}$. Entonces, la condición dominante de energía implica

$$\rho \geq 0, \quad \rho \geq |p_{(i)}|. \quad (2.18)$$

2.3.2. Tensor Tipo II

El tensor del tipo II tiene la forma

$$T^{\mu\nu} = \rho\xi_{(0)}^{\mu}\xi_{(0)}^{\nu} + p_{(1)}\xi_{(1)}^{\mu}\xi_{(1)}^{\nu} - \mu(\xi_{(0)}^{\mu}\xi_{(1)}^{\nu} + \xi_{(0)}^{\nu}\xi_{(1)}^{\mu}) + p_{(2)}\xi_{(2)}^{\mu}\xi_{(2)}^{\nu} + p_{(3)}\xi_{(3)}^{\mu}\xi_{(3)}^{\nu}, \quad (2.19)$$

con $\rho + p_{(1)} = 2\mu$.

- La condición débil de energía establece que

$$T_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} = \gamma^2[\rho + a_{(i)}^2p_{(i)} + (\rho + p_{(1)})a_{(1)}] \geq 0. \quad (2.20)$$

Escogiendo $a_{(1)} = a_{(2)} = a_{(3)} = 0$ tenemos $\rho \geq 0$. De igual manera, haciendo $a_{(2)} = a_{(3)} = 0$ se tiene $\rho + a_{(1)}^2p_{(1)} + (\rho + p_{(1)})a_{(1)} \geq 0$, pero dado que $a_{(1)}^2 < 1$ se concluye que $\rho + p_{(1)} \geq 0$, con expresiones similares para $p_{(2)}$ y $p_{(3)}$. Entonces, la condición débil de energía implica

$$\rho \geq 0, \quad \rho + p_{(i)} \geq 0, \quad \mu > 0. \quad (2.21)$$

- La condición nula de energía establece que

$$T_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} = \gamma^2[\rho + a_{(i)}^2p_{(i)} + (\rho + p_{(1)})a'_{(1)}] \geq 0. \quad (2.22)$$

Escogiendo $a'_{(2)} = a'_{(3)} = 0$ y por tanto $a'_{(1)} = 1$, se concluye que $\rho + p_{(1)} \geq 0$, con expresiones similares para $p_{(2)}$ y $p_{(3)}$. La condición nula de energía por consiguiente implica

$$\rho + p_{(i)} \geq 0. \quad (2.23)$$

- Para la condición fuerte de energía tenemos

$$T_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} = \gamma^2[\rho + a_{(1)}^2p_{(1)} + a_{(2)}^2p_{(2)} + a_{(3)}^2p_{(3)} + (\rho + p_{(1)})a_{(1)}] \geq \frac{1}{2}(\rho - p_{(1)} - p_{(2)} - p_{(3)}). \quad (2.24)$$

Escogiendo $a_{(1)} = a_{(2)} = a_{(3)} = 0$ por lo tanto $\gamma = 1$, se concluye que $\rho + p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)} \geq 0$. De igual manera, escogiendo $a_{(2)} = a_{(3)} = 0$ implica $\gamma^2 = 1/(1 - a_{(1)}^2)$, y así se obtiene

$\rho + p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)} + 2(\rho + p_{(1)})a_{(1)} \geq a_{(1)}^2(-\rho - p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)})$. Dado que $a_{(1)}^2 < 1$ uno obtiene $\rho + p_{(1)} \geq 0$, con relaciones similares para $p_{(2)}$ y $p_{(3)}$. La condición fuerte de energía por consiguiente implica

$$\rho + p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)} \geq 0, \quad \rho + p_{(i)} \geq 0, \quad \mu > 0. \quad (2.25)$$

- Para la condición dominante de energía tenemos

$$(\rho + a_{(1)}\mu)^2 - (\mu + a_{(1)}p_{(1)})^2 - a_{(2)}^2p_{(2)}^2 - a_{(3)}^2p_{(3)}^2 \geq 0. \quad (2.26)$$

Escogiendo $a_{(2)} = a_{(3)} = 0$ obtenemos $(\rho + a_{(1)}\mu)^2 - (\mu + a_{(1)}p_{(1)})^2 \geq 0$, de la cual se deduce que $\rho \geq 0$ y $\rho \geq |p_{(1)}|$. De igual manera, escogiendo $a_{(1)} = a_{(3)} = 0$ da $\rho^2 - \mu^2 \geq a_{(2)}^2p_{(2)}^2$ de la que se concluye $\rho \geq |p_{(2)}|$, habiendo tomado la dirección futura para $-T_v^\mu v^\nu$. La Relación similar se mantiene para $p_{(3)}$. Entonces, la condición dominante de energía implica

$$\rho \geq 0, \quad \rho \geq |p_{(i)}|. \quad (2.27)$$

2.3.3. Tensores del Tipo III y IV

Este tipo de tensores no satisfacen las condiciones de energía. Para ilustrarlo, considere la condición débil de energía sobre el tensor tipo III, escrito de la siguiente manera,

$$T^{\mu\nu} = -\lambda_{(0)}\xi_{(0)}^\mu\xi_{(0)}^\nu + \lambda_{(0)}\xi_{(1)}^\mu\xi_{(1)}^\nu - \xi_{(0)}^\nu\xi_{(2)}^\mu + \xi_{(1)}^\nu\xi_{(2)}^\mu + \lambda_{(0)}\xi_{(2)}^\mu\xi_{(2)}^\nu + \lambda_{(3)}\xi_{(3)}^\mu\xi_{(3)}^\nu. \quad (2.28)$$

Realizando un cálculo similar al seguido para los tensores tipo I y II, se encuentra que

$$-\lambda_{(0)} + 2\gamma A_{(2)} + 2A_{(1)}A_{(2)} + (\lambda_{(3)} - \lambda_{(0)})A_{(3)}^2 \geq 0. \quad (2.29)$$

Siempre se puede conseguir un observador para el cual (2.29) no se cumpla, sin importar los valores de $\lambda_{(0)}$ y $\lambda_{(3)}$. Por ejemplo, como $-\infty < A_{(i)} < +\infty$ entonces, el término $2A_{(1)}A_{(2)}$ se puede hacer tan negativo como se desee, de tal forma que bajo ninguna restricción sobre los valores propios es posible satisfacer (2.29).

De la misma manera se procede con el tensor tipo IV y se encuentra que éste tampoco satisface las condiciones de energía.

2.4 Ejemplos de Tensores Momento-Energía

Ahora consideremos algunos casos de tensores de momento-energía en relatividad general sujetos a las condiciones de energía débil y dominante. En ocasiones, una tétrada nula simplifica considerablemente las expresiones, más tratándose con problemas de radiación. Por eso las formas canónicas del tipo I y II son reescritas en la siguiente tétrada nula real,

$$n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_{(0)}^\mu + \xi_{(1)}^\mu), \quad l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_{(1)}^\mu - \xi_{(0)}^\mu), \quad x^\mu = \xi_{(2)}^\mu, \quad y^\mu = \xi_{(3)}^\mu, \quad (2.30)$$

de tal forma que los únicos productos diferentes de cero son $l^\mu n_\mu = x^\mu x_\mu = y^\mu y_\mu = 1$. En esta tétrada las formas canónicas del tipo I y II son respectivamente,

$$T_{\mu\nu} = 2\sigma_0 l_{(\mu} n_{\nu)} + \sigma_1 (l_\mu l_\nu + n_\mu n_\nu) + \sigma_2 x_\mu x_\nu + \sigma_3 y_\mu y_\nu, \quad (2.31)$$

$$T_{\mu\nu} = 2\sigma_1 l_{(\mu} n_{\nu)} + \lambda l_\mu l_\nu + \sigma_2 x_\mu x_\nu + \sigma_3 y_\mu y_\nu. \quad (2.32)$$

donde los invariantes σ_i cumplen las siguientes desigualdades: $\sigma_0 \leq 0$, $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_a \leq |\sigma_1 - \sigma_0|$ ($a = 2, 3$) para (2.31) y $\sigma_1 \leq 0$, $\sigma_a \leq -|\sigma_1|$ ($a = 2, 3$) y $\lambda > 0$ para (2.32).

Además los invariantes σ_i están relacionados a las raíces del polinomio característico por las expresiones

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(\lambda_{(1)} - \lambda_{(0)}), \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}(\lambda_{(0)} + \lambda_{(1)}), \quad \sigma_2 = \lambda_{(2)}, \quad \sigma_3 = \lambda_{(3)}, \quad (2.33)$$

para tensores del tipo I, y

$$\sigma_0 = \lambda_{(0)}, \quad \sigma_1 = \mu, \quad \sigma_2 = \lambda_{(2)}, \quad \sigma_3 = \lambda_{(3)}, \quad (2.34)$$

para tensores del tipo II.

Ahora consideremos algunos casos de tensores de momento-energía en relatividad general sujetos a las condiciones de energía débil y dominante.

2.4.1. Tensor de Campo Electromagnético

La estructura algebraica del tensor de momento-energía del campo electromagnético es bastante conocida [12]. Se tiene

$$T_{\mu\nu} = \nu l_\mu l_\nu \quad (\text{Caso nulo}) \quad (2.35)$$

$$T_{\mu\nu} = \mu(2l_{(\mu} n_{\nu)} - x_\mu x_\nu - y_\mu y_\nu) \quad (\text{Caso no-nulo}). \quad (2.36)$$

En el caso nulo (también llamado campo de radiación) se tiene una dirección nula principal repetida y por comparación con (2.32) el tensor es del tipo $\{(211)\}$, con valor propio iguales a cero. Además, de las condiciones de energía $\nu > 0$.

El tipo de Segrè para el caso no-nulo es, por comparación con (2.31), $\{(1, 1)(11)\}$, con valores propios μ , y $-\mu$. Las condiciones de energía establecen que $\mu > 0$.

2.4.2. Tensor de un Fluido de Polvo

En este caso el tensor de momento-energía se escribe como

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \quad (2.37)$$

Claramente este tensor es del tipo $\{1, (111)\}$, con valores propios $-\rho$, y cero, y vector propio temporal u^μ . Adicionalmente las condiciones de energía indican que debemos tener $\rho > 0$.

2.4.3. Tensor de un Fluido Perfecto

El tensor de momento-energía para un fluido perfecto está dado por la expresión

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (2.38)$$

Una vez más este tensor pertenece al tipo I, $\{1, (111)\}$, con valores propios $-\rho$ y p . Además, si se satisfacen las condiciones de energía, debemos tener $\rho \geq 0$ y $\rho \geq |p|$.

2.4.4. Tensor de un Fluido Isótropo con Flujo de Calor

En este caso, el tensor de momento-energía del fluido es

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} + 2u_{(\mu}q_{\nu)}, \quad (2.39)$$

donde $u^\mu q_\mu = 0$. En este caso se observa que u^μ no es un vector propio de $T_{\mu\nu}$, pero con q^μ generan un espacio de dos dimensiones, una temporal y la otra espacial. El espacio ortogonal al generado por u^μ y q^μ es tipo-espacio y contiene los otros dos vectores propios de $T_{\mu\nu}$ con valores propios iguales a p . Ahora considere un vector unitario tipo-espacio paralelo a q^μ , llamado z^μ , así que $q^\mu = qz^\mu$ [$q = (q^\mu q_\mu)^{1/2} > 0$]. Introduzcamos una tétrada nula (l', nx, y) con $\sqrt{2}l'^\mu = z^\mu + u^\mu$ y $\sqrt{2}n'^\mu = z^\mu - u^\mu$. Entonces, (2.39) da

$$T_{\mu\nu} = \left[\frac{1}{2}(\rho + p) + q \right] l'_\mu l'_\nu + \left[\frac{1}{2}(\rho + p) - q \right] n'_\mu n'_\nu + (p - \rho) l'_{(\mu} n'_{\nu)} + p(x_\mu x_\nu + y_\mu y_\nu). \quad (2.40)$$

Existen tres posibilidades:

a. $(\rho + p)^2 < 4q^2$. Esto es equivalente a escribir $\rho + p - 2q < 0 < \rho + p + 2q$. Un reescalamiento de l' y n' puede ser usado para llevar (2.40) a la forma del tensor tipo IV en una tétrada nula. Por las condiciones de energía éste caso no se debe presentar.

b. $(\rho + p)^2 = 4q^2$. La condición de energía dominante y la condición $\rho \geq 0$ muestra que se debe tener $\rho + p - 2q = 0$. Ecuación (2.40) muestra que el tipo de Segrè es $\{2(11)\}$ con correspondientes valores propios $\frac{1}{2}(p - \rho)$ y p . Las condiciones de energía implican $\rho \geq |p|$ y $\rho \geq 0$.

c. $(\rho + p)^2 > 4q^2$. En este caso la condición de energía dominante implica $p + \rho \pm 2q > 0$. Luego haciendo un reescalamiento de l' y n' se puede llevar la ecuación (2.40) a la forma dada por (2.31), por lo tanto el tipo de Segrè es $\{1, 1(11)\}$. Los valores propios están dados por $-\rho + \epsilon$, $p - \epsilon$, p y p , donde

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\rho + p) - \frac{1}{2}[(\rho + p)^2 - 4q^2]^{1/2} > 0. \quad (2.41)$$

Las condiciones de energía implican $\epsilon \leq \rho - p$.

2.4.5. Combinación de Dos Campos de Radiación

Llamemos l' y n' las direcciones nulas de estos campos las cuales no son paralelas. Entonces el tensor de energía momento se puede escribir como

$$T_{\mu\nu} = \nu_1 l'_\mu l'_\nu + \nu_2 n'_\mu n'_\nu. \quad (2.42)$$

Debido a las condiciones de energía uno tiene que $\nu_1 > 0$ y $\nu_2 > 0$. Así, se puede seguir un procedimiento similar al seguido para el fluido con flujo de calor. Un reescalamiento de l' y n' nos lleva el tensor a la forma $\{1, 1(11)\}$ con valores propios $-(\nu_1\nu_2)^{1/2}$, $(\nu_1\nu_2)^{1/2}$, 0 , 0 .

Este ejemplo ilustra un resultado importante: La combinación no interactuante de dos tensores de un mismo tipo de Segrè determinado, no necesariamente pertenece al mismo tipo de Segrè.

2.4.6. Combinación de Dos Fluidos Perfectos No-Interactuantes

Considérese la combinación no interactuante de dos fluidos perfectos con vectores de flujo u^μ y v^μ no-paralelos. Dado que los fluidos son no interactuantes, ellos deben cumplir las condiciones de energía por separado. Si los fluidos tienen densidades p_1 , y p_2 , y densidades ρ_1 , y ρ_2 , se tiene

$$T_{\mu\nu} = (\rho_1 + p_1)u_\mu u_\nu + (\rho_2 + p_2)v_\mu v_\nu + (p_1 + p_2)g_{\mu\nu}. \quad (2.43)$$

Se escogen vectores nulos l' y n' en el espacio generado por u y v tal que $\sqrt{2}u^\mu = l'^\mu - n'^\mu$ y v^μ expresado en términos de l' y n' . Sustituyendo en el tensor y reescalando l' y n' se obtiene la forma $\{1, 1(11)\}$ con valores propios correspondientes a $-(\rho_1 + \rho_2) - \epsilon$, $p_1 + p_2 + \epsilon$, $p_1 + p_2$, y $p_1 + p_2$, con

$$2\epsilon = -(\rho_1 + \rho_2 + p_1 + p_2) + \{(p_1 + p_2 + \rho_1 + \rho_2)^2 - 4(p_1 + \rho_1)(p_2 + \rho_2)[1 - (u_\mu v^\mu)^2]\}^{1/2}, \quad (2.44)$$

así $\epsilon > 0$.

2.4.7. Combinación de un Campo de Radiación y un Fluido Perfecto No-Interactuantes

En este caso se tiene

$$T_{\mu\nu} = \nu l'_\mu l'_\nu + (p + \rho)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (2.45)$$

Como en el caso anterior, tanto el campo de radiación como el fluido deben cumplir las condiciones de energía por separado. Los vectores flujo del fluido y la dirección nula l' determinan un espacio de dos dimensiones y por lo tanto otro vector nulo n' distinto de l' . Los vectores

l' y n' son escogidos y escalados tal que $\sqrt{2}w^\mu = l'^\mu - n'^\mu$. Un nuevo escalamiento lleva al tensor a la forma $\{1, 1(11)\}$, con valores propios $-\rho - \epsilon$, $p + \epsilon$, p y p , donde

$$2\epsilon = -(p + \rho) + [(p + \rho)^2 + 2\nu(p + \rho)]^{1/2} > 0. \quad (2.46)$$

Conclusiones

Este trabajo presenta un método para el estudio y clasificación algebraica del tensor de momento-energía. Se observó que la métrica Lorentziana impone restricciones sobre el tensor, para que este sea físicamente viable. Un tensor simétrico de segundo orden que represente una cantidad física en un espacio Lorentziano no puede poseer un par de valores propios complejos conjugados, por que éste no posee un único vector tipo tiempo.

De otra parte, el polinomio característico del tensor permite determinar la naturaleza y multiplicidad de los valores propios asociados al tensor, pero este no permite hallar el número de vectores propios linealmente independientes. Para determinar el número de vectores propios linealmente es necesario recurrir al polinomio mínimo. Entonces, entre el polinomio característico y el polinomio mínimo se puede caracterizar el tensor simétrico de segundo orden. así los tipos de Segre y sus degeneraciones son obtenidos.

No en todos los casos es posibles utilizar los vectores propios como base para describir el tensor. El caso complejo tiene vectores propios complejos que no son utilizados como vectores base. Sin embargo, es posible utilizarlos para formar una tétrada en la cual el tensor tiene una forma más simple, la forma canónica. Esto mismo sucede cuando el tensor presenta vectores propios nulos.

Se estudió el significado físico de las condiciones de energía y se observó como éstas excluyen la posibilidad de tener tensores del tipo III y IV. Respecto a los tensores del tipo I y II, las condiciones de energía imponen restricciones sobre los valores propios del tensor para que dicho tensor pueda representar un tensor de momento-energía.

Varios tensores estándar en relatividad general, como el de un fluido, o como el de el campo electromagnético, fueron listados y clasificados según el método desarrollado en este trabajo. En el caso de combinaciones de tensores de momento-energía no interactuantes, se observó que no necesariamente el tipo de Segre al cual pertenecen cada uno de los tensores se mantiene para el tensor combinado.

El estudio algebraico del tensor de momento-energía aporta conocimiento de las cantidades físicas que el tensor representa. Es un método extremadamente útil para identificar tensores de momento-energía desconocidos con tensores conocidos o con combinaciones de éstos.

A priori, se podría pensar que cualquier tensor simétrico de segundo orden puede representar un tensor de momento-energía, sin embargo, entre la clasificación algebraica del tensor y las condiciones de energía se limita enormemente la amplia gama de tensores que son físicamente viables.

Bibliografía

- [1] S. I. Grossman, *Algebra Lineal*. Grupo Editorial Iberoamericana. (1988).
- [2] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press. Third edition (1985).
- [3] José M. M. Senovilla and Raul Vera, *Segre decomposition of spacetimes*, *arXiv:gr-qc/9902035*. (1999).
- [4] A. Lentin, *Álgebra Moderna*. Aguilar. (1971).
- [5] M. R. Spiegel, *Handbook of Mathematical Formulas*. Rensselaer Polytechnic Institute. (1968).
- [6] The MathWorld, <http://mathworld.wolfram.com/QuadraticEquation.html>.
- [7] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Teoría Clásica de Campos*. Reverté. (1966).
- [8] G. S. Hall, D. A. Negm, *Physical Structure of the Energy-Momentum Tensor in General Relativity*. International Journal of Theoretical Physics, Vol 25, No. 4, 405. (1986).
- [9] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*. Prentice-Hall. (1971).
- [10] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit*. Cambridge University Press. (2004).
- [11] R. M. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press. (1984).
- [12] H. P. Robertson and T. W. Noonan, *Relativity and Cosmology*. W. B. Saunders Company. (1969).