GRADUACIONES EN ÁLGEBRAS DE CAMINO DE LEAVITT

Laura Natalia Orozco García

Trabajo de Grado para optar al título Magíster en Matemáticas

Director

Héctor Edonis Pinedo Tapia

Doctor en ciencias

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2022

Dedicatoria

A Dios, mi familia y Joan...

Agradecimientos

Son muchas las personas que han contribuido al proceso y conclusión de este trabajo. En primer lugar, quiero agradecer al profesor Héctor Pinedo, director de esta tesis y mi maestro desde hace un varios de años, por su apoyo, dedicación y paciencia ya que gracias a sus conocimientos y correcciones pude culminar este trabajo. Además, quiero agradecer especialmente al profesor Daniel Gonçalves quien contribuyó con sus conocimientos e ideas al desarrollo de la última sección de este trabajo.

Quiero agradecer también a mis padres quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir un sueño más. A mi hermana por su cariño y apoyo incondicional y finalmente a toda mi familia porque con sus oraciones, consejos y palabras de aliento hicieron de mi una mejor persona y de una u otra forma me acompañan en todos mis sueños y metas.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Resumen

Título: GRADUACIONES EN ÁLGEBRAS DE CAMINO DE LEAVITT *

Autor: LAURA NATALIA OROZCO GARCÍA **

Palabras Clave: Álgebras de camino de Leavitt, Anillos graduados, Anillos fuertemente graduados y Anillos de grupo torcido parcial.

Descripción: Este trabajo consiste en estudiar las graduaciones del álgebra de camino de Leavitt, en particular nos centraremos en la $\mathbb{Z}-$graduación canónica y la $G-$graduación canónica con G un grupo arbitrario y también en la $\mathbb{F}-$graduación donde $\mathbb{F}$ es el grupo libre generado por las aristas del grafo, la cual es inducida por el isomorfismo entre las álgebras de camino de Leavitt y cierto anillo de grupo torcido. El objetivo de este trabajo es ver cuando una graduación en estas álgebras es fuertemente graduada, épsilon fuertemente graduada o un producto cruzado por una acción parcial, además de estudiar propiedades de la $\mathbb{F}-$graduación basados en resultados ya existentes para la $\mathbb{Z}-$graduación canónica.

En los dos primeros capítulos mencionamos algo de historia de las álgebras de camino de Leavitt y los conceptos básicos de estas, los cuales serán de utilidad a lo largo de este trabajo. En el capítulo siguiente estudiamos las graduaciones canónicas, en particular, cuando la $\mathbb{Z}-$graduación es una fuerte graduación y cuando la $G-$graduación hace al álgebra de camino de Leavitt épsilon fuertemente graduada. En el tercer capítulo vamos a construir el puente entre las álgebras de camino de Leavitt y los anillos de grupo torcido, además de estudiar algunas aplicaciones de esta interacción. Para finalizar, en el último capítulo mostraremos algunos resultados propios del estudio de la $\mathbb{F}-$graduación, a saber,

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Ciencias.

cuando esta graduación hace a $L_K(E)$ fuertemente graduada, clean graduada y unit-regular graduada, por otro lado, también presentaremos una prueba alternativa al isomorfismo entre $L_K(E)$ y otro anillo de grupo torcido.

Abstract

Title: GRADATIONS ON LEAVITT PATH ALGEBRAS *

Author: LAURA NATALIA OROZCO GARCÍA **

Keywords: Leavitt path algebras, Graded rings, Strongly graded rings and Partial skew group rings.

Description: This work consists of studying gradations on Leavitt path algebras, in particular we will focus on the canonical $\mathbb{Z}-$gradation and the canonical $G-$gradation with G an arbitrary group and also on a particular $\mathbb{F}-$gradation, where $\mathbb{F}$ is the free group on the edges of the graph, which is induced by the isomorphism between the Leavitt path algebras and a certain partial skew group ring. The main objectives of this project are to see when a gradation in this algebras is either strongly graded, or epsilon-strongly graded, or a crossed product by a partial action, as well as to study properties of the $\mathbb{F}-$gradation based on already existing results for the canonical $\mathbb{Z}-$gradation.

In the first two chapters we will mention some of the history of Leavitt path algebras and their basic concepts, which will be useful throughout this work. In the next chapter we study the canonical gradations, in particular, when the $\mathbb{Z}-$gradation is strong gradation and when the $G-$gradation makes the Leavitt path algebra epsilon strongly graded. In the third chapter we build the bridge between Leavitt path algebras and partial skew group rings, as well as study some applications of this interaction. Finally, in the last chapter we will show some results of the study of the $\mathbb{F}-$gradation, namely, when this graduation makes $L_K(E)$ strongly graded, graded clean and graded unit-regular, we also present an alternative proof of the isomorphism between $L_K(E)$ and another partial skew group ring.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Ciencias.

Introducción

Las álgebras de camino de Leavitt fueron desarrolladas inicialmente en 2004 por Ara, Moreno y Pardo (ver Abrams and Pino (2005)), y casi simultáneamente (con un enfoque diferente) por Gene Abrams y Aranda Pino (ver Ara et al. (2007)). Desde su desarrollo estas álgebras se han convertido en un tema común dentro del álgebra moderna en la interfaz entre la teoría de anillos y el álgebra de operadores.

Por otra parte, los anillos graduados juegan un papel importante en la geometría algebraica y además son de gran incidencia en el álgebra conmutativa. Entre los anillos graduados se destaca una clase especial que son los anillos fuertemente graduados y una generalización de estos son los anillos épsilon fuertemente graduados los cuales fueron introducidos recientemente por Nystedt, Öinert y Pinedo (ver Nystedt et al. (2018b)) y actualmente su tema de estudio es cada vez mayor.

Como mencionaremos en el Capítulo 3, cada álgebra de camino de Levitt viene equipada con una $\mathbb{Z}$-graduación natural y existen múltiples ejemplos de cuando la estructura graduada ha sido utilizada para el estudio de las propiedades estructurales de estas álgebras. Sin embargo, sólo hay unos pocos resultados sobre el estudio de la $\mathbb{Z}$-graduación en sí. En este trabajo vamos a revisar algunos de los resultados conocidos del estudio de la $\mathbb{Z}$-graduación del álgebra de camino de Leavitt y más generalmente, estudiaremos algunos resultados del estudio de la G-graduación natural que tienen estas álgebras, siendo G un grupo arbitrario.

Otro de nuestros objetivos es estudiar la conexión entre la teoría de las álgebras de camino de Leavitt con otro concepto clave que surge de la teoría de las álgebras de operadores, a saber, anillos de grupo torcido parcial (o simplemente anillos de grupo torcido, según la literatura), estos anillos fueron introducidos por Ruy Exel y Mikhailo Dokuchaev como análogos algebraicos de C^* productos cruzados parciales (ver Dokuchaev and Exel (2005a)). Para ilustrar mejor cómo la interacción entre las teorías de las álgebras de camino de Leavitt y los anillos de grupo torcido parcial puede ser fructífera, se estudiará una nueva demostración del Teorema de unicidad de Cuntz-Kriger (ver Teorema 4.3.3) basado solo en la teoría de los anillos de grupo torcido parcial y además, se estudiará una caracterización del álgebra de camino de Leavitt artiniana (ver Teorema 4.3.13) en cuya prueba se usa también teoría de anillos de grupo torcido.

1. Preliminares

En este primer capítulo mencionaremos definiciones, ejemplos y resultados que serán la base para desarrollar y comprender los capítulos posteriores, adicionalmente en este capítulo a menos que se indique lo contrario R denotará a un anillo asociativo con unidad y K un cuerpo.

1.1. Grafos

Comenzaremos estableciendo las nociones y resultados necesarios de la teoría de grafos.

Definición 1.1.1. *Un grafo (dirigido) es una cuádrupla* $E = (E^0, E^1, r, s)$ *dada por:*

- *Un conjunto* E^0 *cuyos elementos son llamados vértices;*
- *Un conjunto* E^1 *cuyos elementos son llamados aristas;*
- *Dos funciones* $r, s : E^1 \to E^0$.

Para este trabajo vamos a considerar a los conjuntos E^1 y E^0 con cardinal a lo más infinito numerable. Además, en todo momento la palabra grafo indicará un grafo dirigido.

Observación 1. Dada una arista e, diremos que e comienza en el vértice $s(e)$ y termina en el vértice $r(e)$. Lo indicaremos como $s(e) \xrightarrow{e} r(e)$.

Continuamos con las definiciones que surgen a partir de un grafo E: Si $s^{-1}(v)$ es finito para todo $v \in E^0$, decimos que el grafo E es **row finite**. Un vértice $v \in E^0$ es llamado un **sink** si $s^{-1}(v) = \emptyset$ mientras que un vértice v para el cual $r^{-1}(v) = \emptyset$ es llamado un **source**. Un vértice que es sink y source al mismo tiempo es llamado **aislado**. Un vértice v tal que $|s(v)|$ es infinito es llamado un **emisor infinito**. Si v es un sink o un emisor infinito v es llamado un **vértice singular**, caso contrario v es un **vértice regular**. El grafo E se dice finito si E^0 y E^1 son finitos. Las expresiones Sink(E), Source(E), Reg(E) e Inf(E) se utilizarán para denotar, respectivamente, los conjuntos de sinks, sources, vértices regulares y emisores infinitos de E.

Definición 1.1.2. *Un camino μ de un grafo E es una sucesión de aristas $\mu = e_1e_2\cdots e_n$ tales que $r(e_i) = s(e_{i+1})$ para $i = 1,2,\cdots,n-1$. En este caso $s(\mu) = e_1$ es el source de μ y $r(\mu) = e_n$ es el rango de μ y $n = |\mu|$ es la longitud del camino μ.*

Definición 1.1.3. *Dado $\mu = e_1e_2e_3\cdots$ un camino finito o infinito en un grafo E, decimos que μ' es un subcamino inicial de μ si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu' = e_1e_2\cdots e_n$.*

Observación 2.

- Los vértices de E serán considerados como caminos de longitud 0.
- Podemos extender las funciones s y r a E^0 definiendo $s(v) = r(v) = v$.
- Para cada $n \geq 2$ llamamos E^n al conjunto de todos los caminos en E de longitud n y definimos $Path(E) := \bigcup_{n\geq 0} E^n$ al conjunto de todos los caminos en E.
- Dado un camino

Definición 1.1.4. *Dado $\mu = e_1e_2\cdots e_n$ un camino de un grafo E con $n \geq 1$:*

I. Si $v = s(\mu) = r(\mu)$, entonces μ es llamado un camino cerrado basado en v;

II. *Si μ es un camino cerrado basado en v y además $s(e_j) \neq v$ para todo $j > 1$, decimos que μ es un camino cerrado simple basado en v;*

III. *Si μ es un camino cerrado simple basado en v tal que $s(e_i) \neq s(e_j)$ con $i \neq j$, entonces μ es llamado un ciclo basado en v;*

IV. *Una salida para el camino μ es una arista e tal que $s(e) = s(e_i)$ para algún i y $e \neq e_i$;*

V. *Un ciclo de longitud 1 es llamado un loop;*

VI. *Un grafo E es llamado acíclico si E no tiene ningún camino cerrado basado en cualquier vértice de E.*

Ejemplo 1.1.5. Consideremos el siguiente grafo:

$$E:\quad \begin{tikzcd} v_2 \arrow[r, "f_2"] & v_3 \arrow[d, "f_3"] \\ v_1 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_5"'] & v_4 \arrow[l, "f_4"'] \end{tikzcd}$$

Figura 1. Un grafo con cíclos y caminos cerrados.

- El camino $\mu = f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_4$ es un camino cerrado basado en v_1, el cual no es simple ya que $s(f_4) = v_1$.

- El camino $\mu = f_2 f_3 f_4 f_5 f_4 f_1$ es un camino cerrado simple basado en v_2 que además no es un ciclo pues $s(f_5) = s(f_1)$.

- El camino $\mu = f_1 f_2 f_3 f_4$ es un ciclo basado en v_1 y tiene salida f_5.

A menos que sea necesario especificar el vértice diremos simplemente camino cerrado, camino cerrado simple y ciclo respectivamente.

Observación 3. Sea $c = f_1 \cdots f_{i-1} f_i f_{i+1} \cdots f_n$ un ciclo llamemos $v_i = s(f_i)$, entonces c es un ciclo basado en v_1. Además los caminos $c_i = f_{i+1} \cdots f_n f_1 \cdots f_{i-1} f_i$ son ciclos basados en v_{i+1} para cada $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, donde $c = c_0$. Así, siempre que tengamos un ciclo de longitud n es posible conseguir n ciclos diferentes de igual longitud.

Ahora vamos a definir ciertas condiciones para grafos que como veremos más adelante nos servirán para caracterizar propiedades de las álgebras de camino de Leavitt.

Definición 1.1.6. *Sea $E = (E^0, E^1, r, s)$ un grafo:*

- *Decimos que el grafo E satisface la **Condición (K)** si para cada $v \in E^0$ que se encuentra en un camino cerrado simple, existen al menos dos caminos cerrados simples distintos basados en v.*

- *Decimos que el grafo E satisface la **Condición (L)** si cada ciclo en E tiene salida.*

- *Decimos que un grafo E satisface la **Condición (Y)** si para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada camino infinito ρ, existe un subcamino inicial α de ρ y un camino finito β tal que $r(\beta) = r(\alpha)$ y $|\beta| - |\alpha| = k$.*

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1.7. Consideremos los siguientes grafos:

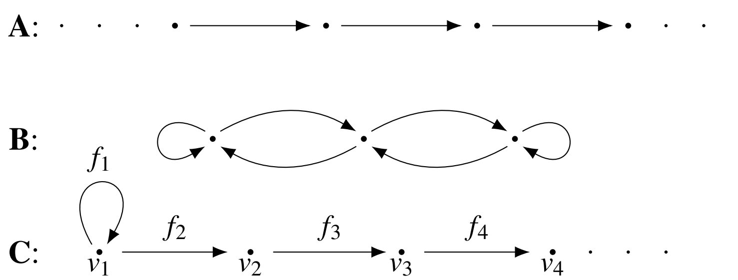


Figura 2. Grafos con la Condición (Y), Condición (K) y Condición (L) respectivamente

El grafo A cumple la Condición (Y) ya que para cualquier camino infinito ρ y cualquier subcamino inicial α de longitud $n \in \mathbb{N}$ podemos escoger β como la $(n+1-k)-$línea tal que $r(\beta) = r(\alpha)$, además este grafo es infinito, row finite y cada vértice es un vértice regular. Por otra parte, El grafo B cumple la Condición (K), no tiene sinks, es un grafo row finite, finito, sin sources donde además cada vértice es un vértice regular y el grafo C cumple la Condición (L), pues su único ciclo $\mu = f_1$ tiene salida $\rho = f_2$, es infinito y no tiene sinks.

Enseguida vamos a mostrar una afirmación que se señala en Clark et al. (2019), acerca de grafos que satisfacen la condición (Y).

Proposición 1.1.8. *Si E es un grafo tal que cada camino infinito contiene un vértice el cual es base de un ciclo, entonces E satisface la condición (Y)*

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$ y ρ un camino infinito del grafo E, debemos encontrar un subcamino inicial α de ρ y un camino finito β tal que $r(\alpha) = r(\beta)$ y $|\beta| - |\alpha| = k$. Por hipótesis, ρ contiene un vértice v_1 el cual es base de un ciclo c, siguiendo con la notación de la Observación 3, supongamos que $c = f_1 \cdots f_n$, los vértices en el ciclo son $v_1, \cdots, v_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y c_i el ciclo basado en v_i . Escojamos al subcamino inicial α de ρ como el camino más corto tal que $r(\alpha) = v_1$, es decir, si tenemos α' otro subcamino inicial de ρ tal que $r(\alpha') = v_1$ debe pasar que $|\alpha| < |\alpha'|$. Sea $|\alpha| = m$, analicemos los respectivos casos:

- <u>Caso 1:</u> Si $m \geq n$ y $k \geq n$. En este caso, por el algoritmo de división existen $p, q, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ con $0 \leq r_1, r_2 < n$ tales que $m = nq + r_1$ y $k = np + r_2$, queremos encontrar un camino β con $r(\beta) = r(\alpha)$ de longitud

  $$|\beta| = m + k = n(q+p) + r_1 + r_2,$$

  pues de hacerlo tendríamos que $|\beta| - |\alpha| = m + k - m = k$. Consideremos los siguientes subcasos:

  I. Si $r_1 + r_2 > n$ de nuevo por el algoritmo de la división existen $s, r_3 \in \mathbb{N}$ con $0 < r_3 < n$ tal que $r_1 + r_2 = ns + r_3$, así podemos escribir

  $$m + k = n(q+p) + r_1 + r_2 = n(q+p+s) + r_3$$

  entonces, tomemos $r = n - r_3 < n$ y β el camino

  $$\beta = c_r \cdots c_r f_{r+1} \cdots f_n$$

donde c_r aparece $q+p+s$ veces, notemos que $r(\beta) = r(f_n) = s(f_1) = v_1 = r(\alpha)$ por ser c un ciclo y además,

$$|\beta| = n(q+p+s)+n-r = n(q+p+s)+r_3 = m+k.$$

$II.$ Si $r_1+r_2 < n$ consideremos $r' = n-r_1-r_2$ y el camino $\beta = c_{r'}c_{r'}\cdots c_{r'}f_{r'+1}\cdots f_n$, con lo cual podemos concluir de manera análoga al caso anterior.

$III.$ Si $r_1+r_2 = n$, entonces $m+k = n(q+p+1)$, así que basta considerar el camino $\beta = cc\cdots c$ donde el cíclo c aparece $q+p+1$ veces, en este caso $|\beta| = |c|(q+p+1) = n(q+p+1) = m+k$ y $r(\beta) = r(c) = s(c) = v_1 = r(\alpha)$.

$IV.$ Si $r_1+r_2 = 0$, entonces $m+k = n(q+p)$ de manera análoga al caso anterior basta considerar $\beta = c\cdots c$ donde c aparece $q+p$ veces.

- Caso 2: Si $m \geq n$ y $k < n$, entonces aplicamos el algoritmo de la división sobre m para argumentar que existen $p,r \in \mathbb{N}$ tales que $m = np+r$ en este caso queremos que $|\beta| = m+k = np+r+k$, así podemos repetir los subcasos del Caso 1 sobre $r+k$ para encontrar dicho camino β y concluir el resultado.

- Caso 3: Si $m < n$ y $k \geq n$ este caso es análogo al anterior.

- Caso 4: Si $m < n$ y $k < n$, entonces debemos encontrar β de longitud $|\beta| = m+k$ y procedemos con los subcasos del Caso 1. sobre $m+k$, teniendo en cuenta que el subcaso IV implica que $|\alpha| = 0$ y $k = 0$, es decir $\beta = \alpha = v_1$.

$\square$

Presentaremos un ejemplo que de una idea de la construcción de la prueba.

Ejemplo 1.1.9. Consideremos el siguiente grafo:

$$E: \begin{tikzcd} \underset{v_0}{\bullet} \arrow[r, "f"'] & \underset{v_1}{\bullet} \arrow[r, "f_1"'] & \underset{v_2}{\bullet} \arrow[r, "f_2"'] & \underset{v_3}{\bullet} \arrow[r, "f_3"'] & \underset{v_4}{\bullet} \arrow[lll, bend right, "f_4"'] \end{tikzcd}$$

Figura 3. Grafo para especificar la Proposición 1.1.8.

Sea $\rho = ff_1f_2f_3f_4f_1f_2f_3f_4f_1f_2f_3f_4\cdots$ el camino infinito y $k = 17$, nótese que v_1 es base del ciclo $c = f_1f_2f_3f_4$ y está en ρ, según la construcción nuestro camino α debe ser $\alpha = f$ encontremos el camino β. Tenemos que $|\alpha| = 1 < 4 = |c|$ y $k = 17 \geq 4 = |c|$ siguiendo el caso 3. de la demostración, como $17 = 4(4)+1$ queremos que

$$|\beta| = k + |\alpha| = 4(4)+1+1 = 4(4)+2$$

así $r = 4-2 = 2$, consideremos el ciclo $c_2 = f_3f_4f_1f_2$ y de ahí que

$$\beta = c_2c_2c_2c_2f_3f_4,$$

este camino cumple que $r(\beta) = r(f_4) = r(\alpha)$ y además $|\beta| = 4|c_2|+2 = 16+2$ por tanto $|\beta| - |\alpha| = 16+2-1 = 17 = k$.

1.2. Álgebras de camino

En esta sección estudiaremos el álgebra de caminos, su construcción y ejemplos, para ello tomaremos como guía Erdmann et al. (2018).

Definición 1.2.1. *Sean K un cuerpo y E un grafo. Definimos KE como el $K-$espacio vectorial con base $Path(E)$.*

Definimos el producto en KE como la concatenación de caminos (si es posible) y la extendemos linealmente. Más precisamente, dados dos caminos $p = p_1 \cdots p_n$ y $q = q_1 \cdots q_m$ en KE, establecemos

$$p \cdot q = \begin{cases} p_1 \cdots p_n q_1 \cdots q_m & si \quad r(p) = s(q) \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases},$$

$s(e)e = er(e) = e$ para cualquier arista $e \in E^1$ y $ve = ev = 0$ para cualquier otro vértice $v \in E^0$. En particular, $vw = \delta_{v,w} v$, donde δ indica la función delta de Kronecker.

El producto en KE es asociativo ya que la concatenación de caminos es asociativa, y es distributivo por definición de productos para combinaciones lineales arbitrarias. Afirmamos que si el grafo es finito el elemento identidad de KE está dado por la suma de caminos de longitud cero, es decir la suma de sus vértices

$$1_{KE} = \sum_{v \in E^0} v$$

En efecto, para cada camino $p \in E$ obtenemos

$$p\left(\sum_{v\in E^0} v\right) = pr(p) = s(p)p = \left(\sum_{v\in E^0} v\right)p$$

y pos la distrivutividad se sigue que $\alpha\left(\sum_{v\in E^0} v\right) = \left(\sum_{v\in E^0} v\right)\alpha = \alpha$ para cada $\alpha \in KE$.

A continuación presentaremos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.2.2. Sea R_1 el grafo que consiste únicamente de un vértice y un loop

R_1:

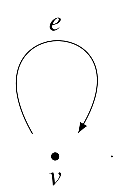


Figura 4. Un loop.

Consideremos el anillo de polinomios en una variable con coeficientes en K. Los caminos de R_1 son $\{v, e, e^2, e^3 \cdots\}$ y el elemento identidad de KR_1 es v, por tanto si definimos la correspondencia entre KR_1 y $K[x]$ como $v \mapsto 1$ y $e \mapsto x$, obtenemos un isomorfismo $KR_1 \cong K[x]$.

Ejemplo 1.2.3. Consideremos el grafo "La rosa de n pétalos" R_n que consiste en un único vértice y n loops

R_n:

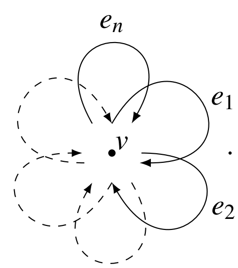


Figura 5. Rosa de n-pétalos.

Tenemos un isomorfismo entre la $K-$álgebra de camino KR_n y la $K-$álgebra libre en n variables no conmutativas $K\langle x_1 \cdots x_n \rangle$ que envía $e_i \mapsto x_i$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Ejemplo 1.2.4. Sea A_n el grafo "la $n-$línea orientada"que consiste de n vértices y $n-1$ aristas de la siguiente manera:

$$A_n: \quad \underset{v_1}{\bullet} \xrightarrow{e_1} \underset{v_2}{\bullet} \xrightarrow{e_2} \underset{v_3}{\bullet} \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \quad \underset{v_{n-1}}{\bullet} \xrightarrow{e_{n-1}} \underset{v_n}{\bullet} .$$

Figura 6. La $n-$línea orientada.

Notemos que si $i \leq j$ existe un único camino que llamaremos $e_{i,j}$ tal que $s(e_{i,j}) = v_i$ y $r(e_{i,j}) = v_j$. Además los únicos caminos de A_n son $\{e_{i,j}\}_{i \leq j}$. Sea $E_{i,j} \in M_n(K)$ la matriz con 1 en la posición (i, j) y 0 en las demás posiciones. Existe un isomorfismo de $K-$álgebras entre KA_n y $T_n(K)$ el álgebra de matrices triangulares superiores que envía $e_{i,j} \mapsto E_{i,j}$.

1.3. Álgebras de Leavitt

Aquí estudiaremos una parte de la historia de las álgebras de camino de Leavitt, en particular revisaremos la construcción de las álgebras de Leavitt originales a apartir de los anillos que no tienen la propiedad IBN, para esto nos estaremos basando en (Abrams et al., 2017, Sec 1.1.) y en Lezama (2014).

Vamos a comenzar recordando uno de los primeros resultados que se estudian en un curso de álgebra y es el teorema de la dimensión para espacios vectoriales.

Teorema 1.3.1. *Cada $\mathbb{R}-$espacio vectorial V no nulo tiene una base. Más aún, si $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$ son bases de V tenemos que $|\mathscr{B}| = |\mathscr{B}'|$.*

Observación 4. El $\mathbb{R}-$espacio vectorial V tiene como base $\mathscr{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ si y sólo si $V \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}$ como espacios vectoriales. Por lo tanto, podemos reescribir el Teorema de la dimensión de la siguiente manera: $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R} \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{R}$ si y sólo si $m = n$.

Cuando se estudia la teoría de módulos surge la pregunta si el resultado anterior se puede generalizar para módulos libres, es decir, si dado un anillo R y $\bigoplus_{i=1}^{n} R \cong \bigoplus_{i=1}^{m} R$ como $R-$módulos izquierdos, entonces $m = n$. Para dar una respuesta negativa a esta pregunta tenemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.3.2. Fijemos un anillo R. Sea M un $R-$módulo libre izquierdo con base infinita numerable $X = \{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ y sea $S = End_R(M)$ su anillo de endomorfismos. Consideremos la estructura natural de S-módulo a izquierda sobre S. De ahí que S es libre con base $\{1_M\}$. Ahora construiremos una base de S con dos elementos, lo cual nos dará una respuesta negativa a la pregunta anterior. Definamos las funciones $f, g : X \to M$ por:

$$f(x_i) = \begin{cases} x_n & si \quad i = 2n \\ 0 & si \quad i = 2n-1 \end{cases}, \qquad g(x_i) = \begin{cases} 0 & si \quad i = 2n \\ x_n & si \quad i = 2n-1 \end{cases}.$$

Dado que M es un $R-$módulo libre podemos extender linealmente tanto a f como a g a $R-$endomorfismos de M que denotaremos por $\overline{f}, \overline{g}$. Afirmamos que $\{\overline{f}, \overline{g}\}$ es una base de S, en efecto:

I. El conjunto $\{\overline{f}, \overline{g}\}$ genera a S: Sea $h \in S$ y consideremos las funciones $t_1, t_2 : X \to M$ dadas por $t_1(x_i) = h(x_{2i})$ y $t_2(x_i) = h(x_{2i-1})$, para cada $i = 1, 2, \cdots$ de igual forma denotamos por $\overline{t_1}$, $\overline{t_2}$ a los $R-$endormorfismos de M asociados a t_1, t_2. Así tenemos que $h = \overline{t_1}\overline{f} + \overline{t_2}\overline{g}$, pues si $i = 2n$

$$\begin{aligned}(\overline{t_1}\overline{f} + \overline{t_2}\overline{g})(x_i) &= \overline{t_1}(\overline{f}(x_i)) + \overline{t_2}(\overline{g}(x_i)) \\ &= \overline{t_1}(x_n) + \overline{t_2}(0) \\ &= h(x_i)\end{aligned}$$

y si $i = 2n-1$

$$\begin{aligned}(\overline{t_1}\overline{f} + \overline{t_2}\overline{g})(x_i) &= \overline{t_1}(\overline{f}(x_i)) + \overline{t_2}(\overline{g}(x_i)) \\ &= \overline{t_1}(0) + \overline{t_2}(x_n) \\ &= h(x_i)\end{aligned}$$

II. El conjunto $\{\overline{f}, \overline{g}\}$ es linealmente independiente: Supongamos que existen $R-$ endomorfismos $h_1, h_2 \in S$ tales que $h_1\overline{f} + h_2\overline{g} = 0$, entonces para cada x_i tenemos que $(h_1\overline{f} + h_2\overline{g})(x_i) =$

0, en particular,

$$(h_1\overline{f}+h_2\overline{g})(x_{2i}) = h_1(\overline{f}(x_{2i})) = h_1(x_i) = 0$$
$$(h_1\overline{f}+h_2\overline{g})(x_{2i-1}) = h_2(\overline{g}(x_{2i-1})) = h_2(x_i) = 0.$$

Por tanto, $\overline{h_1} = \overline{h_2} = 0$.

Lo anterior nos dice que $S \cong S^2$.

Así las cosas, decimos que un anillo cumple la propiedad IBN (Invariant Basis Number) si dados enteros positivos m,n con la propiedad de que los $R-$módulos libres R^m y R^n son isomorfos, entonces $m = n$. Menos formalmente, decimos que un anillo satisface la propiedad IBN si cualesquiera dos bases de un $R-$módulo libre finitamente generado tienen el mismo tamaño.

Definición 1.3.3. *Fijemos un anillo R sin la propiedad IBN. Sea $m \in \mathbb{N}$ el menor número con la propiedad de que $R^m \cong R^{m'}$ como $R-$módulos izquierdos para algún $m' > m$. Para este m, sea n el mínimo de los $m's$ que cumplen la propiedad. En este caso decimos que R tiene un módulo del tipo (m,n).*

Ejemplo 1.3.4. Como vimos en el Ejemplo 1.3.2 el anillo $S = End_R(M)$ tiene un módulo del tipo $(1,2)$.

En seguida presentaremos uno de los resultados fundamentales del estudio de anillos sin la propiedad IBN.

Teorema 1.3.5. *Para cada par de enteros positivos $n > m$ y un cuerpo K existe una K-álgebra unitaria salvo isomorfismos a la que denotaremos por $L_K(m,n)$ tal que :*

I. $L_K(m,n)$ tiene un módulo del tipo (m,n)

II. Para cada $K-$álgebra A unitaria que tiene un módulo del tipo (m,n) existe un $K-$homomorfismo entre A y $L_K(m,n)$ que preserva unidad.

El enfoque motivacional de las álgebras de camino de Leavitt son los anillos R sin la propiedad IBN que tienen un módulo del tipo $(1,n)$ para algún $n > 1$. Recordemos que si ${}_RR \cong_R R^n$, entonces existen morfismos $\phi \in Hom_R(R,R^n)$ y $\varphi \in Hom_R(R^n,R)$ tales que $\varphi \circ \phi = 1_R$ y $\phi \circ \varphi = 1_{R^n}$. Usando interpretación matricial lo anterior nos dice que dichos morfismo existen si y sólo si existen $R-$vectores $1 \times n$ y $n \times 1$ para los cuales

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 1_R \quad y \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1_R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1_R \end{pmatrix}.$$

Además si reformulamos, lo anterior equivale a que existan $2n$ elementos $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ en R para los cuales

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_R \quad y \quad y_i x_j = \delta_{i,j} 1_R \quad \textit{para todo } 1 \leq i, j \leq n. \tag{1}$$

En general, es posible construir una $K-$álgebra A que contenga a los $2n$ elementos y se comporte como en (1). En efecto, sean

$$S = K\langle X_1, \cdots, X_n, Y_1 \cdots, Y_n\rangle$$

la $K-$álgebra asociativa libre en $2n$ variables no conmutativas, I el ideal de S generado por las relaciones

$$I = \left\langle \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - 1, Y_iX_j - \delta_{i,j}1 \mid 1 \leq i, j \leq n \right\rangle,$$

y sea $A = S/I$, entonces el conjunto $\{x_i = \overline{X_i}, y_i = \overline{Y_i} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ se comporta como en (1) y por tanto $A \cong A^n$.

Aunque se acaba de construir una $K-$álgebra A tal que $A \cong A^n$ esto no garantiza que A tenga un módulo del tipo $(1,n)$ hasta que se garantice la minimalidad de n, pero Leavitt establece en Leavitt (1962) que de hecho, la $K-$álgebra $L_K(1,n)$ es precisamente la $K-$álgebra $A = S/I$. Esto nos permite establecer la siguiente definición:

Definición 1.3.6. *Sean K un cuerpo y $n > 1$ un entero. Entonces la $K-$álgebra de Leavitt de tipo $(1,n)$ denotado por $L_K(1,n)$, es la $K-$álgebra*

$$K\langle X_1, \cdots, X_n, Y_1 \cdots, Y_n\rangle / \left\langle \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - 1, Y_iX_j - \delta_{i,j}1 \mid 1 \leq i, j \leq n \right\rangle$$

2. Álgebras de camino de Leavitt

Una vez presentados los preliminares necesarios, en este capítulo podremos estudiar las álgebras de camino de Leavitt y sus propiedades básicas, de aquí en adelante K denotará un cuerpo y R un anillo asociativo no necesariamente unitario.

2.1. Conceptos básicos

En esta sección veremos algunos conceptos básicos de las álgebras de camino de Leavitt, entre dichos conceptos estudiaremos como obtener las álgebras de camino de Leavitt a partir de las álgebras de camino y cuando el álgebra de camino de Leavitt es unitaria.

Definición 2.1.1. *(Álgebras de camino de Leavitt) Sean E un grafo dirigido arbitrario y K un cuerpo. Definimos el conjunto $(E^1)^*$ el cual consiste de los símbolos de la forma $\{e^* \mid e \in E\}$. El álgebra de camino de Leavitt de E con coeficientes en K, denotada por $L_K(E)$, es la $K-$álgebra asociativa libre generada por los conjuntos $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$, sujeta a las siguientes relaciones:*

$V)$ $vv' = \delta_{v,v'}v$ *para todo* $v, v' \in E^0$;

$E1)$ $s(e)e = er(e) = e$ *para todo* $e \in E^1$;

$E2)$ $r(e)e^* = e^*s(e) = e^*$ *para todo* $e \in E^1$;

$CK1)$ $e^*e' = \delta_{e,e'}r(e)$ *para todo* $e, e' \in E^1$;

$CK2)$ $v = \displaystyle\sum_{\{e \in E^1 | s(e)=v\}} ee^*$ *para cada vértice regular* $v \in E^0$.

Parafraseando, el álgebra de camino de Leavitt es la $K-$álgebra asociativa libre generada por $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$, cociente el ideal generado por las cinco relaciones mencionadas.

Observación 5. Es posible extender la noción de arista fantasma a vértices fantasmas donde $v^* = v$ para cada $v \in E^0$

En la siguiente observación especificaremos la relación entre las álgebras de caminos y las álgebras de camino de Leavitt.

Observación 6. Dado un grafo E, definimos el grafo extendido de E como el grafo $\widehat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r', s')$ donde las funciones r' y s' son extensiones de las funciones r y s de la siguiente manera:

$$r' |_{E^1} = r, \quad s' |_{E^1}, \quad r'(e^*) = s(e) \quad y \quad s'(e^*) = r(e) \text{ para todo } e \in E^1.$$

Entonces,

$$L_K(E) = K\widehat{E}/\langle (CK1), (CK2) \rangle$$

donde $K\widehat{E}$ denota a la $K-$álgebra de caminos del grafo $\widehat{E}$.

Proposición 2.1.2. *(Propiedad universal de $L_K(E)$) Sean E un grafo y A una $K-$álgebra la cual contiene un conjunto de idempotentes ortogonales $\{a_v \mid v \in E^0\}$ y conjuntos $\{a_e \mid e \in E^1\}$, $\{b_e \mid e \in E^1\}$ los cuales satisfacen*

I. $a_{s(e)}a_e = a_e a_{r(e)} = a_e$ *y* $a_{r(e)}b_e = b_e a_{s(e)} = b_e$ *para todo* $e \in E^1$*;*

II. $b_f a_e = \delta_{e,f} a_{r(e)}$ *para todo* $e, f \in E^1$*;*

III. $a_v = \sum_{\{e \in E^1 | s(e) = v\}} a_e b_e$ *para cada vértice regular* $v \in E^0$.

Por las relaciones que definen a las álgebras de camino de Leavitt, existe un único homomorfismo de $K-$*álgebras* $\varphi : L_K(E) \to A$ *tal que* $\varphi(v) = a_v$, $\varphi(e) = a_e$ *y* $\varphi(e^*) = b_e$ *para todo* $v \in E^0$ *y* $e \in E^1$.

Demostración. Ver (Abrams et al., 2017, Observación 1.2.5). □

Observación 7. Podemos extender de manera natural la definición de álgebras de camino sobre un cuerpo K a un anillo arbitrario con unidad R, como ejemplo de esto encontramos el artículo Tomforde (2011) donde se estudian las álgebras de camino de Leavitt sobre anillos conmutativos con unidad y Nordstrom and Nordstrom (2020) donde amplían el trabajo de Tomforde a anillos asociativos unitarios no necesariamente conmutativos.

Ahora, presentaremos un ejemplo para dar una idea de como operamos en las álgebras de camino de Leavitt.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos el siguiente grafo:

$\widehat{E}$:

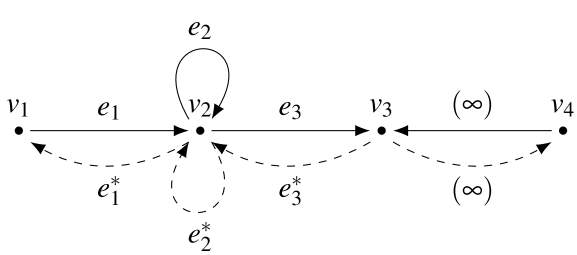


Figura 7. Representación de las Álgebras de camino de Leavitt.

Realizaremos algunos cálculos en $L_K(E)$ (en el grafo (∞) indica que del vértice v_4 al vértice v_3

salen un número infinito de aristas). Por la propiedad $(CK1)$ tenemos que

$$e_1^*e_1 = e_2^*e_2 = v_2, \quad y \quad e_3^*e_3 = v_3,$$

notemos que no tenemos propiedad $(CK2)$ en el vértice v_4 pues es un emisor infinito y tampoco en el vértice v_3 por ser un sink, mientras que por esa misma propiedad tenemos

$$v_2 = e_2e_2^* + e_3e_3^*, \quad y \quad e_1e_1^* = v_1.$$

En seguida presentaremos algunos lemas básicos respecto a los elementos del álgebra de camino de Leavitt, para estos lemas vamos a considerar E un grafo, K un cuerpo y $L_K(E)$ el álgebra de camino de Leavitt asociado.

Lema 2.1.4. *Sean E un grafo, K un cuerpo y $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Path(E)$, entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

I. $\alpha^*\alpha = r(\alpha)$ *en* $L_K(E)$ *para todo* $\alpha \in Path(E)$*;*

II. El producto de monomios en $L_K(E)$ se realiza de la siguiente manera

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \begin{cases} \alpha\eta\delta^* & si \quad \gamma = \beta\eta \\ \alpha\lambda^*\delta^* & si \quad \beta = \gamma\lambda \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

III. *El álgebra de camino de Leavitt es generada como un $K-$espacio vectorial por el conjunto de monomios de la forma*

$$\{\alpha\beta^* \mid r(\alpha) = r(\beta)\}.$$

Demostración.

I. Procederemos a hacer inducción sobre la longitud del camino α

- Base inductiva: Si $|\alpha| = 1$ entonces $\alpha = \alpha_1$ es un camino con una sola arista y por la propiedad $(CK1)$ tenemos que $\alpha_1^*\alpha_1 = r(\alpha_1)$.
- Paso inductivo: Supongamos que para todo camino de longitud $n-1$ tenemos que $\alpha_{n-1}^* \cdots \alpha_1^*\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} = r(\alpha_{n-1})$. Sea α un camino de longitud n, entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\alpha_n^*\alpha_{n-1}^* \cdots \alpha_1^*\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\alpha_n &= \alpha_n^*(\alpha_{n-1}^* \cdots \alpha_1^*\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1})\alpha_n \\
&= \alpha_n^* r(\alpha_{n-1})\alpha_n \quad \textit{Por hipótesis de inducción} \\
&= \alpha_n^*(s(\alpha_n)\alpha_n) \quad \textit{Por la Definición 1.1.2} \\
&= \alpha_n^*\alpha_n \quad \textit{Por } (E1) \\
&= r(\alpha_n) \quad \textit{Por } (CK1).
\end{aligned}$$

Por lo anterior, concluimos el resultado.

II. Analizaremos los casos posibles, supongamos primero que $\gamma = \beta\eta$, en este caso obtenemos que

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta) = \alpha\beta^*\beta\eta\delta^* = \alpha(\beta^*\beta)\eta\delta^* = \alpha r(\beta)\eta\delta^* = \alpha s(\eta)\eta\delta^* = \alpha\eta\delta^*$$

Donde la tercera igualdad es consecuencia del item I. de este lema, la cuarta igualdad se da pues $\gamma = \beta\eta$ es un camino y la última igualdad por la propiedad $(CK1)$, con esto terminamos el primer caso. Ahora supongamos que $\beta = \gamma\lambda$, tenemos entonces que

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \alpha(\gamma\lambda)^*\gamma\delta^* = \alpha\lambda^*(\gamma^*\gamma)\delta^* = \alpha\lambda^*\delta^*,$$

donde las igualdades de arriba se deducen de manera análoga al caso anterior. Finalmente, si no tenemos ninguno de los casos ya mencionados por la propiedad $(CK1)$ obtenemos que el producto debe ser nulo.

$III.$ Notemos que el item II. nos dice que

$$H = \langle\{\alpha\beta^* \mid r(\alpha) = r(\beta)\}\rangle$$

es un $K-$subespacio vectorial de $L_K(E)$. Además, los generadores de $L_K(E)$ están en H pues $v = vv = vv^*$ por (V), $e = er(e)^*$ por $(E1)$ y $e^* = r(e)e^*$, de ahí que $H = L_K(E)$.

□

Las álgebras de camino de Leavitt son un ejemplo de álgebras que no son necesariamente unitarias, en seguida estudiaremos cuando estás álgebras son unitarias y cuando no lo son pero tienen un conjunto de unidades locales.

Comenzaremos introduciendo el concepto de anillos con unidades locales el cual fue presentado por primera vez en Abrams (1983).

Definición 2.1.5. *Sea R un anillo asociativo. Decimos que el anillo R tiene un conjunto de unidades locales E si E es un conjunto de idempotentes en R tal que para cualquier subconjunto finito* $r_1, \cdots, r_n$ *de R existe un* $e \in E$ *tal que* $er_ie = r_i$ *para todo* $1 \leq i \leq n$*.*

Lema 2.1.6. *Sean E un grafo, K un cuerpo y* $L_K(E)$ *el álgebra de camino de Leavitt asociada al grafo E, entonces:*

I. $L_K(E)$ *es una* $K-$*álgebra unitaria si y sólo si* E^0 *es finito.*

II. Si E^0 *es infinito, entonces* $L_K(E)$ *es un álgebra con unidades locales.*

Demostración.

$I.$ Supongamos primero que $E^0 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es finito, consideremos $\sum_{i=1}^{n} v_i$ el objetivo es probar que la suma mencionada es el elemento neutro de $L_K(E)$. En efecto, comenzaremos realizando el producto con los vértices tomemos $v_j \in E^0$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) v_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} v_i v_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} v_j v_i = v_j \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right). \tag{1}$$

Ahora tomemos $e \in E^1$, luego

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) e = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) s(e)e = s(e)e = e, \tag{2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) e^* = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) r(e)e^* = r(e)e^* = e^* \tag{3}$$

donde las igualdades (2) y (3) las obtenemos por (1), así podemos concluir que que $\sum_{i=1}^{n} v_i$ es la unidad de $L_K(E)$ pues $L_K(E)$ es generada por $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$. Recíprocamente, supongamos por contradicción que E^0 es infinito y a es la unidad de $L_K(E)$, por el Lema 2.1.4 podemos escribir $a = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \beta_i^*$ para $\alpha_i, \beta_i \in Path(E)$ y $k_i \in K$ consideremos los vértices $v_i = r(\beta_i^*) = s(\beta_i)$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ y puesto que E^0 es infinito podemos escoger un vértice tal que $v \notin \{v_1, \cdots, v_n\}$ de ahí que

$$a \cdot v = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \beta_i^* v = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \beta_i^* s(\beta_i) v = 0$$

lo cual es una contradicción.

II. Afirmamos que el conjunto de unidades locales es el conjunto de sumas finitas de vértices. En efecto, consideremos un conjunto finito arbitrario $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ de elementos de $L_K(E)$, por el Lema 2.1.4 podemos escribir

$$a_i = \sum_{j_i=1}^{n_i} k_{j_i} \alpha_{j_i} \beta_{j_i}^*$$

donde cada $k_{j_i} \in K$ y $\alpha_{j_i}, \beta_{j_i} \in Path(E)$ para todo $j_i \in \{1, \cdots, n_i\}$ y $i \in \{1, \cdots, n\}$, así consideremos la suma finita de vértices

$$a = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j_i}^{n_i} s(\alpha_{j_i}) + \sum_{j_i}^{n_i} s(\beta_{j_i}) \right),$$

realizando los respectivos cálculos $aa_ia = a_i$, con lo cual concluimos el resultado.

$\square$

Finalizaremos esta sección presentando algunos ejemplos. Comenzaremos mostrando una conexión entre las álgebras de Leavitt $L_K(1,n)$ y $L_K(E)$

Ejemplo 2.1.7. Sean $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, K un cuerpo y R_n la rosa de n pétalos

R_n:

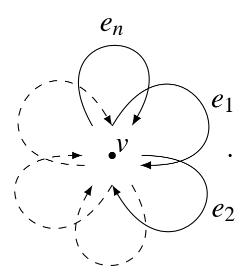


Figura 8. Rosa de n-pétalos.

Entonces $L_K(1,n) \cong L_K(R_n)$. En efecto, recordemos por la Definición 1.3.6 que

$$L_K(1,n) = K\langle X_1, \cdots, X_n, Y_1 \cdots, Y_n \rangle / \left\langle \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - 1, Y_iX_j - \delta_{i,j}1 \mid 1 \leq i, j \leq n \right\rangle$$

y también recordemos que

$$L_K(E) = K\widehat{E}/\langle (CK1), (CK2) \rangle,$$

así, consideremos el homomorfismo que envía a X_i en e_i y a Y_i en e_i^* en consecuencia las relaciones

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - 1 \quad y \quad Y_i X_j - \delta_{i,j} 1$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$ coinciden con las relaciones $(CK2)$ y $(CK1)$ respectivamente, de ahí obtenemos el isomorfismo deseado.

Finalmente, en los siguientes ejemplos veremos que $L_K(A_n)$ es isomorfa a el álgebra de matrices y no sólo al álgebra de matrices triangulares como en el Ejemplo 1.2.4 mientras que $L_K(R_1)$ es isomorfa a el álgebra de polinomios de Laurent y no sólo al anillo de polinomios como en el Ejemplo 1.2.2.

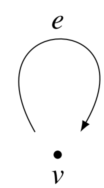
Ejemplo 2.1.8. Sea A_n el grafo llamado la $n-$línea orientada

$$A_n: \quad \underset{v_1}{\bullet} \xrightarrow{e_1} \underset{v_2}{\bullet} \xrightarrow{e_2} \underset{v_3}{\bullet} \quad \cdots \quad \underset{v_{n-1}}{\bullet} \xrightarrow{e_{n-1}} \underset{v_n}{\bullet}$$

Figura 9. La n-línea orientada.

Entonces, $L_K(A_n) \cong M_n(K)$ para ver esto consideremos la base de la $K-$álgebra de matrices $\{E_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ donde cada $E_{i,j}$ es la matriz elemental con 1 en la posición (i, j) y 0 en las demás posiciones. Notemos que el conjunto $\{E_{i,i}, E_{i,i+1}, E_{i+1,i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ cumple la propiedad universal mencionada en la Proposición 2.1.2, de ahí que exista un isomorfismo $\varphi : L_K(E) \to M_n(K)$ que envía $v \mapsto E_{i,i}$, $e_i \mapsto E_{i,i+1}$ y $E_i^* = a_{i+1,i}$, el cual se puede probar que es un isomorfismo.

Ejemplo 2.1.9. Sea E el grafo que consiste de un loop

E:


.

Figura 10. Un loop.

Entonces $L_K(E) \cong K[x,x^{-1}]$ mediante el isomorfismo $\varphi : L_K(E) \to K[x,x^{-1}]$ definido por $v \mapsto 1$, $e \mapsto x$ y $e^* \mapsto x^{-1}$.

3. Graduaciones en las álgebras de camino de Leavitt

El objetivo de este trabajo y de este capítulo en particular es estudiar algunos resultados acerca de las graduaciones del álgebra de camino de Leavitt, aquí nos centraremos en la $\mathbf{Z}-$graduación canónica y en la $G-$graduación canónica para G un grupo arbitrario, las cuales introduciremos posteriormente.

3.1. Álgebras graduadas

En esta sección hablaremos de álgebras graduadas y sus resultados fundamentales con el fin de estudiar la graduación canónica de las álgebras de camino de Leavitt la cual será utilizada a lo largo de este trabajo, además introduciremos la noción de álgebra simétricamente graduada. Para esto estaremos siguiendo Nastasescu et al. (2004) y Abrams et al. (2017).

Definición 3.1.1. *Dado G un grupo con elemento neutro $e \in G$. Un anillo R se dice **G-graduado** si existe una familia $\{R_g \mid g \in G\}$ de subgrupos aditivos R_g de R tales que:*

I. $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$.

II. $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ *para todo $g, h \in G$. Donde $R_g R_h$ denota el conjunto de todas las sumas finitas de elementos de la forma $x \cdot y$ con $x \in R_g$ y $y \in R_h$.*

Si la igualdad en II se cumple, decimos que R es fuertemente G-graduado.

Un elemento distinto de cero $x \in R_g$ es llamado homogéneo de grado g y se denotará por $grad(x) = g$. Además un elemento $r \in R$ tiene descomposición única como $r = \sum_{g \in G} r_g$ con $r_g \in R_g$ para todo

$g \in G$, donde dicha suma es finita, es decir, casi todos los r_g son cero. En la definición anterior podemos cambiar al anillo R por una $K-$álgebra A donde K es un cuerpo y en este caso la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in G}$ es una colección de $K-$subespacios vectoriales. En la siguiente proposición estudiaremos algunas propiedades de los anillos graduados.

Proposición 3.1.2. *Sea $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ un anillo $G-$graduado unitario. Entonces:*

I. $1_R \in R_e$ *y* R_e *es un subanillo de* R.

II. La inversa de un elemento invertible $r \in R$ de grado $g \in G$ es un elemento homogéneo de grado g^{-1}.

III. R es un anillo fuertemente graduado si y sólo si $1_R \in R_g R_{g^{-1}}$ para cualquier $g \in G$.

Demostración. Ver (Nastasescu et al., 2004, Proposición 1.1.1.) □

Ahora, daremos la definición de un ideal graduado y mostraremos que el ideal generado por un subconjunto homogéneo de grado e es graduado, donde e es el elemento neutro del grupo.

Definición 3.1.3. *Dado R un anillo $G-$graduado. Un ideal I de R es llamado un ideal graduado si $I \subseteq \sum_{g \in G} (I \cap R_g)$ o equivalentemente, si $y = \sum_{g \in G} y_g$ implica que $y_g \in I$ para cada $g \in R$.*

Proposición 3.1.4. *Sea e el elemento neutro del grupo G y R un anillo $G-$graduado. Si X es un subconjunto de R_e, entonces el ideal $I(X)$ de R es graduado.*

Demostración. Debemos probar que $I(X) \subseteq \sum_{g \in G} (I \cap R_g)$, sabemos que

$$I(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R \text{ y } x_i \in X \text{ para todo } i \in \{1, \cdots, n\} \right\}.$$

Sea $x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in I(X)$, dado que $r_i \in R$ para cada i y R es $G-$graduado, podemos escribir $r_i = \sum_{g\in G} s_g$ donde cada $s_g \in R_g$, así $r_i x_i = \sum_{g\in G} s_g x_i$ donde $s_g x_i \in R_g R_e \subseteq R_g$ por lo tanto $r_i x_i \in \sum_{g\in G}(I\cap R_g)$, para todo $1 \leq i \leq n$ y de ahí que $x \in \sum_{g\in G}(I\cap R_g)$. □

En seguida presentaremos algunos ejemplos de anillos graduados:

Ejemplo 3.1.5. (*El anillo de polinomios*) Si A es un anillo, entonces el anillo de polinomios $R = A[X]$ es un anillo $\mathbb{Z}-$graduado con el grado estándar $R_n = AX^n$ para $0 \leq n$ y $R_n = 0$ para $n < 0$. Además R no es un un anillo fuertemente graduado, pues por ejemplo $R_8 \not\subseteq R_{10}R_{-2} = 0$.

Ejemplo 3.1.6. (*El anillo de polinomios de Laurent*) Si A es un anillo unitario, sea $R = A[X,X^{-1}]$ el anillo de polinomios de Laurent. Un elemento de R es de la forma $\sum_{i\geq m} a_i X^i$ con $m \in \mathbb{Z}$ y un número finito de $a_i's$ son distintos de cero. Entonces R tiene la $\mathbb{Z}-$graduación estándar $R_n = AX^n$, $n \in \mathbb{Z}$, más aún, esta es una fuertemente $\mathbb{Z}-$graduación pues $X^n X^{-n} = X^0 = 1_R$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.1.7. Consideremos el álgebra de caminos KE definida en la Sección 1.2, notemos que

$$KE = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} KE^n$$

donde E^n denota al conjunto de todos los caminos de longitud n en el grafo E, definimos el grado de un camino $p \in E^n$ como $grad(p) = |p| = n$ y $KE^m = 0$ para $m < 0$, lo que nos da una $\mathbb{Z}-$graduación en KE, pues si $q \in E^m$ tenemos que $pq = 0$ o $|pq| = m+n$ y en ambos casos $pq \in KE^{m+n}$, es decir, $(KE^n)(KE^m) \subseteq KE^{m+n}$.

Definición 3.1.8. *Sea E un grafo arbitrario y K un cuerpo. Para cada $v \in E^0$ y $e \in E^1$, definimos $grad(v) = 0$, $grad(e) = 1$ y $grad(e^*) = -1$. Extendemos esta definición para cada monomio $kx_1 \cdots x_m$, con $k \in K$ y $x_i \in E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ como*

$$grad(kx_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} grad(x_i)$$

La definición anterior induce una $\mathbb{Z}-$graduación en $K\hat{E} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} K\hat{E}^n$ donde $K\hat{E}^n$ es el K-subespacio generado por los caminos en $\hat{E}$ tales que $grad(x_1 \cdots x_m) = n$ es decir,

$$K\hat{E}^n = \langle x_1 \cdots x_m \mid x_i \in E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \ con \ grad(x_1 \cdots x_m) = n \rangle$$

Observación 8. Nótese que si tenemos un ideal $G-$graduado I el anillo cociente $\overline{R} = R/I$ es graduado con la graduación definida por $(R/I)_g := R_g/(I \cap R_g)$.

Con lo anterior procedemos a definir una graduación en las álgebras de camino de Leavitt, la cual es llamada la $\mathbb{Z}-$graduación canónica.

Proposición 3.1.9. *Sea E un grafo y K un cuerpo. Entonces, $L_K(E)$ es un álgebra $\mathbb{Z}-$graduada con la graduación de la Definición 3.1.8.*

Demostración. En efecto, consideremos la $\mathbb{Z}-$graduación de $K\hat{E}$ y al ideal I generado por las relaciones $(CK1)$ y $(CK2)$, notemos que estas relaciones están en $K\hat{E}^0$ pues $grad(ee^*) = grad(e^*e) = grad(r(e)) = grad(s(e)) = 0$ y por la Observación 3.1.4 obtenemos que I es $\mathbb{Z}-$graduado, de ahí por las Observaciones 8 y 6

$$L_K(E) = K\hat{E}/I$$

es $\mathbb{Z}-$graduado. Finalmente, por el Lema 2.1.4 item III. tenemos que las componentes homogéneas del álgebra de camino de Leavitt en esta graduación son de la forma

$$(L_K(E))_n = \langle \{\gamma\lambda^* \mid \gamma, \lambda \in Path(E) \text{ y } |\gamma| - |\lambda| = n\} \rangle.$$

$\square$

Observación 9. Es posible generalizar la $\mathbb{Z}$-graduación de $L_K(E)$ a una $G-$graduación con G un grupo arbitrario. En efecto, para cada $v \in E^0$ fijamos $grad(v) = e$ donde e es el elemento neutro de G, para cada $f \in E^1$ escogemos algún $g \in G$ (este $g \in G$ puede ser diferente para cada arista $f \in E^1$) y fijamos $grad(f) = g$ y $grad(f^*) = g^{-1}$. De esta manera tenemos una $G-$graduación para $K\hat{E}$ donde el ideal generado por $(CK1)$ y $(CK2)$ es homogéneo de grado e, por lo tanto $L_K(E) = K\hat{E}/I$ es $G-$graduada. Nos vamos a referir a esta graduación como la $G-$graduación canónico.

A continuación definiremos a los anillos simétricamente graduados y presentaremos algunos ejemplos.

Definición 3.1.10. *Dado $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ un anillo $G-$graduado. Decimos que R es simétricamente $G-$graduado si*

$$R_g = R_g R_{g^{-1}} R_g,$$

para cada $g \in G$.

Observación 10. Todo anillo fuertemente graduado es simétricamente graduado. La recíproca de esta afirmación no es cierta, los anillos épsilon fuertemente graduados que estudiaremos en la Sección 3.2 son un ejemplo de esto.

En Clark et al. (2018) se menciona que el objetivo de esta definición es estudiar anillos graduados que no tengan la disparidad que tiene el anillo de polinomios entre enteros negativos y positivos.

Ejemplo 3.1.11. Por el Ejemplo 3.1.5 si A es un anillo, entonces el anillo de polinomios $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} AX^n$ es $\mathbb{Z}-$graduado, sin embargo no es simétricamente graduado pues

$$R_n R_{-n} R_n = \{0\},$$

para cada $n > 0$.

Ejemplo 3.1.12. Si A es un anillo unitario, entonces $R = A[X, X^{-1}]$ el anillo de polinomios de Laurent es fuertemente $\mathbb{Z}$-graduado por el Ejemplo 3.1.6.con lo cual R es simétricamente graduado.

Seguidamente presentaremos definiciones y resultados que nos servirán de apoyo para algunas pruebas que mostraremos en este trabajo.

Proposición 3.1.13. *Sea R un anillo $\mathbb{Z}-$graduado, asociativo y no necesariamente unitario. R es fuertemente graduado si y sólo si $R_0R_n = R_n = R_nR_0$ y $R_1R_{-1} = R_{-1}R_1 = R_0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Note que si R es fuertemente $\mathbb{Z}-$graduado se tiene que $R_0R_n = R_n$ y $R_1R_{-1} = R_{-1}R_1 = R_0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Recíprocamente, sean $m, n \in \mathbb{Z}$ enteros arbitrarios, mostraremos por inducción que $R_m = (R_1)^m$:

- Base inductiva: Si $m = 1$ ya está.

- Paso inductivo: Supongamos que $R_k = (R_1)^k$. Veamos que $R_{k+1} = (R_1)^{k+1}$, en efecto:

$$R_{k+1} = R_0 R_{k+1} = R_1 R_{-1} R_{k+1} \subseteq R_1 R_k = R_1 (R_1)^k = (R_1)^{k+1} \tag{I}$$

  donde las dos primeras igualdades se dan por la hipótesis general, la tercera por ser anillo graduado y la cuarta igualdad por la hipótesis inductiva. Por otro lado,

$$\begin{aligned} (R_1)^{k+1} &= R_1 R_1 \cdots R_1 \quad \textit{(k+1)-veces} \\ &\subseteq R_1 \cdots R_1 R_2 \quad \textit{(k)-veces} \\ &\vdots \\ &\subseteq R_{k+1} \end{aligned}$$

  Así, por (I) y por lo anterior concluimos que $R_{k+1} = (R_1)^{k+1}$.

De una manera similar podemos demostrar por inducción que $R_{-n} = (R_{-1})^n$. Con las afirmaciones previas probaremos que R es fuertemente graduado, para esto analizaremos los siguientes casos:

- Caso 1: $R_m R_n = (R_1)^m (R_1)^n = (R_1)^{m+n} = R_{m+n}$;

- Caso 2: $R_{-m} R_{-n} = (R_{-1})^m (R_{-1})^n = (R_{-1})^{m+n} = R_{-m-n}$;

- Caso 3: Veamos que $R_m R_{-n} = R_{m-n}$. En efecto, por los resultados anteriores tenemos la igualdad $R_mR_{-n} = (R_1)^m(R_{-1})^n$, sin pérdida de generalidad supongamos que $m \geq n$ así

$$\begin{aligned}
(R_1)^m(R_{-1})^n &= R_1 \cdots R_1(R_1R_{-1})R_{-1} \cdots R_{-1} \\
&= R_1 \cdots R_1(R_0)R_{-1} \cdots R_{-1} \quad \textit{Usando que } R_1R_{-1} = R_0 \\
&\vdots \\
&= R_1 \cdots R_1 \quad (m-n)\textit{veces}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $R_mR_{-n} = (R_1)^m(R_{-1})^n = (R_1)^{m-n} = R_{m-n}$. De manera análoga, si $m \leq n$ obtenemos que $R_mR_{-n} = (R_1)^m(R_{-1})^n = (R_{-1})^{n-m} = R_{m-n}$.

- Caso 4: Demostrar que $R_{-m}R_n = R_{n-m}$ resulta análogo al Caso 3, usando la igualdad $R_{-1}R_1 = R_0$.

□

Corolario 3.1.14. *Sea R un anillo graduado. Si R es simétricamente $\mathbb{Z}-$graduado, entonces R es fuertemente $\mathbb{Z}$-graduado si y sólo si $R_1R_{-1} = R_{-1}R_1 = R_0$.*

Demostración. Si R es fuertemente $\mathbb{Z}$-graduado, es claro que $R_1R_{-1} = R_{-1}R_1 = R_0$. Recíprocamente, si $R_1R_{-1} = R_{-1}R_1 = R_0$ por la Proposición 3.1.13 es suficiente mostrar que $R_n = R_0R_n = R_nR_0$. En efecto, como R es graduado $R_0R_n \subseteq R_n$ y $R_nR_0 \subseteq R_n$, además dado que es simétricamente graduado tenemos que

$$R_n = R_nR_{-n}R_n \subseteq R_0R_n \quad y \quad R_n = R_nR_{-n}R_n \subseteq R_nR_0,$$

por lo tanto, R es fuertemente graduado. $\square$

3.2. Anillos épsilon-fuertemente graduados

En esta sección, comenzaremos recordando algunas nociones acerca de los módulos $s-$unitarios las cuales darán paso a las definiciones de anillos épsilon-fuertemente graduados y casi épsilon-fuertemente graduados, todo esto con el fin presentar el Teorema 3.2.22 y el Teorema 3.2.23 los cuales establecen que las álgebras de camino de Leavitt son ejemplos de estos. A lo largo de esta sección R denotará un anillo asociativo unitario, G denotará un grupo con elemento neutro e y E un grafo dirigido arbitrario.

Definición 3.2.1. *Dados R y R', un $R-$módulo izquierdo ($R'-$módulo derecho) M es llamado unitario a izquierda (derecha) si existe $e \in R$ ($e' \in R'$) tal que para todo $m \in M$ tenemos $em = m$ ($me' = m$). En este caso e (e') es llamada la identidad a izquierda (derecha) de M. Además, decimos que M es unitario si es unitario a izquierda y derecha como $R - R'-$bimódulo.*

Definición 3.2.2. *Dados R y R' anillos. Entonces:*

I. *Un $R-$módulo a izquierda M ($R-$módulo derecha) es llamado $s-$unitario si para cada $m \in M$ la relación $m \in Rm$ ($m \in mR$) se mantiene.*

II. *Un $R - R'-$bimódulo M se dice $s-$unitario si es $s-$unitario como $R-$módulo a izquierda y como $R'-$módulo a derecha.*

III. *El anillo R es llamado $s-$unitario a izquierda (derecha) si es $s-$unitario como módulo a izquierda (derecha) sobre si mismo.*

IV. El anillo R se dice $s-$unitario si es $s-$unitario como bimódulo sobre si mismo.

Proposición 3.2.3. *Si M es un $R-$módulo a izquierda, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *M es $s-$unitario;*

2. *para cada $m_1, \cdots, m_n \in M$ existe un elemento $e \in R$ tal que $em_i = m_i$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$.*

Demostración. Ver (Tominaga, 1976, Teorema 1). □

Definición 3.2.4. *Dado M un $R-$módulo a izquierda ($R'-$módulo a derecha). Decimos que M es libre de torsión si para todo $m \in M$ distinto de cero se cumple la relación $Rm \neq \{0\}$ ($mR' \neq 0$).*

Observación 11. Dado M un $R-$módulo izquierdo (derecho) tenemos las siguientes implicaciones:

$$M \text{ es unitario } \Rightarrow M \text{ es } s-\text{unitario } \Rightarrow M \text{ es libre de torsión}.$$

En efecto, si M es unitario existe $e \in R$ tal que para todo $m \in M$ tenemos $em = m$ así $m \in Rm$. Ahora, si M es $s-$unitario sea $0 \neq m \in M$, por definición $m \in Rm$ así $Rm \neq \{0\}$.

Enseguida, presentaremos la noción de anillos épsilon fuertemente graduados la cual fue introducida en Nystedt et al. (2018b).

Definición 3.2.5. *Dado R un anillo $G-$graduado. R es llamado épsilon fuertemente $G-$graduado si S_g como $S_gS_{g^{-1}} - S_{g^{-1}}S_g-$bimódulo es unitario para cada $g \in G$.*

Enunciaremos a continuación una caracterización de los anillos épsilon fuertemente graduados mediante equivalencias.

Proposición 3.2.6. *Sea R un anillo $G-$graduado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. *El anillo R es épsilon-fuertemente $G-$graduado;*

II. *El anillo R es simétricamente $G-$graduado y para cada $g \in G$ el anillo $S_g S_{g^{-1}}$ es unitario.*

III. *Para cada $g \in G$ existe $\varepsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que para todo $s \in S_g$ tenemos que $\varepsilon_g s = s\varepsilon_{g^{-1}} = s$.*

Demostración. Ver (Nystedt et al., 2018b, Proposición 7). □

Ahora, vamos a definir a los anillos casi épsilon-fuertemente graduados, los cuales son una noción más débil de los anillos épsilon-fuertemente graduados. Esta noción fue introducida recientemente en Nystedt and Öinert (2020).

Definición 3.2.7. *Dado $R = \bigoplus_{g \in G}$ un anillo $G-$graduado. Entonces, R es llamado casi épsilon fuertemente $G-$graduado si S_g como $S_g S_{g^{-1}} - S_{g^{-1}} S_g-$bimódulo es $s-$unitario para cada $g \in G$.*

Podemos pensar en la siguiente proposición como una versión $s-$unitaria de la Proposición 3.2.6.

Proposición 3.2.8. *Sea R un anillo $G-$graduado. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. *El anillo R es casi épsilon fuertemente $G-$graduado;*

II. *El anillo R es simétricamente $G-$graduado y para cada $g \in G$ el anillo $S_g S_{g^{-1}}$ es $s-$unitario.*

III. Para cada $g \in G$ y cada $s \in S_g$ existen $\varepsilon_g(s) \in S_g S_{g^{-1}}$ y $\varepsilon'(s) \in S_{g^{-1}} S_g$ tales que $\varepsilon_g(s)s = s\varepsilon'_g(s) = s$.

Demostración. Ver (Nystedt and Öinert, 2020, Proposición 3.3). □

Observación 12. Si se cumple I,II o III de la proposición anterior, entonces para todo $g \in G$ el S_e-ideal $S_g S_{g^{-1}}$ es generado por

$$\{\varepsilon_g(s) \mid s \in S_g\} \cup \{\varepsilon'_{g^{-1}}(s) \mid s \in S_g\}.$$

En efecto, sea I el S_e-ideal generado por $\{\varepsilon_g(s) \mid s \in S_g\} \cup \{\varepsilon'_{g^{-1}}(s) \mid s \in S_g\}$ veamos que $I = S_g S_{g^{-1}}$. Tomemos $a \in I$, entonces $a = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ con $a_i \in S_e$ y $x_i \in \{\varepsilon_g(s) \mid s \in S_g\} \cup \{\varepsilon'_{g^{-1}}(s) \mid s \in S_g\}$, nótese que si $x_i = \varepsilon_g(s) \in S_g S_{g^{-1}}$ para algún $s \in S_g$ y algún $i \in \{1, \cdots, n\}$, entonces $a_i x_i \in S_e S_g S_{g^{-1}} \subseteq S_g S_{g^{-1}}$. Ahora, si $x_i = \varepsilon'_{g^{-1}}(s)$ para algún $s \in S_g$, dado que $\varepsilon'_g(s) \in S_{g^{-1}} S_g$ tenemos $x_i \in S_g S_{g^{-1}}$ así $a_i x_i \in S_e S_g S_{g^{-1}} \subseteq S_g S_{g^{-1}}$ y por tanto $a \in S_g S_{g^{-1}}$. Recíprocamente, si $a \in S_g S_{g^{-1}}$, entonces $a = \sum_{i=1}^{m} (a_i)_g (b_i)_{g^{-1}}$ donde $a_i \in S_g$ y $b_i \in S_{g^{-1}}$, observemos que podemos reescribir

$$a = \sum_{i=1}^{m} (a_i)_g (b_i)_{g^{-1}} = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_g((a_i)_g)(a_i)_g (b_i)_{g^{-1}} \in I$$

y también,

$$a = \sum_{i=1}^{m} (a_i)_g (b_i)_{g^{-1}} = \sum_{i=1}^{m} (a_i)_g (b_i)_{g^{-1}} \varepsilon'_{g^{-1}}((b_i)_{g^{-1}}) \in I,$$

con lo cual podemos concluir que $I = S_g S_{g^{-1}}$ como S_e-ideal.

Siguiendo con las definiciones relacionadas con la graduación del anillo, presentamos el concepto de graduación no degenerada y fuertemente no degenerada.

Definición 3.2.9. *Decimos que la $G-$graduación en el anillo R es no degenerada a derecha (no degenerada a izquierda) si para cada $g \in G$ y cada s distinto de cero en S_g, si se cumple la relación $sS_{g^{-1}} \neq \{0\}$ ($S_{g^{-1}}s \neq \{0\}$). Si la graduación en R es no degenerada a derecha (izquierda), decimos que R es un anillo $G-$graduado no degenerado a derecha.*

Definición 3.2.10. *Decimos que la $G-$graduación en el anillo R es fuertemente no degenerada a derecha (fuertemente no degenerada a izquierda) si para cada $g \in G$ el $S_gS_{g^{-1}}-$módulo a izquierda ($S_gS_{g^{-1}}-$módulo a derecha) S_g es libre de torsión. Si la graduación en R es fuertemente no degenerada a derecha (izquierda), decimos que R es un anillo fuertemente no degenerado a derecha (izquierda) $G-$graduado.*

Proposición 3.2.11. *Sea R un anillo $G-$graduado. Si R es casi épsilon fuertemente graduado, entonces R es simétricamente $G-$graduado, fuertemente no degenerado a derecha G-graduado y fuertemente no degenerado a izquierda G-graduado.*

Demostración. Vamos a suponer que R es casi épsilon fuertemente graduado, por definición S_g es $s-$unitario como $S_gS_{g^{-1}}$ módulo a derecha y como $S_{g^{-1}}S_g$ módulo a izquierda, de ahí por la Observación 11 tenemos que S_g es libre de torsión para todo $g \in G$ por lo tanto R es fuertemente no degenerado a derecha G-graduado y fuertemente no degenerado a izquierda G-graduado. Por otra parte, por la Proposición 3.2.8 item II. tenemos que R es simétricamente $G-$graduado, de ahí concluimos el resultado. $\square$

Definición 3.2.12. *Dado R un anillo $G-$graduado. Una involución $(\cdot)^* : S \to S$ es llamada antigraduada si para todo $g \in G$ tenemos la igualdad $(S_g)^* = S_{g^{-1}}$.*

Enunciaremos ahora un par de resultados que serán de utilidad más adelante. Las pruebas de estos resultados los encontramos en (Nystedt and Öinert, 2020, Proposición 3.5) y (Nystedt and Öinert, 2020, Proposición 3.6), respectivamente.

Proposición 3.2.13. *Sea $R = \bigoplus_g R_g$ un anillo $G-$graduado. Si R tiene una involución antigraduada, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. R es épsilon fuertemente $G-$graduado;

II. Para cada $g \in G$, existe $\varepsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $\varepsilon_g^* = \varepsilon_g$ y para todo $s \in S_g$ tenemos la igualdad $\varepsilon_g s = s$;

III. Para cada $g \in G$, existe $\varepsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $\varepsilon_g^* = \varepsilon_g$ y para todo $s \in S_g$ tenemos la igualdad $s\varepsilon_{g^{-1}} = s$;

Proposición 3.2.14. *Sea R un anillo $G-$graduado. Si R tiene una involución antigraduada, entonces tenemos las siguientes afirmaciones:*

a. Si para cada $g \in G$ y todo $s \in S_g$, existe $\varepsilon_g(s) \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $\varepsilon_g(s)^* = \varepsilon_g(s)$ y se cumple la igualdad $\varepsilon_g(s)s = s$, entonces R es casi épsilon fuertemente $G-$graduado. En tal caso, para cada $g \in G$ el S_e-ideal $S_g S_{g^{-1}}$ es generado por $\{\varepsilon_g(s) \mid s \in S_g\}$.

b. Si para cada $g \in G$ y todo $s \in S_g$, existe $\varepsilon'_g(s) \in S_{g^{-1}} S_g$ tal que $\varepsilon'_g(s)^* = \varepsilon'_g(s)$ y se cumple la *igualdad* $s\varepsilon'_g(s) = s$*, entonces* R *es casi épsilon fuertemente* $G-$*graduado. En tal caso para cada* $g \in G$ *el* S_e-*ideal* $S_g S_{g^{-1}}$ *es generado por* $\{\varepsilon'_{g^{-1}}(s) \mid s \in S_g\}$.

Queremos ahora introducir un orden parcial el cual va a estar relacionado con las álgebras de camino de Leavitt. A partir de ahora en esta sección vamos a asumir que $L_K(E)$ está equipada con una $G-$graduación canónica $L_R(E) = \bigoplus_{g \in G} L_R(E)_g$.

Proposición 3.2.15. *Sea* $\leq$ *un preorden en un conjunto* X. *Si* $x, y \in X$*, decimos que* $x \backsim y$ *si* $x \leq y$ *y* $y \leq x$*, entonces* $\backsim$ *es una relación de equivalencia en* X *la cual hace que la relación cociente* $\preccurlyeq$ *en* $X/\backsim$ *inducida por* $\leq$ *sea una relación de orden.*

Definición 3.2.16. *Tomemos* $X = \{\alpha\beta^* \mid \alpha, \beta \in Path(E) \text{ y } r(\alpha) = r(\beta)\}$, $g \in G$ *y* $X_g = \{x \in X \mid grad(x) = g\}$. *Supongamos que* $\alpha, \beta, \gamma\delta \in Path(E)$ *satisfacen* $\alpha\beta^*, \gamma\delta^* \in X_g$. *Diremos que* $\alpha\beta^* \leq \gamma\delta^*$ *si* α *es un subcamino inicial de* γ *y diremos que* $\alpha\beta^* \backsim \gamma\delta^*$ *si* $\alpha\beta^* \leq \gamma\delta^*$ *y* $\gamma\delta^* \leq \alpha\beta^*$*, es decir, si* $\alpha = \gamma$.

En la definición anterior es válido que α o β sean vértices. Además, nótese que la componente homogénea $L_R(E)_g$ es generada $R-$linealmente por X_g.

Proposición 3.2.17. *Sea* $g \in G$ *arbitrario. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a. *La relación* $\leq$ *es un preorden en* X_g.

b. *La relación* $\backsim$ *es una relación de equivalencia en* X_g.

c. *La relación cociente* $\preccurlyeq$ *en* $X_g/\backsim$ *inducida por* $\leq$ *es una relación de orden.*

Demostración. Sean $\alpha_i, \beta_i \in Path(E)$ con $i \in \{1,2,3\}$ tales que $\alpha_i\beta_i \in Path(E)$.

a. Primero notemos que que $\alpha_1\beta_1^* \leq \alpha_1\beta_1^*$ pues α_1 es un subcamino inicial de si mismo, así $\leq$ es reflexiva. Ahora, supongamos que $\alpha_1\beta_1^* \leq \alpha_2\beta_2^*$ y $\alpha_2\beta_2^* \leq \alpha_1\beta_1^*$, entonces α_1 es un subcamino inicial de α_2 y α_2 es un subcamino inicial del α_3, por lo tanto α_1 es un camino inicial de α_3 esto es, $\alpha_1\beta_1^* \leq \alpha_3\beta_3^*$ así, α es transitiva.

b. Obsérvese que $\alpha_1\beta_1^* \backsim \alpha_1\beta_1^*$ pues $\alpha_1 = \alpha_1$. Veamos que la relación es simétrica, supongamos que $\alpha_1\beta_1^* \backsim \alpha_2\beta_2^*$, por definición esto implica que $\alpha_1 = \alpha_2$ de ahí que $\alpha_2\beta_2^* \backsim \alpha_1\beta_1^*$. Ahora veamos la transitividad, supongamos que $\alpha_1\beta_1^* \backsim \alpha_2\beta_2^*$ y $\alpha_2\beta_2^* \backsim \alpha_3\beta_3^*$, por definición tenemos que $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\alpha_2 = \alpha_3$ con lo cual concluimos que $\alpha_1\beta_1^* \backsim \alpha_3\beta_3^*$.

c. Se sigue de la Proposición 3.2.15.

□

Proposición 3.2.18. *Sea $g \in G$. Entonces la función*

$$\mathscr{N} : X_g/\backsim \longrightarrow L_R(E)_e$$

$$[x] \longmapsto xx^*$$

está bien definida.

Demostración. Supongamos que $[x] = [y]$. Entonces $x \backsim y$ lo que implica que $x \leq y$ y $y \leq x$ por lo tanto existen caminos α,β,γ con $x=\alpha\beta^*$ y $y=\alpha\gamma^*$, de ahí

$$xx^* = \alpha\beta^*\beta\alpha^* = \alpha r(\beta)\alpha^* = \alpha r(\gamma)\alpha^* = \alpha\gamma^*\gamma\alpha^* = yy^*.$$

□

Denotaremos por $\mathcal{N}_g(x) := xx^*$.

Lema 3.2.19. *Sean $\alpha,\beta \in Path(E)$ tales que $\alpha^*\beta \in L_R(E)$ con $\alpha^*\beta \neq 0$. Entonces, α es un subcamino inicial de β o viceversa.*

Demostración. Supongamos que $|\alpha| = m$, $|\beta| = n$ y que $\alpha = f_1 f_2 \cdots f_m$ y $\beta = g_1 g_2 \cdots g_n$. Analicemos los posibles casos, si $m \leq n$ entonces, por la propiedad $(CK1)$ si $f_i \neq g_i$ para algún $i \in \{1,\cdots m\}$ tenemos que $\alpha^*\beta = 0$, así que $f_i = g_i$ para todo $i \in \{1,\cdots,m\}$ por lo tanto $\beta = \alpha\beta'$ para algún $\beta' \in Path(E)$. De manera análoga si $m > n$ y $\alpha^*\beta \neq 0$ tenemos por la propiedad $(CK1)$ que $\alpha = \beta\alpha'$ para algún $\alpha' \in Path(E)$. □

Proposición 3.2.20. *Sean $g \in G$ y $x,y \in X_g$ elementos arbitrarios. Entonces, tenemos las siguientes afirmaciones:*

a. Si $[x] \preccurlyeq [y]$, entonces $\mathcal{N}_g(x)y = y$;

b. Si $[x] \not\preccurlyeq [y]$ y $[y] \not\preccurlyeq [x]$, entonces $\mathcal{N}_g(x)y = 0$.

Demostración. Sean $x = \alpha\beta^* \in X_g$ y $y = \gamma\delta^* \in X_g$ con $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in Path(E)$.

a. Supongamos que $[x] \preccurlyeq [y]$. Entonces, α es un subcamino inicial de γ, por tanto $\gamma = \alpha\alpha'$ para algún $\alpha' \in Path(E)$ tal que $r(\alpha) = s(\alpha')$. Por lo anterior,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_g(x)y = xx^*y = \alpha\beta^*\beta\alpha^*\gamma\delta^* &= \alpha r(\beta)\alpha^*\alpha\alpha'\delta^* \\ &= \alpha\alpha^*\alpha\alpha'\delta^* = \alpha r(\alpha)\alpha'\delta^* = \alpha\alpha'\delta^* = \gamma\delta^* = y. \end{aligned}$$

b. Si $[x] \not\preccurlyeq [y]$ y $[y] \not\preccurlyeq [x]$, entonces ni α es un camino inicial de γ ni γ es un camino inicial de α, por consiguiente $\alpha^*\gamma = 0$ por $(CK1)$ y así

$$\mathcal{N}_g(x)y = \alpha\beta^*\beta\alpha^*\gamma\delta^* = \alpha r(\beta)0\delta^* = 0.$$

$\square$

Notemos que si E es un grafo finito y $g \in G$, dado que E es finito es posible elegir $n_g \in \mathbb{N}$ y $m_1, \cdots, m_{n_g} \in X_g$ tales que $\{[m_1], \cdots, [m_{n_g}]\}$ es el conjunto de elementos minimales de $X_g / \backsim$ con respecto a $\preccurlyeq$.

Definición 3.2.21. *Dado E un grafo finito y* $\{[m_1], \cdots, [m_{n_g}]\}$ *el conjunto de elementos minimales de* $X_g / \backsim$*. Definimos*

$$\varepsilon_g = \sum_{i=1}^{n_g} \mathcal{N}_g(m_i).$$

Observación 13. Notemos que:

a. Si $g = e$, entonces $\varepsilon_v = \sum_{v \in E^0} v$. En efecto, si $m_i \in X_e$ no es un vértice entonces $m_i = \alpha\beta^*$

para $\alpha, \beta \in Path(E)$. Nótese que $s(\alpha) \leq \alpha\beta^*$, lo cual implica que $[s(\alpha)] \preccurlyeq [\alpha\beta^*] = [m_i]$ contradiciendo la minimalidad de $[m_i]$.

b. Para cada $g \in G$ tenemos que $\varepsilon_g = \varepsilon_g^*$. Esto pues,

$$(\varepsilon_g)^* = \sum_{i=1}^{n_g} (m_i m_i^*)^* = \sum_{i=1}^{n_g} (m_i^*)^* m_i^* = \sum_{i=1}^{n_g} m_i m_i^*.$$

Finalmente procedemos a mostrar que las álgebras de camino de Leavitt son épsilon fuertemente graduadas si el grafo es finito y casi épsilon fuertemente graduadas para cualquier grafo. Para las pruebas de estos resultados nos guiaremos de (Nystedt et al., 2018b, Teorema 4.1) y (Nystedt et al., 2018b, Teorema 4.2) respectivamente.

Teorema 3.2.22. *Sea E un grafo dirigido finito y R un anillo asociativo unitario. Entonces, $L_R(E)$ con la $G-$graduación canónica es épsilon fuertemente graduada.*

Demostración. Sea $g \in G$ arbitrario. Dado que el grafo es finito, por la Definición 3.2.21 existe $n_g \in \mathbb{N}$ y $m_1, \cdots, m_n \in X_g$ tales que $\{[m_1], \cdots, [m_n]\}$ es el conjunto de elementos minimales de $X_g / \backsim$ y tomamos

$$\varepsilon_g = \sum_{i=1}^{n_g} \mathcal{N}_g(m_i) = \sum_{i=1}^{n_g} m_i m_i^* \in L_R(E)_g L_R(E)_{g^{-1}}.$$

Sea $\gamma\delta^* \in X_g$, afirmamos que existe un único $j \in \{1, \cdots, n_g\}$ tal que $[m_i] \preccurlyeq [\gamma\delta^*]$. En efecto, supongamos que existe $i \in \{1, \cdots, n_g\}$ tal que $[m_i] \preccurlyeq [\gamma\delta^*]$, esto implica que $m_i = \alpha\beta^*$ donde α es un camino inicial de γ, pero $m_j = \alpha'\beta'^*$ con α' un subcamino inicial de γ de ahí que $[m_i] \preccurlyeq [m_j]$ o $[m_j] \preccurlyeq [m_i]$ en cualquier caso esto contradice la minimalidad, con lo cual concluimos la afirmación.

Ahora bien, por la Proposición 3.2.20 tenemos $\mathcal{N}(m_j)\gamma\delta^* = \gamma\delta^*$ y para cada $i \neq j$ tenemos que $\mathcal{N}(m_i)\gamma\delta^* = 0$. Así, por la Observación 13 item b y dado que S_g es generado por X_g, podemos aplicar la Proposición 3.2.13 para concluir que $L_R(E)$ es épsilon fuertemente graduada. □

Teorema 3.2.23. *Sea E un grafo dirigido y R un anillo asociativo unitario. Entonces $L_R(E)$ con la $G-$graduación canónica es casi épsilon fuertemente graduada.*

Demostración. Sea $g \in G$ y $s \in S_g$. Entonces, podemos escribir $s = \sum_{i=1}^{n} r_i\alpha_i\beta_i^*$ con $r_i \in R$ y $\alpha_i\beta_i^* \in X_g$. Sea $I = \{1, \cdots, n\}$ y $J \subseteq I$ tal que $\{[\alpha_j\beta_j^*]\}_{j\in J}$ es el conjunto de elementos minimales respecto a $\preccurlyeq$. Fijemos

$$\varepsilon_g(s) = \sum_{j\in J} \mathcal{N}_g(\alpha_j\beta_j^*) \in L_R(E)_g L_R(E)_{g^{-1}}.$$

De manera análoga al Teorema 3.2.22, podemos afirmar que existe un único $j(i) \in J$ tal que $[\alpha_{j(i)}\beta_{j(i)}^*] \preccurlyeq [\alpha_i\beta_i^*]$, así por la Proposición 3.2.20 tenemos que $\mathcal{N}_g(\alpha_{j(i)}\beta_{j(i)}^*)\alpha_i\beta_i^* = \alpha_i\beta_i^*$ y si $j = j(i)$, entonces $\mathcal{N}_g(\alpha_j\beta_j^*) = 0$. Así obtenemos que

$$\varepsilon_g(s)s = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} r_i\mathcal{N}_g(\alpha_j\beta_j^*) = \sum_{i\in I} r_i\mathcal{N}_g(\alpha_{j(i)}\beta_{j(i)}^*)\alpha_i\beta_i^* = \sum_{i\in I} r_i\alpha_i\beta_i^* = s,$$

con lo anterior y puesto que $\varepsilon_g(s) = (\varepsilon_g(s))^*$ podemos aplicar la Proposición 3.2.14 para concluir el resultado. □

Ahora, como consecuencia del Teorema 3.2.23 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2.24. *Si E es un grafo dirigido y R un anillo asociativo unitario, entonces el álgebra de camino de Leavitt $L_R(E)$ con la $G-$graduación canónica es fuertemente no degenerada a* *derecha y fuertemente no degenerada o izquierda.*

Demostración. Sabemos por el Teorema 3.2.23 que $L_R(E)$ es casi épsilon fuertemente graduado, entonces por la Proposición 3.2.11 obtenemos el resultado. $\square$

Presentaremos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.2.25. Consideremos el siguiente grafo:

$$E:\begin{tikzcd} \underset{v_1}{\bullet} & \underset{v_2}{\bullet} \arrow[l] \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Figura 11. Grafo con un sink.

Este grafo E es finito y el vértice v_1 es un sink, entonces por el Teorema 3.3.6 el álgebra de camino de Leavitt $L_K(E)$ no es fuertemente $\mathbb{Z}-$graduada, además por el Teorema 3.2.22 obtenemos $L_K(E)$ es épsilon fuertemente $\mathbb{Z}-$graduada.

Ejemplo 3.2.26. Sea F el siguiente grafo:

$$F:\ \underset{v_1}{\bullet} \xrightarrow{(\infty)} \underset{v_2}{\bullet}$$

Figura 12. Un grafo con un emisor infinito.

El grafo F es infinito pues $F^1 = \{f_1, f_2, f_3, \cdots\}$ y por el Teorema 3.2.23 $L_R(F)$ es casi épsilon fuertemente $\mathbb{Z}-$graduada. Ahora la pregunta es si este grafo induce un álgebra de caminos de

Leavitt épsilon fuertemente $\mathbb{Z}-$graduada, para contestar esto veamos algunas de las componentes homogéneas en $L_R(F)$:

- $L_K(F)_0 = \langle\{v_1, v_2, f_1f_1^*, f_1f_2^*, \cdots, f_2f_1^*, f_2f_2^*, \cdots, f_if_j^*, \cdots\}\rangle$;
- $L_K(F)_1 = \langle\{f_1, f_2, f_3, \cdots\}\rangle$;
- $L_K(F)_{-1} = \langle\{f_1^*, f_2^*, f_3^*, \cdots\}\rangle$.

Si $L_K(F)_1$ fuese finito se habría podido escoger $\varepsilon_1 = \sum_{f\in F^1} ff^*$, sin embargo este no es el caso. Para ver si $L_R(F)$ es épsilon fuertemente graduada debemos probar que se cumplen las condiciones de la Proposición 3.2.6, para esto la única opción que tenemos es que $\varepsilon_1 = v_1$, luego nos resta probar que $\varepsilon_1 = v_1 \in S_1S_{-1}$. Supongamos que en efecto $\varepsilon_1 = v_1 \in S_1S_{-1}$, entonces podemos suponer que

$$v_1 = \sum_{i\in n} r_if_ig_i^*$$

con $f_i \in S_1$ y $g_i \in S_{-1}$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, así cada $g_i = f_{k_i}$ para algún $k_i \in \mathbb{N}$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$0 \neq v_2 = f_k^*f_k = f_k^*v_1f_k = \sum_{i=1}^{n} r_if_k^*f_if_{k_i}^*f_k$$

en particular, existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $k = i = k_i$, por ende como lo anterior es válido para cada $k \in \mathbb{N}$ esto contradice que v_1 se pueda expresar como una suma finita y por lo tanto $L_R(F)$ no es épsilon fuertemente $\mathbb{Z}-$graduado.

Los ejemplos de arriba implican que no todo anillo casi épsilon fuertemente graduado es épsilon fuertemente graduado y que no todo anillo épsilon fuertemente graduado es fuertemente graduado.

3.3. Álgebras de camino de Leavitt fuertemente $\mathbb{Z}-$graduadas

Vamos a enfocarnos en algunos resultados que nos dan condiciones necesarias y suficientes para que el álgebra de camino de Leavitt sea fuertemente graduada con la $\mathbb{Z}-$graduación canónica, como veremos dichas condiciones están relacionadas con las propiedades del grafo. Para esto tomaremos como guía los artículos Nystedt and Öinert (2020) y Lundström and Öinert (2021). En esta sección R denotará un anillo asociativo no necesariamente unitario y E un grafo dirigido.

Comenzaremos enunciando algunos lemas y definiciones que nos servirán para demostrar el Teorema 3.3.6 y el Teorema 3.3.8.

Lema 3.3.1. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos finitos no vacíos y para cada $n\in\mathbb{N}$ tenemos una función $g_n : X_{n+1}\to X_n$, entonces existe un elemento*

$$(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n,$$

tal que para cada $n\in\mathbb{N}$ se cumple la igualdad $g_n(x_{n+1}) = x_n$.

Demostración. Vamos a comenzar probando la siguiente afirmación:

<u>*Afirmación:*</u> *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos finitos no vacíos y para cada $n\in\mathbb{N}$ tenemos una función $g_n : X_{n+1}\to X_n$, entonces existe una sucesión de conjuntos $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $Z_n\subseteq X_n$ y $g_n(Z_{n+1}) = Z_n$.*

En efecto, para todo $m,n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$Y_n^m = (g_n \circ g_{n+1} \circ \cdots \circ g_{m+n-1})(X_{m+n}),$$

entonces para cada $m,n \in \mathbb{N}$ el conjunto Y_n^m es no vacío y finito pues cada X_n es vacío y finito, además es un subconjunto de X_n. Notemos que

$$Y_n^{m+1} \subseteq Y_n^m \tag{1}$$

y además

$$g_n(Y_{n+1}^m) = g_n((g_n \circ g_{n+1} \circ \cdots \circ g_{m+n-1})(X_{m+n})) = Y_n^{m+1}. \tag{2}$$

Escogemos entonces $Z_n = \cap_{m \in \mathbb{N}} Y_n^m$, el cual por (1) es un subconjunto finito y no vacío de X_n. Dado que cada Y_n^m es finito y no vacío, existe $p(n) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq p(n)$ las igualdades $Y_n^k = Y_n^{p(n)} = z_n$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $k = max\{p(n+1), p(n)\}$, entonces, por (2) tenemos que

$$g_n(Z_{n+1}) = g_n(Y_{n+1}^{p(n+1)}) = g_n(Y_{n+1}^k) = Y_n^{k+1} = Z_n,$$

lo cual muestra la afirmación.

Ahora bien, haciendo uso de la afirmación anterior vamos a definir un elemento $(x_1, x_2, \cdots) \in$

$\prod_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ inductivamente de la siguiente manera, sea $x_1 \in Z_1$ un elemento arbitrario. Supongamos que hemos definido $x_n \in Z_n$ para todo $n \leq m$, entonces escogemos x_{m+1} como un elemento de $g_m(x_m) \cap Z_{m+1}$. El elemento $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ anterior cumple la igualdad $g_n(x_{n+1}) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto concluimos el resultado.

□

Lema 3.3.2. *Sea R un anillo unitario y E un grafo dirigido. Considere el álgebra de camino de Leavitt $S = L_R(E)$ con la $\mathbb{Z}-$graduación canónica. Entonces son válidas las siguientes afirmaciones:*

I. Si E es row-finite y no tiene sink, entonces $S_1S_{-1} = S_0$.

II. Si E no tiene source, entonces $S_{-1}S_1 = S_0$.

III. Si $L_R(E)$ es fuertemente graduada, entonces E no tiene sinks.

Demostración.

I. Sabemos por la $\mathbb{Z}-$graduación que $S_1S_{-1} \subseteq S_0$, por lo que sólo debemos verificar que $S_0 \subseteq S_1S_{-1}$. Por la Proposición 3.1.2 sabemos que S_0 es un subanillo de $L_R(E)$ y dado que para cada $r \in S_0$, y $b \in S_1S_{-1}$ tenemos que $rb \in S_0S_1S_{-1} \subseteq S_1S_{-1}$ podemos concluir que S_1S_{-1} es un ideal de S_0. Ahora bien, el Lema 2.1.6 nos dice que las sumas finitas de elementos de E^0 forman un conjunto de unidades locales para $L_R(E)$ y en particular para S_0, de ahí afirmamos que si $E^0 \subseteq S_1S_{-1}$, entonces $S_0 \subseteq S_1S_{-1}$, esto pues dado $r \in S_0$ existe una suma finita u de elementos de E^0 y por ende $u \in S_1S_{-1}$ tal que $r = ru \in S_0S_1S_{-1} \subseteq S_1S_{-1}$, con lo cual solo resta probar la afirmación. En efecto, como E es row-fnite y no tiene sinks por la propiedad $(CK2)$ de $L_R(E)$ tenemos que cada $v \in E_0$ lo podemos escribir como

$$v = \sum_{\{e \in E^1 | s(e) = v\}} ee^* \in S_1 S_{-1},$$

con lo cual concluimos la prueba.

II. Usando el argumento anterior, basta mostrar que $E^0 \subseteq S_{-1}S_1$. Si $v \in E^0$, dado que v no es source por hipótesis, existe $f \in E^1$ tal que $v = r(f)$ y por la propiedad $(CK1)$ tenemos que $v = r(f) = f^* f \in S_{-1}S_1$ por ende $S_0 = S_{-1}S_1$.

III. Supongamos por contradicción que existe un sink $v \in E^0$, como $L_R(E)$ es fuertemente graduada tenemos que $v \in S_0 = S_1 S_{-1}$ y ya que los vértices son idempotentes

$$v = vv \in vS_1 S_{-1}$$

pero, $vS_1 = 0$ ya que no existen un monomio $\mu\eta^*$ tales que $\mu, \eta \in Path(E)$ y $|\mu| - |\eta| = 1$ con $v = s(\mu\eta^*)$. Así obtenemos que $v = 0$ lo cual es absurdo.

□

Proposición 3.3.3. *Si E es un grafo dirigido y R un anillo asociativo unitario, entonces $L_R(E)$ con la graduación canónica es simétricamente $\mathbb{Z}-$graduada.*

Demostración. En efecto, sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, si $L_R(E)_n = \{0\}$ claramente $L_R(E)_n = L_R(E)_n L_R(E)_{-n} L_R(E)_n$.

Ahora supongamos que $L_R(E)_n \neq \{0\}$, puesto que $L_R(E)$ es $\mathbb{Z}-$graduada la contenencia $L_R(E)_nL_R(E)_{-n}L_R(E)_n \subseteq L_R(E)_n$ se mantiene, por lo cual sólo debemos verificar la otra contenencia. Sea $\alpha\beta^* \in L_R(E)_n$ un monomio distinto de cero, entonces $r(\alpha) = r(\beta)$ y $\beta\alpha^* \in L_R(E)_{-n}$, luego

$$\begin{aligned}
\alpha\beta^* &= \alpha r(\beta)\beta^* && \textit{Por E2} \\
&= \alpha r(\beta)r(\alpha)\beta^* && \textit{Pues } r(\alpha) = r(\beta) \\
&= \alpha(\beta^*\beta)(\alpha^*\alpha)\beta^* && \textit{Por CK1} \\
&= (\alpha\beta^*)(\beta\alpha^*)(\alpha\beta^*)
\end{aligned}$$

así, $\alpha\beta^* = (\alpha\beta^*)(\beta\alpha^*)(\alpha\beta^*) \in L_R(E)_nL_R(E)_{-n}L_R(E)_n$, con lo cual concluimos que $L_R(E)$ es simétricamente $\mathbb{Z}-$graduado. □

Definición 3.3.4. *Sea $\alpha \in E^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Decimos que el vértice $r(\alpha)$ es un **vértice giratorio** de α si existe $\beta \in E^{n+1}$ con $r(\alpha) = r(\beta)$.*

Veamos algunos ejemplos de esta definición.

Ejemplo 3.3.5.

I. Sea E_1 el siguiente grafo:

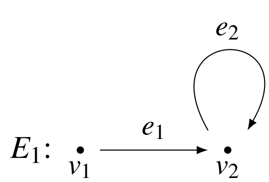


Figura 13. Grafo giratorio.

Tenemos que v_2 es un vértice giratorio para el camino $\alpha = e_1e_2 \in E^2$ pues $\beta = e_1e_2e_2 \in E^3$ es tal que $r(\alpha) = r(e_2) = r(\beta)$.

II. Consideremos el siguiente grafo E_2:

$$E_2: \begin{tikzcd} \underset{v_1}{\bullet} \arrow[r, "f_1"] & \underset{v_2}{\bullet} & \underset{v_3}{\bullet} \arrow[l, "f_2"'] & \underset{v_4}{\bullet} \arrow[l, "f_3"'] \end{tikzcd}$$

Figura 14. Grafo con vértice v_2 giratorio.

Para este grafo v_2 es un vértice giratorio para el camino $\alpha = f_1 \in E^1$ ya que $\beta = f_3f_2 \in E^2$ satisface que $r(\alpha) = r(f_1) = r(f_2) = r(\beta)$.

Finalmente presentaremos los resultados principales de esta sección, vamos a comenzar probando una generalización de (Hazrat, 2016, Teorema 1.6.15) que podemos encontrar en (Nystedt and Öinert, 2020, Teorema 6.1).

Teorema 3.3.6. *Sea E un grafo row-finite que no tiene source. Entonces, $L_R(E)$ es fuertemente $\mathbb{Z}-$graduada si y sólo si E no tiene sinks.*

Demostración. Primero, si $L_R(E)$ es fuertemente $\mathbb{Z}-$graduada por *III* del Lema 3.3.2 el grafo no tiene sinks. Recíprocamente, si E no tiene sinks y además es row-finite entonces por *I* del Lema 3.3.2 $S_1S_{-1} = S_0$ y dado que E no tiene sources por *II* del Lema 3.3.2 $S_{-1}S_1 = S_0$, ahora bien por la Proposición 3.3.3 sabemos que $L_R(E)$ es simétricamente graduada y por el Corolario 3.1.14 concluimos que $L_R(E)$ es fuertemente $\mathbb{Z}-$graduada. $\square$

Presentaremos ahora un resultado más general, para la prueba tomaremos como guía (Lundström and Öinert, 2021, Teorema 1.3) donde Lundström y Öinert presentan una prueba directa de (Clark et al., 2019, Teorema 4.2) sin utilizar resultados altamente técnicos. Vamos a requerir de la siguiente definición.

Definición 3.3.7. *Decimos que el grafo E satisface la condición* $(Y1)$ *si para cada camino infinito p, existe un subcamino inicial* α *del camino p y un camino infinito* β *tal que* $r(\beta) = r(\alpha)$ *y* $|\beta| - |\alpha| = 1$.

Notemos que la condición $(Y1)$ de un grafo, es un caso particular de la condición (Y) de la Definición 1.1.6.

Teorema 3.3.8. *Sean R un anillo unitario, pero no necesariamente conmutativo y E un grafo dirigido, consideremos a* $L_R(E)$ *con la* $\mathbb{Z}-$*graduación canónica. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. $L_R(E)$ *es fuertemente* $\mathbb{Z}-$*graduada ;*

II. *E es row-finite, no tiene sinks y satisface la condición (Y);*

III. *E es row-finite, no tiene sinks y satisface la condición (Y1);*

Demostración. Para mostrar que las afirmaciones anteriores son equivalentes vamos a probar que I implica II, II implica III y III implica I:

1. Vamos a suponer que $S = L_R(E)$ es fuertemente $\mathbb{Z}-$graduada y veamos que E cumple las condiciones de la afirmación II:

- <u>E no tiene sinks</u>: Consecuencia del Lema 3.3.2 item III.

- <u>E es row finite</u>: Debemos probar que $s^{-1}(v) = \{e \in E^1 \mid s(e) = v\}$ es un conjunto finito para cada $v \in E^0$. Supongamos por contradicción que existe $v \in E^0$ tal que $|s^{-1}(v)| = \infty$. Por la hipótesis tenemos que $v \in S_0 = S_1 S_{-1}$, por lo tanto podemos escribir

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i^* \gamma_i \delta_i^*,$$

donde $\alpha_i \beta_i^* \in S_1$ y $\gamma_i \delta_i^* \in S_{-1}$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, note que si $\gamma_i \delta_i^* \in S_{-1}$ podemos decir que $|\delta_i| > 0$. Así pues, para cada $f \in \{e \in E^0 \mid s(e) = v\}$ obtenemos que

$$f = vf = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i^* \gamma_i \delta_i^* f$$

sin embargo, la propiedad $(CK1)$ nos dice que $\delta_i^* f \neq 0$ siempre que la primera arista de δ_i sea igual a la arista f pero tenemos un número infinito de estas aristas que inician en el vértice v y sólo un número finito de caminos δ_i, de ahí que van a existir aristas tales que ningún camino δ_i comienza en esas $f's$, por lo que para dichas aristas $f = 0$ lo cual es un absurdo.

- <u>E cumple la condición (Y)</u>: Sean ρ un camino infinito, $k > 0$ un entero arbitrario y $v = s(\rho) \in E^0$. Por hipótesis sabemos que $S_0 = S_{-k} S_k$ de ahí que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i^* \gamma_i \delta_i^*$$

con $\alpha_i\beta_i^* \in S_{-k}$ y $\gamma_i\delta_i^* \in S_k$. Sea ρ' un subcamino inicial de ρ tal que $|\rho'| > |\delta_i|$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ (podemos escoger ρ' tan grande como queramos pues ρ es infinito). Notemos que

$$v\rho' = s(\rho')\rho' = \rho'$$

ya que ρ' es un subcamino inicial de ρ, por lo tanto debe existir algún $m \in \{1, \cdots, n\}$ tal que δ_m es un subcamino inicial de ρ' de lo contrario $v\rho' = 0$. Tomemos $\alpha = \delta_m$ y $\beta = \gamma_m$, como $\delta_m \neq 0$ tenemos que $r(\alpha) = r(\beta)$ y dado que $\gamma_m\delta_m^* \in S_k$ obtenemos $|\gamma_m| - |\delta_m| = |\beta| - |\alpha| = k$, por lo tanto concluimos que E satisface la condición (Y).

2. Basta tomar $k = 1$ en la definición de Condición (Y).

3. Veamos que $S = L_R(E)$ es fuertemente graduada, para esto por la Proposición 3.1.13 debemos verificar que $S_0S_n = S_n = S_nS_0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y que $S_1S_{-1} = S_0 = S_{-1}S_1$. Dado que el conjunto S_0 contiene a los vértices del grafo los cuales forman un conjunto de unidades locales para $L_R(E)$ tenemos las igualdades $S_0S_n = S_n = S_nS_0$ y como por hipótesis E es row finite y no tiene sinks, por el Lema 3.3.2 item I se cumple la igualdad $S_0 = S_1S_{-1}$, así pues sólo resta probar que $S_0 = S_{-1}S_1$. Por un argumento análogo al del Lema 3.3.2 item I es suficiente mostrar que $E^0 \subseteq S_{-1}S_1$. Notemos primero que para cada vértice v el cual no es source $v \in S_{-1}S_1$, esto ya que si alguna arista f del grafo termina en v tenemos por la propiedad $(CK1)$ que

$$v = r(f) = f^*f \in S_{-1}S_1,$$

por lo que sólo debemos enfocarnos en los vértices que son sources.

Sea $v \in E^0$, definimos de forma inductiva una sucesión de conjuntos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comenzaremos con

$$X_1 := \{f \in E^1 \mid s(f) = v \text{ } y \text{ } r(f) \textit{ no es un vértice giratorio de } f\},$$

notemos que X_1 es un conjunto finito pues el grafo es row-finite. Supongamos que hemos definido el conjunto $X_n \subseteq E^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Sean

$$\begin{aligned} X_{n+1} := \{\alpha f \in E^{n+1} \mid & \alpha \in X_n, f \in E^1, s(f) = r(\alpha) \text{ } y \text{ } r(f) \\ & \textit{no es un vértice giratorio de } \alpha f\} \end{aligned}$$

tenemos que X_{n+1} es finito pues E es row finite y X_n es finito. Afirmamos que debe existir $n \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto X_n es vacío. En efecto, asumamos por contradicción que X_n es no vacío para cada $n \in \mathbb{N}$, esto nos permite definir las funciones

$$\begin{aligned} g_n : X_{n+1} &\to X_n \\ \alpha f &\mapsto \alpha, \end{aligned}$$

entonces por el Lema 3.3.1 existe $(x_1, x_2, \cdots) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tal que $g_n(x_{n+1}) = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obsérvese que $p = x_1 x_2 \cdots$ es un camino infinito en E con $v = s(p)$, pues $r(x_i) = s(x_{i+1})$ por la definición de los X_i y $x_1 \in X_1$, asimismo el camino p tiene la propiedad de que $r(x_n)$ no es un vértice giratorio del subcamino $x_1 x_2 \cdots x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y esto contradice la condición $(Y1)$ del grafo, ya que si existe un subcamino inicial $\alpha = x_1 \cdots x_n \in E^n$ de p que cumpla la condición $(Y1)$ para p debe pasar que exista un camino finito β con $|\beta| - |\alpha| = 1$ y $r(\alpha) = r(\beta)$ lo que implica que $\beta \in E^{n+1}$ y por tanto $r(\alpha) = r(x_n)$ es un vértice giratorio, lo cual no es posible por la definición de X_n, concluimos así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que X_n es vacío. Definamos $K = min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = \emptyset\}$.

Vamos a mostrar ahora que

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \alpha_i^*$$

para algún $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in Path(E)$ tal que $r(\alpha_i)$ es un vértice giratorio de cada α_i. En efecto, puesto que E es row-finite y no tiene sinks podemos escribir

$$v = \sum_{i=1}^{m'} f_i f_i^*, \tag{1}$$

donde $s^{-1}(v) = \{f_1, \cdots, f_{m'}\}$, ahora si para algún i tenemos que $r(f_i)$ no es un vértice giratorio de f_i, entonces $f_i \in X_1$ y podemos reescribir

$$\begin{aligned} f_i f_i^* &= f_i r(f_i) f_i^* && por\ (E2) \\ &= f_i \left(\sum_{h \in s^{-1}(r(f_i))} hh^* \right) f_i^* && por\ (CK2) \end{aligned}$$

en (1), en caso de que $r(f_i h)$ sea de nuevo un vértice giratorio de algún h encontramos que $f_i h \in X_2$ y podemos repetir el proceso, observemos que podemos repetir este proceso siempre que encontremos vértices giratorios, pero este proceso se detiene pues $X_k = \emptyset$, de esta manera podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ y caminos $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in Path(E)$ con $|\alpha_i| \leq k$ para todo $i \in \{1, \cdots, m\}$, tales que

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \alpha_i^*$$

y para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$ $r(\alpha_i)$ es un vértice giratorio de α_i. De la afirmación anterior obtenemos que para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$ existe $\beta_i \in Path(E)$ con $r(\alpha_i) = r(\beta_i)$ y $|\beta_i| - |\alpha_i| = 1$, así pues

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \alpha_i^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i r(\alpha_i) \alpha_i^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i r(\beta_i) \alpha_i^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i \beta_i^* \alpha_i^*$$

y dado que $|\beta_i| - |\alpha_i| = 1$ tenemos que

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i \beta_i^* \alpha_i^* \in S_{-1} S_1,$$

con lo cual concluimos que $L_R(E)$ es fuertemente graduado.

□

Ejemplo 3.3.9. Sea E el siguiente grafo:

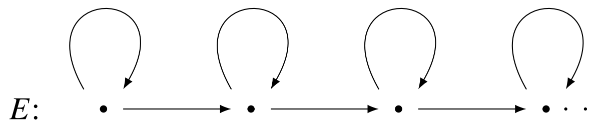


Figura 15. Grafo row-finte, sin sinks y con la Condición (Y).

Este grafo es row-finite, no tiene sinks y por la Proposición 1.1.8 satisface la condición (Y), en consecuencia por el Teorema 3.3.8 concluimos que $L_R(E)$ es fuertemente $\mathbb{Z}$-graduada.

Finalizaremos esta sección caracterizando las álgebras de caminos de Leavitt fuertemente graduadas si el grafo es finito. Para esto comenzaremos presentando algunos lemas donde usaremos la notación de la sección anterior.

Lema 3.3.10. *Sea E un grafo finito. Entonces,* $\varepsilon_1 = \sum_{v\in\{v\in E^0 \mid v \text{ no es un sink}\}} v.$

Demostración. Dado que $\{[\alpha] \mid \alpha \in E^1\}$ es un conjunto de elementos minimales en $X_1/\backsim$, por la Definición 3.2.21 se sigue que

$$\varepsilon_1 = \sum_{\alpha\in E^1} \mathscr{N}_1(\alpha) = \sum_{\alpha\in E^1} \alpha\alpha^*.$$

Nótese que podemos reescribir la suma de arriba de la siguiente manera

$$\sum_{\alpha\in E^1} \alpha\alpha^* = \sum_{\{v\in E^0 \mid v \text{ no es sink}\}} \sum_{\{\alpha\in E^1 \mid s(\alpha)=v\}} \alpha\alpha^* = \sum_{\{v\in E^0 \mid v \text{ no es sink}\}} v,$$

con lo cual concluimos el resultado. $\square$

Lema 3.3.11. *Si E es un grafo finito sin sinks, entonces para cada $v \in E^0$ existe $n_v \in \mathbb{N}$ y $m_{1,v}, \cdots, m_{n_v,v} \in X_{-1}$ tales que ningún par de elementos de $[m_{1,v}], \cdots, [m_{n_v}, v]$ tiene un elemento menor común en $X_{-1}/\backsim$ con respecto $\preccurlyeq$ y $\sum_{i=1}^{n_v} \mathcal{N}_{-1}(m_{i,v}) \in S_{-1}S_1$.*

Demostración. Comenzaremos mostrando la siguiente afirmación:

Afirmación: *Si E es un grafo finito sin sinks, entonces dada cualquier arista $f \in E^1$ es posible encontrar un camino α que inicia en f tal que $r(\alpha)$ es un vértice en un ciclo.*

En efecto, sea $f \in E^1$ una arista arbitraria, por la propiedad $(E1)$ tenemos que $f = fr(f)$ entonces como $r(f)$ no es sink existe una arista f_1 tal que $s(f_1) = r(f)$, aplicando este proceso conseguimos un camino infinito $\beta = ff_1f_2f_3\cdots$, como el grafo es finito existe $i \in \mathbb{N}$ tal que la arista f_i aparece más de una vez en el camino β, sea j el mínimo de esos i's, entonces si m aristas después reaparece f_j tenemos que $f_jf_{j+1}\cdots f_{j+m-1}$ es un subcamino cerrado en β y por lo tanto $r(f_{j+m})$ pertenece a un ciclo así basta considerar $\alpha = ff_1\cdots f_j\cdots f_{j+m-1}$ para concluir la afirmación.

Ahora bien, sea $v \in E^0$ entonces por la propiedad $(CK2)$ existen aristas $f_1, \cdots, f_n$ tales que $s(f_i) = v$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ y

$$v = \sum_{i=1}^{n} f_if_i^* = \sum_{i=1}^{n} f_ir(f_i)f_i^*.$$

Entonces, si $r(f_i)$ está en un ciclo escogemos $\alpha_{i,v} = f_i$. Ahora consideremos a las aristas f_i tales que $r(f_i)$ no está en ningún ciclo y volvamos a usar la propiedad $(CK2)$ a $r(f_i)$, así

$$f_i r(f_i) f_i^* = f_i \left(\sum_{j=1}^{m} g_i g_i^* \right) f_i^* = \sum_{j=1}^{m} f_i g_j r(g_j) g_j^* f_i^*$$

y tenemos dos casos, si $r(g_i)$ está en un ciclo escogemos $\alpha_{i,v} = f_i g_j$ en caso contrario repetimos el proceso el cual finaliza por la afirmación anterior, por lo tanto podemos afirmar que para cada $v \in E^0$ existe $n_v \in \mathbb{N}$ y $\alpha_{i,v} \in Path(E)$ tales que $r(\alpha_{i,v})$ está en un cíclo C_i y $v = \sum_{i=1}^{n_v} \alpha_{i,v} \alpha_{i,v}^*$. Escojamos para cada $i \in \{1, \cdots, n_v\}$ un camino β_i en el ciclo tal que $r(\beta_i) = r(\alpha_{i,v})$ y $\alpha_{i,v}\beta_i^* \in X_{-1}$, fijemos entonces $m_i = \alpha_{i,v}\beta_i^*$, así pues

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n_v} \alpha_{i,v}\alpha_{i,v}^* = \sum_{i=1}^{n_v} \alpha_{i,v} r(\alpha_{i,v}) \alpha_{i,v}^* \\ &= \sum_{i=1}^{n_v} \alpha_{i,v} r(\beta_i) \alpha_{i,v}^* = \sum_{i=1}^{n_v} \alpha_{i,v} \beta_i^* \beta_i \alpha_{i,v}^* \\ &= \sum_{i=1}^{n_v} m_{i,v} m_{i,v}^* = \sum_{i=1}^{n_v} \mathscr{N}_{-1}(m_{i,v}) \in S_{-1} S_1. \end{aligned}$$

Nótese que los caminos $\alpha_{1,v}, \cdots, \alpha_{n,v}$ son todos distintos pues inician en aristas distintas, de ahí que no exista un elemento menor en común en los elementos $[m_{1,v}], \cdots, [m_{n_v,v}]$, ya que si $[m] \preccurlyeq [m_{i,v}]$ entonces m es un subcamino inicial de $\alpha_{i,v}$ y por ende no puede ser subcamino inicial de ningún $[m_{j,v}]$ para $i \neq j$, con lo cual concluimos el resultado. □

Teorema 3.3.12. *Sea E un grafo dirigido finito. Entonces, $L_R(E)$ es fuertemente $\mathbb{Z}-$graduado si y sólo si el grafo E no tiene sinks.*

Demostración. Si asumimos que $L_R(E)$ es fuertemente $\mathbb{Z}-$graduado por el Lema 3.3.2 inciso III tenemos que E no tienen sinks. Recíprocamente, comenzaremos probando la siguiente afirmación:

Afirmación: *Para todo $v \in E^0$ tenemos la igualdad $\varepsilon_{-1}v = v$.*En efecto, sea $v \in E^0$ arbitrario, por el Lema 3.3.11 existe $n_v \in \mathbb{N}$ y $m_{1,v}, \cdots, m_{n_v,v} \in X_{-1} \subseteq L_R(E)_{-1}$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^{n_v} \mathcal{N}_{-1}(m_{i,v})$$

así, como $L_R(E)$ es épsilon fuertemente $\mathbb{Z}-$graduado tenemos que

$$\varepsilon_{-1}v = \varepsilon_{-1}\left(\sum_{i=1}^{n_v} \mathcal{N}_{-1}(m_{i,v})\right) = \sum_{i=1}^{n_v} \varepsilon_{-1}m_{i,v}m_{i,v}^* = \sum_{i=1}^{n_v} m_{i,v}m_{i,v}^* = v$$

con lo cual concluimos la afirmación.

Ahora bien, una vez probada la afirmación obtenemos que

$$\varepsilon_{-1} = \varepsilon_{-1}1 = \sum_{v \in E^0} \varepsilon_{-1}v = \sum_{v \in E^0} v = 1,$$

además por el Lema 3.3.10 encontramos que $\varepsilon_1 = 1 = \varepsilon_{-1}$, entonces dado que $L_R(E)$ es simétricamente graduado, por el Corolario 3.1.14 basta probar que $L_R(E)_1 L_R(E)_{-1} = L_R(E)_0$ y $L_R(E)_{-1} L_R(E)_1 = L_R(E)_0$ para concluir que $L_R(E)$ es fuertemente graduado, por la $\mathbb{Z}-$graduación tenemos que $L_R(E)_1 L_R(E)_{-1} \subseteq L_R(E)_0$, ahora sea $x \in L_R(E)_0$ entonces

$$x = x \cdot 1 \in L_R(E)_0 L_R(E)_1 L_R(E)_{-1} \subseteq L_R(E)_1 L_R(E)_{-1}$$

y de manera análoga conseguimos que $L_R(E)_0 = L_R(E)_{-1} L_R(E)_1$, así hemos probado el resultado.

$\square$

4. Álgebras de camino de Leavitt como anillo de grupo torcido

Este capítulo tiene como objetivo mostrar el isomorfismo entre las álgebras de camino de Leavitt y un anillo de grupo torcido que construiremos. Además, estudiaremos como se benefician las álgebras de camino de Leavitt de la teoría de anillos de grupo torcido. A lo largo del capítulo K denotará un cuerpo y G un grupo con elemento neutro $e \in G$, Para esto nos guiaremos de Dokuchaev and Exel (2005b).

4.1. Acciones parciales

En esta sección nos encargaremos de introducir los conceptos de acción global, acción parcial y anillo de grupo torcido parcial, junto con algunos ejemplos.

Definición 4.1.1. *Sean X un conjunto no vacío y G un grupo con elemento neutro $e \in G$. Una acción global de G sobre X es una función de $\cdot : G \times X \to X$ la cual satisface:*

I Para cada $x \in X$ tenemos que $e \cdot x = x$.

II. Para cada $x \in X$ y $g, h \in G$ tenemos $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Notemos que de manera análoga podemos definir una acción global a derecha. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.1.2. Dado G un grupo y X un conjunto arbitrario no vacío. La acción de G sobre X dada por $g \cdot x = x$ para todo $x \in X$, es conocida como la acción trivial de G sobre X.

Ejemplo 4.1.3. Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Entonces H actúa sobre G mediante la multiplicación a izquierda, es decir $H \times G \to G$ está dado por $h \cdot g = hg$. Particularmente, si $H = G$ se tiene que G actúa sobre si mismo.

En seguida presentaremos las acciones parciales las cuales son generalizaciones de las acciones globales definidas arriba.

Definición 4.1.4. *Sean G un grupo con elemento neutro $e \in G$ y X un conjunto. Una acción parcial α de G en X consta de una colección de subconjuntos $X_g \subseteq X$ y biyecciones $\alpha_g : X_{g^{-1}} \to X_g$ tales que:*

I. $X_e = X$ *y* $\alpha_e : X_e \to X_e$ *es la función identidad;*

II. $\alpha_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$*;*

III. $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$ *para cada* $x \in \alpha_{h^{-1}}(X_h \cap X_{g^{-1}})$.

Observación 14.

1. Las condiciones II y III implican que la función α_{gh} es una extensión de la función $\alpha_g \circ \alpha_h$.

2. Para cada $g \in G$, $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$.

3. La condición II puede ser reemplazada por la condición $\alpha_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) = X_{h^{-1}} \cap X_{h^{-1}g^{-1}}$. En efecto, por II tenemos que $\alpha_h^{-1}(X_h \cap X_g^{-1}) \subseteq X_{h^{-1}} \cap X_{h^{-1}g^{-1}}$, recíprocamente si reemplazamos h por h^{-1} y y g por gh en II obtenemos que

$$(\alpha_{h^{-1}})^{-1}(X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}) \subseteq X_{(ghh^{-1})^{-1}} \cap X_h = X_{g^{-1}} \cap X_h$$

así aplicando $\alpha_{h^{-1}}$ conseguimos $X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}} \subseteq \alpha_{h^{-1}}(X_{g^{-1}} \cap X_h)$ como deseábamos.

De la observación anterior, las condiciones I, II y III son equivalentes a las siguientes:

I. $X_e = X$ y $\alpha_e : X \to X$ es la identidad de X.

II. $\alpha_g(X_{g^{-1}} \cap X_h) = X_g \cap X_{gh}$.

III. $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$

Ejemplo 4.1.5. Sea $R = Ke_1 \bigoplus Ke_2$ una suma directa de copias de un cuerpo K. Definimos una acción parcial de $\mathbb{Z}$ de R dada por

1. $X_0 = R$ y $\alpha_0 = Id_R$.
2. $X_n = Ke_2$ y $\alpha_n = Id_{Ke_2}$ para $n \neq 0$.

Veamos que se cumplen las tres condiciones.

I La primera condición vale por definición.

II. Veamos que $\alpha_n(X_{-n} \cap X_m) = X_n \cap X_{m+n}$. Analicemos los respectivos casos, si $n \neq m \neq 0$

$$\begin{aligned}\alpha_n(X_{-n} \cap X_m) &= \alpha_n(Ke_2 \cap Ke_2) = \alpha_n(Ke_2) = Ke_2 \\ &= (Ke_2) \cap (Ke_2) = X_n \cap X_{m+n}.\end{aligned}$$

Ahora, si $n \neq 0$ y $m = 0$

$$\alpha_n(X_{-n} \cap X_m) = \alpha_n(X_{-n} \cap X_0) = \alpha_n((Ke_2) \cap (Ke_1 \bigoplus Ke_2) = \alpha_n(Ke_2)$$
$$= Ke_2 = (Ke_2) \cap (Ke_2) = X_n \cap X_n = X_n.$$

De manera análoga, obtenemos el resultado si $n = 0$ y $m \neq 0$.

III. Dado $x \in X_{-n} \cap X_{(-m-n)}$, debemos verificar que $\alpha_m(\alpha_n(x)) = \alpha_{m+n}(x)$ para esto analicemos los posibles casos: si $n, m = 0$ la condición se cumple fácilmente, si $m = -n$ y $n \neq 0$ entonces $x \in X_{-n} \cap X_0 = X_{-n} = Ke_2$ así $\alpha_{-n}(\alpha_n(x)) = x = \alpha_{-n+n}(x) = \alpha_0(x)$ y finalmente, si $m \neq -n$ y $m, n \neq 0$ obtenemos $\alpha_m(\alpha_n(x)) = \alpha_m(Id_{Ke_2}) = Id_{Ke_2} = \alpha_{m+n}(x)$.

Ejemplo 4.1.6. Sea $\mathscr{A}$ el $K-$espacio vectorial con base $\{1, t, u, v\}$. Definamos el siguiente producto en $\mathscr{A}$

$$u^2 = v^2 = t^2 = uv = vu = tu = ut = 0, \quad tv = vt = u \quad y \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a,$$

para todo $a \in \mathscr{A}$, este producto le da a $\mathscr{A}$ estructura de $K-$álgebra asociativa unitaria. Sean $G = \langle g : g^2 = 1 \rangle$ e $\mathscr{I}$ el ideal de $\mathscr{A}$ generado por v (dado que $tv = vt = u$ el ideal $\mathscr{I}$ es generado por u y por v). Si establecemos $X_1 = \mathscr{A}$, $\alpha_1 : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, $X_g = \mathscr{I}$ y $\alpha_g : \mathscr{I} \to \mathscr{I}$ con $\alpha_g(u) = v$ y $\alpha_g(v) = u$ para todo $g \in G$, obtenemos una acción parcial $\alpha = \{\{\alpha_g\}_{g \in G}, \{X_g\}_{g \in G}\}$.

Es posible definir acciones parciales no solo a nivel de conjuntos, por ejemplo para definir una acción parcial α de un grupo G sobre una $K-$álgebra asociativa no unitaria $\mathscr{A}$ en la Definición

4.1.4 suponemos que X_g es un ideal de $\mathscr{A}$ para cada $g \in G$ y cada función α_g es un isomorfismo. El siguiente lema muestra una manera de construir una acción parcial a nivel de álgebras a partir de una acción parcial a nivel de conjuntos.

Lema 4.1.7. *Sean G un grupo, $\{\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}\}$ una acción parcial de G en un conjunto X y $F(X)$ la $K-$álgebra de funciones de X en K. Entonces la familia $\{\{F(X_g)\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}\}$ es una acción parcial de G en $F(X)$, donde*

$$\alpha_g : F(X_{g^{-1}}) \to F(X_g)$$
$$f \mapsto f \circ \theta_{g^{-1}}$$

Demostración. Ver (Beuter and Gonçalves, 2016, Proposición 3.5). □

Junto con la definición de acciones parciales apareció una generalización del los productos cruzados.

Definición 4.1.8. *Dada una acción parcial α de un grupo G en un álgebra $\mathscr{A}$, el anillo de grupo torcido $\mathscr{A} \rtimes_\alpha G$ es el conjunto de todas las sumas formales*

$$\left\{ \sum_{g\in G} a_g \delta_g : a_g \in X_g \right\}$$

donde los δ_g son símbolos. La adición es definida componente a componente y la multiplicación es determinada por

$$(a_g\delta_g) \cdot (b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}.$$

Observación 15.

- Como veremos en el Ejemplo 4.1.9 los anillos de grupo torcido no siempre son asociativos.

- Si $\mathscr{A} \rtimes_\alpha G$ es asociativo, entonces es un anillo $G-$graduado con la graduación dada por

$$\mathscr{A} \rtimes_\alpha G = \bigoplus_{g \in G} (\mathscr{A} \rtimes_\alpha G)_g$$

  donde $(\mathscr{A} \rtimes_\alpha G)_g = \mathscr{A}_g \delta_g$.

Ejemplo 4.1.9. La $K-$álgebra del Ejemplo 4.1.6 no es asociativa. En efecto, consideremos el elemento $x = t\delta_1 + u\delta_g$ para algún $g \in G$, calculemos el producto xx

$$\begin{aligned}
xx &= (t\delta_1 + u\delta_g)(t\delta_1 + u\delta_g) \\
&= (t\delta_1)(t\delta_1) + (t\delta_1)(u\delta_g) + (u\delta_g)(t\delta_1) + (u\delta_g)(u\delta_g) \\
&= t^2\delta_1 + \alpha_1(\alpha_1(t)u)\delta_g + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u)t)\delta_g + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u)u)\delta_1 \\
&= \alpha_1(tu)\delta_g + \alpha_g(vt)\delta_g + \alpha_g(vu)\delta_1 \\
&= \alpha_g(u)\delta_g = v\delta_g
\end{aligned}$$

Ahora calculemos $(xx)x$ y $x(xx)$

$$
\begin{aligned}
(xx)x &= v\delta_g(t\delta_1 + u\delta_g) & x(xx) &= (t\delta_1 + u\delta_g)v\delta_g \\
&= (v\delta_g)(t\delta_1) + (v\delta_g)(u\delta_g) & &= (t\delta_1)(v\delta_g) + (u\delta_g)(v\delta_g) \\
&= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(v)t)\delta_1 + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(v)u)\delta_1 & &= \alpha_1(\alpha_1(t)v)\delta_g + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u)v)\delta_1 \\
&= \alpha_g(ut)\delta_1 + \alpha_g(u^2)\delta_1 & &= tv\delta_g + \alpha_g(v^2)\delta_0 \\
&= 0 & &= u\delta_g.
\end{aligned}
$$

Por lo que $\mathscr{A} \rtimes_\alpha G$ no es asociativa.

4.2. Relación entre las álgebras de camino de Leavitt y los anillos de grupo torcido

Dedicaremos esta sección a estudiar la relación entre las álgebras de camino de Leavitt y los anillos de grupo torcido, en particular construiremos una acción parcial sobre el grupo libre generado por las aristas del grafo y cuyo anillo de grupo torcido asociado es isomorfo a las álgebras de camino de Leavitt, para esto nos basaremos en Gonçalves and Royer (2014). A lo largo de esta sección consideraremos $E = (E^0, E^1, r, s)$ un grafo dirigido, $\mathbb{F}$ el grupo libre generado por las aristas del grafo con elemento neutro $0 \in \mathbb{F}$, W el conjunto de caminos finitos, W^∞ el conjunto de los caminos infinitos del grafo E y $\mathbb{K}$ un cuerpo con unidad multiplicativa $1 \in \mathbb{K}$ y $0 \in \mathbb{K}$ también denotará la identidad aditiva.

Comenzaremos construyendo una acción parcial a nivel de conjuntos del grupo libre $\mathbb{F}$ sobre un conjunto X, para esto consideremos

$$X = \{\alpha \in W \mid r(\alpha) \text{ es un sink}\} \cup \{v \in E^0 \mid v \text{ es un sink}\} \cup W^{\infty}.$$

Ejemplo 4.2.1. Sea E el siguiente grafo

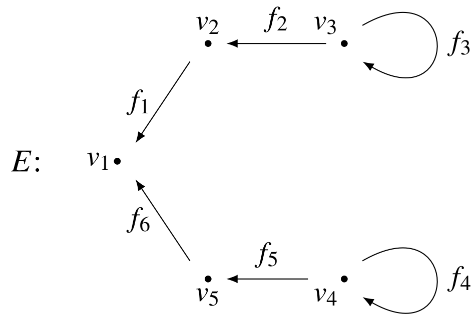


Figura 16. Grafo con infinitos elementos en el conjunto X.

Veamos algunos elementos del conjunto X, notemos que el único sink de E es el vértice v_1 luego $v_1 \in X$, además todos los caminos que terminan en v_1 y por tanto en las aristas f_1 o f_2 también están en X, por ejemplo $f_1, f_2f_1, f_3\cdots f_3f_2f_1 \in X$ y $f_6, f_5f_6, f_4\cdots f_4f_5f_6 \in X$, finalmente en E existen sólo dos caminos infinitos que son $f_3f_3\cdots, f_4f_4\cdots$ los cuales están en X.

Continuamos definiendo la acción parcial de $\mathbb{F}$ sobre X, para esto definamos los subconjuntos X_g tales que $g \in \mathbb{F}$. Teniendo en cuenta que W es un subconjunto de $\mathbb{F}$ definimos dichos subconjuntos de la siguiente manera:

1. $X_0 := X$;

II. $X_{f^{-1}} := \{\alpha \in X \mid s(\alpha) = r(f)\}$ para todo $f \in W$;

III. $X_e := \{\alpha \in X \mid e \text{ es un camino inicial de } \alpha\}$ para todo $e \in W$;

IV. $X_{ef^{-1}} := \{\alpha \in X \mid e \text{ es un camino inicial de } \alpha\}$ donde $e, f \in W$ y ef^{-1} está en su forma reducida con $r(e) = r(f)$;

V. $X_g = \emptyset$ para cualquier otro $g \in \mathbb{F}$

Observación 16.

- $r(f) \in X_{f^{-1}}$ si y sólo si $r(f)$ es un sink. En efecto, si $r(f) \in X_{f^{-1}}$ esto implica que $r(f) \in X$ lo cual de la definición de X implica que $r(f)$ debe ser un sink. Recíprocamente, si $r(f)$ es un sink $r(f) \in X$ y además $s(r(f)) = r(f)$ de ahí que $r(f) \in X_{f^{-1}}$.

- Si $r(f)$ es un sink, entonces $X_{f^{-1}} = \{r(f)\}$ y $X_f = \{f\}$. De hecho si $r(f)$ es un sink, por el item anterior tenemos que $r(f) \in X_{f^{-1}}$ supongamos entonces que existe $r(f) \neq \alpha \in X_{f^{-1}}$, esto implica que $s(\alpha) = r(f)$ lo que contradice que $r(f)$ es un sink. Veamos ahora que $X_f = \{f\}$, notemos que si $r(f)$ es un sink entonces $f \in X$ y por tanto $f \in X_f$, supongamos ahora que existe $\alpha \neq f \in X_f$ por definición α inicia en f pero $r(f)$ es un sink así que $\alpha = f$.

Ejemplo 4.2.2. Estudiemos algunos conjuntos X_g Para el grafo del Ejemplo 4.2.1. $X_{f_3} = \{f_3 f_3 \cdots, f_3 f_2 f_1, f_3 f_3 f_2 f_1, \cdots\}$,$X_{f_4} = \{f_4 f_4 \cdots, f_4 f_5 f_6, f_4 f_4 f_5 f_6, \cdots\}$ son conjuntos infinitos. Por otra parte de la observación de arriba $X_{f_1} = \{f_1\}$ y $X_{f_1^{-1}} = \{v_1\}$ y finalmente, notemos que $X_{f_5} = X_{f_2} = \emptyset$.

Ahora bien, para completar la acción parcial de $\mathbb{F}$ sobre X debemos definir las funciones y lo hacemos de la siguiente manera:

I. $\theta_0 : X_0 \to X_0$ es la función identidad;

II. Para $e \in W$, se define $\theta_e : X_{e^{-1}} \to X_e$ como $\theta_e(\alpha) = e\alpha$;

III. Para $f \in W$, definimos $\theta_{f^{-1}} : X_f \to X_{f^{-1}}$ por $\theta_{f^{-1}}(\gamma) = \gamma_{|f|+1}\gamma_{|f|+2}\cdots$ si $r(f)$ no es un sink y $\theta_{f^{-1}}(f) = r(f)$ si $r(f)$ es un sink;

IV. Para $e, f \in W$ con $r(e) = r(f)$ y ef^{-1} en su forma reducida, se define $\theta_{ef^{-1}} : X_{fe^{-1}} \to X_{ef^{-1}}$ como $\theta_{ef^{-1}}(\alpha) = e\alpha_{|f|+1}\alpha_{|f|+2}\cdots$,

donde $|f|$ indica la longitud del camino f. Veamos que las funciones anteriores son biyectivas:

I. θ_0 es biyectiva por definición.

II. θ_e está bien definida pues si $\alpha \in X_{e^{-1}}$ tenemos que $s(\alpha) = r(e)$ luego $e\alpha$ es un camino que inicia en α de ahí $e\alpha \in X_e$, además si $r(e)$ es un sink por la Observación 16, tenemos que $X_{e^{-1}} = \{r(e)\}$ y $X_e = \{e\}$, luego $\theta_e(r(e)) = er(e) = e$. Ahora, la biyectividad la conseguimos pues $\theta_{e^{-1}}$ es la inversa, en efecto si $r(e)$ es un sink

$$\theta_e \circ \theta_{e^{-1}}(e) = \theta_e(r(e)) = er(e) = e \quad y \quad \theta_{e^{-1}} \circ \theta_e(r(e))\theta_{e^{-1}}(e) = r(e),$$

y si $r(e)$ no es un sink

$$\theta_e \circ \theta_{e^{-1}}(\alpha) = \theta_e(\alpha_{|e|+1}\alpha_{|e|+2}\cdots) = e\alpha_{|e|+1}\alpha_{|e|+2}\cdots = \alpha \quad y$$

$$\theta_{e^{-1}} \circ \theta_e(\alpha) = \theta_{e^{-1}}(e\alpha) = \alpha$$

teniendo en cuenta que $\theta_{e^{-1}}$ es la función que borra al subcamino inicial de e.

III. Veamos que $\theta_{f^{-1}}$ está bien definida, claramente si $r(f)$ es un sink, por la Observación 16 $X_f = \{f\}$ y $X_{f^{-1}} = \{r(f)\}$ así $\theta_{f^{-1}}(f) = r(f)$. Ahora bien, si $r(f)$ no es un sink y $\gamma \in X_f$ entonces $\gamma = f\gamma_{|f|+1}\gamma_{|f|+2}\cdots$ así $\gamma_{|f|+1}\gamma_{|f|+2}\cdots \in X_{f^{-1}}$ pues $r(f) = s(\gamma_{|f|+1}\gamma_{|f|+2}\cdots)$. Además, del item anterior $\theta_{f^{-1}}$ es biyectiva con inversa θ_f.

IV. $\theta_{ef^{-1}}$ está bien definida, pues para cada $\alpha \in X_{fe^{-1}}$, tenemos que $f = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{|f|}$ y además $r(f) = r(e) = s(\alpha_{|f|+1})$, así $e\alpha_{|f|+1}\alpha_{|f|+2}\cdots$ es un camino en $X_{ef^{-1}}$. Para terminar, esta función es biyectiva con inversa $\theta_{fe^{-1}}$, en efecto

$$\theta_{ef^{-1}} \circ \theta_{fe^{-1}}(\alpha) = \theta_{ef^{-1}}(e\alpha_{|f|+1}\alpha_{|f|+2}\cdots) = f\alpha_{|f|+1}\alpha_{|f|+2}\cdots = \alpha \quad y$$

$$\theta_{fe^{-1}} \circ \theta_{ef^{-1}}(\alpha) = \theta_{fe^{-1}}(f\alpha_{|e|+1}\alpha_{|e|+2}\cdots) = e\alpha_{|e|+1}\alpha_{|e|+2}\cdots = \alpha.$$

Ejemplo 4.2.3. Si consideramos el grafo del Ejemplo 4.2.1 tenemos por ejemplo que θ_{f_2} es la función definida por $\theta_{f_2}(f_1) = f_2f_1$, nótese además que parte de $X_{f_2^{-1}} := \{f_1\}$ y llega a $X_{f_2} := \{f_2f_1\}$.

Así, conseguimos una acción parcial $\{\{X_g\}_{g\in\mathbb{F}}, \{\theta_g\}_{g\in\mathbb{F}}\}$ a nivel de conjuntos y teniendo en cuenta que nuestro objetivo es construir un anillo de grupo torcido, vamos a llevar esta acción parcial al nivel de álgebras como consecuencia del Lema 4.1.7, es decir consideraremos la acción parcial $\{\{F(X_g)\}_{g\in\mathbb{F}}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathbb{F}}\}$ a nivel de álgebra asociada a la acción parcial $\{\{X_g\}_{g\in\mathbb{F}}, \{\theta_g\}_{g\in\mathbb{F}}\}$. Intuitivamente se podría pensar que el anillo de grupo torcido asociado a la acción parcial anterior es el elegido para el isomorfismo, pero este anillo es muy "grande" por lo que nuestro propósito ahora es hacerlo lo suficientemente pequeño para obtener un isomorfismo. Con este fin introducimos los conjuntos $X_v = \{\alpha \in X \mid s(\alpha) = v\}$ para cada $v \in E^0$, los cuales de manera similar a los conjuntos de la acción parcial cumplen que $v \in X_v$ si y sólo si v es un sink, en este caso además se tiene $X_v = \{v\}$. En el siguiente lema vamos a estudiar la relación de estos con juntos con los conjuntos de la acción parcial.

Lema 4.2.4. *Sean $\alpha, \beta \in W$, $\gamma, \delta \in W \cup \{0\}$ y $v \in E^0$. Entonces:*

I. $$X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}} = \begin{cases} X_{\alpha^{-1}} = X_{\beta^{-1}}, & \textit{si } r(\alpha) = r(\beta) \\ \emptyset, & \textit{en caso contrario} \end{cases}.$$

II. $$X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta\gamma^{-1}} = \begin{cases} X_{\beta\gamma^{-1}}, & \textit{si } r(\alpha) = s(\beta) \\ \emptyset, & \textit{en caso contrario} \end{cases}.$$

III. $$X_{\alpha\gamma^{-1}} \cap X_{\beta\delta^{-1}} = \begin{cases} X_{\alpha\gamma^{-1}}, & \textit{si } \alpha = \beta\zeta \textit{ para algún } \zeta \in W \cup \{0\} \\ X_{\beta\delta^{-1}}, & \textit{si } \beta = \alpha\zeta \textit{ para algún } \zeta \in W \cup \{0\} \\ \emptyset & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}.$$

Aquí estamos asumiendo que $r(\alpha) = r(\gamma)$ y $r(\beta) = r(\delta)$, pues de lo contrario $X_{\alpha\gamma^{-1}} = X_{\beta\delta^{-1}} = \emptyset$.

IV. $$X_v \cap X_{\gamma^{-1}} = \begin{cases} X_v = X_{\gamma^{-1}}, & \textit{si } r(\beta) = v \\ \emptyset, & \textit{en caso contrario} \end{cases}.$$

V. $X_v \cap X_{\alpha\gamma^{-1}} = \begin{cases} X_{\alpha\gamma^{-1}}, & si\ s(\alpha) = v \\ \emptyset & en\ caso\ contrario \end{cases}$.

VI. $X_v = \bigcup_{s(\alpha)=v} X_\alpha = \bigcup_{s(\alpha)=v} X_{\alpha\beta^{-1}}$.

Demostración.

I. Si $\eta \in X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}}$, entonces por definición $s(\eta) = r(\alpha)$ y $s(\eta) = r(\beta)$ así que $r(\alpha) = r(\beta)$ o en caso contrario $X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}} = \emptyset$.

II. Si $\eta \in X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta\gamma^{-1}}$, entonces $s(\eta) = r(\alpha)$ y $\eta = \beta\iota$ para algún $\iota \in W$ de ahí que $r(\alpha) = s(\beta)$ en cuyo caso $X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta\gamma^{-1}} = X_{\beta\gamma^{-1}}$, de lo contrario $X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta\gamma^{-1}} = \emptyset$.

III. Si $\eta \in X_{\alpha\gamma^{-1}} \cap X_{\beta\delta^{-1}}$, entonces $\eta = \alpha\iota$ y $\eta = \beta\kappa$ para algunos $\iota, \kappa \in W$, con lo cual tenemos los siguientes casos: primero si $\alpha = \beta\zeta$ para algún $\zeta \in W$, por definición $X_{\alpha\gamma^{-1}} \cap X_{\beta\delta^{-1}} = X_{\alpha\gamma^{-1}}$, segundo si $\beta = \alpha\zeta$ para algún $\zeta \in W$ por definición $X_{\alpha\gamma^{-1}} \cap X_{\beta\delta^{-1}} = X_{\beta\delta^{-1}}$ y finalmente, en cualquier otro caso la intersección es vacía.

IV. Si $\eta \in X_v \cap X_{\gamma^{-1}}$, entonces $s(\eta) = v$ y $s(\eta) = r(\gamma)$ así que si $v = r(\gamma)$ por definición $X_v = X_{\gamma^{-1}}$, en caso contrario $X_v \cap X_{\gamma^{-1}} = \emptyset$.

V. Si $\eta \in X_v \cap X_{\alpha\gamma^{-1}}$, entonces $s(\eta) = v$ y $\eta = \alpha\mu$ para algún $\mu \in W$ luego por definición $X_v \cap X_{\alpha\gamma^{-1}} = X_{\alpha\gamma^{-1}}$, de otro modo la intersección es vacía.

VI. Esta igualdad la conseguimos de la definición.

□

Consideremos ahora para cada $a \in \mathbb{F}$ la función característica del conjunto X_a la cual denotaremos por 1_a y a las funciones características de los nuevos conjuntos X_v que denotaremos por 1_v y probemos la siguiente herramienta que nos ayudará con la definición del anillo de grupo torcido deseado.

Lema 4.2.5. *Sean $\{\{F(X_g)\}_{g\in\mathbb{F}}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathbb{F}}\}$ la acción parcial definida previamente y $c,d \in \mathbb{F}$. Entonces:*

I. $\alpha_c(1_{c^{-1}}1_d) = 1_c 1_{cd}$.

II. Para cada $a \in W$ y $b \in W \cup \{0\}$ tenemos que

$$\alpha_a(1_{a^{-1}}1_v) = \begin{cases} 1_a & \text{si } r(a) = v \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad y \quad \alpha_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_v) = \begin{cases} 1_{ab^{-1}} & \text{si } s(b) = v \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Demostración.

I. Para ver esta igualdad analicemos algunos posibles casos:

- Si $c = \zeta\beta^{-1}$ y $d = \gamma\delta^{-1}$ son caminos tales que $r(\zeta) = r(\beta)$ y $r(\gamma) = r(\delta)$, supongamos que $\gamma = \beta\lambda$ para algún $\lambda \in W \cup \{0\}$, entonces para $\eta \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}
\alpha_c(1_{c^{-1}}1_d)(\eta) &= \alpha_{\zeta\beta^{-1}}(1_{\beta\zeta^{-1}}1_{\gamma\delta^{-1}})(\eta) \\
&= \alpha_{\zeta\beta^{-1}}(1_{\beta\zeta^{-1}})\alpha_{\zeta\beta^{-1}}(1_{\gamma\delta^{-1}})(\eta) \\
&= 1_{\beta\zeta^{-1}}(\theta_{\beta\zeta^{-1}}(\eta))1_{\beta\lambda\delta^{-1}}(\theta_{\beta\zeta^{-1}}(\eta)) \\
&= 1_{\zeta\lambda}(\eta) \qquad (*) \\
&= 1_{\zeta\beta^{-1}\beta\lambda\delta^{-1}}(\eta) \\
&= 1_{\zeta\beta^{-1}}1_{\zeta\beta^{-1}\beta\lambda\delta^{-1}}(\eta) \\
&= 1_c 1_{cd}(\eta).
\end{aligned}$$

con lo que nos resta probar la igualdad $(*)$, supongamos que $\eta = \zeta\lambda\rho$ para algún $\rho \in W \cup \{0\}$, en este caso $1_{\zeta\lambda}(\eta) = 1$ y del otro lado

$$1_{\beta\zeta^{-1}}(\theta_{\beta\zeta^{-1}}(\eta))1_{\beta\lambda\delta^{-1}}(\theta_{\beta\zeta^{-1}}(\eta)) = 1_{\beta\zeta^{-1}}(\beta\lambda\rho)1_{\beta\lambda\delta^{-1}}(\beta\lambda\rho) = 1 \cdot 1 = 1,$$

con lo cual tenemos $(*)$, por otro parte si $\zeta\lambda$ no es un camino inicial de η, entonces $1_{\zeta\lambda}(\eta) = 0$ y además

$$1_{\beta\zeta^{-1}}(\theta_{\beta\zeta^{-1}}(\eta))1_{\beta\lambda\delta^{-1}}(\theta_{\beta\zeta^{-1}}(\eta)) = 0,$$

con lo cual tenemos la igualdad $(*)$. Con un razonamiento similar podemos obtener la igualdad si $\beta = \gamma\lambda$.

- Si $c = \zeta$ y $d = \gamma^{-1}$. Sea $\eta \in X$, supongamos que $\eta = \zeta\rho$ para algún $\rho \in W \cup \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_c(1_{c^{-1}}1_d)(\eta) &= \alpha_\zeta(1_{\zeta^{-1}}1_{\gamma^{-1}})(\eta) \\
&= \alpha_\zeta(1_{\zeta^{-1}})(\eta)\alpha_\zeta(1_{\gamma^{-1}})(\eta) \\
&= 1_{\zeta^{-1}}(\theta_{\zeta^{-1}}(\eta))1_{\gamma^{-1}}(\theta_{\zeta^{-1}}(\eta)) \\
&= 1_{\zeta^{-1}}(\rho)1_{\gamma^{-1}}(\rho),
\end{aligned}$$

donde tenemos dos casos posibles si $r(\zeta) = r(\gamma)$ entonces

$$1_{\zeta^{-1}}(\rho)1_{\gamma^{-1}}(\rho) = 1 \quad y \quad 1_\zeta(\eta)1_{\zeta\gamma^{-1}}(\eta) = 1_\zeta(\eta) = 1$$

caso contrario,

$$1_{\zeta^{-1}}(\rho)1_{\gamma^{-1}}(\rho) = 0 \quad y \quad 1_\zeta(\eta)1_{\zeta\gamma^{-1}}(\eta) = 1_\zeta(\eta) = 0$$

con lo cual concluimos la igualdad. Ahora, si ζ no es un camino inicial de η la igualdad la tenemos pues es cero en ambos lados.

- Si $c = \zeta^{-1}$ y $d = \lambda^{-1}$. Sea $\eta \in X$, asumamos que $s(\zeta) = r(\lambda)$ y $r(\zeta) = s(\eta)$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_c(1_{c^{-1}}1_d)(\eta) &= \alpha_{\zeta^{-1}}(1_\zeta 1_{1_{\lambda^{-1}}})(\eta) \\
&= \alpha_{\zeta^{-1}}(1_\zeta(\eta))\alpha_{\zeta^{-1}}(1_{\lambda^{-1}}(\eta)) \\
&= 1_\zeta(\theta_\zeta(\eta))1_{\lambda^{-1}}(\theta_\zeta(\eta)) \\
&= 1_\zeta(\zeta\eta)1_{\lambda^{-1}}(\zeta\eta) \\
&= 1 \cdot 1 = 1,
\end{aligned}$$

y por el otro lado obtenemos

$$1_{\zeta^{-1}}1_{\zeta^{-1}\lambda^{-1}}(\eta) = 1_{\zeta^{-1}}1_{(\lambda\zeta)^{-1}}(\eta) = 1.$$

Además, la igualdad se mantiene si $s(\zeta) \neq r(\lambda)$ o $r(\zeta) \neq s(\eta)$ pues tenemos cero en ambos lados.

Los demás casos se deducen de manera similar y con los mismos argumentos anteriores.

II. Veamos las dos igualdades, comencemos tomando $a \in W$ con $r(a) = v$, entonces para $\beta \in X$ tenemos por el Lema 4.1.7 que

$$\alpha_a(1_{a^{-1}}1_v)(\beta) = 1_{a^{-1}}1_v(\theta_{a^{-1}}(\beta)),$$

si $\beta = ab$ para algún $b \in W$, entonces

$$\alpha_a(1_{a^{-1}}1_v)(\beta) = 1_{a^{-1}}1_v(\theta_{a^{-1}}(\beta)) = 1_{a^{-1}}1_v(b) = 1$$

y $1_a 1_{r(a)}(\beta) = 1$. Ahora, si a no es un camino inicial de β obtenemos $\alpha_a(1_{a^{-1}}1_v)(\beta) = 1_a 1_{r(a)}(\beta) = 0$, así $\alpha_a(1_{a^{-1}}1_v) = 1_a$. Por otra parte, si $r(a) \neq v$

$$\alpha_a(1_{a^{-1}}1_v)(\beta) = 1_{a^{-1}}1_v(\theta_{a^{-1}}(\beta)) = 0 = 1_a(\beta).$$

Veamos ahora la segunda igualdad de funciones, sean $a \in W$ y $b \in W \cup \{0\}$ con $s(b) = v$, supongamos que para $\beta \in X$ de la forma $\beta = a\gamma$ para algún $\gamma \in W \cup \{0\}$, entonces

$$\alpha_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_v)(\beta) = 1_{ba^{-1}}1_v(\theta_{ba^{-1}}(\beta)) = 1_{ba^{-1}}1_v(b\gamma) = 1.$$

y $1_{ab^{-1}}(\beta) = 1$. Ahora, si a no sea un camino inicial de β tenemos que

$$\alpha_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_v)(\beta) = 1_{ba^{-1}}1_v(\theta_{ba^{-1}}(\beta)) = 0,$$

con lo cual tenemos que $\alpha_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_v) = 1_{ab^{-1}} = 0$, concluyendo así que $\alpha_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_v) = 1_{ab^{-1}}$ si $s(b) = v$, en caso contrario obsérvese por el Lema que $X_{ba^{-1}} \cap v = \emptyset$, así que $\alpha_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_v) = 0$, dando por terminada la prueba.

$\square$

Lo anterior es suficiente para construir la acción parcial que buscamos. Sea

$$D(X) = D_0 = \langle \{1_p \mid p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\} \cup \{1_v \mid \in E^0\} \rangle,$$

donde $D(X)$ es generado $K-$linealmente y para cada $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ escogemos a $D_p \subseteq F(X_p)$ como $D_p = \langle \{1_p 1_q \mid q \in \mathbb{F}\} \rangle$. Ahora bien, como consecuencia del Lema 4.2.4 obtenemos que $D(X)$ y D_p son $K-$álgebras y aún más D_p es un ideal de $D(X)$ para todo $p \in \mathbb{F}$. Por otra parte, por el Lema 4.2.5 tenemos que $\alpha_p(1_{p^{-1}} 1_q) = 1_p 1_{pq}$ para cada $p, q \in \mathbb{F}$, la restricción de $\alpha_p : D_{p^{-1}} \to D_p$ es un isomorfismo de $K-$álgebras, con lo anterior formamos una acción parcial de álgebras $\alpha = \{\{\alpha_p\}_{p \in \mathbb{F}}, \{D_p\}_{p \in \mathbb{F}}\}$. Así el anillo de grupo torcido a considerar es $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Enseguida, nos encargaremos de mostrar que el anillo de grupo torcido anterior es isomorfo a el álgebra de camino de Leavitt del grafo E.

Observación 17. La $K-$álgebra $D(X)$ no es necesariamente unitaria, pero cada D_p es unitario donde la unidad es 1_p.

Comenzaremos definiendo el homomorfismo.

Proposición 4.2.6. *Existe un $K-$homormofismo al que llamaremos $\varphi : L_K(E) \to D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ que envía $\varphi(e) = 1_e \delta_e$, $\varphi(e^*) = 1_{e^{-1}} \delta_{e^{-1}}$ y $\varphi(v) = 1_v \delta_0$, para todo $v \in E^0$ y todo $e \in E^1$.*

Demostración. Consideremos los conjuntos $\{1_e \delta_e \mid e \in E^1\}$, $\{1_{e^{-1}} \delta_{e^{-1}}\}$ y $\{1_v \delta_0 \mid v \in E^0\}$ en $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$, probaremos que estos conjuntos satisfacen las relaciones de la Propiedad universal dada en la Proposición 2.1.2.

I. Veamos primero que $(1_{s(e)}\delta_0)(1_e\delta_e) = (1_e\delta_e)(1_{r(r)}\delta_0) = (1_e\delta_e)$. Teniendo en cuenta que α_0 es el morfismo identidad y haciendo uso del Lema 4.2.5 obtenemos

$$
\begin{aligned}
(1_{s(e)}\delta_0)(1_e\delta_e) &= \alpha_0(\alpha_0(1_{s(e)})1_e)\delta_e & (1_e\delta_e)(1_{r(e)}\delta_0) &= \alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_e)1_{r(e)})\delta_e \\
&= \alpha_0(1_{s(e)}1_e)\delta_e & &= \alpha_e(1_{e^{-1}}1_{r(e)})\delta_e \\
&= 1_{s(e)}1_e\delta_e & &= 1_e1_e\delta_e,
\end{aligned}
$$

como consecuencia puesto que $X_{s(e)} \cap X_e = X_e$ y las funciones 1_p son idempotentes tenemos que $1_{s(e)}1_e\delta_e = 1_e\delta_e$ y $1_e1_e\delta_e = 1_e\delta_e$, concluyendo así la igualdad. Seguidamente, mostraremos que $(1_{r(e)}\delta_0)(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) = (1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})(1_{r(e)}\delta_0) = (1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})$

$$
\begin{aligned}
(1_{r(e)}\delta_0)(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) &= \alpha_0(\alpha_0(1_{r(e)})1_{e^{-1}})\delta_{e^{-1}} & (1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})(1_{s(e)}\delta_0) &= \alpha_{e^{-1}}(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_{s(e)})\delta_{e^{-1}} \\
&= \alpha_0(1_{r(e)}1_{e^{-1}})\delta_{e^{-1}} & &= \alpha_{e^{-1}}(1_e1_{s(e)})\delta_{e^{-1}} \\
&= 1_{r(e)}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} & &= 1_{e^{-1}}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}},
\end{aligned}
$$

y dado que $X_{r(e)} \cap X_{e^{-1}} = X_{e^{-1}}$ concluimos que $1_{r(e)}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} = 1_{e^{-1}}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$ y de ahí logramos la igualdad.

II. Sean $e, f \in E^1$, veamos que $(1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}})(1_e\delta_e) = \delta_{e,f}1_{r(e)}\delta_0$ donde $\delta_{e,f}$ denota a la función delta de Kronecker. Comenzaremos asumiendo que $e \neq f$, en este caso

$$\begin{aligned}(1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}})(1_e\delta_e) &= \alpha_{f^{-1}}(\alpha_f(1_{f^{-1}})1_e)\delta_{f^{-1}e} \\ &= \alpha_{f^{-1}}(1_f 1_e)\delta_{f^{-1}e}\end{aligned}$$

observemos que $1_f 1_e = 0$ ya que $X_f \cap X_e = \emptyset$ de ahí que $(1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}})(1_e\delta_e) = 0$. Asumamos ahora que $e = f$, entonces

$$\begin{aligned}(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})(1_e\delta_e) &= \alpha_{e^{-1}}(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_e)\delta_0 \\ &= \alpha_{e^{-1}}(1_e 1_e)\delta_0 \\ &= \alpha_{e^{-1}}(1_e)\delta_0 \\ &= 1_{e^{-1}}\delta_0,\end{aligned}$$

notemos que $X_{e^{-1}} \cap X_{r(e)} = X_{r(e)}$, de ahí que $1_{e^{-1}} = 1_{r(e)}$, con lo cual concluimos que $(1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}})$ $(1_e\delta_e) = \delta_{e,f}1_{r(e)}\delta_0$.

III. Finalmente, veamos que $1_v\delta_0 = \sum_{\{e \in E^1 | s(e)=v\}}(1_e\delta_e)(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})$ para todo vértice regular v. Sabemos por el Lema 4.2.4 que $X_v = \cup_{\{e \in E^{-1} | s(e)=v\}} X_e$, de ahí que

$$\sum_{\{e \in E^1\} | s(e)=v\}} 1_e = 1_v,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{\{e\in E^1|s(e)=v\}}(1_e\delta_e)(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) &= \sum_{\{e\in E^1|s(e)=v\}}\alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_e)1_{e^{-1}})\delta_0\\
&= \sum_{\{e\in E^1|s(e)=v\}}\alpha_e(1_{e^{-1}})\delta_0\\
&= \sum_{\{e\in E^1|s(e)=v\}}1_e\delta_0 = 1_v\delta_0.
\end{aligned}$$

Con los casos anteriores, como consecuencia de la propiedad universal tenemos que existe un único homomorfismo $\varphi : L_K(E) \to D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ que envía $\varphi(e) = 1_e\delta_e$, $\varphi(e^*) = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$ y $\varphi(v) = 1_v\delta_0$. $\square$

Antes de mostrar que el homomorfismo es biyectivo, construiremos una $\mathbb{Z}-$ graduación en el anillo de grupo torcido. Dado $p \in \mathbb{F}$ definimos $|p| = m-n$, donde m es el número de elementos de E^1 y n el número de elementos inversos de E^1 que aparecen en p. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $A_n \subseteq D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ denotará al conjunto generado $K-$linealmente por $\{a_p\delta_p \mid a_p \in D_p \ y \ |p| = n\}$ el cual es un subgrupo aditivo de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$, donde $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ y $A_nA_m \subseteq A_{n+m}$ para cada $n,m \in \mathbb{Z}$, con lo cual obtenemos una $\mathbb{Z}-$graduación de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Acto seguido, enunciaremos un resultado que nos servirá para probar la inyectividad del homomorfismo.

Teorema 4.2.7. *(Teorema de unicidad graduado) Sean E un grafo y $L_K(E)$ el álgebra de camino de Leavitt asociada a E con la $\mathbb{Z}-$graduación canónica. Si R es un anillo $\mathbb{Z}-$graduado y $\pi : L_K(E) \to R$ es un homomorfismo de anillos graduados con $\pi(v) \neq 0$ para todo $v \in E^0$, entonces π es inyectivo.*

Demostración. Ver (Tomforde, 2007, Teorema 4.8). □

Teorema 4.2.8. *El homomorfismo $\varphi : L_K(E) \to D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ definido en la Proposición 4.2.6 es un $K-$isomorfismo.*

Demostración. La prueba la realizaremos por partes, comenzaremos mostrando que el homomorfismo es un homomorfismo $\mathbb{Z}-$graduado, después aplicaremos el Teorema de unicidad graduado para mostrar que φ es un monomorfimos y finalizaremos mostrando la sobreyectividad.

- Homomorfismo graduado: Recordemos primero que las componentes homogéneas de $L_K(E)$ están dadas por

  $$(L_K(E))_n = \langle \{\gamma\lambda^* \mid \gamma, \lambda \in Path(E) \text{ y } |\gamma| - |\lambda| = n\} \rangle,$$

  para $n \in \mathbb{Z}$. Veamos que $\varphi((L_K(E))_n) \subseteq A_n$, para esto comenzaremos mostrando lo siguiente: *Afirmación: Si $\gamma, \lambda \in W$, entonces $\varphi(\gamma) = 1_\gamma \delta_\gamma$, $\varphi(\lambda^*) = 1_{\lambda^{-1}} \delta_{\lambda^{-1}}$ y si $r(\gamma) = r(\lambda)$ con $\gamma\lambda^*$ en su forma reducida $\varphi(\gamma\lambda^*) = 1_{\gamma\lambda^{-1}} \delta_{\gamma\lambda^{-1}}$.*

  En efecto, demostraremos la primera igualdad usando inducción matemática sobre el número de aristas de los caminos. Supongamos que $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}$, como base inductiva tenemos por definición que $\varphi(\gamma_1) = 1_{\gamma_1} \delta_{\gamma_1}$, supongamos entonces que $\varphi(1_{\gamma_1} \cdots 1_{\gamma_m}) = 1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} \delta_{\gamma_1 \cdots \gamma_m}$

para algún $m \in \mathbb{N}$ y veamos que $\varphi(\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}) = 1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}} \delta_{\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}}$

$$\begin{aligned}
\varphi(\gamma) = \varphi(\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}) &= \varphi(\gamma_1 \cdots \gamma_m)\varphi(\gamma_{m+1}) \\
&= (1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} \delta_{\gamma_1 \cdots \gamma_m})(1_{\gamma+1} \delta_{\gamma+1}) \\
&= \alpha_{\gamma_1 \cdots \gamma_m}(\alpha_{(\gamma_1 \cdots \gamma_m)^{-1}}(1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m}) 1_{m+1}) \delta_{\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}} \\
&= \alpha_{\gamma_1 \cdots \gamma_m}(1_{(\gamma_1 \cdots \gamma_m)^{-1}} 1_{\gamma_{m+1}}) \delta_{\gamma} \\
&= 1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} 1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}} \delta_{\gamma} \\
&= 1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}} \delta_{\gamma} \qquad (*) \\
&= 1_{\gamma} \delta_{\gamma},
\end{aligned}$$

donde la igualdad $(*)$ la conseguimos del Lema 4.2.4 item *III*. Veamos ahora que $\varphi(\lambda^*) = 1_{\lambda^{-1}} \delta_{\lambda^{-1}}$, para esto supongamos que $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{m+1}$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y de manera similar lo haremos por inducción matemática. Como base inductiva por definición de φ tenemos $\varphi(\lambda_1^*) = 1_{\lambda_1^{-1}}$, supongamos entonces que $\varphi((\lambda_1 \cdots \lambda_m)^*) = 1_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m)^{-1}} \delta_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m)^{-1}}$ y probemos que $\varphi((\lambda_1 \cdots \lambda_m \lambda_{m+1})^*) = 1_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m \lambda_{m+})^{-1}} \delta_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m \lambda_{m+1})^{-1}}$

$$
\begin{aligned}
\varphi(\lambda^*) = \varphi((\lambda_1\cdots\lambda_m\lambda_{m+1})^*) &= \varphi(\lambda_{m+1}^{-1})\varphi((\lambda_1\cdots\lambda_m)^*)\\
&= (1_{\lambda_{m+1}^*}\delta_{\lambda_{m+1}^{-1}})(1_{(\lambda_1\cdots\lambda_m)^{-1}}\delta_{(\lambda_1\cdots\lambda_m)^{-1}})\\
&= \alpha_{\lambda_{m+1}^{-1}}(\alpha_{\lambda_{m+1}}(1_{\lambda_{m+1}^{-1}})1_{(\lambda_1\cdots\lambda_m)^{-1}})\delta_{\lambda^{-1}}\\
&= \alpha_{\lambda_{m+1}^{-1}}(1_{\lambda_{m+1}}1_{(\lambda_1\cdots\lambda_m)^{-1}})\delta_{\lambda^{-1}}\\
&= 1_{\lambda_{m+1}^{-1}}1_{(\lambda_1\cdots\lambda_m\lambda_{m+1})^{-1}}\delta_{\lambda^{-1}}\\
&= 1_{(\lambda_1\cdots\lambda_m\lambda_{m+1})^{-1}}\delta_{\lambda^{-1}} \qquad (*)\\
&= 1_{\lambda^{-1}}\delta_{\lambda^{-1}}
\end{aligned}
$$

donde la igualdad $(*)$ la obtenemos como consecuencia del Lema 4.2.4 item *I*. Seguidamente, para finalizar la prueba de la afirmación debemos probar que $\varphi(\gamma\lambda^*) = 1_{\gamma\lambda^{-1}}$ si $r(\gamma) = r(\lambda)$ y $\gamma\lambda^*$ está en su forma reducida, lo cual es cierto ya que

$$
\begin{aligned}
\varphi(\gamma\lambda^*) &= \varphi(\gamma)\varphi(\lambda^*)\\
&= (1_\gamma\delta_\gamma)(1_{\lambda^{-1}}\delta_{\lambda^{-1}})\\
&= \alpha_\gamma(\alpha_{\gamma^{-1}}(1_\gamma)1_{\lambda^{-1}})\delta_{\gamma\lambda^{-1}}\\
&= \alpha_\gamma(1_{\gamma^{-1}}1_{\lambda^{-1}})\delta_{\gamma\lambda^{-1}}\\
&= 1_\gamma 1_{\gamma\lambda^{-1}}\delta_{\gamma\lambda^{-1}} \qquad (*)\\
&= 1_{\gamma\lambda^{-1}}\delta_{\gamma\lambda^{-1}},
\end{aligned}
$$

en este caso, $(*)$ se obtiene por el Lema 4.2.4.

Una vez mostrada la afirmación, tomemos $\gamma\lambda^* \in (L_K(E))_n$, entonces

$$\varphi(\gamma\lambda^*) = 1_{\gamma\lambda^{-1}}\delta_{\gamma\lambda^{-1}} \in D_{\gamma\lambda^{-1}}\delta_{\gamma\lambda^{-1}}$$

y dado que $|\gamma\lambda^{-1}| = |\gamma| - |\lambda| = n$ concluimos que $\varphi(\gamma\lambda^{-1}) \in D_{\gamma\lambda^{-1}}\delta_{\gamma\lambda^{-1}} \subseteq A_n$ y de ahí como $\gamma\lambda^{-1}$ fue escogido arbitrariamente tenemos que el homomorfismo es $\mathbb{Z}-$graduado.

- Inyectividad: Como consecuencia del Teorema de unicidad graduado, puesto que $\varphi : L_K(E) \to D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es un homomorfismo graduado es suficiente mostrar que $\varphi(v) \neq 0$ para cada vértice $v \in E^0$. En efecto, si $v \in E^0$ es un sink entonces $X_v = \{v\} \neq \emptyset$ y en consecuencia $1_v \neq 0$, por otro lado si v no es un sink debe existir un camino infinito que inicia en v o un camino finito que inicia en v y que termina en un sink, en cualquier caso $X_v \neq \emptyset$ y de ahí $1_v \neq 0$, lo cual nos permite concluir que $\varphi(v) = 1_v\delta_0 \neq 0$ y por lo tanto φ es inyectivo.

- Sobreyectividad: Para demostrar que φ es sobreyectiva es suficiente ver que $D_p\delta_p \subseteq Im(\varphi)$ para cada $p \in \mathbb{F}$. Primero veamos que $D_0\delta_0 \subseteq Im(\varphi)$, por la linealidad basta ver $1_v\delta_0, 1_p\delta_0$ para todo $v \in E^0$ y $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, por construcción de φ sabemos que $1_v\delta_0 \in Im(\varphi)$ ya que

$\varphi(v) = 1_v\delta_0$, ahora bien si $p \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ mostraremos que $1_p\delta_0 = (1_p\delta_p)(1_{p^{-1}})$, en efecto

$$\begin{aligned}(1_p\delta_p)(1_{p^{-1}}) &= \alpha_p(\alpha_{p^{-1}}(1_p)1_{p^{-1}})\delta_0\\ &= \alpha_p(1_{p^{-1}}1_{p^{-1}})\delta_0\\ &= 1_p\delta_0\end{aligned}$$

y dado que por definición de φ tenemos $1_p\delta_p, 1_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}} \in Im(\varphi)$ con lo cual concluimos que $1_p\delta_0 \in Im(\varphi)$. Finalmente, verifiquemos que $D_p\delta_p \subseteq Im(\varphi)$ para esto por linealidad sólo debemos probar que $1_p1_q\delta_p \in Im(\varphi)$ para esto notemos que

$$(1_q\delta_0)(1_p\delta_p) = \alpha_0(\alpha_0(1_q)1_p)\delta_p = 1_p1_q\delta_p$$

y además que $1_q\delta_0, 1_p\delta_p \in Im(\varphi)$.

Concluimos por los items anteriores que φ es un $K-$isomorfismo. □

4.3. Algunas aplicaciones

Una vez mostrado el isomorfismo esta sección la dedicaremos a estudiar algunos beneficios de considerar a las álgebras de camino de Leavitt como anillo de grupo torcido.

4.3.1. Ideales en $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Siguiendo (Gonçalves and Royer, 2014, Sección 4) mostraremos el Teorema de unicidad de Cuntz-Kriger y el criterio de simplicidad de las álgebras de camino de Leavitt usando sólo la teoría de anillo torcido. Iniciaremos demostrando el siguiente lema que será de ayuda posteriormente.

Lema 4.3.1. *Sea E un grafo que satisface la condición (L). Si $b \in W$ de la forma $b = b_1 b_2 \cdots b_s$ para algún $s \in \mathbb{N}$ es un camino cerrado y $x_b \in D_b$ es no nulo, entonces existen números naturales $m, k \geq 1$, con $k \leq |b|$ y aristas $t_1, \cdots, t_k \in E^1$ tales que $t_i \neq b_i$ para algún i, y $x_b \cdot 1_{b^m t_1, \cdots, t_k} \neq 0$.*

Demostración. Para empezar asumamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_b 1_{b^n} = x_b 1_{bb \cdots b} = 0$. Consideremos a m como el mayor número natural tal que $x_b \cdot 1_b \neq 0$. Primero nótese que $m \geq 1$, pues $x_b \cdot 1_b = x_b$ por la Observación 17. Ahora, por la definición de conjuntos X_p podemos reescribir

$$X_{b^m} = \bigcup X_{b^m t},$$

donde la unión anterior es disjunta y $t \in W$ es tal que $s(t) = r(b)$ y $|t| = |b|$ ó $s(t) = r(b)$, $|t| < |b|$ y $r(t)$ es un sink, esto pues $b^m \notin X$ ya que no es un camino infinito ni termina en un sink, así los elementos en X_{b^m} son de la forma $b^m u$ donde $s(u) = r(b)$ y u es un camino infinito o $r(u)$ es un sink lo cual nos permite reescribir el conjunto de esa manera. De la descripción anterior concluimos que existe un $t = t_1 \cdots t_k \in W$ tal que $x_b \cdot 1_{b^m t} \neq 0$, entonces si $|t| < |b|$ con $r(t_k)$ un sink tenemos que $b_k \neq t_k$ pues $r(b_k)$ no es un sink, caso contrario, si $|t| = |b|$ debe pasar que $t \neq b$ ya que $x_b 1_{b^{m+1}} = 0$, de ahí existe $i \in \{1, \cdots, k\}$ con $t_i \neq b_i$, concluyendo así el resultado para este caso. Ahora, supongamos que $x_b \cdot 1_{b^n} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $x_b \in D_b$ podemos escribir

$$x_b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{a_i c_i^{-1}}$$

con $a_i, c_i \in W \cup \{0\}$. Tomemos un $m \geq 1$ tal que $m|b| \geq |a_i|$ para cada $i \in \{1 \cdots, n\}$. Sabemos que

$x_b \cdot 1_{b^m} \neq 0$, luego existe $\alpha \in X_b$ tal que $(x_b \cdot 1_{b^m})(\alpha) \neq 0$, observemos que $|\alpha| \geq m|b|$ pues de lo contrario $1_{b^m}(\alpha) = 0$ es decir $(x_b \cdot 1_{b^m})(\alpha) = 0$ y puesto que el grafo satisface la condición (L) existe $t_i \in E^1$ con $s(t_i) = s(b_i)$ y $t_i \neq b_i$. Tomemos $\beta \in X_b$ tal que

$$\beta_1 \cdots \beta_{m|b|}\beta_{m|b|+1} \cdots \beta_{m|b|+i} = \alpha_1 \cdots \alpha_{m|b|} b_1 \cdots b_{i-1} t_i,$$

entonces

$$(x_b \cdot 1_{b^m b_1 \cdots b_{i-1} t_i})(\beta) = (x_b \cdot 1_{b^m})(\beta) = (x_b \cdot 1_{b^m})(\alpha) \neq 0,$$

lo anterior ya que $m|b| \geq |a_i|$ lo cual implica que el resultado pues al evaluar $(1_{b^m \cdot 1_{a_i}})(\alpha)$ vemos que depende sólo de $\alpha_1 \cdots \alpha_{m|b|}$, concluyendo así el resultado. $\square$

El siguiente Teorema servirá como puente para demostrar el Teorema de unicidad de Cuntz-Kriger.

Teorema 4.3.2. *Sea E un grafo el cual satisface la condición (L). Si I es un ideal distinto de cero en $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$, entonces $I \cap D(X)\delta_0 \neq 0$.*

Demostración. Haremos la demostración probando una serie de afirmaciones.

Afirmación 1: *Existe un elemento no nulo en I de la forma*

$$x = \sum_{i \in J} x_{\eta_i} \delta_{\eta_i},$$

donde $\eta_i \in W \cup \{0\}$, es J un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $\eta_i \neq \eta_j$ para todo $i \neq j$.

En efecto, sea $\xi \in I$ con $\xi \neq 0$. Entonces, por ser un elemento en $D(X) \rtimes \mathbb{F}$ lo podemos escribir como

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} x_{\beta_i\gamma_i^{-1}} \delta_{\beta_i\gamma_i^{-1}},$$

con $\gamma_i, \beta_i \in W \cup \{0\}$, $\beta_i\gamma_i^{-1} \neq \beta_j\gamma_j$ donde $i \neq j$ y $x_{\beta_i\gamma_i^{-1}} \neq 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, m\}$. Escojamos $\gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\}$ tal que $|\gamma| = max\{|\gamma_i| \mid i \in \{1, \cdots, m\}\}$. Veamos que $\xi \cdot 1_\gamma\delta_\gamma \neq 0$, para esto notemos que $(x_{\beta\gamma^{-1}}\delta_{\beta\gamma^{-1}}) \cdot (1_\gamma\delta_\gamma) \neq 0$ ya que

$$\begin{aligned}
(x_{\beta\gamma^{-1}}\delta_{\beta\gamma^{-1}}) \cdot (1_\gamma\delta_\gamma) &= \alpha_{\beta\gamma^{-1}}(\alpha_{\gamma\beta^{-1}}(x_{\beta\gamma^{-1}})1_\gamma)\delta_\beta \\
&= x_{\beta\gamma^{-1}}\alpha_{\beta\gamma^{-1}}(1_\gamma)\delta_\beta \\
&= x_{\beta\gamma^{-1}}\alpha_{\beta\gamma^{-1}}(1_{\gamma\beta^{-1}})\delta_\beta \\
&= x_{\beta\gamma^{-1}}1_{\gamma\beta^{-1}}\delta_\beta \\
&= x_{\beta\gamma^{-1}}\delta_\beta,
\end{aligned}$$

y como ya habíamos mencionado $x_{\beta\gamma^{-1}} \neq 0$, con lo cual $\xi \cdot 1_\gamma\delta_\gamma \neq 0$. Ahora para finalizar la prueba de esta afirmación nótese que $\xi \cdot 1_\gamma\delta_\gamma = \sum_{i\in J} x_{\eta_i}\delta_{\eta_i}$ con $\eta_i \in W \cup \{0\}$ para todo $i \in J$ y $J \subseteq \{1, \cdots, n\}$, en efecto consideremos los $\beta_i\gamma_i^{-1}$ tales que $x_{\beta_i\gamma_i^{-1}}\delta_{\beta_i\gamma_i^{-1}} \cdot 1_\gamma\delta_\gamma \neq 0$, entonces $1_{\gamma_i\beta_i^{-1}} \cdot 1_\gamma \neq 0$ lo que indica que γ_i es un camino inicial de γ pues por elección γ es el camino de mayor longitud entre los γ_i, además obsérvese que $1_{\gamma_i\beta_i^{-1}} = 1_{\gamma_i}$ con lo cual basta considerar η_i como γ_i, así podemos concluir que existe un elemento no nulo en I de la forma requerida.

Afirmación 2: Existe un elemento no nulo en I de la forma

$$x = x_0\delta_0 + \sum_{i\in 1}^{n} x_{\iota_i}\delta_{\iota_i},$$

donde $x_0 \neq 0$, $\iota_i \in W$ para cada i, $\iota_i \neq \iota_j$ para todo $i \neq j$ y si $i < j$, entonces ι_i es un camino inicial de ι_j. Más aún, $r(\iota_i) = s(\iota_i) = r(\iota_j) = s(\iota_j)$, para cada i, j.

Consideremos el elemento $x = \sum_{i\in J} x_{\eta_i}\delta_{\eta_i}$ de la afirmación anterior con $x_{\eta_i} \neq 0$ para cada $i \in J$. Escojamos $\eta \in \{\eta_i : i \in J\}$ tal que $|\eta| = max\{|\eta_i| : i \in J\}$. Si $\eta = 0$, entonces $x = x_0\delta_0 \neq 0$ ya que todos los x_{η_i} son diferentes tenemos la afirmación. Supongamos que $\eta \neq 0$, notemos que

$$\begin{aligned}
y = (1_\eta\delta_0)\cdot x = (1_\eta\delta_0)\cdot \sum_{i\in J} x_{\eta_i}\delta_{\eta_i}\\
&= \sum_{i\in J}(1_\eta\delta_0)\cdot(x_{\eta_i}\delta_{\eta_i})\\
&= \sum_{i\in J}\alpha_0(\alpha_0(1_\eta)x_{\eta_i})\delta_{\eta_i}\\
&= \sum_{i\in J} 1_\eta x_{\eta_i}\delta_{\eta_i} \neq 0
\end{aligned}$$

lo anterior ya que $1_\eta x_\eta\delta_\eta = x_\eta\delta_\eta \neq 0$. Ahora, para cada η_i con $|\eta_i| > 0$ tenemos que $1_\eta x_{\eta_i} =$

$1_\eta 1_{\eta_i} x_{\eta_i}$ y puesto que $1_\eta 1_{\eta_i} = 0$ a menos que η_i sea un camino inicial de η obtenemos que

$$y = y_0\delta_0 + \sum_{\{i:\eta_i \textit{ es un camino inicial de } \eta\}} y_{\eta_i\delta_{\eta_i}}$$

donde $y_{\eta_i} = 1_\eta x_{\eta_i}$. Consideremos $\omega = r(\eta)$ y computemos el producto $y \cdot (1_\omega \delta_0)$,

$$\begin{aligned} y\cdot(1_\omega\delta_0) &= (y_0\delta_0)\cdot(1_w\delta_0) + \left(\sum_{\{i:\eta_i \textit{ es un camino inicial de } \eta\}} (y_{\eta_i}\delta_{\eta_i})\cdot(1_w\delta_0)\right) \\ &= \alpha_0(\alpha_0(y_0)1_\omega)\delta_0 + \left(\sum_{\{i:\eta_i \textit{ es un camino inicial de } \eta\}} \alpha_{\eta_i}(\alpha_{\eta_i^{-1}}(y_{\eta_i})1_\omega)\delta_{\eta_i}\right) \\ &= y_0 1_\omega\delta_0 + \left(\sum_{\{i:\eta_i \textit{ es un camino inicial de } \eta\}} \alpha_{\eta_i}(\alpha_{\eta_i^{-1}}(y_{\eta_i})1_\omega)\delta_{\eta_i}\right) \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\alpha_{\eta_i^{-1}}(y_{\eta_i})1_\omega = \alpha_{\eta_i^{-1}}(y_{\eta_i})1_{\eta_i^{-1}}1_\omega$ tenemos que $\alpha_{\eta_i^{-1}}(y_{\eta_i})1_\omega = \alpha_{\eta_i^{-1}}(y_{\eta_i})1_{\eta_i^{-1}}1_\omega =$ 0 si $r(\eta_i) \neq \omega = r(\eta)$, por lo cual lo anterior se puede escribir como

$$y\cdot(1_\omega\delta_0) + \left(\sum_{\{i:\eta_i \textit{ es un camino inicial de } \eta\} \textit{ y } r(\eta)=\omega} (y_{\eta_i\delta_{\eta_i}})\cdot(1_w\delta_0)\right).$$

Ahora, consideremos $v = s(\eta)$, si multiplicamos a $y \cdot 1_\omega\delta_0$ a la izquierda por $1_v\delta_0$ obtenemos

$$\begin{aligned} z = (1_v\delta_0)(y1_\omega\delta_0) &= (1_v\delta_0)(y_0 1_\omega\delta_0) + \left(\sum_{\{i:\eta_i \textit{ es un camino inicial de } \eta\} \textit{ y } r(\eta)=\omega} (1_v\delta_0)(y_{\eta_i}\delta_{\eta_i})\right) \\ &= 1_v y_0 1_\omega\delta_0 + \left(\sum_{\{i:\eta_i \textit{ es un camino inicial de } \eta\} \textit{ y } r(\eta)=\omega} \alpha_0(\alpha_0(y_{\eta_i})1_v)\delta_{\eta_i}\right) \\ &= 1_v y_0 1_\omega\delta_0 + \left(\sum_{\{i:\eta_i \textit{ es un camino inicial de } \eta\} \textit{ y } r(\eta)=\omega} y_{\eta_i}1_v\delta_{\eta_i}\right), \end{aligned}$$

notemos que $z \neq 0$ ya que $1_{s(\eta)}y_\eta = 1_{s(\eta)}1_\eta x_\eta = x_\eta \neq 0$. Ahora, si $y_0 1_v 1_\omega \neq 0$ entonces $1_\omega 1_v \neq 0$, es decir $v = s(\eta) = r(\eta) = \omega$ y así z es el elemento buscado. Caso contrario, si $y_0 1_\omega 1_v = 0$ escojamos $0 \neq \iota \in \{\eta_i : \eta_i \textit{ es un camino inicial de } \eta\} \textit{ y } r(\eta) = \omega\}$, tal que ι es el camino de menor longitud y consideremos el elemento

$$
\begin{aligned}
(1_{\iota^{-1}}\delta_{\iota^{-1}}) \cdot z &= \sum_{\{i:\eta_i \textit{ es un camino inicial de } \eta\} \textit{ y } r(\eta)=\omega} \alpha_{\iota^{-1}}(\alpha_\iota(1_{\iota^{-1}})y_{\eta_i})\delta_{\iota^{-1}\eta_i} \\
&= \sum_{\{i:\eta_i \textit{ es un camino inicial de } \eta\} \textit{ y } r(\eta)=\omega} \alpha_{\iota^{-1}}(1_\iota y_{\eta_i}))\delta_{\iota^{-1}\eta_i} \\
&= \sum_{\{i:\eta_i \textit{ es un camino inicial de } \eta\} \textit{ y } r(\eta)=\omega} \alpha_{\iota^{-1}}(y_{\eta_i})\delta_{\iota^{-1}\eta_i}
\end{aligned}
$$

Observe que $\iota^{-1}\eta_i \in W \cup \{0\}$ pues todos los η_i son caminos iniciales de η y ι es el camino de menor longitud, además $r(\iota^{-1}\eta_i) = r(\eta_i)\omega = r(\iota) = s(\iota^{-1}\eta_i)$ y $1_{\iota^{-1}}\delta_{\iota^{-1}} \cdot z \neq 0$ ya que $y_\iota \neq 0$ y por tanto $\alpha_{\iota^{-1}}(y_\iota) \neq 0$ así $1_{\eta^{-1}}\delta_{\eta^{-1}} \cdot z$ es el elemento que buscábamos.

Afirmación 3: *Sea*

$$x = x_0\delta_0 + \sum_{i \in 1}^{n} x_{\iota_i}\delta_{\iota_i},$$

con $x_{\iota_i} \neq 0$*, el elemento distinto de cero descrito en la afirmación anterior. Entonces, existe un elemento* $0 \neq y \in I$ *tal que* $y = y_0\delta_0$ *o* $y = y_0\delta_0 + \sum_{i=1}^{k} y_{\iota_i}\delta_{\iota_i}$ *con* $k < n$*.*

En efecto, escribamos $x = \sum_{i=0}^{n} x_{\iota_i}\delta_{\iota_i}$ con $\iota_0 = 0$, $x_{\iota_i} \neq 0$ para cada i y $r(\iota_i) = s(\iota_i)$ para cada $\iota_i \neq 0$. Ahora escojamos $\iota \in \{\iota_0, \iota_1, \cdots, \iota_n\}$ tal que $|\iota| = max\{|\iota_i| : i \in \{0, 1, \cdots, n\}\}$. Si $\iota = 0$, entonces $x =$

$x_0\delta_0$ concluyendo la prueba. Ahora, si $\iota \neq 0$ entonces $\iota = \eta$ por la afirmación anterior, escribamos $\iota = \iota_1\iota_2\cdots\iota_{|\iota|}$. Por el Lema 4.3.1 existen $m,k \geq 1$ y $t_1,t_2,\cdots,t_k \in E^1$ con $t_i \neq \iota_i$ para algún i tal que $x_\iota \cdot 1_{\iota^m t_1 \cdot t_k} \neq 0$. Tomemos el elemento z de I que está dado por

$$z = (1_{\iota^m}\delta_0)\cdot x\cdot(1_{\iota^{m-1}t_1\cdots t_k}\delta_0) = \sum_{i=0}^{n} z_{\iota_i}\delta_{\iota_i},$$

donde $z_{\iota_i}\delta_{\iota_i} = (1_{\iota^m}\delta_0)\cdot(x_{\iota_i}\delta_{\iota_i})\cdot(1_{\iota^{m-1}t_1\cdot t_k}\delta_0)$. Ahora, note que $z_{\iota_0}\delta_{\iota_0} = 0$, pues

$$\begin{aligned} z_{\iota_0}\delta_{\iota_0} &= (1_{\iota^m}\delta_0)\cdot(x_0\delta_0)\cdot(1_{\iota^{m-1}t_1\cdots t_k}\delta_0) \\ &= 1_{\iota^m}x_0 1_{\iota^{m-1}t_1\cdots t_k}\delta_0 \end{aligned}$$

y $1_{\iota^m}1_{\iota^{m-1}t_1\cdot t_k} = 0$ ya que $\iota^m \neq \iota^{m-1}t_1\cdot t_k$. Por otro lado, z es un elemento distinto de cero ya que

$$\begin{aligned} z_\iota\delta_\iota &= (1_{\iota^m}\delta_0)(x_\iota\delta_\iota)\cdot(1_{\iota^{m-1}t_1\cdots t_k}\delta_0) \\ &= (1_{\iota^m}x_\iota\delta_\iota)\cdot(1_{\iota^{m-1}t_1\cdots t_k}\delta_0) \\ &= \alpha_\iota(\alpha_{\iota^{-1}}(1_{\iota^m x_\iota})1_{\iota^{-1}}1_{\iota^{m-1}t_1\cdots t_k})\delta_\iota \\ &= 1_{\iota^m}x_\iota\alpha_\iota(1_{\iota^{-1}}1_{\iota^{m-1}t_1\cdots t_k})\delta_\iota \\ &= 1_{\iota^m}x_\iota 1_\iota 1_{\iota\iota^{m-1}t_1\cdots t_k}\delta_\iota \\ &= 1_{\iota^m t_1\cdots t_k}x_\iota\delta_\iota \neq 0 \quad \textit{por el Lema 4.3.1.} \end{aligned}$$

Sea $\zeta \in \{\iota_0,\iota_1,\cdots,\iota_n\}$ tal que ζ tiene la longitud más pequeña entre los ι_i tales que $z_{\iota_i} \neq 0$. Obsérvese que

$$\begin{aligned}(1_{\zeta^{-1}}\delta_{\zeta^{-1}})\cdot(z_\zeta\delta_\zeta) &= \alpha_{\zeta^{-1}}(\alpha_\zeta(1_{\zeta^{-1}})z_\zeta)\delta_0\\ &= \alpha_{\zeta^{-1}}(z_\zeta)\delta_0\end{aligned}$$

y $\alpha_{\zeta^{-1}}(z_\zeta)\neq 0$ dado que $z_\zeta\neq 0$, así el elemento $y=(1_{\zeta^{-1}}\delta_{\zeta^{-1}})\cdot z$ es el elemento buscado.

Una vez probadas las afirmaciones anteriores tenemos lo necesario para probar el Teorema, sea x un elemento distinto de cero como el la Afirmación 2, es decir,

$$x = x_0\delta_0 + \sum_{i\in 1}^{n} x_{\iota_i}\delta_{\iota_i}.$$

Si $x_{\iota_i}=0$ para cada i entonces ya tenemos el teorema pues $x_0\neq 0$ es decir $x=x_0\delta_0\in D(X)\delta_0$. Si $x_{\iota_i}\neq 0$ para algún i entonces aplicamos la Afirmación 3 las veces que sea necesario. □

Teorema 4.3.3. *(Teorema de unicidad de Cuntz-Kriger) Sean E un grafo que satisface la Condición (L) y B un anillo. Si $\phi : D(X)\rtimes_\alpha \mathbb{F}\to B$ es un $K-$homomorfismo tal que $\phi(1_v\delta_0)\neq 0$ para cada $v\in E^0$, entonces ϕ es inyectivo.*

Demostración. Para demostrar este Teorema probaremos primero la siguiente afirmación .

<u>*Afirmación:*</u> *Con las hipótesis del enunciado, existe un vértice $v\in E^0$ tal que $1_v\delta_0\in I$.*

En efecto, por el Teorema 4.3.2 dado que I es distinto de cero existe $x_0\delta_0\in I\cap D(X)\delta_0$ con $x_0\delta_0\neq$

0, como $x_0 \in D(X)$ podemos escribirlo como una combinación de funciones características de la siguiente manera

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{\gamma_i \eta_i^{-1}} + \sum_{j=1}^{m} \mu_j 1_{v_j}$$

donde $\lambda_i, \mu_j \in K$, $\gamma_i \in W$ y $\eta_i \in W \cup \{0\}$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ y $j \in \{1, \cdots, m\}$, nótese que podemos asumir que $\gamma_i \neq 0$ ya que $1_{\eta_i^{-1}} = 1_{r(\eta_i)}$ y lo podemos ubicar en la segunda suma. Sea $v \in E^0$ tal que $1_v x_0 \neq 0$. Si v es un sink, entonces

$$\begin{aligned}
1_v x_0 \delta_0 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_v 1_{\gamma_i \eta_i^{-1}} + \sum_{j=1}^{m} \mu_j 1_v 1_{v_j} \right) \delta_0 \\
&= \sum_{j=1}^{m} \mu_j 1_v 1_{v_j} \delta_0 & (1) \\
&= \sum_{\{j : v_j = v\}} \mu_j 1_v \delta_0 \in I & (2)
\end{aligned}$$

donde la igualdad (1) se cumple ya que v es un sink y por tanto ningún camino γ_i inicia en v y la igualdad (2) puesto que las funciones $1_v'$s son idempotentes ortogonales, así por lo anterior tenemos que $1_v \delta_0 \in I$ con lo cual concluimos el resultado. Ahora, supongamos que v no es un sink. Sea $m = max\{|\gamma_i| : i \in \{1, \cdots, n\}\}$, recordemos que podemos escribir $X_v = \cup_{\zeta \in W} X_\zeta$ donde dicha unión es disjunta y cada $\zeta \in W$ satisface que $s(\zeta) = v$ y $|\zeta| = m$ ó $|\zeta| < m$ y $r(\zeta)$ es un sink. De lo anterior, puesto que $1_v x_0 \neq 0$, debe existir ζ dentro de los índices de la unión tal que $1_\zeta x_0 \neq 0$, entonces si $1_\zeta 1_{\gamma_i \eta_i^{-1}} \neq 0$ tenemos que $1_\zeta 1_{\gamma_i \eta_i^{-1}} = 1_\zeta 1_{\gamma_i} = 1_\zeta$ puesto que γ_i debe ser un camino inicial de ζ, más aún, si $1_\zeta 1_{v_j} \neq 0$, entonces $1_\zeta 1_{v_j} = 1_\zeta$. Con esto en mente, obtenemos

$$\begin{aligned}
0 \neq 1_\zeta x_0 \delta_0 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_\zeta 1_{\gamma_i \eta_i^{-1}} + \sum_{j=1}^{m} \mu_j 1_\zeta 1_{v_j} \right) \delta_0 \\
&= \left(\sum_{\{i:1_\zeta 1_{\gamma_i \eta_i^{-1}} \neq 0\}} \lambda_i 1_\zeta 1_{\gamma_i \eta_i^{-1}} + \sum_{\{j:1_\zeta 1_{v_j} \neq 0\}} \mu_j 1_\zeta 1_{v_j} \right) \delta_0 \\
&= \left(\sum_{\{i:1_\zeta 1_{\gamma_i \eta_i^{-1}} \neq 0\}} \lambda_i 1_\zeta + \sum_{\{j:1_\zeta 1_{v_j} \neq 0\}} \mu_j 1_\zeta \right) \delta_0 \\
&= \left(\sum_{\{i:1_\zeta 1_{\gamma_i \eta_i^{-1}} \neq 0\}} \lambda_i + \sum_{\{j:1_\zeta 1_{v_j} \neq 0\}} \mu_j \right) 1_\zeta \delta_0,
\end{aligned}$$

y por lo tanto $0 \neq 1_\zeta \delta_0 \in I$. Ahora bien, puesto que I es un ideal tenemos que

$$\begin{aligned}
(1_{\gamma^{-1}} \delta_{\gamma^{-1}}) \cdot (1_\gamma \delta_0) \cdot (1_\gamma \delta_\gamma) &= (\alpha_{\gamma^{-1}}(\alpha_\gamma(1_{\gamma^{-1}}) 1_\gamma) \delta_{\gamma^{-1}} \cdot (1_\gamma \delta_\gamma) \\
&= (1_{\gamma^{-1}} \delta_{\gamma^{-1}}) \cdot (1_\gamma \delta_\gamma) \\
&= \alpha_{\gamma^{-1}}(\alpha_\gamma(1_{\gamma^{-1}}) 1_\gamma) \delta_0 \\
&= 1_{\gamma^{-1}} \delta_0
\end{aligned}$$

también está en I y dado que $1_{\gamma^{-1}} = 1_{r(\gamma)}$, conseguimos que $0 \neq 1_{r(\gamma)} \delta_0 \in I$ concluyendo el resultado.

Una vez mostrada la afirmación procedamos a mostrar el teorema, sea $I = Ker(\phi)$ supongamos que $Ker(\phi) \neq 0$ entonces por la Afirmación existe un $v \in E^0$ tal que $1_v \delta_0 \in Ker(\phi)$, pero por hipótesis

$\phi(1_v\delta_0) \neq 0 \notin Ker(\phi)$ lo cual es una contradicción. $\square$

Definición 4.3.4. *Dado E un grafo:*

1. *Un subconjunto $H \subseteq E^0$ es llamado hereditario si para cada $v \in H$ con $v = s(e)$ para algún $e \in E^1$, se tiene que $r(e) \in H$.*

2. *Un conjunto $H \subseteq E^0$ es llamado saturado si $v \in E^0$ es tal que $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$. Entonces $\{r(e) : e \in E^1 \text{ y } s(e) = v\} \subseteq H$ implica que $v \in H$.*

Consideremos el conjunto $H_I = \{v \in E^0 : 1_v\delta_0 \in I\}$ para I un ideal de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Obsérvese por la afirmación en la prueba del Teorema de Cuntz-Kriger que $H_I \neq 0$ si $I \neq 0$ y E satisface la condición (L). Veamos entonces el siguiente resultado.

Proposición 4.3.5. *Sea I un ideal en $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Entonces el conjunto H_I es saturado y hereditario.*

Demostración.

1. Veamos que H_I es hereditario. Supongamos que $v = s(e) \in H_I$, esto implica que $1_{s(e)}\delta_0 \in I$, así tenemos que

$$(1_{s(e)}\delta_0) \cdot (1_e\delta_e) = 1_{s(e)}1_e\delta_e = 1_e\delta_e \in I$$

por ser ideal y por tanto

$$(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) \cdot (1_e\delta_e) = \alpha_{e^{-1}}(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_e)\delta_0 = 1_{e^{-1}}\delta_0 \in I.$$

Concluimos entonces que $1_{e^{-1}}\delta_0 = 1_{r(e)}\delta_0 \in I$ y en consecuencia $r(e) \in H_I$ como buscábamos.

2. Veamos ahora que H_I es saturado. Sea $v \in E^0$ tal que $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$ y supongamos que $\{r(e) : e \in E^1 \text{ y } s(e) = v\} \subseteq H_I$. Sea $e \in E^1$ tal que $s(e) = v$. Dado que $r(e) \in H_I$ tenemos que

$$(1_e\delta_e) \cdot (1_{r(e)}\delta_0) = \alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_e)1_{r(e)})\delta_e = \alpha_e(1_{e^{-1}})\delta_e = 1_e\delta_e \in I$$

y así $(1_e\delta_e) \cdot (1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) = 1_e\delta_0 \in I$ pero esto implica que $1_v\delta_0 = \sum\limits_{\substack{e\in E^1\\ s(e)=v}} 1_e\delta_0 \in I$ y por lo tanto $v \in H_I$.

$\square$

Definición 4.3.6. *Sea R un anillo. Decimos que R es un anillo* ***simple*** *si sus únicos ideales bilaterales son* 0 *y R.*

Para finalizar probaremos que las álgebras de camino de Leavitt inducidas por grafos que cumplen la condición (L) son simples.

Proposición 4.3.7. *Sea E un grafo que satisface la condición (L) y supongamos que los únicos subconjuntos saturados y hereditarios de E^0 son $\emptyset$ y E^0. Entonces $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es simple.*

Demostración. Sea I un ideal no nulo en $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ y H_I el conjunto definido arriba. Por la afirmación del Teorema de Cuntz-Kriger H_I es no vacío y por tanto $H_I = E^0$ es un conjunto hereditario y saturado de donde concluimos que $1_v\delta_0 \in I$ para cada $v \in E^0$. Ahora, para cada $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ existe

$v \in E^0$ tal que $1_v 1_p = 1_p$. Así para $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{F}$ y $v \in E^0$ tales que $1_v 1_p = 1_p$ tenemos

$$\begin{aligned}(1_v \delta_0) \cdot (1_p 1_q \delta_q) &= \alpha_0(\alpha_0(1_v) 1_p 1_q) \delta_q \\ &= 1_v 1_p 1_q \delta_q = 1_p 1_q \delta_q \in I\end{aligned}$$

y dado que I es un ideal, se sigue que $D_p \delta_p \subseteq I$ para todo $p \in \mathbb{F}$ y por lo tanto $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F} = I$. □

4.3.2. Álgebras de camino de Leavitt Artinianas. Como otra aplicación de interpretar a las álgebras de camino de Leavitt como anillos de grupo torcido, mostraremos cuando estas álgebras son Artinianas usando sólo teoría de anillos de grupo torcido. Para esto tomaremos como guía Nystedt et al. (2018a).

Comenzaremos dando las definiciones requeridas para el Teorema principal de esta sección.

Definición 4.3.8. *Un anillo R es artiniano a izquierda (derecha) si satisface la condición de cadena descendente en ideales a izquierda (derecha). Es decir, cada cadena descendente de ideales a izquierda (derecha)*

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$$

se estaciona. Además, decimos que el anillo R es ***artiniano*** *si cada cadena de ideales bilaterales se estaciona.*

Definición 4.3.9. *Un anillo R es llamado* ***semisimple*** *si considerado como $R-$módulo es semisimple, es decir, R es suma directa de $R-$módulos que no admiten otros submódulos diferentes de $\{0\}$ y el mismo módulo.*

El resultado que enunciaremos a continuación será el pilar para mostrar el Teorema, este resultado es el objetivo principal de Nystedt et al. (2018a).

Definición 4.3.10. *Un anillo R es llamado **alternativo** si para todo $x, y \in R$, las relaciones $x^2 y = x(xy)$ y $xy^2 = (xy)y$ se mantienen.*

Nótese que todo anillo asociativo es también alternativo.

Teorema 4.3.11. *Si α es una acción parcial unitaria de un grupo G en un anillo alternativo R, entonces el anillo de grupo torcido $R \rtimes_\alpha G$ es artiniano a izquierda (derecha) si y sólo si R es artiniano a izquierda (derecha) y $R_g = \{0\}$ excepto para un número de $g \in G$.*

Demostración. Ver (Nystedt et al., 2018a, Teorema 1.3). $\square$

El siguiente resultado también serán utilizados a lo largo de la prueba, pero no entraremos en detalles de su prueba.

Proposición 4.3.12. *Sean E un grafo arbitrario y K un cuerpo. Entonces el álgebra de camino de Leavitt $L_K(E)$ es semiprimitiva, es decir, $J(L_K(E)) = \{0\}$ donde $J(L_K(E))$ es el radical de Jacobson.*

Demostración. Ver (Abrams et al., 2017, Proposición 2.3.2). $\square$

Con todo lo anterior estamos listos para mostrar el Teorema.

Teorema 4.3.13. *Sean K un cuerpo y E un grafo. Consideremos al álgebra de camino de Leavitt $L_R(E)$ con coeficientes en K. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. E es finito y acíclico;

II. $L_K(E)$ *es artiniano a izquierda;*

III. $L_K(E)$ *es artiniano a derecha;*

IV. $L_K(E)$ *es artiniano;*

V. $L_K(E)$ *es unitario y semisimple.*

Demostración. La prueba la haremos mostrando que $I \Leftrightarrow II$, $II \Leftrightarrow III$, $III \Leftrightarrow IV$ y $IV \Leftrightarrow V$. En efecto,

$I \Leftrightarrow II$) Vamos a suponer que E es un grafo finito y acíclico, para ver que $L_K(E) \cong D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es artiniano a izquierda mostraremos que $D(X)$ es artiniano a izquierda y $D_g = \{0\}$ excepto para un número finito de $g \in G$. En efecto, dado que E es finito y acíclico concluimos que no hay caminos infinitos en E pues sólo hay un número finito de aristas y no hay ciclos, además también tenemos que W es un conjunto finito ya que no hay ciclos y sólo es posible hacer un número finito de combinaciones para formar caminos. Por lo anterior, puesto que

$$\begin{aligned} X &= \{\alpha \in W \mid r(\alpha) \text{ } es \text{ } un \text{ } sink\} \cup \{v \in E^0 \mid v \text{ } es \text{ } un \text{ } sink\} \cup W^\infty \\ &= \{\alpha \in W \mid r(\alpha) \text{ } es \text{ } un \text{ } sink\} \cup \{v \in E^0 \mid v \text{ } es \text{ } un \text{ } sink\}, \end{aligned}$$

usamos el hecho de que W es finito, tenemos que $X_g = \{0\}$ excepto en un número finito de g's (los elementos de W), de ahí que $1_g = 0$ para dichos g's, así $D_g = \{0\}$ excepto para un número finito de g's. Además, note que $D(X)$ es un $K-$espacio vectorial de dimensión finita lo que implica que $D(X)$ es artiniano como $K-$módulo y por tanto como anillo, con lo cual por el Teorema 4.3.11 obtenemos que $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es artiniano. Recíprocamente, supongamos que $L_K(E) \cong D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es artiniano a izquierda, por el Teorema 4.3.11 obtenemos que $D_g = \{0\}$ excepto para un número finito de g's. Primero mostraremos que el grafo E no tiene ciclos, para esto veamos que $W^\infty = \emptyset$, supongamos por contradicción que existe $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$ un camino infinito en E y consideremos los caminos iniciales finitos de α los cuales son elementos de W y por tanto también de $\mathbb{F}$, con lo cual podemos formar la siguiente cadena infinita de conjuntos encajados

$$X_{\alpha_1} \supseteq X_{\alpha_1\alpha_2} \supseteq X_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots} \supseteq \cdots \supseteq X_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n} \supseteq \cdots,$$

los cuales son no vacíos ya que al menos contienen a α. Así, los ideales

$$D_{\alpha_1}, \quad D_{\alpha_1\alpha_2}, \quad D_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \quad \cdots, \quad D_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}, \quad \cdots$$

son todos no nulos y por lo tanto $D_g \neq \{0\}$ para un número infinito de $g \in \mathbb{F}$ lo cual es una contradicción, así concluimos que E no tiene ciclos pues cada ciclo da paso a un camino infinito. Ahora, vamos a ver que E es finito, para esto es necesario mostrar E^0 y E^1 son finitos. Supongamos por contradicción que $E^0 = \{v_1, v_2, \cdots\}$ es infinito, entonces $L_K(E) =$

$\bigoplus_{v\in E^0} L_K(E)v$, de ahí tenemos la siguiente cadena de ideales a izquierda

$$L_K(E) \supseteq \bigoplus_{v\in E^0\setminus\{v_1\}} L_K(E)v \supseteq \bigoplus_{v\in E^0\setminus\{v_1,v_2\}} L_K(E)v \supseteq \bigoplus_{v\in E^0\setminus\{v_1,v_2,v_3\}} L_K(E)v \supseteq \cdots$$

notemos que esta cadena no se estaciona ya que $L_K(E)v \neq L_K(E)w$ para cada par de vértices $v,w \in E^0$ pues los vértices son idempotentes ortogonales, así $L_K(E)$ no es artiniana a izquierda por lo cual E^0 debe ser un conjunto finito. Por otra parte, veamos que E^1 es finito, para esto usaremos que E^0 es finito, por lo cual es suficiente mostrar que E^0 no contiene emisores infinitos. Supongamos por contradicción que existe un emisor infinito, puesto que E^0 es finito, existe $u \in E^0$ tal que el conjunto $I = \{e \in E^1 \mid s(e) = v \text{ y } r(e) = u\}$ es infinito, analicemos los posibles casos:

- Si u es un sink, tomemos $e \in I \subseteq W$ y consideremos $X_{e^{-1}} = \{\alpha \in X \mid s(\alpha) = r(e) = u\}$ el cual es no vacío pues al menos contiene a u el cual por ser sink $u \in X$, por lo tanto $D_e \neq \{0\}$ para cada $e \in I$ lo cual es una contradicción.
- Si u no es un sink, debe existir un camino de u a un sink w ya que como mostramos antes $W^\infty = \emptyset$ y no hay ciclos. Sean η el camino antes mencionado y $e \in I$, considere el conjunto $X_{e^{-1}} = \{\alpha \in s(\alpha) = u\}$ el cual es no vacío ya que $\eta \in X_{e^{-1}}$ y de manera análoga al caso anterior $D_{e^{-1}} \neq 0$ para un número infinito de $g \in \mathbb{F}$ lo cual es una contradicción.

En conclusión tenemos que el grafo E es finito y acíclico como queríamos mostrar.

$II \Leftrightarrow III$) Si $L_K(E) \cong D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es artiniano a izquierda por el Teorema 4.3.11 tenemos que $D(X)$ es artiniano a izquierda y dado que $D(X)$ es conmutativo entonces $D(X)$ es artiniano a derecha y de nuevo por el Teorema 4.3.11 tenemos que $L_K(E)$ es artiniano a derecha. De manera dual tenemos que si $L_K(E)$ es artiniano a derecha, entonces $L_K(E)$ es artiniano a izquierda.

$III \Leftrightarrow IV$) Si $L_K(E)$ es artiniano a derecha, por la equivalencia anterior es artiniano a izquierda y por ende artiniano.

$IV \Leftrightarrow V$) Primero supongamos que $L_K(E)$ es artiniana. Por la Proposición 4.3.12 sabemos que $L_K(E)$ es semiprimitiva, por lo tanto dado que $L_K(E)$ es semiprimitiva y artiniana por (Lam, 1991, Teorema 4.14) tenemos que $L_K(E)$ es semisimple. Recíprocamente, si $R = L_K(E)$ es unitario entonces visto como módulo sobre si mismo es finitamente generado, entonces por la semisimplicidad podemos escribir a $R = \bigoplus_{i \in I} R_i$ como suma directa de módulos simples donde I es un índice no necesariamente finito, así 1_R se puede escribir como suma finita de algunos elementos de R_i es decir $1_R = \sum_{i \in J} a_j r_j$ donde $J \subseteq I$ es un índice finito, lo cual implica que $R = \bigoplus_{i \in J} R_i$ es suma directa finita de módulos simples y en consecuencia $R = L_K(E)$ es artiniana.

$\square$

Corolario 4.3.14. *Si E es un grafo finito y acíclico tal que sus únicos subconjuntos hereditarios y saturados son E^0 y $\emptyset$. Entonces el álgebra de camino de Leavitt $L_K(E)$ es un anillo simple artiniano unitario.*

Demostración. Dado que suponemos al grafo acíclico entonces E satisface la condición (L), en consecuencia por la Proposición 4.3.7 $L_K(E)$ es simple. Ahora, dado que E es finito y acíclico por el Teorema 4.3.13 es artiniana y por la finitud de E es unitaria. $\square$

5. Álgebras de camino de Leavitt $\mathbb{F}$-graduadas

En este último capítulo enunciaremos y probaremos algunos resultados nuevos análogos al estudio de la $\mathbb{Z}-$graduación canónica de las álgebras de camino de Leavitt, ahora con la $\mathbb{F}-$graduación dada por el anillo de grupo torcido, además encontramos otra construcción a un anillo de grupo torcido el cual también será isomorfo al álgebra de camino de Leavitt sobre un grafo sin vértices aislados. Consideraremos a E un grafo, K un cuerpo, $L_K(E)$ el álgebra de camino de Leavitt asociada a E y $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ el anillo de grupo torcido isomorfo a $L_K(E)$ descrito en la Sección 4.2.

Comencemos observando que la acción parcial $\{\{D_g,\},\{\alpha_g\}\}_{g\in\mathbb{F}}$ es una acción global siempre que $D_0 = D_p$ para todo $p \in \mathbb{F}$, con esto en mente veamos el siguiente resultado.

Proposición 5.0.1. *La anillo de grupo torcido $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es fuertemente graduada¿o si y sólo si la acción es global.*

Demostración. Nótese que para todo $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ cada D_p es unitario, lo cual implica que cada D_p es idempotente y $D_p \cap D_q = D_p D_q$ para todo $p, q \in \mathbb{F}$. Supongamos que $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es fuertemente graduada. Entonces para cada $p \in \mathbb{F}$

$$
\begin{aligned}
D_0\delta_0 = (D_p\delta_p)\cdot(D_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}}) &= \alpha_p(\alpha_{p^{-1}}(D_p)D_{p^{-1}})\delta_0 \\
&= \alpha_p(D_{p^{-1}}D_{p^{-1}})\delta_0 \\
&= \alpha_p(D_p)\delta_0 \\
&= D_p\delta_0
\end{aligned}
$$

y en consecuencia $D_p = D_0$ para todo $p \in \mathbb{F}$. Recíprocamente, si suponemos que la acción es global, entonces para cada $p,q \in \mathbb{F}$

$$
\begin{aligned}
(D_p\delta_p)\cdot(D_q\delta_q) &= \alpha_p(\alpha_{p^{-1}}(D_p)D_q)\delta_{pq} \\
&= \alpha_p(D_{p^{-1}}D_q)\delta_{pq} \\
&= \alpha_p(D_{p^{-1}})\delta_{pq} \\
&= D_p\delta_{pq} \\
&= D_{pq}\delta_{pq}
\end{aligned}
$$

donde las igualdades anteriores ocurren pues $D_0 = D_p$ para todo $p \in \mathbb{F}$. $\square$

Seguidamente, notemos que si $D_0 = D_p$ para $p \in \mathbb{F}$, entonces $X_p = X_0 = X$. Así las cosas conseguimos la siguiente afirmación.

Proposición 5.0.2. *El anillo de grupo torcido $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es fuertemente graduado si y sólo si el* *grafo E es un loop.*

Demostración. Supongamos que $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es fuertemente graduado. Entonces, si existen $e, f \in E^1$ con $e \neq f$ tenemos que $X_e = \{\alpha \in X \mid e \textit{ es un camino inicial de } \alpha\} \neq X_f = \{\alpha \in X \mid f \textit{ es un camino inicial de } \alpha\}$ lo que implica que las funciones características $1_e \neq 1_f$ y de ahí $D_f \neq D_e$ lo cual contradice que la acción es global, así que $e = f$ y por tanto $E^1 = \{e\}$. Ahora, sea $v \in E^0$ entonces $1_v \in D_0$, observemos que $D_0 = D_e$ y que 1_e es la unidad de D_e, por tanto si $1_v \in D_e$ debe pasar que $1_v = 1_e 1_v$, nótese que $1_e = 1_e 1_{s(e)}$ lo que implica que $1_v = 1_e 1_{s(e)} 1_v$ y dado que las funciones $1_v's$ son idempotentes ortogonales $v = s(e)$, en particular si $v = r(e)$ tenemos que $s(e) = r(e)$ es decir la única arista e en el grafo es un loop. Recíprocamente, si E es un loop entonces X tiene un único elemento el cual es el camino infinito que surge al concatenar la arista e, además puesto que $\mathbb{F}$ es el grupo libre generado por la única arista e, para cada $p \in \mathbb{F}$ tenemos $X = X_0 = X_p$ ya que cada $p \in \mathbb{F}$ es concatenación de e ó concatenación de e^{-1} en cuyo caso todos estos conjuntos tienen al único elemento de X, en consecuencia $1_e = 1_p$ para todo $p \in \mathbb{F}$ y así $D_p = D_0$ para todo $p \in \mathbb{F}$ con lo que concluimos el resultado. □

Ahora siguiendo algunas ideas de Vaš (2021), estudiaremos cuando $L_K(E)$ es un anillo clean graduado y unit-regular graduado, pero ahora en su versión $\mathbb{F}-$graduada.

Definición 5.0.3. *Un anillo unitario R es llamado **clean** si cada elemento $x \in R$ es suma de un elemento invertible y un idempotente.*

Definición 5.0.4. *Un anillo graduado unitario R es clean graduado si cada elemento homogéneo $x \in R$ se puede escribir como $x = u + a$ para u un elemento invertible homogéneo en R y a un* *idempotente homogéneo.*

Lema 5.0.5. *Sea R un anillo $G-$graduado con elemento neutro $e \in G$. Entonces, R es clean graduado si y sólo si R_e es clean y cada elemento no nulo en R_g con $e \neq g \in G$ es invertible.*

Demostración. Supongamos que R es un anillo clean graduado. Entonces

- Veamos que R_e es clean. Sea $x \in R_e$, dado que R es clean graduado existe un invertible homogéneo u y un idempotente homogéneo e tales que $x = u + a$, por lo que sólo debemos probar que $u, a \in R_e$, lo cual deducimos ya que R se descompone como suma directa y R_e es un sumando directo de R.

- Mostraremos que cada elemento no nulo de R_g es invertible para todo $g \neq e$. Sea $x \in R_g$ no nulo, puesto que R es clean graduado $x = u + a$ para un elemento invertible homogéneo u y un idempotente homogéneo a, por ser a idempotente homogéneo tenemos que $a \in R_e$ en cuyo caso $a = 0$ pues de lo contrario x no podría ser homogéneo de grado g, de ahí que $x = u$ sea invertible.

Ahora, supongamos que R_e es clean y cada elemento no nulo de R_g es invertible para $g \neq e$. Sea $x \in R_g$, si $g \neq e$ entonces x es invertible y $x = x + 0$. Ahora, si $g = e$ puesto que R_e es clean podemos escribir a $x = u + a$ con u invertible, a idempotente y $u, a \in R_e$. □

Enseguida, vamos a mostrar cuándo $L_K(E)$ es clean graduado con la $\mathbb{F}-$graduación. Puesto que se requiere $L_K(E)$ unitario consideraremos que el grafo tiene sólo un número finito de vértices.

Proposición 5.0.6. *Sea E un grafo con un número finito de vértices. Entonces, $L_K(E)$ es clean $\mathbb{F}-$graduado si y sólo si $L_K(E)$ es fuertemente $\mathbb{F}-$graduada.*

Demostración. Vamos a suponer que $L_K(E) \cong D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es clean $\mathbb{F}-$graduado y por conveniencia asumamos que el grafo tiene al menos una arista. Por la proposición 5.0.2 debemos verificar que el grafo es un loop. Primero veamos que el grafo tiene un único vértice, sea $e \in E^1$, supongamos que existe $v \neq s(e)$, entonces por el Lema 5.0.5 $0 \neq 1_e \delta_e \in D_e \delta_e$ es invertible con inversa u, en este caso

$$ve = vs(e)e = 0$$

y así,

$$0 \neq v = v(eu) = (ve)u = 0,$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto $s(e)$ es el único vértice en E y así $1_{L_K(E)} = s(e)$. Veamos ahora que e es la única arista de E, para esto consideremos el conjunto de idempotentes

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i f_i^* \in L_K(E) \mid f_i \in E^1 \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}$$

e inducimos el orden dado por $p \leq q$ si y sólo si $pq = qp = p$. Ahora, tomemos una arista $f \neq e$, puesto que $e^*e = s(e) = 1_{L_K(E)} = ue$, tenemos que $ee^* \leq ee^* + ff^*$ y $s(e) = ee^* \geq ee^* + ff^*$, de ahí $ee^* = ee^* + ff^*$ lo cual implica que $ff^* = 0$ y por lo tanto $f = fr(f) = ff^*f = 0f = 0$ lo que es una contradicción, concluyendo así que E es un loop y en consecuencia $L_K(E)$ es fuertemente graduada. Recíprocamente, si $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es fuertemente $\mathbb{F}-$graduado, sabemos por la Proposición

5.0.2, que el grafo debe ser un loop con $E^0 = \{v\}$ y $E^1 = \{e\}$, en cuyo caso $X = \{eee\cdots\}$ tiene un sólo elemento y $1_v\delta_0$ es la unidad de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Puesto que $1_p = 1_v$ para todo $p \in \mathbb{F}$, entonces $(1_p\delta_p)(1_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}}) = 1_v\delta_0$, es decir, cada elemento de $D_p\delta_p$ no nulo tiene inverso y puesto que $D_0 = D(X)$ es generado $K-$linealmente por la función 1_v la cual es idempotente, podemos afirmar que $D_0\delta_0$ es clean, por lo tanto $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es clean graduado. □

Observación 18. Estamos considerando únicamente grafos con al menos una arista ya que queremos que el grupo libre no sea trivial. Si $\mathbb{F} = \{0\}$, se debe probar que $D_0\delta_0$ es clean y dado que D_0 es generado por las funciones características 1_v, se obtiene que $D_0\delta_0$ es clean si y sólo si el grafo tiene un único vértice.

Definición 5.0.7. *Un anillo graduado unitario R se dice **unit-regular graduado** si cada elemento homogéneo $x \in R$ se puede escribir como $x = xux$ donde u es un elemento invertible y homogéneo.*

Lema 5.0.8. *Si R es un anillo unit-regular $G-$graduado, entonces cada componente no nula R_g tiene un elemento invertible.*

Demostración. Sea $0 \neq x \in R_g$, entonces existe u homogéneo e invertible tal que $x = xux$ lo cual implica que $u \in R_{g^{-1}}$ y su inverso $u^{-1} \in R_g$. □

Proposición 5.0.9. *El álgebra de camino de Leavitt $L_K(E)$ es unit-regular $\mathbb{F}-$graduada si y sólo si E es un loop.*

Demostración. Vamos a suponer por contradicción que el grafo no es un loop, esto implica que existen al menos dos aristas distintas en E^1 ó una sola arista junto con un número finito de vértices aislados, mostraremos entonces que estos dos casos no se pueden dar si $L_K(E) \cong D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es unit-regular:

- Supongamos que existen dos aristas distintas $e, f \in E^1$, entonces si $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es unit-regular, para $1_e\delta_e \in D_e\delta_e$ existe un elemento invertible $u \in D_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$ tal que $(1_e\delta_e)u(1_e\delta_e) = 1_e\delta_e$, entonces podemos escribir

$$u = \sum_{j=1}^{n} 1_{e^{-1}} 1_{q_j} \delta_{e^{-1}} \quad y \quad u^{-1} = \sum_{i=1}^{m} 1_e 1_{p_i} \delta_e$$

con $q_j, p_i \in \mathbb{F}$ para todo i, j. Sabemos que $u^{-1}u(1_f\delta_f) = 1_f\delta_f$, pero dado que $e \neq f$ tenemos

$$\begin{aligned} u(1_f\delta_f) &= \left(\sum_{i=1}^{n} 1_{e^{-1}1_{q_j}} \delta_{e^{-1}}\right)(1_f\delta_f) \\ &= \alpha_{e^{-1}}\left(\alpha_e\left(\sum_{i=1}^{n} 1_{e-1}1_{q_i}\right)1_f\right)\delta_{e^{-1}f} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{e^{-1}}(1_e 1_{eq_i} 1_f)\delta_{e^{-1}f} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{e^{-1}}(0)\delta_{e^{-1}f} = 0, \end{aligned}$$

nótese que $1_e 1_{eq_1} 1_f = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ pues $X_f \cap X_e = \emptyset$. Lo anterior implica que $u^{-1}u(1_f\delta_f) = u^{-1}0 = 0 = 1_f\delta_f$ por lo cual $X_f = \emptyset$, lo que nos permite concluir que f no es una arista del grafo, esto descarta que E tenga más de una arista.

- Veamos que el grafo E no puede tener sinks. Observemos que,

$$\begin{aligned}
u^{-1}u &= \left(\sum_{i=1}^{m} 1_e 1_{q_i}\delta_e\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1_{e^{-1}}1_{q_j}\delta_{e^{-1}}\right)\\
&= \alpha_e\left(\alpha_{e^{-1}}\left(\sum_{i=1}^{m} 1_e 1_{p_i}\right)\sum_{j=1}^{n} 1_{e^{-1}}1_{q_j}\right)\delta_0\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_e 1_{p_i})1_{e^{-1}}1_{q_j})\delta_0\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} 1_e 1_{p_i} 1_{eq_j}\delta_0,
\end{aligned}$$

con lo cual tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} 1_e 1_{p_i} 1_{eq_j}\delta_0 = \sum_{v\in E^0} 1_v\delta_0 = 1_{D(X)\rtimes_\alpha \mathbb{F}},$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} 1_e 1_{p_i} 1_{eq_j} = \sum_{v\in E^0} 1_v$$

así, si $w \in E^0$ es un sink $s(e) \neq w$, por lo que

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} 1_e 1_{p_i} 1_{eq_j}(w) = 0,$$

pero $\sum_{v\in E^0} 1_v(w) = 1_w(w) = 1$, obteniendo así una contradicción. Esto descarta que E sea el grafo con una arista junto con un número de vértices aislados.

Notemos además que $s(e) = r(e)$ pues ya que en caso contrario $r(e)$ es un sink, lo cual no puede pasar por el segundo item. Recíprocamente, vamos a suponer que el grafo es un loop con $E^1 = \{e\}$ y $E^0 = \{v\}$, obsérvese que $X = \{ee\cdots\}$ y $X_p = X_v = X_{p^{-1}}$ para todo $p \in \mathbb{F}$, esto implica que $1_p = 1_v = 1_{p^{-1}}$ para todo $p \in \mathbb{F}$, además $1_v\delta_0$ es la identidad de $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$, con esto en mente para cada $p \in \mathbb{F}$ tenemos $(1_p\delta_p)(1_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}})(1_p\delta_p) = 1_p\delta_p$, donde $1_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}}$ es invertible con inversa $1_p\delta_p$, ya que $(1_p\delta_p)(1_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}}) = 1_p\delta_0 = 1_v\delta_0$ y $(1_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}})(1_p\delta_p) = 1_{p^{-1}}\delta_0 = 1_v\delta_0$, con lo cual podemos concluir que $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ es unit-regular graduado. □

Observación 19. Las proposiciones 5.0.2, 5.0.6, 5.0.9, nos dicen que para la $\mathbb{F}-$graduación de $L_K(E)$, los conceptos de fuertemente graduado, clean graduado y unit-regular graduado coinciden.

Finalizaremos este trabajo haciendo una mención respecto al isomorfismo entre $L_K(E)$ y el anillo de grupo torcido $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$, como se mostró en el Capítulo 4 para construir el álgebra $D(X)$ tal que $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F} \cong L_K(E)$ es necesario agregar las funciones características 1_v para $v \in E^0$. Queremos mostrar una construcción sin incluir estas funciones siempre que el grafo no tenga vértices aislados.

Definición 5.0.10. *Una serie formal es una suma infinita que se considera independiente de cualquier noción de convergencia, y puede manipularse con las operaciones algebraicas habituales sobre series, es decir, si estas series formales se definen sobre una $K-$álgebra A :*

- $\sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$;
- $k \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} k \cdot a_i$ *para todo* $k \in K$;
- $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i\right)$ *donde* $c_i = \sum_{i=m+n} a_m a_n$.

De manera análoga a la Sección 4.2 consideremos la acción parcial a nivel de conjuntos dada por $\{\{X_p\}_{p\in\mathbb{F}},\{\theta_p\}_{p\in\mathbb{F}}\}$ y a su acción parcial a nivel de álgebras asociado a esta acción parcial $\{\{F(X_p)\}_{p\in\mathbb{F}},\{\alpha_p\}_{p\in\mathbb{F}}\}$, de nuevo esta acción induce un anillo de grupo torcido muy "grande"para que se de el isomorfismo. Sea $v\in E^0$, si v es un emisor infinito consideremos la serie formal $\sum_{i=1}^{\infty} 1_{(e_i)_v}$ donde $\{(e_1)_v,(e_2)_v,\cdots\}$ es el conjunto de todas las aristas tales que $s(e)=v$, sea

$$D(X)=\left\langle\left\{\{1_p\mid p\in\mathbb{F}\setminus\{0\}\}\cup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}1_{(e_i)_v} : v \textit{ es un emisor infinito}\right\}\right\}\right\rangle,$$

donde $D(X)$ es generado $K-$linealmente y para cada $p\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$, sea $D_p\subseteq F(X_p)$ definido como $1_pD(X)$; esto es

$$D_p=\left\langle\{1_p1_q\mid q\in\mathbb{F}\}\right\rangle.$$

Observación 20. Aquí las combinaciones del conjunto $\{1_p\mid p\in\mathbb{F}\setminus\{0\}\}$ las tomaremos como series formales donde $1_p=0$ excepto para un número finito de $p\in\mathbb{F}$.

Entonces, $\alpha_p: D_{p^{-1}}\to D_p$ es el isomorfismo que surge de la restricción de las α_p de la acción parcial (estos isomorfismos no cambian para $p\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$ y α_0 se mantiene como la función identidad) y así obtenemos una acción parcial $\alpha=\{\{D_p\}_{p\in\mathbb{F}},\{\alpha_p\}_{p\in\mathbb{F}}\}$ y $D(X)\rtimes_\alpha\mathbb{F}$ el anillo de grupo torcido asociado a esta acción parcial.

Observación 21. Recordemos que si $v=r(e)$, entonces $X_v=X_{e^{-1}}$ con lo cual $1_v=1_{e^{-1}}$.

Ahora, construiremos el isomorfismo con $L_K(E)$. Queremos encontrar la manera de reemplazar las funciones 1_v en la prueba de la Proposición 4.2.6, estudiemos los posibles casos:

I. Si v es un sink: Dado que el grafo no tiene vértices aislados, entonces existe $e \in E^1$ talque $r(e) = v$, por el axioma de elección podemos escoger $e_v \in \{f \in E^1 \mid r(f) = v\}$, así reemplazamos la función 1_v por $1_{e_v^{-1}}$ (notemos que $1_v = 1_{e_v^{-1}}$ por la Observación 21).

II. Si v es un vértice regular: Por la segunda propiedad de Cuntz-Krieger reemplazamos 1_v por la suma finita $\sum_{i=1}^{n} 1_{e_{iv}}$ donde $\{e \in E^1 \mid s(e) = v\} = \{(e_1)_v, \cdots, (e_n)_v\}$.

III. Si v es un emisor infinito: Vamos a reemplazar 1_v por la serie formal $\sum_{i=1}^{\infty} 1_{(e_i)_v}$, esto ya que $\{e_i \in E^1 \mid s(e_i) = v\} = X_v = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_{e_i}$.

Con lo anterior y siguiendo la prueba de la Proposición 4.2.6 podemos mostrar que los conjuntos $\{1_e \mid e \in E^1\}$, $\{1_{e^{-1}} \mid e \in E^1\}$ y $\{1_{e_v^{-1}}\delta_0 \mid v \textit{ is a sink}\} \cup \left\{\sum_{i=1}^{n} 1_{e_{iv}} \mid v \textit{ es un vértice regular}\right\} \cup \left\{\sum_{i=1}^{\infty} 1_{(e_i)_v} \mid v \textit{ es un emisor infinito}\right\}$ satisfacen las relaciones que definen a el álgebra de camino de Leavitt y entonces usando la propiedad universal de $L_K(E)$ obtenemos el homomorfismo deseado. Además, argumentando de manera similar al Teorema 4.2.8 podemos comprobar que es además un isomorfismo.

Observación 22. Uno de los beneficios de realizar la construcción anterior es que en la mayoría de los casos no es necesario agregar tantas funciones características como en la construcción original.

Referencias Bibliográficas

Abrams, G. (1983). Morita equivalence for rings with local units. *Communications in Algebra*, 11(8):801–837.

Abrams, G., Ara, P., and Molina, M. S. (2017). *Leavitt path algebras*, volume 2191. Springer.

Abrams, G. and Pino, G. A. (2005). The leavitt path algebra of a graph. *Journal of Algebra*, 293(2):319–334.

Ara, P., Moreno, M. A., and Pardo, E. (2007). Nonstable k-theory for graph algebras. *Algebras and representation theory*, 10(2):157–178.

Beuter, V. M. and Gonçalves, D. (2016). Partial crossed products as equivalence relation algebras. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 46(1):85–104.

Clark, L. O., Exel, R., and Pardo, E. (2018). A generalized uniqueness theorem and the graded ideal structure of steinberg algebras. In *Forum Mathematicum*, volume 30, pages 533–552. De Gruyter.

Clark, L. O., Hazrat, R., and Rigby, S. W. (2019). Strongly graded groupoids and strongly graded steinberg algebras. *Journal of Algebra*, 530:34–68.

Dokuchaev, M. and Exel, R. (2005a). Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(5):1931–1952.

Dokuchaev, M. and Exel, R. (2005b). Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(5):1931–1952.

Erdmann, K., Holm, T., et al. (2018). *Algebras and representation theory*. Springer.

Gonçalves, D. and Royer, D. (2014). Leavitt path algebras as partial skew group rings. *Communications in Algebra*, 42(8):3578–3592.

Hazrat, R. (2016). *Graded rings and graded Grothendieck groups*, volume 435. Cambridge University Press.

Lam, T.-Y. (1991). *A first course in noncommutative rings*, volume 131. Springer.

Leavitt, W. G. (1962). The module type of a ring. *Transactions of the American Mathematical Society*, 103(1):113–130.

Lezama, O. (2014). Cuaderno de álgebra no. 3. *Módulos. Universidad Nacional de Colombia*.

Lundström, P. and Öinert, J. (2021). Strongly graded leavitt path algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, page 2250141.

Nastasescu, C., Van Oystaeyen, F., and Van Oystaeyen, F. M. (2004). *Methods of graded rings*. Number 1836. Springer Science & Business Media.

Nordstrom, H. and Nordstrom, J. A. F. (2020). Leavitt path algebras over arbitrary unital rings and algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, 19(06):2050107.

Nystedt, P. and Öinert, J. (2020). Group gradations on leavitt path algebras. *Journal of Algebra and its Applications*, 19(09):2050165.

Nystedt, P., Öinert, J., and Pinedo, H. (2018a). Artinian and noetherian partial skew groupoid rings. *Journal of Algebra*, 503:433–452.

Nystedt, P., Öinert, J., and Pinedo, H. (2018b). Epsilon-strongly graded rings, separability and semisimplicity. *Journal of Algebra*, 514:1–24.

Tomforde, M. (2007). Uniqueness theorems and ideal structure for leavitt path algebras. *Journal of Algebra*, 318(1):270–299.

Tomforde, M. (2011). Leavitt path algebras with coefficients in a commutative ring. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 215(4):471–484.

Tominaga, H. (1976). On s-unital rings. *Mathematical Journal of Okayama University*, 18(2):117–134.

Vaš, L. (2021). Cancellation properties of graded and nonunital rings. graded clean and graded exchange leavitt path algebras. *Journal of Algebra and its Applications*, page 2350050.