

ECUACIONES DE TRANSPORTE DE MOMENTOS Y SU
APLICACIÓN A LA COSMOLOGÍA DEL UNIVERSO
PERTURBADO

CARLOS ALBERTO SIERRA ORDÓÑEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
MAESTRÍA EN FÍSICA
BUCARAMANGA
2016

ECUACIONES DE TRANSPORTE DE MOMENTOS Y SU
APLICACIÓN A LA COSMOLOGÍA DEL UNIVERSO
PERTURBADO

CARLOS ALBERTO SIERRA ORDÓÑEZ¹

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN FÍSICA

DIRECTOR
YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA^{1,2}. PH.D.

¹GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN RELATIVIDAD Y GRAVITACIÓN - UIS

²GRUPO DE FÍSICA - FENOMENOLOGÍA DE PARTÍCULAS ELEMENTALES Y COSMOLOGÍA - UAN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
MAestrÍA EN FÍSICA
BUCARAMANGA
2016

Para mi familia bella, Maty Saris y Marthita.

A la memoria de mi madre ... Marde he seguido tu designio desde ese último día ...

Agradecimientos

- A Dios, pues considero que no debe haber cisma entre ciencia y creencia, para mi es una motivación el seguir buscándo esa verdad desde el aparato tecnológico y científico que he buscado conocer y cultivar.
- A mi familia hermosa por apoyarme y entenderme en momentos de gran felicidad y tristeza.
- Al profesor Yeinzon por ser el mas paciente y metodológico director de nuestro universo observable...jejej

Contenido

Introducción	19
1. Universo no perturbado	21
1.1. Métrica de FLRW	21
1.2. Ecuaciones de campo de Einstein y constante cosmológica	23
1.3. Modelamiento del contenido energético del universo como fluido perfecto	24
1.4. Ecuaciones de Friedmann	25
2. Inflación primordial con un campo escalar	27
2.1. Problemas de la cosmología estándar	28
2.1.1. Problema de Horizonte	28
2.1.2. Problema de Planitud	30
2.2. Solución a problemas de cosmología estándar	31
2.3. Monto de inflación y solución a problemas de la cosmología estándar	32
2.4. Inflación del tipo rodadura lenta	33
3. Perturbaciones cosmológicas	37
3.1. Perturbaciones primordiales y perturbación en la curvatura ζ	37
3.2. Suavizado y suposición de universos separados	39
3.3. Formalismo δN	42
4. Gaussianidad de observables cosmológicos	47
4.1. Teorema Ergódico	47
4.2. Homogeneidad e Isotropía Estadística	48
4.3. Gaussianidad en la FDP de la perturbación en la curvatura ζ	50
4.4. Parametrización de funciones espectrales	50
4.5. Obtención del espectro a partir de las derivadas del monto de expansión	52
4.6. Obtención del espectro a partir de las derivadas del monto de expansión	53
5. Metodología para implementar la estandarización	55

6. Transformaciones de Gauge	57
7. Parámetro de Hubble local	63
7.1. Aplicación de la suposición de universos separados	64
8. Condiciones de Slow-Roll extendidas	69
9. Cálculo de las derivadas del monto de expansión N	71
9.1. Para un campo escalar	71
9.2. Derivadas de N para dos campos escalares	73
10. Ecuaciones de transporte de momentos	77
10.1. Función de distribución de probabilidad casi gaussiana	78
10.2. Ecuación de conservación de la probabilidad	79
10.3. Ecuación de transporte de momentos para un campo escalar	82
10.4. Ecuaciones de transporte de la momentos para dos campos escalares	84
11. Implementación numérica	89
11.1. Correladores Σ_{ij} y α_{ijk}	90
11.2. Adimensionalización de expresiones para solución de ODE's	92
11.3. Ecuaciones de transporte de momentos para el modelo de <i>Potencial escalar cuadrático de dos campos</i>	94
11.4. Obtención del nivel de no-gaussianidad f_{NL}	97
Apéndices	105
A. Obtención de la densidad de probabilidad casi-gaussiana	107
B. Cálculo de ecuaciones de transporte de momentos	111
B.1. Términos que contienen H_0	113
B.2. Términos que contienen H_1	113
B.3. Términos que contienen H_2	114
B.4. Términos que contienen H_3	114
C. Cálculo de función de distribución de probabilidad $P(\tilde{X}, \tilde{Y})$	117
D. Código implementado en Matlab	123

Lista de figuras

2.1.	Esquema explicativo del problema de horizonte	30
2.2.	Gráfica en la que se observa la evolución temporal del horizonte de partículas(línea azul) y del horizonte óptico (línea roja).	31
2.3.	Gráfica en la que se observa la evolución temporal del horizonte de partículas para un valor de H constante durante inflación	31
3.1.	Las fluctuaciones en la temperatura del mapa CMB corresponden a previas perturbaciones de la densidad de energía. $\delta T \pm 200\mu K$. Resultado del noveno año del satélite WMAP. Imagen extraída de http://wmap.gsfc.nasa.gov/	38
3.2.	Mejora en la resolución angular de las mediciones en las fluctuaciones de temperatura de la CMB, obtenidas con el satélite PLANCK. Imagen extraída de http://www.cosmos.esa.int	39
3.3.	Suavizado de la densidad de energía.	41
3.4.	Analogía con la suposición de universos separados	41
3.5.	Independencia temporal de la perturbación en la curvatura	44
7.1.	Se muestra un evento (círculo verde) que ocurre cuando el threading(líneas que mantienen coordenadas espaciales constantes) y el slicing(hipersuperficies de tiempo constante que se ordenan como folios dentro de una carpeta) se cruzan en el espaciotiempo. El threading comóvil hace referencia a un observador que viaja con las coordenadas espaciales invariantes. El slicing comóvil es aquel que es ortogonal al threading comóvil. El slicing plano es aquel para el cual $\psi = 0$	67
10.1.	Volúmenes diferenciales en el espacio de configuraciones. Los tres cubos tienen lado dp	80
11.1.	Evolución del nivel de no-gaussianidad primordial para el modelo de dos campos de la Ec.(11.0.1). Gráfica obtenida del código desarrollado en MATLAB.	99
11.2.	Parámetro de Slow-Roll ϵ en función del número de e-folds	99
11.3.	Evolución de los campos involucrados durante inflación primordial: φ y χ respecto el número de e-folds	100

Resumen

TÍTULO: ECUACIONES DE TRANSPORTE DE MOMENTOS Y SU APLICACION A LA COSMOLOGIA DEL UNIVERSO PERTURBADO

AUTOR: SIERRA ORDÓÑEZ, CARLOS ALBERTO¹.

PALABRAS CLAVES: Transporte de momentos, inflación, nivel de no-gaussianidad, Universo perturbado.

DESCRIPCIÓN: El origen, evolución y destino de las estructuras cósmicas a gran escala es la principal motivación de los estudios que se realizan en cosmología. La inflación cósmica primordial es un modelo de evolución cosmológica que permite generar estructuras a gran escala y reproducir cantidades observables, cuantificables hoy en día, a través de la CMB (Radiación cósmica de fondo). Como problemática objetivo para estudio se analiza la dificultad inherente al cálculo de las derivadas del monto de expansión N , necesarias para obtener los observables de modelos cosmológicos inflacionarios y así poder contrastar teoría-experimento. La motivación de este estudio se basa en la dificultad en la obtención del parámetro de no-gaussianidad f_{NL} de modelos cosmológicos mediante el formalismo δN , ya que no existe un procedimiento analítico estándar para obtener las derivadas del monto de expansión o número de e-folds N . Las ecuaciones de transporte de momentos buscan estandarizar el método de cálculo de dichas derivadas a través de dos pilares: una transformación de gauge apropiada de la coordenada temporal con el fin de evitar la evolución temporal de N y sus derivadas, todo esto acompañado de el uso de la ecuación de conservación de la densidad de probabilidad, la cual permite que dicha evolución temporal sea transportada hacia las funciones de correlación para las perturbaciones de los campos involucrados en el mecanismo inflacionario estudiado.

¹Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez García (Director).

Abstract

TITLE: MOMENT TRANSPORT EQUATIONS AND ITS APPLICATION TO THE PERTURBED UNIVERSE

AUTHOR: SIERRA ORDÓÑEZ, CARLOS ALBERTO².

KEYWORDS: Moment transport, inflation, non-gaussianity, Perturbed universe.

DESCRIPTION: The principal motivation of cosmology studies lies on the origin, evolution and fate of the cosmic large-scale structures. Primordial cosmic inflation is a cosmic evolution model that allows the generation of the large-scale structure and reproduces the observable and measurable quantities nowadays, all this possible through the Cosmic Background Radiation (CMB). The objective of this study is to review and test a standardization procedure that allows us to calculate the parameter f_{NL} , related to a cosmological model, using the moment transport equations and some adequate gauge transformations. The motivation of this study relies on the difficulty to obtain the non-gaussianity parameters of cosmological models by means of the δN formalism, because there does not exist a standard analytic procedure to obtain the derivatives of the amount of expansion or number of e-folds N . To overtake this difficulty, the use of the moment transport equations is proposed so that the difficulty at obtaining the N derivatives is trade by a direct and standardized way of calculating the evolution of the correlators of the field perturbations.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez García (Supervisor).

Introducción

Incesantemente se ha indagado y buscado pruebas de rigor a través de la experimentación, acerca del origen y evolución del universo. Apreciables avances han venido teniendo lugar desde el siglo pasado, siendo este último el intento fallido de la detección de ondas gravitacionales [Baskaran *et al.*, 2010], todo esto orquestado por grupos de investigación con apoyo internacional que tienen por objeto único la búsqueda del motor primigenio generador de las estructuras de materia bariónica, materia oscura [Cui, , 2015] y energía oscura [Riess, A.*et al*(1998)] que, directa o indirectamente, podemos detectar hoy en día.

La inflación primordial se postula hoy en día como un mecanismo que explica satisfactoriamente la evolución de la parte del universo que podemos observar hoy en día, permitiendo contrastar teoría y experimento.

Partiendo de las observaciones de Edwin Hubble a principios del siglo pasado [Hubble, 1929], en las que se mostraban la curva de recesión de la velocidad de las galaxias a medida que se alejaban de nuestro punto de observación, lo que muestra que en un pasado el contenido de materia y energía del universo estaba más cerca entre sí, es posible obtener un precedente observacional del principio cosmológico, el cual sugiere que hubo épocas previas en las que el contenido de energía del universo observable tuvo que estar más cerca entre sí.

La reliquia de la gran explosión que hoy en día podemos detectar, la conocida radiación cósmica de fondo (Cosmic Microwave Background Radiation - CMB), detectada por primera vez mediante experimentos con antenas de microondas y realizados por Arno Penzias y Robert Wilson [Penzias *et al.*, 1965] confirman que hubo una gran explosión y que el universo proviene de un estado de densidad de energía muy alto.

El mecanismo de inflación primordial [Starobinsky, , 1979] permite dar solución a varios problemas de la cosmología estándar: problema de planitud, de horizonte y de reliquias no deseadas. Tales problemas son solucionados mediante el modelo inflacionario más elemental, que hace uso de un campo escalar como motor de expansión del contenido de materia, generando un proceso de borrado sobre cualquier inhomogeneidad del contenido energético que precediera el inicio de inflación. La idea es generar una expansión casi-exponencial y fue inicialmente propuesta por Alan Guth [Guth, , 1981]. Ésta busca que el proceso de expansión acelerada dure lo suficiente para que el factor de escala, definido a través del monto de ex-

Introducción

expansión N , aumente lo suficiente para dar solución a los tres problemas mencionados. Esto es posible solo si el modelo inflacionario propuesto genera al final de inflación $N \geq 62$.

La cosmología estándar permite hasta este punto explicar el origen y evolución del universo, no obstante, pensar en un inicio homogéneo e isótropo para la parte del universo que podemos observar dejaría incompleta la explicación, ya que las cualidades mencionadas imposibilitarían la generación de estructuras galácticas, cúmulos y supercúmulos galácticos, acreción de materia y ausencia de la misma. Por ello se hace uso de las perturbaciones cosmológicas [Lyth D. & Liddle A., 2009; Wands, , 2000] para explicar el origen de las anisotropías e inhomogeneidades formadas y propagadas durante el proceso inflacionario, las cuales darán origen a las estructuras a gran escala observables hoy en día.

Numerosos modelos de inflación asistida por uno o varios campos han sido propuestos, ya sean campos escalares, vectoriales o espinoriales. Para el cálculo de cantidades observables en estos modelos se requiere de la obtención del monto de expansión N y de sus derivadas, dentro del marco de aplicabilidad de formalismo δN propuesto por Sasaki y Stewart para modelos inflacionarios de slow-roll [Sasaki, 1995; Lyth, 1999; Liddle, 1994]

Existe una problemática: No hay una metodología estandar que permita realizar el cálculo del monto de expansión N o de sus derivadas. Existen diversos trabajos [Rodríguez Y. & Lyth D., 2005; Cogollo, 2008; Yokoyama, 2007; Vernizzi *et al.*, 2006; Battefeld *et al.*, 2007] donde se evidencia la necesaria búsqueda en cada caso, de un conjunto de condiciones y procedimientos completamente particulares para el modelo estudiado.

A través de esta investigación se realizó un estudio sobre una posible metodología de estandarización del cálculo de las funciones monto de expansión N y sus derivadas, lo cual es muy conveniente, ya que le permite al cosmólogo dedicar más tiempo al análisis de la física de cada modelo abordado, dejando atrás el cálculo analítico y numérico que cada modelo inflacionario requiera.

Se propone el uso de las ecuaciones de transporte de momentos [Mulryne, D. *et al.*, 2010, 2011; Anderson, G. *et al.*, 2012; Dias, M. *et al.*, 2012] para la densidad de probabilidad de las perturbaciones de los campos involucrados en el proceso inflacionario, como una herramienta que permita, partiendo de un potencial generador³ obtener N y sus derivadas, haciendo uso de una apropiada transformación de gauge entre diferentes slicings⁴ para las derivadas del monto de expansión N , todo esto acompañado de la obtención de la evolución temporal de las funciones de correlación de las perturbaciones de los campos.

³Un potencial arbitrario cuya forma funcional es arbitraria, no solo separable en suma.

⁴Hipersuperficies de tiempo constante

1

Universo no perturbado

1.1. Métrica de FLRW

No existe un centro o lugar privilegiado en el universo es la premisa del *Principio Cosmológico* razón para considerarlo la piedra angular de los estudios en cosmología. Esta idea se opone radicalmente a la visión heredada de la humanidad durante milenios en la que el sol o la tierra debían ocupar el centro de la creación. El principio cosmológico no es aplicable a pequeñas escalas en las que existen variaciones evidentes en el contenido energético entre una región y otra. A escalas menores a 100 megaparsecs se observan inhomogeneidades tales como galaxias, nubes de polvo y regiones semi-vacías.

Una métrica que permita describir la distribución del contenido energético a grandes escalas, cumpliendo con el principio cosmológico, es la de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) [Friedmann, A., 1922; Robertson, H., 1935; Walker, A., 1936] y se muestra a continuación:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.1.1)$$

La forma de construcción de esta métrica es a partir de una hipersfera 4-dimensional [Linde, A., 1984], ubicando el Universo tridimensional que podemos experimentar en su superficie. Las características de homogeneidad e isotropía se reproducen, logrando que todo punto esté en continuo distanciamiento de los demás, tal como sucede sobre la superficie de un globo mientras se está inflando [Mukhanov, V., 2005].

El término $a(t)$ representa el factor de expansión de la hipersfera descrita, mientras que (r, θ, ϕ) representan la posición angular de cualquier cuerpo celeste. Particularmente la posición de las galaxias se mantiene fija en determinada coordenada, lo que cambia en el tiempo es su distancia de separación. H es el parámetro de Hubble ya mencionado que se define en términos del factor de expansión $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

1. Universo no perturbado

Esta métrica, escrita en coordenadas esféricas, proviene de la ley de Hubble:

$$V = Hd, \quad (1.1.2)$$

la cual es uno de los pilares observacionales de la cosmología estándar pues con ella se asegura el cumplimiento del principio cosmológico (Homogeneidad e Isotropía). En ella se expresa la velocidad de recesión entre galaxias V como una relación lineal dependiente de la distancia física que las separa d , agregando un parámetro de proporcionalidad H llamado parámetro de Hubble dependiente del tiempo.

El parámetro K determina la curvatura espacial. Si $K = 0$ el Universo está inmerso en un espaciotiempo plano (como una hoja de papel extendida), si $K = 1$ el espaciotiempo es cerrado (finito pero sin límites como un toroide, elipsoide, esfera o cualquier otra figura tridimensional cuyas aristas se unan) y para $K = -1$ el espaciotiempo es abierto (carente de símil tridimensional).

La métrica FLRW se utiliza en el estudio de las perturbaciones cosmológicas debido a que la homogeneidad e isotropía a grandes escalas es la base observacional del principio cosmológico [Lyth D. & Liddle A., 2009; Linde, A. , 1984; Mukhanov, V. , 2005; Weinberg, S. , 2008] y a que el Universo se ha mantenido en proceso de expansión desde su origen.

El elemento de línea para la métrica mencionada se muestra a continuación:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 g_{ij}, \quad (1.1.3)$$

en donde la componente netamente espacial se escribe para las coordenadas polares (r, θ, ϕ) así:

$$g_{ij} = a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (1.1.4)$$

Para la expresión anterior se observa el factor K . Esta cantidad es constante y cuantifica la curvatura espacial. Se relaciona con el trisecalar de curvatura¹ a través de la siguiente relación [Lyth D. & Liddle A., 2009; Weinberg, S. , 2008]:

$$R_{(3)} = 2 \frac{K}{a(t)^2}. \quad (1.1.5)$$

Es fácil ver que la curvatura es independiente de la posición, cumpliendo con la homogeneidad e isotropía necesaria por la cosmología estándar para validar el principio cosmológico. En los estudios de cosmología del universo perturbado, es necesario reescribir la métrica de manera tal que la expansión dependa de la posición, así [Lyth D. & Liddle A., 2009]:

$$g_{ij} = a^2(\vec{x}, t) \gamma_{ij}(\vec{x}). \quad (1.1.6)$$

El término $\gamma_{ij}(\mathbf{x})$ sigue cuantificando la parte espacial de la métrica. El factor de escala se parametriza de la siguiente forma:

$$a(\vec{x}, t) = a(t) e^{\zeta(\vec{x}, t)}, \quad (1.1.7)$$

¹Calculado a partir de la cantidad invariante $R^{ij} R_{ij}$ la cual solo corresponde a la parte espacial del tensor de Ricci para la métrica estudiada.

1.2. Ecuaciones de campo de Einstein y constante cosmológica

y la relación entre el trisescalar de curvatura y la perturbación primordial en la curvatura, calculada en la ref. [Wands, , 2000], aplicable solo para teoría de perturbaciones a primer orden, es la siguiente:

$$R_{(3)} = \frac{4}{a^2} \nabla^2(\phi). \quad (1.1.8)$$

En una sección posterior se muestra la relación entre ϕ y ζ : ambas representan la perturbación en la curvatura, pero una de ellas es invariante de gauge. De esta sección debe resaltarse la posibilidad de reescribir la parte espacial de la métrica FLRW en términos de $\zeta(\vec{x}, t)$.

1.2. Ecuaciones de campo de Einstein y constante cosmológica

A partir del principio de acción estacionaria con extremos fijos es posible calcular la forma del tensor de Momentum-Energía. Este tensor permite caracterizar el contenido energético (materia y energía). Para el caso de un campo escalar ϕ y su respectivo lagrangiano \mathcal{L} , el tensor se define por la siguiente expresión:

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (1.2.1)$$

Normalmente es utilizado el tensor Momentum-Energía canónico $T_{\mu\nu}$, que se diferencia de $\Theta_{\mu\nu}$ en que el primero es simétrico, y esta cualidad permite que este tensor modele el contenido energético del Universo en el lado izquierdo de las ecuaciones de campo de Einstein. Dichas ecuaciones provienen de aplicar el principio de acción estacionaria, tomando como materia prima la acción Einstein-Hilbert [Hilbert, D. , 1915; Carroll, S. , 2004], mostrada a continuación :

$$S = \frac{R - 2\Lambda}{2\alpha} + \mathcal{L}_m. \quad (1.2.2)$$

El término $\alpha = \frac{8\pi G}{c^4}$. Para obtener las ecuaciones de campo de Einstein a partir la acción propuesta el lector puede remitirse a las refs. [Hilbert, D. , 1915; Carroll, S. , 2004; Weinberg, S. , 1972]. El término R es el escalar de curvatura o contracción del tensor de Ricci. \mathcal{L}_m es el lagrangiano de materia que caracteriza el contenido energético del universo. Λ es la constante cosmológica y representa la parte de la acción que genera una fuerza de repulsión la cual se opone a la atracción gravitatoria [Lyth D. & Liddle A., 2009; Mukhanov, V. , 2005; Weinberg, S. , 2008]. Haciendo variación con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$ se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\alpha T_{\mu\nu}. \quad (1.2.3)$$

Esta ecuación condensa la información de la geometría del Universo² a un lado de la igualdad a través del escalar y tensor de Ricci, mientras que en el otro lado está el tensor momentum-

²El término Universo y universo observable son expresiones equivalentes a lo largo del texto

1. Universo no perturbado

energía que caracteriza el contenido energético del Universo. La igualdad entre ambos términos indica que dicho contenido curva el espaciotiempo que lo contiene y al mismo tiempo el campo gravitacional, efecto de la curvatura espaciotemporal, modifica la distribución del contenido energético.

1.3. Modelamiento del contenido energético del universo como fluido perfecto

El big-bang postula una expansión acelerada de una región del universo, partiendo de un estado cuántico de vacío en el que la densidad de energía era extremadamente alta. Este proceso inflacionario permitió el enfriamiento y expansión de la región correspondiente al universo que podemos observar hoy en día y le dió su actual forma, densidad, presión y distribución de materia. Con base en la teoría inflacionaria que dio origen al big-bang, se postula como edad aproximada del universo $13,7 \times 10^9$ años, tiempo durante el cual el universo ha tenido épocas dominadas por la radiación, materia y actualmente por constante cosmológica. La constante cosmológica es el componente energético del cual se presume que actualmente está generando la expansión acelerada del universo observable, diferenciando de la expansión primordial origen de nuestro universo observable.

El big-bang genera expansión isótropa, manteniendo el contenido energético primigenio con densidad y presión uniformes pero no constantes, lo que determinará la escala del contenido energético del universo en ese instante, hecho que comúnmente se describe a través como la historia térmica del universo.

Se proponen diferentes mecanismos que podrían servir de motor inflacionario, pero todos ellos deben mantener la isotropía y homogeneidad a grandes escalas, pues esa es la base observacional más fundamental, descrita por Hubble en 1928. Se propone el uso de una métrica tipo FLRW con factor de expansión isótropa:

$$ds^2 = dt^2 + a(t) * d\sigma_3^2, \quad (1.3.1)$$

siendo $d\sigma_3^2$ la parte espacial de la métrica, que describe un espacio con curvatura K constante. Esta parte de la métrica le da el nombre de comóvil dado que un observador en reposo en el 3-espacio se moverá con la expansión.

A escalas cosmológicas y según las observaciones realizadas desde la época de Hubble, podemos concluir que el Universo es homogéneo e isótropo, de modo que es posible modelar su contenido energético mediante un Tensor de Momentum-Energía (M-E) para un fluido perfecto³:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (1.3.2)$$

en donde ρ y P son respectivamente la densidad de energía y la presión del fluido cósmico, medidos en un marco de referencia comóvil. De la definición del tensor M-E se deduce que

³Para ver detalles de la aproximación de fluido perfecto ver [Weinberg, S. , 2008; Weyl, H. , 1918]

éste contiene información fundamental sobre la energía y momentum del fluido. Dado que el sistema de referencia es cómovil con el fluido, la velocidad usual es igual a cero, mientras que la cuadrivelocidad $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$.

Despejando de la ecuación (1.3.2) $T_{\mu\nu}$ toma la siguiente forma:

$$T^{00} = \rho, \quad (1.3.3)$$

$$T^{i0} = 0, \quad (1.3.4)$$

$$T^{ij} = P\delta^{ij}. \quad (1.3.5)$$

La definición de fluido perfecto exige que la presión que éste experimenta y ejerce sea isotropa. De la ecuación (1.3.3) se deduce que la componente T^{00} equivale a la densidad de energía. La ecuación (1.3.4) define la densidad de momentum que en este caso es igual a cero ya que la velocidad usual (3D) del fluido respecto al sistema de referencia es cero. La componente T^{ij} mostrada en la ec. se conoce como el tensor de esfuerzos que, dependiendo del modelo inflacionario, podrá heredar la isotropía o anisotropía del mecanismo de expansión. Para mecanismos que generen anisotropía el tensor de esfuerzos debe redefinirse para tener en cuenta.

Dividiendo el universo en subespacios cúbicos de lado 100 Mpc se puede apreciar la homogeneidad e isotropía del Universo sin olvidar que cada volumen se está expandiendo a una tasa $a(t)$. Aplicando leyes de termodinámica al subespacio y recordando el principio cosmológico que impide que dichas regiones intercambien calor, se obtiene la ecuación de continuidad para la densidad de energía [Lyth D. & Liddle A., 2009]:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (1.3.6)$$

Es así como se posibilita el estudio de nuestro universo observable, manteniendo todas las cantidades uniformes para toda la región, que en determinado momento corresponda al universo observable, que es con el que mantenemos hasta nuestros días conexión causal y del que podemos recibir información en forma electromagnética y a futuro posiblemente interpretar información encriptada en ondas gravitacionales.

1.4. Ecuaciones de Friedmann

Con el uso apropiado de las ecuaciones de campo de Einstein y la métrica FLRW se obtiene la ecuación de Friedmann [Lyth D. & Liddle A., 2009; Mukhanov, V. , 2005; Weinberg, S. , 2008], la cual puede modelar la evolución de nuestro universo observable, además permite determinar qué importancia y relevancia han tenido, tienen y tendrán los tres elementos fundamentales en cosmología: radiación, materia y constante cosmológica.

Para grandes escalas (más de 100 Mpc) el tensor M-E para un fluido perfecto es una aproximación válida y caracteriza el contenido de materia y energía. Aplicando $T_{\mu\nu}$ a las ecuaciones

1. Universo no perturbado

de campo de Einstein se generan el siguiente resultado:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3m_p^2} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.4.1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3P}{6m_p^2}, \quad (1.4.2)$$

siendo las anteriores expresiones respectivamente: la ecuación de Friedmann y la ecuación de aceleración, incluyendo los aportes de curvatura y constante cosmológica para el primer caso. El término m_p^2 es la masa reducida de Planck y equivale a

$$m_p^2 = \frac{1}{8\pi G} \quad (1.4.3)$$

definida en unidades naturales. En términos energéticos:

$$M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,18 \times 10^{-8} \text{ kg} = \sqrt{8\pi} m_p = 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV} \quad (1.4.4)$$

equivale a la cota superior en la escala de energías, por encima de la cual deja de ser válida la relatividad general. Para energías superiores es necesaria una teoría cuántica para la gravedad que sirva como puente entre la relatividad general y la física cuántica [Lyth D. & Liddle A., 2009; Mukhanov, V., 2005; Weinberg, S., 2008].

Hay un valor para la densidad de energía $\rho_{cri} = 3H^2 m_p^2$ que al ser reemplazado en la ecuación 1.4.1 reproduce $K = 0$, siempre que se tome el aporte de la constante cosmológica $\Lambda = 0$. Observaciones realizadas mediante el satélite WMAP indican que el universo es altamente plano [Hinshaw, G. et al., 2013; Ade et al., 2015a].

Es usual definir una nueva función $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$ e incluir en ella el efecto de la constante cosmológica $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$. Mediante esta nueva definición se reescribe la ecuación de Friedmann así:

$$\Omega_{total} = \Omega + \Omega_\Lambda, \quad (1.4.5)$$

$$\Omega_{total} - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (1.4.6)$$

Las observaciones del WMAP + SN + BAO dan un valor de $\Omega_{total} = 0,9996 \pm 0,0150 \pm 0,0015 \pm 0,0130$ [Hinshaw, G. et al., 2013; Ade et al., 2015a]. con lo cual se corrobora la planitud del Universo a grandes escalas.

2

Inflación primordial con un campo escalar

Durante el periodo inflacionario que se estudia, los aportes de K y Λ son de caracter subdominante debido a que el espaciotiempo se asume plano, y porque el aporte por constante cosmológica es casi nulo en esa etapa evolutiva del universo temprano. A partir de aqui se define:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.0.1)$$

llamado parámetro de Hubble, siendo este una cantidad dependiente del factor de escala $a(t)$. Para que el proceso inflacionario tenga lugar se requiere que:

$$\ddot{a} > 0 \quad (2.0.2)$$

que se logra manteniendo el numerador de la Eq.(1.4.2) negativo, es decir:

$$\rho + 3P < 0. \quad (2.0.3)$$

Para un campo escalar φ , denominado inflatón, el tensor Momentum-Energía toma la forma:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (2.0.4)$$

El modelo inflacionario propuesto por Linde [[Linde, A., 1982](#)] postula que $H \approx$ constante, permitiendo que tenga variaciones pero manteniendo el comportamiento del parámetro casi-constante. Este escenario inflacionario es dirigido por un campo escalar cuyo lagrangiano está descrito por:

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \mathcal{V}(\phi), \quad (2.0.5)$$

de donde se obtienen las formas para la densidad de energía y presión propias del mecanismo inflacionario estudiado:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \mathcal{V}(\phi), \quad (2.0.6)$$

2. Inflación primordial con un campo escalar

$$P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \mathcal{V}(\phi). \quad (2.0.7)$$

Utilizando estas expresiones en la Eq.(1.3.6) se obtienen la ecuación de movimiento del inflatón:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.0.8)$$

conocida como ecuación de movimiento del campo estudiado o de ¹. La expresión anterior puede obtenerse al aplicar el principio de acción estacionaria con extremos fijos al lagrangiano de la Eq.(2.0.5), de donde se obtiene:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \vec{\nabla} \frac{\phi}{a^2} + V'(\phi) = 0. \quad (2.0.9)$$

Es posible igualar ambas expresiones anterior siempre que:

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(t), \quad (2.0.10)$$

lo que desvanecería gradientes espaciales, físicos o comóviles, todo esto validado si el estudio se realiza dentro de la cosmología estandar.

2.1. Problemas de la cosmología estándar

Existen ciertas inconsistencias entre los planteamientos teóricos ofrecidos por la cosmología estándar y los resultados observacionales, que si bien explican muchos fenómenos y da el estatus de teoría al Big Bang al explicar la homogeneidad e isotropía a grandes escalas, la expansión de Hubble, la abundancia de elementos ligeros y la existencia de la CMB, genera ciertos problemas conocidos como los problemas de la cosmología estandar. A continuación se explican dos de ellos, los cuales se resuelven mediante la teoría inflacionaria explicada en la siguiente sección.

2.1.1. Problema de Horizonte

El problema de horizonte [Weinberg, S. , 2008] es una discrepancia observacional entre los resultados obtenidos para las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo y los resultados predichos por modelos cosmológicos estandar de expansión desacelerada. Para explicar el problema es necesario hablar de ciertos conceptos.

El horizonte de partículas hoy en día, que equivale a $2H_0^{-1}$, es simplemente la distancia máxima desde la cual hoy en día recibimos información en forma de radiación electromagnética. La distancia coordenada actualmente está dada por la siguiente expresión:

$$d_c = \frac{2H_0^{-1}}{a_0}. \quad (2.1.1)$$

¹En la jerga propia de la cosmología es la ecuación de Klein-Gordon

2.1. Problemas de la cosmología estándar

En la época de recombinación, cuando se formaron los primeros átomos y se generó la radiación cósmica de fondo, el valor de d_c es el mismo ya que se está analizando la misma región espacial, sin embargo la distancia física si varía a lo largo del tiempo, aumentando a medida que el Universo se expande. En el período de recombinación el valor de esta distancia física llamada también región correspondiente al Universo observable actualmente es:

$$\lambda_{rec} = a_{rec}d_c, \quad (2.1.2)$$

mientras que el valor del horizonte de partículas en la época de recombinación equivale a:

$$2H_{rec}^{-1} = 2H_o^{-1} \left[\frac{T_o}{T_{rec}} \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (2.1.3)$$

De forma que en recombinación para la región física correspondiente al Universo observable, llamado también horizonte óptico, caben aproximadamente 10^4 horizontes de partículas. Para detalles en el cálculo del horizonte de partículas mostrado remitirse a la referencias [Mukhanov, V. , 2005; Weinberg, S. , 2008].

Sabemos que el horizonte de partículas es el borde de la región espacial desde la cual podemos recibir información en forma de radiación electromagnética. Una región causalmente conectada es una subregión del horizonte de partículas dentro de la cual se puede conocer información desde cualquier punto y en cualquier punto. En otras palabras, es una región dentro de la cual los fotones emitidos desde un punto en el borde puede llegar al otro punto diametralmente opuesto en un tiempo igual al que tardaron los fotones el llegar del borde del horizonte de partículas a nosotros. El tamaño de esta zona es de $\frac{1}{2}H^{-1}$, lo que es igual a la mitad del radio del horizonte de partículas.

En recombinación para el horizonte óptico hay aproximadamente 10^5 regiones causalmente conectadas en su interior. Cada región causalmente conectada está desconectada de las demás, de modo que las 10^5 regiones tienen características independientes entre sí. Una de las características propias de cada región causalmente conectada es la temperatura, la cual debe necesariamente ser diferente en cada zona ya que no hay conexión causal entre ellas. Todo esto sucede en el momento que se genera la RCF de modo que la información proveniente desde cada burbuja puede ser obtenida hoy en día.

El problema de horizonte radica en que la diferencia de temperatura entre cada región causalmente conectada hoy en día es casi nula, con una leve anisotropía de $\delta T/T = 10^{-5}$. Un cambio en la dirección de observación de la radiación cósmica de fondo de $1,72^\circ$ es suficiente para pasar de una región causalmente conectada a otra. Si estas regiones en realidad estaban desconectadas causalmente entre sí, no hay razón física para que mantengan una temperatura casi igual.

En la figura [2.1] se esquematiza el problema de horizonte. En a) el horizonte óptico contiene 10^5 regiones espaciales causalmente conectadas y se genera la RCF durante recombinación. En b) se observa nuestro horizonte de partículas hoy en día expandido por el factor de escala $a(t)$, el cual colinda con regiones causalmente conectadas (círculos alrededor), las cuales se han expandido de igual modo y han enviado fotones desde recombinación formando un cono

2. Inflación primordial con un campo escalar

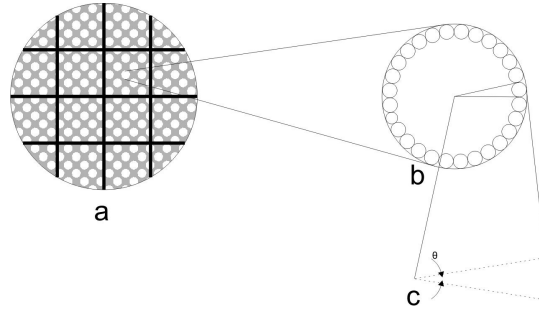


Figura 2.1. Esquema explicativo del problema de horizonte

de recepción que no ha variado angularmente desde entonces. En c) se hace una ampliación al cono dibujado por la radiación emitida desde cada una de las regiones causalmente conectadas, indicando el ángulo $\theta = 1,72^\circ$, necesario para que nuestra recepción de RCF cambie de una región causalmente conectada a otra y por consiguiente se detecte variación en la temperatura.

2.1.2. Problema de Planitud

Interpretando la ecuación (1.4.6) se deduce que si el Universo observable es espacialmente plano, $|\Omega - 1| = 0$ para cualquier tiempo dentro de la evolución del Universo. El término a se hace mas pequeño a medida que se va hacia atrás en el tiempo por definición, ya que el factor de escala redimensiona el volumen físico del Universo.

Suponiendo que $K \neq 0$, el valor de Ω cambiará en el tiempo de la siguiente forma:

$$|\Omega_{total} - 1| \propto \frac{1}{a^2 H^2}. \quad (2.1.4)$$

Para la época dominada por radiación $H \propto a^{-4}$ y para la época dominada por materia $H \propto a^{-3}$. Se concluye que $|\Omega_{total} - 1|$ crece con a linealmente en el caso de materia y cuadráticamente para el caso de radiación.

Si hoy en día $|\Omega_0 - 1| \approx 0$ con una aproximación de 10^2 [Hinshaw, G. et al., 2013], al inicio de recombinación y generación de la radiación cósmica de fondo este valor debió ser mucho mas cercano a cero, del orden de 10^{-32} aproximadamente.

El problema de planitud consiste en no tener un mecanismo que genere los órdenes de magnitud para $|\Omega_0 - 1|$ requeridos, dejando solo la opción de un ajuste fino a las condiciones iniciales, pero esto no es físicamente satisfactorio ni consistente.

2.2. Solución a problemas de cosmología estandar

El mecanismo de inflación explica la expansión acelerada de una región del universo a partir de la cual se formó el Universo observable. En la época de inflación la gravedad tuvo que comportarse como una fuerza repulsiva que esparció el contenido energético, aumentando el tamaño del espaciotiempo que lo contiene. La fuerza repulsiva es concebida actualmente en el consenso científico como un tipo de energía oscura cuya composición es desconocida actualmente, pero los efectos son analizados mediante la adición de la constante cosmológica en la ecuación (1.4.1).

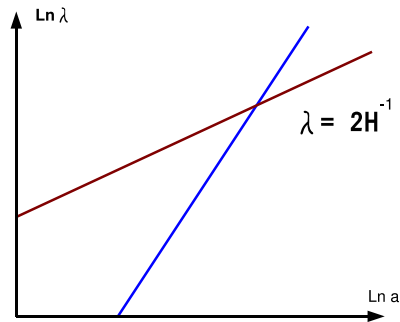


Figura 2.2. Gráfica en la que se observa la evolución temporal del horizonte de partículas (línea azul) y del horizonte óptico (línea roja).

En la figura 2.2 se muestra la carencia de conexión causal entre el horizonte de partículas y el horizonte óptico o Universo observable. Esto, como ya se indicó, imposibilita que las 10^4 regiones causalmente conectadas pudiesen termalizar y mantener todas una misma temperatura, tal como se observa actualmente.

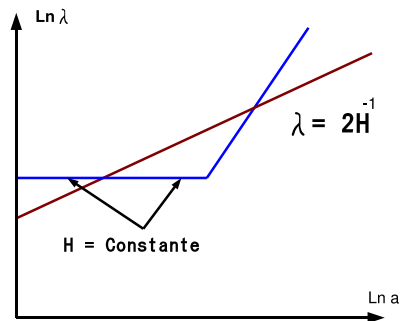


Figura 2.3. Gráfica en la que se observa la evolución temporal del horizonte de partículas para un valor de H constante durante inflación

2. Inflación primordial con un campo escalar

La solución a los problemas de cosmología estándar se logra con el mecanismo de inflación mediante el cual se permite una conexión causal entre la región física correspondiente al Universo observable con el horizonte de partículas. Se observa en la figura [2.3] que durante inflación el valor del radio del horizonte de partículas se mantiene aproximadamente constante en un valor H_i^{-1} . Con esto se logra que haya termalización entre todas las regiones causalmente conectadas y el problema de horizonte queda solucionado.

En términos cuantitativos podemos explicar el mecanismo de inflación empezando por la ecuación de Friedmann. Tomando el caso para un espaciotiempo plano ($K = 0$), y derivando respecto al tiempo la ecuación (1.4.1) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3P}{6m_p^2}. \quad (2.2.1)$$

Se observa que $\ddot{a} > 0$ siempre que $\rho + 3P < 0$. Ésta es la condición necesaria para generar un período inflacionario, donde \ddot{a} representa la aceleración del proceso de expansión del espaciotiempo.

Durante el periodo inflacionario el parámetro de Hubble $H \approx \text{constante}$. De la ecuación (1.4.1) se concluye que ρ también debe mantener su valor constante si el espaciotiempo es plano. Utilizando ahora la ecuación de continuidad para la densidad de energía se calcula su valor durante el periodo inflacionario:

$$\rho \approx -P. \quad (2.2.2)$$

Así bien, si durante el período inflacionario es requerido que el horizonte de partículas se congele, también lo debe hacer la densidad de energía, indicando que el contenido energético dentro del horizonte de partículas no debe cambiar, al menos durante inflación.

2.3. Monto de inflación y solución a problemas de la cosmología estándar

El monto de inflación llamado también número de e-folds, es un valor que cuantifica la cantidad de expansión que se logra en la época de inflación y se muestra a continuación:

$$N = \ln \frac{a_f}{a_i}, \quad (2.3.1)$$

donde a_i es el valor del factor de escala al principio de inflación y a_f es el valor del factor de escala al final de inflación.

La ecuación $\lambda_i \leq H_i^{-1}$ ² es la condición que se debe cumplir para que con inflación se solucione el problema de horizonte. Realizando los cálculos correspondientes se puede calcular

²El primer término es la distancia física correspondiente a la región del universo observable, mientras que el segundo término es el horizonte de partículas. El subíndice i indica que es durante el periodo inflacionario

el valor que es aproximadamente $N \geq 62$ e-folds [Lyth D. & Liddle A., 2009; Linde, A. , 1984; Weinberg, S. , 2008].

Para solucionar el problema de planitud se debe calcular cuántos e-folds se requieren. Primero se debe recordar de la ecuación (1.4.6) que $|\Omega - 1|$ es proporcional a H^{-2} y a a^2 . En inflación H es constante luego $|\Omega - 1| \propto \frac{1}{a^2}$, y esto genera que $|\Omega - 1|$ tenga valores muy pequeños para que la ecuación (1.4.6) caracterice correctamente la evolución del Universo.

$$\frac{|\Omega - 1|_{t_f}}{|\Omega - 1|_{t_i}} = \left(\frac{a_i}{a_f} \right)^2 = e^{-2N} \leq O(10^{-32}). \quad (2.3.2)$$

Recordando el valor actual de $|\Omega - 1|$ que se aproxima a cero con dos órdenes de precisión y que para la época al final de inflación (que sucede antes de la recombinación y la generación de radiación cósmica de fondo) debe aproximarse a cero con 32 órdenes de precisión, se calcula de la Ec. (2.3.2) un valor de $N = 40$, el cual es el límite inferior de e-folds necesario para solucionar el problema de planitud. Esto demuestra que solucionando el problema de horizonte a través del mecanismo de inflación con $N \geq 62$ e-folds se solucionan ambos problemas de la cosmología estándar.

2.4. Inflación del tipo rodadura lenta

Existen muchas formas de generar inflación primordial, pero la simplicidad de los modelos inflacionarios que son de rodadura lenta (slow-roll) los hace muy interesantes, teniendo en cuenta que reproducen observables cosmológicos, todo esto basado en los resultados del satélite Planck [Ade et al., 2015a].

La idea de Alan Guth en su propuesta de inflación dirigida por un campo escalar es una alternativa para explicar el proceso de expansión acelerada del universo observable [Guth, , 1981]. En ella se propone que el contenido energético del universo atraviesa dos etapas:

- El campo escalar se mantiene en un mínimo local de la función $V(\varphi)$ generando $H_i = \text{cte}$. Esta etapa prevalece mientras tiene lugar el proceso de expansión acelerada.
- Por medio de efecto tunel, el campo escalar sale del mínimo local para mantenerse en el mínimo global de la función potencial, originando nuestro universo observable.

De las ecuación de campo de la ec.(2.0.8), obtenida del lagrangiano mostrado en (2.0.4), es fácil ver que para un campo escalar generador de inflación, el término $3H\dot{\phi}$ impone condiciones que afectarán este período. Se puede evidenciar una analogía entre la ecuación ec.(2.0.8) y la de un oscilador armónico amortiguado, siempre que el término $V'(\varphi)$ sea un potencial generalizado proporcional a H^2 .

Un valor grande para el término de fricción, el cual depende de H , ³), conducirán a la

³siendo H proporcional a su vez a $\sqrt{\rho}$ (deducido de la ecuación de Friedmann) y ρ proporcional a $V(\phi)$ (deducido de (2.0.6))

2. Inflación primordial con un campo escalar

siguiente expresión:

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, \quad (2.4.1)$$

lo que conlleva a:

$$\dot{\phi} = \frac{V'(\varphi)}{3H}. \quad (2.4.2)$$

Ahora, haciendo uso de la ec.(2.0.8) y la ecuación de Friedmann (1.4.1) se tiene que:

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2m_p^2}. \quad (2.4.3)$$

Asumiendo que $\dot{\phi}^2$ representa la velocidad de variación del campo escalar en la Ec.(2.0.6-2.0.8) se impone la restricción:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\varphi), \quad (2.4.4)$$

de modo que $\rho \approx V(\varphi)$, con lo que la expresión para la presión (2.0.8) muestra que el contenido energético durante inflación genera presión negativa $P \approx -\rho$, lo cual explica la expansión acelerada.

Se interpreta $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ como la densidad de energía cinética, mientras que $V(\phi)$ hará el papel de la densidad de energía potencial, ambos terminos relacionados con el campo escalar generador de inflación llamado Inflatón.

Las condiciones (2.4.1,2.4.4) generan un potencial muy plano, tal que el campo escalar ϕ ruede lentamente desde los valores grandes de $V(\phi)$ hasta el mínimo global de la función potencial y la inflación se detenga.

Un potencial $V(\phi)$ que cumpla las condiciones (2.4.1) y (2.4.4) es conocido como potencial del tipo Slow-Roll. Con este tipo de potenciales se posibilita que durante el periodo inflacionario, el factor de escala $a(t)$ evolucione de manera exponencial [Mukhanov, V. , 2005] tal como se muestra a continuación:

$$a(t) = a_{ini} \exp \left(\int_{t_{ini}}^t H_{inf} dt \right), \quad (2.4.5)$$

donde a_{ini} es el parámetro de expansión para un tiempo t_{ini} y H_{inf} es el parámetro de Hubble durante inflación. La forma del potencial $V(\phi)$ mantiene su amplitud casi constante para un intervalo en el que ocurre la expansión acelerada.

La inflación del tipo Slow-Roll se puede parametrizar mediante las siguientes dos expresiones:

$$\epsilon = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (2.4.6)$$

$$\eta_\phi = \epsilon - \frac{\ddot{\phi}_0}{H_{inf}\dot{\phi}_0}. \quad (2.4.7)$$

2.4. Inflación del tipo rodadura lenta

Haciendo que $\epsilon < 1$ se obtiene inflación, mientras que si $\epsilon \ll 1$ y $|\eta_\phi| \ll 1$ se reproducen las condiciones de Slow-Roll [Liddle A. *et al.*, 1992] descritas en las ecuaciones (2.4.1) y (2.4.4). Un potencial de este tipo hace que los resultados observacionales concuerden con los calculados analíticamente por el modelo cosmológico Λ CDM (Constante Cosmológica con Materia Oscura Fría) [Xia J. *et al.*, 2008].

3

Perturbaciones cosmológicas

Para un universo descrito por la métrica FLRW, sin importar en que momento de su historia sea caracterizado, se mantendrá homogeneidad e isotropía en ρ y P . La no existencia de perturbaciones en las cantidades anteriormente mencionadas imposibilita la creación de estructuras a gran y pequeña escala, desde la red cósmica imposible de observar directamente, modelada a través de la simulación del milenio [Mueller, V. *et al.*, 2011], hasta los cuerpos astrofísicos de mediana y pequeña escala.

Como motor inflacionario básico esta el escenario del inflatón, un campo escalar que genera la expansión isótropa [Starobinsky, , 1979; Linde, A., 1982], no obstante, se habla de un campo cuyo mecanismo de origen que proviene de una microfísica aun desconocida. Cabe aclarar que por microfísica se interpreta la descripción de los mecanismos inflacionarios a través de campos y por macrofísica la descripción a través de fluidos. Existe una una alta probabilidad de tal mecanismo sea de naturaleza cuántica lo que permite proponer que el campo mismo poseerá perturbaciones no determinísticas, las cuales darían origen a las perturbaciones de los observables ρ , P y T , fundamentales para dar inicio a la formación de estructuras.

Del mapa de fluctuaciones de temperatura de la Radiación Cósmica de Fondo (CMB) mostrado en la figura [3.1] y [3.2] se obtiene la información de pequeñas fluctuaciones en la temperatura promedio de la región de universo, observada por los experimentos en órbita COBE, WMAP y PLANCK; estas son originadas por inhomogeneidades en ρ y P , provenientes de las perturbaciones cuánticas del(los) campo(s) inflacionario(s), las cuales han sido transportadas desde la inflación primordial, 13,7 billones de años atrás.

3.1. Perturbaciones primordiales y perturbación en la curvatura ζ

Tomando como hecho que la inflación primordial, con contundente evidencia observacional [Hinshaw, G. *et al.*, 2013], es el mecanismo generador de la estructura a gran escala de nuestro

3. Perturbaciones cosmológicas

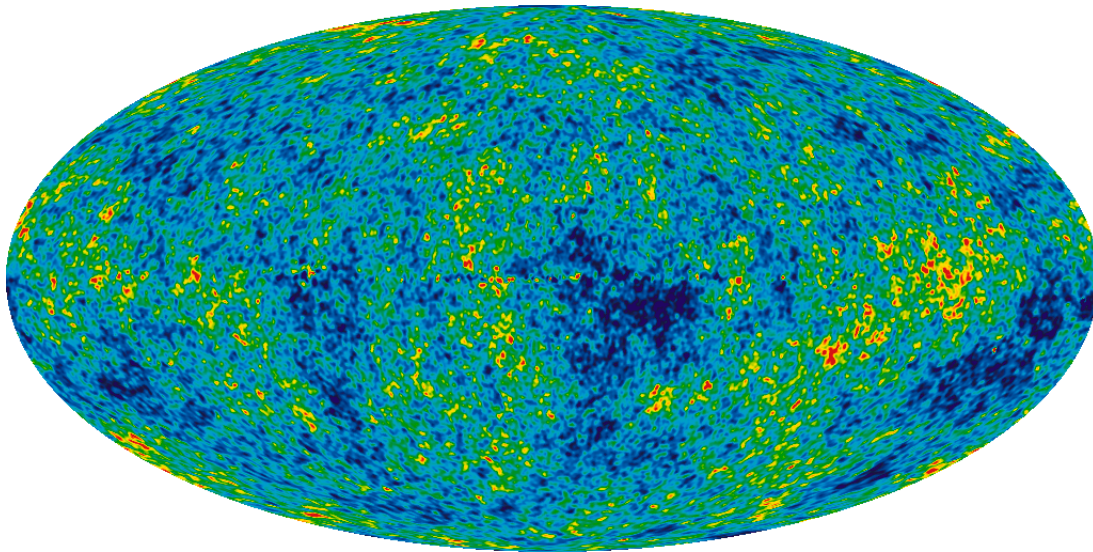


Figura 3.1. Las fluctuaciones en la temperatura del mapa CMB corresponden a previas perturbaciones de la densidad de energía. $\delta T \pm 200\mu\text{K}$. Resultado del noveno año del satélite WMAP. Imagen extraída de <http://wmap.gsfc.nasa.gov/>

universo observable, es necesario introducir en el modelo algo de arbitrariedad, proponiendo la preexistencia de fluctuaciones de naturaleza cuántica en las medidas de densidad del campo o campos que van a servir como motor primigenio de la expansión acelerada.

Estudiando la historia térmica del universo, en la etapa en la cual la escala energética del baño térmico que va a componer el universo observable, se ha reducido a un poco menos de 1MeV^1 , y, teniendo en cuenta que la CMB que se está captando desde hace unas décadas con los experimentos en tierra y en órbita han detectado una temperatura de fondo de 2.7°K como valor promedio, se postula que coexistieron fluctuaciones cuánticas, materia oscura fría (CDM), bariones y fotones, lo que permitía los fotones desplazarse libremente pues ha ocurrido el desacople fotón-leptón ² permitiendo que el camino libre medio de los fotones fuese infinito y no de dimensiones atómicas.

La perturbación en la curvatura ζ es una cantidad de vital importancia en los estudios del universo temprano. Se postula que durante inflación ocurrieron fluctuaciones cuánticas de vacío [Sasaki, M., 2012; Riotto, A & Lyth D., 1999], originando perturbaciones en la métrica del espaciotiempo, generando así el concepto de perturbación en la curvatura ζ , que es una cantidad conservada [Liddle, A & Lyth D., 2000] siempre que se cumpla la condición adiabática para la presión $P = P(\rho)$ [Lyth D. & Liddle A., 2009] si se mide sobre un slicing de densidad de energía uniforme.

El efecto Sachs-Wolfe [Sachs, R & Wolfe A., 1967] propone una relación entre las inhomogeneidades

¹Esto ocurre justo antes de iniciarse el proceso de nucleosíntesis cuando los positrones ya se han aniquilado.

²Fenómeno que origina una superficie llamada Last Scattering Surface (LSS) que se puede detectar actualmente y que conforma el actual mapa de la CMB.

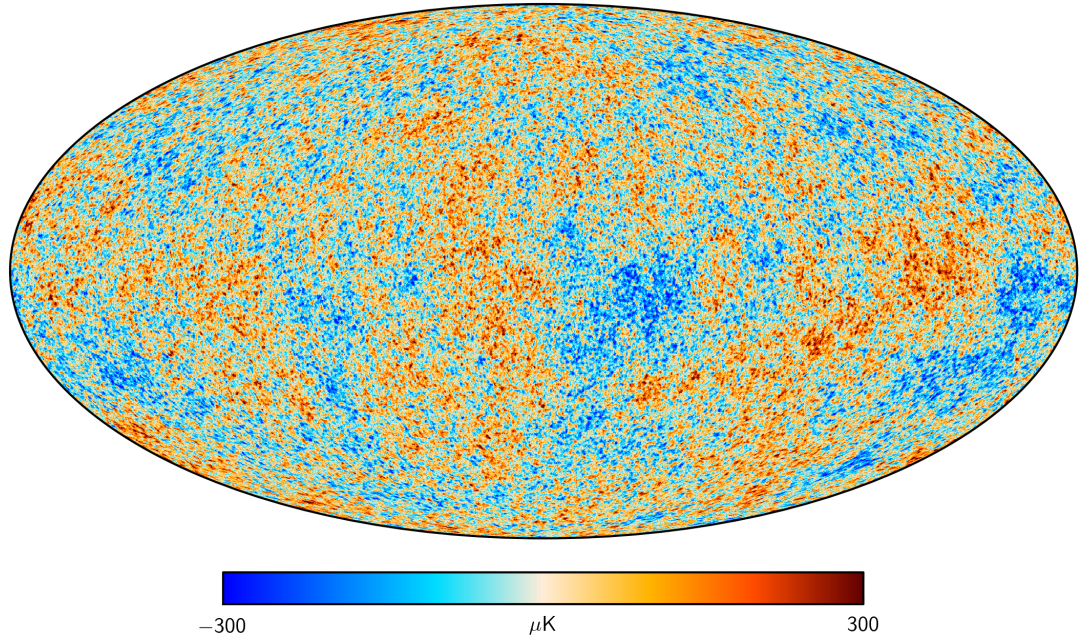


Figura 3.2. Mejora en la resolución angular de las mediciones en las fluctuaciones de temperatura de la CMB, obtenidas con el satélite PLANCK. Imagen extraída de <http://www.cosmos.esa.int>

geneidades en la temperatura de la CMB y la perturbación en la curvatura ζ :

$$\left(\frac{\delta T}{T_0}\right)_k = \left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)_k = -\frac{1}{5}\zeta_k. \quad (3.1.1)$$

De esta forma se pueden comparar resultados observacionales ($\frac{\delta T}{T_0}$) con los provenientes de modelos cosmológicos, buscando calcular la perturbación en la curvatura ζ_k para lograr contrastar teoría con experimento.

3.2. Suavizado y suposición de universos separados

La relación entre el volumen físico y el comóvil en métricas distintas a la de Minkowski [Weinberg, S. , 1972] se logra para la métrica FLRW manteniendo un threading paralelo a las líneas de mundo de observadores comóviles [Lyth D. & Liddle A., 2009], recordando que en la métrica de Minkowski se tiene la igualdad entre ambos volúmenes ya que el determinante de dicha métrica es (-1) . En este caso se tiene que la métrica, en coordenadas ca, cambia por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a^2\gamma_{ij}(\vec{x}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a^2\delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.2.1)$$

3. Perturbaciones cosmológicas

donde se cambia γ_{ij} de la expresión cartesiana para la métrica FLRW para un espaciotiempo plano en expansión por δ_{ij} . Esto se logra si γ_{ij} se mantiene independiente del tiempo³.

Para el estudio de las perturbaciones cosmológicas es necesario que el threading sea comóvil con el fin de poder asociar la raíz de menos el determinante de la métrica $\sqrt{-g}$ con la expresión:

$$V_{físico} = \sqrt{-g}V_{comovil}, \quad (3.2.2)$$

y calculando el determinante se obtiene para la métrica FLRW:

$$V_{físico} = a^3 \sqrt{\det(\gamma_{ij})} V_{comovil}. \quad (3.2.3)$$

Se requiere entonces que $\sqrt{\det\gamma_{ij}} = 1$ para dar un significado físico al coeficiente a como parámetro de expansión para la métrica estudiada.

De este modo se hace el estudio de una métrica que puede describir, por ejemplo, el campo escalar inflacionario φ que es el motor primigenio de la expansión, lo que ya de hecho es una razón para independizar la métrica de la posición. A continuación se describe el proceso de suavizado, necesario igualmente para poder aplicar la suposición de universos separados.

Suavizar en cosmología corresponde a realizar un promedio de una cantidad física observable en cierta región espacial. Para el caso de interés se realizará el suavizado de la densidad de energía dentro de un volumen de radio comóvil aR , haciendo que:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &\rightarrow TF \rightarrow \rho(\vec{k}), \\ \rho(R, \vec{x}, t) &\rightarrow TF \rightarrow \rho(R, \vec{k}), \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

donde se ha realizado la transformada de Fourier (TF) de las cantidades en el espacio coordenado. Se muestra en la figura [3.3] el proceso de suavizado para la densidad de energía en un espacio arbitrario y algunas coordenadas espaciales. Mediante este procedimiento se elimina granularidad en el mapa $\rho(\vec{x}, t)$; al mismo tiempo se eliminan componentes espectrales cuyo número de onda satisfaga $k < \frac{1}{R}$ [Lyth D. & Liddle A., 2009; Weinberg, S., 2008] ya que calcular el gradiente en el espacio coordenado equivale a multiplicar la transformada de Fourier por $i\vec{k}$. Si la escala de suavizado $R = \frac{1}{k}$ se escoge tal que $k \ll aH$, se logra obtener homogeneidad e isotropía local en cada región de radio comóvil aR . La densidad de energía suavizada en una esfera de radio R centrada en un punto x , siendo este cualquier punto del espacio, se cuantifica por la expresión:

$$\rho(R, x, t) = \rho(t) + \delta\rho(R, x, t), \quad (3.2.5)$$

en ella se identifica el término $\rho(t)$ como un promedio espacial de la densidad de energía $\rho(x, t)$. De este modo las perturbaciones son definidas bajo la siguiente premisa:

$$\left| \frac{\delta\rho(R, x, t)}{\rho(t)} \right| \ll 1, \quad (3.2.6)$$

³Esta es una de las condiciones para poder aplicar la suposición de universos separados [Lyth D. & Liddle A., 2009]

3.2. Suavizado y suposición de universos separados

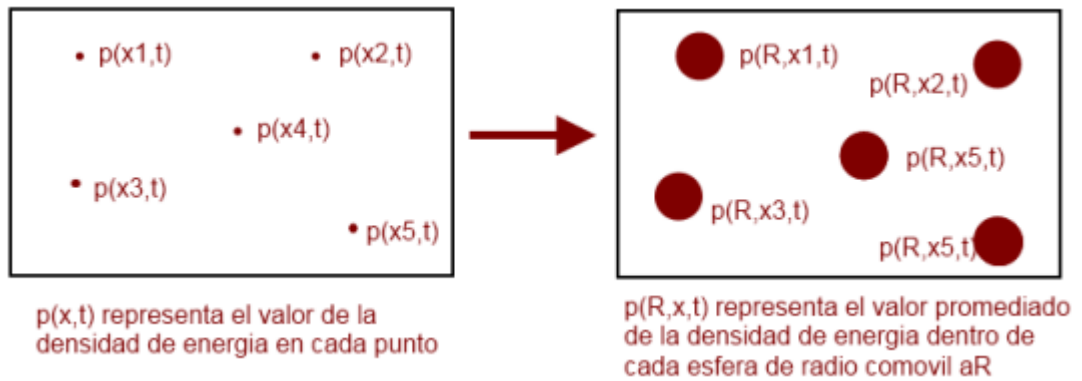


Figura 3.3. Suavizado de la densidad de energía.

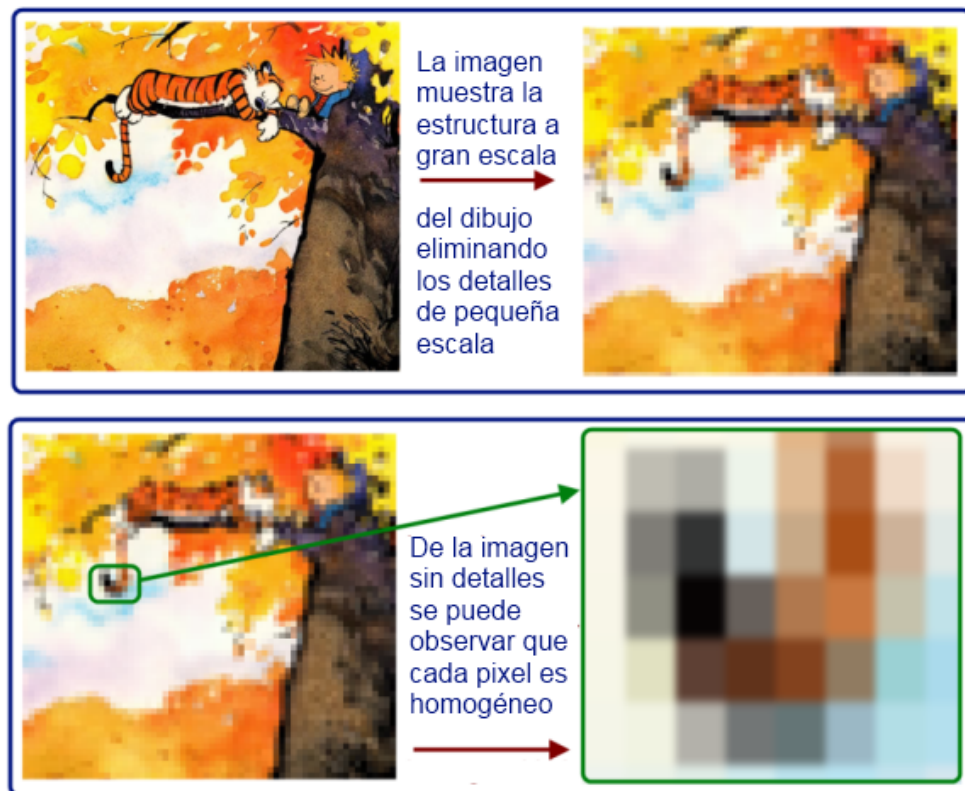


Figura 3.4. Analogía con la suposición de universos separados

3. Perturbaciones cosmológicas

es decir, que para definir una perturbación, la relación entre el valor suavizado local y el promedio del fondo homogéneo e isótropo debe tener mantener el carácter dominante este último. Esta definición para perturbación en la densidad de energía local aplica también para la densidad de partículas $n(R, x, t)$, de este modo se debe cumplir que:

$$\left| \frac{\delta n(R, x, t)}{n(t)} \right| \ll 1, \quad (3.2.7)$$

lo cual implica que el flujo de partículas desde y hacia la esfera de radio R es despreciable antes de la entrada al horizonte, lo cual asegura que $n(R, x, t)$ será dependiente solo del elemento comóvil de volumen V . De este modo la evolución de las perturbaciones cosmológicas del universo observable puede ser analizada como una colección de universos no perturbados separados [Lyth D. & Liddle A., 2009].

En la figura [3.4] se hace una analogía entre la suposición de universos separados y el proceso de pixelado de una imagen. Tanto en el pixelado de una imagen como en el proceso de suavizado de cantidades cosmológicas (paso necesario para realizar la suposición de los universos separados) se busca eliminar detalles de pequeña escala, conservando la información a gran escala.

Se observa que al realizar un aumento en la escala de la imagen pixelada, es posible observar homogeneidad en el color de cada recuadro. Completando la analogía con la suposición de universos separados, es posible comparar cada pixel con un universo separado independiente, donde la homogeneidad de las cantidades dentro de cada universo no impiden que a grandes escalas se pueda reproducir la estructura del universo observable.

En cada universo separado se cumple isotropía, de este modo el parámetro de expansión $a(\vec{x}_1, t)$ de una esfera debe ser un valor independiente de la posición dentro de cada esfera, pero no correlacionado con el parámetro de expansión $a(\vec{x}_2, t)$ correspondiente a la expansión isótropa en otra de las innumerables esferas que ahora conforman el universo observable. La suposición requiere que los universos no se traslapen entre sí, aunque sus tasas de expansión sean diferentes, tal como un conjunto de burbujas de jabón las cuales no poseen igual radio y tampoco se superponen unas con otras. Para más información el lector puede dirigirse a la referencia [Lyth D. & Liddle A., 2009].

3.3. Formalismo δN

La foliación o slicing del espaciotiempo se denomina con un tiempo t y representan hiper-superficies de tiempo constante. El ensartamiento o threading caracteriza líneas de mundo y se representa por coordenadas espaciales comóviles en el sistema coordinado requerido. En cosmología estandar y del universo perturbado es conveniente el uso de un slicing comóvil, plano y con densidad de energía uniforme, lo cual no es posible en un universo perturbado. La calibración o *Gauge* es una selección de coordenadas que permitan recuperar el intervalo euclideo en ausencia de perturbaciones [Lyth D. & Liddle A., 2009; Weinberg, S., 2008].

Teniendo en cuenta que se está trabajando en un slicing con densidad de energía uniforme sin olvidar que equivale al slicing es comóvil solo en escalas de superhorizonte y en el threading comóvil, se puede definir cada parámetro de expansión local⁴ en función de la perturbación en la curvatura así [Lyth D. & Liddle A., 2009; Liddle, A & Lith D., 2000; Sasaki, 1995]:

$$a(\vec{x}, t) = a(t)e^{\psi(\vec{x}, t)}. \quad (3.3.1)$$

Se define la perturbación primordial en la curvatura invariante de gauge [Lyth D. & Liddle A., 2009]:

$$\zeta = \psi - H \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad (3.3.2)$$

donde es fácil ver que si se trabaja en un *gauge* para el cual el slicing es plano, $\psi = 0$ y por ello:

$$\zeta = -H \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad (3.3.3)$$

y si se trabaja en un slicing con densidad de energía uniforme se obtiene:

$$\zeta = \psi, \quad (3.3.4)$$

razón suficiente para validar la siguiente igualdad:

$$a(\vec{x}, t) = a(t)e^{\psi(\vec{x}, t)} = a(t)e^{\zeta(\vec{x}, t)}. \quad (3.3.5)$$

La forma exponencial del parámetro de escala se elige por conveniencia. Se observa que el parámetro de expansión local depende del parámetro de expansión global correspondiente al universo no perturbado o fondo, en el cual se cumple homogeneidad e isotropía en cualquier escala de medida.

La definición usual de la perturbación en la curvatura ζ es invariante de gauge, mientras que ψ es la perturbación en la curvatura medida en un slicing plano y uno genérico, lo cual impide que sea invariante [Lyth D. & Liddle A., 2009; Linde, A. , 1984; Weinberg, S. , 2008].

En el fondo, correspondiente al universo no perturbado, la métrica FLRW describe la geometría del espaciotiempo, y las ecuaciones de campo de Einstein dan razón de la distribución energética en dicho universo. Para un universo como éste se cumple la ecuación de continuidad para la densidad de energía [Lyth D. & Liddle A., 2009] que se muestra a continuación:

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} [\rho + P] = 0. \quad (3.3.6)$$

Aplicando esta ecuación a cada uno de los universos separados se obtiene:

$$\dot{\rho}(x, t) + 3 \frac{\dot{a}(\vec{x}, t)}{a(\vec{x}, t)} [\rho(\vec{x}, t) + P(\vec{x}, t)] = 0. \quad (3.3.7)$$

⁴Definición posible gracias a la suposición de universos separados y a la selección del gauge apropiado.

3. Perturbaciones cosmológicas

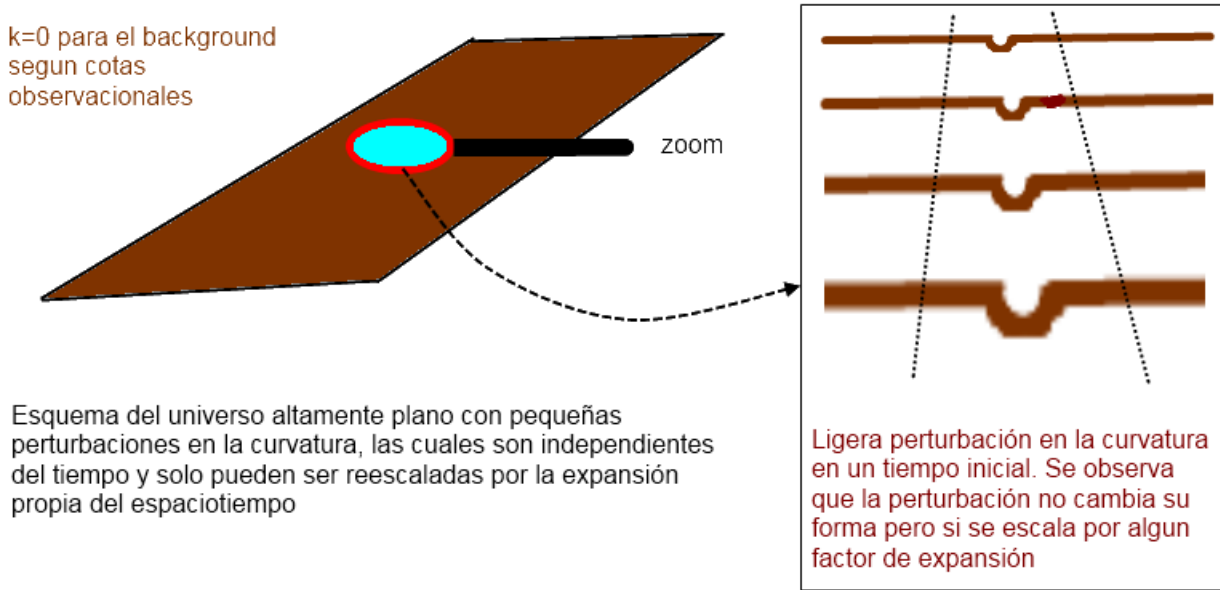


Figura 3.5. Independencia temporal de la perturbación en la curvatura

Recordando que se trabaja en un slicing con densidad de energía uniforme, se elimina la dependencia respecto a la posición, y aplicando la condición de adiabaticidad $P = P(\rho)$ para las variables presión y densidad de energía se obtiene:

$$\dot{\rho}(t) + 3 \frac{\dot{a}(\vec{x}, t)}{a(\vec{x}, t)} [\rho(t) + P(t)] = 0. \quad (3.3.8)$$

De aquí que, aplicando la definición (3.3.5) a la expresión anterior se obtenga:

$$\dot{\rho}(t) + 3 \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \dot{\zeta}(\vec{x}, t) \right] [\rho(t) + P(t)] = 0, \quad (3.3.9)$$

con lo que se concluye que $\dot{\zeta}(\vec{x}, t) = 0$, lo cual demuestra que las perturbaciones primordiales en la curvatura son independientes del tiempo, por tanto solamente escalan espacialmente, como se explica en la figura [3.5]. [Lyth D. & Liddle A., 2009; Weinberg, S., 2008].

Utilizando la definición de monto de expansión N_{global} como una forma de cuantificar la expansión del universo no perturbado, también se puede definir un parámetro de expansión local, que dependerá también de la posición pues se mantiene la suposición de universos separados. De esta manera:

$$N_{global} = \ln \frac{a(t_2)}{a(t_1)}, \quad (3.3.10)$$

$$N_{local} = \ln \frac{a(\vec{x}, t_2)}{a(\vec{x}, t_1)}.$$

Reemplazando los factores de escala locales por la definición de la Ec.(3.3.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} N_{local} &= \ln \left(a(t_2) e^{\phi(\vec{x}, t_2)} \right) - \ln \left(a(t_1) e^{\phi(\vec{x}, t_1)} \right), \\ N_{local} &= \ln \left(\frac{a(t_2)}{a(t_1)} \right) + \phi(\vec{x}, t_2) - \phi(\vec{x}, t_1), \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

con lo que, aplicando la propiedad básica del slicing plano para el cual $\phi(\vec{x}, t_1) = 0$, junto con la propiedad para el splicing de densidad de energía uniforme para el cual $\delta\rho = 0$ ⁵ a la expresión (3.3.2) se consigue:

$$\begin{aligned} N_{local} - N_{global} &= \zeta(\vec{x}, t_2), \\ \delta N &= \zeta(\vec{x}, t_2). \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

La Ec.(3.3.12) concluye la metodología enmarcada en el formalismo δN descrito en este apartado, siendo δN la variación entre el N local y el N global. Se observa que el valor de ζ es independiente del tiempo inicial en el que se hagan las medidas del monto de expansión, indicando que la perturbación en la curvatura sólo depende del tiempo en el cual se busque conocer su valor, generalmente un tiempo t_2 mayor al tiempo t_1 de salida del horizonte [Rodríguez, Y. , 2005].

Como conclusión final, es notable que el formalismo δN solo requiere información de la evolución de las cantidades no perturbadas para poder obtener la perturbación en la curvatura ζ , de la cual se pueden calcular los parámetros del modelo cosmológico.

⁵Estas condiciones son impuestas para definir de manera unívoca el monto de expansión local

4

Gaussianidad de observables cosmológicos

4.1. Teorema Ergódico

En cosmología se hace uso del teorema ergódico [Weinberg, S. , 2008] para calcular los promedios en el ensamble de sistemas y así obtener observables comparables con los resultados observacionales.

Es de gran importancia para entender el por qué aplicar este teorema, entender el hecho que no se puede acceder a un conjunto muy grande o ensamble de sistemas de relevancia cosmológica; solo podemos acceder a una realización del ensamble: a nuestro universo observable. Aunque existiesen infinitas realizaciones, actualmente no podemos acceder sino al propio universo en el que existimos. Esto es una dificultad primordial a la hora de hacer análisis cuantitativo en cosmología pues, debido a la naturaleza cuántica de muchos fenómenos estudiados es fundamental el enfoque probabilístico de cálculo.

La idea fundamental es permitir que tales promedios en el ensamble sea equivalentes a realizar promedios espaciales sobre un elemento aleatoriamente elegido del ensamble. Sin esta posibilidad no habría base estadística que sustente la cosmología ni los estudios de las estructuras cósmicas a grandes escalas.

Para poder aplicar el teorema¹ es necesario que las correlaciones espaciales decaigan suficientemente rápido en función de la separación, de manera que sea posible obtener en un ensamble, una gran cantidad de volúmenes no correlacionados, o estadísticamente independientes. Esto se expresa a continuación:

$$\langle \varphi(x_1 + k) \varphi(x_2 + k) \dots \varphi(y_1 - k) \varphi(y_2 - k) \rangle = \quad (4.1.1)$$

$$\langle \varphi(x_1 + k) \varphi(x_2 + k) \varphi(x_3 + k) \dots \rangle \langle \varphi(y_1 - k) \varphi(y_2 - k) \varphi(y_3 - k) \dots \rangle + \quad (4.1.2)$$

$$\text{permutaciones obtenidas por teorema de Isselis-Wick.} \quad (4.1.3)$$

¹Se requiere el cumplimiento de la homogeneidad estadística, que se explica en la siguiente sección

4. Gaussianidad de observables cosmológicos

De la aplicabilidad del teorema depende que sea posible asegurar que toda la información del sistema físico estudiado, en este caso el universo observable, descrito a través de la función de distribución de probabilidad $P(\varphi_i)$ esté disponible de un solo elemento del ensamble y sea válido para todo el espacio

Cabe aclarar que el teorema ergódico en la versión aplicada a la mecánica estadística se refiere a la evolución temporal de sistemas, mientras que en aplicaciones cosmológicas el tiempo es un parámetro constante y se aplica para distribuciones espaciales.

4.2. Homogeneidad e Isotropía Estadística

Al observar el mapa de distribución de galaxias o el de distribución de temperaturas, es posible observar inhomogeneidades y anisotropías en la distribución de materia o en la temperatura de la CMB. Tomando la perturbación en la curvatura dependiente de la posición $\zeta(\vec{x})$ como una cantidad observable y calculando su transformada de Fourier se tiene:

$$\zeta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \zeta(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k, \quad (4.2.1)$$

donde se descompone una perturbación cosmológica en sus distintos modos espectrales. A partir de la parametrización de la perturbación en la curvatura descrita, es posible calcular correladores de n -puntos así:

$$\langle \zeta(\vec{x}_1) \dots \zeta(\vec{x}_n) \rangle = \int \left[\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} e^{i(k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + \dots + k_n \cdot x_n)} \langle \zeta(\vec{k}_1) \zeta(\vec{k}_2) \dots \zeta(\vec{k}_n) \rangle \right]; \quad (4.2.2)$$

de este modo se muestra que existe una relación entre las funciones de correlación en el espacio real y en el de momentum. La motivación para calcular los correladores de n -puntos o promedios espaciales, es la posibilidad de obtener observables cosmológicos, que acorde con el teorema ergódico permitirán conocer cantidades promediadas para el ensamble de universos.

Con los correladores es posible obtener la función de distribución de probabilidad (FDP) para el observable descrito, en este caso la perturbación en la curvatura. Si para un correlador de n -puntos se cumple que:

$$\langle \zeta(\vec{x}_1) \zeta(\vec{x}_2) \dots \zeta(\vec{x}_n) \rangle = \langle \zeta(\vec{x}_1 + \vec{d}) \zeta(\vec{x}_2 + \vec{d}) \dots \zeta(\vec{x}_n + \vec{d}) \rangle, \quad (4.2.3)$$

se asegura la invariancia ante traslaciones espaciales. Este hecho se conoce como *Homogeneidad Estadística* y de no cumplirse para alguna cantidad física medible, no sería posible aplicar el teorema ergódico ni contar con el ensamble de universos. En tal caso no sería posible comparar teoría con experimento y *la cosmología se quedaría sin bases como ciencia*.

Para conseguir homogeneidad estadística se requiere que los correladores de n -puntos sean proporcionales a la separación entre los puntos en los cuales se hace la correlación, citando

como ejemplo el caso más simple en el cual se asegura homogeneidad estadística para un correlador de la perturbación en la curvatura de dos puntos:

$$\langle \zeta(\vec{x}_1)\zeta(\vec{x}_2) \rangle = \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_2) \rangle e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}_1} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}_2}. \quad (4.2.4)$$

Se asegura en la Ec.(4.2.4) la dependencia de las exponenciales al vector que separa los puntos x_1 y x_2 , lo cual se logra si el correlador en el espacio de momentum se define en términos de un delta de Dirac tal que las exponenciales puedan reescribirse así:

$$\langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_2) \rangle \propto \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \rightarrow e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{x}_1 + \vec{k}_2 \cdot \vec{x}_2)} \propto F(\vec{x}_2 - \vec{x}_1). \quad (4.2.5)$$

La proporcionalidad entre el delta de Dirac y el correlador mostrado en la Ec.(4.2.5) se vuelve igualdad si se multiplica por funciones llamadas $n - 1$ espectros o funciones espectrales:

$$\langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) M_\zeta(\vec{k}_1, \vec{k}_2); \quad (4.2.6)$$

estas funciones espectrales provienen de la función de distribución de probabilidad (FDP) de la variable aleatoria estudiada [Lyth D. & Liddle A., 2009; Karlin, S. , 1975; Jacobs, K. , 2010]. Se dan algunos ejemplos de las funciones espectrales definidas dependiendo del número de modos en el espacio de momentum que se vayan a correlacionar:

$$\begin{aligned} n = 1 &\rightarrow M_\zeta(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \rightarrow \text{Espectro}, \\ n = 2 &\rightarrow M_\zeta(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) \rightarrow \text{Biespectro}, \\ n = 3 &\rightarrow M_\zeta(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4) \rightarrow \text{Triespectro}, \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Si ahora se cumple además que el correlador de n -puntos es invariante ante rotaciones espaciales en las que $\vec{x}_k = R\vec{x}_k$ siendo R una matriz de rotación arbitraria:

$$\langle \zeta(\vec{x}_1)\zeta(\vec{x}_2)\dots\zeta(\vec{x}_n) \rangle = \langle \zeta(\vec{\tilde{x}}_1)\zeta(\vec{\tilde{x}}_2)\dots\zeta(\vec{\tilde{x}}_n) \rangle, \quad (4.2.8)$$

se obtiene que la variable aleatoria descrita (para este caso la perturbación en la curvatura) cumple la condición conocida como *Isotropía estadística*. Al mantener para la variable aleatoria las condiciones de homogeneidad e isotropía estadística, los $(n - 1)$ espectros pueden escribirse como cantidades invariantes ante rotaciones de sus vectores de onda:

$$M_\zeta(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n) = M_\zeta(\vec{\tilde{k}}_1, \vec{\tilde{k}}_2, \dots, \vec{\tilde{k}}_n). \quad (4.2.9)$$

De este modo, en virtud de la igualdad mostrada en la Ec.(4.2.9) se obtiene invarianza ante rotaciones espaciales, para los descriptores estadísticos de la variable aleatoria estudiada en el espacio de momentum.

4.3. Gaussianidad en la FDP de la perturbación en la curvatura ζ

Una variable aleatoria, tal como la perturbación en la curvatura $\zeta(\vec{x})$ ya mencionada, tiene una función de distribución de probabilidad gaussiana siempre que sus correladores de n -puntos sean iguales a cero para $n \geq 3$ siendo n -impar, y para $n \geq 4$ par se cumpla que los correladores puedan expresarse como sumatoria de productos de correladores de dos puntos. El promedio de un número par de estos términos será la suma sobre todos los posibles emparejamientos, sin tener en cuenta aquellos términos en los que se intercambien las coordenadas espaciales², o aquellos en los que se intercambien términos de posición en la suma³. Si la variable estocástica se pasa al espacio de momentum $\zeta(\vec{k}_i)$ y además se mantiene una distribución de probabilidad gaussiana, sus correladores adquieren la siguiente forma [Lyth D. & Liddle A., 2009] :

$$\begin{aligned}
 \langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_2) \rangle &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) P_\zeta(\vec{k}_1), \\
 \langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_2)\zeta(\vec{k}_3) \rangle &= 0, \\
 \langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_2)\zeta(\vec{k}_3)\zeta(\vec{k}_4) \rangle &= \langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_2) \rangle \langle \zeta(\vec{k}_3)\zeta(\vec{k}_4) \rangle + \\
 &\quad \langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_3) \rangle \langle \zeta(\vec{k}_2)\zeta(\vec{k}_4) \rangle + \\
 &\quad \langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_4) \rangle \langle \zeta(\vec{k}_3)\zeta(\vec{k}_2) \rangle, \\
 \langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_2)\zeta(\vec{k}_3)\zeta(\vec{k}_4)\zeta(\vec{k}_5) \rangle &= 0. \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Si las condiciones de gaussianidad no se cumplen, se puede estudiar la no-gaussianidad para la variable aleatoria a través de los parámetros de las funciones espectrales tratados en la siguiente sección.

4.4. Parametrización de funciones espectrales

La razón de tomar en las secciones anteriores del marco teórico la perturbación en la curvatura y no otra perturbación de otro observable cosmológico es la relación entre $\zeta(\vec{x})$ y δT conocida como efecto Sachs-Wolfe [Sachs, R & Wolfe A., 1967]. Este efecto muestra una relación directa entre la perturbación en la curvatura y la perturbación en la temperatura de la radiación cósmica de fondo (RCF). Ya se cuenta con el mapa de anisotropías en la temperatura, gracias a los experimentos COBE, WMAP y PLANCK , donde cada uno de ellos ha logrado un

² $\langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_2) \rangle = \langle \zeta(\vec{k}_2)\zeta(\vec{k}_1) \rangle$

³ $\langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_2) \rangle \langle \zeta(\vec{k}_3)\zeta(\vec{k}_4) \rangle = \langle \zeta(\vec{k}_3)\zeta(\vec{k}_4) \rangle \langle \zeta(\vec{k}_1)\zeta(\vec{k}_2) \rangle$.

aumento en la resolución angular de las medidas lo cual permite hacer estudios más precisos de las anisotropías en la temperatura y al mismo tiempo de la perturbación en la curvatura.

La forma como se puede contrastar teoría y experimento es a través de cantidades medibles y observables, y por parte de los modelos cosmológicos es posible cuantificar valores asociados a perturbaciones primordiales en la curvatura espacial⁴, mientras que la serie de experimentos puestos en órbita ofrecen información cada vez más precisa sobre la anisotropía en la temperatura de la CMB.

Después de obtener información proveniente del satélite, los experimentalistas y analistas de datos proponen una forma de parametrizar los $(n-1)$ espectros, la cual puede ser corroborada mediante las reglas tipo Feynman para el cálculo de correladores de n -puntos [Valenzuela-Toledo *et al.*, 2011; Byrnes, C. *et al.*, 2007], generando las siguientes expresiones:

$$P_{\zeta}(k) = \frac{2\pi^2}{k^3} A_{\zeta}^2 \left(\frac{k}{a^* H^*} \right)^{n_{\zeta}-1}, \quad (4.4.1)$$

$$B_{\zeta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \equiv \frac{6}{5} f_{NL} [P_{\zeta}(\mathbf{k}_1)P_{\zeta}(\mathbf{k}_2) + \text{p. c.}], \quad (4.4.2)$$

$$T_{\zeta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \equiv \frac{1}{2} \tau_{NL} [P_{\zeta}(\mathbf{k}_1)P_{\zeta}(\mathbf{k}_2)P_{\zeta}(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4|) + \text{p. c.}] + \frac{54}{25} g_{NL} [P_{\zeta}(\mathbf{k}_1)P_{\zeta}(\mathbf{k}_2)P_{\zeta}(\mathbf{k}_3) + \text{perm. cic.}], \quad (4.4.3)$$

donde se debe tener en cuenta que las cantidades remarcadas con * son calculadas después de la salida del horizonte [Lyth D. & Liddle A., 2009; Weinberg, S. , 2008]. Las cantidades A_{ζ} y n_{ζ} parametrizan el espectro P_{ζ} y las cantidades f_{NL} , τ_{NL} y g_{NL} [Hinshaw, G. *et al.*, 2013] son los niveles de no-gaussianidad, mediante los cuales se hace la comparación teoría-experimento en el estudio de modelos cosmológicos, todo esto avalado por las medidas observacionales:

- $A_{\zeta} = (4,957 \pm 0,094) \times 10^{-5}$, [Ade *et al.*, 2015a]
- $n_{\zeta} = 0,960 \pm 0,014$ [Ade *et al.*, 2015a]
- $-10 < f_{NL} < 74$ [Ade *et al.*, 2015a]
- $-0,6 \times 10^4 < \tau_{NL} < 3,3 \times 10^4$ [Ade *et al.*, 2015a]
- $-7,4 \times 10^5 < g_{NL} < 8,2 \times 10^5$ [Ade *et al.*, 2015a]

lo cual posibilita el descarte o aval de un conjunto de modelos que postulan mecanismos para explicar el origen de estructuras a gran escala. Estos modelos deben predecir la aparición de perturbaciones en la curvatura, densidad de energía, presión, temperatura, etc, cada una de las cuales se caracterizará por un conjunto de funciones espectrales (1-espectro, 2-espectro, 3-espectro, etc.) propias de cada modelo y con las cuales se obtiene la FDP de la perturbación estudiada.

⁴Se remarca la palabra *primordiales* porque fueron generadas mediante algún mecanismo cuántico durante inflación [Lyth D. & Liddle A., 2009; Weinberg, S. , 2008]

4. Gaussianidad de observables cosmológicos

4.5. Obtención del espectro a partir de las derivadas del monto de expansión

Se cuenta ahora con una expresión para obtener la perturbación en la curvatura de un modelo cosmológico en escalas de superhorizonte:

$$\zeta(\vec{x}, t_2) = N(\vec{x}, t_1, t_2) - N(t_1, t_2). \quad (4.5.1)$$

Tomando como motor inflacionario un conjunto de n -campos escalares que mantengan la isotropía estadística:

$$\phi_i(\vec{x}, t) = \phi_i(t) + \delta\phi_i(\vec{x}, t), \quad (4.5.2)$$

y reescribiendo la Ec.(4.6.1) teniendo en cuenta los n -campos escalares se postula la siguiente dependencia funcional, tal que se mantenga la información acerca de la evolución temporal t_1 por medio de los campos generadores de inflación y t_2 a través de la densidad de energía que se sabe debe ser uniforme, puesto que el slicing final cumple esta condición:

$$\zeta(\vec{x}, t_2) = N[\rho(t_2), \phi_1(\vec{x}, t_1), \phi_2(\vec{x}, t_1), \dots, \phi_n(\vec{x}, t_1)] - N[\rho(t_2), \phi_1(t_1), \phi_2(t_1), \dots, \phi_n(t_1)]. \quad (4.5.3)$$

Ahora se procede a expandir la función $\zeta(\vec{x}, t)$ con respecto al valor de los campos escalares en el fondo tal que:

$$\zeta(\vec{x}, t_2) = \frac{\partial N}{\partial \phi_i} \delta\phi_i(\vec{x}, t_1) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \delta\phi_i(\vec{x}, t_1) \delta\phi_j(\vec{x}, t_1) + \dots, \quad (4.5.4)$$

donde las derivadas de N se evalúan respecto al valor de los campos en el fondo y teniendo en cuenta que $\delta\rho = 0$ en el slicing de densidad de energía uniforme, razón para realizar la expansión solo para perturbaciones en el campo y no en la densidad de energía. Tomando el caso más simple, es decir, simplificando la expansión en series a un solo campo escalar y cortando la serie a primer orden se tiene:

$$\zeta(\mathbf{x}, t_2) = \frac{\partial N}{\partial \phi} \delta\phi(\mathbf{x}, t_1). \quad (4.5.5)$$

Por otra parte, la transformada de Fourier de la perturbación en los campos se define a partir de la expresión en el espacio de configuraciones así:

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{8\pi^3} \delta\phi(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (4.5.6)$$

Luego, usando la definición de correlador de dos puntos en el espacio de momentum para la perturbación en la curvatura (4.2.4) y para la perturbación en los campos se logra:

$$\langle \zeta(\vec{k}_1, t_2) \zeta(\vec{k}_2, t_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) P_\zeta(k_1), \quad (4.5.7)$$

4.6. Obtención del espectro a partir de las derivadas del monto de expansión

$$\langle \delta\phi(\vec{k}_1, t) \delta\phi(\vec{k}_2, t) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) P_{\delta\phi}(k_1), \quad (4.5.8)$$

y aplicando estas definiciones al correlador de dos puntos para $\zeta(\vec{x}, t)$ se obtiene:

$$(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) P_\zeta(k_1) = \frac{\partial N}{\partial \phi_i} \frac{\partial N}{\partial \phi_j} (2\pi)^3 \delta^{ij} P_{\delta\phi}(k_1), \quad (4.5.9)$$

donde se encuentra una relación entre el espectro de la perturbación en la curvatura y el espectro del campo escalar generador de inflación:

$$P_\zeta(k) = \frac{\partial N}{\partial \phi_i} \frac{\partial N}{\partial \phi_j} (2\pi)^3 \delta^{ij} P_{\delta\phi_i}(k), \quad (4.5.10)$$

Para calcular $P_{\delta\phi}$ se emplean técnicas propias de la teoría cuántica de campos [Mukhanov, V. & Winitzki S., 2007], apoyadas por las reglas tipo Feynman [Valenzuela-Toledo *et al.*, 2011; Byrnes, C. *et al.*, 2007]. P_ζ requiere el cálculo de las derivadas de N en función del campo ϕ .

4.6. Obtención del espectro a partir de las derivadas del monto de expansión

Se cuenta ahora con una expresión para obtener la perturbación en la curvatura de un modelo cosmológico en escalas de superhorizonte:

$$\zeta(\vec{x}, t_2) = N(\vec{x}, t_1, t_2) - N(t_1, t_2). \quad (4.6.1)$$

Tomando como motor inflacionario un conjunto de n -campos escalares que mantengan la isotropía estadística:

$$\phi_i(\vec{x}, t) = \phi_i(t) + \delta\phi_i(\vec{x}, t), \quad (4.6.2)$$

y reescribiendo la Ec.(4.6.1) teniendo en cuenta los n -campos escalares se postula la siguiente dependencia funcional, tal que se mantenga la información acerca de la evolución temporal t_1 por medio de los campos generadores de inflación y t_2 a través de la densidad de energía que se sabe debe ser uniforme, puesto que el slicing final cumple esta condición:

$$\zeta(\vec{x}, t_2) = \frac{N[\rho(t_2), \phi_1(\vec{x}, t_1), \phi_2(\vec{x}, t_1), \dots, \phi_n(\vec{x}, t_1)] - N[\rho(t_2), \phi_1(t_1), \phi_2(t_1), \dots, \phi_n(t_1)]}{N[\rho(t_2), \phi_1(t_1), \phi_2(t_1), \dots, \phi_n(t_1)]}. \quad (4.6.3)$$

Ahora se procede a expandir la función $\zeta(\vec{x}, t)$ con respecto al valor de los campos escalares en el fondo tal que:

$$\zeta(\vec{x}, t_2) = \frac{\partial N}{\partial \phi_i} \delta\phi_i(\vec{x}, t_1) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \delta\phi_i(\vec{x}, t_1) \delta\phi_j(\vec{x}, t_1) + \dots, \quad (4.6.4)$$

donde las derivadas de N se evalúan respecto al valor de los campos en el fondo y teniendo en cuenta que $\delta\rho = 0$ en el slicing de densidad de energía uniforme, razón para realizar la

4. Gaussianidad de observables cosmológicos

expansión solo para perturbaciones en el campo y no en la densidad de energía. Tomando el caso más simple, es decir, simplificando la expansión en series a un solo campo escalar y cortando la serie a primer orden se tiene:

$$\zeta(\vec{x}, t_2) = \frac{\partial N}{\partial \phi} \delta\phi(\vec{x}, t_1). \quad (4.6.5)$$

Luego, usando la la definición de correlador de dos puntos en el espacio de momentum para la perturbación en la curvatura de la ec.(4.2.9) y para la perturbación en los campos se logra:

$$\langle \zeta(\vec{k}_1, t_2) \zeta(\vec{k}_2, t_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) P_\zeta(k_1), \quad (4.6.6)$$

$$\langle \delta\phi(\vec{k}_1, t) \delta\phi(\vec{k}_2, t) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) P_{\delta\phi}(k_1), \quad (4.6.7)$$

y aplicando estas definiciones al correlador de dos puntos para $\zeta(\vec{x}, t)$ se obtiene:

$$(2\pi)^3 \delta_{ij}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) P_\zeta(k_1) = \frac{\partial N}{\partial \phi_i} \frac{\partial N}{\partial \phi_j} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) P_{\delta\phi}(k_1), \quad (4.6.8)$$

donde se encuentra una relación entre el espectro de la perturbación en la curvatura y el espectro del campo escalar generador de inflación:

$$P_\zeta(k) = \frac{\partial N}{\partial \phi_i} \frac{\partial N}{\partial \phi_j} (2\pi)^3 P_{\delta\phi}(k), \quad (4.6.9)$$

Para calcular $P_{\delta\phi}$ se emplean técnicas propias de la teoría cuántica de campos [Mukhanov, V. & Winitzki S., 2007], apoyadas por las reglas tipo Feynman [Valenzuela-Toledo *et al.*, 2011; Byrnes, C. *et al.*, 2007]. P_ζ requiere el cálculo de las derivadas de N en función del campo ϕ .

5

Metodología para implementar la estandarización

Como se plantea en la introducción de este trabajo, se busca estandarizar un procedimiento para el cálculo de las derivadas del monto de expansión N . En [Rodríguez Y. & Lyth D., 2005; Vernizzi *et al.*, 2006; Rodríguez, Y. , 2005; Valenzuela-Toledo *et al.*, 2011; Jaimes, J., 2008] se puede observar el procedimiento seguido para la obtención de las derivadas de N . Además de ser un procedimiento extenso y de mucho cuidado, no es generalizable a cualquier modelo cosmológico.

Se puede retomar la sección [4.6] y observar que para calcular el espectro de ζ se requiere el conocimiento previo de las derivadas del monto de expansión. Por otra parte, la expresión:

$$\begin{aligned} \zeta(t, \mathbf{k}) &= \sum_{i=1}^n N_i \delta\phi_i(\mathbf{k}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{ij} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{k}) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{ij} (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}) \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}) \delta\phi_j(\mathbf{k}) \rangle, \end{aligned} \quad (5.0.1)$$

es la materia prima para conocer la contribución al parámetro f_{NL} a segundo orden para involucrar ese orden de perturbaciones de ζ :

$$\frac{6}{5} f_{NL} = \frac{\sum N_i N_j N_{kl}}{[\sum N_i^2]^2} + \ln(kL) \mathcal{P}_\zeta \frac{\sum_{ijk} N_{ij} N_{jk} N_{ki}}{[\sum N_i^2]^3}, \quad (5.0.2)$$

en donde se muestra que para cuantificar f_{NL} y caracterizar la no gaussianidad de ζ para modelos que involucren perturbaciones cosmológicas a segundo orden¹ es necesario de nuevo

¹Tomando la expansión en series de Taylor de ζ proveniente del formalismo δN .

5. Metodología para implementar la estandarización

el cálculo de las derivadas del monto de expansión.

En la expresión (5.0.2) cabe anotar que el parámetro L es el corte infrarrojo que se impone para descartar aportes a grandes distancias que pudieran generar divergencias en las cantidades calculadas.

El desarrollo seguido por [Rodríguez Y. & Lyth D., 2005; Valenzuela-Toledo *et al.*, 2011; Jaimes, J., 2008] muestra la complejidad de realizar dichos cálculos con la total desventaja de tener que trazar un procedimiento no-estándar para cada modelo inflacionario que se analice. Compárese, por ejemplo con las referencias [Vernizzi *et al.*, 2006; Battfeld *et al.*, 2007].

Del apartado concerniente al formalismo δN se puede observar que si bien la diferencia entre el monto de expansión global independiente de la posición, solo depende de la coordenada temporal final donde se realice el cálculo, existe una evolución temporal de N , lo cual conlleva a que su cálculo requiera solucionar ecuaciones diferenciales parciales, muchas veces no lineales de las cuales no se conoce un procedimiento de solución analítico unívoco y estandarizado.

Se propone para ello transportar la evolución temporal de las derivadas del monto de expansión hacia las funciones de correlación de las perturbaciones en los campos generadores del mecanismo inflacionario. De la expresión (4.6.9) se puede observar que el espectro a primer orden de ζ depende de una función de correlación de las perturbaciones del campo escalar y de las derivadas del monto de expansión global, no de la versión local de N .

Lo que se va a describir en esta sección va a ser la forma de transportar² la evolución temporal *desde* el monto de expansión y sus derivadas *hacia* las funciones de correlación de las perturbaciones de los campos inflacionarios [Mulryne, D. *et al.*, 2010].

²Se evidencia el por qué del nombre del método de estandarización.

6

Transformaciones de Gauge

En esta sección se buscará la expresión que permita calcular las derivadas del monto de expansión Partimos de las definiciones de las funciones de correlación de las perturbaciones de los campos¹:

$$\Sigma_{ij} = \langle \delta\varphi_i^* \delta\varphi_j^* \rangle. \quad (6.0.1)$$

$$\alpha_{ijk} = \langle \delta\varphi_i^* \delta\varphi_j^* \delta\varphi_k^* \rangle. \quad (6.0.2)$$

Utilizando la definición de la perturbación en la curvatura ζ [Lyth D. & Liddle A., 2009; Rodriguez Y. & Lyth D., 2005; Rodriguez, Y. , 2005; Valenzuela-Toledo *et al.*, 2011], a través de expansión en series de Taylor, truncada hasta segundo orden, incluyendo el último término que se encarga de eliminar promedios espaciales de ζ :

$$\zeta = N_i \delta\varphi_i + \frac{1}{2} N_{ij} \delta\varphi_i \delta\varphi_j - \frac{1}{2} N_{ij} \langle \delta\varphi_i \delta\varphi_j \rangle. \quad (6.0.3)$$

$$\zeta\zeta = \left[N_i \delta\varphi_i + \frac{1}{2} N_{ij} \delta\varphi_i \delta\varphi_j - \frac{1}{2} N_{ij} \langle \delta\varphi_i \delta\varphi_j \rangle \right] \times \left[N_k \delta\varphi_k + \frac{1}{2} N_{kl} \delta\varphi_k \delta\varphi_l - \frac{1}{2} N_{kl} \langle \delta\varphi_k \delta\varphi_l \rangle \right], \quad (6.0.4)$$

¹Se definen cantidades (*) medidas en un slicing plano y (c) medidas en slicing comóvil.

6. Transformaciones de Gauge

y realizando los cálculos para el correlador de dos puntos de ζ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \zeta \zeta \rangle &= N_i N_j \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \\
&+ \frac{1}{2} N_i N_{kl} \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&- \frac{1}{2} N_i N_{kl} \langle \delta \varphi_i \rangle \langle \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&+ \frac{1}{2} N_{ij} N_k \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \delta \varphi_k \rangle \\
&+ \frac{1}{4} N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&- \frac{1}{4} N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \langle \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&- \frac{1}{2} N_{ij} N_k \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \langle \delta \varphi_k \rangle \\
&+ \frac{1}{4} N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle, \tag{6.0.5}
\end{aligned}$$

ahora utilizando la notación de las Ecs.(6.0.1, 6.0.2) la expresión anterior se reescribe:

$$\begin{aligned}
\langle \zeta \zeta \rangle &= N_i N_j \Sigma_{ik} + \frac{1}{2} N_i N_{kl} \alpha_{ikl} + \frac{1}{2} N_{ij} N_k \alpha_{ijk} \\
&+ \frac{1}{2} N_{ij} N_{kl} [\Sigma_{ij} \Sigma_{kl} + \Sigma_{ik} \Sigma_{jl} + \Sigma_{il} \Sigma_{jk}], \tag{6.0.6}
\end{aligned}$$

manteniendo solo el primer término porque los otros son subdominantes en la expresión anterior [Seery, D. & Lindsey, J., 2005]. Aquí se particulariza el procedimiento para obtener la forma del correlador de 2 puntos de ζ , debido a que el análisis posterior del método de las ecuaciones de transporte de momentos va a ser para el mecanismo inflacionario para dos campos escalares, el cual quedará:

$$\langle \zeta \zeta \rangle = N_1^2 \Sigma_{11} + N_2^2 \Sigma_{22} + N_1 N_2 \Sigma_{12} + N_2 N_1 \Sigma_{21}, \tag{6.0.7}$$

aquí se puede simplificar la expresión, y siempre que el cálculo de ζ sea realizado para escalas de superhorizonte, las funciones de correlación para las perturbaciones de los campos inflacionarios conmutan: $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$. Esta propiedad se basa en el proceso de clasicalización de las perturbaciones² cuando estas salen del horizonte de partículas durante inflación [Lyth D. & Liddle A., 2009; Mukhanov, V. , 2005; Weinberg, S. , 2008].

²En escalas de superhorizonte los efectos cuánticos son de carácter subdominante, evadiendo que ζ se comporte como una superposición de operadores [Seery, D. et al, 2009].

A continuación se va a obtener la expresión para el correlador de tres puntos de ζ , el cual será el triple producto de la perturbación invariante de gauge ζ definida en la ec.(6.0.3). Manteniendo la debida notación de funciones de correlación asi como respetando la sumación de índices, este producto quedará:

$$\begin{aligned}
\langle \zeta \zeta \zeta \rangle &= N_m N_k N_i \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_k \delta \varphi_i \rangle + \frac{1}{2} N_m N_i N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_i \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&- \frac{1}{2} N_m N_i N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_i \rangle \langle \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle + \frac{1}{2} N_m N_{ij} N_k \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_i \delta \varphi_j \delta \varphi_k \rangle \\
&+ \frac{1}{4} N_m N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_i \delta \varphi_j \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle - \frac{1}{4} N_m N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \langle \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&- \frac{1}{2} N_m N_{ij} N_k \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_k \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle - \frac{1}{2} N_m N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \\
&- \frac{1}{2} N_m N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_m \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \langle \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle + \frac{1}{2} N_{mn} N_i N_k \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \delta \varphi_i \delta \varphi_k \rangle \\
&+ \frac{1}{4} N_{mn} N_i N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \delta \varphi_i \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle - \frac{1}{4} N_{mn} N_i N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \delta \varphi_i \rangle \langle \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&+ \frac{1}{4} N_{mn} N_{ij} N_k \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \delta \varphi_i \delta \varphi_j \delta \varphi_k \rangle + \frac{1}{8} N_{mn} N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \delta \varphi_i \delta \varphi_j \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&- \frac{1}{8} N_{mn} N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \langle \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle - \frac{1}{4} N_{mn} N_{ij} N_k \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \delta \varphi_k \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \\
&- \frac{1}{8} N_{mn} N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \\
&- \frac{1}{8} N_{mn} N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \langle \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&- \frac{1}{2} N_{mn} N_i N_k \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_k \rangle \\
&- \frac{1}{4} N_{mn} N_i N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&+ \frac{1}{4} N_{mn} N_i N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \rangle \langle \delta \varphi_i \rangle \langle \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&- \frac{1}{4} N_{mn} N_{ij} N_k \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \delta \varphi_k \rangle \\
&- \frac{1}{8} N_{mn} N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&- \frac{1}{8} N_{mn} N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \langle \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \\
&- \frac{1}{2} N_{mn} N_{ij} N_k \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \rangle \langle \delta \varphi_k \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \\
&- \frac{1}{8} N_{mn} N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \rangle \langle \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle \\
&+ \frac{1}{8} N_{mn} N_{ij} N_{kl} \langle \delta \varphi_m \delta \varphi_n \rangle \langle \delta \varphi_k \delta \varphi_l \rangle \langle \delta \varphi_i \delta \varphi_j \rangle.
\end{aligned} \tag{6.0.8}$$

6. Transformaciones de Gauge

De la ec. (6.0.8), utilizando la notación mostrada en las expresiones (6.0.1) y (6.0.2):

$$\begin{aligned}
\langle \zeta \zeta \zeta \rangle &= N_m N_i N_k \alpha_{mik} \\
&+ \frac{1}{2} N_m N_i N_k \{ \Sigma_{mi} \Sigma_{kl} + \Sigma_{mk} \Sigma_{il} + \Sigma_{ml} \Sigma_{ik} \} \\
&- \frac{1}{2} N_m N_i N_k \Sigma_{mi} \Sigma_{kl} \\
&+ \frac{1}{2} N_m N_{ij} N_k \{ \Sigma_{mi} \Sigma_{jk} + \Sigma_{mj} \Sigma_{ik} + \Sigma_{mk} \Sigma_{ij} \} \\
&- \frac{1}{2} N_m N_{ij} N_k \Sigma_{mk} \Sigma_{ij} \\
&+ \frac{1}{2} N_{mn} N_i N_k \{ \Sigma_{mn} \Sigma_{ik} + \Sigma_{mi} \Sigma_{nk} + \Sigma_{mk} \Sigma_{in} \} \\
&- \frac{1}{2} N_{mn} N_i N_k \Sigma_{mn} \Sigma_{ik},
\end{aligned} \tag{6.0.9}$$

donde el color rojo representa términos proporcionales al correlador de tres puntos de $\delta\varphi_i$ y el color azul a productos de correladores de dos puntos de las perturbaciones de los campos. Aquí de nuevo se particulariza el procedimiento para obtener la forma del correlador de 3 puntos de ζ en el modelo de potencial escalar cuadrático para dos campos, el cual quedará:

$$\begin{aligned}
\langle \zeta \zeta \zeta \rangle &= N_1^3 \alpha_{111} + N_2^3 \alpha_{222} + 3N_1^2 N_2 \alpha_{112} \\
&+ 3N_2^2 N_1 \alpha_{122} \{ N_1^3 \alpha_{111} + N_2^3 \alpha_{222} + 3N_1^2 N_2 \alpha_{112} + 3N_2^2 N_1 \alpha_{122} \} \\
&+ \{ \frac{3}{2} N_1^2 N_{11} \Sigma_{11}^2 + \frac{3}{2} N_2^2 N_{22} \Sigma_{22}^2 \\
&+ 3N_1^2 N_1 2\Sigma_{11} \Sigma_{12} + 3N_2^2 N_1 2\Sigma_{12} \Sigma_{22} \\
&+ \frac{1}{2} N_1^2 N_{22} (\Sigma_{11} \Sigma_{22} + 2\Sigma_{12}^2) \\
&+ 3N_1 N_2 N_{11} \Sigma_{11} \Sigma_{12} + 3N_1 N_2 N_{22} \Sigma_{12} \Sigma_{22} \\
&+ 2N_1 N_2 N_{12} (\Sigma_{11} \Sigma_{22} + 2\Sigma_{12}^2) \\
&+ \frac{1}{2} N_{11} N_2^2 (\Sigma_{11} \Sigma_{22} + 2\Sigma_{12}^2) \},
\end{aligned} \tag{6.0.10}$$

Es importante hacer un alto para entender lo que se busca al realizar el cálculo de los correladores mostrados en las ecs. (6.0.7) y (6.0.10). Como ya se ha mencionado, obtener las derivadas del monto de expansión es un procedimiento que no se ha estandarizado, siendo para algunos modelos inflacionarios un asunto trivial, pero en general de difícil obtención, motivo suficiente para aunar esfuerzos en la búsqueda de la estandarización. Importante observar que la perturbación en la curvatura, invariante de escala ζ es dependiente completamente de la evolución temporal de las derivadas de N .

Por otra parte, obtener la forma local del parámetro de no-gaussianidad [Lyth D. & Liddle A., 2009; Mulryne, D. et al., 2010; Rodriguez, Y., 2005] es uno de los objetivos del presente trabajo de investigación, y servirá para comprobar la eficacia del método de transporte de

momentos. La forma local de f_{NL} ³ se muestra a continuación:

$$f_{\text{NL}} \simeq \frac{5}{18} \frac{\langle \zeta \zeta \zeta \rangle}{\langle \zeta \zeta \rangle^2}. \quad (6.0.11)$$

La expresión anterior proviene de asumir $kL \approx 1$ en la ec.(5.0.2) y de aplicar en ella la primera y segunda derivada del monto de expansión, mostradas en las ecs.(6.0.7) y (6.0.10).

Es de recalcar que las funciones de correlación para dos y tres puntos requieren un previo conocimiento de las derivadas del monto de expansión N_i y N_{ij} , cálculos que serán abordados posteriormente.

³Asumiendo que ζ es casi-gaussiana

7

Parámetro de Hubble local

Se aplicará el formalismo δN [Lyth D. & Liddle A., 2009; Rodriguez Y. & Lyth D., 2005; Liddle, A & Lith D., 2000; Sasaki, 1995] como herramienta para calcular parámetros cosmológicos asociados a las perturbaciones en escenarios inflacionarios. Se hará uso de las observaciones que avalan homogeneidad e isotropía a grandes escalas lo que permite postular una geometría del universo observable casi-plana [Ade *et al.*, 2015a]. Todo lo anterior avala la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) como base geométrica de la evolución de nuestro universo observable, donde la tasa de expansión se mide a través del parámetro de Hubble $H(t)$ definido a través del factor de escala $a(t)$:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (7.0.1)$$

siendo el punto la derivada con respecto al tiempo cósmico. La ecuación que describe la homogeneidad e isotropía de la expansión que experimenta nuestra región visible del universo¹ es la ecuación de Friedmann²:

$$H^2(t) = \frac{\rho(t)}{3m_p^2}, \quad (7.0.2)$$

siendo m_p la masa reducida de Planck. Tomando como un hecho el principio cosmológico, es posible expresar el tensor de momentum-energía tal como sería el de un fluido perfecto, y para escalas cosmológicas (mayores a 10 MPC) los gradientes espaciales de los campos son inexistentes [Lyth D. & Liddle A., 2009; Weinberg, S. , 2008], lo que posibilita expresar la densidad de energía y presión en términos del(de los) campo(s) escalar(es) presente(s) durante inflación primordial, de la siguiente manera:

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \sum_i^N \dot{\varphi}_i^2 + V(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)), \quad (7.0.3)$$

$$P(t) = \frac{1}{2} \sum_i^N \dot{\varphi}_i^2 - V(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)). \quad (7.0.4)$$

¹Asumiendo gravedad de Einstein.

²Aca se omite el término de curvatura por la evidencia observacional.

7. Parámetro de Hubble local

La ecuación de continuidad para la densidad de energía proviene del principio adiabático [Lyth D. & Liddle A., 2009; Linde, A. , 1984; Weinberg, S. , 2008; Rodriguez, Y. , 2005], el cual determina que para regiones espaciales con volúmenes mayores a $(10 \text{ Mpc})^3$ no hay intercambio de calor o partículas, y se muestra a continuación:

$$\dot{\rho}(t) + 3H(t) [\rho(t) + P(t)] = 0. \quad (7.0.5)$$

A partir de Lagrangiano para n-campos escalares en un espaciotiempo en expansión isotrópica, descrito por la métrica FLRW se tiene:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_j \partial^\mu \varphi_j - V(\varphi_j), \quad (7.0.6)$$

donde, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange en la versión para campos continuos:

$$\frac{\partial(a^3 \mathcal{L})}{\partial \varphi_j} - \partial_\mu \left\{ \frac{\partial(a^3 \mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \varphi_j)} \right\} = 0, \quad (7.0.7)$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$\ddot{\varphi}_j(t) + 3H\dot{\varphi}_j(t) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_j(t)} = 0, \quad (7.0.8)$$

que evidencia su similitud con la Ec.(2.0.8), solo que en este caso se aplica para N - campos escalares.

Aplicando el principio de acción estacionaria con extremos fijos al Lagrangiano mostrado en la ec.(7.0.6) se obtiene la expresión (7.0.8) que representará las ecuaciones de movimiento para los n-campos.

Otra manera de calcular el resultado de la ec.(7.0.8). es utilizando la ecuación de continuidad mostrada en la ec.(7.0.5), donde, reemplazando las definiciones de densidad de energía y presión como funciones de los n-campos escalares generadores de inflación primordial, es decir haciendo uso de las eqs.(7.0.3) y (7.0.4), se logra reproducir en conjunto de ecuaciones de movimiento para los N campos escalares.

7.1. Aplicación de la suposición de universos separados

Tomando las expresiones anteriores, válidas en el fondo que cumple homogeneidad e isotropía a grandes escalas, es momento de aplicar la suposición de universos separados [Lyth D. & Liddle A., 2009; Liddle, A & Lith D., 2000], que, como ya se ha mencionado en el presente trabajo, postula que el universo puede analizarse como regiones homogéneas e isotrópicas cerca de los puntos espaciales de interés [Rodriguez Y. & Lyth D., 2005] haciendo que:

$$g_{ij} = a^2(x, t) \gamma_{ij}(x) \Rightarrow a^2(x, t) \delta_{ij}. \quad (7.1.1)$$

7.1. Aplicación de la suposición de universos separados

Este proceso equivale a realizar un suavizado que elimina detalles de pequeña escala cosmológica [Lyth D. & Liddle A., 2009], permitiendo reescribir las Eqs. (7.0.1) - (7.0.8) como funciones dependientes de la posición así:

$$H(\vec{x}, t) = \frac{\dot{a}_1(\vec{x}, t)}{a_2(\vec{x}, t)}, \quad (7.1.2)$$

$$H^2(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{3m_p^2}, \quad (7.1.3)$$

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_i^N \dot{\varphi}_i^2(\vec{x}, t) + V(\varphi_1(\vec{x}, t), \dots, \varphi_N(\vec{x}, t)), \quad (7.1.4)$$

$$P(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_i^N \dot{\varphi}_i^2(\vec{x}, t) - V(\varphi_1(\vec{x}, t), \dots, \varphi_N(\vec{x}, t)), \quad (7.1.5)$$

$$\dot{\rho}(\vec{x}, t) + 3H(\vec{x}, t) (\rho(\vec{x}, t) + P(\vec{x}, t)) = 0, \quad (7.1.6)$$

$$\ddot{\varphi}_i(\vec{x}, t) + 3H(\vec{x}, t) \dot{\varphi}_i(\vec{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i(\vec{x}, t)} = 0. \quad (7.1.7)$$

El parámetro de Hubble de la Eq.(7.1.2) se define de manera general como la relación entre las cantidades a_1 y a_2 evaluadas en slicings diferentes, recordando que el término slicing representa un conjunto de hipersuperficies de tiempo constante que generan foliación en el espacio-tiempo[Linde, A. , 1984; Weinberg, S. , 1972]. El threading por otra parte, corresponde a las líneas de mundo cuyas coordenadas espaciales se mantienen constantes.

Partiendo de la definición de H de la ec.(7.0.1) en el fondo no perturbado:

$$N(t_1, t_2) = \ln \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \quad (7.1.8)$$

$$t_1 = t_2$$

$$N(t_1, t_1) = 0$$

donde queda claro que no se puede aplicar la versión estandar del formalismo δN propuesta en [Liddle, A & Lith D., 2000; Sasaki, 1995] porque la función monto de expansión se anula.

Si se busca eliminar la dependencia temporal de la expresión anterior se anularía el parámetro libre. En este caso N es el parámetro que escala temporalmente la evolución del proceso inflacionario. Por otra parte, si se hace uso de la versión local del parámetro de Hubble en la expresión (7.1.2) es posible, partiendo de la definición del formalismo δN : evitar que el parámetro $N(t_1, t_1)$ se anule, al tiempo que se elimina la evolución temporal:

$$N(\vec{x}, t_1, t_2) = \ln \frac{a(\vec{x}, t_2)}{a(\vec{x}, t_1)} \quad (7.1.9)$$

$$t_1 = t_2 \quad (7.1.10)$$

$$N(t_1, t_1) \neq 0. \quad (7.1.11)$$

7. Parámetro de Hubble local

A partir del resultado anterior, y teniendo en cuenta que el formalismo δN asegura la siguiente igualdad:

$$\delta N = \zeta(\vec{x}, t) = \delta \ln a, \quad (7.1.12)$$

es posible obtener:

$$\delta \ln a = \ln a(\vec{x}, t) - \ln a(t) = \ln a^c(\vec{x}, t) - \ln a(t) + \ln a^*(\vec{x}, t) - \ln a^*(\vec{x}, t), \quad (7.1.13)$$

donde es necesario aclarar nuevamente que los subíndices $*$ y C corresponden respectivamente a slicings plano y de densidad de energía uniforme, llamado también comóvil. Por otro lado, el término $\ln(a^*(\vec{x}, t))$ es equivalente al valor del logaritmo natural del factor de escala temporal en el fondo no perturbado, ya que por definición no hay perturbación en la curvatura pues $\zeta = 0$. Haciendo uso de la aclaración previa se obtiene:

$$\zeta(\vec{x}, t) = \delta \ln a = \ln a^c(\vec{x}, t) - \ln a^*(\vec{x}, t), \quad (7.1.14)$$

donde es fácil ver que la variación de $\ln a$ se puede reescribir a manera de integral así:

$$\zeta(\vec{x}, t) = \int_{a^*}^{a^c} \frac{da}{a(\vec{x}, t)} = \int_{t^*}^{t^c} \frac{\dot{a}(\vec{x}, t)}{a(\vec{x}, t)} dt, \quad (7.1.15)$$

de este modo es fácil ver que el integrando de la última expresión reproduce la ec.(7.1.2) razón por la que es posible reescribirla:

$$\zeta(\vec{x}, t) = \int_{t^*}^{t^c} \frac{\dot{a}(\vec{x}, t)}{a(\vec{x}, t)} dt = \int_{t^*}^{t^c} H(\vec{x}, t) dt. \quad (7.1.16)$$

En este paso se hace necesario utilizar una transformación de las coordenadas temporales: un evento puede definirse sobre cualquier hipersuperficie de tiempo constante. Para el caso de estudio, un evento en el espaciotiempo puede definirse para dos slicings distintos.

De este modo, y tomando como base la Fig.[7.1], el evento puede analizarse a través de dos coordenadas temporales distintas, utilizando la siguiente transformación [Lyth D. & Liddle A., 2009]:

$$\tilde{t} = t + \delta t(\vec{x}, t), \quad (7.1.17)$$

lo cual solo representa una forma de nombrar las coordenadas, dado que el evento ocurre en el mismo lugar del espaciotiempo. Ocurre lo mismo para cualquier cantidad de relevancia cosmológica, permitiendo definirla así:[Lyth D. & Liddle A., 2009]

$$\delta \tilde{f} - \delta f = \dot{f}(t) \delta t(\vec{x}, t), \quad (7.1.18)$$

que, para el caso de las cantidades ρ y P entre los slicings mencionados resultará en:

$$\begin{aligned} \delta \rho^c - \delta \rho^* &= \dot{\rho} \delta t(\vec{x}, t), \\ \delta P^c - \delta P^* &= \dot{P} \delta t(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (7.1.19)$$

7.1. Aplicación de la suposición de universos separados

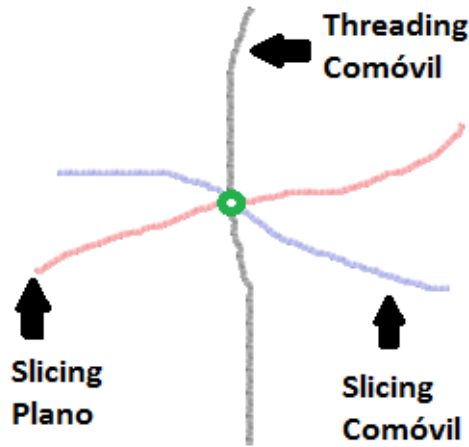


Figura 7.1. Se muestra un evento (círculo verde) que ocurre cuando el threading (líneas que mantienen coordenadas espaciales constantes) y el slicing (hipersuperficies de tiempo constante que se ordenan como folios dentro de una carpeta) se cruzan en el espaciotiempo. El threading comóvil hace referencia a un observador que viaja con las coordenadas espaciales invariantes. El slicing comóvil es aquel que es ortogonal al threading comóvil. El slicing plano es aquel para el cual $\psi = 0$.

Manteniendo el slicing comóvil con densidad de energía uniforme ($\delta\rho = 0$) es posible obtener las siguientes relaciones necesarias para obtener las derivadas de N :

$$\begin{aligned} -\frac{\delta\rho^*}{\dot{\rho}} &= \delta t(\vec{x}, t), \\ -\frac{\delta P^*}{\dot{P}} &= \delta t(\vec{x}, t), \\ -\frac{\delta\varphi^*(\vec{x}, t)}{\dot{\varphi}} &= \delta t(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (7.1.20)$$

Aplicando la transformación de la ec.(7.1.17) solo a la coordenada temporal se obtiene:

$$t^c - t^* = \delta t(\vec{x}, t), \quad (7.1.21)$$

y la expresión de la ec.(7.1.16) se reescribe de la siguiente forma:

$$\zeta(\vec{x}, t) = \int_{t^c - \delta t}^{t^c} H(\vec{x}, t) dt. \quad (7.1.22)$$

Realizando una expansión en series de Taylor de la integral³ y truncando la misma a primer orden se obtiene:

$$\zeta(\vec{x}, t) = H(\vec{x}, t)\delta t(\vec{x}, t). \quad (7.1.23)$$

³Aproximación válida siempre que δt sea lo suficientemente pequeño

7. Parámetro de Hubble local

Se ha obtenido una pieza clave del desarrollo de la estandarización del cálculo de las derivadas del monto de expansión. Utilizando los resultados de la expresión (7.1.20) en el resultado anterior se obtiene una expresión dependiente de la densidad de energía y de sus perturbaciones:

$$\zeta(\vec{x}, t) = -H(\vec{x}, t) \frac{\delta\rho^*(\vec{x}, t)}{\dot{\rho}(t)}, \quad (7.1.24)$$

o de forma equivalente, dependiente de los campos y sus perturbaciones:

$$\zeta(\vec{x}, t) = -H(\vec{x}, t) \frac{\delta\varphi^*(\vec{x}, t)}{\dot{\varphi}(t)}. \quad (7.1.25)$$

Reutilizando la definición de δN se obtiene:

$$\delta N = -H(\vec{x}, t) \frac{\delta\varphi^*(\vec{x}, t)}{\varphi(t)}. \quad (7.1.26)$$

Extendiendo el resultado al caso de N -Campos escalares, se reescribe la expresión anterior así:

$$\delta N = -H(\vec{x}, t) \frac{\delta\varphi_j^*(\vec{x}, t)}{\dot{\varphi}_j(t)}, \quad (7.1.27)$$

donde el subíndice j representa cada campo escalar de modelo cosmológico inflacionario.

8

Condiciones de Slow-Roll extendidas

A partir de las definiciones de la densidad de energía de la ec.(7.0.3) y las ecuaciones de movimiento de los campos escalares de la Ec.(7.0.8), es posible describir las condiciones que debieron cumplirse durante el proceso de inflación primordial que permitieron mantener casi sin variaciones al parámetro de Hubble hasta que el universo haya alcanzado al menos 62 e-folds de expansión, por medio de las condiciones de slow-roll [Lyth D. & Liddle A., 2009; Mukhanov, V. , 2005; Weinberg, S. , 2008] para las cantidades en el fondo¹:

$$\dot{\varphi}_i(t)^2 \ll V(\varphi_i(t)), \quad (8.0.1)$$

$$|\ddot{\varphi}_i(t)| \ll |3H\dot{\varphi}_i(t)|. \quad (8.0.2)$$

Al introducir las perturbaciones cosmológicas a través de las Ecs.(7.1.4-7.1.7), la dependencia implícita de la posición hace que las condiciones previas se *extiendan* a las versiones locales para lograr describir el periodo inflacionario en cada universo separado:

$$\dot{\varphi}_i(\vec{x}, t)^2 \ll V(\varphi_i(\vec{x}, t)), \quad (8.0.3)$$

$$|\ddot{\varphi}_i(\vec{x}, t)| \ll |3H(\vec{x}, t)\dot{\varphi}_i(\vec{x}, t)|. \quad (8.0.4)$$

Hay que tener claro que las cantidades ρ y P tienen dos componentes: una es el fondo, que define la parte homogénea e isotrópica que depende solo del parámetro libre (N ó t) y otra llamada perturbación que escala en el tiempo y el espacio. De este modo la condición de slow-roll de la Ec.(8.0.1) se puede reescribir de esta forma:

$$\{\dot{\varphi}_i(t) + \dot{\delta\varphi}_i(\vec{x}, t)\}^2 = \dot{\varphi}_i(t)^2 + 2\dot{\varphi}_i(t)\delta\dot{\varphi}_i(\vec{x}, t) + \delta\dot{\varphi}_i(\vec{x}, t)^2. \quad (8.0.5)$$

Despreciando en la anterior condición, las perturbaciones a segundo orden ya que se postula que son de carácter subdominante. Este hecho se verifica si la teoría de perturbaciones cosmológicas aplicada es a primer orden,[Lyth D. & Liddle A., 2009] de donde se obtiene:

$$\dot{\varphi}_i(t)^2 + 2\dot{\varphi}_i(t)\delta\dot{\varphi}_i(\vec{x}, t) \ll V(\varphi_i(t) + \delta\varphi_i(\vec{x}, t)). \quad (8.0.6)$$

¹Es decir en ausencia de perturbaciones cosmológicas

8. Condiciones de Slow-Roll extendidas

El resultado anterior genera las condiciones de Slow-Roll en el fondo (sin cantidades perturbadas) de la Ec.(8.0.1) de manera unívoca solamente cuando el siguiente conjunto de condiciones se cumplan:

$$\dot{\varphi}_i(t) \gg \delta\dot{\varphi}_i(\vec{x}, t), \quad (8.0.7)$$

$$\varphi_i(t) \gg \delta\varphi_i(\vec{x}, t). \quad (8.0.8)$$

Ahora, tomando la condición de Slow-Roll en el fondo mostrada en la Eq. (8.0.2), esta se puede expresar así:

$$|\ddot{\varphi}_i(t) + \delta\ddot{\varphi}_i(\vec{x}, t)| \ll 3 | (H(t) + \delta H(\vec{x}, t)) (\dot{\varphi}_i(t) + \delta\dot{\varphi}_i(\vec{x}, t)) |, \quad (8.0.9)$$

cuando se introducen perturbaciones en el modelo cosmológico. La expresión anterior puede generar la condición de Slow-Roll original descrita en la ec.(8.0.1) solo si, de nuevo, el siguiente conjunto de condiciones se satisface:

$$\ddot{\varphi}_i(t) \gg \delta\ddot{\varphi}_i(\vec{x}, t), \quad (8.0.10)$$

$$H(t) \gg \delta H(\vec{x}, t). \quad (8.0.11)$$

El conjunto de condiciones adicionales listados en las Ecs. (8.0.3) y (8.0.4) son lo que nosotros llamamos *Condiciones de Slow-Roll Extendidas*. En ellas se incluyen la originales condiciones de Slow-Roll en el fondo o Background descritas en las Ecs. (8.0.1) y (8.0.2) pero las primeras contienen mas información.

9

Cálculo de las derivadas del monto de expansión N

9.1. Para un campo escalar

De las ecs.(6.0.7) y (6.0.10) está claro que se necesitan las derivadas del monto de expansión, y tanto en la introducción como en otros apartes del actual trabajo se ha mencionado la forma no-estandar de realizar dichos cálculos.¹ Por lo tanto se va a proponer una forma sistemática y estandar para realizar dichos cálculos.

Tomando el potencial generador de inflación en el espacio de configuraciones $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ para n campos escalares generadores de inflación primordial, se sabe que para determinar en ese espacio la trayectoria que los campos describen, son necesarias condiciones iniciales y al menos una condición final que servirá como parámetro libre de la trayectoria. De este modo la evolución del monto de expansión dependerá de tales cantidades de la siguiente forma:

$$N = N \left(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*, \dots, \varphi_n^*, \left\{ \begin{array}{c} t_f \\ \varphi_i \\ \rho \end{array} \right\}^c \right), \quad (9.1.1)$$

en donde se hace énfasis en el parámetro libre de la función N que puede ser tiempo, campo o densidad de energía, todos ellos evaluados en el slicing objetivo, es decir el slicing comóvil.

Aquí es necesario aclarar que el asterisco representa cantidades medidas en el slicing plano y la letra C representa el slicing comóvil, de este modo es posible calcular derivadas del monto de expansión en términos de las variables independientes en ambas hipersuperficies con las cuales se expresa:

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi_i^*} = \left(\frac{\partial N}{\partial \varphi_1} \right)^* \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \varphi_i^*} + \left(\frac{\partial N}{\partial \varphi_2} \right)^* \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial \varphi_i^*} + \left(\frac{\partial N}{\partial \varphi_n} \right)^* \frac{\partial \varphi_n^*}{\partial \varphi_i^*} + \left(\frac{\partial N}{\partial \varphi_i} \right)^c \frac{\partial \varphi_i^c}{\partial \varphi_i^*}. \quad (9.1.2)$$

¹Para no olvidar la dificultad inherente a dichos cálculos se citan las refs.[Vernizzi *et al.*, 2006; Rodriguez Y. & Lyth D., 2005; Cogollo, 2008; Jaimes, J., 2008]

9. Cálculo de las derivadas del monto de expansión N

De la anterior expresión, reescribiendo se obtiene:

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi_i^*} = \frac{\partial N}{\partial \varphi_i^*} + \frac{\partial N}{\partial \varphi_i^c} \frac{\partial \varphi_i^c}{\partial \varphi_i^*}. \quad (9.1.3)$$

Se puede concluir que las condiciones iniciales de los campos mas uno de los parámetro ρ^c, t^c, φ^c definen la trayectoria de evolución de los campos involucrados durante el periodo inflacionario.

Es útil realizar una analogía mecánica entre las ecuaciones de movimiento para los n -campos escalares mostradas en la ec.(7.1.7) con la ecuación de un oscilador armónico simple, en la cual el término de fricción corresponde a tres veces el parámetro de Hubble. Si en las ecuaciones de movimiento el término de fricción es dominante, este va a generar un régimen de *Slow-Roll* en el cual la aceleración $\ddot{\varphi}_i$ puede ser despreciada, en comparación con el término asociado a H . Esta condición se nombra en este trabajo de investigación como *primera condición de Slow-Roll extendido* y se muestra en la ec.(8.0.4). Con esta condición se obtiene:

$$\dot{\varphi}_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{3H(\vec{x}, t)} \frac{\partial V}{\partial \varphi_i(\vec{x}, t)}. \quad (9.1.4)$$

Para un potencial $V(\varphi_i)$ inflacionario general [Mukhanov, V. , 2005]:

$$H \propto \sqrt{\rho} \propto \sqrt{V}, \quad (9.1.5)$$

por lo que para mantener dominante el segundo término de las ecuaciones de campo, es necesario que se cumpla *la segunda condición de Slow-Roll extendido*, mostrada en la ec.(8.0.5), ya que la ecuación de Friedmann para el caso escalar se reescribe a partir de la definición de densidad de energía local así:

$$H^2(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{3m_p^2} = \frac{1}{3m_p^2} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\varphi}_i(\mathbf{x}, t)^2 + V(\varphi_i(\vec{x}, t)) \right\}. \quad (9.1.6)$$

De esta manera, al aplicar la condición de rodadura lenta a la expresión anterior sigue que:

$$H^2(\vec{x}, t) = \frac{V(\varphi_i(\vec{x}, t))}{3m_p^2}, \quad (9.1.7)$$

se obtiene la dependencia funcional buscada. Retomando el resultado de la ec.(7.1.27) y reemplazando el obtenido en la Ec.(9.1.6), donde se hace uso de las *Condiciones de Slow-*

Roll Extendidas se sigue que:

$$\begin{aligned}
 \delta N &= N(\vec{x}, t) - N(t), \\
 &= H(\vec{x}, t) \frac{\delta\varphi_i(\vec{x}, t)}{\dot{\varphi}_i(t)}, \\
 &= H(\vec{x}, t) \frac{\delta\varphi_i(\vec{x}, t)}{-\frac{\partial V(\varphi_i(\vec{x}, t))}{\partial\varphi_i(\vec{x}, t)} (3H(\vec{x}, t))^{-1}}, \\
 &= \frac{3H^2(\vec{x}, t) \delta\varphi_i(\vec{x}, t)}{-\frac{\partial V(\varphi_i(\vec{x}, t))}{\partial\varphi_i(\vec{x}, t)}}, \\
 &= -\frac{3\rho(\vec{x}, t)}{3m_p^2} \frac{\delta\varphi_i(\vec{x}, t)}{\frac{\partial V(\varphi_i(\vec{x}, t))}{\partial\varphi_i(\vec{x}, t)}}, \\
 &= -\frac{V(\varphi_i(\vec{x}, t))}{m_p^2} \frac{\delta\varphi_i(\vec{x}, t)}{\frac{\partial V(\varphi_i(\vec{x}, t))}{\partial\varphi_i(\vec{x}, t)}},
 \end{aligned} \tag{9.1.8}$$

que integrando respecto al campo i -ésimo resulta en:

$$N = -\frac{1}{m_p^2} \int_{\varphi_i^*}^{\varphi_i^c} \frac{V(\varphi_i(\vec{x}, t))}{\frac{\partial V(\varphi_i(\vec{x}, t))}{\partial\varphi_i(\vec{x}, t)}} \delta\varphi_i(\vec{x}, t). \tag{9.1.9}$$

La ecuación anterior muestra que es posible calcular el monto de expansión sin acudir a la evolución temporal de manera explícita. La propuesta es hacer uso de una transformación conveniente de la coordenada temporal, ubicando la evolución para $t_1 = t_2$ y al tiempo realizando un cambio de slicing plano en el que se cumple que:

$$\zeta = \overset{0}{\psi} - H \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}, \tag{9.1.10}$$

a un slicing con densidad de energía uniforme en el que:

$$\zeta = \psi - H \frac{\delta\overset{0}{\rho}}{\dot{\rho}}, \tag{9.1.11}$$

9.2. Derivadas de N para dos campos escalares

El aparte anterior habla de modelos cosmológicos de inflación primordial generalizados para cualquier número de campos escalares, no obstante en esta sección se particulariza para dos

9. Cálculo de las derivadas del monto de expansión N

campos escalares, ya que el cálculo del parámetro de No-Gaussianidad f_{NL} se realizará para este tipo de modelos. De la derivada para un potencial general de la Ec.(9.1.9), se puede calcular una constante $C(\varphi_1, \varphi_2)$ [Vernizzi *et al.*, 2006], proveniente de evaluar las integrales en una hipersuperficie(plana o comóvil), tal como se muestra a continuación :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\varphi_1^*}^{\varphi_1^c} \frac{V(\varphi_1)}{\partial V(\varphi_1)} \delta\varphi_1 - \int_{\varphi_2^*}^{\varphi_2^c} \frac{V(\varphi_2)}{\partial V(\varphi_2)} \delta\varphi_2, \\
 0 &= \int_{\varphi_1^*}^{\varphi_1^c} \frac{V(\varphi_1)}{\partial V(\varphi_1)} \delta\varphi_1 - \int_{\varphi_2^*}^{\varphi_2^c} \frac{V(\varphi_2)}{\partial V(\varphi_2)} \delta\varphi_2, \\
 C(\varphi_1, \varphi_2) &= \int_{\varphi_1^*}^{\varphi_1^c} \frac{V(\varphi_1)}{\partial V(\varphi_1)} \delta\varphi_1 - \int_{\varphi_2^*}^{\varphi_2^c} \frac{V(\varphi_2)}{\partial V(\varphi_2)} \delta\varphi_2. \tag{9.2.1}
 \end{aligned}$$

Esta constante es muy útil para obtener las formas explícitas de las derivadas de N en el caso particular de dos campos inflacionarios. La cantidad C posee la estructura funcional:

$$C(\varphi_1, \varphi_2) = \int^{\varphi_1} \frac{\partial C}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 - \int^{\varphi_2} \frac{\partial C}{\partial \varphi_2} \delta\varphi_2. \tag{9.2.2}$$

Mediante la anterior descripción explícita de la dependencia funcional de la constante C , es posible obtener las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial \varphi_1} &= \frac{1}{3m_p^2} \frac{V(\varphi_1)}{\partial V(\varphi_1)} = \frac{H^2(\vec{x}, t)}{\partial V(\varphi_1)}, \\
 \frac{\partial C}{\partial \varphi_2} &= -\frac{1}{3m_p^2} \frac{V(\varphi_2)}{\partial V(\varphi_2)} = -\frac{H^2(\vec{x}, t)}{\partial V(\varphi_2)}. \tag{9.2.3}
 \end{aligned}$$

Manteniendo al modelo inflacionario de dos campos escalares en el régimen de Slow-Roll extendido, la hipersuperficie con densidad de energía uniforme cumple que:

$$\frac{1}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + V = cte, \tag{9.2.4}$$

por lo que, manteniendo en las ecuaciones de movimiento de los campos el término de fricción dominante se logra que:

$$\frac{\partial V(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_1^c} \frac{\partial \varphi_1^c}{\partial C} + \frac{\partial V(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2^c} \frac{\partial \varphi_2^c}{\partial C} = 0, \tag{9.2.5}$$

La dependencia de C respecto los campos en el slicing plano o comóvil es en general definida para el caso de estudio requerido pues la Ec.(9.2.1) puede evaluarse en la hipersuperficie estudiada. A continuación se muestra el cálculo de las derivadas de C en el slicing comóvil:

$$\frac{\partial C(\varphi_1^*, \varphi_2^*)}{\partial \varphi_1^c} = \frac{\partial C}{\partial \varphi_1^*} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \varphi_1^c} + \frac{\partial C}{\partial \varphi_2^*} \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial \varphi_1^c}, \tag{9.2.6}$$

9.2. Derivadas de N para dos campos escalares

$$\frac{\partial C(\varphi_1^*, \varphi_2^*)}{\partial \varphi_2^c} = \frac{\partial C}{\partial \varphi_1^*} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \varphi_2^c} + \frac{\partial C}{\partial \varphi_2^*} \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial \varphi_2^c}. \quad (9.2.7)$$

Aplicando las reglas de derivación en cadena para cada campo, en conjunto con la forma de la derivada del monto de expansión en términos de los dos campos generadores de inflación y de las relaciones constitutivas de la Ec.(9.2.3) se obtiene:

$$\frac{\partial C}{\partial \varphi_1^c} \frac{\partial \varphi_1^c}{\partial V} + \frac{\partial C}{\partial \varphi_2^c} \frac{\partial \varphi_2^c}{\partial V} = 0 \quad (9.2.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{V^*}{V_{,1}^*} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \varphi_1^c} \frac{\partial \varphi_1^c}{\partial V} - \frac{V^*}{V_{,2}^*} \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial \varphi_1^c} \frac{\partial \varphi_1^c}{\partial V} \\ & + \frac{V^*}{V_{,1}^*} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \varphi_2^c} \frac{\partial \varphi_2^c}{\partial V} - \frac{V^*}{V_{,2}^*} \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial \varphi_2^c} \frac{\partial \varphi_2^c}{\partial V} = 0. \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

De la expresión obtenida y, haciendo uso de las siguientes definiciones convenientes:

$$V_{,1} = \frac{\partial V}{\partial \varphi_1}, \quad (9.2.10)$$

$$V_{,2} = \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}, \quad (9.2.11)$$

$$\sin \theta = \frac{V_{,1}}{\sqrt{V_{,1}^2 + V_{,2}^2}}, \quad (9.2.12)$$

$$\cos \theta = \frac{V_{,2}}{\sqrt{V_{,1}^2 + V_{,2}^2}}, \quad (9.2.13)$$

se concluye que:

$$\begin{aligned} & \frac{V^*}{V_{,1}^*} \frac{V^c}{V_{,1}^c} \frac{V_{,1}^*}{V^*} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{V_{,1}^c} \\ & + \frac{V^*}{V_{,2}^*} \frac{V^c}{V_{,1}^c} \frac{V_{,2}^*}{V^*} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{V_{,1}^c} \\ & - \frac{V^*}{V_{,1}^*} \frac{V^c}{V_{,2}^c} \frac{V_{,1}^*}{V^*} \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{1}{V_{,2}^c} \\ & - \frac{V^*}{V_{,2}^*} \frac{V^c}{V_{,2}^c} \frac{V_{,2}^*}{V^*} \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{1}{V_{,2}^c} = 0. \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

Simplificando la expresión anterior se llega a que:

$$\frac{V_{,1}^c}{V^c} V_{,1}^c \sin^2 \theta = \frac{V_{,2}^c}{V^c} V_{,2}^c \cos^2 \theta, \quad (9.2.15)$$

9. Cálculo de las derivadas del monto de expansión N

Es posible simplificar aun más la derivada anterior para lograr la siguiente relación entre el parámetro θ y las derivadas del potencial generador respecto los campos:

$$\tan^2 \theta = \frac{\frac{V_{,2}^c}{V^c} V_{,2}^c}{\frac{V_{,1}^c}{V^c} V_{,1}^c} = \frac{V_{,2}^2}{V_{,1}^2}. \quad (9.2.16)$$

A partir de la forma generalizada de la derivada del monto de expansión mostrada en la Ec.(9.1.3) y haciendo uso de la definición de N que no evoluciona temporalmente obtenida en la Ec.(9.1.9) se obtiene:

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi_i} = \left[\frac{V}{V_{,i}} \right]^* - \left[\frac{V}{V_{,1}} \right]^c \frac{\partial \varphi_i^c}{\partial \varphi_i^*}. \quad (9.2.17)$$

De esta forma de expresar la derivada del monto de expansión, y utilizando los resultados de las Ecs.(9.2.9)-(9.2.17) se llega a:

$$N_{,1} = \left(\frac{V_{,1}}{V} \right) \times \left(\frac{V_{,1}}{\sqrt{V_{,1}^2 + V_{,2}^2}} \right)^2, \quad (9.2.18)$$

$$N_{,2} = \left(\frac{V_{,2}}{V} \right) \times \left(\frac{V_{,2}}{\sqrt{V_{,1}^2 + V_{,2}^2}} \right)^2, \quad (9.2.19)$$

$$\begin{aligned} N_{11} = & \left(1 - \frac{V_{11}V}{V_1^2} \right) (V_1)^2 + 2 \left(\frac{V}{V_1} \right)^2 (V_{,2})^2 \times \left[\frac{V_{11}}{V} (V_{,2})^2 + \frac{V_{,1}V_{12}}{VV_2} (V_{,2})^4 \right] \\ & + 2 \left(\frac{V}{V_1} \right)^2 (V_{,2})^2 \times \left[\left(\frac{V_{11}}{V} - \frac{V_{22}}{V} + \frac{V_{,2}V_{12}}{VV_1} \right) (V_1)^2 (V_{,2})^2 \right], \end{aligned} \quad (9.2.20)$$

$$\begin{aligned} N_{22} = & \left(1 - \frac{V_{22}V}{V_2^2} \right) (V_{,2})^2 + 2 \left(\frac{V}{V_{,2}} \right)^2 (V_1)^2 \times \left[\frac{V_{22}}{V} (V_1)^2 + \frac{V_{,2}V_{21}}{VV_1} (V_{,2})^4 \right] \\ & + 2 \left(\frac{V}{V_{,2}} \right)^2 (V_1)^2 \times \left[\left(\frac{V_{22}}{V} - \frac{V_{11}}{V} + \frac{V_{,1}V_{21}}{VV_2} \right) (V_{,2})^2 (V_1)^2 \right], \end{aligned} \quad (9.2.21)$$

$$\begin{aligned} N_{12} = & 2 \left(\frac{V}{V_1} \right) \left(\frac{V}{V_{,2}} \right) (V_1)^2 \times \left[\frac{-V_{11}}{V} (V_{,2})^2 + \frac{V_{12}V}{V_{,2}V} (V_{,2})^4 \right] \\ & + 2 \left(\frac{V}{V_1} \right) \left(\frac{V}{V_{,2}} \right) (V_1)^2 \times \left[\left(\frac{V_{11}}{V} - \frac{V_{22}}{V} + \frac{V_{,2}V_{12}}{V_1V} \right) (V_1)^2 (V_{,2})^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.2.22)$$

El objetivo se cumple, pues es fácil ver que las derivadas de N están definidas en términos de las derivadas del potencial que depende a su vez de los campos inflacionarios involucrados en la expansión primordial, evadiendo la evolución temporal usual.

10

Ecuaciones de transporte de momentos

En los apartes anteriores se realizó un importante esfuerzo en eliminar la evolución temporal de N y sus derivadas, permitido solo bajo una conveniente transformación de gauge entre dos hipersuperficies de tiempo constante.

Ahora se buscará que la evolución sea transferida a las perturbaciones de los campos inflacionarios involucrados, a través de las funciones de correlación, todo esto con el fin de calcular la perturbación de la curvatura invariante de gauge ζ , de la cual depende el parametro de no-gaussianidad f_{NL} según la Ec.(6.0.11) que caracteriza la desviación de la distribución gaussiana de las perturbaciones en la distribución de temperaturas del mapa CMB [Hinshaw, G. *et al.*, 2013] mostrado en la figura [3.2].

Para lograr que se transporte la evolución de N y sus derivadas a Σ_{ij} y α_{ijk} , es decir a las funciones de correlación de las perturbaciones de los campos involucrados en inflación, es necesario que las cantidades sean descritas a través de descriptores estadísticos, dado que las fluctuaciones de los campos son de origen cuántico [Lyth D. & Liddle A., 2009; Linde, A. , 1984; Weinberg, S. , 2008].

Dado que los fenómenos se asumen de origen cuántico, para definir las cantidades correctamente es necesario un ensamble de sistemas, sobre los cuales poder aplicar estadística y obtener observables. Aquí hay una dificultad en cosmología puesto que solo hay un universo observable, no se cuenta con un ensamble de sistemas, hecho que ilegitima el rango de aplicabilidad del formalismo mecánico-cuántico.

Para sortear esta dificultad, se hace uso del teorema ergódico [Weinberg, S. , 2008; Jacobs, K. , 2010; Huang, K., 2001], ya mencionado en secciones atrás, que permite obtener promedios de cantidades en un ensamble de universos a partir del único universo observable al que tenemos acceso, a través de promedios espaciales. Para ello se toma el mapa de anisotropías en la distribución de temperaturas de la radiación cósmica de fondo y se genera el ensamble a partir de rotaciones finitas del conjunto de datos que lo conforman.

Como ya se propuso, la idea principal de la metodología es evitar la evolución temporal de las derivadas de N , *transportando* la evolución hacia las funciones de correlación de las

perturbaciones $\delta\varphi_i$ de los campos que intervienen en inflación primordial. Por otra parte se busca calcular f_{NL} o nivel de no-gaussianidad de la perturbación en la curvatura invariante de escala ζ como evidencia de la aplicabilidad del método.

10.1. Función de distribución de probabilidad casi gaussiana

Las propiedades estadísticas de ζ se codificada en la función de densidad de probabilidad(FDP) $P(\varphi_i)$. La FDP que se propone como descriptora estadística de ζ sera casi-gaussiana [Mulryne, D. *et al.*, 2010], es decir, los momentos de la distribución m_i con $m \neq 3$ serán los mismos de la FDP gaussiana usual, pero se permite que m_3 o skewness sea diferente de cero para generar un nivel de no-gaussianidad f_{NL} diferente de cero [Mulryne, D. *et al.*, 2010, 2011; Anderson, G. *et al.*, 2012]. La escogencia de la FDP radica en la relación existente entre las función Biespectro B_ζ y el nivel de no gaussianidad f_{NL} [Maldacena, J. , 2003; Boubekeur, L. & Lyth D. , 2006] asociado al biespectro, mostrada en la sección 4:

La FDP que se propone solo debe exhibir información útil para los tres primeros momentos:

- μ o primer momento de la función de distribución de probabilidad : Valor promedio, que da información sobre dónde hay mayor concentración de datos.
- σ o segundo momento de la FDP : Varianza, que define el ancho de la distribución.
- α o tercer momento de la distribución : Skewness, que indica la asimetría en la distribución.

Este hecho permite obtener el nivel de no-gaussianidad asociado al biespectro f_{NL} . Momentos impares de orden mayor serán asumidos nulos y momentos de orden mayor pares se podrán obtener como productos de la varianza. La única diferencia entre la FDP casi-gaussiana de la gaussiana será que para el estudio propuesto $\alpha \neq 0$.

Una FDP que cumpla con las condiciones descritas previamente, para el caso de un campo escalar es:

$$P(\varphi) = P_g(\varphi) \times P_{ng}(\varphi), \quad (10.1.1)$$

donde P_g es una FDP Gaussiana pura. P_{ng} representa la parte no-gaussiana de la distribución. Realizando una expansión en cumulantes¹ P_{ng} toma la forma [Mulryne, D. *et al.*, 2010; Pichon, C *et al.*, 2012; Blinnikov, S. & Moessner, R., 1998]:

$$P_{ng}(\varphi) = \left[1 + \frac{\alpha}{6\sigma^3} H_3 \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{\sigma} \right) \right], \quad (10.1.2)$$

donde H_3 es un polinomio de Chevishev-Hermite grado tres, φ es el campo que genera inflación primordial, φ_0 es la media y σ la desviación estandar.

¹Cuyo cálculo detallado se muestra en el apéndice [A]

10.2. Ecuación de conservación de la probabilidad

Partiendo de la deducción del curso de Landau sobre cinética física [Lifshitz, E. and Pitaevskii, L., 1999], en el cual se describe cualitativa y cuantitativamente las interacciones monoatómicas y moleculares de gases ideales, se procederá a realizar la deducción de la ecuación de conservación de la probabilidad partiendo de una FDP que caracteriza el perfil de velocidades de los distintos baños de partículas interactuantes.

Existe un número considerable de fenómenos constituidos por procesos en los cuales los promedios de cantidades que dependen de la función de distribución de probabilidad en cada evento son pequeños en comparación con sus valores característicos. El tiempo de relajación de tales procesos es muy largo en comparación con los tiempos de eventos individuales, los que constituyen el mecanismo microscópico estudiado; en este sentido, este tipo de procesos son llamados *procesos lentos* [Lifshitz, E. and Pitaevskii, L., 1999].

Para encontrar la ecuación de transporte de momentos, una instancia típica es el problema de la relajación del momentum de una pequeña mezcla de un gas pesado en el seno de uno ligero, estando este último en equilibrio termodinámico. Debido a la baja concentración de las partículas pesadas, sus colisiones con las otras partículas pueden ser ignoradas, y solo se considerarán las del gas ligero. No obstante cuando las partículas pesadas colisionan con las ligeras, un cambio pequeño en su momentum tiene lugar. Se procederá a obtener la ecuación de transporte de momentos, satisfecha por la función

$$f(\mathbf{p}, t) \quad (10.2.1)$$

que representa la FDP de los vectores momentum de cada partícula pesada en un determinado instante de tiempo. Se define igualmente la función:

$$w(p, q) d^3q \quad (10.2.2)$$

que denota la probabilidad por unidad de tiempo de que una partícula pesada cambie de momentum $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \mathbf{q}$ en una colisión con una partícula ligera.

Se define a continuación la ecuación de transporte en el espacio de momentum para $f(\mathbf{p}, t)$:

$$\frac{\partial f(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \int \{w(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p} + \mathbf{q}) - w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p})\} d^3q. \quad (10.2.3)$$

Para entender mejor la igualdad anterior es útil multiplicar a ambos lados por $d^3\mathbf{p}$:

$$\frac{\partial f(\mathbf{p}, t)}{\partial t} d^3\mathbf{p} = \int \{w(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p} + \mathbf{q}) - w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p})\} d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p}, \quad (10.2.4)$$

donde el número total de partículas pesadas cuyo momentum equivale a $\mathbf{p} \pm d\mathbf{p}$, el cual reside en un cubo diferencial de lado $d^3\mathbf{p}$ centrado en \mathbf{p} (correspondiente a la parte izquierda de la igualdad), es equivalente a la diferencia entre el número de partículas que entran desde

10. Ecuaciones de transporte de momentos

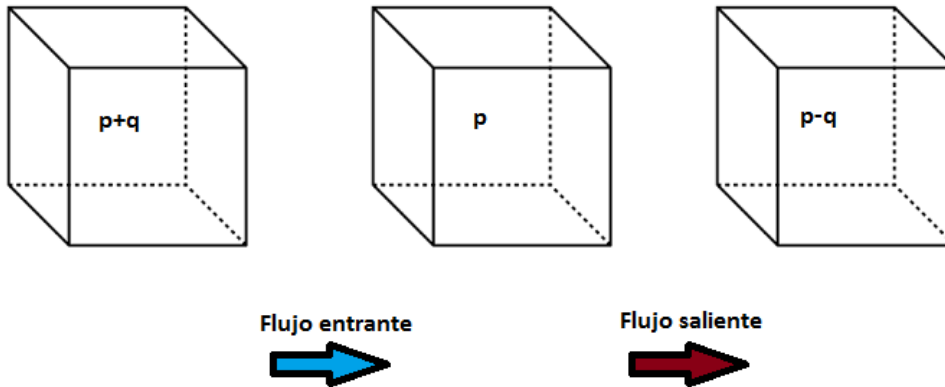


Figura 10.1. Volúmenes diferenciales en el espacio de configuraciones. Los tres cubos tienen lado dp

otro volumen diferencial con momentum $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ y el número de partículas que salen hacia un volumen diferencial $\mathbf{p} - \mathbf{q}$. Se puede visualizar esta interacción en la Fig. [10.1]

Es importante recalcar que el momentum \mathbf{q} es la variable de integración del lado derecho de la igualdad, razón por la que se tiene en cuenta tanto el valor mayor como el menor a \mathbf{p} , y así incluir todas los posibles valores de momentum dentro del espacio de configuraciones, es decir toda la información de momentum de las partículas pesadas en un instante de tiempo determinado.

Aplicando la hipótesis de *proceso lento*, la función $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ decrece rápidamente a medida que \mathbf{q} crece, de forma que los valores de \mathbf{q} que sean pequeños en comparación con los valores promedio del momentum de las partículas, serán los dominantes de la integral. Con esto en mente, el integrando se puede reescribir:

$$\begin{aligned}
 w(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{q}) &\equiv w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p}) \\
 &+ \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p}) \\
 &+ \frac{1}{2} q_\alpha q_\beta \frac{\partial}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p}). \quad (10.2.5)
 \end{aligned}$$

Aplicando la expresión anterior es posible reescribir la Ec.(10.2.3) así:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial t} &= \int_{\mathbf{q}} \left\{ \overline{w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p})} + \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p}) \right\} d^3 \mathbf{q} + \\
 &\int_{\mathbf{q}} \left\{ \frac{1}{2} q_\alpha q_\beta \frac{\partial}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p}) - \overline{w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p})} \right\} d^3 \mathbf{q} \quad (10.2.6)
 \end{aligned}$$

De la anterior expresión se observa que es posible reescribir la Ec.(10.2.3) así:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left\{ A_\alpha f(t, \mathbf{p}) + \frac{\partial}{\partial p_\beta} (B_{\alpha\beta} f(t, \mathbf{p})) \right\}, \quad (10.2.7)$$

donde los términos nuevos se describen a continuación:

$$A_\alpha = \int q_\alpha w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3 q, \quad (10.2.8)$$

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int q_\alpha q_\beta w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3 q. \quad (10.2.9)$$

En el lenguaje de la cinética de gases ideales, el término A_α se conoce como término de arrastre, mientras que el término $B_{\alpha\beta}$ se le llama término de difusión [Jacobs, K., 2010; Lifshitz, E. and Pitaevskii, L., 1999]. La Ec.(10.2.3) se puede expresar a partir de estas definiciones así:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left\{ A_\alpha f + \frac{\partial}{\partial p_\beta} (B_{\alpha\beta} f) \right\}, \quad (10.2.10)$$

donde es posible identificar esta ecuación con la divergencia de $f(t, \mathbf{p})$ en el espacio de configuraciones:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial S_\alpha}{\partial p_\alpha} = 0, \quad (10.2.11)$$

definiendo S_α como la densidad del flujo de partículas en el espacio de momentum.

A partir de aquí debemos hacer ajustes al sistema físico descrito para poder adaptar la teoría cinética descrita al marco de aplicabilidad cosmológica que estamos buscando.

- El término de difusión para nuestra aplicación cosmológica es cero porque optamos por analizar mecanismos inflacionarios compuestos por uno o mas campos escalares debilmente interactuantes entre si [Mulryne, D. et al., 2010].
- El término de arrastre o de deriva caracteriza las posibles interacciones de cada campo consigo mismo, generando en conjunto un efecto de suma entre los campos involucrados. Este efecto acumulativo es el que permite a los modelos de n -campos mantener el periodo inflacionario, evitando que los efectos de un campo sean contrarrestados por el de otro campo.

De este modo es posible que la ecuación de transporte, descrita anteriormente, pueda reescribirse de forma independiente del sistema debilmente interactuante del ejemplo anterior, permitiendo aplicar la ecuación diferencial a cualquier FDP, no exclusivamente a una distribución de probabilidad de momentum de partículas, de la siguiente forma:

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (A(\mathbf{x}, t)P(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B(\mathbf{x}, t)P(\mathbf{x}, t)), \quad (10.2.12)$$

Manteniendo las notación de la referencia [Jacobs, K., 2010], para el que la variable \mathbf{x} es estocástica y haciendo igual a cero el término de difusión $B(x, t)$, la ecuación anterior toma la forma:

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (A(\mathbf{x}, t)P(\mathbf{x}, t)). \quad (10.2.13)$$

10. Ecuaciones de transporte de momentos

La ecuación anterior tiene la misma forma funcional de la ecuación para la conservación de la carga eléctrica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad (10.2.14)$$

o en mecánica de fluidos que es una ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (10.2.15)$$

donde $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ representa la velocidad del fluido. De manera análoga, es fácil ver que la Ec.(10.2.13) reproduce la forma de las ecuaciones de conservación mostradas, pero conservando la función de distribución de probabilidad $P(\mathbf{x}, t)$, rebautizada de $f(\mathbf{p}, t)$ del caso de cinética física.

Es importante hacer notar que la Ec.(10.2.12) se conoce como ecuación de Fokker-Planck [Jacobs, K., 2010; Huang, K., 2001], ecuación que se utiliza incluyendo el término con la segunda derivada, de manera recurrente, para modelamiento de reacciones químicas en las que ocurren simultáneamente reacciones y difusiones.

10.3. Ecuación de transporte de momentos para un campo escalar

Para todo sistema físico la función de distribución de probabilidad que gobierna los valores promedio medibles cumple:

$$\mathbf{P}(\varphi) \geq 0, \quad (10.3.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\varphi) d\varphi = 1. \quad (10.3.2)$$

Como se mostró en líneas atrás, la probabilidad \mathbf{P} es una cantidad conservada, por lo que debe tener una ecuación de continuidad asociada. A continuación se reescribe la Ec.(10.2.13) de manera análoga a la Ec.(10.2.15):

$$\frac{\partial P(\varphi)}{\partial N} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (u(\varphi)P(\varphi)) = 0. \quad (10.3.3)$$

Se deben tener en cuenta las siguientes aclaraciones respecto la anterior ecuación de transporte:

- El parámetro temporal de la Ec.(10.2.13) ha sido reemplazado por N ya que, para la época inflacionaria primordial, es una cantidad física mucho mas conveniente.
- La divergencia de la ecuación de conservación de masa se reparametriza a través del campo escalar φ que permea el espaciotiempo en la época inflacionaria [Mulryne, D. *et al.*, 2010, 2011; Anderson, G. *et al.*, 2012; Dias, M. *et al.*, 2012].

10.3. Ecuación de transporte de momentos para un campo escalar

- Como se observa en la ecuación de continuidad para mecánica de fluidos mostrada en la Ec.(10.2.15), el término con divergencia se aplica a la densidad multiplicada por un factor que representa el campo de velocidades del fluido $u(\varphi)$ para el caso de un campo escalar como motor de inflación.
- De manera análoga en la ecuación de transporte para la densidad de probabilidad se utilizará $u(\varphi)$ para rastrear la variación en el tiempo del centroide de la función de distribución de probabilidad Φ_i .

El campo de velocidades $u(\varphi)$ se obtiene de aplicar condiciones de slow-roll extendidas² a las ecuaciones de movimiento del campo estudiado. De la definición de parámetro de Slow-Roll ϵ [Lyth D. & Liddle A., 2009; Lyth, 1999; Weinberg, S. , 2008; Liddle A. *et al.*, 1992] se tiene que:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (10.3.4)$$

y en términos del potencial generador de inflación:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad (10.3.5)$$

de modo que puede ser reescrito:

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{1}{2m_p^2} \left(\frac{\dot{\varphi}(\vec{x}, t)^2}{H^2(\vec{x}, t)} \right), \\ \dot{\varphi}(\vec{x}, t) &= \sqrt{2m_p^2 \epsilon H^2(\vec{x}, t)}, \end{aligned} \quad (10.3.6)$$

de aquí que la derivada del potencial con respecto al tiempo sea reescrita así:

$$\dot{\varphi}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (10.3.7)$$

y de la relación $H = \partial N / \partial t$ ³ la derivada anterior puede expresarse así:

$$\frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial N} = m_p^2 \frac{V'}{V} = m_p^2 \frac{\partial(\ln V)}{\partial \varphi}, \quad (10.3.8)$$

de donde surge la definición:

$$u(\varphi) \equiv m_p^2 \frac{\partial(\ln V)}{\partial \varphi}, \quad (10.3.9)$$

que se define como el campo de velocidades, el cual se utiliza para rastrear la variabilidad del valor medio de la FDP φ_0 que varía temporalmente, razón por la cual la FDP depende implícitamente del tiempo y evoluciona con el número de e-folds. Expandiendo $u(\varphi)$ centrado en φ_0 se logra:

$$u(\varphi) = u_0 + u_\varphi(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} u_{\varphi\varphi}(\varphi - \varphi_0)^2 + \dots \quad (10.3.10)$$

²Ver sección 8 dedicada al tema

³Definida en las refs. [Lyth D. & Liddle A., 2009; Linde, A. , 1984]

10. Ecuaciones de transporte de momentos

donde los subíndices de cada término representan las derivadas de orden cero, primer y segundo orden con respecto al campo φ .

Es momento de aplicar la ecuación de transporte de momentos mostrada en la Ec.(10.3.3). Utilizando la FDP casi-gaussiana mostrada en la Ec.(10.1.2) y la definición del campo de velocidades de la Ec.(10.3.9) es posible obtener el conjunto de ecuaciones de evolución de los momentos de la distribución casi-gaussiana ⁴:

$$\frac{d\varphi_0}{dN} = u_0 + \frac{1}{2}u_{\varphi\varphi}\sigma^2, \quad (10.3.11)$$

$$\frac{d\sigma^2}{dN} = 2u_{\varphi}\sigma^2 + u_{\varphi\varphi}\alpha, \quad (10.3.12)$$

$$\frac{d\alpha}{dN} = 3u_{\varphi}\alpha + 3u_{\varphi\varphi}\sigma^4. \quad (10.3.13)$$

Hay que hacer un alto para analizar las tres ecuaciones diferenciales anteriores. Cuando la metodología habla de transportar la evolución temporal desde las derivadas del monto de expansión hacia las funciones de correlación de las perturbaciones de los campos, se refiere explícitamente a estas tres ecuaciones, que si bien son derivadas respecto al monto de expansión, es conocido que N es la medida temporal de mas conveniencia durante el periodo inflacionario.

Por otra parte las variables que se hacen evolucionar temporalmente son precisamente los momentos de la FDP casi-gaussiana estudiada previamente. Estas tres cantidades codifican la forma como la distribución de probabilidad va a moldear los valores promedio de los correladores de dos y tres puntos⁵, y mediante los cuales es posible obtener cantidades comparables con las medidas observacionales.

10.4. Ecuaciones de transporte de la momentos para dos campos escalares

Extendiendo la aplicabilidad de la Ec.(10.3.3) para el caso de dos campos escalares:

$$\frac{\partial P(\varphi_i)}{\partial N} + \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (u(\varphi_j)P(\varphi_j)) = 0, \quad (10.4.1)$$

y de igual forma haciendo la extensión del campo de velocidades $u(\varphi)$ al caso de dos campos [Mulryne, D. et al. \[2010\]](#) se obtiene:

$$u_i(\varphi_j) = u_{i0} + u_{ij}(\varphi_j - \Phi_j) + \frac{1}{2}u_{ijk}(\varphi_j - \Phi_j)(\varphi_k - \Phi_k) + \dots, \quad (10.4.2)$$

⁴Los detalles de cálculo para obtener las ecuaciones de evolución de los momentos de la distribución, se muestran en el apéndice [B].

⁵El cálculo numérico presentado en la sección 11 permite comparar el método se realiza para un conjunto de dos campos generando inflación primordial

10.4. Ecuaciones de transporte de la momentos para dos campos escalares

donde el subíndice j corre entre uno y dos para el modelo de dos campos y los coeficientes del campo de velocidad se muestran a continuación:

$$u_{i0} \equiv u_i|_{\Phi_i}, \quad u_{ij} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial \varphi_j} \Big|_{\Phi_i}, \quad u_{ijk} \equiv \frac{\partial^2 u_i}{\partial \varphi_j \partial \varphi_k} \Big|_{\Phi_i}. \quad (10.4.3)$$

Se puede notar que la expansión del campo de velocidades ocurre de manera independiente para el centroide Φ_i de cada campo escalar, y que la FDP evoluciona temporalmente, lo que requiere que se haga un rastreo de la evolución de los momentos de la distribución estudiada.

Por otra parte, el campo de velocidades puede expandirse a cualquier orden, sin embargo se trunca la serie hasta segundo orden por la relación de dominancia-subdominancia entre los términos de orden mayor o igual a tres y los mostrados en la Ec.(10.4.3).

Las definiciones de funciones de correlación de dos y tres puntos se muestran a continuación:

$$\langle (\varphi_i - \Phi_i)(\varphi_j - \Phi_j) \rangle = \Sigma_{ij}. \quad (10.4.4)$$

$$\langle (\varphi_i - \Phi_i)(\varphi_j - \Phi_j)(\varphi_k - \Phi_k) \rangle = \alpha_{ijk}. \quad (10.4.5)$$

La FDP que gobierna la estadística de ζ para el caso de dos campos escalares se muestra a continuación, siguiendo el mismo esquema metodológico de un campo escalar:

$$P(\varphi_i, N) \equiv P_g(\varphi_i, N)P_{ng}(\varphi_i, N). \quad (10.4.6)$$

donde nuevamente se divide el comportamiento de la función en una parte gaussiana y una no-gaussiana. Extendiendo la FDP gaussiana al caso de dos campos escalares [Abramowitz, M. & Stegun, I. \[1965\]](#) se tiene que:

$$P_g(\varphi_i, N) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\varphi_i - \Phi_i)(\Sigma^{-1})_{ij}(\varphi_j - \Phi_j) \right]. \quad (10.4.7)$$

El término Σ es la matriz de covarianza de ambos campos que se puede ver en la Ec.(C.0.4). Si se intenta reproducir el procedimiento de cálculo de ecuaciones de transporte utilizado para un campo escalar se llegaría a la dificultad que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} H_n[(\varphi_i - \Phi_i)/\sigma] \neq 0, \quad (10.4.8)$$

porque los polinomios no son ortogonales entre si para la variable independiente normalizada $(\varphi_i - \Phi_i)/\sigma$, lo que equivale a utilizar la parte gaussiana de FDP de la Ec.(10.4.7). Esto debido a que ρ de la matriz de covarianza no es cero, asegurando que las varianzas de las distribuciones de probabilidad para los dos campos están correlacionadas. En el apéndice [C] se muestra el cálculo requerido para que la FDP pueda expresarse en términos de dos FDP linealmente independientes:

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{X^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{Y^2}{2} \right), \quad (10.4.9)$$

10. Ecuaciones de transporte de momentos

donde han sido utilizadas como variables independientes las cantidades \mathbf{X} y \mathbf{Y} definidas en (C.0.14) y (C.0.15), permitiendo así proseguir el cálculo de las ecuaciones de transporte de momentos.

Bajo las nuevas medidas gaussianas independientemente definidas, es posible asegurar que los polinomios de Chevishev-Hermite cumplirán la necesaria condición de ortogonalidad que permitirán calcular las ecuaciones de transporte de momentos buscadas. Se brinda a continuación la definición de la FDP no-gaussiana [Mulryne, D. et al. \[2010\]](#), dependiente de las nuevas variables \mathbf{X} y \mathbf{Y} :

$$P_{ng} \equiv 1 + \frac{\alpha_{XXX}}{6} H_3(X) + \frac{\alpha_{XXY}}{2} H_2(X) H_1(Y) + \frac{\alpha_{XYX}}{2} H_1(X) H_2(Y) + \frac{\alpha_{YYY}}{6} H_3(Y) \quad (10.4.10)$$

Se puede observar que los factores dependientes del skewness α_{XXX} y α_{YYY} tiene exactamente la misma forma funcional de la FDP no-gaussiana para el caso de un campo escalar, como se muestra en la Ec.(10.1.2), no obstante aparecen dos términos que tienen productos $H_i H_j$ por la existencia del segundo campo, que son necesarios para mantener la no-gaussianidad codificada en el tercer momento de la FDP propuesta [Mulryne, D. et al. \[2010\]](#). Notese que las cantidades α_{XXX} , α_{XXY} , α_{XYX} y α_{YYY} representan al correlador de 3 puntos dependiente de las nuevas variables independientes \mathbf{X} y \mathbf{Y} . La relación entre los correladores para las variables (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) en términos de los correladores de los campos (φ_1, φ_2) se muestra a continuación [Mulryne, D. et al. \[2010\]](#):

$$\alpha_{XXX} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1+\rho)^{3/2}} \left(\frac{\alpha_{111}}{\sigma_1^3} + 3 \frac{\alpha_{112}}{\sigma_1^2 \sigma_2} + 3 \frac{\alpha_{122}}{\sigma_1 \sigma_2^2} + \frac{\alpha_{222}}{\sigma_2^3} \right), \quad (10.4.11)$$

$$\alpha_{XXY} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-\rho)(1+\rho)} \left(\frac{\alpha_{111}}{\sigma_1^3} + \frac{\alpha_{112}}{\sigma_1^2 \sigma_2} - \frac{\alpha_{122}}{\sigma_1 \sigma_2^2} - \frac{\alpha_{222}}{\sigma_2^3} \right), \quad (10.4.12)$$

$$\alpha_{XYX} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1+\rho)(1-\rho)} \left(\frac{\alpha_{111}}{\sigma_1^3} - \frac{\alpha_{112}}{\sigma_1^2 \sigma_2} - \frac{\alpha_{122}}{\sigma_1 \sigma_2^2} + \frac{\alpha_{222}}{\sigma_2^3} \right), \quad (10.4.13)$$

$$\alpha_{YYY} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-\rho)^{3/2}} \left(\frac{\alpha_{111}}{\sigma_1^3} - 3 \frac{\alpha_{112}}{\sigma_1^2 \sigma_2} + 3 \frac{\alpha_{122}}{\sigma_1 \sigma_2^2} - \frac{\alpha_{222}}{\sigma_2^3} \right). \quad (10.4.14)$$

Reemplazando en la ecuaciones de continuidad de la FDP para el caso de dos campos de la Ec.(10.4.1) la definición de P_g de la Ec.(10.4.9) y P_{ng} de la Ec.(10.4.10), así como las condiciones de slow-roll extendidas descritas en la sección 8, es posible obtener el siguiente conjunto de ecuaciones de transporte de momentos:

$$\frac{d\Phi_i}{dN} = u_{i0} + \frac{1}{2} \Sigma_{jk} u_{ijk}, \quad (10.4.15)$$

$$\frac{d\Sigma_{ij}}{dN} = u_{ik} \Sigma_{kj} + u_{jk} \Sigma_{ki} + \frac{1}{2} (\alpha_{imn} u_{jmn} + \alpha_{jmn} u_{imn}), \quad (10.4.16)$$

$$\frac{d\alpha_{ijk}}{dN} = u_{in} \alpha_{njk} + \Sigma_{jm} u_{imn} \Sigma_{nk} + \text{permutaciones cíclicas } i \rightarrow j \rightarrow k, \quad (10.4.17)$$

donde Φ_i significa el valor central de los campos φ_i . Como puede observarse, el conjunto de ecuaciones muestra la evolución temporal, a través del monto de expansión N , de los

10.4. Ecuaciones de transporte de la momentos para dos campos escalares

primeros tres momentos ($\Phi_i - \Sigma_{ij} - \alpha_{ijk}$) de la función de distribución de probabilidad. La idea original de transportar el problema de la evolución temporal de las derivadas de N a las funciones de correlación de las perturbaciones de los campos se ha cumplido. En la siguiente sección se realizará un cálculo numérico que permitirá poner a prueba la metodología.

11

Implementación numérica

Resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE's) de primer orden no lineales presentadas en las Eqs.(10.4.15),(10.4.16) y (10.4.17) será un paso imperativo para realizar el cálculo del nivel de no-gaussianidad f_{NL} del modelo inflacionario estudiado, siguiendo la definición presentada en la Eq.(6.0.11). El conjunto de ecuaciones de transporte de momentos, derivadas de la conservación de la probabilidad, puede ser solucionado numéricamente para cada modelo inflacionario.

La implementación numérica de las ecuaciones de transporte de momentos se realizará a partir del modelo de *potencial escalar cuadrático de dos componentes*, analizado bajo otra metodología en la ref.[Vernizzi *et al.*, 2006]. Para el modelo mencionado, se define el potencial inflacionario de la siguiente manera:

$$V(\varphi, \chi) = \frac{1}{2}m_\varphi^2\varphi^2 + \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2. \quad (11.0.1)$$

Empleando las condiciones iniciales que provee la ref.[Dias, M. *et al.*, 2012]:

- $m_\varphi = 9 \times 10^{-5} m_p$,
- $m_\chi = 1 \times 10^{-5} m_p$,
- $\varphi_0 = 8,9 m_p$,
- $\chi_0 = 12,9 m_p$,

e implementando y ejecutando el código utilizando MATLAB como intérprete para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales compuesto por:

- Dos ODE's para el primer momento de la FDP, tal como se observa en la Eq. (10.4.15),
- Tres ODE's para el segundo momento de la FDP, como es observado en la Eq. (10.4.16),
- Cuatro ODE's para el tercer momento de la FDP, a partir de la Eq. (10.4.17),

se posibilita la obtención del parámetro de no-gaussianidad f_{NL} para el modelo estudiado. En las siguientes secciones se describen las condiciones, definiciones y restricciones para que sea posible la puesta a punto del algoritmo para su utilización.

11.1. Correladores Σ_{ij} y α_{ijk}

En este momento es necesario obtener formas explícitas de las funciones de correlación de las perturbaciones de los campos porque las ODE's que se van a solucionar requieren como materia prima las condiciones iniciales de las funciones de correlación de dos y tres puntos para las perturbaciones en los campos. Para ello se muestran las expresiones de las mismas provenientes de la ref. [Seery, D. & Lindsey, J., 2005] para el caso del correlador de dos puntos para $\delta\varphi_i$:

$$\langle \delta\varphi_i \delta\varphi_j \rangle = (2\phi)^3 \delta^{ij} P_{\delta\varphi_i} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad (11.1.1)$$

donde se ha tomado la definición del espectro de la perturbaciones en los campos $P_{\delta\varphi_i}$ de [Rodriguez, Y., 2005; Rodriguez Y. & Lyth D., 2005].

Asumiendo una expansión casi-exponencial y analizando solo modelos con campos escalares ligeros, razón que justifica aproximar la perturbación $\delta\varphi_i$ a un campo sin masa evolucionando en un espaciotiempo no perturbado de-Sitter [Riotto, A & Lyth D., 1999; Lyth D. & Liddle A., 2009], es posible postular que las perturbaciones de los campos, generadas por fluctuaciones de vacío, sean gobernadas por una distribución de probabilidad casi-gaussiana y posean un espectro casi-plano cuya amplitud será:

$$P_{\delta\varphi_i} = \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2, \quad (11.1.2)$$

y reemplazando en la ec.(11.1.1):

$$\langle \delta\varphi_i \delta\varphi_j \rangle = (2\phi)^3 \delta^{ij} \left(\frac{2\phi^2}{k^3} \right) \left(\frac{H}{2\phi} \right)^2 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (11.1.3)$$

El correlador de tres puntos para $\delta\varphi_i$ extraído de [Seery, D. & Lindsey, J., 2005] se muestra a continuación:

$$\langle \delta\varphi_i \delta\varphi_j \delta\varphi_k \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{4\pi^4}{\prod_l k_l^3} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^4 \left\{ \sum_{\sigma} \left(\frac{\dot{\varphi}_i}{2H} \right) \delta_{jk} \right\} M_{123}. \quad (11.1.4)$$

La sumatoria respecto a σ se hace correr para cada campo involucrado en la evolución y la función M_{123} es dependiente de los números de onda k_i :

$$M_{123} = \frac{1}{2} \left[-3 \frac{k_2^2 k_3^2}{\sum_t k_t} - \frac{k_2^2 k_3^2}{\sum_t k_t^2} (k_1 + 2k_3) - \frac{k_1^3}{2} - k_1 * k_2^2 \right], \quad (11.1.5)$$

Ahora recordando que existen dos dominios, el dominio de los modos k_i y el espacio de

configuraciones \mathbf{x} , se muestra a continuación la relación entre ellos:

$$\begin{aligned}
 \langle \delta\varphi_i(\mathbf{x}, t)\delta\varphi_j(\mathbf{x}, t) \rangle &= \int \frac{d^3k}{2\pi^3} \frac{d^3q}{2\pi^3} \langle \delta\varphi_i(\mathbf{k}, t)\delta\varphi_j(\mathbf{q}, t) \rangle \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}), \\
 &= \int \frac{d^3k}{2\pi^3} \frac{d^3q}{2\pi^3} (2\pi)^3 \delta_{ij} \frac{2\pi^2}{k^3} \frac{H^2}{4\pi^2} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}), \\
 &= \int_0^{k_{rel}} \frac{d^3k}{2\pi^3} \delta_{ij} \frac{2\pi^2}{k^3} \frac{H^2}{4\pi^2}, \\
 &= \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \frac{\delta_{ij}}{4\pi} \int_0^{k_{rel}} \frac{k^2}{k^3} \sin\theta d\theta dk, \\
 &= \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \frac{\delta_{ij}}{4\pi} 4\pi \int_0^{k_{rel}} \frac{dk}{k}, \\
 &\approx \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \delta_{ij} \ln k, \\
 &\approx \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \delta_{ij}, \tag{11.1.6}
 \end{aligned}$$

en donde se ha tomado la siguiente igualdad:

$$\int_0^{k_{rel}} \left(\frac{k^2}{a^2 k}\right) dk = \ln k \Big|_0^{k_{rel} \propto \frac{1}{L}} \approx 1, \tag{11.1.7}$$

si se toma como última escala relevante [Lyth D. & Liddle A., 2009; Mukhanov, V. , 2005; Weinberg, S. , 2008] del cálculo de la integral:

$$k_{rel} \propto \frac{1}{L}, \tag{11.1.8}$$

siendo L el horizonte de partículas en la época inflacionaria estudiada. A continuación se

11. Implementación numérica

muestra la forma funcional del correlador de tres puntos:

$$\begin{aligned}
\langle \delta\varphi_i(\mathbf{x}, t)\delta\varphi_j(\mathbf{x}, t)\delta\varphi_k(\mathbf{x}, t) \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3r}{(2\pi)^3} \langle \delta\varphi_i(\mathbf{k}, t)\delta\varphi_j(\mathbf{q}, t)\delta\varphi_k(\mathbf{r}, t) \rangle \\
&\times \exp [(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{x}] \\
&\times (2\pi)^3 \frac{\delta^3\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{r}}{\mathbf{kqr}} \frac{4\pi^4}{m_p^2} \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^4 \\
&\times \sum_{\sigma} \left\{ \frac{\dot{\varphi}_i}{2H_*} \delta_{jk} \right\} M_{123}, \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{4\pi^4}{2(2\pi)^4 m_p^2} \\
&\times \sum_{\sigma} \left\{ \frac{\delta_{jk} \dot{\varphi}_i H_*^3}{k^3 q^3 |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^3} \right\} M_{123} \tag{11.1.9}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{\sigma} \dot{\varphi}_i \delta_{jk}}{2^9 \pi^6 m_p^2} \int \frac{dk}{k^3} \frac{dq}{q^3} \frac{k^2 q^2 \sin \theta \sin \beta}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^3} M_{123}, \tag{11.1.10}$$

$$\approx \frac{H_*^3}{m_p^2} \{ \delta_{jk} \dot{\varphi}_i + \delta_{ij} \dot{\varphi}_k + \delta_{ki} \dot{\varphi}_j \}, \tag{11.1.11}$$

En la siguiente sección se expresarán los dos correladores en ausencia de unidades, para poder ser utilizados explícitamente en el código numérico en MATLAB.

11.2. Adimensionalización de expresiones para solución de ODE's

En esta sección se discute sobre las expresiones y sus dimensiones a la hora de realizar la implementación numérica, pues de esto depende en gran parte el éxito a la hora de obtener resultados. Para todas las cantidades involucradas en el cálculo de f_{NL} , es necesario definir las unidades para que las expresiones sean dimensionalmente consistentes, lo cual solo es posible si las mismas se escriben carentes de dimensiones, lo cual evita que se priven de significado los resultados que se van a obtener de las manipulaciones numéricas.

Se redefine el parámetro de Hubble adimensional \tilde{H} así:

$$\begin{aligned}
[H] = \left[\frac{\dot{a}}{a} \right] &\rightarrow \left[\frac{1}{T} \right] = [E], \\
\tilde{H} \equiv \frac{H}{m_p} &\rightarrow \text{Sin dimensiones}, \tag{11.2.1}
\end{aligned}$$

El potencial inflacionario $V(\varphi_i)$ también debe redefinirse para mantenerse adimensional en

11.2. Adimensionalización de expresiones para solución de ODE's

los cálculos:

$$[V] \equiv \left[\frac{1}{2} m_{\varphi_i}^2 \varphi_i^2 \right] \rightarrow [E^2 E^2],$$

$$\tilde{V} \equiv \frac{V}{m_p^4} = \frac{1}{2} \frac{m_{\varphi}^2 \varphi_2}{m_p^4} + \frac{1}{2} \frac{m_{\chi}^2 \chi^2}{m_p^4} \rightarrow \text{sin dimensiones.} \quad (11.2.2)$$

Las definiciones de los dos campos involucrados en la expansión se deben modificar:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{m_p} \rightarrow \text{sin dimensiones,} \quad (11.2.3)$$

$$\tilde{\chi} = \frac{\chi}{m_p} \rightarrow \text{sin dimensiones.} \quad (11.2.4)$$

De igual forma las masas de los dos campos involucrados en la expansión también se adimensionan:

$$\tilde{m}_{\varphi} = \frac{m_{\varphi}}{m_p} \rightarrow \text{sin dimensiones,} \quad (11.2.5)$$

$$\tilde{m}_{\chi} = \frac{m_{\chi}}{m_p} \rightarrow \text{sin dimensiones.} \quad (11.2.6)$$

El primer momento de la FDP se modifica así:

$$[\Phi_i] \rightarrow [E],$$

$$\tilde{\Phi}_i = \frac{\Phi_i}{m_p} \rightarrow \text{sin dimensiones.} \quad (11.2.7)$$

El segundo momento de la FDP se adimensiona dividiendo en el cuadrado de la masa reducida de Planck:

$$\Sigma_{ij} \equiv \langle (\varphi_i - \Phi_i)(\varphi_j - \Phi_j) \rangle,$$

$$[\Sigma_{ij}] \rightarrow [E^2],$$

$$\tilde{\Sigma}_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{m_p^2} \rightarrow \text{sin dimensiones.} \quad (11.2.8)$$

El tercer momento de la FDP se adimensiona dividiendo en el cubo de la masa reducida de Planck:

$$\alpha_{ijk} \equiv \langle (\varphi_i - \Phi_i)(\varphi_j - \Phi_j)(\varphi_k - \Phi_k) \rangle,$$

$$[\alpha_{ijk}] \rightarrow [E^3],$$

$$\tilde{\alpha}_{ijk} = \frac{\alpha_{ijk}}{m_p^3} \rightarrow \text{sin dimensiones,} \quad (11.2.9)$$

$$(11.2.10)$$

11. Implementación numérica

Los coeficientes del campo de velocidades $U_i(\varphi_j)$ también deben alterarse:

$$\begin{aligned} [u_i(\varphi_i)] &= \left[-m_p^2 \frac{\partial \ln V}{\partial \varphi_i} \Big|_{\Phi_i} \right] \rightarrow \left[\frac{E^2}{E} \right], \\ \tilde{u}_i(\varphi_i) &\equiv \frac{u_i(\varphi_i)}{m_p} \rightarrow \text{sin dimensiones.} \end{aligned} \quad (11.2.11)$$

$$\begin{aligned} [u_{ij}] &= \left[\frac{\partial u_i}{\partial \varphi_j} \right] \rightarrow \left[\frac{E}{E} \right], \\ \tilde{u}_{ij} &\equiv u_{ij} \rightarrow \text{sin dimensiones.} \end{aligned} \quad (11.2.12)$$

$$\begin{aligned} [u_{ijk}] &= \left[\frac{\partial u_i}{\partial \varphi_j \partial \varphi_k} \Big|_{\Phi_i} \right] \rightarrow \left[\frac{1}{E} \right], \\ \tilde{u}_{ijk}(\varphi_i) &\equiv u_{ijk}(\varphi_i) \times m_p \rightarrow \text{sin dimensiones.} \end{aligned} \quad (11.2.13)$$

Esta sección muestra la manera como un conjunto de redefiniciones de cantidades previamente utilizadas, pueden utilizarse en un algoritmo numérico, ya que es fundamental que todas las cantidades que se verán involucradas en el cálculo iterativo a través de Matlab, no incluyan información sobre unidades de medida, solo numérica.

Posterior al cálculo se debe realizar la pertinente *redimensionalización* para que los números provenientes de cualquier sistema de computo sean interpretados como cantidades de relevancia cosmológica, en nuestro caso.

La Ec.(11.1.11) de la anterior sección muestra la forma del correlador de tres puntos para la perturbación en los campos dependiente de productos entre las derivadas de los campos y las perturbaciones de manera explícita. Utilizando la siguiente equivalencia[Riotto, A & Lyth D., 1999], proveniente de las definiciones en el fondo del monto de expansión en términos del parámetro de Hubble:

$$\frac{\dot{\varphi}_i}{H} = m_p \frac{\partial \varphi_i}{\partial N}, \quad (11.2.14)$$

es posible reescribir el correlador α_{ijk} de la siguiente forma:

$$\alpha_{ijk} \equiv \langle \tilde{\delta}\varphi_i(\mathbf{x}) \tilde{\delta}\varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\delta}\varphi_k(\mathbf{x}) \rangle, \quad (11.2.15)$$

$$= \left(\frac{\tilde{H}}{2\pi} \right)^4 \left\{ \delta_{jk} \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial N} + \delta_{ki} \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial N} + \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial N} \right\}, \quad (11.2.16)$$

11.3. Ecuaciones de transporte de momentos para el modelo de *Potencial escalar cuadrático de dos campos*

A continuación se determinarán las expresiones que serán la base del algoritmo numérico requerido para calcular los momentos de la FDP casi-gaussiana que describe la estadística de las perturbaciones en la curvatura invariante de escala ζ .

11.3. Ecuaciones de transporte de momentos para el modelo de Potencial escalar cuadrático de dos campos

El campo de velocidades $u_i(\varphi_j)$ se debe determinar para cada modelo cosmológico bajo la metodología propuesta. Los coeficientes u_{i0} se muestran a continuación:

$$u_{i0} = \frac{\partial \ln V}{\partial \varphi_i},$$

$$u_{10} = \frac{\partial \ln V}{\partial \varphi} = \frac{m_\varphi^2 \varphi}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)}, \quad (11.3.1)$$

$$u_{20} = \frac{\partial \ln V}{\partial \chi} = \frac{m_\chi^2 \chi}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)}. \quad (11.3.2)$$

Las expresiones que representan los coeficientes $u_{ij}(\varphi_j)$ se muestran a continuación:

$$u_{11} = -\frac{m_\varphi^2}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)} + \frac{m_\varphi^4 \varphi^2}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)^2}, \quad (11.3.3)$$

$$u_{12} = \frac{m_\varphi^2 \varphi^2 m_\chi^2 \chi}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)^2}, \quad (11.3.4)$$

$$u_{21} = \frac{m_\varphi^2 \varphi^2 m_\chi^2 \chi}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)^2}, \quad (11.3.5)$$

$$u_{22} = -\frac{m_\chi^2}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)} + \frac{m_\chi^4 \chi^2}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)^2}. \quad (11.3.6)$$

Las expresiones que representan los coeficientes $u_{ijk}(\varphi_j)$ se muestran a continuación:

$$u_{111} = \frac{3m_\varphi^4 \varphi}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)^2} - \frac{2m_\varphi^6 \varphi^3}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)^3}, \quad (11.3.7)$$

$$u_{112} = \frac{m_\chi^2 m_\varphi^2 \chi}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)^2} - \frac{2m_\varphi^4 m_\chi^2 \varphi^2 \chi}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)^3}, \quad (11.3.8)$$

$$u_{121} = u_{121} = u_{211}, \quad (11.3.9)$$

$$u_{122} = \frac{m_\varphi^2 m_\chi^2 \varphi}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)^2} - \frac{2m_\chi^4 m_\varphi^2 \chi^2 \varphi}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)^4}, \quad (11.3.10)$$

$$u_{221} = u_{212} = u_{122}, \quad (11.3.11)$$

$$u_{222} = \frac{3m_\chi^4 \chi}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)^2} - \frac{2m_\chi^6 \chi^3}{\frac{1}{2} (m_\varphi^2 \varphi^2 + m_\chi^2 \chi^2)^3}. \quad (11.3.12)$$

11. Implementación numérica

Ahora es posible reescribir las ecuaciones de transporte de momentos para dos campos escalares obtenidas (10.4.15) (10.4.16) y (10.4.17) que buscan la evolución temporal de los momentos de la FDP, realizando las sustituciones por los términos adimensionales calculados en la sección anterior, incluyendo los correladores Σ_{ij} y α_{ijk} en conjunto con las expresiones para el campo de velocidades¹.

Se muestran las dos ecuaciones resultantes de la ecuación de transporte para el primer momento de la distribución Ec.(10.4.15):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = u_1 + \frac{1}{2}\Sigma_{11}u_{111} + \frac{1}{2}\Sigma_{12}u_{112} + \frac{1}{2}\Sigma_{21}u_{121} + \frac{1}{2}\Sigma_{22}u_{122}. \quad (11.3.13)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial N} = u_2 + \frac{1}{2}\Sigma_{11}u_{211} + \frac{1}{2}\Sigma_{12}u_{212} + \frac{1}{2}\Sigma_{21}u_{221} + \frac{1}{2}\Sigma_{22}u_{222}. \quad (11.3.14)$$

A continuación se muestran las cuatro ecuaciones resultantes de la ecuación de transporte para el segundo momento de la FDP, utilizando para ello la segunda ecuación de transporte de momentos para dos campos mostrada en la Ec.(10.4.16):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_{11}}{\partial N} &= 2u_{11}\Sigma_{11} + u_{12}\Sigma_{12} + u_{21}\Sigma_{21} \\ &+ \alpha_{111}u_{111} + \alpha_{112}u_{112} + \alpha_{121}u_{121} + \alpha_{122}u_{122}. \end{aligned} \quad (11.3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_{12}}{\partial N} &= u_{11}\Sigma_{12} + u_{12}\Sigma_{22} + u_{21}\Sigma_{11} + u_{22}\Sigma_{21} \\ &+ \frac{1}{2}\alpha_{111}u_{211} + \frac{1}{2}\alpha_{112}u_{212} + \frac{1}{2}\alpha_{121}u_{221} + \frac{1}{2}\alpha_{122}u_{222} \\ &+ \frac{1}{2}\alpha_{211}u_{211} + \frac{1}{2}\alpha_{212}u_{212} + \frac{1}{2}\alpha_{221}u_{221} + \frac{1}{2}\alpha_{222}u_{222}. \end{aligned} \quad (11.3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_{21}}{\partial N} &= u_{21}\Sigma_{11} + u_{22}\Sigma_{21} + u_{11}\Sigma_{12} + u_{12}\Sigma_{22} \\ &+ \frac{1}{2}\alpha_{111}u_{211} + \frac{1}{2}\alpha_{112}u_{212} + \frac{1}{2}\alpha_{121}u_{221} + \frac{1}{2}\alpha_{122}u_{222} \\ &+ \frac{1}{2}\alpha_{211}u_{211} + \frac{1}{2}\alpha_{212}u_{212} + \frac{1}{2}\alpha_{221}u_{221} + \frac{1}{2}\alpha_{222}u_{222}. \end{aligned} \quad (11.3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_{22}}{\partial N} &= 2u_{22}\Sigma_{22} + u_{21}\Sigma_{12} + u_{12}\Sigma_{21} \\ &+ \alpha_{211}u_{211} + \alpha_{212}u_{212} + \alpha_{221}u_{221} + \alpha_{222}u_{222}. \end{aligned} \quad (11.3.18)$$

Nótese que dos de las ecuaciones de transporte para el segundo momento de la FDP son equivalentes porque $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$. Se culmina esta sección con la obtención de cuatro ecuaciones de transporte para el tercer momento de la FDP, mostrada previamente en la Ec.(10.4.17) :

¹Se aclara que no se usa el acento por simplicidad en la notación pero si se tienen en cuenta todas las expresiones adimensionalizadas para las ecs. de transporte de momentos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{111}}{\partial N} &= 3u_{11}\alpha_{111} + 3u_{12}\alpha_{211} \\ &+ 3\Sigma_{11}u_{111}\Sigma_{11} + 3\Sigma_{11}u_{112}\Sigma_{21} + 3\Sigma_{12}u_{121}\Sigma_{11} + 3\Sigma_{12}u_{122}\Sigma_{21}. \end{aligned} \quad (11.3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{112}}{\partial N} &= u_{11}\alpha_{112} + u_{12}\alpha_{212} + \Sigma_{11}u_{111}\Sigma_{12} \\ &+ \Sigma_{11}u_{112}\Sigma_{22} + \Sigma_{12}u_{121}\Sigma_{12} + \Sigma_{12}u_{122}\Sigma_{22} \\ &+ u_{11}\alpha_{121} + u_{12}\alpha_{221} + \Sigma_{21}u_{111}\Sigma_{11} + \Sigma_{21}u_{112}\Sigma_{21} + \Sigma_{22}u_{121}\Sigma_{11} + \Sigma_{22}u_{122}\Sigma_{21} \\ &+ u_{21}\alpha_{111} + u_{22}\alpha_{211} + \Sigma_{11}u_{211}\Sigma_{11} + \Sigma_{11}u_{212}\Sigma_{21} + \Sigma_{12}u_{221}\Sigma_{11} + \Sigma_{12}u_{222}\Sigma_{21}. \end{aligned} \quad (11.3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{122}}{\partial N} &= u_{11}\alpha_{122} + u_{12}\alpha_{222} + \Sigma_{21}u_{111}\Sigma_{12} + \Sigma_{21}u_{112}\Sigma_{22} \\ &+ \Sigma_{22}u_{121}\Sigma_{12} + \Sigma_{22}u_{122}\Sigma_{22} \\ &+ u_{21}\alpha_{121} + u_{22}\alpha_{221} + \Sigma_{21}u_{211}\Sigma_{11} + \Sigma_{21}u_{212}\Sigma_{21} + \Sigma_{22}u_{221}\Sigma_{11} + \Sigma_{22}u_{222}\Sigma_{21} \\ &+ u_{21}\alpha_{112} + u_{22}\alpha_{212} + \Sigma_{11}u_{211}\Sigma_{12} + \Sigma_{11}u_{212}\Sigma_{22} + \Sigma_{12}u_{221}\Sigma_{12} + \Sigma_{12}u_{222}\Sigma_{22}. \end{aligned} \quad (11.3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{222}}{\partial N} &= 3u_{21}\alpha_{122} + 3u_{22}\alpha_{222} \\ &+ 3\Sigma_{21}u_{211}\Sigma_{12} + 3\Sigma_{21}u_{212}\Sigma_{22} + 3\Sigma_{22}u_{221}\Sigma_{12} + 3\Sigma_{22}u_{222}\Sigma_{22}. \end{aligned} \quad (11.3.22)$$

Se pudo verificar en los cálculos realizados que las ecuaciones de transporte de momentos cumplen la misma simetría de subíndices[Mulryne, D. *et al.*, 2010], en relación a los correladores de dos y tres puntos:

- $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$,
- $\alpha_{121} = \alpha_{211} = \alpha_{112}$,
- $\alpha_{221} = \alpha_{212} = \alpha_{122}$.

Las anteriores igualdades entre momentos de la FDP no-gaussiana estudiada radican en que los cálculos realizados en el actual trabajo de investigación fueron realizados sobre campos estocásticos en el régimen clásico, es decir en escalas de superhorizonte[Rodriguez Y. & Lyth D., 2005; Weinberg, S., 2008; Rodriguez, Y., 2005; Valenzuela-Toledo *et al.*, 2011].

11.4. Obtención del nivel de no-gaussianidad f_{NL}

La evolución de cada función de correlación se calcula a partir del código implementado en MATLAB para tal fin². El código inicia definiendo las condiciones iniciales para los correladores de dos y tres puntos así como los valores de las masas de los campos, además de los

²Para mas detalles se muestra el código implementado en el apéndice [D]

11. Implementación numérica

valores iniciales de los campos. Posteriormente se utiliza el comando *ODE113* de MATLAB para resolver las nueve ecuaciones de transporte de momentos. Se elige ese algoritmo porque de todos los que ofrece MATLAB para resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales ordinarias, la respuesta obtenida era la que mas se acercaba a los resultados previamente obtenidos por los autores de la metodología, guía del actual trabajo de grado [Mulryne, D. *et al.*, 2010, 2011; Anderson, G. *et al.*, 2012; Dias, M. *et al.*, 2012].

Reemplazando las funciones de correlación para las perturbaciones de los campos, cuya equivalencia con los tres momentos obtenidos se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \langle \delta\varphi(\mathbf{x}, t) \rangle & \Phi_2 &= \langle \delta\chi(\mathbf{x}, t) \rangle \\
 \Sigma_{11} &= \langle \delta\varphi(\mathbf{x}, t)\delta\varphi(\mathbf{x}, t) \rangle & \Sigma_{12} &= \langle \delta\varphi(\mathbf{x}, t)\delta\chi(\mathbf{x}, t) \rangle \\
 \Sigma_{22} &= \langle \delta\chi(\mathbf{x}, t)\delta\chi(\mathbf{x}, t) \rangle & \alpha_{111} &= \langle \delta\varphi(\mathbf{x}, t)\delta\varphi(\mathbf{x}, t)\delta\varphi(\mathbf{x}, t) \rangle, \\
 \alpha_{112} &= \langle \delta\varphi(\mathbf{x}, t)\delta\varphi(\mathbf{x}, t)\delta\chi(\mathbf{x}, t) \rangle & \alpha_{122} &= \langle \delta\varphi(\mathbf{x}, t)\delta\chi(\mathbf{x}, t)\delta\chi(\mathbf{x}, t) \rangle, \\
 \alpha_{222} &= \langle \delta\chi(\mathbf{x}, t)\delta\chi(\mathbf{x}, t)\delta\chi(\mathbf{x}, t) \rangle
 \end{aligned} \tag{11.4.1}$$

en las expresiones para el cálculo de las derivadas del monto de expansión N_i y N_{ij} se posibilita su cálculo, objetivo de la investigación actual.

A continuación se hace una descripción clara del proceso posterior a la obtención de los momentos de la distribución estudiada:

- Con los tres momentos de la FDP. se procede a realizar el cálculo de las derivadas de N , cuyas formas explícitas se muestran en las Ecs.(9.2.18,9.2.19,9.2.20,9.2.21,9.2.22).
- Obtenidas las derivadas de N se procede a calcular los correladores de dos y tres puntos de la perturbación en la curvatura invariante de gauge, cuyas expresiones son las Ecs.(6.0.7) y (6.0.10).
- Con el conocimiento previo de los correladores $\langle \zeta\zeta \rangle$ y $\langle \zeta\zeta\zeta \rangle$ en la época inflacionaria que se intente caracterizar, se puede calcular la función f_{NL} directamente de la expresión (6.0.11).

De esta manera es posible contrastar los resultados obtenidos con los que se aceptan por parte de la comunidad científica y de este modo avalar o descartar la novedosa propuesta de estandarización.

El resultado mostrado en la Fig.11.1 muestra la evolución del parámetro f_{NL} para el mecanismo inflacionario seleccionado. La no-gaussianidad en este modelo exhibe un pico alrededor de $N \approx 75$, sin embargo sigue siendo suficientemente pequeño y no logra ser observable[Ade *et al.*, 2015a].

La figura [11.2] muestra el parámetro de slow-roll ϵ evolucionando con la expansión. Se observa claramente el comportamiento $\epsilon \gg 1$ generando salida de inflación para un monto de expansión mayor a 62 e-folds.

En la figura[11.3] se puede visualizar la evolución temporal de la amplitud de los campos φ y χ . Se puede observar que la amplitud de ambos campos decrece a cero en el momento de salida de inflación, es decir, cuando el parámetro de slow-roll $\epsilon \gg 1$.

11.4. Obtención del nivel de no-gaussianidad f_{NL}

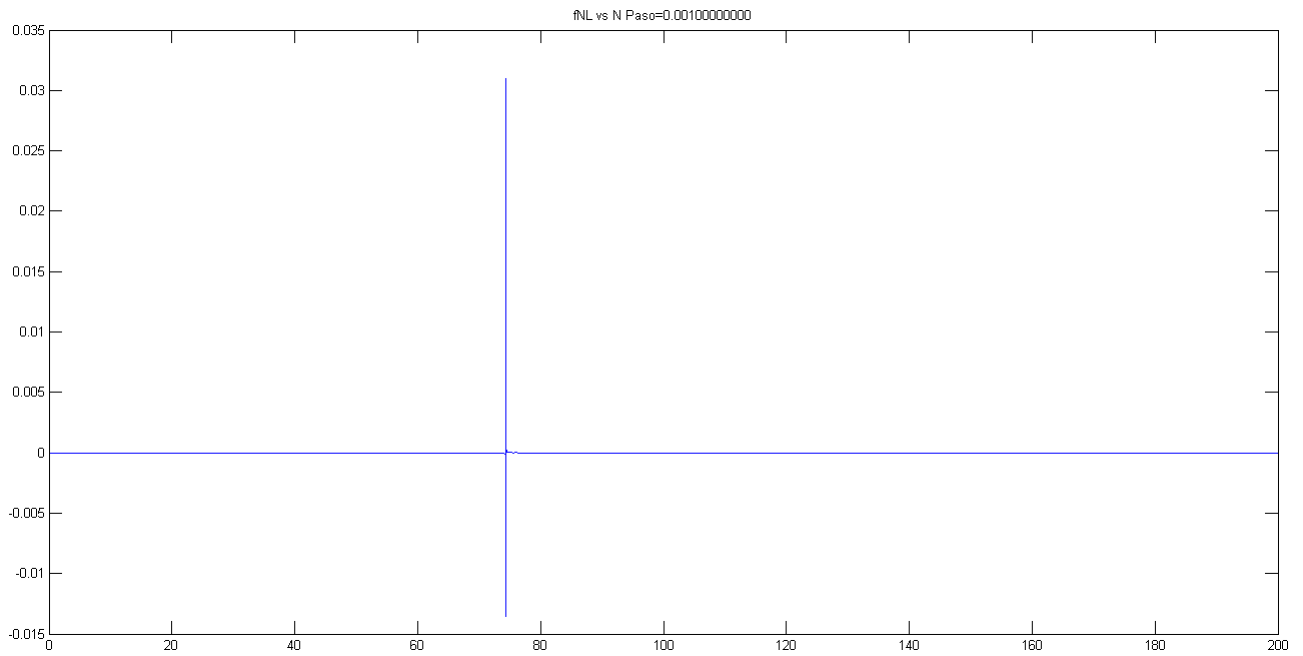


Figura 11.1. Evolución del nivel de no-gaussianidad primordial para el modelo de dos campos de la Ec.(11.0.1). Gráfica obtenida del código desarrollado en MATLAB.

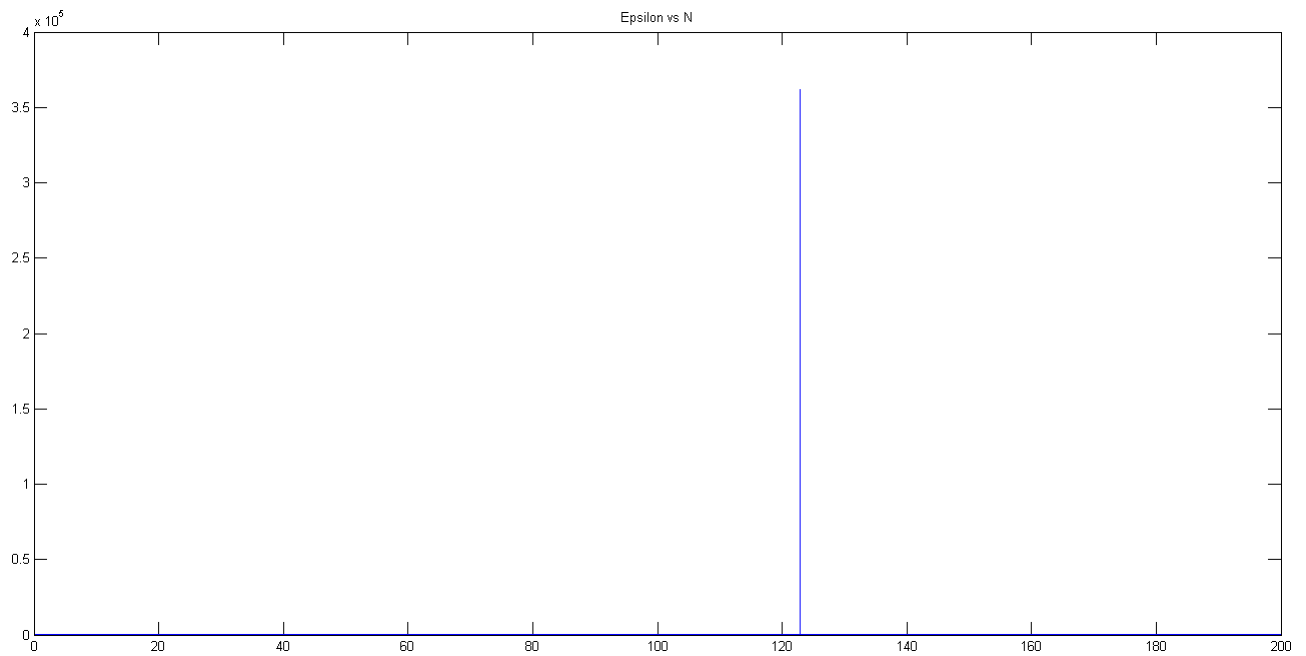


Figura 11.2. Parámetro de Slow-Roll ϵ en función del número de e-folds

11. Implementación numérica

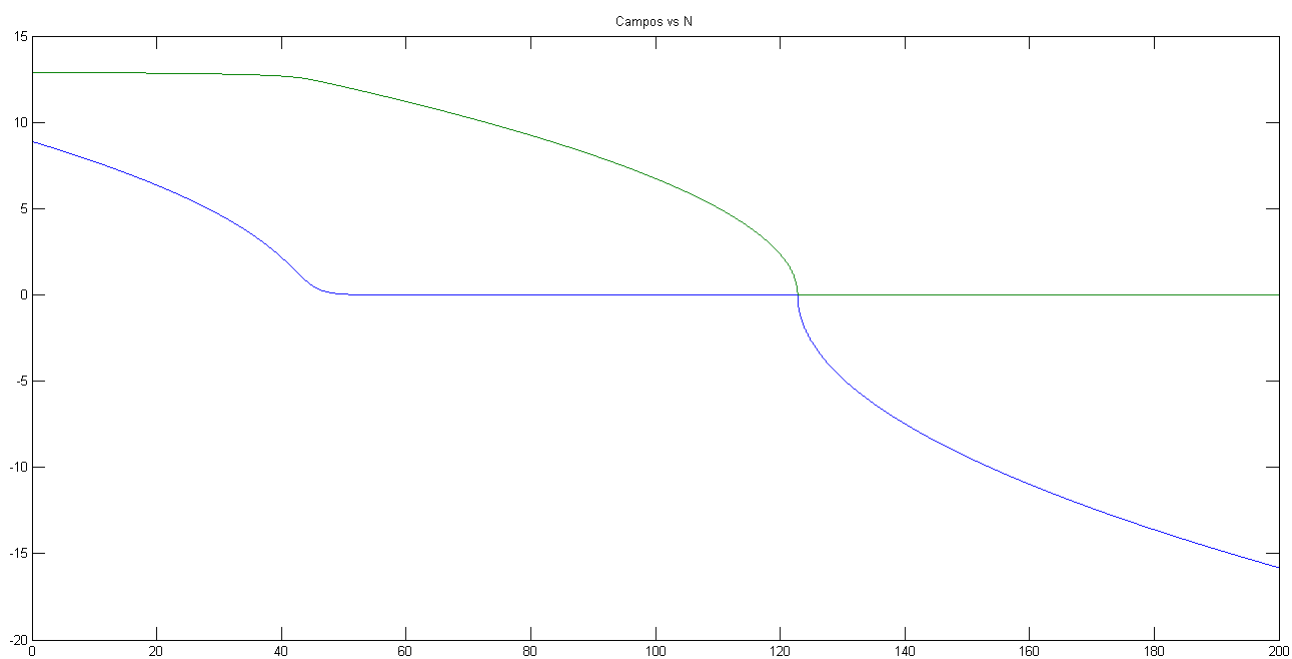


Figura 11.3. Evolución de los campos involucrados durante inflación primordial: φ y χ respecto al número de e-folds

Conclusiones

La idea de transportar el problema de la evolución temporal de las derivadas del monto de expansión N hacia las funciones de correlación para las perturbaciones de los campos es la base fundamental de la metodología de las ecuaciones de transporte de momentos.

¿Por qué es necesario e importante?: debido a que no existe un procedimiento estandarizado de cálculo analítico para las derivadas de N para modelos cosmológicos generalizados.

El parámetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ con independencia espacial busca explicar las observaciones propuestas por Hubble [Hubble, \[1929\]](#) sobre la recesión de las galaxias desde nuestro punto de vista, es decir desde los observadores en tierra. Con ese fin se pasa de la definición $H(t) \rightarrow H(\vec{x}, t)$, esto sin mencionar las convenientes modificaciones a las ecuaciones de campo y demás expresiones de relevancia cosmológica que en este trabajo fueron utilizadas.

Las condiciones de Slow-Roll extendidas parten de la definición de parámetro de Hubble local, el cual es una generalización del parámetro de Hubble en el fondo, implican que los términos con perturbaciones, incluyendo sus derivadas, deben ser subdominantes en comparación con los valores en el fondo no perturbado. Este hecho es algo que puede considerarse evidente para las cantidades sin operador derivada, pero debe imponerse de manera artificial para los términos con operador punto y doble punto, tal como se definió en la sección [3].

La metodología estudiada tiene un procedimiento bien definido:

Seleccionar el modelo escalar inflacionario.

Imponer las condiciones de Slow-Roll extendidas, descritas en el capítulo 8.

Emplear la Eq.(7.1.7) para obtener la evolución de los campos escalares.

11. Implementación numérica

Usar las ecuaciones de transporte de momentos, Eqs.(10.4.15-10.4.17), para obtener la evolución de las funciones de correlación de las perturbaciones en los campos, iniciando los cálculos con condiciones iniciales conocidas, es decir, definiendo previamente los valores de Φ_i , Σ_{ij} y α_{ijk} a la salida de horizonte lo cual ya ha sido reportado en las Refs. [Mukhanov, V. , 2005; Valenzuela-Toledo *et al.*, 2011; Seery, D. & Lindsey, J., 2005].

Calcular las derivadas de N usando las Ecs.(9.2.18,9.2.19,9.2.20,9.2.21 y 9.2.22)

Obtener los correladores $\langle \zeta \zeta \rangle$ y $\langle \zeta \zeta \zeta \rangle$ por medio de las Ecs. (6.0.7) y (6.0.10).

Calcular el nivel de no-gaussianidad del modelo inflacionario, empleando la Eq.(6.0.11).

El algoritmo previamente descrito sólo puede ser aplicado bajo la consigna de mantener *las condiciones de slow-roll extendidas* para el modelo cosmológico de interés. No cumplir las condiciones antes mencionadas, conduciría a resultados que van mas allá del régimen de aplicabilidad de la metodología empleada (como ejemplo se pueden ver las diferencias entre las Refs. [Cogollo, 2008; Byrnes, C. *et al.*, 2009]).

Para el modelo cosmológico inflacionario estudiado en la Ref. [Mulryne, D. *et al.*, 2010], la evolución del parámetro f_{NL} (ver Fig. [11.1]) está en concordancia con el formalismo δN como se puede discernir de las Refs. [Mulryne, D. *et al.*, 2010; Vernizzi *et al.*, 2006]. La no-gaussianidad resultante es muy pequeña, lo cual está de acuerdo con los expectativas teóricas [Seery, D. & Lindsey, J., 2005; Maldacena, J. , 2003] y con los últimos resultados del observatorio de CMB en órbita, el satélite Planck [Ade *et al.*, 2015a].

El código implementado en MATLAB utiliza las librerías del lenguaje y aprovecha las técnicas de optimización para resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que permitieron dedicar mas tiempo a la física detrás de los cálculos, buscando avalar o rechazar la actual metodología de estandarización.

Si bien se habla bastante por todo el cuerpo del trabajo de estandarización de cálculo de las derivadas de N , no para todos los modelos va a ser más sencillo obtenerlas a través de las ecuaciones de transporte de momentos, lo claro es que siempre se mantendrá el procedimiento dentro de los modelos con campos escalares involucrados.

Trabajo futuro

Se propone como futuro trabajo extender las ecuaciones de transporte de momentos a modelos cosmológicos en los que los n -campos escalares involucrados sean interactuantes entre

sí, lo cual requiere modificaciones a la metodología descrita, ya que las ecuaciones de transporte de momentos provienen de la conservación de la densidad de probabilidad en baños térmicos debilmente interactuantes entre si, lo cual exigirá que el término de difusión posiblemente haga parte integral en esa versión de la metodología de transporte de momentos.

Por otra parte, extender la metodología actual a campos vectoriales permitiría que muchos mas modelos inflacionarios pudieran beneficiarse de esta forma de cálculo de observables cosmológicos. Posiblemente las formas funcionales de las ecuaciones de transporte aquí descritas no se modifiquen significativamente, pues la variante posiblemente sería el numero de ecuaciones y el significado de las componentes de las ecuaciones de transporte a la hora de calcular los momentos de la distribución de probabilidad.

Resultados obtenidos

Del trabajo expuesto se realizó una ponencia oral en el Latin American Symposium on High Energy Physics (X SILAFAE) en noviembre de 2014. De ese evento se produjo un artículo para la revista *Nuclear and Particle Physics Proceedings*.

En mayo de 2015 se realizó una ponencia en modalidad poster en la ciudad de Cali en el *Workshop on Current Challenges in Cosmology*

Apéndices

A

Obtención de la densidad de probabilidad casi-gaussiana

En este apartado se buscará la forma de la expansión de la función de distribución de probabilidad (PDF) casi-gaussiana por medio de polinomios de chebishev-Hermite [Pichon, C *et al.*, 2012; Blinnikov, S. & Moessner, R., 1998], utilizada en el cálculo de f_{NL} . De la definición de función generadora de momentos:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{tx} dx = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\langle x^p \rangle}{p!} t^p, \quad (\text{A.0.1})$$

y función generadora de cumulantes:

$$C(t) = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\langle x^p \rangle_c}{p!} t^p. \quad (\text{A.0.2})$$

A partir de la definición anterior se cumple que:

$$M(t) = \exp(C(t)). \quad (\text{A.0.3})$$

Calculando la transformada de Fourier de la expresión anterior:

$$\tilde{P}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{itx} dx. \quad (\text{A.0.4})$$

De ese modo se obtiene:

$$\tilde{P}(t) = M(it) = \exp(C(it)). \quad (\text{A.0.5})$$

de aquí se puede obtener, por medio de la transformada de fourier inversa, la distribución de probabilidad:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \exp\left(\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\langle x^p \rangle_c}{p!} i^p t^p\right) dt. \quad (\text{A.0.6})$$

A. Obtención de la densidad de probabilidad casi-gaussiana

Dado que se busca una expansión casi-gaussiana, se toma de forma explícita en la FDP los términos media $p = 1$ y varianza $p = 2$:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2} \exp\left(\sum_{p=3}^{\infty} \frac{\langle x^p \rangle_c}{p!} i^p t^p\right) dt, \quad (\text{A.0.7})$$

dejando todo lo que tenga información sobre no-gaussianidad en la serie exponencial. Se muestra a continuación que si se calcula la transformada de Fourier inversa a la exponencial anterior con solo dos momentos se obtiene una función Gaussiana pura:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{A.0.8})$$

y de las propiedades de la transformada de fourier que permiten simplificar una derivada como un producto:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2} i^p t^p dt = (-1)^p \frac{d^p}{dx^p} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right). \quad (\text{A.0.9})$$

De este modo es posible expresar la función de distribución así:

$$P(x) = \exp\left(\sum_{p=3}^{\infty} \frac{\langle x^p \rangle_c}{p!} (-1)^p \frac{d^p}{dx^p}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (\text{A.0.10})$$

Expandiendo la parte no-gaussiana mostrada como la función exponencial, se obtiene:

$$P(x) = \left(1 + \left(\sum_{p=3}^{\infty} \frac{\langle x^p \rangle_c}{p!} (-1)^p \frac{d^p}{dx^p}\right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{p=3}^{\infty} \frac{\langle x^p \rangle_c}{p!} (-1)^p \frac{d^p}{dx^p}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\sum_{p=3}^{\infty} \frac{\langle x^p \rangle_c}{p!} (-1)^p \frac{d^p}{dx^p}\right)^3 + \dots\right) G(x), \quad (\text{A.0.11})$$

siendo $G(x) = \exp(-x^2/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ la distribución de probabilidad Gaussiana usual. Por definición [Blinnikov, S. & Moessner, R., 1998; Abramowitz, M. & Stegun, I., 1965] los polinomios de Chebishev-Hermite están relacionados con la función gaussiana $G(x)$ de la siguiente forma:

$$(-1)^k d^k G/dx^k = H_k(x/\sigma)G(x)/\sigma^k, \quad (\text{A.0.12})$$

lo que permite reescribir la expresión en términos de los polinomios de Hermite. La expansión mostrada puede expresarse en términos de los cumulantes cuya expresión se cita a continuación:

$$S_p = \langle x^p \rangle_c / \sigma^{2p-2}. \quad (\text{A.0.13})$$

De este modo la distribución de probabilidad queda descrita en términos de polinomios de Chebishev-Hermite y de cumulantes de orden mayor o igual a 3:

$$P(x) = \left(1 + \sigma \frac{S_3}{6} H_3\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \sigma^2 \left(\frac{S_4}{24} H_4\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{S_3^2 \sigma^2}{72} H_6\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)\right) G(x) \\ + \left(\sigma^3 \left(\frac{S_5}{120} H_5\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \dots\right) + \dots\right) G(x),$$

que corresponde a la expresión usual de la serie de Edgeworth que se encuentra en la literatura [Blinnikov, S. & Moessner, R., 1998; Bernardeau, F. & Kofman, L. , 1995].

B

Cálculo de ecuaciones de transporte de momentos

Se indagará sobre las ecuaciones de transporte de momentos para un campo escalar: Utilizando las definiciones de los polinomios de Chebishev-Hermite [Abramowitz, M. & Stegun, I., 1965] se tiene que:

$$H_0 = 1, \quad (\text{B.0.1})$$

$$H_1 = 2x, \quad (\text{B.0.2})$$

$$H_2 = 4x^2 - 2, \quad (\text{B.0.3})$$

$$H_3 = 8x^3 - 12x, \quad (\text{B.0.4})$$

$$H_1 H_1 = 4x^2 = H_2 + 2H_0, \quad (\text{B.0.5})$$

$$H_1 H_2 = 2x(4x^2 - 2) = 8x^3 - 12x + 8x = H_3 + 4H_1, \quad (\text{B.0.6})$$

$$H_2 H_2 = (4x^2 - 2)(4x^2 - 2) = H_4 + 8H_2 + 8H_0, \quad (\text{B.0.7})$$

$$H_2 H_3 = (4x^2 - 2)(8x^3 - 12x) = H_5 + 12H_3 + 24H_1, \quad (\text{B.0.8})$$

$$H_1 H_1 H_3 = 2x \cdot 2x(8x^3 - 12x) = H_5 - 14H_3 + 24H_1, \quad (\text{B.0.9})$$

$$H_1 H_2 H_3 = 2x(4x^2 - 2)(8x^3 - 12x) = H_6 + 22H_4 + 96H_2 + 48H_0. \quad (\text{B.0.10})$$

Ahora se hará uso de la función densidad de probabilidad casi-gaussiana, obtenida en el apéndice anterior, para un campo escalar:

$$P(\varphi) = P_{\text{gaussian}}(\varphi) \times P_{\text{non-gaussian}}(\varphi), \quad (\text{B.0.11})$$

$$P_g(\varphi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (\text{B.0.12})$$

$$P_{ng}(\varphi) = 1 + \frac{\alpha}{6\sigma^3} H_3 \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{\sigma} \right), \quad (\text{B.0.13})$$

B. Cálculo de ecuaciones de transporte de momentos

que reemplazando en la ecuación de transporte de momentos resulta en:

$$\frac{\partial P(\varphi)}{\partial N} + \frac{\partial(UP(\varphi))}{\partial \varphi} = 0, \quad (\text{B.0.14})$$

$$\frac{\partial}{\partial N} \left(P_g(\varphi) \left(1 + \frac{\alpha H_3}{6\sigma^3} \right) \right) + \frac{\partial U}{\partial \varphi} P_g(\varphi) \left(1 + \frac{\alpha H_3}{6\sigma^3} \right) + UP_g \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\alpha H_3}{6\sigma^3} \right) = 0. \quad (\text{B.0.15})$$

Usando la definición explícita del campo de velocidades $U(\varphi)$ ¹:

$$U(\varphi) = U_0 + (\varphi - \varphi_0) \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_0} + (\varphi - \varphi_0)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}, \quad (\text{B.0.16})$$

en la expresión B.0.15 se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left\{ -P_g \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{\sigma} \right) \left(\left(U - \frac{\partial \varphi_0}{\partial N} \right) \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{\sigma} \right) \frac{\partial \sigma^2}{\partial N} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial N} \right\} \\ & * \left(1 + \frac{\alpha H_3}{6\sigma^3} \right) + \frac{P_g H_3}{6\sigma^3} \frac{\partial \alpha}{\partial N} + \frac{P_g \alpha}{6\sigma^3} \frac{\partial H_3}{\partial N} + \frac{P_g \alpha H_3}{6} \left(\frac{3}{2\sigma^5} \right) \frac{\partial \sigma^2}{\partial N} \\ & + P_g [U_\varphi + U_{\varphi\varphi} (\varphi - \varphi_0)] \left[1 + \frac{\alpha H_3}{6\sigma^3} \right] \\ & + \left[U \left(1 + \frac{\alpha H_3}{6\sigma^3} \right) \right] \left[-P_g \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{\sigma} \right) \frac{1}{\sigma} \right] + UP_g \frac{\alpha}{6\sigma^3} \frac{\partial H_3}{\partial N} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.0.17})$$

lo que en conjunto con las definiciones de los polinomios de Chebishev-Hermite y sus productos conlleva a:

$$\begin{aligned} & \left\{ -P_g \frac{\sqrt{2}}{2} H_1 \left[\left(U_0 H_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma U_\varphi H_1 + \frac{1}{4} \sigma^2 U_{\varphi\varphi} (H_2 + 2) \right) \frac{1}{\sigma} - \frac{\sqrt{2}}{4\sigma^2} H_1 \frac{\partial \sigma^2}{\partial N} \right] - \frac{P_g}{2\sigma^2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial N} \right\} \\ & * \left[1 + \frac{\alpha H_3}{6\sigma^3} \right] + \frac{P_g H_3}{6\sigma^3} \frac{\partial \alpha}{\partial N} + \frac{P_g \alpha}{6\sigma^3} \frac{\partial H_3}{\partial N} + \frac{P_g H_3 \alpha \sigma^{-5}}{6} - \frac{3}{2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial N} \\ & + [U_\varphi + U_{\varphi\varphi} (\varphi - \varphi_0)] P_g \left(1 + \frac{\alpha H_3}{6\sigma^3} \right) + \left[U_0 + U_\varphi (\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} U_{\varphi\varphi} (\varphi - \varphi_0)^2 \right] \\ & \left(\frac{-P_g (\varphi - \varphi_0)}{\sigma} \right) \left[1 + \frac{\alpha H_3}{6\sigma^3} \right] + \left[U_0 + U_\varphi (\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} U_{\varphi\varphi} (\varphi - \varphi_0)^2 \right] \\ & P_g \frac{\alpha}{6\sigma^3} \frac{\partial H_3}{\partial N} \end{aligned} \quad (\text{B.0.18})$$

Por medio de la siguiente serie de polinomios de Hermite y de sus condiciones de independencia lineal y ortogonalidad, es posible separar la expresión anterior en términos que contengan H_n comunes, partiendo de la siguiente serie:

$$P_g \sum_{n \geq 0} c_n H_n(\varphi - \varphi_0) = 0, \quad (\text{B.0.19})$$

A continuación se mostrarán las distintas expresiones que se obtienen en cada caso para cada orden de polinomio.

¹Mencionado en varios apartes del cuerpo de la investigación

B.1. Términos que contienen H_0

A continuación se muestran los términos de la Ec.(B.0.18) que contienen solo dependencia funcional de los polinomios de Chevishev-Hermite de grado cero:

$$\begin{aligned}
 & - 2P_g\sigma U_\varphi + \frac{P_g}{2\sigma^2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial N} - \frac{P_g}{2\sigma^2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial N} - \frac{P_g U_{\varphi\varphi} \alpha}{6\sigma^2} + \sqrt{2} \frac{P_g U_{\varphi\varphi} \alpha}{\sigma^2} \\
 & + 2P_g U_\varphi + \frac{1}{2} U_{\varphi\varphi\varphi} \sigma^2 P_g - U_\varphi P_g - \sqrt{2} \frac{U_{\varphi\varphi} \alpha P_g}{\sigma^2} + \sqrt{2} \frac{P_g \alpha U_{\varphi\varphi}}{\sigma^2} = 0. \quad (\text{B.1.1})
 \end{aligned}$$

Aqui se obtiene una igualdad que no brinda información adicional, pero solo se verifica si y solo si los términos $U_{\varphi\varphi\varphi}$ tienen órdenes de magnitud mucho menores que los demás términos de la expansión del campo de velocidades U . Esta suposición será una condición predominante en la subsecuentes ecuaciones de transporte de momentos.

B.2. Términos que contienen H_1

Se toman de la ec.(B.0.18) ahora los términos que contienen el polinomio H_1 :

$$\begin{aligned}
 & - \sqrt{2} \frac{U_0}{\sigma} P_g + \frac{\sqrt{2}}{2} P_g \frac{\partial \varphi_0}{\partial N} \frac{P_g}{\sigma} - \frac{3\sqrt{2}}{4} P_g \sigma U_{\varphi\varphi} + P_g \frac{\alpha}{\sigma^5} \frac{\partial \sigma^2}{\partial N} - 2P_g U_\varphi \frac{\alpha}{\sigma^3} + 2P_g \alpha \frac{U_\varphi}{\sigma^3} - P_g \frac{\alpha}{\sigma^5} \frac{\partial \sigma^2}{\partial N} \\
 & + \frac{3\sqrt{2}}{4} \sigma U_{\varphi\varphi} P_g - \frac{3\sqrt{2}}{4} \sigma U_{\varphi\varphi} P_g - 2P_g U_\varphi \frac{\alpha}{\sigma^3} + 2P_g U_\varphi \frac{\alpha}{\sigma^3} = 0. \quad (\text{B.2.1})
 \end{aligned}$$

La expresión anterior genera la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\boxed{\frac{\partial \varphi_0}{\partial N} = U_0 + \frac{1}{2} U_{\varphi\varphi} \sigma^2}, \quad (\text{B.2.2})$$

que permite conocer la evolución temporal del primer momento de la distribución de probabilidad estudiada, escalada a través del monto de expansión N .

B.3. Términos que contienen H_2

Se toman de la ec.(B.0.18) ahora los términos que contienen el polinomio H_2 :

$$\begin{aligned}
 & 6\sigma U_{\varphi\varphi} \frac{\alpha}{6\sigma^3} P_g + \frac{1}{2}\sigma^2 P_g U_{\varphi\varphi\varphi} - 6U_0 P_g \frac{\alpha}{6\sigma^4} \\
 & + U_0 P - g \frac{\alpha}{2\sigma^4} - P_g U_\varphi - \frac{27}{2}\sigma^2 U_{\varphi\varphi} P_g \frac{\alpha}{6\sigma^4} \\
 & + \frac{5}{2}U_{\varphi\varphi}\sigma^2 P_g \frac{\alpha}{2\sigma^4} - P_g U_\varphi - 3P_g \frac{U_0}{\sigma} \frac{\alpha}{6\sigma^3} \\
 & - 27P_g \frac{\alpha}{6\sigma^4} \frac{U_{\varphi\varphi}\sigma^2}{2} + 3P_g \frac{\partial\varphi_0}{\partial N} \frac{\alpha}{6\sigma^4} \\
 & + P_g \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial\sigma^2}{\partial N} + \frac{P_g\alpha}{2\sigma^4} U_0 \\
 & + \frac{5}{4}P_g \frac{\alpha}{\sigma^4} U_{\varphi\varphi}\sigma^2 - P_g \frac{\alpha}{2\sigma^4} \frac{\partial\varphi_0}{\partial N} = 0.
 \end{aligned} \tag{B.3.1}$$

De la anterior expresión se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial\sigma^2}{\partial N} = 2\sigma^2 U_\varphi + U_{\varphi\varphi}\alpha}, \tag{B.3.2}$$

con la cual se puede conocer el segundo momento de la función de distribución de probabilidad $P(\varphi)$ que caracteriza las cantidades

B.4. Términos que contienen H_3

De la expresión (B.0.18) y aplicando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Chebishev-Hermite (B.0.19)

$$\begin{aligned}
 & 2U_\varphi P_g \frac{\alpha}{6\sigma^3} + \frac{7}{2}\sigma^2 U_{\varphi\varphi\varphi} \frac{\alpha P_g}{6\sigma^3} - \\
 & 7U_\varphi P_g \frac{\alpha}{6\sigma^3} + U P_g \frac{\alpha}{2\sigma^3} - \frac{1}{2}\sigma U_{\varphi\varphi} P_g - \\
 & \frac{1}{2}\sigma U_{\varphi\varphi} P_g - 7P_g \frac{\alpha}{\sigma^3} U_\varphi + \\
 & \frac{7}{12}P_g \frac{\alpha}{\sigma^5} \frac{\partial\sigma^2}{\partial N} + \\
 & \frac{\partial\alpha}{\partial N} \frac{P_g}{6\sigma^3} + P_g U_\varphi \frac{\alpha}{2\sigma^3} - \\
 & P_g \frac{\alpha}{4\sigma^5} \frac{\partial\sigma^2}{\partial N} - P_g \frac{\alpha}{4\sigma^5} \frac{\partial\sigma^2}{\partial N} = 0.
 \end{aligned} \tag{B.4.1}$$

B.4. Términos que contienen H_3

Simplificando términos semejantes de la expresión anterior se obtiene la tercera ecuación de transporte de momentos:

$$\boxed{\frac{\partial \alpha}{\partial N} = 3\alpha U_\varphi - 3\sigma^4 U_{\varphi\varphi}}. \quad (\text{B.4.2})$$

C

Cálculo de función de distribución de probabilidad $P(\tilde{X}, \tilde{Y})$

Para el caso de dos campos escalares la conservación de la densidad de probabilidad toma la forma:

$$\frac{\partial P(\varphi_i, N)}{\partial N} + \frac{\partial}{\partial \varphi_j} [u_j P(\varphi_i, N)] = 0, \quad (\text{C.0.1})$$

donde se tiene en cuenta el campo escalar φ_i que se esta estudiando. Cabe anotar que $P(\varphi_i, i)$ nuevamente se divide en una parte completamente gaussiana y una casi-gausiana:

$$P(\varphi_i, N) \equiv P_g(\varphi_i, N) P_{ng}(\varphi_i, N). \quad (\text{C.0.2})$$

La parte gaussiana por definición tiene la forma:

$$P_g(\varphi_i, N) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\varphi_i - \Phi_i) (\Sigma^{-1})_{ij} (\varphi_j - \Phi_j) \right]. \quad (\text{C.0.3})$$

En esta expresión se muestra una matriz Σ que representa la covarianza entre los campos escalares, siendo ρ el coeficiente de correlación del análisis.

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.4})$$

A continuación se van a obtener vectores y valores propios provenientes de la diagonalización la matriz Σ . Esto permitirá que la parte gaussiana de FDP. mostrada en la ec.(C.0.3) pueda escribirse como un producto de dos FDP's linealmente independientes.

Se inicia el cálculo encontrando el conjunto de valores propios λ_i :

$$|\Sigma^{-1} - \lambda I| = 0, \quad (\text{C.0.5})$$

que para el caso de la matriz Σ se reescribe:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} - \lambda_1 & -\frac{\rho}{\sigma_2\sigma_1(1-\rho^2)} \\ -\frac{\rho}{\sigma_2\sigma_1(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} - \lambda_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{C.0.6})$$

C. Cálculo de función de distribución de probabilidad $P(\tilde{X}, \tilde{Y})$

De aquí es posible calcular las raíces del polinomio característico $P(\lambda_i)$ que serán los valores propios:

$$\lambda_i = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \pm \sqrt{[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2]}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}. \quad (\text{C.0.7})$$

Con dichos valores propios es posible obtener los vectores propios:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1 - \rho^2)} - \lambda_1 & -\frac{\rho}{\sigma_2\sigma_1(1 - \rho^2)} \\ -\frac{\rho}{\sigma_2\sigma_1(1 - \rho^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1 - \rho^2)} - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{C.0.8})$$

De esta manera se obtienen los vectores propios de la transformación ortonormalizados:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_2}{\rho\sigma_1} + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 + 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2} \right]^2}} \\ \frac{\frac{\sigma_1}{\rho\sigma_2} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_1}{\rho\sigma_2} + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 + 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2} \right]^2}} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.0.9})$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\sigma_2}{\rho\sigma_1} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_1}{\rho\sigma_2} + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 + 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2} \right]^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_2}{\rho\sigma_1} + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 + 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2} \right]^2}} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.0.10})$$

Ya tenemos los vectores propios normalizados y sin olvidar nuestro objetivo que es la separación de la PDF en dos componentes linealmente independientes entre si, podemos continuar con el proceso de diagonalización de Σ utilizando el resultado ya obtenido. Determinando previamente los vectores \mathbf{X} y \mathbf{Y} podemos finalmente obtener los vectores propios ortonormalizados $\tilde{\mathbf{X}}$ y $\tilde{\mathbf{Y}}$ provenientes de la diagonalización de la matriz Σ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\lambda_1}\mathbf{X} + \sqrt{\lambda_2}\mathbf{Y}) \\ \tilde{\mathbf{Y}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\lambda_1}\mathbf{X} - \sqrt{\lambda_2}\mathbf{Y}) \end{aligned} \quad (\text{C.0.11})$$

Aplicando estas operaciones a los vectores normalizados \mathbf{X}, \mathbf{Y} se obtienen expresiones:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{X}} = & \frac{(\varphi_1 - \Phi_1)}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_2}{\rho\sigma_1} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2} \right]^2}} \\
& - \frac{(\varphi_2 - \Phi_2)}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\rho\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_1}{\rho\sigma_2} + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 - 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \right]^2}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\varphi_2 - \Phi_2) \times \left[\frac{\sigma_2}{\rho\sigma_1} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2} \right] \right\} \\
& \times \frac{\sqrt{\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_2}{\rho\sigma_1} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2} \right]^2}} \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\varphi_1 - \Phi_1) \times \left[\frac{\sigma_1}{\rho\sigma_2} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 - 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2} \right] \right\} \\
& \times \frac{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_1}{\rho\sigma_2} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1\sigma_2} \right]^2}}. \tag{C.0.12}
\end{aligned}$$

C. Cálculo de función de distribución de probabilidad $P(\tilde{X}, \tilde{Y})$

$$\begin{aligned}
\tilde{Y} = & \frac{(\varphi_1 - \Phi_1)}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_2}{\rho\sigma_1} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2} \right]^2}} \\
& + \frac{(\varphi_2 - \Phi_2)}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_1}{\rho\sigma_2} + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \right]^2}} \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\varphi_2 - \Phi_2) \times \left[\frac{\sigma_2}{\rho\sigma_1} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2} \right] \right\} \\
& \times \frac{\sqrt{\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_2}{\rho\sigma_1} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2} \right]^2}} \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\varphi_1 - \Phi_1) \times \left[\frac{\sigma_1}{\rho\sigma_2} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2} \right] \right\} \\
& \times \frac{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_1}{\rho\sigma_2} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1\sigma_2} \right]^2}}. \tag{C.0.13}
\end{aligned}$$

Utilizando el toolbox de manejo de expresiones simbólicas incluido en el paquete informático Matlab, las anteriores expresiones para \mathbf{X} y \mathbf{Y} se simplifican así:

$$\tilde{\mathbf{X}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2(1 + \rho)}} \left[\left(\frac{\varphi_1 - \Phi_1}{\sigma_1} \right) + \left(\frac{\varphi_2 - \Phi_2}{\sigma_2} \right) \right] \tag{C.0.14}$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho)}} \left[\left(\frac{\varphi_1 - \Phi_1}{\sigma_1} \right) - \left(\frac{\varphi_2 - \Phi_2}{\sigma_2} \right) \right]. \quad (\text{C.0.15})$$

Retomando la dependencia funcional de la definición de FDP gaussiana para dos campos mostrada en la Ec.(C.0.3) se tiene que $P_g(\varphi_i)$ es proporcional a:

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\varphi_1 - \Phi_1) & (\varphi_2 - \Phi_2) \end{bmatrix}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2} & -\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_2^2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} (\varphi_1 - \Phi_1) \\ (\varphi_2 - \Phi_2) \end{bmatrix}_{2 \times 1} \right\}. \quad (\text{C.0.16})$$

Simplificando las multiplicaciones entre matrices de la exponencial se obtiene:

$$P_g(\varphi_i) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(\varphi_1 - \Phi_1)^2}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho(\varphi_1 - \Phi_1)(\varphi_2 - \Phi_2)}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho(\varphi_1 - \Phi_1)(\varphi_2 - \Phi_2)}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{(\varphi_2 - \Phi_2)^2}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} \right\}. \quad (\text{C.0.17})$$

El resultado anterior indica que es posible expresar la FDP gaussiana así:

$$P_g(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \propto \exp \left\{ \frac{-\tilde{\mathbf{X}}^2}{2} \right\} \times \exp \left\{ \frac{-\tilde{\mathbf{Y}}^2}{2} \right\}, \quad (\text{C.0.18})$$

solo basta con reemplazar en la anterior forma de FDP con dos términos gaussianos independientes a que al multiplicar las funciones de las Ecs.(C.0.14) y (C.0.15) se reproduce el resultado de la expresión (C.0.17).

D

Código implementado en Matlab

A continuación se muestra el contenido de los tres archivos necesarios para poder obtener el nivel de no-gaussianidad f_{NL} para un modelo inflacionario a partir de dos campos escalares cuyo potencial generador es del tipo *Potencial escalar cuadrático para dos campos* (11.0.1).

El primer archivo contiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que se va a solucionar para obtener la evolución temporal de los correladores de la distribución de probabilidad estudiada:

```
function oems = sistema_ecs(t,x,varargin)
    %x(1)  — media de chi
    %x(2)  — media de kai
    %x(3)  — correlador sigma 1-1
    %x(4)  — correlador sigma 1-2 o 2-1
    %x(5)  — correlador sigma 2-2
    %x(6)  — correlador alfa 1-1-1
    %x(7)  — correlador alfa 1-1-2
    %x(8)  — correlador alfa 1-2-2
    %x(9)  — correlador alfa 2-2-2
    %-----
    mc= varargin{1};
    mx= varargin{2};
    %-----
    den = (mc^2*x(1)^2+mx^2*x(2)^2);
    %-----
    u_1  = -x(1)*mc^2/den;
    u_2  = -x(2)*mx^2/den;
    u_11 = -mc^2/den + (mc^4*x(1)^2)/den^2;
    u_22 = -mx^2/den + (mx^4*x(2)^2)/den^2;
    u_12 = (mc^2*mx^2*x(2)*x(1))/den^2;
    u_21 = u_12;
    u_111= (3*mc^4*x(1))/den^2 - (2*mc^6*x(1)^3)/den^3;
    u_222= (3*mx^4*x(2))/den^2 - (2*mx^6*x(2)^3)/den^3;
    u_112= (mc^2*mx^2*x(2))/den^2 - (2*mc^4*mx^2*x(1)^2*x(2))/den^3;
    u_122= (mc^2*mx^2*x(1))/den^2 - (2*mx^4*mc^2*x(1)*x(2)^2)/den^3;
    u_121= u_112;
```

D. Código implementado en Matlab

```
u_211= u_112;
u_212= u_122;
u_221= u_122;
%-----
eq_chi_0 = u_1 + 1/2*x(3)*u_111 + 1/2*x(4)*u_112 + 1/2*x(4)*u_121 +
1/2*x(5)*u_122;
eq_kai_0 = u_2 + 1/2*x(3)*u_211 + 1/2*x(4)*u_212 + 1/2*x(4)*u_221 +
1/2*x(5)*u_222;
%eq_chi_0 = -2*mc^2*x(1)/den;
%eq_kai_0 = -2*mx^2*x(2)/den;
%-----
eq_sigma_11_1 = u_11*x(3)+ u_12*x(4) + u_11*x(3)+ u_12*x(4);
eq_sigma_11_2 = 1/2*x(6)*u_111 + 1/2*x(7)*u_112 + 1/2*x(7)*u_121 + 1/2*
x(8)*u_122;
eq_sigma_11_3 = 1/2*x(6)*u_111 + 1/2*x(7)*u_112 + 1/2*x(7)*u_121 + 1/2*
x(8)*u_122;
eq_sigma_11 = eq_sigma_11_1 + eq_sigma_11_2 + eq_sigma_11_3;
%-----
eq_sigma_12_1 = u_11*x(4)+ u_12*x(5) + u_21*x(3)+ u_22*x(4);
eq_sigma_12_2 = 1/2*x(6)*u_211 + 1/2*x(7)*u_212 + 1/2*x(7)*u_221 + 1/2*
x(8)*u_222;
eq_sigma_12_3 = 1/2*x(7)*u_111 + 1/2*x(8)*u_112 + 1/2*x(8)*u_121 + 1/2*
x(9)*u_122;
eq_sigma_12 = eq_sigma_12_1 + eq_sigma_12_2 + eq_sigma_12_3;
%-----
eq_sigma_22_1 = u_21*x(4)+ u_22*x(5) + u_21*x(4)+ u_22*x(5);
eq_sigma_22_2 = 1/2*x(7)*u_211 + 1/2*x(8)*u_212 + 1/2*x(8)*u_221 + 1/2*
x(9)*u_222;
eq_sigma_22_3 = 1/2*x(7)*u_211 + 1/2*x(8)*u_212 + 1/2*x(8)*u_221 + 1/2*
x(9)*u_222;
eq_sigma_22 = eq_sigma_22_1 + eq_sigma_22_2 + eq_sigma_22_3;
%-----
eq_alfa_111_1 = u_11*x(6)+u_12*x(7)+x(3)*u_111*x(3)+x(3)*u_112*x(4)+x
(4)*u_121*x(3)+x(4)*u_122*x(4);
eq_alfa_111_2 = u_11*x(6)+u_12*x(7)+x(3)*u_111*x(3)+x(3)*u_112*x(4)+x
(4)*u_121*x(3)+x(4)*u_122*x(4);
eq_alfa_111_3 = u_11*x(6)+u_12*x(7)+x(3)*u_111*x(3)+x(3)*u_112*x(4)+x
(4)*u_121*x(3)+x(4)*u_122*x(4);
eq_alfa_111 = eq_alfa_111_1 + eq_alfa_111_2 + eq_alfa_111_3;
%-----
eq_alfa_222_1 = u_21*x(8)+u_22*x(9)+x(4)*u_211*x(4)+x(4)*u_212*x(5)+x
(5)*u_221*x(4)+x(5)*u_222*x(5);
eq_alfa_222_2 = u_21*x(8)+u_22*x(9)+x(4)*u_211*x(4)+x(4)*u_212*x(5)+x
(5)*u_221*x(4)+x(5)*u_222*x(5);
eq_alfa_222_3 = u_21*x(8)+u_22*x(9)+x(4)*u_211*x(4)+x(4)*u_212*x(5)+x
(5)*u_221*x(4)+x(5)*u_222*x(5);
eq_alfa_222 = eq_alfa_222_1 + eq_alfa_222_2 + eq_alfa_222_3;
%-----
eq_alfa_112_1 = u_11*x(7)+u_12*x(8)+x(3)*u_111*x(4)+x(3)*u_122*x(5)+x
(4)*u_121*x(4)+x(4)*u_122*x(5);
eq_alfa_112_2 = u_11*x(7)+u_12*x(8)+x(4)*u_111*x(3)+x(4)*u_112*x(4)+x
(5)*u_121*x(3)+x(5)*u_122*x(4);
```

```

eq_alfa_112_3 = u_21*x(6)+u_22*x(7)+x(3)*u_211*x(3)+x(3)*u_212*x(4)+x
(4)*u_221*x(3)+x(4)*u_222*x(4);
eq_alfa_112 = eq_alfa_112_1 + eq_alfa_112_2 + eq_alfa_112_3;
%-----
eq_alfa_122_1 = u_11*x(8)+u_12*x(9)+x(4)*u_111*x(4)+x(4)*u_112*x(5)+x
(5)*u_121*x(4)+x(5)*u_122*x(5);
eq_alfa_122_2 = u_21*x(7)+u_22*x(8)+x(4)*u_211*x(3)+x(4)*u_212*x(4)+x
(5)*u_221*x(3)+x(5)*u_222*x(4);
eq_alfa_122_3 = u_21*x(7)+u_22*x(8)+x(3)*u_211*x(4)+x(3)*u_212*x(5)+x
(4)*u_221*x(4)+x(4)*u_222*x(5);
eq_alfa_122 = eq_alfa_122_1 + eq_alfa_122_2 + eq_alfa_122_3;
%-----
oems=[eq_chi_0;eq_kai_0;eq_sigma_11;eq_sigma_12;eq_sigma_22;eq_alfa_111
;eq_alfa_112;eq_alfa_122;eq_alfa_222];
%-----

```

D. Código implementado en Matlab

El segundo archivo contiene parte de las condiciones iniciales y las llamadas a los subprocesos requeridos para calcular f_{NL} :

```
function condiciones_iniciales
2  %CONDICIONES INICIALES
3  a='INICIO_EJECUCION_ENCADENADO'
4  mp=1;
5  chi_0=8.9;
6  kai_0=12.9;
7  k=1;
8  prompt = {'PASO:', 'N-folds', 'Factor1', 'Factor2', 'Mc', 'Mx', 'Chi_0', '
           Kai_0'};
9  dlg_title = 'Tamano_del_paso_-_E-folds_evolucion_-_Factor1_-_Factor2_-_
           Masa_Chi_-_Masa_Kai_-_Chi_0_-_Kai_0';
10 num_lines = 1;
11 def = {'1e-9', '200', '1', '1', '9e-5', '1e-5', '8.9', '12.9', 'ode113'};
12 ansss = inputdlg(prompt, dlg_title, num_lines, def);
13 paso = str2double(ansss(1,1))
14 longitud = str2double(ansss(2,1))
15 factor1=str2double(ansss(3,1))
16 factor2=str2double(ansss(4,1))
17 mc=str2double(ansss(5,1))
18 mx=str2double(ansss(6,1))
19 chi_0=str2double(ansss(7,1))
20 kai_0=str2double(ansss(8,1))
21 metodo='ode113';
22 derivadas_N_ode113(mc,mx,paso,chi_0,kai_0,factor1,factor2,longitud,
           metodo);
23 a='FIN_EJECUCION_ENCADENADO'
```

El tercer archivo contiene las expresiones que se requieren para el cálculo de f_{NL} , conociendo ya los valores de los correladores de uno, dos y tres puntos que evolucionan en el tiempo. Se utiliza el comando de matlab *ODE113* porque exhibe la mejor convergencia a los resultados esperados, comparables con el artículo guía de esta tesis[Mulryne, D. *et al.*, 2010].

```

function derivadas_N_ode45(mc,mx,paso ,chi_0 ,kai_0 ,factor1 ,factor2 ,
    longitud ,metodo)
2   %-----
3   pot_0 = 1/2*((mc*chi_0)^2+(mx*kai_0)^2);
4   H=sqrt(pot_0/3);
5   chi_punto_0 = -1/(3*H^2)*(mc^2*chi_0);
6   kai_punto_0 = -1/(3*H^2)*(mx^2*kai_0);
7   %-----
8   sigma_11_0 = factor1*(H/(2*pi))^2;
9   sigma_22_0 = sigma_11_0;
10  sigma_12_0 = 0;
11  sigma_21_0 = 0;
12  %-----
13  alfa_111_0 = factor2*chi_punto_0*3*(H/(2*pi))^4;
14  alfa_112_0 = factor2*kai_punto_0*(H/(2*pi))^4;
15  alfa_122_0 = factor2*chi_punto_0*(H/(2*pi))^4;
16  alfa_222_0 = factor2*kai_punto_0*3*(H/(2*pi))^4;
17  %-----
18  opciones = odeset('RelTol',1e-40);
19  entre40y45=0
20  entre43y45=1
21  entre80y90=0
22  entre84y88=0
23  entre_inicio_fin=0
24  metodo
25  %-----
26  try
27      if entre_inicio_fin==1
28          tspan = 0:paso:longitud;
29          x0=[chi_0 ,kai_0 , sigma_11_0 , sigma_12_0 , sigma_22_0 ,
30              alfa_111_0 , alfa_112_0 , alfa_122_0 , alfa_222_0];
31          switch lower(metodo)
32              case 'ode45'
33                  [t,x]=ode45(@sistema_ecs ,tspan ,x0 ,opciones ,mc,mx);
34              case 'ode23'
35                  [t,x]=ode23(@sistema_ecs ,tspan ,x0 ,opciones ,mc,mx);
36              case 'ode113'
37                  [t,x]=ode113(@sistema_ecs ,tspan ,x0 ,opciones ,mc,mx);
38              case 'ode15s'
39                  [t,x]=ode15s(@sistema_ecs ,tspan ,x0 ,opciones ,mc,mx);
40              case 'ode23s'
41                  [t,x]=ode23s(@sistema_ecs ,tspan ,x0 ,opciones ,mc,mx);
42              case 'ode23t'
43                  [t,x]=ode23t(@sistema_ecs ,tspan ,x0 ,opciones ,mc,mx);
44              case 'ode23tb'
45                  [t,x]=ode23tb(@sistema_ecs ,tspan ,x0 ,opciones ,mc,mx);

```

D. Código implementado en Matlab

```
45         otherwise
46             msgbox 'pailas';
47     end
48     %-----
49     chi=x(:,1);
50     kai=x(:,2);
51     sigma_11=x(:,3);
52     sigma_12=x(:,4);
53     sigma_22=x(:,5);
54     alfa_111=x(:,6);
55     alfa_112=x(:,7);
56     alfa_122=x(:,8);
57     alfa_222=x(:,9);
58     else
59         if entre40y45==1
60             tspan = 0:0.01:longitud/5;
61         elseif entre80y90==1
62             tspan = 0:0.01:4*longitud/5;
63         elseif entre43y45==1
64             tspan = 0:0.01:43;
65         elseif entre84y88==1
66             tspan = 0:0.01:84;
67         else
68             tspan = 0:paso:longitud/2;
69         end
70         x0=[chi_0,kai_0, sigma_11_0, sigma_12_0, sigma_22_0,
71             alfa_111_0, alfa_112_0, alfa_122_0, alfa_222_0];
72         switch metodo
73             case 'ode45'
74                 [t1,x]=ode45(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
75             case 'ode23'
76                 [t1,x]=ode23(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
77             case 'ode113'
78                 [t1,x]=ode113(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
79             case 'ode15s'
80                 [t1,x]=ode15s(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
81             case 'ode23s'
82                 [t1,x]=ode23s(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
83             case 'ode23t'
84                 [t1,x]=ode23t(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
85             case 'ode23tb'
86                 [t1,x]=ode23tb(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
87             otherwise
88                 msgbox 'pailas';
89         end
90         %-----
91         chi=x(:,1);
92         kai=x(:,2);
93         sigma_11=x(:,3);
94         sigma_12=x(:,4);
95         sigma_22=x(:,5);
96         alfa_111=x(:,6);
```

```

96     alfa_112=x(:,7);
97     alfa_122=x(:,8);
98     alfa_222=x(:,9);
99     %-----
100    if entre40y45==1
101        tspan = longitud/5:pas0:9*longitud/40;
102    elseif entre80y90==1
103        tspan = 4*longitud/5:pas0:9*longitud/10;
104    elseif entre43y45==1
105        tspan = 43:pas0:45;
106    elseif entre84y88==1
107        tspan = 84:pas0:88;
108    else
109        tspan = longitud/2:pas0:8*longitud/10;
110    end
111    x0=[chi(end), kai(end), sigma_11(end), sigma_12(end),
112        sigma_22(end), alfa_111(end), alfa_112(end), alfa_122(end)
113        , alfa_222(end)];
114    switch lower(metodo)
115        case 'ode45'
116            [t2,x]=ode45(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
117        case 'ode23'
118            [t2,x]=ode23(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
119        case 'ode113'
120            [t2,x]=ode113(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
121        case 'ode15s'
122            [t2,x]=ode15s(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
123        case 'ode23s'
124            [t2,x]=ode23s(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
125        case 'ode23t'
126            [t2,x]=ode23t(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
127        case 'ode23tb'
128            [t2,x]=ode23tb(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
129        otherwise
130            msgbox 'pailas';
131    end
132    chi=[chi;x(:,1)];
133    kai=[kai;x(:,2)];
134    sigma_11=[sigma_11;x(:,3)];
135    sigma_12=[sigma_12;x(:,4)];
136    sigma_22=[sigma_22;x(:,5)];
137    alfa_111=[alfa_111;x(:,6)];
138    alfa_112=[alfa_112;x(:,7)];
139    alfa_122=[alfa_122;x(:,8)];
140    alfa_222=[alfa_222;x(:,9)];
141    %-----
142    if entre40y45==1
143        tspan = 9*longitud/40:0.01:longitud;
144    elseif entre80y90==1
145        tspan = 45:0.01:longitud;
146    elseif entre43y45==1
147        tspan = 9*longitud/40:0.01:longitud;

```

D. Código implementado en Matlab

```
146     elseif entre84y88==1
147         tspan = 88:0.01:longitud;
148     else
149         tspan = 8*longitud/10:0.01:longitud;
150     end
151     x0=[chi(end), kai(end), sigma_11(end), sigma_12(end),
152         sigma_22(end), alfa_111(end), alfa_112(end), alfa_122(end)
153         , alfa_222(end)];
154     switch lower(metodo)
155     case 'ode45'
156         [t3,x]=ode45(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
157     case 'ode23'
158         [t3,x]=ode23(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
159     case 'ode113'
160         [t3,x]=ode113(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
161     case 'ode15s'
162         [t3,x]=ode15s(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
163     case 'ode23s'
164         [t3,x]=ode23s(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
165     case 'ode23t'
166         [t3,x]=ode23t(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
167     case 'ode23tb'
168         [t3,x]=ode23tb(@sistema_ecs,tspan,x0,opciones,mc,mx);
169     otherwise
170         msgbox 'pailas';
171     end
172     chi=[chi;x(:,1)];
173     kai=[kai;x(:,2)];
174     sigma_11=[sigma_11;x(:,3)];
175     sigma_12=[sigma_12;x(:,4)];
176     sigma_22=[sigma_22;x(:,5)];
177     alfa_111=[alfa_111;x(:,6)];
178     alfa_112=[alfa_112;x(:,7)];
179     alfa_122=[alfa_122;x(:,8)];
180     alfa_222=[alfa_222;x(:,9)];
181     end
182     %-----
183     chi_fin = chi(end);
184     kai_fin = kai(end);
185     V = 1/2*((mc*chi_fin)^2+(mx*kai_fin)^2);
186     %-----
187     coseno=(mc^2*chi_fin);
188     seno=(mx^2*kai_fin);
189     V_1 = mc^2*chi_fin;
190     V_2 = mx^2*kai_fin;
191     V_11 = mc^2;
192     V_22 = mx^2;
193     V_12 = 0;
194     N_1 = (V/V_1)^2*coseno^2;
195     N_2 = (V/V_2)^2*seno^2;
196     N_11_1 = (1-(V*V_1)/(V_1)^2)*(coseno^2) + 2*(V/V_1)^2*(coseno^2)
197         *((V_11/V)*seno^2;
```

```

195 N_11_2 = - (V_1*V_12)/(V*V_2)*seno^4 - (V_11/V - V_22/V + (V_2*
      V_12)/(V*V_1))*coseno^2*seno^2);
196 N_11 = N_11_1 + N_11_2;
197 N_22_1 = (1-(V*V_2)/(V_2)^2)*(seno^2) + 2*(V/V_2)^2*(seno^2)*((
      V_22/V)*coseno^2);
198 N_22_2 = - (V_2*V_12)/(V*V_1)*coseno^4 - (V_22/V - V_11/V + (V_1*
      V_12)/(V*V_2))*coseno^2*seno^2);
199 N_22 = N_22_1 + N_22_2;
200 N_12_1 = 2*(V/V_1)*(V/V_2)*coseno^2*(-V_11/V*seno^2 + (V_1*V_12)
      /(V*V_2)*seno^4);
201 N_12_2 = 2*(V/V_1)*(V/V_2)*coseno^2*((V_11/V - V_22/V + (V_2*V_12
      )/(V*V_1))*coseno^2*seno^2);
202 N_12_3 = coseno^2*(V_2/V_1 - (V*V_12)/(V_1^2));
203 N_12 = N_12_1 + N_12_2 + N_12_3;
204 N_21 = N_12;
205 %-----
206 zz = N_1^2.*sigma_11 + N_2^2.*sigma_22 + 2*N_1*N_2.*sigma_12;
207 %-----
208 zzz1 = N_1^3.*alfa_111 + N_2^3.*alfa_222 + 3*N_1^2*N_2.*alfa_112
      + 3*N_1*N_2^2.*alfa_122;
209 %-----
210 zzz2 = 9/2*N_1^2*N_11.*(sigma_11.^2) + 9/2*N_2^2*N_22.*(sigma_22
      .^2);
211 zzz2 = zzz2 + 9*(N_1*N_2*N_11 + N_1^2*N_12).*(sigma_11.*sigma_12)
      ;
212 zzz2 = zzz2 + 9*(N_1*N_2*N_22 + N_2^2*N_12).*(sigma_12.*sigma_22)
      ;
213 zzz2 = zzz2 + 3/2*(N_2^2*N_11+N_1^2*N_22+4*N_1*N_2*N_12).*(
      sigma_11.*sigma_22+2.*sigma_12.^2);
214 zzz2 = zzz2 - 3/2*(N_11.*sigma_11+2*N_12.*sigma_12+N_22*sigma_22)
      .*zz;
215 NUM=(zz.^2);
216 DEN=(zzz1+zzz2);
217 fNL = 5/18*(NUM./DEN);
218 if entre_inicio_fin==0
219     t=[t1;t2;t3];
220 end
221 %-----
222 Vt_1 = mc^2.*chi;
223 Vt_2 = mx^2.*kai;
224 Vt = 1/2*((mc.*chi).^2+(mx.*kai).^2);
225 epsilon1 = 0.5.*(Vt_1./Vt).^2;
226 epsilon2 = 0.5.*(Vt_2./Vt).^2;
227 epsilon = epsilon1 + epsilon2;
228 %-----
229 titulo = sprintf('fNL_vs_N_Paso=%0.11f', paso);
230 figure(1), plot(t,fNL), title(titulo);
231 figure(2), plot(t,abs(fNL)), title(titulo);
232 figure(3), plot(t,epsilon), title('Epsilon_vs_N');
233 figure(4), plot(t,chi,t,kai), title('Campos_vs_N');
234 %-----
235 catch exception

```

D. Código implementado en Matlab

```
286     exception
287     sprintf( 'ode45_FALLA_PARA_: _Mc=%0.7f _Paso=%0.7f' ,mc, paso)
288 end
```

Bibliografía

- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.(1965). Handbook of Mathematical Functions Dover Publications.
- ADE, P. *et al.* (2015a). Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters arXiv:1502.01589.
- ADE, P. *et al.* (2015a). Planck 2015 results. XVII. Constraints on primordial non-Gaussianity arXiv:1502.01592.
- ANDERSON, G. *et al.* (2012). Transport equations for the inflationary trispectrum. *JCAP* **1210**, 019.
- BAZKARAN, D. *et al.* (2010). Primordial Gravitational Waves and Cosmic Microwave Background Radiation arXiv:1004.0804.
- BATTEFELD, D. & BATTEFELD, T. (2007). Non-Gaussianities in N-flation. *JCAP* **0705**, 019.
- BERNARDEAU, F. & KOFMAN, L. (1995). Properties of the cosmological density distribution function. *Astrophys. J.* **443**, 479-498. astro-ph/9403028.
- BYRNES, C. *et al.*(2007). Diagrammatic approach to non-Gaussianity from inflation *JCAP* **0711**, 027. hep-th/0705.4096.
- BYRNES, C. *et al.*(2009). Large non-Gaussianity from two-component hybrid inflation *JCAP* **0902**, 017. arXiv:astro-ph/0812.0807.
- BLINNIKOV, S & MOESSNER, R.(1998). Expansions for nearly Gaussian distributions *Astron. Astrophys. Suppl. Ser* **130**, 193-205. astro-ph/9711239.
- BOUBEKEUR, L & LYTH D. (2006). Detecting a small perturbation through its non-Gaussianity *Phys. Rev.* **D73**, 021301. astro-ph/0504046.

Bibliografía

- CARROLL, S. (2004). Spacetime and geometry: An introduction to general relativity. *San Francisco, USA: Addison-Wesley*, 513.
- COGOLLO, H. *et al* (2008). On the Issue of the zeta Series Convergence and Loop Corrections in the Generation of Observable Primordial Non-Gaussianity in Slow-Roll Inflation. Part I: The Bispectrum. *JCAP* **0808**, 029.
- CUI, Y. (2010). A Review of WIMP Baryogenesis Mechanisms *Mod. Phys. Lett.* **37**, 1530028.
- DIAS, M. & SEERY, D. (2012). Transport equations for the inflationary spectral index. *Phys. Rev.* **D85**, 043519.
- FRIEDMANN, A. (1922). *Z. Phys.* **10**, 377.
- GUTH, A. H. (1981). The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.* **D23**, 347.
- HINSHAW, G. *et al.* (2013). *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. Astrophys. J. Suppl.* **208**, 19.
- HILBERT, D. (1915). *Die Grundlagen der Physik. 1.. Gott. Nachr.* **27**, 395-407.
- HUANG, K. (2001). *Introduction to Statistical Physics Taylor and Francis, London and New-York (2001)*
- HUBBLE, E. (2010). A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae *roc. Nat. Acad. Sci.* **15**, 168-173.
- JACOBS, K. (2010). *Stochastic processes for physicists: understanding noisy systems Cambridge University Press, (2010).*
- JAIMES, J. (2008). No-gaussianidad y correcciones de lazo en un modelo inflacionario de Slow-Roll con potencial escalar cuadrático de dos componentes *Tesis de Pregrado - Biblioteca UIS, 2008.*
- KARLIN, S. (1975). *A first course in stochastic processes Academic Press, New York-USA (1975).*
- LIDDLE, A. & LYTH, D. (1992). COBE, gravitational waves, inflation and extended inflation *Phys. Lett.* **B291**, 391-398. [astro-ph/9208007](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9208007).
- LIDDLE, A. *et al* (1994). Formalizing the slow roll approximation in inflation. *Phys. Rev.* **D50**, 7222-7232.
- LIDDLE, A & LITH D. (2000). Superhorizon perturbations and preheating *Phys. Rev.* **D61**, 103509. [astro-ph/9912473](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9912473).

- LIFSHITZ, E. AND PITAEVSKII, L.(1999). Physical kinetics, Course of theoretical physics *Butterworth-Heinemann (1999)*
- LINDE, A.(1982). A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems *Phys. Lett. B108*, 389-393.
- DIAS, M. & SEERY, D. (1984). The Inflationary Universe. *Rep. Prog. Phys.* **47**, 925.
- LYTH, D. & RIOTTO A. (1999). Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation. *Phys. Rept.* **314**, 1-146.
- LYTH, D. & LIDDLE A. (2009). The Primordial Perturbation Density: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure. *Cambridge, UK: Cambridge University Press*
- MALDACENA, J.(2003). Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models *JHEP* **05**, 017. [astro-ph/0210603](#).
- MUELLER, V. *et al.*(2011). Measuring the Cosmic Web *Baltic Astron.* **20**, 259. [astro-ph/1109.1436](#).
- DIAS, M. & SEERY, D. (2012). Physical foundations of cosmology. *Cambridge University Press, Cambridge-UK*
- MUKHANOV, V. & WINITZKI S.(2007). Introduction to quantum effects in gravity *Cambridge University Press*
- MULRYNE, D. *et al.* (2010). Moment transport equations for non-Gaussianity. *JCAP* **1001**, 024.
- MULRYNE, D. *et al.* (2011). Moment transport equations for the primordial curvature perturbation. *JCAP* **1104**, 030.
- PENZIAS A, & WILSON. R. (1965). Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s *Astrophys. J.* **142**, 419-421.
- PICHON, C *et al.*(2012). Non-Gaussian statistics of critical sets in 2 and 3D: Peaks, voids, saddles, genus and skeleton *Phys. Rev.* **D85**, 023011. [astro-ph/0504046](#).
- RIESS, A.(2010). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant *Astron. J.* **116**, 1009-1038.
- RIOTTO, A & LYTH D.(1999). Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation *Phys. Rept.* **314**, 1-146.
- ROBERTSON, H. (1935). *Astrophys. J.* **82**, 248.
- RODRIGUEZ, Y. (2005). The Origin of the large-scale structure in the Universe: Theoretical and statistical aspects [astro-ph/0507701](#).

Bibliografía

- RODRIGUEZ, Y. & LYTH D. (2005). The Inflationary prediction for primordial non-Gaussianity. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 121302.
- SACHS, R & WOLFE A.(1967). Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background *Astrophys. J.* **147**, 73-90.
- SASAKI, M. & STEWART E. (1995). A General analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation. *Prog. Theor. Phys.* **95**, 71-78.
- SASAKI, M.(2012). Inflation and Birth of Cosmological Perturbations *Fundam. Theor. Phys.* **177**, 305-321.
- STAROBINSKY A. (1979). Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe *JETP Lett.* **30**, 682-685.
- SEERY, D. & LINDSEY, J.(2005). Primordial non-Gaussianities from multiple-field inflation *JCAP* **0509**, 011.
- SEERY, D. *et al*(2009). Inflationary trispectrum from graviton exchange *JCAP* **0903**, 018.
- VALENZUELA-TOLEDO *et al.*(2011). Feynman-like Rules for Calculating n-Point Correlators of the Primordial Curvature Perturbation *JCAP* **1110**, 020. astro-ph.CO/1107.3186.
- VERNIZZI, F. & WANDS, D. (2006). Non-gaussianities in two-field inflation. *JCAP* **0605**, 019.
- WALKER, A. (1936). *Proc. London Math. Soc.* **42**, 90.
- MALIK, KARIM A. & WANDS, DAVID (2000). Cosmological perturbations. *Phys. Rept.* **475**, 1-51.
- WEINBERG, S. (2008). *Cosmology. Oxford, UK: Oxford University Press*
- WEINBERG, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc..*
- WEYL, H. (1918). *Gravitation and electricity. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1918**, 465.
- XIA, J. *et al.*(2008). Determining Cosmological Parameters with Latest Observational Data *Phys. Rev.* **D78**, 083524.
- YOKOYAMA, S. *et al* (2007). Primordial Non-Gaussianity in Multi-Scalar Slow-Roll Inflation. *JCAP* **0707**, 013.