ULTRAFILTROS Y TEORÍA DE RAMSEY

CAMILO ANDRÉS ACEVEDO ARDILA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

ULTRAFILTROS Y TEORÍA DE RAMSEY

CAMILO ANDRÉS ACEVEDO ARDILA

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

DEDICATORIA

A mi familia, por su amor incondicional. A mi mamá y mi papá, por su apoyo constante. A mi nona, por su ternura y sabiduría. Y a mi hermano, por estar siempre ahí.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Universidad Industrial de Santander por brindarme el espacio para desarrollar esta tesis. A mi director, Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, por su guía y dedicación. Y a mis evaluadores, Michael Alexander Rincón Villamizar y Rafael Fernando Isaacs Giraldo, por su valioso aporte académico.

CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO: ULTRAFILTROS Y TEORÍA DE RAMSEY [1]

AUTOR: CAMILO ANDRÉS ACEVEDO ARDILA[2]

PALABRAS CLAVE: TEORÍA DE RAMSEY, ULTRAFILTROS, FILTROS, ESPACIO TOPOLOGICO, OPERACIÓN DE SEMIGRUPO, TEOREMA DE ELLIS-NUMAKURA, TEOREMA DE SCHUR, TEOREMA DE FOLKMAN, TEOREMA DE HINDMAN.

DESCRIPCIÓN:

En esta tesis, se demuestra la existencia de ultrafiltros no-principales y se estudian propiedades fundamentales de los filtros y ultrafiltros. Comenzamos definiendo filtros y demostrando algunas de sus propiedades clave, seguido de la definición de ultrafiltros y las propiedades que los caracterizan. La existencia de ultrafiltros no-principales permite establecer una demostración del teorema de Ramsey.
Posteriormente, estudiamos el espacio topológico de los ultrafiltros, introduciendo una operación de semigrupo sobre dicho espacio. Utilizando el teorema de Ellis-Numakura, se garantiza la existencia de un ultrafiltro no principal idempotente bajo esta operación. Este resultado es fundamental para demostrar el teorema de Schur, el teorema de Folkman y finalmente, el teorema de Hindman.

---

[1] Trabajo de grado.

[2] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: ULTRAFILTERS AND RAMSEY THEORY [3]

AUTHOR: CAMILO ANDRÉS ACEVEDO ARDILA[4]

KEYWORDS: RAMSEY THEORY, ULTRAFILTERS, FILTERS, TOPOLOGICAL SPACE, SEMIGROUP OPERATION, ELLIS-NUMAKURA THEOREM, SCHUR THEOREM, FOLKMAN THEOREM, HINDMAN THEOREM.

DESCRIPTION:

In this thesis, the existence of non-principal ultrafilters is demonstrated, and fundamental properties of filters and ultrafilters are studied. We begin by defining filters and proving some of their key properties, followed by the definition of ultrafilters and the properties that characterize them. The existence of non-principal ultrafilters allows for a proof of Ramsey's theorem.

Later, we study the topological space of ultrafilters, introducing a semigroup operation on this space. Using the Ellis-Numakura theorem, the existence of a non-principal idempotent ultrafilter under this operation is guaranteed. This result is crucial for proving the Schur theorem, the Folkman theorem, and finally, the Hindman theorem.

---

[3] Bachelor's thesis.

[4] Faculty of Sciences. School of Mathematics. Supervisor: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, PhD in Mathematics.

1. Introducción

“El desorden absoluto no existe.”

La teoría de Ramsey es una rama fundamental de la combinatoria que surgió a principios del siglo XX con el trabajo de Frank P. Ramsey. En términos muy generales, los teoremas de tipo Ramsey nos muestran que en cualquier conjunto suficientemente grande, dada una partición totalmente arbitraria de él, siempre existe un pedazo de la partición que tiene una estructura similar a la del conjunto completo.

Este resultado subraya la inevitabilidad de patrones en situaciones de complejidad combinatoria. Desde su formulación, problemas relacionados se han abordado en la teoría de grafos y la lógica matemática, en los que las pruebas combinatorias eran, inicialmente, la herramienta primaria para resolver estos problemas.

A mediados del siglo XX, sin embargo, la introducción del concepto de ultrafiltro ofreció nuevas herramientas para estudiar dichos problemas combinatorios. A diferencia de las pruebas combinatorias tradicionales, que suelen requerir cálculos explícitos y detallados, las pruebas basadas en ultrafiltros ofrecen demostraciones más elegantes y conceptuales.

Definiremos primeramente el concepto de filtro sobre un conjunto X, para luego definir a los ultrafiltros como filtros maximales. Mostraremos que en el espacio de los ultrafiltros βX se puede definir una topología y estructura de semigrupo. Particularmente, nos interesa la existencia de un ultrafiltro no-principal idempotente $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$. Veremos cómo la existencia de $\mathcal{U}$ será una herramienta principal para demostrar teoremas de tipo Ramsey. El presente documento está basado en las siguientes fuentes:

«Using Ultrafilters to Prove Ramsey-type Theorems » David J. Fernández-Bretón. «Using Ultrafilters to Prove Ramsey-type Theorems». En: *The American Mathematical Monthly* 129:2 (2022), págs. 116-131.

«Ultrafilters and Hindman’s Theorem » Guanyu Zhou. *ULTRAFILTER AND HINDMAN’S THEOREM*. Inf. téc. REU Research Paper. University of Chicago, 2017.

«Ultrafiltros y Aplicaciones » M Camúñez Triguero. «Ultrafiltros y Aplicaciones». 2022.

«Ultrafilters in Set Theory » Cecelia Higgins. «Ultrafilters in Set Theory». 2018.

«Model Theory » C. C. Chang y H. Jerome Keisler. *Model Theory*. 3rd. North-Holland, 1990.

«Topology » James Dugundji. *Topology*. Boston: Allyn y Bacon, 1966.

1.1. Preliminares

A partir de ahora, X siempre denotará un conjunto no vacío, y $\preceq$ un orden parcial.
Dado un subconjunto $A \subseteq X$, se escribirá

$$A^c := X \backslash A.$$

Mientras que $\mathcal{P}(X)$ denotará al conjunto potencia de X.

Definición 1.1.1. *Un elemento $m \in (X, \preceq)$ es **maximal** si*

$$(\forall x \in X)(m \preceq x) \Rightarrow (m = x).$$

Definición 1.1.2. *Un elemento $m \in (X, \preceq)$ es **minimal** si*

$$(\forall x \in X)(x \preceq m) \Rightarrow (m = x).$$

Definición 1.1.3. *Una **cadena** en $(X, \preceq)$ es un subconjunto $\mathcal{C} \subseteq X$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{C}$, se cumple $x \preceq y$ **o** $y \preceq x$.*

Lema 1.1.4. ***(Zorn)*** *Sea $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado en el que toda cadena tiene una cota superior (respectivamente, inferior). Entonces, X tiene al menos un elemento maximal (respectivamente, minimal).*

Definición 1.1.5. *$(X, *)$ es un **semigrupo** si $*$ es una operación cerrada y asociativa, ello quiere decir, respectivamente:*

- $a * b \in X$,
- $(a * b) * c = a * (b * c)$,

Para cualesquiera $a, b, c \in X$.

Definición 1.1.6. *Dado un elemento $a \in (X, *)$, diremos que a es **idempotente** si $a * a = a$.*

2. Filtros y Ultrafiltros

2.1. Filtros

El término “filtro” fue introducido por Henri Cartan en 1937, en su estudio sobre convergencia y estructuras topológicas en análisis funcional.

Definición 2.1.1. *$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es **filtro** si:*

1. *$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ **(cerradura bajo intersecciones).***
2. *$(A \in \mathcal{F} \wedge A \subseteq B) \Rightarrow B \in \mathcal{F}$ **(cerradura hacia arriba).***
3. *$\emptyset \notin \mathcal{F}$.*

Nótese que la cerradura hacia arriba implica $X \in \mathcal{F}$ para todo filtro $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

De vez en cuando diremos “$\mathcal{F}$ es filtro sobre X” para indicar que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es filtro.
En otras ocasiones sólo diremos que “$\mathcal{F}$ es filtro” cuando no haya ambigüedad.

Ejemplo 2.1.2. *La siguiente familia es conocida como el **filtro de Frechet**:*

$$\mathcal{F}_r = \{A \subseteq X \mid A^c \text{ es finito}\}.$$

Proposición 2.1.3. *Si X es un conjunto infinito, entonces $\mathcal{F}_r$ es filtro.*

Demostración. Si X fuese finito, ello implicaría $\emptyset \in \mathcal{F}r$, contradiciendo la definición de filtro. Las demás condiciones de filtro son directas. □

Proposición 2.1.4. *Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X cerrada bajo intersecciones finitas y tal que $\emptyset \notin \mathcal{A}$. Entonces, existe un filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$.*

Demostración. $\mathcal{F} = \{B \subseteq X \mid A \subseteq B$ para algún $A \in \mathcal{A}\}$ es filtro y contiene a $\mathcal{A}$. □

2.2. Ultrafiltros

El uso implícito de ultrafiltros puede rastrearse en los trabajos de Felix Hausdorff (1914), quien estudió conjuntos dirigidos y límites en espacios topológicos, y en los estudios sobre límites de redes de Kazimierz Kuratowski (1920).

Definición 2.2.1. *Dado un filtro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$.*
*Diremos que $\mathcal{U}$ es **ultrafiltro** si es maximal respecto a $\subseteq$.*

Es decir, un filtro $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, si dado otro filtro $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X), \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ implica $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Teorema 2.2.2. ***Alfred Tarski,1930.***
Dado un filtro $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, existe un ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Demostración. Sea $(\mathbb{F}, \subseteq)$ la familia de todos los filtros sobre X que contienen a $\mathcal{F}$.
Usaremos el lema de Zorn.

Sea $\mathcal{C}$ una cadena de $\mathbb{F}$. Mostraremos que $\mathcal{G} = \bigcup \mathcal{C}$ es cota superior de $\mathcal{C}$ en $\mathbb{F}$.
Es claro que $\mathcal{G}$ contiene a cada filtro que pertenece a $\mathcal{C}$, así que $\mathcal{G}$ es cota superior de $\mathcal{C}$.

Resta probar $G \in \mathbb{F}$, es decir, debemos demostrar que $\mathcal{G}$ es filtro sobre X.
Dados $A, B \in \mathcal{G}$, existen $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{C}$ tales que $A \in \mathcal{F}_1$ y $B \in \mathcal{F}_2$.
Como $\mathcal{C}$ es una cadena podemos suponer $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, luego $A, B \in \mathcal{F}_2$.
Entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_2$ y por tanto $A \cap B \in \mathcal{G}$.

Por otro lado, sea $A \in \mathcal{G}$ y $A \subseteq B$. Existe algún $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ tal que $A \in \mathcal{F}$.
Entonces $B \in \mathcal{F}$, lo cual implica $B \in \mathcal{G}$.

Finalmente, $\emptyset \notin \mathcal{G}$, puesto que $\emptyset$ no pertenece a ningún filtro de la cadena $\mathcal{C}$.

De lo anterior, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es filtro, y claramente $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. De manera que $\mathcal{G} \in \mathbb{F}$.
Luego, el lema de Zorn nos garantiza la existencia de un elemento maximal.
Es decir, un ultrafiltro sobre X que contiene a $\mathcal{F}$.

$\square$

Históricamente, la paradoja de Banach-Tarski (1924) y el lema del ultrafiltro de Tarski (1930) surgen en contextos distintos, pero ambos reflejan el uso profundo del axioma de elección.

2.3. Propiedades de los ultrafiltros

Definición 2.3.1. *Se denota a la* ***familia de todos los ultrafiltros sobre*** X *como:*

$$\beta X = \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X) \ | \ \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro}\}.$$

Proposición 2.3.2. *Dado un ultrafiltro* $\mathcal{U} \in \beta X$.
Si $Z \subseteq X$ *es tal que* $Z \cap Y \neq \emptyset$ *para todo* $Y \in \mathcal{U}$, *entonces* $Z \in \mathcal{U}$.

Demostración. Considere la familia:

$$\mathcal{A}_1 = \{Z \cap Y \mid Y \in \mathcal{U}\} \cup \{Z\}.$$

Se cumple $\emptyset \notin \mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_1$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Ahora considere:

$$\mathcal{A}_2 = \{B \subseteq X \mid A \subseteq B \text{ para algún } A \in \mathcal{A}_1\}.$$

$\mathcal{A}_2$ es filtro. Note que $Z \in \mathcal{A}_2$. Ahora, la siguiente familia es filtro:

$$\hat{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cup \mathcal{A}_2.$$

$\mathcal{U} \subseteq \hat{\mathcal{U}}$ y la maximalidad de $\mathcal{U}$ implican $\mathcal{U} = \hat{\mathcal{U}}$, y por tanto, $Z \in \mathcal{U}$.

□

A continuación, daremos una caracterización de los ultrafiltros, la cual muestra la similitud entre el comportamiento de los ultrafiltros y las leyes de la lógica proposicional.

Teorema 2.3.3. *Una familia* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es ultrafiltro si, y solo si, cumple:*

1. $A \cap B \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U})$.
2. $A \cup B \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (A \in \mathcal{U} \vee B \in \mathcal{U})$.
3. $A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{U}$.

Demostración. Suponga que $\mathcal{U}$ cumple con las propiedades $1, 2$ y 3. Veamos que $\mathcal{U}$ es filtro.

- La primera propiedad implica que $\mathcal{U}$ es cerrado bajo intersecciones.
- Dados $A \in \mathcal{U}$ y $A \subseteq B \subseteq X$. Como $B = A \cup B$, la propiedad 2 implica $B \in \mathcal{U}$.
  De esa manera se cumple que $\mathcal{U}$ es cerrado hacia arriba.
  Particularmente, ello implica $X \in \mathcal{U}$.
- Suponer $\emptyset \in \mathcal{U}$ contradice la tercera propiedad.
  Pues se tendría $\emptyset \in \mathcal{U}$ y $\emptyset^c = X \in \mathcal{U}$. Por tanto, $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

Así, queda verificado que $\mathcal{U}$ es filtro. Resta ver que es $\mathcal{U}$ filtro maximal.

Sea $\mathcal{F}$ otro filtro tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, necesitamos probar $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Para ello, suponga $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{U}$.
Es decir, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \notin \mathcal{U}$.
Por la tercera propiedad del enunciado, ello implica $A^c \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$.
Pero por la cerradura bajo intersecciones de $\mathcal{F}$, se tendría $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{F}$.
Contradiciendo que $\mathcal{F}$ es filtro. De esta manera, necesariamente se cumple $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.
Así, $\mathcal{U}$ es ultrafiltro (filtro maximal).

Ahora suponga que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, veamos que cumple con 1, 2 y 3.

3: La implicación suficiente se debe a que $\mathcal{U}$ es filtro.
Para la necesaria, suponga $A^c \notin \mathcal{U}$ y $A \notin \mathcal{U}$.
Por la proposición 2.3.2, existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que $A \cap Y = \emptyset$.
Es decir $Y \subseteq A^c$.
Por cerradura hacia arriba de $\mathcal{U}$ obtenemos $A^c \in \mathcal{U}$, una contradicción.

1: La implicación necesaria ya se cumple por definición de filtro.
Para la implicación suficiente suponga $A \cap B \in \mathcal{U}$ a la par que $A \notin \mathcal{U} \vee B \notin \mathcal{U}$.
Por la propiedad 3 se tiene $A^c \in \mathcal{U} \vee B^c \in \mathcal{U}$.
Por la cerradura hacia arriba se tiene $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \in \mathcal{U}$.
Pero ello es una contradicción de 3.

2: La implicación necesaria se cumple por la cerradura hacia arriba de $\mathcal{U}$.
Para la suficiente suponga $A \cup B \in \mathcal{U}$ y $A, B \notin \mathcal{U}$.
Por la propiedad 3, ello implica $A^c, B^c \in \mathcal{U}$.
Luego, se cumple $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in \mathcal{U}$, contradiciendo 3.

□

Nótese que en la demostración anterior demostramos primero la implicación necesaria de la propiedad 3. Y a partir de ella demostramos las propiedades 1 y 2. Lo que nos permite caracterizar a los ultrafiltros de una forma más práctica:

Teorema 2.3.4. ***Caracterización de los ultrafiltros.***
Un filtro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es ultrafiltro si $A \notin \mathcal{U} \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$ para cualquier $A \subseteq X$.

El teorema 2.3.4 será utilizado en la proposición 3.2.4.
La siguiente propiedad de los ultrafiltros será utilizada en los teoremas tipo Ramsey:

Proposición 2.3.5. *Dado un ultrafiltro $\mathcal{U} \in \beta X$. Si $A \in \mathcal{U}$ es de la forma:*

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

entonces existe un índice $k \leq n$ tal que $A_k \in \mathcal{U}$.

Adicionalmente, si $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $i \neq j$, entonces el índice k es único.

Demostración. Suponga $A_i \notin \mathcal{U}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Por la caracterización de los ultrafiltros, esto implica:

$$A_i{}^c \in \mathcal{U} \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Luego, por la cerradura bajo intersecciones de $\mathcal{U}$ se cumple que

$$A_1{}^c \cap A_2{}^c \cdots \cap A_n{}^c \in \mathcal{U}.$$

Esto es equivalente a $A^c = X \backslash (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \in \mathcal{U}$.
Esto último implica que $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{U}$, contradiciendo que $\mathcal{U}$ es filtro.

Por otro lado, suponga $A_{k_1}, A_{k_2} \in \mathcal{U}$ y $A_{k_1} \cap A_{k_2} = \emptyset$.
Ello implica $\emptyset \in \mathcal{U}$, contradiciendo que $\mathcal{U}$ es filtro.
Por tanto, el índice k es único si los conjuntos A_i son disjuntos.

□

2.4. Ultrafiltros no-principales

Definición 2.4.1. *Para cada $x \in X$, se define el **ultrafiltro principal** $\mathcal{U}_x$ como:*

$$\mathcal{U}_x := \{A \subseteq X \mid x \in A\}.$$

Diremos que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es **no-principal** si no existe $x \in X$ tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_x$. Los ultrafiltros no-principales son especialmente importantes para resolver problemas tipo Ramsey.

Teorema 2.4.2. ***Existencia de los ultrafiltros no-principales.***
Dado un conjunto infinito X, existe $\mathcal{U} \in \beta X$ no-principal.

Demostración. Como X es infinito, $\mathcal{F}_r = \{A \subseteq X \mid A^c \text{ es finito}\}$ es filtro.
Por el teorema 2.2.2: Existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{U}$.
Si $\mathcal{U}$ fuera principal existiría $x \in X$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U}$.
Pero se cumple $\{x\}^c \in F_r \subseteq \mathcal{U}$.
Por la cerradura bajo intersecciones de $\mathcal{U}$, se cumple $\emptyset = \{x\} \cap \{x\}^c \in \mathcal{U}$.
Contradiciendo que $\mathcal{U}$ es filtro. Por tanto, $\mathcal{U}$ es no-principal. □

La siguiente propiedad es importante para la teoría de Ramsey:

Proposición 2.4.3. *Sea $\mathcal{U} \in \beta X$ no-principal. Entonces, todo conjunto $A \in \mathcal{U}$ es infinito.*

Demostración. Suponga $A = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_n\} \in \mathcal{U}$.
Por la proposición 2.3.5, existe un único $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\{x_n\} \in \mathcal{U}$.
Se cumple $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_{x_n}$, pues dado $B \in \mathcal{U}$, se cumple $B \cap \{x_n\} \in \mathcal{U}$.
Ello implica $B \cap \{x_n\} \neq \emptyset$ implicando $x_n \in B$, luego, $B \in \mathcal{U}_{x_n}$ y así, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_{x_n}$.
Como $\mathcal{U}$ es filtro maximal, necesariamente se tiene $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{x_n}$, contradiciendo que $\mathcal{U}$ es no-principal.

$\square$

3. El espacio de los ultrafiltros βX

La topología que definiremos sobre βX es conocida como la compactificación de Stone-Čech, desarrollada en 1937 por **Marshall Stone** y **Eduard Čech**. Las demostraciones de esta sección se basan en Zhou, *ULTRAFILTER AND HINDMAN'S THEOREM*.

3.1. Topología en βX

En βX definiremos una topología. Primero definiremos sus abiertos básicos.

Definición 3.1.1. *Dado $A \subseteq X$, se define:*

$$[A] := \{\mathcal{U} \in \beta X \mid A \in \mathcal{U}\}.$$

Nótese que $\beta X = [X]$.

Proposición 3.1.2. *Dados $A, B \subseteq X$, se cumplen:*

I. $[A] \cup [B] = [A \cup B]$.

II. $[A^c] = [A]^c$.

III. $[A] = [B] \leftrightarrow A = B$.

Demostración. I. Dado $\mathcal{U} \in [A] \cup [B]$, se cumple $A \in \mathcal{U}$ o se cumple $B \in \mathcal{U}$.
En ambos casos por la cerradura hacía arriba de $\mathcal{U}$ se cumple $A \cup B \in \mathcal{U}$.
Por tanto $\mathcal{U} \in [A \cup B]$, lo que implica $[A] \cup [B] \subseteq [A \cup B]$.

Para demostrar la otra contenencia, tome $\mathcal{U} \in [A \cup B]$, ello implica $A \cup B \in \mathcal{U}$.
Asuma $\mathcal{U} \notin [A] \wedge \mathcal{U} \notin [B]$.
Entonces se tiene $A \notin \mathcal{U} \wedge B \notin \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro se tiene $A^c, B^c \in \mathcal{U}$.
Por la cerradura bajo intersecciones de $\mathcal{U}$ se tiene $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathcal{U}$.
Lo cual es una contradicción, pues ello implicaría $\emptyset = (A \cup B) \cap (A \cup B)^c \in \mathcal{U}$.
Por tanto se tiene $[A] \cup [B] \supseteq [A \cup B]$ y finalmente se obtiene $[A] \cup [B] = [A \cup B]$.

II. Dado $\mathcal{U} \in [A^c]$, se tiene $A^c \in \mathcal{U}$ y por tanto $A \notin \mathcal{U}$. Ello implica $\mathcal{U} \in [A]^c$.

Por otro lado, dado $\mathcal{U} \in [A]^c$, ello implica $A \notin \mathcal{U}$.
Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro ello implica $A^c \in \mathcal{U}$.
Así, se tiene $\mathcal{U} \in [A^c]$.

III. Basta demostrar $[A] \subseteq [B] \leftrightarrow A \subseteq B$.

Suponga $A \subseteq B$. Dado $\mathcal{U} \in [A]$ se tiene $A \in \mathcal{U}$.

Por la cerradura hacia arriba del ultrafiltro $\mathcal{U}$ se tiene $B \in \mathcal{U}$.

Por tanto $\mathcal{U} \in [B]$, luego, se cumple $[A] \subseteq [B]$.

Por otro lado, suponga $[A] \subseteq [B]$ y $A \nsubseteq B$.

Defina $C = A \setminus B$. Veamos que C no es vacío:

Debido a $[A] \subseteq [B]$, existe un ultrafiltro $\mathcal{V} \in \beta X$ tal que $A, B \in \mathcal{V}$ y $\emptyset \neq A \cap B \in \mathcal{V}$. Si se tuviese $C = \emptyset$, ello implicaría $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{V}$, una contradicción.

Luego, C no es vacío.

Tome un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $C \in \mathcal{U}$, por $C \subseteq A$ se tiene $A \in \mathcal{U}$, ello implica $\mathcal{U} \in [A]$.

$[A] \subseteq [B]$ implica $B \in \mathcal{U}$, una contradicción, pues ello implica $\emptyset = B \cap C \in \mathcal{U}$.

□

En particular, el inciso 2 de la proposición 3.1.2 implica la proposición siguiente:

Proposición 3.1.3. *La familia:*

$$\{[A] \mid A \subseteq X\}$$

genera una topología en βX.

A partir de ahora asumiremos que βX tiene dicha topología asociada. Dicha topología es conocida como la **compactificación de Stone-Čech**.

Proposición 3.1.4. *βX es compacto Hausdorff para cualquier conjunto X.*

Demostración. Suponga que βX no es compacto.
Entonces existe una cubierta abierta de βX sin sub-cubierta finita.
Podemos asumir que dicha cubierta es de abiertos básicos, es decir, de la forma:

$$\{[A_\alpha] \mid \alpha \in I \wedge A_\alpha \subseteq X\}.$$

Tenga en cuenta que βX no es compacto y la proposición 3.1.2.
Entonces, para cualquier cantidad finita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I$, se cumple:

$$[A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \cup \cdots \cup A_{\alpha_n}] = [A_{\alpha_1}] \cup [A_{\alpha_2}] \cup \cdots \cup [A_{\alpha_n}] \neq \beta X = [X].$$

Entonces, por la tercer propiedad de la proposición 3.1.2 se tiene

$$A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \cup \cdots \cup A_{\alpha_n} \neq X.$$

Equivalentemente:

$$A^c_{\alpha_1} \cap A^c_{\alpha_2} \cap \cdots \cap A^c_{\alpha_n} \neq \emptyset.$$

Luego, la familia

$$\mathcal{A} = \{\bigcap_{i=1}^{k} A^c_{\alpha_i} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

cumple las hipótesis de la proposición 2.1.4, luego, existe un filtro que extiende a $\mathcal{A}$.
Por la proposición 2.2.2, dicho filtro se puede extender a un ultrafiltro $\mathcal{U} \in \beta X$.

Como $\{[A_\alpha] \mid \alpha \in I \wedge A_\alpha \subseteq X\}$ cubre a βX, podemos escoger $\alpha' \in I$ tal que $\mathcal{U} \in [A_{\alpha'}]$.
Ello implica $A_{\alpha'} \in \mathcal{U}$.
Pero, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ implica ${A_{\alpha'}}^c \in \mathcal{U}$.
Una contradicción, pues un conjunto y su complemento no pueden pertenecer simultáneamente al ultrafiltro $\mathcal{U}$.
De esta forma, queda demostrado que βX es compacto.

Ahora veamos que βX es Hausdorff.
Dados dos ultrafiltros distintos $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta X$, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $A \notin \mathcal{V}$.
Ello implica $A^c \in \mathcal{V}$.
De esta forma, $\mathcal{U} \in [A]$ y $\mathcal{V} \in [A^c]$.
Es decir, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ se encuentran en abiertos disjuntos de βX, luego, βX es Hausdorff.

□

3.2. Estructura algebráica en βX

En esta sección definiremos una operación asociativa en βX. Más adelante veremos bajo qué condiciones existe un elemento idempotente en βX respecto a dicha operación.

Definición 3.2.1. *Dado un semigrupo $(X, *)$ Hausdorff.*
*X es **semigrupo topológico por izquierda (S.T.I)** si para todo $a \in X$, la función dada por $x \mapsto a * x$ es continua.*

La definición anterior es normalmente llamada "left-topological semigroup". En algunas fuentes se habla de "right-topological semigroup" cuando la función dada por $x \mapsto x * a$ es continua.

Nuestra intención es definir una operación en βX cerrada y asociativa, la cual se basará en la siguiente definición.

Definición 3.2.2. *$(X, *)$ semigrupo. Dados $A \subseteq X$ y $x \in X$. Defina:*

$$A_x = \{y \in X \mid x * y \in A\}$$

Proposición 3.2.3. *$(X, *)$ semigrupo. Dados $A, B \subseteq X$ y $x \in X$. Se cumplen*

1. $(A \cap B)_x = A_x \cap B_x$.
2. $(A_x)^c = (A^c)_x$.
3. *Si $A \subseteq B$, entonces $A_x \subseteq B_x$.*
4. $(A_x)_y = A_{x*y}$.

Proposición 3.2.4. *Si $(X, *)$ es un semigrupo, $(\beta X, \circledast)$ es un semigrupo. Donde $\circledast$ sigue la siguiente regla:*

$$\mathcal{U} \circledast \mathcal{V} = \{A \subseteq X \mid \{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\},$$

para cualesquiera $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta X$.

Demostración. Primero veremos que $\circledast$ es cerrada. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta X$.
Debemos verificar que $\mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$ es ultrafiltro.
Demostraremos que cumple con las tres propiedades de la definición de filtro.

1. Suponer $\emptyset \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$ implica que existe $x \in X$ tal que $\emptyset = \emptyset_x \in \mathcal{U}$. Contradiciendo que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro. Por tanto, $\emptyset \notin \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$.
2. Sean $A, B \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$. Probaremos $A \cap B \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$.

   Las siguientes equivalencias se tienen debido a que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son ultrafiltros (cerrados bajo intersecciones) y el primer inciso de la proposición 3.2.3.

$$A \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V} \wedge B \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V} \wedge \{x \in X \mid B_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U}\} \cap \{x \in X \mid B_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U} \wedge B_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X \mid A_x \cap B_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X \mid (A \cap B)_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

$$\Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}.$$

Por tanto, $\mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$ es cerrado bajo intersecciones.

3. Sea $A \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$ y $B \subseteq X$ tal que $A \subseteq B$. Se cumple:

$$A \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V} \Leftrightarrow \{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}.$$

Por la proposición 3.2.3. Para todo $x \in X$, $A_x \subseteq B_x$. Luego, por la cerradura hacia arriba del ultrafiltro $\mathcal{U}$:

$$\forall x \in X : A_x \in \mathcal{U} \Rightarrow B_x \in \mathcal{U}.$$

Entonces:

$$\{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U}\} \subseteq \{x \in X \mid B_x \in \mathcal{U}\}.$$

Luego, por la cerradura hacia arriba del ultrafiltro $\mathcal{V}$:

$$\{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V} \Rightarrow \{x \in X \mid B_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V} \Leftrightarrow B \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}.$$

Por tanto, $\mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$ es cerrado hacia arriba.

Con estas tres propiedades demostradas, queda verificado que $\mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$ es filtro.
Para ver que es ultrafiltro, resta ver que se cumple la propiedad del teorema 2.3.4.
Es decir, $A \notin \mathcal{U} \circledast \mathcal{V} \Rightarrow A^c \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$ para todo $A \subseteq X$.

Sea $A \subseteq X$ tal que $A \notin \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$.
Las siguientes equivalencias se deben a que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cumplen con la caracterización dada en el teorema 2.3.4, y también se cumplen por el segundo inciso de la proposición 3.2.3.

$$A \notin \mathcal{U} \circledast \mathcal{V} \Leftrightarrow \{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U}\} \notin \mathcal{V}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U}\}^c \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \{x \in X \mid A_x \notin \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X \mid (A_x)^c \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \{x \in X \mid (A^c)_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}.$$

Así, concluimos que $\mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$ es ultrafiltro, y por tanto, $\circledast$ es cerrada.
Ahora veremos que $\circledast$ es asociativa. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W} \in \beta X$. Las siguientes equivalencias se dan por la definición de $\circledast$ y la cuarta propiedad de la proposición 3.2.3.

$$A \in \mathcal{U} \circledast (\mathcal{V} \circledast \mathcal{W})$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V} \circledast \mathcal{W}$$

$$\Leftrightarrow \{y \in X \mid \{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U}\}_y \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{W}$$

$$\Leftrightarrow \{y \in X \mid \{z \in X \mid y * z \in \{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U}\}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{W}$$

$$\Leftrightarrow \{y \in X \mid \{x \in X \mid A_{y*x} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{W}$$

$$\Leftrightarrow \{y \in X \mid \{x \in X \mid (A_y)_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{W}$$

$$\Leftrightarrow \{y \in X \mid A_y \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}\} \in \mathcal{W}$$

$$A \in (\mathcal{U} \circledast \mathcal{V}) \circledast \mathcal{W}.$$

Así, queda demostrado que $\circledast$ es asociativa.
Ya que la operación $\circledast$ es asociativa y cerrada, $(\beta X, \circledast)$ es semigrupo. □

Teorema 3.2.5. *Si $(X, *)$ es un semigrupo, entonces $(\beta X, \circledast)$ es un S.T.I.*

Demostración. Por la proposición 3.1.4, βX es Hausdorff.
Sea $\mathcal{U} \in \beta X$, basta ver que la función dada por $\mathcal{V} \mapsto \lambda_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$ es continua.

Sea $\mathcal{V} \in \beta X$ y sea W un abierto de βX que contenga a $\lambda_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$.
Para mostrar la continuidad de $\lambda_{\mathcal{U}}$, debemos hallar una vecindad de $\mathcal{V}$ de manera que su imagen bajo $\lambda_{\mathcal{U}}$ quede contenida en W.

$\mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$ está contenido en un abierto básico, el cual está contenido en W.
Es decir, existe $A \subseteq X$ tal que $\mathcal{U} \circledast \mathcal{V} \in [A] \subseteq W$. Ello implica $A \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$.

Sea $B = \{x \in X \mid \{y \in X \mid x * y \in A\} \in \mathcal{U}\}$.
Como se tiene $A \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{V}$, ello implica $B \in \mathcal{V}$, por lo que en particular, B no es vacío, pues $\mathcal{V}$ es filtro.

$B \in \mathcal{V}$ implica $\mathcal{V} \in [B]$. Recuerde que $[B]$ es abierto de βX. Veremos que para todo $\mathcal{J} \in [B]$ se cumplirá $\lambda_{\mathcal{U}}(\mathcal{J}) \in V$. Demostrando así la continuidad de $\lambda_{\mathcal{U}}$.

Sea $\mathcal{J} \in [B]$, ello implica $B \in \mathcal{J}$, es decir

$$\{x \in X \mid \{y \in X \mid x * y \in A\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{J}.$$

Lo anterior implica $A \in \mathcal{U} \circledast \mathcal{J}$. Lo cual conlleva $\lambda_{\mathcal{U}}(\mathcal{J}) = \mathcal{U} \circledast \mathcal{J} \in [A]$.
Así, para todo $\mathcal{J} \in [B]$, se cumple $\lambda_{\mathcal{U}}(\mathcal{J}) \in [A] \subseteq V$. Por tanto, $\lambda_{\mathcal{U}}$ es continua.

□

3.3. El teorema de Ellis-Numakura

Robert Ellis (1926–2013) fue un matemático estadounidense reconocido por sus contribuciones a la dinámica topológica y la teoría de semigrupos.

Katsumi Numakura fue un matemático japonés conocido por sus contribuciones a la teoría de semigrupos y anillos compactos.

Lema 3.3.1. *Si X es Hausdorff y $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia decreciente de compactos no vacíos, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ no es vacío y es compacto.*

Demostración. Veamos que el conjunto no es vacío.
Nótese que los conjuntos C_n son cerrados. Pues X es Hausdorff.
Sin pérdida de generalidad, supongamos $X = C_1$ y que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \emptyset$.
Ello implica $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus C_n) = X$, lo que implica que $\{X \setminus C_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento abierto de X.
Como X es compacto, existe un subconjunto finito $S \subset \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{n\in S}(X \setminus C_n) = X$,
y tomando complementos, $\bigcap_{n\in S} C_n = \emptyset$.
Dado que (C_n) es decreciente, existe $n_0 \in S$ tal que $\bigcap_{n\in S} C_n = C_{n_0} = \emptyset$, contradicción, pues cada C_n es no vacío.
Por lo tanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Ahora veremos que el conjunto es compacto.
Como cada C_n es cerrado en X, la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ también es cerrada en X.
Además, al estar contenida en cada C_n y siendo estos compactos, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es un subconjunto cerrado de un compacto, por lo que también es compacto. □

Teorema 3.3.2. ***(Ellis-Numakura).*** *Si $(X, *)$ es un S.T.I compacto, entonces existe un elemento idempotente $x \in X$.*

Demostración. Defina

$$\mathcal{T} = \{S \subseteq X \mid S \neq \emptyset \text{ y S es semigrupo compacto}\}.$$

Usaremos el lema de Zorn para garantizar la existencia de un semigrupo minimal $M \in (\mathcal{T}, \subseteq)$. Verificando que cualquier cadena de $\mathcal{T}$ tiene una cota inferior.
Después, veremos que cualquier elemento de M resultará ser idempotente.

Tome una cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ y considere $L = \bigcap \mathcal{C}$.

Probaremos $L \in \mathcal{T}$. Primeramente, L no es vacío y es compacto por el lema 3.3.1.
Ahora probaremos que L es semigrupo.

Note que $L \subseteq X$. La operación $*$ es asociativa en L, pues $*$ es asociativa en X.

Veamos que $*$ es cerrada en L. Dados $a, b \in L$, se cumple $a, b \in S$ para todo $S \in \mathcal{C}$, de ello se tiene $a * b \in S$ para todo $S \in \mathcal{C}$, de manera que $a * b \in L$. Por tanto, L es semigrupo.

De esta forma tenemos $L \in \mathcal{T}$. Ademas, es claro que L es cota inferior de $\mathcal{C}$.

Luego, por el lema de Zorn, existe un elemento minimal $M \in \mathcal{T}$.

Tome $x \in M \subseteq X$ arbitrario, Veremos que x es idempotente.

Como M es semigrupo, se tiene $x * M \subseteq M$.
Ahora, dados dos elementos $x * m_1$, $x * m_2 \in x * M$, se cumple que el elemento

$$(x * m_1) * (x * m_2) = x * (m_1 * x * m_2).$$

pertenece a $x * M$. Por tanto, $x * M$ es sub-semigrupo de X.

El conjunto $x * M$ es compacto, pues es imagen del compacto M a través de la función continua $m \mapsto x * m$. (Dicha función es continua ya que X es S.T.I).
De esta forma, tenemos que $x * M \in \mathcal{T}$.

Como se tiene $x * M \subseteq M$. Por la minimalidad de M en $\mathcal{T}$, debe darse $M = x * M$.
Ello implica $x \in x * M$. Luego, se tiene $x = x * m$ para algún $m \in M$. De manera que el conjunto:

$$\{m \in M \mid x * m = x\}.$$

no es vacío. Veremos que dicho conjunto pertenece a $\mathcal{T}$.

El conjunto es cerrado, debido a ser preimagen del conjunto cerrado $\{x\}$ bajo la función continua $m \mapsto x * m$. ($\{x\}$ es cerrado pues X es Hausdorff).

Luego, $\{m \in M \mid x * m = m\}$ es compacto por ser subconjunto cerrado de X y por la compacidad de X.

Finalmente, $\{m \in M \mid x * m = m\}$ es un semigrupo (la operación $*$ es cerrada en él), pues dados dos elementos m_1, m_2 en dicho conjunto, se tiene:

$$x * (m_1 * m_2) = (x * m_1) * m_2 = (x) * m_2 = x.$$

Por tanto, se cumple:

$$\{m \in M \mid x * m = x\} \in \mathcal{T}.$$

Como dicho conjunto está contenido en M. Por la minimalidad de M en $\mathcal{T}$, debe cumplirse

$$M = \{m \in M \mid x * m = x\}.$$

Ya que $x \in M$, se cumple $x * x = x$. Es decir, x es un elemento idempotente de X.

□

3.4. El semigrupo topológico $\beta\mathbb{N}$

A partir de ahora, nos concentraremos en el semigrupo $(\mathbb{N}, +)$. En particular, asumiremos la convención $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Es decir, $0 \notin \mathbb{N}$. Esto será importante en la proposición 3.4.2.
Por la proposición 3.2.4, el conjunto $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ es un semigrupo. Donde $\oplus$ es dada de la siguiente forma:

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid \{m \in \mathbb{N} \mid n + m \in A\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\}.$$

Para $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$.
Recuerde: dado $x \in X$, el ultrafiltro principal generado por x es $\mathcal{U}_x = \{A \subseteq X \mid x \in A\}$.

Proposición 3.4.1. *Dados* $x, y \in \mathbb{N} : \mathcal{U}_x \oplus \mathcal{U}_y = \mathcal{U}_{x+y}$.

Demostración. Veamos que $\mathcal{U}_{x+y} \subseteq \mathcal{U}_x \oplus \mathcal{U}_y$. Sea $A \in \mathcal{U}_{x+y}$.

$$A \in \mathcal{U}_{x+y} \Rightarrow y + x = x + y \in A$$

$$\Rightarrow x \in \{m \in \mathbb{N} \mid y + m \in A\} \Rightarrow \{m \in \mathbb{N} \mid y + m \in A\} \in \mathcal{U}_x.$$

Eso implica:

$$y \in \{n \in \mathbb{N} \mid \{m \in \mathbb{N} \mid n + m \in A\} \in \mathcal{U}_x\}.$$

Por tanto:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \{m \in \mathbb{N} \mid n + m \in A\} \in \mathcal{U}_x\} \in \mathcal{U}_y.$$

Por definición de la operación en $\beta\mathbb{N}$, se tiene $A \in \mathcal{U}_x \oplus \mathcal{U}_y$ y por tanto, $\mathcal{U}_{x+y} \subseteq \mathcal{U}_x \oplus \mathcal{U}_y$.

Por otro lado, tome $A \in \mathcal{U}_x \oplus \mathcal{U}_y$. Por la definición de $\oplus$ en $\beta\mathbb{N}$, se tiene:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \{m \in \mathbb{N} \mid n + m \in A\} \in \mathcal{U}_x\} \in \mathcal{U}_y.$$

Como dicho conjunto pertenece a $\mathcal{U}_y$, se cumple:

$$y \in \{n \in \mathbb{N} \mid \{m \in \mathbb{N} \mid n + m \in A\} \in \mathcal{U}_x\}.$$

Entonces $\{m \in \mathbb{N} \mid y + m \in A\} \in \mathcal{U}_x$.

Como dicho conjunto pertenece a $\mathcal{U}_x$, ello implica $x \in \{m \in \mathbb{N} \mid y + m \in A\}$.

O sea $y + x = x + y \in A$, por tanto $A \in \mathcal{U}_{x+y}$.
Así, se tiene $\mathcal{U}_x \oplus \mathcal{U}_Y \subseteq \mathcal{U}_{x+y}$ y por tanto $\mathcal{U}_x \oplus \mathcal{U}_y = \mathcal{U}_{x+y}$.

□

Nótese que la proposición anterior es verdadera debido a que la operación $+$ es conmutativa en $\mathbb{N}$.

Proposición 3.4.2. *Dado $x \in \mathbb{N}$, el ultrafiltro principal $\mathcal{U}_x$ no es idempotente en $(\beta\mathbb{N}, +)$.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{U}_x$ es idempotente, es decir, $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_x \oplus \mathcal{U}_x$.
Por la proposición 3.4.1, se tiene: $\mathcal{U}_x \oplus \mathcal{U}_x = \mathcal{U}_{x+x}$.
Entonces tenemos $\mathcal{U}_{x+x} = \mathcal{U}_x$.
Lo cual es contradictorio, pues $\{x + x\} \in \mathcal{U}_{x+x}$, pero $\{x + x\} \notin \mathcal{U}_x$.
Pues $x + x \neq x$ para todo $x \in \mathbb{N}$.

□

En la proposición anterior es importante considerar $0 \notin \mathbb{N}$, debido a que $0 + 0 = 0$.

Teorema 3.4.3. *Existe un ultrafiltro idempotente y no-principal sobre $(\mathbb{N}, +)$.
Donde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$*

Demostración. Ya que $(\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo, por los teoremas 3.2.5 y 3.1.4, $(\beta\mathbb{N}, +)$ es S.T.I y compacto.
Luego, por el teorema 3.3.2, existe un ultrafiltro idempotente $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$.
Finalmente, por la proposición 3.4.2, $\mathcal{U}$ es ultrafiltro no-principal sobre $\mathbb{N}$.

□

3.5. El espacio de los ultrafiltros no-principales $\beta X \backslash X$

En la sección anterior vimos que existe un ultrafiltro no-principal idempotente $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$. Para ello supusimos que $(\mathbb{N}, +)$ no tiene elementos idempotentes ($0 \notin \mathbb{N}$). En esta sección veremos una forma alternativa de probar la existencia de dicho ultrafiltro sin eliminar al cero del conjunto de los números naturales.

Definición 3.5.1. *Se define a la **familia de los ultrafiltros no-principales** como:*

$$\beta X \backslash X := \{\mathcal{U} \in \beta X \mid \mathcal{U} \text{ es no-principal}\}.$$

Proposición 3.5.2. *$\beta X \backslash X$ es compacto.*

Demostración. Por el teorema 3.1.4, sabemos que βX es compacto.
Como $\beta X \backslash X \subseteq \beta X$, basta ver que $\beta X \backslash X$ es cerrado.

Para ello, probaremos que $(\beta X \backslash X)^c$ es abierto. Sea $\mathcal{U} \in (\beta X \backslash X)^c$.

$\mathcal{U} = \mathcal{U}_x$ para algún $x \in X$.

$\mathcal{U}$ es punto interior, pues $\{\mathcal{U}_x\} = [\{x\}]$ es el abierto básico que contiene a $\mathcal{U}$ y está completamente contenido en $(\beta X \backslash X)^c$.
Por tanto, $(\beta X \backslash X)^c$ es abierto y $\beta X \backslash X$ es cerrado (compacto).

$\square$

Definición 3.5.3. *Un semigrupo* $(X, *)$ *es* ***bien comportado*** *si dados dos elementos* $a, z \in X$*, el conjunto* $\{y \in X \mid z * y = a\}$ *es finito o vacío.*

Proposición 3.5.4. *Si* $(X, *)$ *es un semigrupo bien comportado, emtonces* $(\beta X \backslash X, \circledast)$ *es semigrupo.*

Demostración. La operación $\circledast$ es asociativa en $\beta X \backslash X$, pues lo es en βX. Basta ver que es cerrada.

Dados $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta X \backslash X$, queremos ver $\mathcal{U} \circledast \mathcal{V} \in \beta X \backslash X$.
Suponga $\mathcal{U} \circledast \mathcal{V} \notin \beta X \backslash X$. Es decir, $\mathcal{U} \circledast \mathcal{V} = \mathcal{U}_a$ para algún $a \in X$. Entonces:

$$\{a\} \in \{A \subseteq X \mid \{x \in X \mid A_x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\}.$$

Ello implica

$$B = \{x \in X \mid \{y \in X \mid x * y = a\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}.$$

B no es vacío pues pertenece a $\mathcal{V}$. Tome $z \in B$. Entonces:

$$C = \{y \in X \mid z * y = a\} \in \mathcal{U}$$

Como X es bien comportado, C es vacío o finito.
Contradiciendo que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, o que $\mathcal{U}$ es no-principal (proposición 2.4.3). $\square$

Teorema 3.5.5. *Si* $(X, *)$ *es bien comportado, existe un utrafiltro no-principal idempotente* $\mathcal{U} \in (\beta X \backslash X, \circledast)$.

Demostración. Como $(X, *)$ es bien comportado, $(\beta X \backslash X, \circledast)$ es semigrupo.
$(\beta X \backslash X, \circledast)$ es S.T.I, pues $(\beta X, \circledast)$ lo es,
pues, la continuidad de la función $x \mapsto a * x$ se hereda por subconjunto.
Ademas, $(\beta X \backslash X, \circledast)$ es compacto.
Luego, por el teorema de Ellis-Numakura:
Existe un elemento idempotente $\mathcal{U} \in (\beta X \backslash X, \circledast)$. $\square$

Corolario 3.5.6. *Existe un ultrafiltro no-principal idempotente sobre* $(\mathbb{N}, +)$*.*
Donde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Demostración. Dados dos naturales $a, z \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{y \in \mathbb{N} \mid z + y = a\}$ es finito o vacío.
Por tanto, $\mathbb{N}$ es bien comportado. Lo que implica que $\oplus$ sea cerrada en $\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$.
Por la proposición 3.5.4, $(\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}, \oplus)$ es S.T.I y compacto.
Luego, por el teorema de Ellis-Numakura, existe un elemento idempotente $\mathcal{U} \in (\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}, \oplus)$

$\square$

4. Teoría de Ramsey

En su artículo *"On a Problem of Formal Logic"* (1928) Frank P. Ramsey. «On a Problem of Formal Logic». En: *Proceedings of the London Mathematical Society* 30.4 (1930), págs. 264-286. DOI: `10.1112/plms/s2-30.1.264`, Frank P. Ramsey abordó un problema sobre la consistencia de sistemas lógicos. Se preguntaba si, dado un conjunto infinito de proposiciones, siempre es posible encontrar un subconjunto infinito donde todas sean compatibles entre sí. Para resolverlo, desarrolló un método combinatorio que demostró que, en cualquier partición suficientemente grande, siempre existe una estructura ordenada.

La siguiente proposición es clara a partir de la operación definida en la proposición 3.2.4. Esta proposición será frecuentemente usada para demostrar los teoremas de tipo Ramsey.

Proposición 4.0.1. *Dados $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ ultrafiltro idempotente y $A \in \mathcal{U}$, se cumple:*

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \{y \in \mathbb{N} \mid x + y \in A\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}.$$

4.1. Teorema de Ramsey

Definición 4.1.1. *Dado un conjunto X y un número natural $k \in \mathbb{N}$, se define la colección de subconjuntos de k elementos de X como*

$$[X]^k = \{A \subseteq X \mid \mid A \mid = k\}.$$

A partir de aquí, dada una función f con dominio $[X]^2$, denotaremos $f\{x, y\} := f(\{x, y\})$.

Teorema 4.1.2. ***(Ramsey).*** *Dado un conjunto infinito X y una función*

$$f : [X]^2 \to \{0, 1\},$$

existe un subconjunto infinito $Z \subseteq X$ tal que f es constante en $[Z]^2$.

Demostración. Como X es infinito, por el teorema 2.4.2 existe un ultrafiltro no-principal $\mathcal{U}$ sobre X. Cada elemento $x \in X$ induce en X una partición de la siguiente manera:

$$X = \{x\} \cup \{y \in X \mid f\{x, y\} = 0\} \cup \{y \in X \mid f\{x, y\} = 1\}.$$

Como $X \in \mathcal{U}$, la proposición 2.3.5 implica que uno de estos conjuntos pertenece a $\mathcal{U}$, descartando la opción de $\{x\} \in \mathcal{U}$, pues $\mathcal{U}$ es no-principal.
Ahora defina los dos siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in X \mid \{y \in X \mid f\{x, y\} = 0\} \in \mathcal{U}\},$$

$$B = \{x \in X \mid \{y \in X \mid f\{x, y\} = 1\} \in \mathcal{U}\}.$$

Ya que $X = A \cup B$, nuevamente, uno de estos dos conjuntos pertenece a $\mathcal{U}$.
Sin pérdida de generalidad suponga $A \in \mathcal{U}$.

Por cada $x \in A$, denotaremos $A_x = \{y \in X \mid f\{x, y\} = 0\}$.

Ahora construiremos el conjunto Z del enunciado.
Construiremos por recursión una sucesión $(x_n)_n$ tal que:

$$x_n \in A \cap A_{x_1} \cap A_{x_2} \cap \cdots \cap A_{x_{n-1}} \text{ para cada } n \geq 2.$$

Tome $x_1 \in A$, esto quiere decir que $A_{x_1} \in \mathcal{U}$.
Como $\mathcal{U}$ es filtro, tenemos entonces $A \cap A_{x_1} \neq \emptyset$.
Ahora tome $x_2 \in A \cap A_{x_1}$, esto implica $f\{x_1, x_2\} = 0$.
Como $A_{x_2} \in \mathcal{U}$, podemos tomar $x_3 \in A \cap A_{x_1} \cap A_{x_2}$.
Ello implica $f\{x_1, x_3\} = 0$ y $f\{x_2, x_3\} = 0$.
Como $A_{x_3} \in \mathcal{U}$, tome $x_4 \in A \cap A_{x_1} \cap A_{x_2} \cap A_{x_3} \ldots$

Sea $Z = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Verifiquemos que f es constante (igual a cero) en $[Z]^2$:
Dado $\{x_j, x_k\} \in [Z]^2$, sin pérdida de generalidad podemos asumir $j < k$.
Por la construcción de Z, esto implica $x_k \in A_{x_j}$, y por ello se tiene $f\{x_j, x_k\} = 0$.

$\square$

4.2. Teorema de Schur

El teorema de Hindman es una generalización del teorema de Rado y Folkman, el cual es una generalización del teorema de Schur. Una forma de demostrar estos teoremas es mediante la existencia de un ultrafiltro no-principal idempotente sobre $(\mathbb{N}, +)$. Dicha existencia fue demostrada de formas distintas en las proposiciones 3.4.3 y 3.5.6.

Teorema 4.2.1. ***(Schur).*** *Dada una función $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, f es constante en algún conjunto de la forma $\{m, n, m+n\} \subseteq \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro idempotente no-principal sobre $\mathbb{N}$. Tenemos la partición de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 1\}.$$

Alguno de estos conjuntos pertenece a $\mathcal{U}$, sin pérdida de generalidad suponga

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\} \in \mathcal{U}.$$

Por la proposición 4.0.1 tenemos

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \{y \in \mathbb{N} \mid x + y \in A\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}.$$

Tome un elemento

$$m \in A \cap \{x \in \mathbb{N} \mid \{y \in \mathbb{N} \mid x + y \in A\} \in \mathcal{U}\},$$

entonces se cumple que

$$f(m) = 0 \text{ y } A_m = \{y \in \mathbb{N} \mid m + y \in A\} \in \mathcal{U}.$$

Ahora tome $n \in A \cap A_m$, esto implica $f(n) = 0$ y $m + n \in A$, o sea, $f(m+n) = 0$.
Hemos mostrado que f es constante sobre $\{m, n, m+n\}$.

□

4.3. Teorema de Folkman

El teorema de Folkman fue demostrado de manera independiente por varios matemáticos, incluyendo a Richard Rado y J.H. Sanders. Ronald Graham, Bruce Lee Rothschild y Joel Spencer lo denominaron "teorema de Folkman" en memoria de Jon Folkman.

Definición 4.3.1. *Dado $X \subseteq \mathbb{N}$, el conjunto de **sumas finitas** de X se define como:*

$$FS(X) = \{\sum_{x \in F} x \ \mid \ F \subseteq X \text{ es finito y } F \neq \emptyset\}.$$

Observación 4.3.2. *Nótese que dado $a \in X$, se tiene $FS(\{a\}) = \{a\}$.*

Teorema 4.3.3. ***(Folkman).*** *Dada una función $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ y un número natural $n \in \mathbb{N}$, existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ tales que f es constante en $FS(x_1, x_2, \dots, x_n)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro no-principal idempotente sobre $\mathbb{N}$.
Demostraremos por inducción que dados $A \in \mathcal{U}$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente:

Existen distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$ tales que $FS(x_1, x_2, \dots, x_n) \subseteq A$.

El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos que esto se cumple para un número natural $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, veremos que también se cumple para $n + 1$.

Como $A \in \mathcal{U}$, por la proposición 4.0.1, se cumple:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \{y \in \mathbb{N} \mid x + y \in A\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U},$$

luego, el conjunto

$$A^* = A \cap \{x \in \mathbb{N} \mid \{y \in \mathbb{N} \mid x + y \in A\} \in \mathcal{U}\}$$

pertenece a $\mathcal{U}$. Por la hipótesis de inducción, existen $x_1, x_2, \dots, x_n$ tales que

$$FS(x_1, x_2, \dots, x_n) \subseteq A^*.$$

Se denotará $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Note que para todo $z \in A^*$, el conjunto

$$A_z = \{y \in \mathbb{N} \mid z + y \in A\}$$

pertenece a $\mathcal{U}$, así que, en particular, $A_z \in \mathcal{U}$ para todo $z \in FS(X)$. Sea

$$B = A \cap \bigcap_{z \in \mathrm{FS}(X)} A_z.$$

Notemos que B es infinito, pues pertenece a $\mathcal{U}$. Por lo anterior, es posible tomar $x_{n+1} \in B$ tal que x_{n+1} sea distinto a todos los elementos de $FS(X)$.
De esta manera, si $z \in FS(X)$, entonces $z + x_{n+1}$ pertenece a A.

Ello implica $FS(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) \subseteq A$. n

Finalmente, considere la partición

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 1\}.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $A = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\} \in \mathcal{U}$.
Por lo demostrado arriba, para todo $n \in \mathbb{N}$, existen $x_1, x_2, \ldots x_n$ tales que
$FS(x_1, x_2, \ldots x_n) \subseteq A$; es decir, f es constante en $FS(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

$\square$

4.4. Teorema de Hindman

El Teorema de Hindman establece que si los números naturales se dividen en un número finito de subconjuntos, existe un subconjunto infinito tal que todas las sumas finitas de elementos distintos de este subconjunto pertenecen al mismo subconjunto de la partición.

Este resultado está relacionado con una conjetura formulada en 1971 por Ronald Graham y Bruce Lee Rothschild, quienes buscaban extender resultados previos en teoría de particiones y combinatoria aditiva. En 1974, Neil Hindman proporcionó una demostración combinatoria de esta conjetura, lo que llevó a que el resultado lleve su nombre.

Teorema 4.4.1. ***(Hindman).*** *Dada una función $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, existe un conjunto infinito $X = \{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que f es constante en $FS(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no-principal idempotente sobre $\mathbb{N}$.

Primero demostraremos lo siguiente:

Dado $A \in \mathcal{U}$ existe un conjunto infinito X tal que $FS(X) \subseteq A$.

Construiremos por recursión una sucesión $(A_n)_n$ de conjuntos en $\mathcal{U}$ y de puntos $x_n \in A_n$.
Para luego definir $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y verificar $FS(X) \subseteq A$.

Sea $A_1 = A$. Por la proposición 4.0.1 se tiene

$$A_1{}^* = \{x \in \mathbb{N} \mid \{y \in \mathbb{N} \mid x + y \in A_1\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}.$$

Luego, $A_1 \cap A_1{}^*$ pertenece a $\mathcal{U}$.
Tome $x_1 \in A_1 \cap A_1{}^*$.
Se cumple $\{y \in \mathbb{N} \mid x_1 + y \in A_1\} \in \mathcal{U}$.

Defina $A_2 = A_1 \cap \{y \in \mathbb{N} \mid x_1 + y \in A_1\}$.
Se cumple $A_2 \in \mathcal{U}$. De nuevo por la proposición 4.0.1:

$$A_2{}^* = \{x \in \mathbb{N} \mid \{y \in \mathbb{N} \mid x + y \in A_2\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}.$$

Tome $x_2 \in A_2 \cap A_2{}^*$ de manera que $x_2 > x_1$, ello es posible, pues el conjunto es infinito.
Luego $\{y \in \mathbb{N} \mid x_2 + y \in A_2\} \in \mathcal{U}$.
Defina $A_3 = A_2 \cap \{y \in \mathbb{N} \mid x_2 + y \in A_2\}$.
Entonces,

$$A_3{}^* = \{x \in \mathbb{N} \mid \{y \in \mathbb{N} \mid x + y \in A_3\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}.$$

Tome $x_3 \in A_3 \cap A_3{}^*$ de manera que $x_3 > x_2$.

Este procedimiento se puede continuar recursivamente para construir una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de X y de conjuntos $A_n \in \mathcal{U}$ tales que $x_n \in A_n \cap A_n{}^*$, $x_n > x_{n-1}$ y

$$A_{n+1} = A_n \cap \{y \in \mathbb{N} \mid x_n + y \in A_n\}.$$

Denotaremos $X = \{x_1, x_2, ...\}$ a la sucesión obtenida.
Mostraremos $FS(X) \subseteq A$, para ello, basta probar:

Afirmación: Para todo $k \in \mathbb{N}$ y $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \in \mathbb{N}$, se cumple $x_{n_1} + x_{n_2} + \cdots + x_{n_k} \in A_{n_1}$.

Usaremos inducción sobre k.
El caso $k = 1$ es claro pues $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponga que la afirmación se cumple para $k \in \mathbb{N}$ y veremos que se cumple para $k + 1$.

Sean $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k+1} \in \mathbb{N}$ y $z = x_{n_2} + x_{n_3} + \cdots + x_{n_{k+1}}$.

Por hipótesis de inducción se cumple $z \in A_{n_2}$.
Como $n_2 > n_1$, entonces $n_2 \geq n_1 + 1$ y por tanto, $A_{n_2} \subseteq A_{n_1+1}$.
Además, tenemos que $A_{n_1+1} \subseteq \{y \in \mathbb{N} \mid x_{n_1} + y \in A_{n_1}\}$.
Por tanto $z \in \{y \in \mathbb{N} \mid x_{n_1} + y \in A_{n_1}\}$, y así, $x_{n_1} + z \in A_{n_1}$, es decir:

$$x_{n_1} + x_{n_2} + x_{n_3} + \cdots + x_{n_{k+1}} \in A_{n_1}.$$

Así queda demostrada la afirmación y $FS(X) \subseteq A$. n

Finalmente, considere la partición

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 1\}.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $A = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\} \in \mathcal{U}$.
Por lo mostrado anteriormente, existe un conjunto infinito $X = \{x_1, x_2, ...\}$ tal que

$FS(X) \subseteq A$, es decir, f es constante en $FS(X)$.

$\square$

Este teorema fue demostrado en 1974 por Neil Hindman mediante argumentos combinatorios. Sin embargo, en 1975, Frederick Galvin y Steven Glazer proporcionaron una demostración más elegante utilizando ultrafiltros.

Bibliografía

Camúñez Triguero, M. «Ultrafiltros y Aplicaciones». 2022 (vid. pág. 8).

Chang, C. C. y H. Jerome Keisler. *Model Theory*. 3rd. North-Holland, 1990 (vid. pág. 8).

Dugundji, James. *Topology*. Boston: Allyn y Bacon, 1966 (vid. pág. 8).

Fernández-Bretón, David J. «Using Ultrafilters to Prove Ramsey-type Theorems». En: *The American Mathematical Monthly* 129:2 (2022), págs. 116-131 (vid. pág. 8).

Higgins, Cecelia. «Ultrafilters in Set Theory». 2018 (vid. pág. 8).

Ramsey, Frank P. «On a Problem of Formal Logic». En: *Proceedings of the London Mathematical Society* 30.4 (1930), págs. 264-286. DOI: `10.1112/plms/s2-30.1.264` (vid. pág. 28).

Zhou, Guanyu. *ULTRAFILTER AND HINDMAN'S THEOREM*. Inf. téc. REU Research Paper. University of Chicago, 2017 (vid. págs. 8, 16).