Aproximación y Tendencia: nociones para la comprensión del límite de una función en un punto

Sergio Alexander Guarin Amorocho

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Directora:

Sandra Evely Parada Rico

Doctora en Ciencia en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2018

Agradecimientos

A Dios, por brindarme salud, entendimiento y mucha sabiduría en esta etapa de mi vida.

A mis padres Luciana y Gilberto, motores fundamentales de mi vida, apoyándome cada día en ser mejor persona y en alcanzar mis logros, este logro también es de ustedes.

A mis hermanos y demás personas de mi familia, por el apoyo que siempre me brindaron.

A Gelen, por su paciencia, comprensión, su amor y apoyo incondicional.

A Sandra Evely Parada Rico, por su pasión y entrega a la investigación, por todas las enseñanzas y motivaciones a continuar con mis estudios. Muy agradecido por todo su apoyo.

A los profesores Jorge Fiallo, Sandra Parada, Solange Roa y Luis Ángel Pérez por las enseñanzas recibidas en este proceso como investigador.

A mis evaluadores Vicente Liern Carrión y Jorge Enrique Fiallo quienes durante este proceso me aportaron sugerencias que fueron enriquecedoras para este documento y para mi aprendizaje.

A Edwin, Ingrid, Cesar, compañeros de maestría quienes me apoyaron en este proceso.

A Ailyn, Alex y todas las personas que estuvieron en algún momento para escucharme y alentarme a continuar con la investigación.

A los estudiantes del curso de cálculo diferencial PH3 por participar en la investigación.

A todos ustedes ¡Gracias!

Tabla de Contenido

Índice de Figuras

Índice de Tablas

RESUMEN

TÍTULO: APROXIMACIÓN Y TENDENCIA: NOCIONES PARA LA COMPRENSIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO*

AUTOR: SERGIO ALEXANDER GUARIN AMOROCHO**

PALABRAS CLAVES: CÁLCULO DIFERENCIAL, COMPRENSIÓN, LÍMITE DE UNA FUNCIÓN, APROXIMACIÓN, TENDENCIA, COMPLEMENTARIEDADES DE LA ACCIÓN Y EXPRESIÓN.

DESCRIPCIÓN:

En este documento presentamos resultados de una investigación de corte didáctico y cognitivo, la cual tuvo como objetivo diseñar, implementar y evaluar una secuencia de actividades que permita caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de cálculo diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia.

Con el propósito de lograr el objetivo, se utilizaron elementos de la Teoría para la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren (1989), la cual nos permitió describir la comprensión en términos de las complementariedades de la acción y la expresión que desarrollan estudiantes de un curso de cálculo diferencial de la UIS. Además, de algunos acercamientos de Blázquez y Ortega (2002), Pons (2014) y Mira (2016) para describir los objetos matemáticos que rodean el concepto de límite, y posteriormente aspectos metodológicos que proponen Fiallo y Parada (2018) para el desarrollo del pensamiento variacional, dado que la estructura que ellos plantean fue utilizada para el diseño de las actividades.

En la investigación se realizó la caracterización a priori de los primeros cinco niveles de comprensión matemática para el concepto de límite de una función en un punto, con el fin de que estos descriptores sean los lentes teóricos para analizar la comprensión del objeto matemático de estudio asociados a la secuencia de actividades que aquí se plantea.

Finalmente, esta investigación no tan solo se centró en caracterizar los niveles de comprensión del límite de una función en un punto, sino también tuvo el propósito de aportar una secuencia de actividades para que pueda ser usada por profesores de educación media o educación superior en sus aulas de clase para favorecer la comprensión del límite de una función en un punto.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Sandra Evely Parada Rico

APROXIMACIÓN Y TENDENCIA: NOCIONES PARA LA COMPRENSIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

ABSTRACT

TITLE: APPROACH AND TENDENCY: NOTIONS FOR UNDERSTANDING THE LIMIT OF A FUNCTION AT A POINT*

AUTHOR: SERGIO ALEXANDER GUARIN AMOROCHO**

KEYWORDS: DIFFERENTIAL CALCULUS, UNDERSTANDING, LIMIT OF A FUNCTION, APPROACH, TENDENCY, COMPLEMENTARITIES OF ACTING AND EXPRESSING.

DESCRIPTION:

In this document we present results of a didactic and cognitive research, which aimed to design, implement and evaluate a sequence of activities that characterizes that allows to characterize the levels of understanding of the concept of limit of a function at a point, in students who participate in a differential calculus course in which the notions of approximation and tendency are explored.

In order to achieve the objective, elements of the Theory for the Mathematical Understanding of Pirie and Kieren (1989) were used, which allowed us to describe the understanding in terms of the complementarities of the action and the expression developed by students of a course of differential calculus of the UIS. In addition, some approaches by Blázquez and Ortega (2002), Pons (2014) and Mira (2016) to describe the mathematical objects that surround the concept of limit, and subsequently methodological aspects proposed by Fiallo and Parada (2018) for the development of variational thinking, Given that the structure they propose was used for the design of the activities.

In the research, the priori characterization of the first five levels of mathematical comprehension was carried out for the concept of the limit of a function at a point, in order that these descriptors are the theoretical lenses to analyze the understanding of the mathematical object of study associated with the sequence of activities presented here.

Finally, this research was not only focused on characterizing the levels of understanding of the limit of a function at a point but also had the purpose of providing a sequence of activities so that it can be used by teachers of secondary education or higher education in their classrooms to promote understanding of the limit of a function at a point.

* Degree work

** Faculty of Sciences. School of Mathematics PhD. Sandra Evely Parada Rico

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje del Cálculo (diferencial e integral), ha sido una problemática ampliamente estudiada desde la Didáctica de las Matemáticas. En ese sentido, las investigaciones en esta línea generalmente son de corte histórico, epistemológico, cognitivo o didáctico (con el planteamiento de secuencia de enseñanza con o sin uso de las tecnologías), e incluso en algunas se hacen estudios que articulan dos o más de estas perspectivas. Dichas investigaciones, se justifican en que para los estudiantes no es fácil comprender los elementos abstractos que rodean el Cálculo, como por ejemplo: el infinito, el límite, aproximación, tendencia.

Específicamente, Hitt (2003) ha realizado reflexiones sobre las dificultades de aprendizaje del concepto de límite y de su comprensión. Cornu (1991), por su parte, afirma que una de las grandes dificultades al aprender el concepto de límite no emana solo de su complejidad o de su riqueza, sino en entender que todos los aspectos cognitivos del concepto de límite no se pueden aprender a partir de su definición matemática.

En particular, en la Universidad Industrial de Santander (UIS) el concepto de límite se encuentra en el programa curricular de la asignatura de Cálculo diferencial (asignatura del ciclo básico de los programas de ciencias e ingenierías). Contexto, desde el cual desarrollamos la investigación que aquí reportamos cuyo objetivo fue diseñar, implementar y evaluar una secuencia de actividades que permita caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia.

El estudio desarrollado fue de corte didáctico y cognitivo en el que se diseñan una secuencia de actividades para el estudio del límite de una función en un punto, la cual se implementa y se evalúa a la luz de la teoría de Pirie y Kieren. Para el diseño didáctico, se tuvieron en cuenta acercamientos didácticos a la comprensión del concepto de límite, como el de Fernández (2010), Pons (2014) y Mira (2016). Estos autores rescatan el uso de las nociones de aproximación, tendencia, concepción dinámica del límite, concepción optima del límite, concepción métrica del límite y el uso de las diferentes formas de representar una función (tabular, gráfica, algebraica).

Este reporte de investigación se organiza en cinco capítulos, los cuales paso a describir brevemente:

Capítulo uno. Planteamiento de la investigación. En esta sección se presenta el contexto y la problemática de esta investigación al mismo tiempo que se expone la pregunta y el objetivo de este trabajo. Además se presentan los antecedentes de la investigación organizados en cuatro grupos: acontecimientos históricos del concepto, aspectos epistemológicos, dificultades en la comprensión y acercamientos didácticos.

Capítulo dos. Aspectos teóricos y conceptuales. En esta sección se presentan los aspectos teóricos, conceptuales y metodológicos de manera detallada, sobre los cuales sustentamos la investigación en cuanto al diseño y análisis de la secuencia de actividades para la comprensión del límite de una función en un punto.

Capítulo tres. Proceso Metodológico. En este apartado damos cuenta de la metodología empleada para la obtención de los datos; el diseño y análisis de la secuencia de actividades; los instrumentos usados para la recolección de los datos; finalmente, aparece la selección del caso de estudio y la técnica utilizada para el análisis de los datos.

Capítulo cuatro. El caso de Kevin. Aquí presentamos los resultados del análisis de los datos en relación a la caracterización de los niveles de comprensión del límite de una función en un punto en términos de las complementariedades de la acción y expresión realizadas por Kevin durante la secuencia de actividades.

Conclusiones. En este apartado se sintetizan los hallazgos de la caracterización de los niveles de comprensión del límite de una función en un punto, se realiza una reflexión de la secuencia de actividades y algunas perspectivas de la investigación.

1. Planteamiento de la investigación

Para dar a conocer nuestro objeto de estudio presentamos en este capítulo dos apartados: i) el contexto y problemática de la investigación, y, ii) los antecedentes relacionados con los aspectos que intervienen en la investigación; como son: los acontecimientos históricos, los aspectos epistemológicos, algunas de las dificultades en la comprensión y los acercamientos didácticos que se han realizado. Estos apartados nos permitirán formular la pregunta y objetivo de la investigación.

1.1 Contexto y problemática de la investigación

Las matemáticas de la educación superior han generado un amplio campo de investigación en educación matemática, considerando cada vez más la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos, los cuales hacen parte del "Pensamiento Matemático Avanzado" (PMA). Según Tall (1991), dicho pensamiento es propio de los últimos años de bachillerato y de los primeros cursos universitarios (Tall, 1991; Dreyfus, 1991) donde se ha estudiado acerca de los errores y dificultades de los estudiantes en los problemas que conducen a los conceptos fundamentales del Cálculo.

En ese sentido, las investigaciones realizadas por Dreyfus (1991) hacen aportes a los procesos del PMA, puesto que para este autor “comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante” y es el resultado de “una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales”, considerando entre los procesos cognitivos del pensamiento matemático avanzado: abstraer, definir, analizar y formalizar. Y por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente psicológico, además de abstraer, se pueden citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar. Por lo cual las investigaciones cognitivas relacionadas con el PMA están interesadas en el estudio de estos procesos relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Además, autores como Vinner (1991) y Artigue et al. (1995) en sus investigaciones dan cuenta de los diferentes acercamientos metodológicos en la enseñanza del cálculo asociados al análisis del currículo, donde se rescata la importancia de aprovechar las intuiciones de los estudiantes para la construcción de nociones del pensamiento matemático avanzado.

Es por eso que en las últimas décadas se ha evidenciado el interés por parte de algunos investigadores, como Tall (1991), Dreyfus (1991), Artigue et al. (1995) en profundizar en el estudio de fenómenos asociados a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial e integral.

En particular la enseñanza del cálculo diferencial se constituye uno de los mayores desafíos de la educación matemática actual, entre los que se encuentra el concepto de límite; que según Blázquez y Ortega (2000), “para los estudiantes éste es un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender” (p. 331).

Por su parte, Hitt (2003) realiza reflexiones sobre el aprendizaje y enseñanza del cálculo donde muestra que “existen dificultades de aprendizaje en torno al concepto de límite que impiden de manera natural la comprensión del mismo”.

Entre las dificultades de aprendizaje, podemos destacar las reportadas por Tall (1992) y Hitt (2003) las cuales son generadas por el lenguaje, el uso de términos como “límite”, “tender” o “aproximarse”; tienen un significado ordinario que distorsiona el concepto matemático formal. En esto coincide Cornu (1991) quien menciona dificultades generadas por el deseo de reducir el límite a una operación algebraica; dificultades generadas por la identificación de una cantidad que se hace cada vez más pequeña un infinitésimo; y si es una cantidad que se hace arbitrariamente grande que sugiere la idea de un número infinito; también dificultades relacionadas con la idea de si el límite se alcanza o no, y la confusión sobre el paso de lo finito a lo infinito.

Dentro de otras investigaciones referentes a las dificultades de enseñanza y aprendizaje se destacan las que ocasionan los obstáculos epistemológicos. Según Artigue (1998) tienen que ver con el sentido común que evoca el término, ya que favorece una concepción del límite como una barrera intraspasable y no alcanzable, como una marca o último término de un proceso, que tiende al mismo tiempo a reforzar concepciones monótonas estrictas de la convergencia.

Así mismo, Cornu (1991) afirma que una de las grandes dificultades al aprender el concepto de límite no emana solo de su complejidad o de su riqueza, sino en entender que todos los aspectos cognitivos del concepto de límite resultarán muy difícil de aprender a partir de su definición matemática,

> …una de las múltiples facetas del concepto de límite es la idea de aproximación. Muchas veces "la idea de aproximación es el primer encuentro que los estudiantes tienen del concepto de límite a través de la noción dinámica de límite (p. 153).

Por tanto autores como Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev y otros (1994), plantean desde su obra que la idea del límite equivale a lo siguiente:

> …para determinar el valor exacto de una magnitud determinamos primero, no la magnitud en sí, sino una aproximación a ella. Sin embargo, no hacemos una única aproximación sino una serie de ellas, cada una de las cuales es más precisa que la anterior. Del examen de esta cadena de aproximaciones, esto es, del examen del proceso mismo de aproximación, determinamos unívocamente el valor exacto de la magnitud. Por este método, que es en esencia profundamente dialéctico, obtenemos una constante fija como resultado de un proceso o movimiento (p. 95).

Esta conceptualización conserva el rigor, es más dinámica y no está ligada al formalismo de Weierstrass, además es una opción más ventajosa en la comprensión del concepto de límite de una función.

En ese sentido para lograr la comprensión de conceptos matemáticos, tal como lo afirma Blázquez (1999) todo concepto está asociado a ciertas imágenes visuales, ciertos vínculos con otros conceptos y con el lenguaje habitual, diferentes propiedades en diferentes contextos, que pueden parecer intrínsecas al propio concepto, y, además se pueden expresar utilizando distintos sistemas de representación (gráfico, simbólico, numérico,…). Todo ello forma parte de una imagen conceptual así como lo reportan Tall y Vinner (1981) no siempre es coherente con la definición del concepto. Es por eso que comprender el concepto no es únicamente comprender la definición, sino crear una imagen conceptual rica y coherente.

En Colombia desde los documentos orientadores del currículo (NTCM, 2003. MEN, 1998), se propone propiciar aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no solo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos matemáticos. Estos documentos plantean que los estudiantes al terminar la formación preuniversitaria deben ser capaces de comprender relaciones y funciones, seleccionando y utilizando varias formas de representarlas, así como analizar el cambio en diversos contextos.

Sin embargo, autores como Artigue (1998), Hitt (2003), Fiallo y Parada (2014) plantean que los estudiantes que ingresan a la educación superior no traen los conocimientos y habilidades necesarias para afrontar los curso de álgebra y cálculo. A pesar de que los documentos orientadores del currículo hacen énfasis en el desarrollo homogéneo de procesos y contenidos, la prioridad está en el aprendizaje de conceptos perdiéndose así el equilibrio entre procesos y contenidos en asignaturas de matemáticas.

En particular una de las asignaturas de matemáticas del ciclo básico de los programas de ciencias e ingenierías de la Universidad Industrial de Santander (UIS) es la de Cálculo diferencial, la cual está enfocada en resolver problemas de variación, acumulación y tendencia. Estas nociones hacen parte de los conceptos matemáticos del cálculo como límites, derivadas e integrales.

A partir de estas consideraciones se pretende responder a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo comprenden el concepto de límite de una función en un punto, estudiantes que participan de un curso de Cálculo diferencial de la UIS en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia?

Y como objetivo de investigación nos hemos planteado diseñar, implementar y evaluar una secuencia de actividades que permita caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia.

1.2 Antecedentes y revisión bibliográfica

Orientamos la revisión de la literatura a investigaciones en educación matemática de la siguiente manera: en el primer apartado se rescatan algunos acontecimientos históricos del concepto de límite, con el fin de vislumbrar lo complejo que ha sido su conceptualización; un segundo apartado muestra la revisión de los aspectos epistemológicos del concepto de límite; en un tercer apartado se describen algunas de las dificultades en la comprensión del concepto de límite y por último un apartado en el que se hace la revisión de acercamientos didácticos, en los que se describen investigaciones enfocadas en la comprensión del concepto de límite de una función.

1.2.1 Algunos acontecimientos históricos del concepto de límite. La construcción de este apartado se hizo con la revisión de varios libros de historia de las matemáticas Boyer (1999), y algunas tesis de las que destacamos a Miranda (2000), Fernández (2010), Sánchez (2012), Pons (2014), Mira (2016) de las cuales se describen algunos aspectos históricos de la evolución del concepto de límite.

Siguiendo investigaciones de Cornu y Robinet (citados por Sánchez, 2012) en la evolución del concepto de límite se pueden considerar tres etapas. La primera etapa considera dos periodos, el primero conocido como periodo Clásico (S. V a. c) allí aparece una idea muy intuitiva del límite, éste fue utilizado implícitamente por algunos matemáticos de la época como Eudoxo de Cnido y Arquímedes en el método de exhaución; donde se resalta la aproximación como instrumento para solucionar algunos problemas de la época, uno de ellos era estimar la superficie del círculo, en la cual se inscriben y circunscriben polígonos regulares de n lados cuya superficie se conoce (en definitiva es la de n triángulos isósceles) luego se duplica el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos hasta que la diferencia quede bastante pequeña. Arquímedes halló la superficie del círculo con este método llegando a polígonos de noventa y seis lados.

Un segundo periodo que perteneció a esta primera etapa fue el periodo de la Revolución Científica (S. XVI a S. XVIII) caracterizado por los conceptos de cantidades infinitesimales o infinitamente pequeñas; se resaltan los trabajos de Kepler con su método de los infinitésimos con el cual se resolvían problemas de medidas de áreas y volúmenes. La base del método consiste en pensar que todos los cuerpos se descomponen en infinitas partes infinitamente pequeñas de áreas o volúmenes conocidos. Del mismo modo el método de los infinitesimales de Cavalieri fue utilizado para determinar áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos, pero él representaba estos objetos mediante una superposición de elementos cuya dimensión era una unidad menor que aquella a evaluar. En este mismo periodo Fermat planteó un método para buscar extremos de curvas, lo aplicó a las "parábolas e hipérbolas de Fermat" y consiste en considerar que en una "cumbre" o en un "valle" de la curva, cuando ε es pequeño, los valores de la función $f(x)$ y $f(x+\varepsilon)$ están tan próximos que se pueden tomar iguales. El método consiste en hacer $f(x+\varepsilon)=f(x)$, dividirlo por ε y tomar $\varepsilon=0$; si bien no habla de límite para presentar una idea intuitiva de derivada, está bastante cerca de un uso práctico del límite.

En cambio, Newton presenta una concepción de aproximación cinética infinitesimal, lo que se traduce como una "aproximación infinita" equivalente a aproximar tanto como se quiera (Sierpinska, 1987). Y por su parte Leibniz contribuyó al nacimiento del cálculo infinitesimal con su teoría sobre los diferenciales, lo cual muestra una transición a la siguiente etapa, al tratarse de un trabajo más algebraico, más formal.

La segunda etapa es conocida como la Fundamentación del Análisis Infinitesimal (segunda mitad del siglo XVIII) presentando una concepción más algebraica, queriendo extender las consideraciones de Newton y Leibniz a otro tipo de funciones (Fernández, 2010). Los matemáticos del siglo XVIII, que se preocuparon de la fundamentación del análisis, buscaban eliminar lagunas y clarificar los matices místicos, no se dieron cuenta de la necesidad del uso de la noción de límite. Ya en los trabajos propuestos por D'Alembert en 1743, el límite de una cantidad es visto como una cantidad fija a la cual se acerca o se aproxima tanto como se quiera. Este aporte da transición a una nueva etapa en la que el límite se concibe numéricamente.

Y la última etapa conocida como la Aritmetización del Análisis (siglo XIX y principios del siglo XX) aparecen concepciones expuestas por matemáticos como Cauchy, quien considera el límite como un valor fijo al cual se aproximan indefinidamente valores numéricos de una variable en tanto como se desee.

A Cauchy se le atribuye el honor de ser el primero en institucionalizar el concepto de límite como "objeto matemático" ya que antes se usaba como una "noción instrumental" en los procesos de aproximación. La principal situación que lleva a Cauchy a la búsqueda del rigor es su compromiso en la enseñanza, en el cual se propone alejarse de la manipulación de fórmulas y figuras geométricas.

Para llegar a la definición de límite, se requirió precisar "número real", para lo cual se necesita el concepto de "conjunto infinito" que incorpora el "infinito actual"; tarea que emprenden simultáneamente Cantor, Dedekind, Weierstrass (Medina, 2000).

En contra de las concepciones dinámicas, Weierstrass plantea su teoría estática de las variables, define el límite sin ninguna alusión a la aproximación y la tendencia (Boyer, 1999) siendo ésta la definición formal que ha prevalecido en los libros de cálculo diferencial, con las consecuencias en su enseñanza.

Estos acontecimientos a lo largo del desarrollo histórico del concepto de límite muestran la complejidad que ha adquirido y lo que implica la comprensión de la definición formal. "Las variaciones que ha tenido en el desarrollo de la matemática pone de manifiesto lo difícil que ha resultado su conceptualización" (Blázquez et al., 2006).

1.2.2 Aspectos epistemológicos del concepto de límite. Las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite han puesto de manifiesto la necesidad de estudiar la historia del concepto para localizar períodos de lento desarrollo y las dificultades que surgieron, las cuales pueden indicar la presencia de obstáculos epistemológicos (Cornu, 1991). Estos obstáculos de origen propiamente epistemológico son aquellos que no se pueden ni deben evitar, además su rol debería constituir un objetivo de conocimiento porque los podemos encontrar en la historia del propio concepto (Brousseau, 1999).

En ese sentido, investigadores como Sierpinska (citado por Miranda, 2000) y Cornu (1991) coinciden en que existen obstáculos epistemológicos en la historia del concepto de límite, encontrando los siguientes:

- El horror al infinito: esta expresión se adjudica a Cantor: "es una forma de miopía que impide ver el infinito actual, mientras que en su forma superior este infinito nos ha creado y nos mantiene, y en sus formas secundarias transformadas se manifiesta todo alrededor de nosotros y penetra hasta habitar en nuestros espíritus". Este obstáculo se encuentra en el grupo de los que rechazan el estatus de operación matemática del paso al límite.

- Obstáculos ligados a la noción de función, la aparición del concepto general de función tuvo un momento decisivo que permitió en el siglo XIX una formulación clara del concepto de límite, liberada de intuiciones físicas y geométricas. Incluye, entre otros, olvidar el dominio, reducir el estudio al de las funciones monótonas, restringirse a sucesiones, o confundir la función con los valores que toma, generando así ambigüedad entre los extremos y el límite.
- Obstáculos geométricos, este obstáculo radica en la transición de magnitud a número. La idea geométrica de que la diferencia entre una magnitud variable y una magnitud constante es su límite, justamente "magnitud" y no "número".
- Obstáculos lógicos, a la parte lógica de la definición de la noción de límite, se encuentra con la falta de cuantificadores, en donde, para definir la noción de límite se acude a la lengua natural y no simbólica.
- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas, el hecho de trabajar con cantidades variables mayores o menores que cero pero muy próximas a él, sin llegar nunca a ser cero o de cantidades mayores que cualesquiera otras.
- El sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso ¿se alcanza el límite o no?

Por otra parte Cornu (1991), asegura que existen otros obstáculos ligados a la noción de límite aparte de los ya mencionados y son

> …los errores que los estudiantes hacen son indicaciones valiosas para localizar obstáculos. La construcción de estrategias pedagógicas para la enseñanza de los estudiantes debe tomar tales obstáculos en cuenta. No se trata de evitarlas sino, por el contrario, de guiar al alumno para

> superarlas, viendo los obstáculos como partes constituyentes de la revisión conceptos matemáticos que se van a adquirir (p. 162).

Entre otros obstáculos epistemológicos, describimos los reportados por Tall (citado por Pons 2014) encontrados al analizar las producciones realizadas por los estudiantes:

- Tendencia a generalizar: Este obstáculo tiene la creencia de que una propiedad que sea común a todos los términos de una sucesión, también será una propiedad del límite, es conocida por “propiedad genérica del límite”.
- Imagen del concepto, se encuentra al intentar comprender el concepto de límite como la imagen que de dicho concepto se ha ido formando a partir de los primeros ejemplos que se han estudiado. Tall y Vinner (1981, p. 152) definieron “la imagen de un concepto describe la estructura cognitiva que está asociada con el concepto, e incluye todas las representaciones mentales, las propiedades asociadas y los procesos”.
- El obstáculo verbal, algunas de las posibles causas se deben al doble sentido del lenguaje coloquial o matemático, algunos posibles orígenes son debido a la palabra “límite”.

Como se ha mencionado anteriormente uno de los obstáculos epistemológicos del concepto de límite es la noción del infinito, en consecuencia Camacho y Aguirre (2001) diseñaron una situación didáctica a partir del análisis de libros de texto donde aparece este concepto y la revisión de obras históricas de las ideas que dieron origen, esto para introducir el concepto de límite infinito en un curso de Matemáticas I del nivel de enseñanza superior en las carreras de Ingeniería del Sistema Tecnológico. Para el desarrollo de la investigación los autores asumieron la hipótesis de cómo la enseñanza actual ha sido guiada usando la noción $\frac{a}{0} = \infty$.

Allí se plantearon cuestionarios para los cuales les interesaba ver el significado de las operaciones que contenían como hipótesis la expresión $\frac{a}{0}$. De lo cual encontraron las siguientes respuestas: no existe, indeterminado, uno, cero, infinito; esto les permitió identificar que existe un alejamiento de las operaciones con los números reales. Además, los autores describen que se tuvo en cuenta la participación de algunos profesores identificando que anidan de manera irreflexiva la operación como una parte del concepto. Esto refleja que se tiene una concepción intuitiva del límite infinito. Los autores concluyen que el desarrollo histórico y la aparición del obstáculo dejan entrever los problemas a los que se enfrentan los estudiantes para comprender tales nociones, los mismos resultados enfatizan en dificultades algebraicas, de la parte gráfica y de formalización que deben ser atendidas previa al diseño de la situación.

Como podemos observar, existen varios obstáculos que hacen parte del desarrollo histórico del concepto de límite. Su identificación fue necesaria para analizarla y tenerla en cuenta al momento de elaborar la secuencia de actividades, esto con el fin de que los estudiantes puedan superar estos obstáculos y logren comprender el concepto de límite de una función.

1.2.3 Algunas dificultades en la comprensión del concepto de límite de una función. El concepto de límite es una noción particularmente difícil, especialmente hace parte del pensamiento matemático avanzado. Y tiene una posición central que impregna todo el análisis matemático como fundamento de la teoría de aproximación, continuidad, y del cálculo diferencial e integral (Cornu 1991).

En ese sentido se han reportado algunas dificultades del concepto de límite en investigaciones realizadas por autores como Tall (1992) y Hitt y Páez (2004) los cuales han detectado dificultades cognitivas en las que se incluyen:

- Dificultades incorporadas en el lenguaje; en el uso de términos como “límite”, “tiende a”, “aproximación”, “tan pequeños como queramos” los cuales tienen significados coloquiales que entran en conflicto con los conceptos formales.
- El proceso de calcular el límite, no se realiza por simple aritmética o álgebra.
- Dificultades generadas por la identificación de una cantidad que se hace cada vez más pequeña “un infinitésimo” y una cantidad que se hace arbitrariamente grande “un número infinito”.
- Dificultades relacionadas con la idea de si el límite es alcanzado o no.
- Dificultades con el significado de la notación y el uso de los cuantificadores.
- Confusión sobre el paso de lo finito a lo infinito.

Ante estas dificultades, Tall (1992) consideró que los estudiantes actúan de dos maneras diferentes. Por una parte, intentan mediar lo que ya saben y lo que están aprendiendo reconstruyendo una nueva estructura de conocimientos coherente. Por otra parte, mantienen los elementos de conflicto en dos compartimentos separados, de manera que no se evoquen simultáneamente.

En la misma línea de investigación, Vrancken et al. (2006) plantean una secuencia de actividades, con el objetivo de detectar dificultades relacionadas con el concepto de límite y sus diferentes representaciones evaluando el grado de comprensión alcanzado por los estudiantes. Para el planteamiento y diseño de las actividades, estos autores utilizaron las diferentes maneras de representar una función mediante el lenguaje coloquial, numérico, visual y algebraico.

En el proceso de aplicación de las actividades del concepto de límite aparecen diferentes obstáculos que se manifiestan por los errores que cometen los estudiantes. Estos errores suelen derivarse de dificultades en los procesos de aprendizaje matemático o por la interacción de variables de la educación matemática y pueden ser persistentes en el tiempo. Analizaron los errores cometidos por los estudiantes, y detectaron las siguientes dificultades asociadas al concepto de límite de una función:

- Dificultades relacionadas con el concepto de función; se refiere a representar las gráficas de funciones, el dominio de la función, distinguir entre variable independiente y dependiente.
- Dificultades relacionadas con el concepto de límite; comprender el límite como lo que sucede cerca del punto y no en el punto, reconocer e interpretar los límites laterales, la manipulación algebraica de las leyes de las funciones cuyo límite se quiere determinar, comprender que calcular el límite no es siempre por sustitución.
- Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.

Las investigaciones mencionadas anteriormente nos han proporcionado información sobre las dificultades de los estudiantes en la comprensión del concepto de límite, en particular sobre el papel desempeñado por los diferentes modos de representación y el uso del lenguaje. En general los estudiantes pueden resolver ejercicios de obtención de límites por vía algebraica (haciendo sustituciones generalmente) pero sin comprender verdaderamente todas las implicaciones del concepto formal.

1.2.4 Acercamientos didácticos al concepto de límite de una función en un punto. La investigación en educación matemática ha mostrado que existen varios problemas para el aprendizaje del cálculo diferencial dificultando a una gran mayoría de estudiantes, e incluso a algunos profesores de enseñanza media en el acceso a los conceptos propios del cálculo, por tal motivo se mencionaran algunas investigaciones que se han centrado en el estudio del concepto de límite de una función.

El aprendizaje del concepto de límite es fundamental para la construcción adecuada de los conceptos del cálculo además que requiere de un conocimiento sobre los procesos infinitos. Hitt (2003) a su vez enfatiza en que si la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegaran a una comprensión profunda del cálculo. Del mismo modo enfatiza en el desarrollo de las habilidades ligadas a la visualización matemática ya que podrán impulsar a los estudiantes a un nivel más profundo de los conceptos fundamentales del cálculo.

1.2.4.1 Investigaciones que usan la noción de aproximación. En investigaciones desarrolladas desde la didáctica de la matemática se ha constatado que la definición métrica del concepto de límite de una función en un punto es demasiado formalista para los estudiantes; en ese sentido Blázquez y Ortega (2002) presentan una definición de límite de una función más dinámica con el uso de las nociones de aproximación y tendencia, según los autores es más apropiada para los estudiantes, conserva el rigor y no está ligada al formalismo de Weierstrass.

A partir de esa definición, Blázquez y Ortega (2002) plantean una secuencia didáctica que muestra cómo el estudiante llega a adquirir un lenguaje adecuado en términos de aproximación y tendencia, aunque el límite no sea plenamente comprendido en muchos casos. La secuencia consigue explotar la concepción dinámica del concepto de límite de una función, evidenciando que esa idea de aproximación perdura más en los estudiantes que la definición formal.

Así mismo Blázquez, Gatica y Ortega (2006) contrastan la noción de límite ligada a la definición métrica y la definición como aproximación óptima dada por Blázquez y Ortega (2002), donde se verifica que la definición como aproximación óptima la recuerdan y dominan mejor, en comparación con la definición métrica, estos autores concluyen que "la concepción dinámica del límite funcional prevalece sobre la definición formal".

En la misma línea de investigación Valls, Pons, y Llinares (2011) se plantean como objetivo caracterizar el papel de la coordinación de los procesos de aproximación vinculados a la comprensión del límite de una función. Los resultados indican que la comprensión métrica del límite en términos de desigualdades se apoya en que el estudiante sea capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, aunque no sea capaz de esta coordinación cuando las aproximaciones laterales no coinciden.

En su análisis indican que los estudiantes tienen dificultad para coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango en términos de desigualdades. De forma similar, Cottrill et al. (1996) indicaron que "solo unos pocos estudiantes" van más allá de la coordinación de los dos procesos y que solo tenían una vaga idea sobre desigualdades, y además que "no hubo estudiantes" que manifestaran una comprensión métrica del límite. Por otra parte plantean dos recomendaciones para la enseñanza del estudio realizado

- la necesidad de utilizar el modo numérico para la introducción del concepto de límite de una función como aproximación dinámica.

- introducir la no existencia del límite cuando los límites laterales son distintos en diferentes modos de representación.

1.2.4.2 Investigaciones que reportan el uso las representaciones. Un aspecto importante en la enseñanza del cálculo es favorecer los diferentes modos de representación: verbal, tabular, numérica, analítica y gráfica, ya que permite el desarrollo de habilidades para poder pasar sin inconvenientes de un sistema de representación a otro buscando que el estudiante entre en acción. Engler et al. (2007), diseñaron una secuencia didáctica teniendo en cuenta las tendencias de la didáctica y las dificultades recogidas de trabajos de investigación, enfocada para analizar el desarrollo de la comprensión de la idea de límite de una función usando los diferentes modos de representación.

En sus resultados describen que si bien los estudiantes no tuvieron dificultades en comprender los límites cuando la representación es tabular (numérica) o gráfica, un alto porcentaje de ellos no interpretaron el significado de límite al trabajar con la representación algebraica. Por otro lado, el sistema algebraico muestra una concepción formal de límite, estático y abstracto. En cambio, el numérico sugiere una forma dinámica vinculada con la realidad.

Continuando con sus investigaciones en la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo, Engler et al. (2008) diseñan una situación didáctica orientada a que los estudiantes estén suficientemente preparados para abordar el aprendizaje de límite infinito teniendo en cuenta el trabajo con funciones, considerando especialmente las distintas formas de representación y algunas cuestiones relacionadas con las aproximaciones retomando la noción de infinito en sentido positivo y negativo.

Fernández (2010) plantea una unidad didáctica que propone describir cómo los estudiantes expresan verbal y simbólicamente sus concepciones intuitivas sobre la noción de límite de una función en un punto, además de cómo interpretan y responden a tareas vinculadas con dicho concepto, analizando el significado de determinados términos claves que expresan diferentes facetas vinculadas al concepto de límite, entre las cuales destaca la representación simbólica, gráfica, gráfico-dinámico, figurativo, verbal y numérico; allí hace uso de los recursos tecnológicos a disposición. La unidad didáctica está dirigida a estudiantes de grado 1º de bachillerato de la rama de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud (España). Para ello plantea que su unidad didáctica está pensada en una secuencia de 8 tareas que debe hacerse, empezando desde funciones hasta llegar a asíntotas verticales, horizontales y oblicuas; que se desarrollará en siete secciones de clase.

La necesidad de investigar sobre el modo de facilitar a los estudiantes la superación de las limitaciones de aprendizaje asociadas al concepto de límite, ha llevado Fernández (2011) a continuar realizando sus estudios con el fin de explorar y describir los significados de límite finito de una función en un punto que los estudiantes muestran cuando realizan tareas de enunciado verbal, gráfico y simbólico.

Entre los resultados reportados por Fernández se observa que la mayor parte de los estudiantes que afirman que el límite no puede rebasarse, justifican su interpretación mediante la no “alcanzabilidad” del valor. Combinando ambas interpretaciones, se puede poner de manifiesto que el límite para los estudiantes tiene una propiedad de ser cota inalcanzable, se aprecia una mejor expresión de las nociones básicas cuando se cuenta con algún apoyo gráfico que cuando no se dispone de él. El resultado más novedoso es la interpretación del límite como lugar donde cambia de manera brusca la función. Tal interpretación afirma la existencia pero no concreta el valor especifico del límite de una función.

1.2.4.3 Investigaciones que reportan el uso de la tecnología. El análisis numérico y geométrico del límite de una función son dos acercamientos al concepto a los que en el aula no se les da la misma importancia que al proceso algorítmico, situación que les permite a Rangel et al. (2014) diseñar y aplicar un Diseño Instruccional (DI) con el uso de Winplot, para propiciar que estudiantes de cálculo de cuatro instituciones de educación superior, ITCG, UAN, UASLP y UJED aprendieran los temas de límites y continuidad.

Durante el desarrollo de la investigación evidenciaron que los estudiantes al inicio de las actividades tuvieron dificultades en la interpretación de los acercamientos numérico y geométrico del concepto, pero finalmente, se logró un análisis enriquecedor y constructivo, que coinciden con lo expresado por Hitt (2003) en donde expresa que la enseñanza del cálculo ha estado enfatizada a aspectos algebraicos sin atender otras representaciones, lo cual limita la comprensión de conceptos del cálculo. Después que aplicaron la estrategia didáctica a los estudiantes del grupo experimental se notó mejoría en aspectos como una mejor visualización de los temas, una mayor actividad en el tratamiento de los temas y un sobresaliente desempeño en la solución de problemas. Paralelamente, los estudiantes desarrollaron con esta estrategia, habilidades de trabajar en grupo, visuales, operativas y racionales, ya que la estrategia es más integradora que una enseñanza tradicional.

De igual modo y con el fin de generar habilidades desde el proceso de representación, Torroba et al. (2006) presentan una experiencia desarrollada con estudiantes universitarios para introducir el concepto de límite mediante una propuesta didáctica basada en la visualización con el uso de las TIC. La propuesta se desarrolló con estudiantes que cursaban la asignatura Análisis I correspondiente a las carreras Profesorado en Matemática y Licenciatura en Matemática que se dictan en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. La experiencia contaba con clase teórica usando software: introducción al concepto de límite mediante la definición formal, clase práctica en la sala de computación considerando aspectos gráficos y numéricos del concepto, clase de autoevaluación en la sala de computación con la inclusión de material extraído de internet. La intención era desarrollar en los estudiantes la visualización matemática, entendida como la habilidad de representar, transformar, generar comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual generada a través del uso de tecnología.

Una de las potencialidades didácticas de estas herramientas es la posibilidad de visualizar gráficamente, en movimiento, determinados conceptos teóricos o resultados que ilustran de forma lógica el concepto y permiten al profesor interactuar con sus estudiantes para obtener la relación de manera simbólica lo que lleva a una mejor y más rápida asimilación de los conceptos. La noción de límite usando habilidades ligadas a la visualización matemática posibilita establecer relaciones entre ε y δ cuando se analizaron los gráficos de distintos tipos de funciones.

También encontramos reportes que se han enfocado en la comprensión del concepto intuitivo de límite en estudiantes de undécimo grado escolar y primer año universitario que toman cursos regulares de cálculo diferencial, Zapata et al. (2014) quieren identificar cuáles son las concepciones que se generan en estudiantes entre la interface de undécimo grado escolar y primer año universitario que toman cursos regulares de cálculo diferencial sobre el concepto de límite. El mecanismo que utilizaron para la recolección de la información y para vislumbrar la comprensión del concepto es a partir de la entrevista semiestructurada de carácter socrático a medida que se avanza en ella, se iba interactuando con el software de GeoGebra debido a que ayuda al estudiante a visualizar representaciones que no son muy perceptibles en el momento.

Como resultados de investigación se evidencia que los estudiantes tienen idea sobre la representación gráfica y el acercamiento lateral con respecto a un punto y en algunos casos conciben el proceso límite como un valor alcanzable de carácter local que se puede acercar a dicho valor puntual lateralmente.

Aprovechando el uso de la tecnología, en especial del software matemático interactivo GeoGebra, Betancur et al. (2015a) presentan una propuesta didáctica para la iniciación al estudio del concepto de límite para estudiantes de bachillerato o de primer semestre universitario. La propuesta se fundamenta en un análisis del contexto histórico y la evolución del concepto, vislumbrando lo complejo del límite. Se usa la definición de límite propuesta por Blázquez y Ortega (2002) basada en la definición de D'Alembert, constituyéndose en un paso previo a la definición estática y formal del límite propuesta por Weierstrass, con el fin de mejorar la interpretación del límite como una idea de aproximación óptima.

Los problemas que se le plantean al estudiante se incluyeron en cada una de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, consideradas como estrategia didáctica para la organización de las actividades. Se esperaba orientar a los estudiantes a la comprensión del concepto y a adquirir herramientas conceptuales que le permitan posteriormente, comprender y aplicar la definición formal en los diferentes problemas y conceptos que involucran límites.

Continuando con el estudio, Betancur et al. (2015b) plantean un nuevo objetivo de investigación, describen cómo contribuye la noción de aproximación óptima en la comprensión del concepto de límite en los estudiantes pertenecientes al programa de ASAE. La experimentación se realizó con las actividades diseñadas en la propuesta didáctica que hacía uso de GeoGebra.

Los resultados obtenidos de acuerdo a esas actividades permitieron evidenciar, cómo una clara comprensión de la noción de aproximación óptima contribuye a precisar en el estudiante las ideas de tendencia en términos de distancias y además le facilita entender el límite como lo que sucede cerca del punto y no en el punto. Es por eso que una contribución importante que lleva la noción de aproximación óptima es precisar las ideas que se tienen de aproximación por medio de distancias y tomar estás para entender la tendencia a través de esas distancias; Blázquez y Ortega (2002) plantean esta idea de usar los errores absolutos para analizar la aproximación y la tendencia, permiten dar un panorama dinámico de lo que se esconde detrás de la definición formal del concepto de límite.

De acuerdo a este panorama se puede notar que en la didáctica del cálculo unos trabajos se han enfocado en describir algunos acontecimientos históricos del concepto de límite, otros han aprovechado los aspectos epistemológicos para diseñar actividades que favorezcan la comprensión del concepto de límite, también se tienen en cuenta las dificultades que se generan durante la enseñanza del concepto y los acercamientos didácticos que se proponen para mejorar su comprensión. Principalmente en esta investigación se quieren aprovechar algunas de las ideas mencionadas anteriormente con el fin de diseñar y rediseñar una secuencia de actividades en la que se exploren las nociones de aproximación y tendencia para favorecer la comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

2. Aspectos teóricos y conceptuales

En este capítulo exponemos los elementos teóricos con los cuales se sustenta la investigación antes planteada. Inicialmente, exponemos los elementos esenciales de la Teoría para la Comprensión

Matemática de Pirie y Kieren (1989), la cual nos permitió describir la comprensión en términos de las complementariedades de la acción y la expresión que desarrollan estudiantes de un curso de Cálculo diferencial de la UIS. En lo conceptual, retomamos algunos acercamientos de Blázquez y Ortega (2002), García et al. (2002), Pons (2014) y Mira (2016) para describir los objetos matemáticos que rodean el concepto de límite. Finalmente presentamos, los aspectos metodológicos que proponen Fiallo y Parada (2018) para el desarrollo del pensamiento variacional, dado que la estructura que ellos plantean fue utilizada para el diseño de las actividades. En el esquema de la Figura 1 se resumen los horizontes conceptuales y a continuación se describe cada uno de ellos.

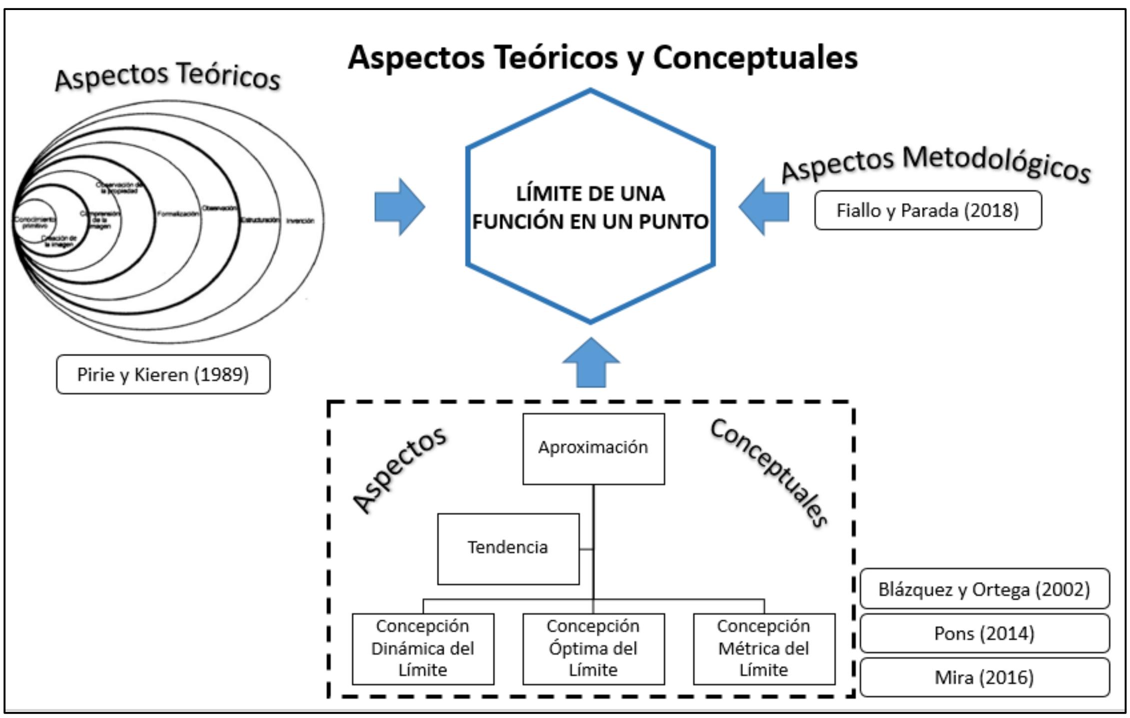


Figura 1. Esquema de los aspectos teóricos y conceptuales

2.1 Teoría para la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren

Para analizar la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, tendremos en cuenta la "Teoría de la Comprensión Matemática" de los profesores norteamericanos Susan Pirie y Thomas Kieren, quienes asumen como base la definición de comprensión proporcionada por Von Glasersfeld (citado en Meel, 2003) la cual se presenta en los siguientes términos:

> El organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe… entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes [de dichas estructuras] que podemos llamar comprensión (p. 235).

Basados en esta definición, Pirie y Kieren (1994) consideraran la comprensión como un todo dinámico, estratificado, recursivo, no lineal y jerarquizado de una reorganización de las estructuras del conocimiento. La teoría se constituye una herramienta que actúa como un lente a través del cual puede observarse el proceso de evolución de la compresión matemática de un individuo o de un grupo individuos.

2.1.1 Descripción de los niveles de la teoría de Pirie y Kieren. La teoría consiste en el análisis de la gradación de la comprensión de un concepto matemático. Esta teoría postula un modelo compuesto por ocho niveles que conforman su aspecto descriptivo y está dotado por unas características identificadas y analizadas por sus creadores; los ocho niveles describen la evolución de la comprensión matemática en cuanto a conceptos o relaciones entre conceptos. A continuación, se describe cada uno de los niveles de comprensión matemática.

- Nivel 1. Conocimiento primitivo

  Se refiere al punto inicial de la comprensión donde el estudiante atrae información básica a la situación de aprendizaje.

- Nivel 2. Creación de la imagen

En este nivel el estudiante es capaz de realizar distinciones con base a capacidades y conocimientos anteriores; como resultado, las acciones que se realizan en este nivel involucran el desarrollo de las concesiones entre los referentes y los símbolos. Estas imágenes no solo son pictóricas sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental.

- Nivel 3. Comprensión de la imagen

Las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente, imágenes orientadas por un proceso mental libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares (Pirie y Kieren, 1992). El estudiante puede usar estas imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos.

- Nivel 4. Observación de la propiedad

El estudiante puede examinar una imagen mental y determinar distintos atributos asociados con dicha imagen. Además de observar las propiedades internas de una imagen específica, el estudiante es capaz de observar las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales. De acuerdo con Pirie y Kieren, la diferencia entre el nivel 3 y nivel 4 es la habilidad para resaltar una conexión entre imágenes y explicar el método para verificar la conexión.

- Nivel 5. Formalización

El estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes. En este nivel el estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona (Pirie y Kieren, 1989). La descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas.

- Nivel 6. Observación

Este nivel muestra la capacidad de considerar y utilizar como referencia el pensamiento formal de la persona. Más allá de la relación del estudiante en la meta-cognición, el estudiante también es capaz de observar, estructurar y organizar los procesos de pensamiento personales, así como reconocer las ramificaciones de los procesos del pensamiento. En este nivel, el estudiante puede producir verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado.

- Nivel 7. Estructuración

En este nivel la comprensión del estudiante trasciende el tema particular para la comprensión que se encuentra en una estructura mayor, siendo capaz de explicar las interrelaciones de dichas observaciones mediante un sistema axiomático. (Pirie y Kieren, 1989)

- Nivel 8. Invención

En este nivel el estudiante tiene la capacidad de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crear preguntas novedosas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo.

Para el desarrollo de la investigación hemos considerado solo los primeros 5 niveles de comprensión matemática asociados al concepto de límite de una función en un punto. Esto es debido al contenido que se presenta en un curso de cálculo diferencial de la UIS con respecto a este concepto, para este caso el estudiante debería entender de forma intuitiva y analítica el límite de funciones, adquirir destrezas para calcular el límite de funciones y comprender el límite de una función.

Al analizar estos contenidos de acuerdo a los niveles de la Teoría de Comprensión Matemática que presentan Pirie y Kieren (1989), el estudiante al terminar el curso de cálculo diferencial debería encontrase en un nivel de Formalización para este concepto logrando comprender su definición formal. Para estar en niveles superiores el estudiante tendrá que realizar verbalizaciones relacionadas con la cognición matemática, sobre el concepto formalizado, haciendo uso de un sistema axiomático y plantear preguntas novedosas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo.

2.1.2 Características de la Teoría de Pirie y Kieren. Pirie y Kieren plantean un modelo dinámico que se refleja en sus diversos componentes, para ello describen las siguientes características.

- **Folding Back:** Redoblar o retornar a niveles inferiores para así afianzar o superar deficiencias, en términos de Piere y Kieren (1994):

> "El redoblamiento permite a una persona funcionar en un nivel exterior y enfrentarse con un desafío para regresar a un nivel de comprensión más interno con el fin de reconstruir esa comprensión como base para nuevos niveles externos de comprensión" (p. 173).

- **Los límites de falta de necesidad:** Se refieren al progreso del estudiante hacia una comprensión más elaborada y estable, que no requiere necesariamente de los elementos de los niveles más bajos (Pirie y Kieren, 1992). De esta manera se considera que un estudiante que se mueva entre límites de falta de necesidad ha logrado un importante cambio cualitativo en la comprensión de los conceptos expuestos.

- **Complementariedades de la acción y la expresión:** Pirie y Kieren (1994) consideran que cada nivel está conformado por una complementariedad de la acción y la expresión, además, cada uno de estos aspectos de la evolución de la comprensión son necesarios antes de pasar de cualquier estrato a otro.

> El último rasgo de la teoría es la estructura dentro de los mismos niveles. Creemos que más allá del conocimiento primitivo de cada nivel se compone de una complementariedad de acción y expresión y que cada uno de estos aspectos de la evolución de la comprensión son necesarios, antes de moverse desde cualquier nivel. Además, el crecimiento ocurre, actuando primero y luego expresando, pero con más frecuencia a través de y desde el movimiento entre estos aspectos complementarios. En cualquier nivel, la actuación (el desempeño) abarca toda la comprensión previa, suministrando continuidad con los niveles internos, y la expresión brinda comportamientos distintos a ese particular nivel (p. 176).

Esta característica expresa la importancia de dos aspectos fundamentales, que son registrados por los estudiantes cuando están comprendiendo conceptos matemáticos en situaciones de aprendizaje, y resaltan la importancia de expresar con respuestas, procedimientos, quizás no esperados, pero que pueden indicar una actitud innovadora o de descubrimiento de relaciones matemáticas.

Pirie y Kieren (1994) hablan de ciertos términos que sirven para etiquetar las complementariedades de la acción y la expresión para cada nivel, que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1.

Complementariedades de la acción y expresión del modelo de Pirie y Kieren 1994

	COMPLEMENTARIEDADES	
NIVEL	**ACCIÓN**	**EXPRESIÓN**
Conocimiento previo		
Creación de la imagen	Realización de la imagen	Análisis de la imagen
Comprensión de la imagen	Visualización de la imagen	Expresión de la imagen
Observación de la propiedad	Predicción de la propiedad	Registro de la propiedad
Formalización	Aplicación del método	Justificación del método
Observación	Identificar la característica	Descripción de la característica
Estructuración	Teorema	Demostración del Teorema
Invención		

2.2 Nociones que rodean el concepto de límite

El concepto de límite ha sido particularmente difícil de enseñar y aprender, propio del pensamiento matemático avanzado con una posición central en el análisis matemático, fundamental en la teoría de aproximación, de continuidad y del cálculo diferencial e integral (Cornu, 1991). En ese sentido, investigaciones realizadas por Blázquez y Ortega (2002), García et al. (2002), Pons (2014) y Mira (2016) han reportado que se deben tener en cuenta aspectos como: las nociones de aproximación y tendencia, la concepción dinámica del límite de una función en un punto, la concepción óptima del límite de una función en un punto y la concepción métrica del límite de una función en un punto.

Blázquez y Ortega (2002) usan las nociones de aproximación y tendencia con el fin de plantear una definición del concepto de límite funcional la cual los estudiantes recuerden fácilmente, esto de manera similar a como lo hizo D´Alembert, las cuales precisan de la siguiente manera:

> Aproximación: Una variable, que toma sus valores en un conjunto numérico, puede aproximarse a un cierto número si los errores absolutos que se cometen, considerando los valores de la variable como aproximaciones del número son cada vez menores.
>
> Tendencia: La variable tiende a un número cuando los valores son aproximaciones del número y además se aproximan más que cualquier otro valor, es decir, cualquier aproximación se puede mejorar con valores de la variable (p. 14).

De igual forma García et al. (2002) realizan un estudio orientado sobre *"la aproximación una noción básica en el cálculo"*, en el que se definen las nociones del siguiente modo:

> …la aproximación es una expresión relacional, que establece una relación entre un valor exacto y el valor aproximado, la posibilidad de aceptar que una representación es la representación aproximada de un valor exacto, exige usar la regla del error absoluto (p. 17).

En ese sentido, la tendencia exige una visualización de tipo numérico de los procesos infinitos de aproximación como un todo, lo que permite aceptar cierta regularidad en las aproximaciones obtenidas en el proceso para intuir un resultado final. Al respecto, García et al. (2002) mencionan que la aceptación de estas regularidades implican considerar que los "*errores absolutos"* de la aproximación se hacen tan pequeños como se desee.

El primer acercamiento que tienen los estudiantes con el concepto de límite de una función es a través de la noción de aproximación y mediante la concepción dinámica del límite planteada por Blázquez y Ortega (2002) de la siguiente manera:

> "Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se escribe $\lim_{x \to a} f(x)$, si cuando "x" se tiende al número "a", siendo distinto de "a", sus imágenes "$f(x)$" tienden a "L"" (p. 14).

Por tanto, la concepción métrica y óptima planteada por Cottrill et al. (1996) (citado en Mira, 2016) debe entenderse como un paso previo a la definición formal de límite.

Concepción óptima del límite:

"El valor L es el límite de $f(x)$ en "a" si, para todo valor de K muy próximo a L, existe otro valor h muy próximo a "a"[*], tal que los "x" que mejoran ese valor h, es decir que están más próximos a "a", hacen que sus imágenes $f(x)$ también mejoren el valor K cercano a L, y estén más cerca de L" (p. 48).

Concepción métrica del límite:

"Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se escribe $\lim_{x \to a} f(x)$, si cuando "$x - a$" en valor absoluto se aproxima a 0, "$f(x) - L$" en valor absoluto se aproxima a 0. En símbolos "$0 < |x - a| < \delta \ y \ |f(x) - L|$" (p. 48).

Estos elementos conceptuales nos permitieron diseñar y rediseñar las actividades de la secuencia, en la que se pretende favorecer la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo diferencial de la UIS.

2.3 Estructura metodológica para el diseño de actividades

Para el diseño de los talleres, que hacen parte de la secuencia de actividades, se tuvo en cuenta los aspectos metodológicos propuestos por Fiallo y Parada (2018), quienes plantean un curso de pre-cálculo en la UIS, el cual integra actividades organizadas secuencialmente, alrededor de uno o dos problemas, trabajo individual, trabajo en equipo y debate en el aula.

La secuencia didáctica del curso engrana la manipulación de medios computacionales con el trabajo con papel y lápiz, y el debate en el aula, la secuencia presenta una estructura intencional

[*] Aunque los autores no lo hacen explícitamente, están asumiendo que h es distinto de a.

que responde a las siguientes fases: exploración libre, socialización de los resultados obtenidos, exploración dirigida, explicación y por último una tarea retadora. Fases que utilizaremos para hacer el planteamiento de cada uno de los talleres exceptuando los talleres de conocimientos previos y conocimientos finales. Las cuales se describen a continuación:

i. **Información y exploración libre:** Al inicio de la actividad se plantea el problema relacionado con la temática a estudiar, para que el estudiante lo intente resolver de manera individual o en parejas. La idea fundamental de esta actividad consiste en que el estudiante utilice sus conocimientos escolares para resolver el problema de manera intuitiva y logre tener un acercamiento a la solución. En esta fase se espera que el estudiante identifique la necesidad de utilizar nuevos conceptos, de aclarar conceptos vistos en su bachillerato y que el profesor identifique las principales dificultades conceptuales y los errores generales de los estudiantes.

ii. **Socialización de los resultados obtenidos (puesta en común):** En cada actividad se concibe que el profesor promueva la participación de los estudiantes con el propósito de que ellos comuniquen sus soluciones y las discutan en grupo, expongan diferentes soluciones y presenten argumentos; en esta fase se espera que las dificultades y los errores emergentes de las actividades sean aprovechadas para confrontar a los estudiantes de manera que esto motive la necesidad de ofrecer una solución matemáticamente válida al problema planteado.

iii. **Exploración dirigida:** En esta fase se parte de la exploración de un archivo en GeoGebra para que, a través de la exploración y de la orientación guiada por preguntas, el estudiante encuentre respuestas al problema, plantee conjeturas y justifique matemáticamente los resultados visualizados en las diferentes representaciones que ofrece en GeoGebra.

iv. **Explicación:** En la actividad propuesta se sugiere la discusión con los estudiantes y con el profesor. También se promueve la participación de los estudiantes para que éstos planteen sus propias soluciones y las discutan con el grupo en general y con el profesor. El papel del profesor debe ser de promotor del debate, la reflexión y la discusión de las ideas expuestas, de tal manera que se llegue a la construcción del conocimiento, el cual es el objetivo de la actividad.

v. **Tarea retadora:** Se plantea al estudiante un nuevo problema para aplicar lo que aprendió. Se dice que es una tarea retadora porque se pretende mantener el enfoque de resolución de problema lo cual implica que no será una actividad mecánica sino exigente en cuanto al uso del conocimiento conceptual y procedimental para elaborar nuevas estrategias que lo conduzcan a la solución del problema.

3. Proceso Metodológico

En este capítulo describimos el proceso metodológico de la investigación, la cual es de corte didáctico y cognitivo. Para el análisis de los datos se empleó una metodología cualitativa que nos permitiera reconocer el nivel de comprensión del límite de una función en un punto, adquirido por estudiantes de un curso de cálculo diferencial.

Aquí se describen las fases realizadas durante la investigación, inicia con la revisión de un estudio preliminar, continuó con el diseño y análisis de la secuencia de actividades, termina con la selección del caso de estudio y análisis de los datos. A continuación se describen las ocho fases en las que fue estructurado el proceso metodológico de la investigación que se resume en el esquema de la Figura 2.

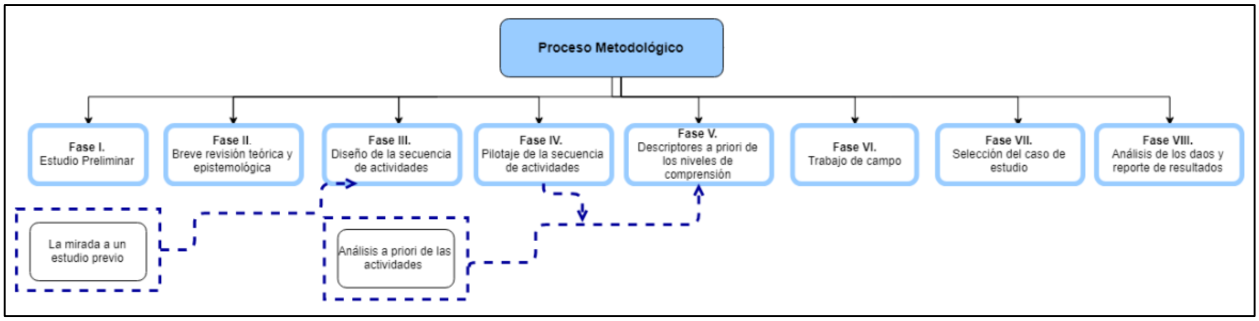


Figura 2. Esquema del proceso metodológico de la investigación

3.1 Fase I: Estudio preliminar.

El punto de partida de la investigación fue el diseño didáctico para el estudio del concepto de límite de una función en estudiantes de bachillerato o de primer semestre universitario, realizada por Betancur, Guarin, Parada y Fiallo (2015b). El diseño hizo parte de las actividades de las asignaturas de Didáctica del cálculo y Seminario de práctica, las cuales hacen parte del pensum de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS. La puesta en marcha de la propuesta nos permitió evidenciar que la conceptualización basada en la aproximación y tendencia, es más apta para los aprendizajes iníciales. Los resultados de esa investigación mostraron que se comprende mejor el concepto de límite de una función utilizando las nociones de aproximación y tendencia, debido a que se encuentra en un lenguaje más natural.

3.2 Fase II: Breve revisión teórica y epistemológica

La revisión de varios libros de historia de las matemáticas (Boyer, 1999), y algunas tesis de Maestría y Doctorado de las que destacamos a Miranda (2000), Fernández (2010), Sánchez (2012), Pons (2014), Mira (2016), han permitido vislumbrar aspectos históricos que dan cuenta de la evolución del concepto de límite, y lo complejo que ha sido su conceptualización. Al igual que los obstáculos epistemológicos reportados por Sierpinska (citado en Miranda, 2000) y Cornu (1991) que ha tenido el concepto a lo largo de la historia, y las dificultades encontradas por Tall (1992), Hitt y Páez (2004) que se presentan en la enseñanza del límite de una función.

La revisión realizada permitió considerar algunos aspectos que han contribuido en el desarrollo del concepto y a su vez tomarlos como referencia para el diseño de la secuencia de actividades que hará parte del trabajo de campo del estudio que estamos reportando para responder al objetivo de investigación: diseñar, implementar y evaluar una secuencia de actividades que permita caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia.

Para el diseño de la secuencia, además, fue necesario revisar el texto guía Cálculo Transcendentes Tempranas de Zill y Wring (2011) que se utiliza en el curso de cálculo diferencial de la UIS, esto con el fin de identificar el orden de los contenidos, el planteamiento metodológico de las actividades, los problemas que se utilizan para el estudio del límite de una función en un punto.

3.3 Fase III: Diseño de la secuencia de actividades

En esta fase se tienen en cuenta algunos acercamientos didácticos a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, planteados por Fernández (2010), Pons (2014) y Mira (2016). La estructura conceptual planteada por estos autores coincide en varios aspectos, a pesar de que parten de diferentes marcos teóricos. En dichas estructuras se hace uso de las nociones de aproximación, tendencia, la concepción dinámica del límite, la concepción optima del límite, la concepción métrica del límite y el uso de las diferentes formas de representar una función (tabular, gráfica, algebraica), los cuales favorecen la comprensión del objeto matemático de estudio. Esos acercamientos nos permitieron hacer el planteamiento de los siguientes talleres para la secuencia de actividades:

- Taller 1: Conocimientos previos
- Taller 2: Nociones de aproximación y tendencia
- Taller 3: Concepción dinámica del límite de una función en un punto
- Taller 4: Concepción óptima del límite de una función en un punto
- Taller 5: Concepción métrica del límite de una función en un punto
- Taller 6: Conocimientos finales

A continuación se hace el análisis a priori de cada uno de los talleres que hacen parte de la secuencia de actividades:

3.3.1 Taller 1: Conocimientos previos. Este taller tiene como objetivo identificar los conocimientos previos que posee el estudiante antes de iniciar el estudio del límite de una función en un punto. Para esto se plantean enunciados relacionados con: analizar funciones desde los diferentes tipos de representación, también pretendemos conocer qué conocimiento tiene el estudiante sobre las nociones de aproximación y tendencia de manera geométrica y funcional.

El tiempo previsto para el desarrollo del Taller 1 es de 120 minutos, se le solicita al estudiante responder cada uno de los enunciados y justificar de manera ordenada cada uno de los procedimientos que realice. A continuación se describen los enunciados del taller.

El primer enunciado muestra la representación gráfica de una función (ver Figura 3), que tiene como objetivo identificar si el estudiante reconoce que es posible evaluar cualquier elemento del dominio de la función, para así conocer el valor $f(x)$, que puede ser un valor exacto o un valor aproximado. Para el ítem a, se le pide que exprese el valor de la función cundo $x = -1$, a partir de la interpretación de la gráfica conoce que $f(-1) = -2$, en cambio para el ítem b, el estudiante debe realizar una estimación del valor de la función cuando $x = 2$, porque a simple vista no se puede deducir de manera exacta $f(2)$, esto por la escala de la gráfica, no es muy precisa cuando la imagen de la función toma valores que no son enteros, pero se puede decir que para $f(2) \approx 2{,}8$.

Ahora en los ítems c y d, el estudiante conoce un valor en el rango de la función y debe identificar cuál es ese valor en el dominio de la función que lo genera, por ejemplo para $f(x) = 2$, el estudiante puede trazar una recta paralela al $eje\ x$ que pase por $y = 2$ y observar que los puntos de intersección entre la recta y la gráfica de la función le indican que existen dos elementos en el dominio de la función que tienen como imagen el valor de 2, en este caso sucede cuando $x = -3$ y $x = 1$, del mismo modo se realiza para $f(x) = 0$, aquí se debe realizar una estimación de esos valores, los cuales pueden ser $x \approx -2{,}5$ y $x \approx 0{,}4$ que también muestran los cortes de la gráfica de la función con el $eje\ x$.

Por último se le solicita al estudiante expresar el dominio de la función como el conjunto de valores que toma la variable independiente, para este caso están en $[-3{,}3]$ y el rango de la función que son los valores que toma la variable dependiente en el $eje\ y$, que a partir de la representación gráfica se observa que estos se encuentran en el intervalo $[-2{,}3]$.

1. La gráfica de una función f se muestra en la Figura.
   a) Exprese el valor de $f(-1)$
   b) Estime el valor de $f(2)$
   c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 2$?
   d) Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$
   e) Exprese el dominio y rango de f.

   Justifique sus respuestas.

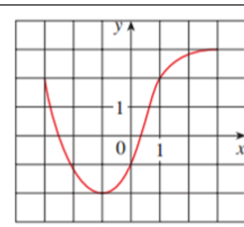


Figura 3. Ítem1 del Taller 1

El objetivo del segundo enunciado (ver Figura 4), es identificar como el estudiante concibe la relación entre aproximación y tendencia. Para este caso la aproximación se realiza cuando el punto C se aproxima al punto B, y la tendencia en el área del triángulo ABC.

2. ¿Qué sucede con el área del triángulo ABC cuando el punto C se aproxima a B? **Justifique** su respuesta.

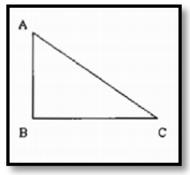


Figura 4. Ítem 2 del Taller 1

En un primer acercamiento, el estudiante puede ubicar el triángulo ABC en el plano cartesiano de tal manera que B quede sobre el origen, el segmento $\overline{AB}$ sobre el $eje\ y$ y el segmento $\overline{BC}$ sobre el $eje\ x$, esto con el fin de analizar el área del triángulo ABC en un caso particular. Por ejemplo si los vértices tienen coordenadas $A\ (0,5); B(0,0); C(6,0)$ el área del triángulo ABC es de $15\ u^2$ (ver Figura 5).

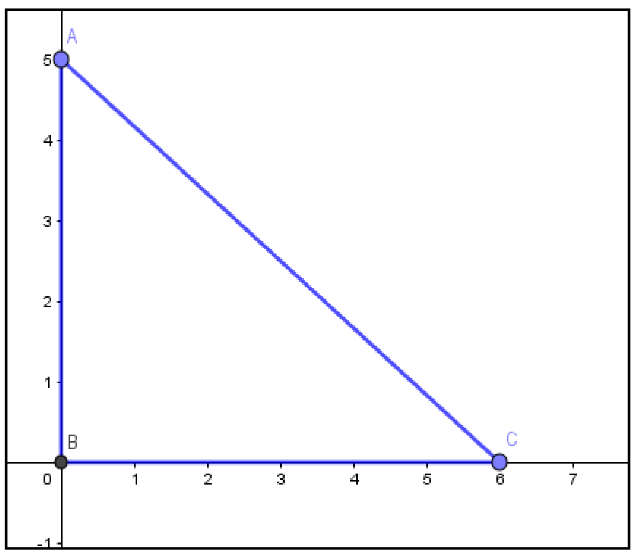
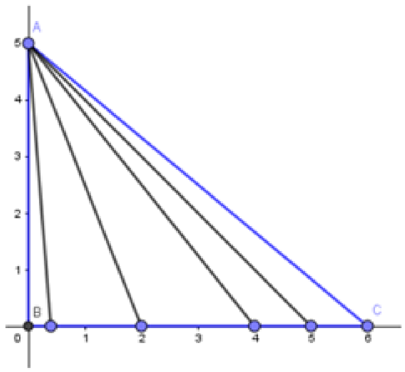


Figura 5. Caso particular del ítem 2 del Taller 1

Pero de acuerdo al enunciado, el punto C se empieza a aproximar a B, y el área del triángulo ABC empieza a disminuir, de modo que sí C es muy cercano a B el área del triángulo ABC tiende a cero. Esto sucede porque si se toma el segmento $\overline{BC}$ como la base del triángulo, sin importar cuál es su magnitud, la distancia entre el punto B y C cada vez es más pequeña que la anterior. Al calcular el área del triángulo ABC también disminuye, porque el área depende de la altura, que en este caso es constante y la base que es la que varía hasta aproximarse a B y tiende a ser cada vez menor (ver Figura 6).



Base (Segmento $\overline{BC}$)	Altura (Segmento $\overline{AB}$)	Área del Triángulo ABC
6	5	15
5	5	12,5
4	5	10
2	5	5
0,2	5	0,5
0,001	5	0,0025

Figura 6. Representación gráfica y tabular del ítem 2 del Taller 1

El objetivo del tercer enunciado del taller (ver Figura 7), es identificar la coordinación entre la aproximación y tendencia, y que el estudiante pueda justificar como se realiza la aproximación en este caso cuando el punto P se aproxima a O, lo que genera una tendencia sobre el punto Q y este va a tener una posición límite en el $eje\ y$.

Desde el punto de vista algebraico el estudiante puede definir que R sea el punto medio del segmento $\overline{OP}$ con coordenadas $\left(\frac{x}{2}, \frac{x^2}{2}\right)$; de modo que P va a estar sobre la parábola con coordenadas (x, x^2) y Q en el eje vertical $(0, a)$ con el propósito de hallar la posición límite. Por consiguiente se quiere expresar a "a" en términos de la variable x para analizar que sucede con Q a medida que P se aproxima al origen. Si el estudiante calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos O y P así $m_{OP} = \frac{x^2-0}{x-0} = x$ y la pendiente de la mediatriz es $m_{QR} = \frac{-1}{x}$ (recíproco negativo), como se conocen las coordenadas de los puntos Q y R, se puede calcular la pendiente

$m_{QR} = \frac{\frac{x^2}{2}-a}{\frac{x}{2}-0} = \frac{x^2-2a}{x}$ entonces la pendiente de la mediatriz debe ser igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos Q y R, de modo que $\frac{-1}{x} = \frac{x^2-2a}{x}$, resolviendo es posible escribir "a" en términos de x, de modo que $a = \frac{x^2+1}{2}$, y como x se aproxima a cero, entonces "a" tiende a ser $\frac{1}{2}$ de modo que la posición límite del punto Q es $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

3. En la Figura se muestra un punto P, en la parábola $y = x^2$ y el punto Q donde la mediatriz de OP interseca el eje y. Conforme P se aproxima al origen a lo largo de la parábola, ¿qué sucede con Q? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela. **Justifique** su respuesta.

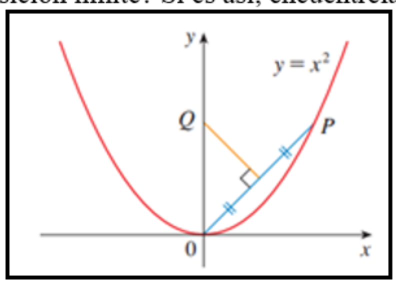


Figura 7. Ítem 3 del Taller 1

El ítem 4 del taller se muestra en la Figura 8, tiene como objetivo que el estudiante realice una coordinación entre la aproximación y la tendencia de carácter funcional. En el ítem a, posiblemente el estudiante solo decida evaluar para $x = -20$ encontrando que $f(-20) = -0{,}05$ y para $x = 20$, que $f(20) = 0{,}05$, lo que lo llevaría a concluir que $f(x)$ solo toma valores entre $-0{,}05$ y $0{,}05$, lo cual sería incorrecto, porque esto dependerá del intervalo en el cual se analice la función. Por ejemplo, en el ítem b, debe analizar qué sucede con la función cuando x toma valores entre -1 y 0; posiblemente el estudiante pueda calcular $f(-1) = -1$, pero para el otro valor que es $f(0)$ no lo podrá hacer, porque ese valor no existe, porque el denominador es 0 y la división entre 0 no está definida. De manera similar sucede para el ítem c.

4. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$, responda las siguientes preguntas.
   a) ¿Qué valores toma $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x varía en entre -20 y 20?
   b) ¿Qué valores toma $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x varía entre -1 y 0?
   c) ¿Qué valores toma $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x varía entre 0 y 1?
   d) ¿Cuál es la representación gráfica de $f(x)$? ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su rango?
   e) Construya una tabla de valores para la función $f(x)$ con valores distintos de $x = 0$. Escoja varios puntos cercanos a 0 por derecha y por izquierda. Calcule los valores de $f(x)$ para los valores que escogió ¿Qué observa? ¿Es el mismo comportamiento por la izquierda que por la derecha? **Justifique** su respuesta.

Figura 8. Ítem 4 del Taller

El estudiante ya ha realizado una exploración de la función de manera numérica, lo cual le puede permitir hacer un bosquejo de la representación gráfica de la función (ver Figura 9), teniendo en cuenta los intervalos que analizó y decir cuáles son los posibles valores que puede tomar la variable dependiente e independiente en el conjunto de los números reales.

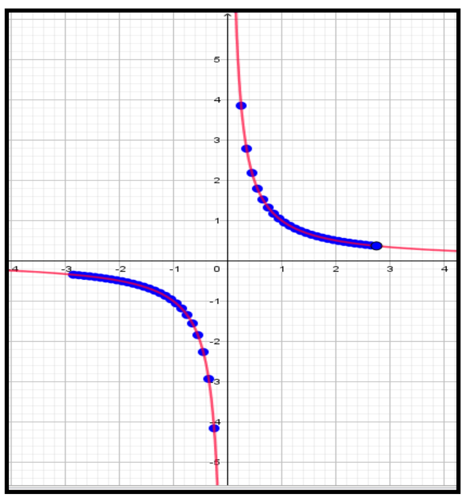


Figura 9. Representación gráfica de la función del ítem 4 del Taller 1

Esto con el propósito que el estudiante analice el comportamiento de la función para valores próximos de $x = 0$, y pueda decidir sobre el comportamiento de la función a medida que la variable independiente toma valores a izquierda y derecha de cero. En este caso, cuando se aproxima por izquierda los valores de la función crecen negativamente (se van hacia $-\infty$) y en cambio por derecha los valores que toma la función son cada vez más grandes (se van hacia ∞). Permitiéndole concluir que no existe una tendencia (ver Figura 10) cuando se toman valores próximos a 0.

x	-0.5	-0.3	-0.1	0	0.2	0.4	0.6
$f(x)$	-2	-3.3	-10	--	5	2.5	1.6

Figura 10. Representación tabular de la función del ítem 4 del Taller 1

Para el ítem 5 que se muestra en la Figura 11, se pretende observar las justificaciones que realizan los estudiantes sobre la relación entre el precio p en dólares por kilogramo de 3 productos diferentes, por lo que se presenta la información de los productos de forma diferente (tabular, gráfica y algebraica). Para el ítem a, el estudiante debe calcular que cantidad de cada producto comprarían los consumidores con 3 dólares.

Para el producto A, el estudiante puede observar en la tabla que si tiene 3 dólares puede llevar $15{,}4\ kg$, en cambio para el producto B, el estudiante debe analizar la representación gráfica que modela la relación entre el precio p en dólares y la cantidad c en kilogramos, para este caso con 3 dólares llevaría $10\ kg$, y por el producto C, desde la representación algebraica seria evaluar cuando $p = 3$, y la cantidad que puede llevar es de $0{,}26\ kg$. Aquí el estudiante está analizando e interpretando la relación funcional desde los diferentes tipos de representación.

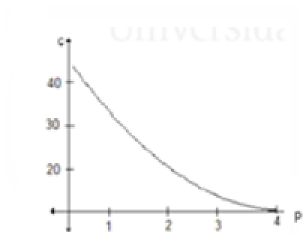
Ahora en el ítem b, se le pide al estudiante que realice el proceso contrario, dada la cantidad de producto que el comprador va a llevar, encontrar cuanto debe pagar por cada producto. Por ejemplo, si el consumidor lleva $15\ kg$ del producto A, el valor a pagar por este producto estará aproximadamente entre 2 y 3 dólares, esto se puede concluir de acuerdo a lo observando en la tabla. En cambio para el producto B, se quiere llevar $30\ kg$ y el valor que debería pagar es más de 1 dólar, este valor lo puede identificar a partir de la gráfica que muestra la relación del producto. Y si se llevan $7\ kg$ del producto C, es necesario recurrir a la expresión algebraica que modela la cantidad de producto con el precio, en este caso no es posible que el comprador pueda llevar esa cantidad de producto, porque si se analiza cual es la cantidad máxima de producto que puede llevar es de 0,5 kg.

5. Cada una de las funciones que se presentan a continuación describen la relación entre el precio p en dólares por kilogramo de tres productos diferentes y la cantidad c en kilogramos que los consumidores compraran a ese precio.

Producto A

P	c
3	15,4
3,9	15,485
3,99	15,530
3,999	15,5254
3,9999	15,5015
3,99999	15,50001

Producto B



Producto C

$$c(p) = \frac{\sqrt{p}-2}{p-4}$$

a) ¿Qué cantidad de producto comprarían los consumidores con 3 dólares en cada caso?
b) Si los consumidores han comprado 15 kg del producto A ¿Cuál ha sido el precio por kilogramo? **Justifique** su respuesta.
c) Si los consumidores han comprado 30 kg del producto B ¿Cuál ha sido el precio por kilogramo? **Justifique** su respuesta.
d) Si los consumidores han comprado 7 kg del producto C ¿Cuál ha sido el precio por kilogramo? **Justifique** su respuesta.
e) Para cada uno de los productos ¿A qué valor se aproxima la cantidad de kilogramos que los consumidores podrían comprar a medida que el precio por kilogramo se acerca a 4 dólares? **Justifique** su respuesta.

Figura 11. Ítem 5 del Taller 1

Y por último se le solicita al estudiante analizar la cantidad c en kilogramos que los consumidores podrían comprar para cada producto a medida que el precio se acerca a 4 dólares. Para el producto A, una posible solución, es analizar la tendencia de los valores mostrados en la tabla, que van hacia 15,5 kg. Para el producto B a medida que paga cerca a 4 dólares la cantidad de producto es cero, y para el producto C haciendo una aproximación numérica (tabla de valores) tiende a 0,25 kg.

El último ítem de este taller (ver Figura 12), tiene como objetivo identificar cómo el estudiante usa e interpreta la noción de aproximación, esto para calcular el volumen de una piscina cuando lleva cerca de $1h$ de haber empezado a salir agua, teniendo en cuenta que si se remplaza $t = 1$ se genera una indeterminación, pero si se analiza tomando valores próximos a 1 (aproximación numérica) se puede encontrar el volumen de agua que ha salido al cabo de 1 hora es de $0{,}25\ m^3$.

6. Luis y María tienen una piscina en su jardín y al llegar el verano necesitan cambiar el agua de la piscina. Abren el desagüe y la piscina comienza a vaciarse según la función: $V(t) = \frac{\sqrt{t+3}-2}{t-1}$, donde t es el tiempo de vaciado en horas y $V(t)$ es el volumen de agua expresado en m^3.
¿Cuál es el volumen de la piscina cuando el tiempo se aproxima $1h$?

Figura 12. Ítem 6 del Taller 1

3.3.2 Taller 2: Nociones de aproximación y tendencia. Con este taller se pretende ilustrar de manera dinámica las nociones de aproximación y tendencia, inicialmente se presentan las nociones de manera unidimensional (recta numérica), luego se propone una actividad en un contexto geométrico pero de manera bidimensional para analizar las dos nociones y por último la relación de aproximación y tendencia pero ya de tipo funcional, todas estas actividades se proponen haciendo uso de GeoGebra.

El tiempo previsto para el desarrollo del Taller 2 es de 180 minutos. Se espera que al terminar el taller lo estudiantes hubiesen logrado crear la imagen del concepto de límite de una función en un punto. A continuación se describen las actividades que hacen parte del taller.

En la actividad 1 (ver Figura 13), se tiene como objetivo identificar la comprensión del estudiante sobre la noción de aproximación, se espera que mediante la exploración libre el estudiante pueda identificar dos sucesiones numéricas, una a izquierda que está dada por la variable b que entre sus valores toma $4{,}99$, $4{,}999$, $4{,}9999$ los cuales son aproximaciones a 5 y otra a derecha que está dada por la variable a que entre sus valores toma $5{,}01$, $5{,}001$, $5{,}0001$ los cuales son aproximaciones a 5; pero ambas se aproximan a un mismo valor en este caso a 5. Además durante el desarrollo de la actividad es posible que el estudiante decida realizar la conversión de un número racional a número decimal, en ese momento se debe prever los posibles errores que puede cometer el estudiante al realizar esa conversión, pero si logra hacer ese cambio de representación le permite identificar la aproximación que se está realizando con cada una de las sucesiones numéricas.

Exploración Libre
Actividad 1
1.1 Considere los siguientes valores $\frac{501}{100}, \frac{5001}{1000}, \frac{50001}{10000}, \frac{500001}{100000}, \ldots$ para la variable a, y $\frac{499}{100}, \frac{4999}{1000}, \frac{49999}{10000}, \ldots$ para la variable b.

a) ¿A qué valor se aproximan las variables a y b? **Justifique** su respuesta.
b) ¿Qué relación existe entre la variable a y la variable b? **Justifique** su respuesta.

1.2 Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 13. Actividad 1 del Taller 2

Si el estudiante logra identificar la existencia de las dos sucesiones numéricas que se aproximan a 5, estaría situado en el nivel de creación de la imagen, pero si entre sus justificaciones expresa la aproximación a un punto como la disminución de la distancia entre cada punto de la sucesión, estará ubicado en el nivel de comprensión de la imagen.

La actividad 2 que se muestra en la Figura 14, esto por medio de una orientación dirigida con el uso de GeoGebra. En la primera parte de la actividad se pretende ilustrar la noción de aproximación, se hace mediante el uso del deslizador “a” de modo que el estudiante al mover “a” logre observar como varía la distancia de cada punto verde A_n (son cada vez menores) respecto al punto rojo A a medida que se acerca por la parte izquierda de A.

Exploración Dirigida
Actividad 2
2.1 Abra el archivo **Act-2.1.ggb** y use el deslizador "a" para explorar la construcción.

a) ¿Describa el comportamiento de los puntos verdes A_n respecto al punto rojo A?
b) ¿Qué sucede con la distancia de cada punto verde A_n respecto al punto rojo A?
c) ¿Qué concluye del comportamiento de los puntos verdes A_n respecto al punto rojo A? **Justifique** su respuesta.

2.2 Abra el archivo **Act-2.2.ggb** y responda la primera pregunta antes de utilizar el deslizador.

a) ¿Qué observa sobre la recta numérica?
b) Deslice el punto "m" solo con la tecla ← y describa lo que observa.
c) ¿Cambió su opinión con lo observado inicialmente? **Justifique** su respuesta.
d) ¿Se puede construir un punto más próximo del punto rojo? ¿Existe otro? ¿Es único? ¿Cuántos puntos se pueden construir más próximos al punto rojo? ¿Por qué? **Justifique** su respuesta.
e) ¿Qué sucede si se construyen más puntos próximos al punto rojo? **Justifique** su respuesta

2.3 Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 14. Actividad 2 del Taller 2

Por ejemplo en la Figura 15, en un primer momento para A_1 se tiene que la distancia entre ambos puntos es $|A - A_1| = 0{,}5$, ahora para un punto más adelante como lo es A_5 se tendría que la distancia es $|A - A_5| = 0{,}0313$. A partir de ese punto se observa que los demás puntos que van apareciendo están uno encima de otro, de modo que para el último punto registrado en la tabla, en este caso es A_{10}, se encuentra a una distancia de $|A - A_{10}| = 0{,}0100$, estos acercamientos que se pueden observar al mover el deslizador y mediante la tabla de valores que registra la distancia entre cada uno de los puntos verdes respecto al punto rojo, permite al estudiante identificar que es posible aproximarse a un punto a partir de la disminución de la distancia entre ambos puntos, comparando cada una de las magnitudes respecto a la anterior, si el estudiante logra hacer esas justificaciones se encontrara en el nivel de creación de la imagen.

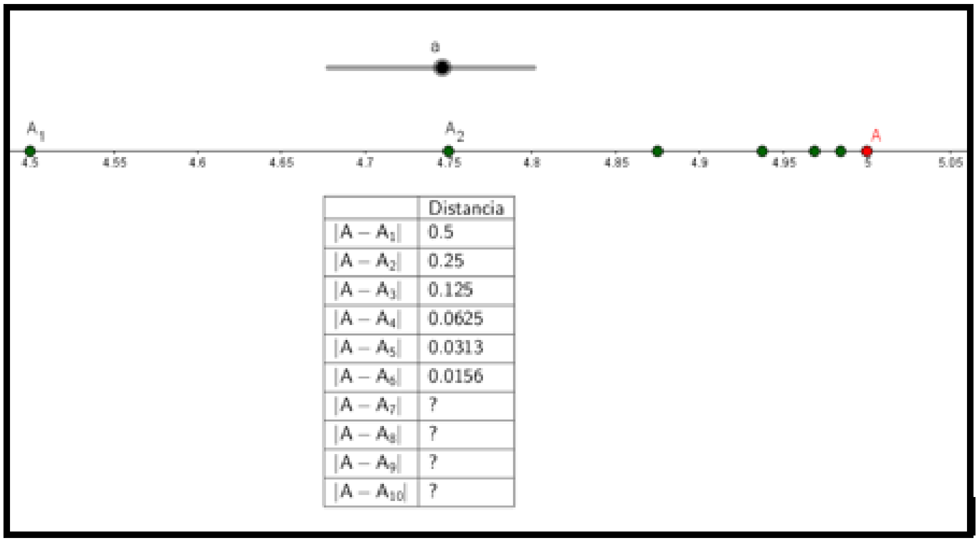


Figura 15. Archivo Act-2.1.ggb de la actividad 2.1 del Taller 2

En caso que el estudiante realice una generalización en términos de $|A - A_n|$, esta expresión corresponde a la disminución de la distancia entre cualquier valor de A_n respecto al punto rojo A y además sí reconoce que esa distancia puede ser tan cercana a 0, permite identificar que este estudiante está en el nivel de comprensión de la imagen.

En la segunda parte de la actividad 2 se trabajará con el archivo "Act-2.2.ggb" se espera que lo primero que el estudiante observe al abrirlo sean "tres puntos" sobre la recta numérica, un punto rojo en medio de dos puntos negros (ver Figura 16).

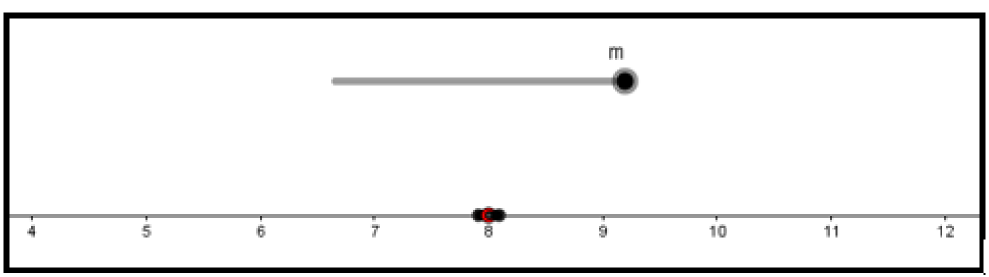


Figura 16. Archivo Act-2.2.ggb de la actividad 2.2 del Taller 2

Luego mediante el zoom (generado al mover controladamente el deslizador “m”) pueda identificar la existencia de otros puntos a izquierda y derecha del punto rojo (sucesión finita de puntos) (ver Figura 17).

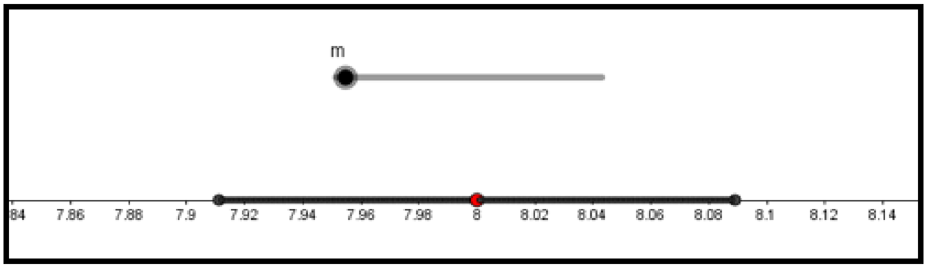


Figura 17. Momento 1 del Act-2.2.ggb de la actividad 2.2 del Taller 2

Además, si el estudiante logra identificar y justificar que dicha sucesión se aproxima a 8, posición en la recta numérica donde se encuentra ubicado el punto rojo. Respecto a lo anterior se espera que el estudiante pueda comprender y justificar matemáticamente que siempre es posible construir un punto más próximo a 8 tanto por izquierda como por derecha. Es decir, la aproximación cada vez puede ser mejorada (la distancia entre 8 y cada uno de punto negros de la sucesión numérica es cercana a cero), a esto llamaremos tendencia (diremos que tiende a 8 por izquierda si toma valores muy próximos pero menores que 8 y tiende a 8 por derecha si toma valores muy próximos pero mayores que 8) (ver Figura 18). Si el estudiante logra identificar que existe tendencia se encontraría en un nivel de comprensión de la imagen. Se esperaría que al terminar la actividad 2 el estudiante logre diferenciar entre aproximación y tendencia.

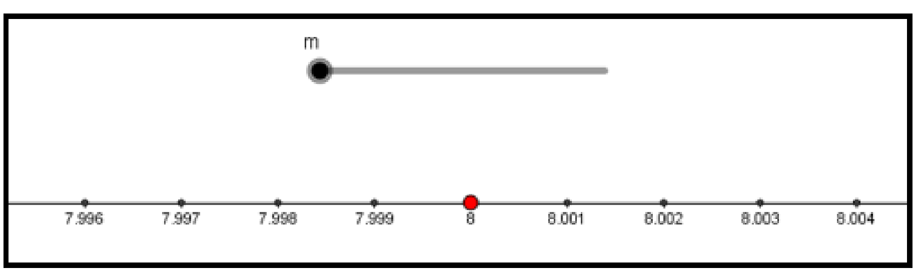


Figura 18. Momento 2 del Act-2.2.ggb de la actividad 2.2 del Taller 2

La actividad 3 que se muestra en la Figura 19, fue retomada de Fiallo y Parada (2018), con ella se pretende que surja de manera natural la idea de límite, lo que debe ser aprovechado para empezar a discutir este concepto de manera dinámica a través de la aproximación y la tendencia.

Con el archivo "Act-3.1.ggb" se busca observar cómo el estudiante decide sobre la existencia de las razones trigonométricas $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ cuando el ángulo α es igual a 0º, 90º, 180º, 270º y 360º. En este caso el estudiante puede tomar cada una de las longitudes del triángulo rectángulo que se forma al mover el punto P sobre la circunferencia de radio 5.

Exploración Dirigida
Actividad 3
3.1 Abra el archivo **Act-3.1.ggb**, mueva el punto P en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia.

a) ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ cuando el ángulo α es igual a 0^0, 90^0, 180^0, 270^0 y 360^0? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.
b) ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ cuando el ángulo α se aproxima a 0º, 90º, 180º, 270º y 360º? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.

3.2 Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 19. Actividad 3 del Taller 2

Por ejemplo si $\alpha = 90$, $sen(90) = \frac{y}{r} = \frac{5}{5} = 1$ (ver Figura 20), pero si calcula $\tan(90) = \frac{y}{x} = \frac{5}{0}$, lo cual en ese punto no está definido el valor para la tangente, si el estudiante logra identificar los valores de las razones trigonométricas en los ángulos cuadrantales se encontrara en un nivel de comprensión de la imagen.

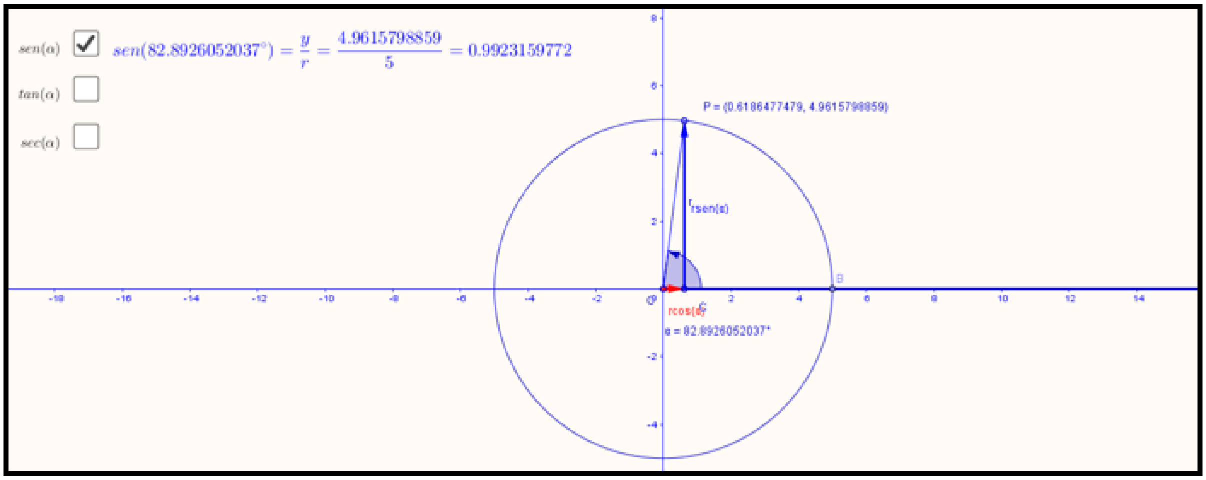


Figura 20. Act-3.1.ggb de la actividad 3 del Taller 2

De igual manera en el ítem b, se busca observar cómo el estudiante decide sobre la tendencia de las razones trigonométricas $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ cuando el ángulo α se aproxima a 0º, 90º, 180º, 270º y 360º. Se le pide al estudiante que realice la exploración del archivo dinámico que muestra algunas razones trigonométricas en el plano, tal que al mover el punto P sobre la circunferencia, se puede visualizar la variación de las coordenadas de ese punto y a su vez de las razones trigonométricas $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ a medida que se aproxima a los ángulos cuadrantales tanto por derecha como por izquierda para cada una de ellas.

Respecto a la tendencia de los valores tomados por las razones trigonométricas $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ se debe tener en cuenta que no es fácil que el estudiante analizando algunos casos pueda identificar los valores que pueden tomar cada una de las razones. Esto se debe, entre otras cosas, a las limitaciones del software, porque los valores observados son finitos y las razones tienden a 0, 1, -1, $-\infty, \infty$ (ver Figura 21), según las cifras decimales. Por ello, se debe solicitar a los estudiantes aproximarse más a los ángulos cuadrantales, para evidenciar que entre más aproximaciones se hacen a estos ángulos, los valores siguen aumentando o disminuyendo (cuando tienden a infinito o menos infinito) o tienden a 0, 1 o -1.

Además, los estudiantes se pueden apoyar de la hoja de cálculo (registrando por ejemplo 20 datos) para ver de manera numérica a los valores que tienden $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ cuando se aproximan a los ángulos cuadrantales, esto permite que los estudiantes logren coordinar cada una de las representaciones y así puedan argumentar matemáticamente que está sucediendo con cada una de las razones, si el estudiante logra identificar la tendencia de los valores de las razones trigonométricas a medida que α se aproxima a los ángulos cuadrantales se encontrara en un nivel de comprensión de la imagen.

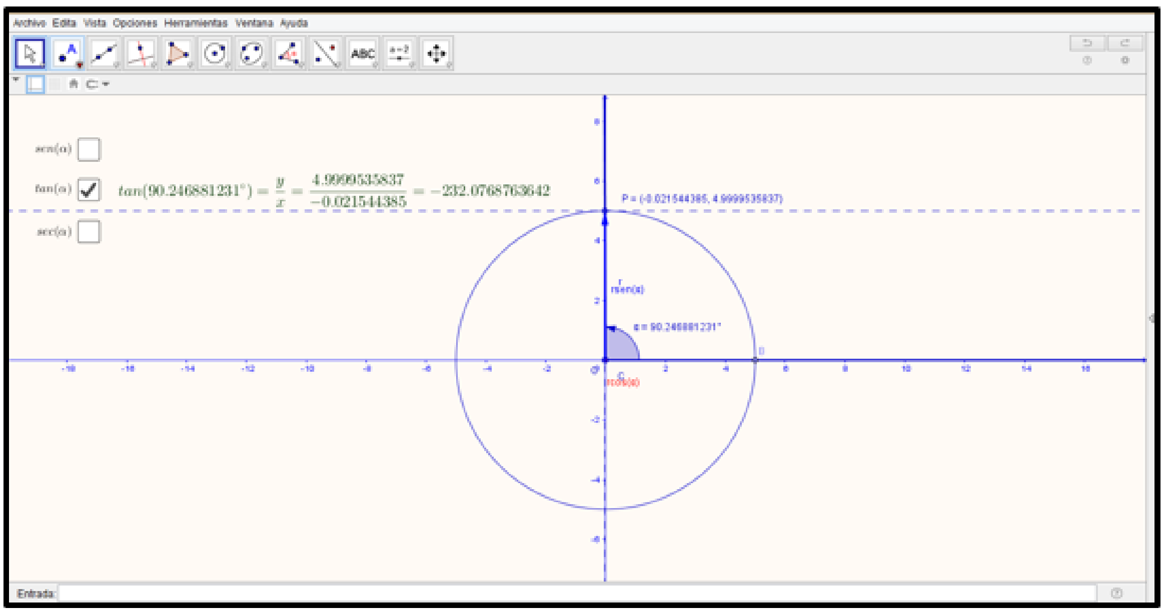


Figura 21. Valor al que tiende la tangente cuando el ángulo se aproxima a 90°

La actividad 4 que se muestra en la Figura 22, tiene como objetivo que los estudiantes establezcan aproximaciones a "x" a un punto en el dominio de la función por izquierda como por derecha, relacionando esas aproximaciones con la tendencia de $f(x)$ a través del registro numérico (a partir de una tabla de valores para $(x_i, f(x_i))$ y la representación gráfica, con el fin de analizar el límite de una función en un punto.

Exploración Dirigida
Actividad 4
4.1 Dada la función $f(x) = x^2 - 1$

a) Abra GeoGebra y en la hoja de cálculo realice una tabla con los valores de x y $f(x)$ cuando la variable x toma valores en el dominio próximos a $x = 3$ por la izquierda y dibuje en rojo los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano.
b) ¿Qué valores utilizó cuando hizo la aproximación a $x = 3$ por izquierda? ¿Qué sucede con la distancia de cada uno de los valores que utilizó respecto a $x = 3$?
c) ¿Hacia qué valor tiende $f(x)$, cuando la variable "x" se aproxima a 3 por la izquierda? **Justifique** su respuesta
d) En la misma hoja de cálculo realice una tabla con los valores de x y $f(x)$ cuando la variable x toma valores en el dominio próximos a $x = 3$ por la derecha y dibuje en azul los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano.
e) ¿Qué valores utilizó cuando hizo la aproximación a $x = 3$ por derecha? ¿Qué sucede con la distancia de cada uno de los valores que utilizó respecto a $x = 3$?
f) ¿Hacia qué valor tiende $f(x)$, cuando la variable "x" se aproxima a 3 por la derecha? **Justifique** su respuesta.
g) Cuando nos aproximamos a $x = 3$. ¿A qué valor tiende $f(x) = x^2 - 1$? **Justifique** su respuesta.

4.2 Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 22. Actividad 4 del Taller 2

Se pretende que los estudiantes logren identificar las tendencias de la variable independiente y las de la variable dependiente (ver Figura 23), mejorando las aproximaciones en el sentido de ir buscando la aproximación que indique la existencia de tendencia a medida que coinciden las aproximaciones laterales.

$\boldsymbol{x}$	2,9	2,99	2,999	2,9999	…	3,0001	3,001	3,01	3,1
$\boldsymbol{f(x)}$	7,410	7,940	7,994	7,999	…	8,000	8,006	8,060	8,610

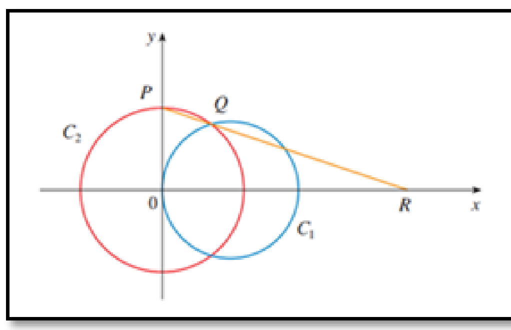
Figura 23. Representación tabular de la función de la actividad 4 del Taller 2

Para obtener información de cómo el estudiante interpreta las aproximaciones, se le solicita que justifique por qué elige esos valores próximos a 3 por izquierda y derecha (a partir de la disminución de la distancia), los cuales utilizará para analizar que sucede con la tendencia de $f(x)$ a medida que se acerca a 3 en el dominio de la función. Al realizar la representación gráfica y tabular de la función, el estudiante puede evidenciar que es posible encontrar infinitos puntos en el dominio de la función próximos a $x = 3$ que le permitirán decidir sobre la existencia o no de tendencia. Esto con el fin de que pueda concluir que a medida que se aproxima a $x = 3$, $f(x)$ tiende a 8 por izquierda y por derecha, y ese valor sería el límite de la función en ese punto. Si el estudiante logra esto, estaría situado en un nivel de comprensión de la imagen para el concepto de límite de una función en un punto.

La actividad 5 se plantea como una tarea retadora (ver Figura 24), con el propósito de identificar si el estudiante comprende cuáles son las variables de la situación, asimismo de cómo el estudiante interpreta la relación entre la aproximación y tendencia, que se genera al variar "r" de la circunferencia C_2 con la ubicación del punto R en el plano cartesiano. El estudiante en esta actividad podría utilizar herramientas de la geométrica analítica para resolver la situación y apoyarse de GeoGebra para observar la situación de forma dinámica.

Tarea Retadora
Actividad 5

En la Figura se muestra una circunferencia C_1 con ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y una circunferencia C_2 que se contrae, con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de intersección de los dos círculos y R es el punto de intersección de la recta que pasa por los puntos P, Q y el eje x.



¿Qué le sucede a R al contraerse C_2; es decir cuándo r se aproxima a 0 ?

Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 24. Actividad 5 del Taller 2

3.3.3 Taller 3: Concepción dinámica del límite de una función en un punto. Con este taller se pretende que el estudiante identifique la existencia del límite de una función en un punto, a partir de la concepción dinámica del límite de una función, durante el taller se presentan tres funciones racionales, en la primera función el límite existe pero no está definida la función en ese punto; la segunda función no está definida en el punto pero los limites laterales existen y son diferentes; la última función posee una asíntota vertical en el punto y los limites laterales no existen; y como actividad de cierre se le propone al estudiante que realice la gráfica de una función a partir de unas condiciones iniciales, las cuales tiene que interpretar si existe o no el límite de la función en diversos puntos.

El tiempo previsto para el desarrollo del Taller 3 es de 120 minutos. Se espera que al terminar el taller lo estudiantes logren describir las características para identificar cuando existe el límite de una función en un punto. A continuación se describen las actividades del taller.

Las actividad 1 que se muestra en la Figura 25, fue retomada de Pons (2014), la cual tiene como objetivo evaluar si el estudiante identifica la existencia del límite de la función y este es único. Con esta actividad se pretende inicialmente que el estudiante identifique que la función no está definida para $f(2)$, dado que $x = 2$ no pertenece al dominio de la función.

Exploración Libre
Actividad 1

1.1. Dada la función

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

a) Calcule el valor de $f(2) = ?$
b) Complete la tabla.

x tiende a ... $\rightarrow$ | $\leftarrow$ x tiende a ...

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1
$f(x)$								

$f(x)$ tiende a ... $\rightarrow$ | $\leftarrow$ $f(x)$ tiende a ...

c) ¿A qué valor tiende la variable x? **Justifique** su respuesta.
d) ¿A qué valor tiende la función $f(x)$? **Justifique** su respuesta.
e) ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2? **Justifique** su respuesta.

1.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros

Figura 25. Actividad 1 del Taller 3

En el ítem b, cuando se le solicita que complete la tabla se espera que el estudiante pueda identificar que existe una aproximación en el dominio de la función mediante dos sucesiones numéricas una cuando se aproxima por izquierda y otra cuando se aproxima por derecha de $x = 2$, seguidamente que calcule el valor de la función en los puntos que indica la tabla, e identifique a qué valor tiende $f(x)$, permitiéndole concluir que esos valores que calculó tienden cada vez más a $0{,}25$.

La coordinación entre las aproximaciones realizadas en el dominio y la tendencia de los valores calculados en el rango de la función, le permitirá justificar la existencia o no del límite afirmando que cuando x tiende a 2, el límite de la función $f(x)$ es $0{,}25$. Si el estudiante logra identificar que existe tendencia estará situado en un nivel de comprensión de la imagen para el concepto de límite de una función en un punto.

La actividad 2 (ver Figura 26), tiene como objetivo evaluar si el estudiante identifica la existencia de los límites laterales pero además que estos son iguales, y logre concluir que existe el límite de la función en ese punto. Para esto se le presenta una función por partes y se diferencia de la actividad anterior porque el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales ($\mathbb{R}$).

Primeramente se pretende que el estudiante identifique que es posible determinar el valor de la función en $x = 0$, porque ese valor pertenece al dominio de la función. Pero además es posible analizar qué sucede cerca de $x = 0$, en este caso cuando x toma valores de una sucesión por la izquierda de 0 en el dominio de la función, y que esos términos evaluados en la función hacen que los valores en el rango de $f(x)$ tiendan a 1. Así mismo, cuando x toma valores de una sucesión por la derecha de 0 en el dominio de la función, esos términos evaluados en la función hacen que los valores en el rango de $f(x)$ tiendan a 1. Al igual se espera que construya la representación gráfica de la función que le ayude a validar su resultado. Si el estudiante identifica la tendencia de las aproximaciones laterales de la función se encuentra situado en el nivel de comprensión de la imagen.

Exploración Dirigida
Actividad 2

2.1 Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x < 0 \\ 10 & si\ x = 0 \\ (x-1)^2 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Calcule el valor de $f(0) =$?
b) Considere los valores $x_1 = -0{,}1, x_2 = -0{,}01, x_3 = -0{,}001, x_4 = -0{,}0001$ y calcule $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$. ¿A qué valor tiende la función cuando tomamos valores (negativos) próximos a 0? **Justifique** su respuesta.
c) Considere los valores $x_1 = 0{,}1, x_2 = 0{,}01, x_3 = 0{,}001, x_4 = 0{,}0001$ y calcule $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$. ¿A qué valor tiende la función cuando tomamos valores (positivos) próximos a 0? **Justifique** su respuesta.
d) ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuándo x tiende a 0? **Justifique** su respuesta.
e) ¿Cuál es la distancia entre $f(0)$ y el límite de $f(x)$ cuándo x tiende a 0?

2.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros

Figura 26. Actividad 2 del Taller 3

Si logra observar que existen dos sucesiones numéricas que se aproximan a 0 por izquierda y derecha, y los valores que toma en el rango de la función tienden al mismo valor, pero que $f(0) = 10$ y concluye que existe el límite de la función en ese punto, afirmando matemáticamente que cuando x tiende a 0, el límite de la función $f(x)$ existe porque los limites laterales son iguales. Esto nos permite situarlo en un nivel de observación de la propiedad.

La actividad 3 que se muestra en la Figura 27, tiene como objetivo evaluar si el estudiante logra identificar que no existen los límites laterales de la función en un punto y por tanto no existe el límite. Para esto se plantea una función que no está definida en $x = -1$ y a su vez no existe el límite en dicho punto.

Exploración Dirigida
Actividad 3

3.1. Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x+3}{x^2-1}$$

a) Calcule el valor de $f(-1) =?$
b) Indique una secuencia de valores que se aproximen a $x = -1$ por la derecha, y calcule los valores que toma $f(x)$. ¿A qué valor tiende la función $f(x)$? **Justifique** su respuesta.
c) Indique una secuencia de valores que se aproximen a $x = -1$ por la izquierda y calcula los valores que toma $f(x)$. ¿A qué valor tiende la función $f(x)$? **Justifique** su respuesta.
d) ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuando x tiende a -1? **Justifique** su respuesta.

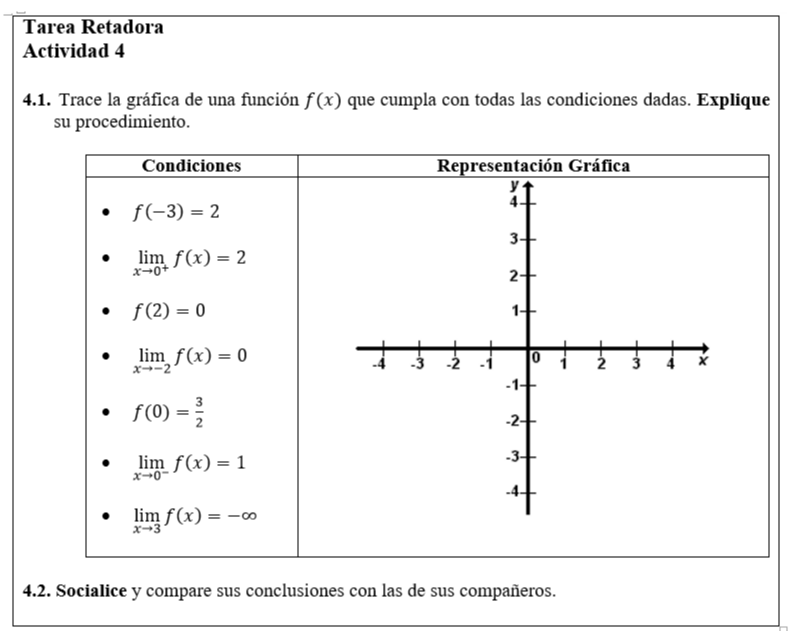
3.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros**.**

Figura 27. Actividad 3 del Taller 3

Primeramente se pretende que el estudiante identifique que no es posible determinar el valor de la función en $x = -1$, porque ese valor no pertenece al dominio de la función. Pero es posible analizar lo qué sucede cerca de $x = -1$, en este caso se analiza cuando x toma valores de una sucesión por izquierda de -1 en el dominio de la función, a su vez estos términos evaluados en la función hacen que los valores en el rango de $f(x)$ tiendan a $-\infty$. Así mismo, cuando x toma valores de una sucesión por derecha de -1 en el dominio de la función, a su vez estos términos evaluados en la función hacen que los valores en el rango de $f(x)$ tiendan a ∞. Si el estudiante identifica la tendencia de las aproximaciones laterales de la función se encuentra situado en el nivel de comprensión de la imagen.

Se espera que en esta actividad el estudiante recurra a los diferentes maneras de representar una función (gráfico, tabular), para establecer que la función no está definida en el punto, y que no existe el límite de la función para $x = -1$, porque al comparar las tendencias de los valores de $f(x)$ cuando x toma valores próximos a -1 por izquierda y derecha estas no coinciden. Esto nos permite situarlo en un nivel de observación de la propiedad.

La actividad 4 (ver Figura 28), se plantea de forma retadora y tiene como objetivo evaluar, si el estudiante logra realizar la gráfica de una función que cumpla con ciertas condiciones y a su vez que analice el significado de cada una de ellas, que le permitan realizar un bosquejo de una función que cumpla con esos criterios.



Tarea Retadora
Actividad 4

4.1. Trace la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla con todas las condiciones dadas. **Explique** su procedimiento.

Condiciones	Representación Gráfica
• $f(-3) = 2$ • $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$ • $f(2) = 0$ • $\lim_{x\to -2} f(x) = 0$ • $f(0) = \frac{3}{2}$ • $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ • $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$	

4.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 28. Actividad 4 del Taller 3

El estudiante inicialmente debe identificar que la función a bosquejar pasa por los puntos $(-3,2)$, $(2,0)$ y $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$. Logra interpretar que el límite de la función cuando x tiende a 0 no existe porque los limites laterales son diferentes, porque cuando el límite se aproxima a 0 por derecha los valores que toma $f(x)$ tienden a 2 y cuando se aproxima a 0 por izquierda los valores de que toma $f(x)$ tienden a 1, de modo que el límite en ese punto no existe porque los límites laterales no coinciden. El estudiante analiza en el dominio de la función que cuando x tiende a -2, el límite de la función existe y este es único. Por ultimo debe analizar que cuando se aproxima a $x = 3$, tanto por derecha y por izquierda los valores en el rango de $f(x)$ tiende a $-\infty$.

Se espera que esta actividad permita conocer cómo el estudiante está comprendiendo la existencia del límite de una función en un punto, su unicidad y cuando existe o no tendencia cuando se realizan aproximaciones a un punto en el dominio de la función. Esto nos permite situarlo en un nivel de observación de la propiedad.

3.3.4 Taller 4: Concepción óptima del límite de una función en un punto. Con este taller se pretende que el estudiante identifique la existencia del límite de una función en un punto, a partir de la concepción óptima del límite de una función, por tanto se presentan funciones en las cuales no es fácil decidir sobre su tendencia. En la primera función el límite existe pero no está definida la función en ese punto; la segunda función no está definida en el punto y el límite no existe; y la última función se deja a manera retadora con el fin de que el estudiante use las herramientas de GeoGebra para decidir sobre la existencia o no del límite de la función. El tiempo previsto para el desarrollo del Taller 4 es de 120 minutos. A continuación se describen las actividades del taller.

En la actividad 1 (ver Figura 29) se tiene como objetivo que el estudiante pueda identificar la existencia o no del límite de la función en el punto. Para describir la variación de la función puede recurrir a realizar la representación gráfica (a lápiz y papel, o con el apoyo del software de GeoGebra) y allí explorar la relación de aproximación o tendencia. También puede construir una tabla de valores, escogiendo una sucesión numérica a derecha y otra a izquierda que sean próximas a $x = 0$ para analizar qué sucede con la tendencia de $f(x)$.

Exploración Libre
Actividad 1

1.1. Sea la función $f(x) = x * Sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Describa la variación de la función $f(x)$, con relación a la variación de x.
b) ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.

1.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros

Figura 29. Actividad 1 del Taller 4

Durante la socialización se espera que el estudiante justifique matemáticamente cada uno de los procedimientos realizados, que le permitieron decidir o no sobre la existencia del límite de $f(x)$ cuando x tiende a cero.

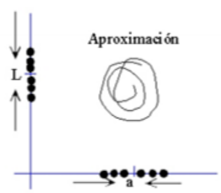
La actividad 2 que se muestra en la Figura 30, fue retomada y ajustada de Mira (2016), ésta tiene como objetivo favorecer la construcción del concepto óptimo de límite de una función, vinculado al uso del zoom y es una iniciación a intervalos cada vez más reducidos al punto y al límite de la función.

Exploración Dirigida
Actividad 2

2.1. Dada la función $f(x) = x * Sen\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Abra GeoGebra y realice la gráfica de $f(x)$.
b) Observe la función con el zoom cerca de $x = 0$, que sucede con los valores de x y $f(x)$.
c) Realice una tabla de valores próximos a $x = 0$ y calcule los valores que toma $f(x)$. ¿A qué valor tiende la función $f(x)$?
d) ¿Qué concluye acerca del límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0? **Justifique** su respuesta.

NOTA:
En esta sesión vamos a trabajar el límite de una función desde dos aproximaciones óptimas, en el "*eje y*" así como en el "*eje x*", es decir: El valor $\boldsymbol{L}$ es el límite de $f(x)$ en "$\boldsymbol{a}$" si para todo valor $\boldsymbol{K}$ **muy próximo a** $\boldsymbol{L}$, existe otro valor h **muy próximo a** "$\boldsymbol{a}$", tal que los "x" que **mejoran** ese valor h. Es decir, los valores de h que están próximos a "$\boldsymbol{a}$", hacen que sus imágenes $f(x)$ también **mejoren** el valor de $\boldsymbol{K}$ cercano a $\boldsymbol{L}$. Además, que estos valores estén más cerca de $\boldsymbol{L}$. Fíjate en el dibujo para tener un idea intuitiva de lo que has leído.



2.2. Una vez leído el recuadro con la información, responda las siguientes preguntas.

a) Busque cuatro valores de $f(x)$ próximos a $y = 0$ y nómbrelos $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$. ¿A qué distancia están de $y = 0$ los valores seleccionados?
b) Halle los valores para x_1, x_2, x_3, x_4 respectivamente. ¿A qué distancia están de $x = 0$ los valores de los x_i?
c) Tomando la aproximación de $f(x) = 0{,}018$ a 0, ¿Existe alguna aproximación "h" a 0, de forma que $f(h)$ mejore la aproximación anterior? ¿Diga el valor de ese h?
d) ¿Cuántas aproximaciones se pueden encontrar?
e) ¿A qué distancia se encuentra la aproximación "h" a 0 que mejora las aproximaciones de sus imágenes al límite $L = 0$?
f) ¿Existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 desde el punto de vista de aproximación optima? ¿Por qué?

2.3. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros

Figura 30. Actividad 2 del Taller 4

En la primera parte de esta actividad se le pide al estudiante que use la herramienta "zoom" de GeoGebra para observar que sucede con $f(x)$ cuando x toma valores próximos a 0. Luego se le solicita al estudiante que construya una tabla de valores para x y $f(x)$ próximos a 0, de manera que identifique si existe alguna tendencia en $f(x)$ de acuerdo a las aproximaciones realizadas en el dominio de la función, mediado por GeoGebra (ver Figura 31). Si el estudiante logra realizar las aproximaciones óptimas y decidir sobre la existencia del límite de la función, esto nos permite situarlo en un nivel de comprensión de la imagen.

En la segunda parte de esta actividad el estudiante debe buscar valores en el rango próximos al límite y observar qué sucede con las distancias entre los valores elegidos $f(x_i)$ y el límite, esto con el fin de que las relacione con las distancias que se generan en un punto en el dominio. Esto lo puede realizar el estudiante haciendo uso de GeoGebra para ir mejorando las aproximaciones al límite en el rango desde las aproximaciones al punto en el dominio como un proceso infinito. Es decir, coordinar aproximaciones óptimas al límite desde el rango con las del punto en el dominio, produciendo entornos más reducidos para intentar deducir el límite por refinamiento sucesivo de una aproximación óptima. Si el estudiante logra comprender cómo se relacionan las distancias en el rango como en el dominio de la función nos permite situarlo en un nivel de observación de la propiedad analizada.

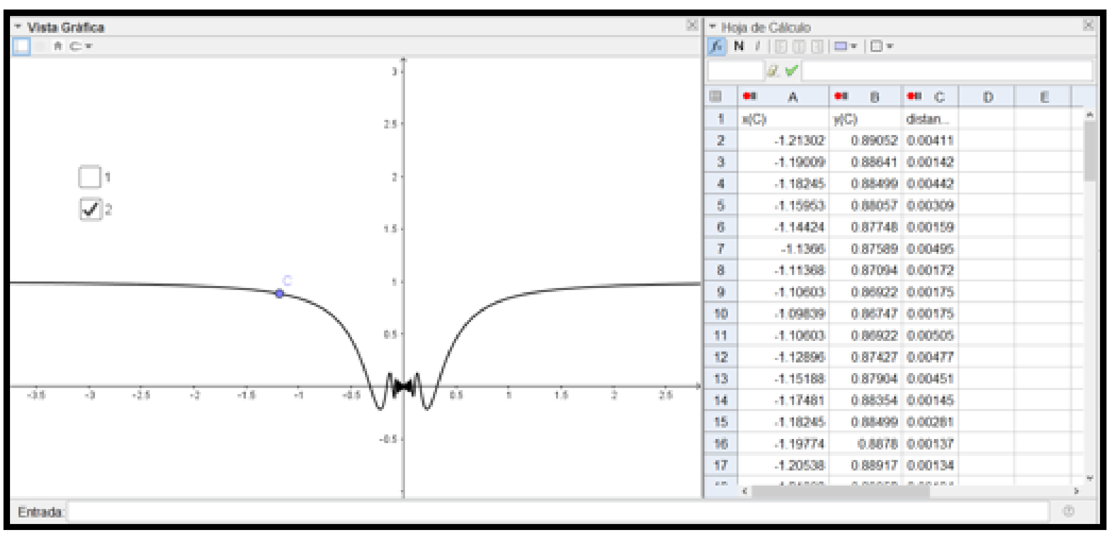
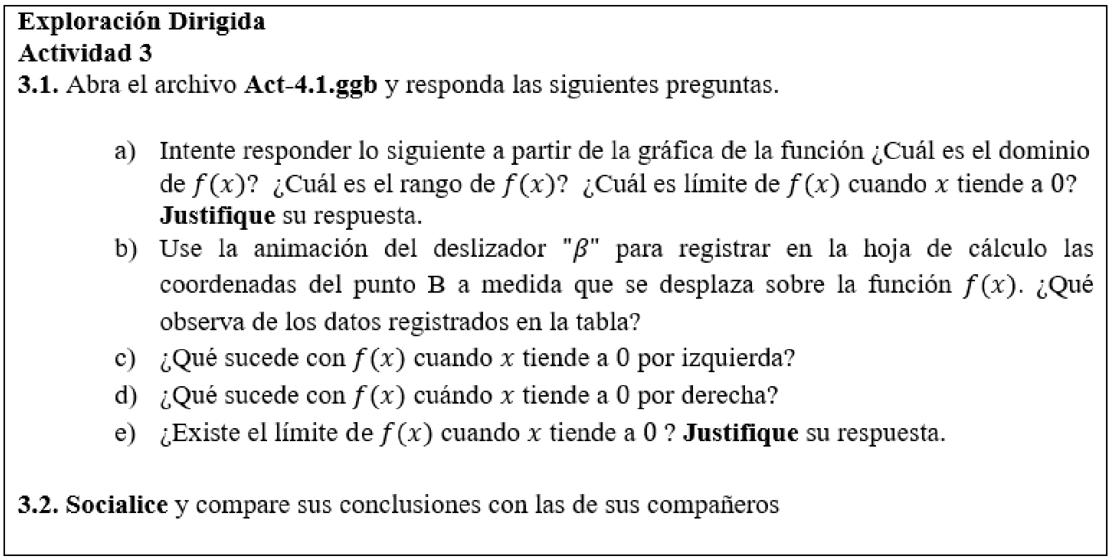


Figura 31. Representación en GeoGebra de la función de la actividad 2 del Taller 4

La actividad 3 que se muestra en la Figura 32, tiene como objetivo evaluar si los estudiantes comprenden que el límite de la función no existe, porque no existe tendencia de $f(x)$ para valores próximos a $x = 0$. Inicialmente el estudiante debe identificar el dominio y rango de la función, y así reconoce que la función no está definida en $x = 0$, pero si es posible analizar el comportamiento de $f(x)$ cuando x toma valores próximos a 0, si esto sucede el estudiante estaría situado en un nivel de creación de la imagen.



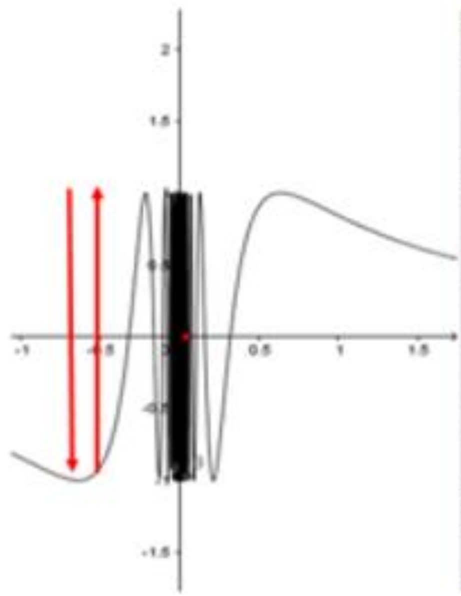
Exploración Dirigida
Actividad 3
3.1. Abra el archivo **Act-4.1.ggb** y responda las siguientes preguntas.

a) Intente responder lo siguiente a partir de la gráfica de la función ¿Cuál es el dominio de $f(x)$? ¿Cuál es el rango de $f(x)$? ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0? **Justifique** su respuesta.
b) Use la animación del deslizador "β" para registrar en la hoja de cálculo las coordenadas del punto B a medida que se desplaza sobre la función $f(x)$. ¿Qué observa de los datos registrados en la tabla?
c) ¿Qué sucede con $f(x)$ cuando x tiende a 0 por izquierda?
d) ¿Qué sucede con $f(x)$ cuándo x tiende a 0 por derecha?
e) ¿Existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 ? **Justifique** su respuesta.

3.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros

Figura 32. Actividad 3 del Taller 4

Al utilizar el archivo "Act-4.1.ggb" se espera que el estudiante use herramientas de GeoGebra, que le permitan decidir sobre la tendencia de $f(x)$ cuando x tiende a 0, ya que para valores de x próximos a 0 por izquierda, los valores en el rango de $f(x)$ oscilan entre -1 y 1, de forma similar se comporta para valores próximos a 0 por derecha. Si el estudiante recurre a otra representación, como por ejemplo la hoja de cálculo se espera que observe que no existe tendencia para $f(x)$ cuando x tiende a 0, si el estudiante logra identificar lo descrito anteriormente estaría en un nivel de comprensión de la imagen.



1	x	f(x)
2	0.062	-0.409
3	0.061	-0.633
4	0.06	-0.818
5	0.059	-0.946
6	0.058	-0.999
7	0.057	-0.965
8	0.056	-0.837
9	0.055	-0.619
10	0.054	-0.325
11	0.053	0.018
12	0.052	0.372
13	0.051	0.688
14	0.05	0.913
15	0.049	1
16	0.048	0.916
17	0.047	0.656
18	0.046	0.249
19	0.045	-0.229
20	0.044	-0.671

Figura 33. Representación en GeoGebra de la función de la actividad 3 del Taller 4

Durante la socialización, si el estudiante justifica que el límite de la función no existe, porque no existe tendencia de $f(x)$, cuando se hacen aproximaciones a $x = 0$ por derecha y por izquierda, al mismo tiempo si usa las representaciones gráfica y tabular (ver Figura 33) para dar sus justificaciones, estaría situado en un nivel de observación de la propiedad, porque está identificando que no existe relación entre aproximación y tendencia para decidir sobre la existencia del límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0.

Esta actividad (ver Figura 34), se plantea de manera retadora, donde se propone una función definida por partes, con el fin que el estudiante establezca el límite de la función por aproximación óptima. El estudiante debe buscar y refinar las aproximaciones óptimas y las tendencias, concluyendo si existe o no el límite de $f(x)$, haciendo uso del simbolismo matemático.

Tarea Retadora
Actividad 4
4.1. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Z} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

a) Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \to \frac{5}{3}} f(x) = ? \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = ?$$

b) Si $a \in \mathbb{R}$ ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuándo x tiende a a? **Justifique** su respuesta.
c) ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuándo x tiende a 2.9? **Justifique** su respuesta.
d) ¿Para qué valores de x en el dominio de la función existe el límite de $f(x)$? **Justifique** su respuesta.

Figura 34. Actividad 4 del Taller 4

3.3.5 Taller 5: Concepción métrica del límite de una función en un punto. Con este taller se pretende que el estudiante identifique la existencia del límite de una función en un punto, a partir de la concepción métrica del límite de una función, por lo que se presenta una situación problema para desarrollar todo el taller. El tiempo previsto para el desarrollo del Taller 5 es de 120 minutos. A continuación se describen las actividades del taller.

La actividad 1 que se muestra en la Figura 35, fue tomada del libro EL CÁLCULO de L. Leithold (Leithold, 1998), y tiene como objetivo iniciar con la concepción métrica del límite de una función en un punto. En primera instancia se requiere que el estudiante tenga la capacidad de comprender y dar sentido a la estructura del problema expresado en un lenguaje verbal.

Exploración Libre
Actividad 1
1.1. Se requiere un tornero para fabricar un disco circular de metal cuya área sea de $9\pi\ cm^2$.

a) Describa las variables del problema, ¿Qué sucede con cada una de ellas?
b) ¿Qué radio produce dicho disco?
c) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de $\pm 0{,}4\ cm^2$ en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso (b) debe el tornero controlar el radio?

1.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 35. Actividad 1 del Taller 5

El problema planteado de esta manera permite que el estudiante a través del ensayo y el error, pueda tener una aproximación a la solución del problema, e identifique las variables de la situación, de modo que pueda justificar que el área del disco circular depende de su radio, y además que existe una relación funcional entre ambos. Esto le permitirá calcular el valor del radio "r" que genere un área de $225\pi\ cm^2$; y a partir de esto pueda identificar cuál es ese error mínimo y máximo que puede tener el tornero al momento de diseñar el disco.

La actividad 2 que se muestra en la Figura 36, es tomada de Mira (2016) y rediseñada para nuestra investigación, se centra en el desarrollo de la concepción métrica de límite de una función en un punto, y tiene como objetivo que los estudiantes coordinen las tendencias de las distancias al punto y los valores al rango del límite con el fin de establecer si tienden a cero, paso previo a la conceptualización métrica de límite de una función en un punto. Si el estudiante logra realizar lo descrito anteriormente estaría situado en el nivel de observación de la propiedad.

Exploración Dirgida
Actividad 2
2.1 Sea la función $f(x) = \pi x^2$

a) Abra GeoGebra y realice la gráfica de $f(x)$.
b) Observe el valor de la función $f(x)$ cuando se realiza zoom cerca de $x = 3$.
c) Realice una tabla de valores próximos a $x = 3$ y calcule los valores de $f(x)$.
d) Construya una tabla con las distancias entre los valores próximos a $x = 3$, por la derecha y por la izquierda. ¿Cómo son esas distancias conforme me aproximo a 3? ¿A qué valor tienden las distancias cuanto más me aproximo a 3? **Exprésalo** matemáticamente.
e) Construya una tabla con las distancias entre los valores próximos a $f(x) = 9\pi$, por la derecha y por la izquierda. ¿Cómo son esas distancias conforme me aproximo a 9π? ¿A qué valor tienden las distancias? **Exprésalo** matemáticamente.
f) Realice una tabla de valores donde se relacionen los ítem c) d) e).
g) Con la información de la tabla, ¿Cuál es el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a 3? **Justifique** su respuesta.
h) Abra el archivo y verifique cada una de sus respuestas.

2.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros

Figura 36. Actividad 2 del Taller 5

Los estudiantes deben producir aproximaciones a un punto y al límite, en una función continua en ese punto, observando el comportamiento de las distancias de dichas aproximaciones en el dominio y en el rango, e intentar coordinar esas tendencias a cero en el dominio y en el rango mediante un registro tabular, con el fin de deducir el límite de la función por aproximación métrica (ver Figura 37), si el estudiante identifica y justifica que las distancias tienden a cero estará ubicado en un nivel de formalización para decidir sobre la existencia del límite de la función en un punto.

x	$f(x)$	$\|3-x\|$	$\|9\pi - f(x)\|$
2	12,5663	1	15,7080
2,9	26,4207	0,1	1,8536
2,99	28,0861	0,01	0,1882
2,999	28,2554	0,001	0,0189
2,9999	28,2724	0,0001	0,001
...	...	...	...
3,00001	28,2745	0,00001	0,0001
3,0001	28,2762	0,0001	0,001
3,001	28,2931	0,001	0,018
3,01	28,4631	0,01	0,018
3,1	30,1907	0,1	1,916

Figura 37. Coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango de una función

Esta actividad (ver Figura 38), se plantea de manera retadora, donde se propone una situación problema, con el fin que el estudiante establezca el límite de la función por medio de la concepción métrica. El estudiante debe buscar y disminuir los intervalos, las tendencias, concluyendo si existe un intervalo de potencia máxima y mínima permitida haciendo uso del simbolismo matemático.

Tarea Retadora
Actividad 3

3.1. Se utiliza un horno de crecimiento de cristales en la investigación para determinar cuál es la mejor manera de fabricar cristales que se usarán en las partes electrónicas de los transbordadores espaciales. Para que el crecimiento de los cristales sea correcto, la temperatura se tiene que controlar exactamente, ajustando la potencia de entrada. Suponga que la relación se presenta con

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y w es la entrada de la potencia en watts.

a) ¿Cuánta potencia se requiere para mantener la temperatura a $200°C$?
b) Si se permite una variación de temperatura de hasta $\pm 1°C$, con respecto a $200°C$, ¿qué intervalo de potencia en watts se permite para la potencia de entrada?

Figura 38. Actividad 3 del Taller 5

3.3.6 Taller 6: Conocimientos finales. Este taller tiene como objetivo identificar los conocimientos finales que posee el estudiante al terminar la implementación de la secuencia de actividades del límite de una función en un punto. En el taller se plantearon enunciados que permitieran dar cuenta de las justificaciones que usa el estudiante para decidir si existe o no el límite de una función en un punto, al igual que la interpretación del límite de una función desde los diferentes tipos de representación.

El primer enunciado (ver Figura 39) nos permite identificar cómo el estudiante concibe el concepto de límite de una función, si lo que sucede cerca del punto o exactamente en el punto.

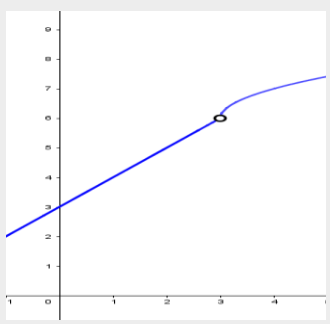
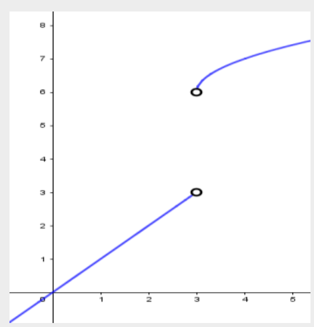
1. ¿Existe el límite de una función en un punto en el que la función no está definida? **Justifique** su respuesta.

Figura 39. Ítem 1 del Taller 6

Entre las posibles respuestas del estudiante a este ítem contemplamos una en cada nivel:

Tabla 2.

Respuestas al ítem1 del Taller 6

Nivel	Análisis a priori
Creación de la Imagen	No existe el límite, porque para poder calcular el límite de una función en un punto, la función debe estar definida en el mismo punto para así concluir que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Comprensión de la Imagen	Si existe el límite de la función por ejemplo, sea $f(x) = \begin{cases} x+2 & si\ x < 0 \\ (x-2)^2 - 2 & si\ x > 0 \end{cases}$ Ahora si calculamos los límites laterales $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$ Y estos son iguales entonces el $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$.
Observación de la Propiedad	Eso depende, porque si se analiza lo que sucede cerca del punto y no exactamente en el punto, podemos calcular los límites laterales, es decir $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$, si estos tienden a un mismo valor de $f(x)$ para valores muy próximos de $x = a$ diremos que el límite de la función en ese punto EXISTE y si los límites laterales son diferentes entonces NO EXISTE el límite de la función en ese punto. También lo podemos mirar gráficamente.   (Si existe) (No existe)
Formalización	Con la definición de límite de una función se puede analizar lo que sucede cerca del punto y no en el punto, a partir de la disminución de la distancia tanto para valores x y $f(x)$. Por lo tanto el límite de la función existe en un $x = a$ si a medida que los valores de $f(x)$ sean cercanos como quieran a un L al hacer que x se acerque lo suficiente a a (no igual).

El segundo enunciado (ver Figura 40) tiene como propósito identificar qué argumentos utiliza el estudiante para verificar o refutar el razonamiento planteado. Entre los argumentos que puede plantear el estudiante se encuentra: que los límites laterales en $x = x_0$ sean iguales para que el límite en ese punto exista, que la función está definida en x_0, que si existe el límite de la función en un punto este es único.

2. Argumentar si el siguiente razonamiento es correcto, de no serlo proponer un contraejemplo donde se evidencie la falsedad. Sabemos que dos funciones f y g tienen límite finito en x_0 y verifican que $f(x_0) = g(x_0)$. Entonces necesariamente $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$. **Justifique** su respuesta.

Figura 40. Ítem 2 del Taller 6

Entre las posibles respuestas del estudiante a este ítem contemplamos una en cada nivel:

Tabla 3.

Respuestas al ítem 2 del Taller 6

Nivel	Análisis a priori
Creación de la Imagen	El enunciado es falso, porque no necesariamente se debe cumplir $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Comprensión de la Imagen	El enunciado es cierto, porque si suponemos 2 funciones tales que $f(x) = x + 1$ y calculamos $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ y Ahora suponemos que $g(x) = x^2 + 1$ y si se calcula el $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ Además que se cumple $f(0) = g(0) = 1$ por tanto $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.
Observación de la Propiedad	Es cierto, porque las funciones f y g están definidas en x_0 de modo que existe $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ Y además se verificó que $f(x_0) = g(x_0)$ entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Formalización	El enunciado es falso, porque si suponemos dos funciones tal que $f(x) = x + 1$ y calculamos $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ y Ahora suponemos que $g(x) = \begin{cases} x - 3 \; si \; x \neq 0 \\ 1 \quad\quad si \; x = 0 \end{cases}$ y se calcula el $\lim_{x\to 0} g(x) = -3$ y se verifica que $f(0) = g(0) = 1$ pero no se cumple $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Con el tercer ítem que se muestra en la Figura 41, se pretende observar cómo el estudiante interpreta y argumenta desde la representación gráfica la existencia del límite de una función en un punto del dominio, además de identificar esos elementos teóricos en los que se basa para justificar sus respuestas.

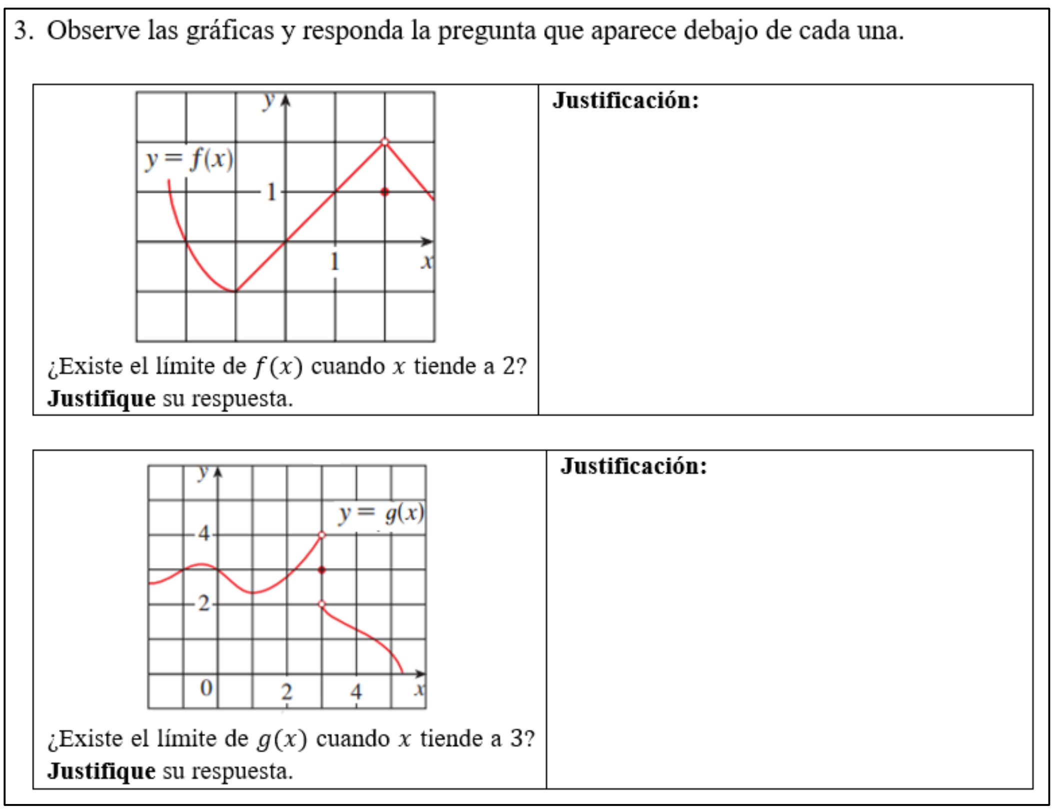
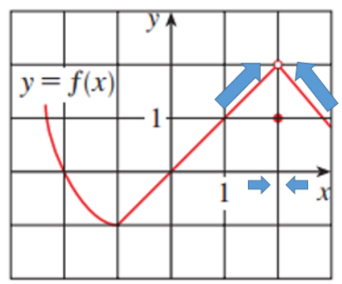


Figura 41. Ítem 3 del Taller 6

Entre las posibles respuestas del estudiante a este ítem contemplamos una en cada nivel:

Tabla 4.

Respuestas a la primera gráfica del ítem 3 del Taller 6

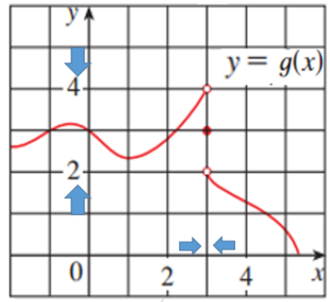
Nivel	Análisis a priori
Creación de la Imagen	El límite de la función no existe, porque $f(2) = 1$ y para valores próximos a $x = 2$, los valores de $f(x)$ tienden a 2, y $1 \neq 2$.
Comprensión de la Imagen	Si tomamos valores próximos a $x = 2$ por izquierda y por derecha en el dominio de la función, los valores de $f(x)$ tienden a 2 (ver Figura). Por tanto el límite de la función existe y es 2. 
Observación de la Propiedad	En este caso podemos calcular los limites laterales es decir; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$ Y como por izquierda y derecha los límites son iguales entonces el $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$. Por lo tanto el límite si existe.

Entre las posibles respuestas del estudiante a este ítem contemplamos una en cada nivel:

Tabla 5.

Respuestas a la segunda gráfica del ítem 3 del Taller 6

Nivel	Análisis a priori
Creación de la Imagen	El límite de la función si existe, y es 3 porque $f(3) = 3$.
Comprensión de la Imagen	El límite de la función no existe, porque si tomamos valores próximos a $x = 2$ por izquierda, los valores de $f(x)$ tienden a 4, y si tomamos valores próximos a $x = 2$ por derecha, los valores de $f(x)$ tienden a 2 y estos son diferentes $4 \neq 2$ (ver Figura). Y para que exista el límite de la función estos valores deben ser iguales.

	
Observación de la Propiedad	El límite de la función no existe, porque si se analizan los límites laterales, $\lim_{x\to 3^+} g(x) = 4$ y $\lim_{x\to 3^-} g(x) = 2$ Estos límites de la función son diferentes, es decir para valores próximos a $x = 3$, $f(x)$ tiende a valores diferentes por izquierda y por derecha.

De igual modo en el ítem 4 (ver Figura 42) se pretende observar los argumentos que utiliza el estudiante para verificar o refutar el razonamiento planteado.

4. Argumentar si el siguiente razonamiento es correcto, de no serlo proponer un contraejemplo donde se evidencie la falsedad. Sea $f(x) = x^3 - 5x + 6$ entonces el $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. **Justifique** su respuesta.

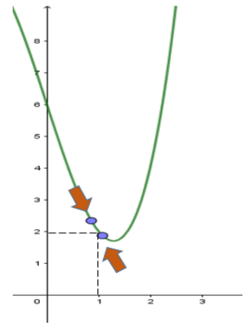
Figura 42. Ítem 4 del Taller 6

Entre las posibles respuestas del estudiante a este ítem contemplamos una en cada nivel:

Tabla 6.

Respuestas al ítem 4 del Taller 6

Nivel	Análisis a priori
Creación de la Imagen	El razonamiento es correcto, porque puedo tomar valores próximos a $x = 1$; por ejemplo para valores a izquierda de $x = 1$ elegimos a $f(0{,}9) = 2{,}229$, $f(0{,}99) = 2{,}020$, $f(0{,}999) = 2{,}002$, y para valores a derecha de $x = 1$, elegimos a $f(1{,}01) = 1{,}980$, $f(1{,}001) = 1{,}998$, $f(1{,}0001) = 1{,}999$, y ambas aproximaciones tienden a 2 por tanto ese es el límite de la función.
	Es verdadero, porque al comparar la representación gráfica y tabular de la función, $f(x)$ tiende a 2 cuando x

<table>
<tr>
<td>Comprensión de la Imagen</td>
<td>se aproxima por izquierda y derecha de 1, entonces el límite existe y es 2.

<table>
<tr><th>x</th><th>$f(x)$</th></tr>
<tr><td>0.99</td><td>2.020</td></tr>
<tr><td>0.999</td><td>2.002</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.0001</td><td>1.999</td></tr>
<tr><td>1.001</td><td>1.998</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Observación de la Propiedad</td>
<td>En este caso podemos calcular los limites laterales es decir;
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \text{ y } \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$
Y como por izquierda y derecha los límites son iguales entonces el $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Por lo tanto el razonamiento es correcto.</td>
</tr>
<tr>
<td>Formalización</td>
<td>Supongamos una distancia de $\varepsilon = 0{,}2$ de tal manera que podemos escribir la desigualdad,
$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2$$
$$1{,}8 < x^3 - 5x + 6 < 2{,}2$$
Ahora es necesario encontrar los valores de x para los cuales la curva $f(x) = x^3 - 5x + 6$ se sitúa entre $y = 1{,}8$ y $y = 2{,}2$. Para $y = 1{,}8$ es cuando $x = 1{,}12$ y para $y = 2{,}2$ es cuando $x = 0.92$. De este modo se puede decir que
$$\text{Si } 0{,}92 < x < 1{,}12 \text{ entonces } 1{,}8 < x^3 - 5x + 6 < 2{,}2$$
Ahora la distancia desde $x = 1$ hasta el extremo izquierdo es $1 - 0{,}92 = 0{,}08$ y hasta el extremo derecho es $0{,}12$. Esto dice que al mantener a x dentro del $0{,}08$ de 1, se conserva a $f(x)$ dentro de $0{,}2$ de 2. Entonces es cierto el argumento.</td>
</tr>
</table>

El propósito del último ítem de la prueba final (ver Figura 43), es identificar cómo el estudiante comprende e interpreta el concepto de límite y si recurre a las nociones de aproximación y tendencia para explicar el tema.

5. Piense que Carlos es un compañero suyo y no pudo asistir a la clase de límite de una función, ¿cómo le explicaría el tema a su compañero mediante un correo electrónico?

Figura 43. Ítem 5 del Taller 6

3.4 Fase IV: Pilotaje de la secuencia de actividades

El pilotaje de la secuencia se realizó con un grupo de 3 estudiantes de recién ingreso a Ingeniería Mecánica los cuales estaban cursando por primera vez Cálculo diferencial. La aplicación de la prueba piloto se llevó a cabo durante el primer semestre académico del presente año (2018-1). En ese momento el diseño de la secuencia de actividades estaba conformada por cinco talleres: conocimientos previos, nociones de aproximación y tendencia, concepción dinámica del concepto de límite de una función en un punto, concepción óptima del concepto de límite de una función en un punto y la concepción métrica del concepto de límite de una función en un punto. La aplicación se llevó en un espacio extra clase durante 10 horas con una duración de 2 horas para cada uno de los talleres.

Está aplicación nos permitió reformular algunas preguntas del taller de nociones de aproximación y tendencia, agrupando ciertas preguntas con el fin de que no sean muy repetitivas. Al igual que se agregaron actividades al taller de concepción dinámica y óptima, con el propósito de generar una tarea retadora y observar el conocimiento que lograban los estudiantes en ese momento. De igual modo, se tuvo en cuenta los momentos en los que se había considerado el uso de la tecnología para el desarrollo de la secuencia.

Durante el pilotaje se evidenció la necesidad de generar un taller de conocimientos finales, en el cual se recogieran los aspectos principales que se trabajaron en los talleres anteriores que nos permitieran dar cuenta de la comprensión del estudiante para el concepto de límite de una función en un punto.

3.5 Fase V: Descriptores a priori de los niveles de comprensión

En esta fase tuvimos en cuenta el análisis *a priori* realizado a los talleres de la secuencia de actividades (Fase III) y la revisión teórica que se realizó del concepto de límite de una función (Fase II), estos elementos nos permitieron realizar la caracterización a priori de los primeros 5 niveles de comprensión matemática en términos de las complementariedades de la acción y expresión que realizan los estudiantes de un curso de cálculo diferencial de la UIS, con el fin de que estos descriptores sean los lentes teóricos para analizar la comprensión del concepto de límite de una función en un punto asociados a la secuencia de actividades que aquí se plantea. A continuación mostramos la caracterización a priori de los primeros 5 niveles.

3.5.1 Nivel 1: Conocimiento primitivo del concepto de límite de una función en un punto. En la teoría de Pirie y Kieren (1994) en este nivel no se plantean acciones y expresiones debido a que en él se recogen todos los conocimientos previos que posee el estudiante, para el desarrollo de nuestra investigación hemos planteado para el nivel primitivo unas acciones y expresiones asociadas a cada proceso matemático que puede tener el estudiante para el desarrollo del concepto de límite de una función.

Tabla 7.

Complementariedades del nivel de Conocimiento primitivo del límite de una función en un punto

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Reconoce una función mediante su representación gráfica.	Construye (traza) una línea vertical (perpendicular) al $eje\ x$ sobre la gráfica para verificar si corta en dos puntos la curva.
Reconoce gráficamente y analíticamente el dominio de la función $f(x)$.	Interpreta el dominio como el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.
Reconoce las razones trigonométricas en la	

circunferencia geométrica de manera gráfica y numérica.	Interpreta el signo de las razones trigonométricas en la circunferencia.
Interpreta que existe una relación entre variables.	Justifica la relación entre variables establecida por una regla de correspondencia.
Realiza una tabla de valores dada la expresión analítica de una función. Determina procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.	Identifica la relación entre los valores de la tabla al utilizar la expresión analítica de una función. Establece relación entre una fracción y su representación decimal.
Explica cuando una representación gráfica, tabular o analítica es función.	Justifica el trazo de la línea vertical para verificar si una curva es función, o mediante la correspondencia uno a uno.

3.5.2 Nivel 2: Creación de la imagen del concepto de límite de una función en un punto.

Tabla 8.

Complementariedades del nivel de Creación de la imagen del límite de una función en un punto

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Reconoce imágenes del concepto de límite de forma mental, verbal, escrita (gráfica, tabla de valores). Reconoce numéricamente que es posible aproximarse a un número real tanto como se quiera.	Determina la existencia del límite de manera gráfica o numérica. Interpreta que para un número en la recta numérica, es posible aproximarse tanto como se quiera por derecha y por izquierda.
Interpreta la aproximación al límite por izquierda y derecha en un punto analizando la gráfica de la función.	Justifica la existencia del límite de una función en un punto a partir de la gráfica de la función.
Realiza aproximaciones numéricas por izquierda y derecha en un punto c en el dominio de la función.	Interpreta la tendencia como una aproximación que “es posible mejorarla”.
Explica que se entiende por aproximación y tendencia en una función.	Justifica la diferencia entre aproximación y tendencia de una función.

3.5.3 Nivel 3: Comprensión de la imagen del concepto de límite de una función en un punto.

Tabla 9.

Complementariedades del nivel de Comprensión de la imagen del límite de una función en un punto

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Construye la gráfica o tabla de una función para reconocer las tendencias finitas o infinitas en un punto de $f(x)$. Identifica de manera gráfica, tabular aproximación y tendencia	Identifica y relaciona la existencia del límite de una función $f(x)$ en punto con las aproximaciones numéricas cercanas al punto. Interpreta la diferencia entre aproximación y tendencia haciendo uso de la gráfica o una tabla.
Explica que si el límite de una función $f(x)$ existe, entonces es único. Interpreta los comportamientos para tendencia finita e infinita de una función.	Justifica que si una función $f(x)$ tiende a un valor L, cuando la variable independiente x crece o decrece sin límite, entonces se dice que $f(x)$ posee un límite en el infinito. Justifica cuando el límite de una función no existe de acuerdo a su representación gráfica.
Calcula el límite de una función $f(x)$ en un punto c, haciendo uso de un proceso de aproximación. Reconoce que el valor límite se puede alcanzar en un punto a través de un proceso de aproximación infinito.	Justifica analíticamente cuando el límite de una función no existe de acuerdo su expresión analítica. Utiliza los símbolos de infinito como herramientas de notación para indicar cuando una cantidad decrece o crece sin límite en dirección negativa o positiva.
Explica cuando el límite de una función $f(x)$ existe.	Justifica que si una función $f(x)$ tiende a un valor L, cuando x_0 se aproxima a la variable independiente entonces el límite existe.

3.5.4 Nivel 4: Observación de la propiedad del concepto de límite de una función en un punto.

Tabla 10.

Complementariedades del nivel de Observación de la propiedad del límite de una función en un punto

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Reconoce gráficamente, tabular y analíticamente la no existencia del límite para una función al identificar que no existe tendencia.	Interpreta gráficamente, tabular y analíticamente la no existencia del límite para una función en un punto c, si cuando x tiende a c , $f(x)$ tiende a $+\infty$ o $-\infty$
Interpreta el comportamiento de los límites laterales de una función $f(x)$ de modo que pueden hacerse arbitrariamente próximos a un número L al tomar x suficientemente cerca por izquierda y por derecha, pero sin que sea igual.	Justifica que el límite de una función $f(x)$ no existe cuando limite por la izquierda o limite por derecha de un punto c no existen; también puede ser que existan pero sean diferentes.
Reconoce que el límite de un cociente de $\frac{f(x)}{g(x)}$ es de forma indeterminada $\frac{0}{0}$, cuando tanto el numerador como el denominador son 0.	Transforma funciones trigonométricas usando manipulaciones algebraicas o algunas identidades trigonométricas para calcular el valor de la función.

3.5.5 Nivel 5: Formalización del concepto de límite de una función en un punto.

Tabla 11.

Complementariedades del nivel de Formalización del límite de una función en un punto

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Reconoce usando las diferentes representaciones que el límite de una función $f(x)$ en el punto c, existe si cuando la variable x se aproxima a c, entonces $f(x)$ tiende a L.	Interpreta usando las diferentes representaciones la existencia de un límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a c no depende de si $f(x)$ está definida en c, sino solo de si está definida para x cerca del número c.

Construye una definición del concepto de límite en términos de aproximación y tendencia.	Describe el concepto de límite usando un lenguaje formal o sin usarlo; sin embargo, las descripciones generales suministradas son equivalentes a la definición formal.
Usa métodos algebraicos para calcular el valor del límite de una función. Reconoce el uso de límites trigonométricos importantes para calcular el valor del límite de otras funciones trigonométricas.	Usa los teoremas de los límites para calcular el valor del límite de una función. Utiliza la notación adecuada para el análisis del concepto de límite de una función en un punto.
Explica cuando es posible utilizar los teoremas de los límites.	Justifica usando los teoremas o la definición formal del límite la existencia o no existencia el límite de la función en un punto.

La caracterización de los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto que se presentaron en esta investigación, se ajustan al diseño de la secuencia de actividades planteada en el apartado 3.3 (Fase III). Por lo cual, es necesario resaltar que para futuras investigaciones, se debe revisar si lo esbozado en esta caracterización tiene en cuenta todos los elementos teóricos asociados a la comprensión del objeto matemático de estudio de la investigación.

3.6 Fase VI: Trabajo de campo

La secuencia de actividades se implementó en el transcurso del segundo semestre (2018-2), la aplicación se llevó a cabo aproximadamente durante 14 horas que equivale a 6 horas semanales (3 semanas), según lo estipula el programa del curso para el estudio del concepto de límite de una función en un punto.

La recolección de datos se hizo a través de las hojas de trabajo en la cual los estudiantes realizaban las actividades, las videograbaciones de las sesiones de trabajo con su transcripción de cada una de ellas y a través de una entrevista donde se preguntaba sobre las respuestas que habían obtenido.

3.7 Fase VII: Selección del caso de estudio

Se recopilaron datos de 38 estudiantes los cuales hacen parte del curso de Cálculo diferencial y de estos, 18 asistieron a todas las sesiones de trabajo. De los anteriores, 10 tenían el desarrollo completo de las actividades propuestas. Lo cual nos llevó a analizar y seleccionar un caso de estudio el cual tránsito por los primeros 5 niveles de comprensión matemática.

3.8 Fase VIII: Análisis de los datos y reporte de los resultados

Los datos recolectados se analizaron desde la teoría de Pirie y Kieren con el análisis a priori de las actividades y la caracterización a priori para los 5 primeros niveles, con el fin de describir la comprensión del límite de una función en un punto, en términos de las complementariedades de la acción y la expresión realizadas por el caso de estudio durante la implementación de la secuencia de actividades.

4. El caso de Kevin

Kevin es un estudiante de 18 años que culminó sus estudios de bachillerato en el año 2017 en una institución de carácter oficial de la ciudad de Bucaramanga y actualmente se encuentra en el primer semestre del programa de Diseño Industrial de la UIS. En una entrevista previa, el estudiante expresó que siempre su primera opción fue ese programa. Además, él manifiesta el gusto por las matemáticas, pues su complejidad representa un reto para él, aunque siente dificultades en algunos temas.

Kevin asistió a todas las sesiones de trabajo y tenía un registro completo de las actividades propuestas. Fue un estudiante que se destacó por expresar sus ideas e incluso estructurar sus explicaciones, aun cuando no estaba seguro de sus respuestas. Las evidencias obtenidas del caso de Kevin (en cuanto a las complementariedades de la acción y expresión realizadas durante la implementación de la secuencia de actividades) permitieron situarlo en el nivel de Formalización para la comprensión del límite de una función en punto.

En las evidencias presentadas, dentro de los resultados del análisis, el cual se reporta en este capítulo, se señalan en las Figuras las siguientes convenciones: recuadros amarillos, para las complementariedades de la acción y recuadros rojos, expresiones de Kevin capturadas de sus hojas de trabajo. Además, se exhibirán transcripciones de episodios de las entrevistas y de videos de clase.

4.1 Acciones y expresiones de Kevin en el Taller de Conocimientos previos

La información que se presenta a continuación, fue obtenida durante el desarrollo del Taller de Conocimientos previos (apartado 3.3.1), con el que se pretende identificar la relación que el estudiante establece entre aproximación y tendencia en un contexto geométrico y un contexto funcional. En el taller se plantean enunciados relacionados con el uso las nociones de aproximación y tendencia, al igual que el uso de las diferentes maneras de representar una función. En este caso se presentan resultados del análisis a las respuestas de Kevin.

En la respuesta al ítem 2 del Taller 1 (ver Figura 44), se puede evidenciar que Kevin reconoce que el área del triángulo ABC se reduce, porque el segmento $\overline{BC}$ es igual a la base del triángulo. Además, se puede notar que él tiene en cuenta que el área de un triángulo depende de la base y la altura; en este caso porque la magnitud del segmento $\overline{BC}$ se reduce y será menor que la anterior, por lo tanto el área del triángulo ABC será menor, ya que la base es menor, pero la altura sigue igual y 2 es constante.

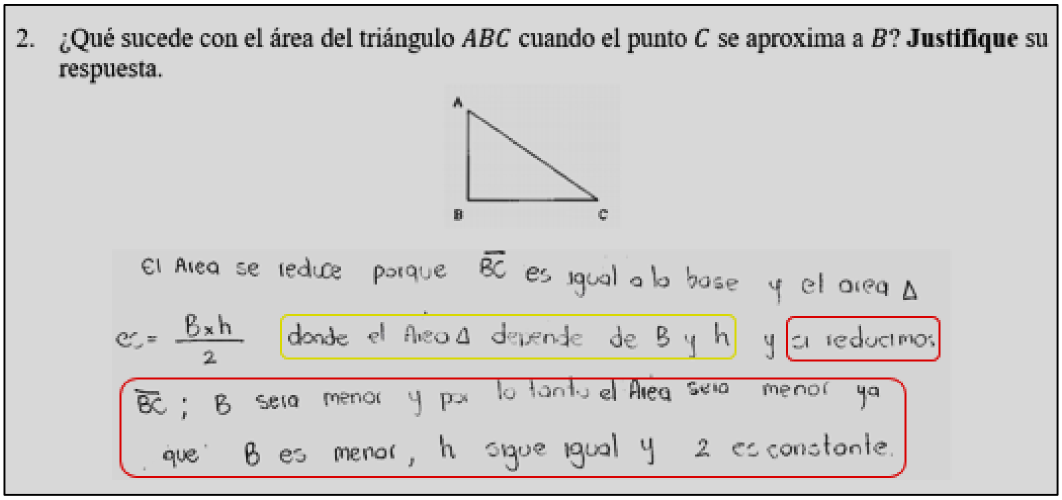
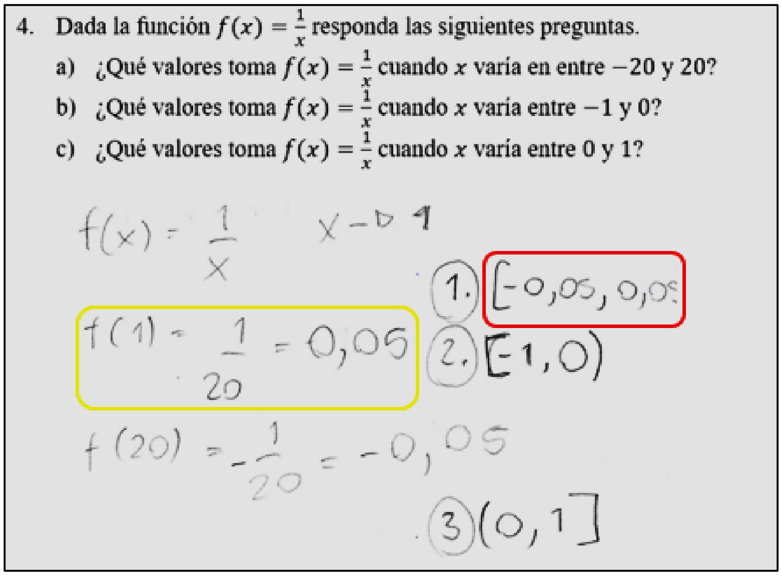


Figura 44. Respuesta de Kevin al ítem 2 del Taller 1

Además, se puede observar (en el recuadro rojo de la Figura 44) que el estudiante no utiliza el término aproximación en sus justificaciones, más bien usa el término *"reducir"* para referirse a la variación de la magnitud del segmento $\overline{BC}$, el cual representa la base del triángulo ABC. Aquí identificamos, que el estudiante está comparando el área del triángulo inicial con el área del triángulo que se forma cuando reduce la magnitud del segmento de la base, permitiéndole concluir que el área del triángulo ABC tiende a ser menor.

En la respuesta de Kevin al ítem 4 del Taller 1 (ver Figura 45), se observa que el estudiante no reconoce la variación de la función en el intervalo de $[-20,20]$, lo anterior se infiere porque Kevin se limitó a evaluar los extremos del intervalo, sin detenerse a analizar los valores que toma la función, de acuerdo a la variación de la variable independiente.


4. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ responda las siguientes preguntas.

a) ¿Qué valores toma $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x varía en entre -20 y 20?

b) ¿Qué valores toma $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x varía entre -1 y 0?

c) ¿Qué valores toma $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x varía entre 0 y 1?

$f(x) = \frac{1}{x}$ $x \to 1$

$f(1) = \frac{1}{20} = 0,05$

$f(20) = -\frac{1}{20} = -0,05$

1. $[-0,05, 0,05$

2. $[-1, 0)$

3. $(0, 1]$

Figura 45. Respuesta de Kevin al ítem 4 del Taller 1

En la entrevista realizada a Kevin (el cual se mencionará en la trascripción como K) cuando el Investigador (quien se mencionará como I) indaga sobre sus respuestas, responde como se muestra a continuación:

I: ¿Qué valores puede tomar la variable independiente?

K: Todos excepto el cero, porque al colocar cero abajo me da una asíntota [con la mano hace un movimiento indicando que es vertical]

I: Bueno, ahora con los valores que ya calculó, puede decir cuáles serían los valores que toma la función en el intervalo de $[-20,20]$.

K: Esos valores están en el rango, pues siendo así es de $-0,05$ a $0,05$.

I: ¿Está seguro de eso?

K: Si.

I: Qué sucede si elegimos a $f(x) = 0,04$ ¿Cuál sería el valor de x?

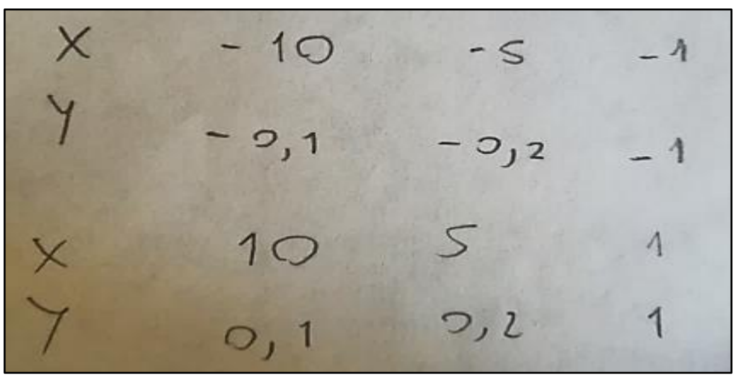
K: Es decir $f(x) = 0{,}04$ y ahora sería buscar a x [utiliza la calculadora], el valor de x es 25 pero ese valor se sale del intervalo.

I: Entonces es falso lo que está diciendo.

K: Si, porque está por fuera del intervalo.

De ese episodio, se puede inferir que el estudiante no lograba determinar cuáles eran los valores que tomaba $f(x)$ en ese intervalo, por ello, se le solicitó realizar una exploración de la función numéricamente, para luego hacer una representación gráfica, de lo cual el estudiante expresó lo siguiente:

K: Mmm no recuerdo como es la gráfica, pero voy a hacer una tabla de valores [el estudiante elabora la tabla que se muestra en la Figura 46] y luego trazo la gráfica.



X	-10	-5	-1
Y	-0,1	-0,2	-1
X	10	5	1
Y	0,1	0,2	1

Figura 46. Tabla de valores realizada por Kevin en el ítem 4 del Taller 1

K: [Kevin al observar su tabla se pregunta] ¿Quién es mayor $-0{,}1$ o $-0{,}2$?

I: [Usando la tabla del estudiante] ¿Quién está más cerca del cero?

K: Pues creo que $-0{,}1$ entonces es mayor. Mmm la gráfica sería algo así. [ver Figura 47]

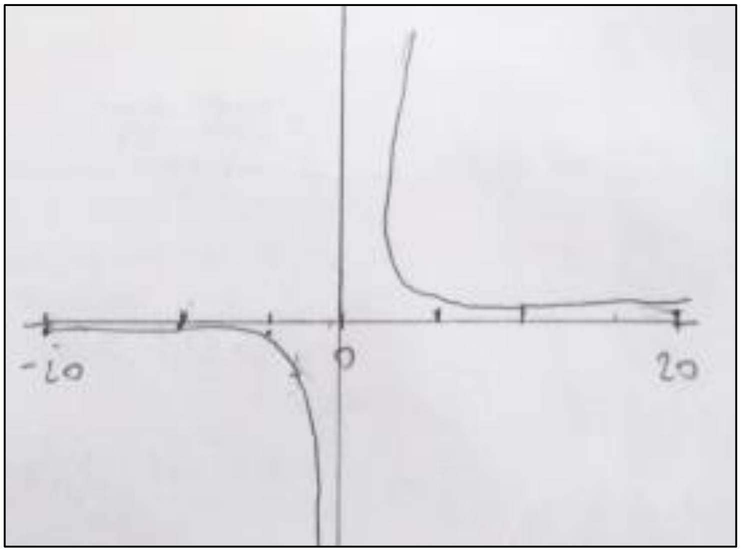


Figura 47. Representación gráfica realizada por Kevin al ítem 4 del Taller 1

I: Bueno y ahora que ya tiene la gráfica ¿Qué sucede cuándo x toma valores próximos a cero?

K: En $x = 0$ hay una asíntota [muestra en la hoja que la función se va a infinito y menos infinito]

I: Entonces, ¿Cuáles son los valores que toma la función?

K: Mmm ya, sería de menos infinito a $-0{,}05$ y de $0{,}05$ a infinito [escribe lo que se muestra en la Figura 48]

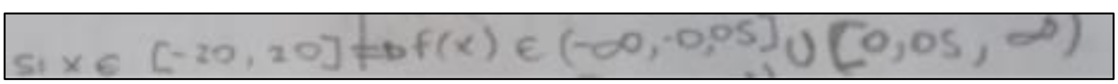


Figura 48. Expresión de los valores que toma la función del Ítem 4 del Taller 1 realizada por Kevin

La exploración de la función de manera numérica y gráfica le permitió al estudiante analizar la variación y los valores que toma $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x varía entre -20 y 20 al igual que valores próximos a $x = 0$, para así decidir sobre los valores que toma la función a medida que está variando la variable independiente.

Durante la exploración a la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se pudo observar que Kevin, realiza un *Folding Back* sobre el concepto de función, en el cual reexamina sus conocimientos acerca del dominio y rango de una función, al igual que a la representación gráfica, esto con el fin de lograr analizar la variación de la función en ciertos intervalos.

De acuerdo a Thom y Pirie (2006) "como observadores, nunca podremos saber exactamente el *conocimiento primitivo* de otra persona. Sin embargo, podemos construir diversas interpretaciones de la evidencia que se tenga a nuestra disposición a través de unas acciones físicas, verbales o escritas" (p. 189).

Por lo expuesto en este apartado, se identificaron para el caso de Kevin, las siguientes complementariedades de la acción y la expresión (ver Tabla 12) correspondientes al Nivel 1 de Conocimiento primitivo asociado al límite de una función en un punto.

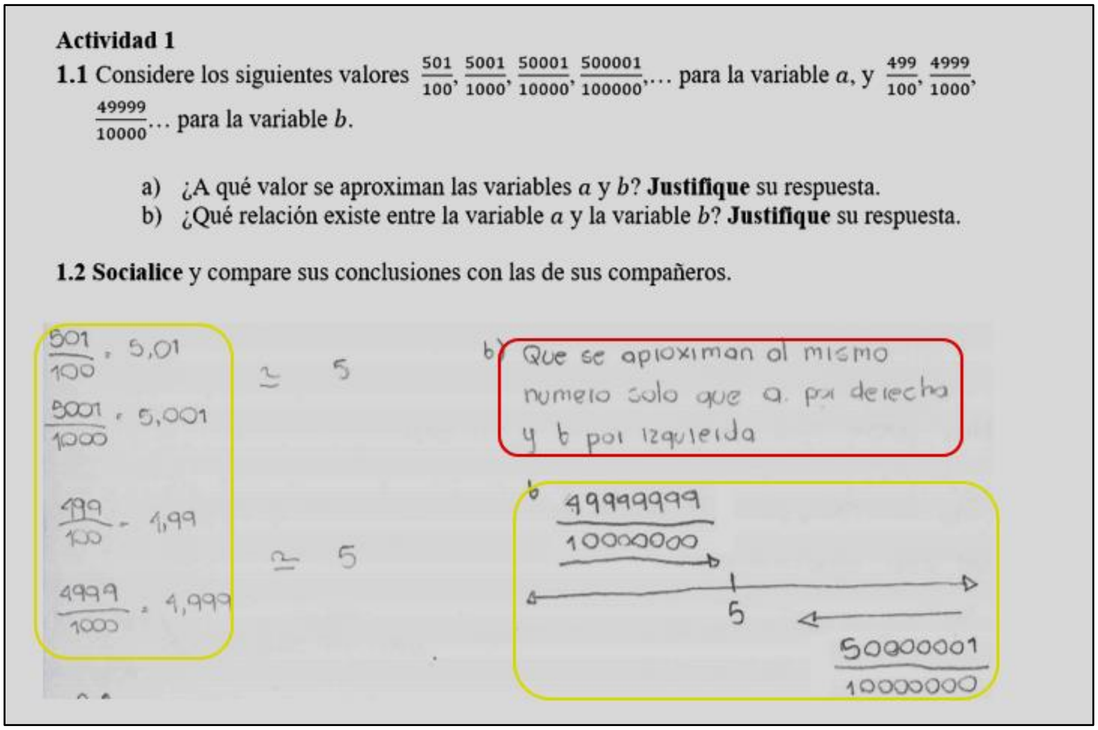
Tabla 12.

Complementariedades de la acción y expresión de Kevin para el Nivel de Conocimiento primitivo

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Reconoce gráficamente y analíticamente el dominio de la función $f(x)$.	Interpreta el dominio como el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.
Interpreta que existe una relación entre variables.	Justifica la relación entre variables establecida por una regla de correspondencia.
Realiza una tabla de valores dada la expresión analítica de una función.	Traza la gráfica de una función a partir de la tabla de valores al utilizar la expresión analítica.

4.2 Acciones y expresiones de Kevin frente a las nociones de aproximación y tendencia

En los razonamiento mostrados por Kevin al responder la actividad 1 del taller diseñado para explorar las nociones de aproximación y tendencia, se evidencia que el estudiante identifica la existencia de las dos sucesiones numéricas, tal como se muestra en la Figura 49. Como se puede observar en el recuadro amarillo, el estudiante para mostrar la relación entre ambas variables usa dos flechas en sentidos opuestos que se dirigen a 5.



Actividad 1

1.1 Considere los siguientes valores $\frac{501}{100}, \frac{5001}{1000}, \frac{50001}{10000}, \frac{500001}{100000}, \ldots$ para la variable a, y $\frac{499}{100}, \frac{4999}{1000}, \frac{49999}{10000} \ldots$ para la variable b.

a) ¿A qué valor se aproximan las variables a y b? **Justifique** su respuesta.

b) ¿Qué relación existe entre la variable a y la variable b? **Justifique** su respuesta.

1.2 Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 49. Respuesta de Kevin a la actividad 1 del Taller 2

En la entrevista realizada a Kevin, para conocer su razonamiento acerca de esta actividad, él responde mediante las siguientes expresiones:

I: ¿Qué significado tienen las flechas que están al lado de 5?

K: Es que aquí los valores de b se acercan a 5 por izquierda y los valores de a se acercan pero por derecha.

I: ¿Por qué le agregó más ceros y más nueves a esos valores?

K: Pues ahí no pasa nada, solo que entre más ceros el valor va a estar más cerca de 5 pero no va a ser 5, de igual manera con los nueves.

I: Entonces ¿Cuál sería un valor próximo a 5 por izquierda?

K: 4,9 es próximo a 5, pero 4,9999999 es más próximo a 5.

I: ¿Cuantos nueves debe tener ese valor para que sea más próximo?

K: Pues $4,\overline{9}$ así será más próximo a 5 por izquierda.

En ese sentido, la expresión del estudiante, da cuenta de que él logró identificar la existencia de las dos sucesiones numéricas que se aproximan a 5. Al respecto, Engler et al. (2007) reportan que esta es una de las habilidades que se tienen para pasar de un sistema de representación a otro, sin ningún inconveniente.

En la primera parte de la actividad 2 (ver recuadro amarillo de la Figura 50), el estudiante reconoce que *"los puntos verdes A_n se aproximan a A"* además de que logró identificar *"que cada que aparece un nuevo punto A_n, éste está más cerca del punto rojo (A) aproximándose por izquierda"*.

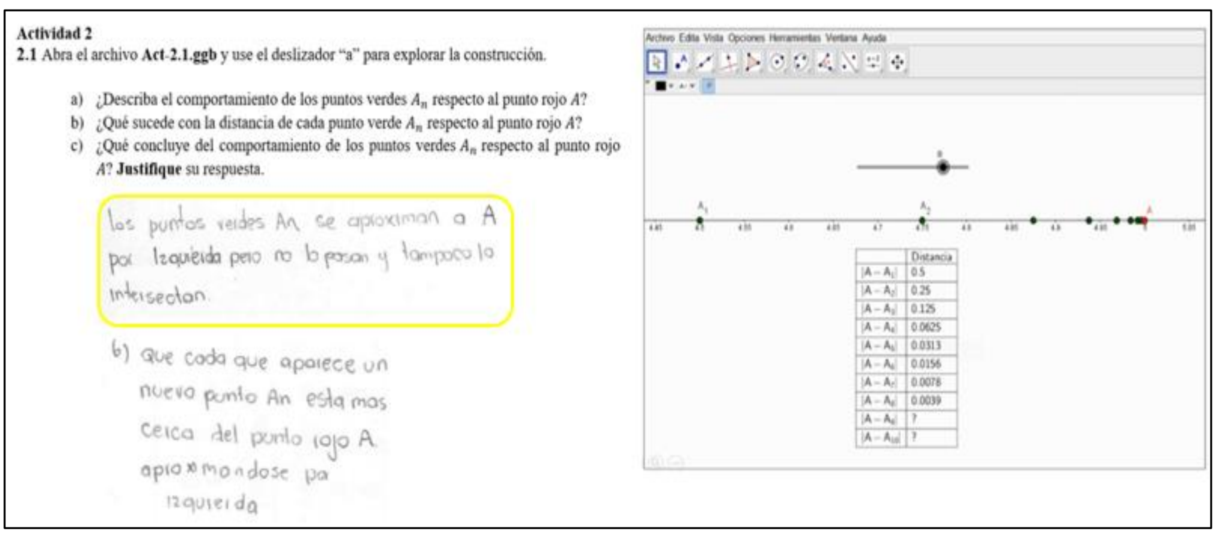


Figura 50. Respuesta de Kevin al ítem a y b de la actividad 2.1 del Taller 2

Esta acción le permitió concluir que entre más cerca se encuentren los valores de A_n de A *"la distancia estará más cerca de cero"* (ver recuadro rojo de la Figura 51), haciendo referencia a la disminución de la distancia entre los puntos verdes respecto al punto rojo.

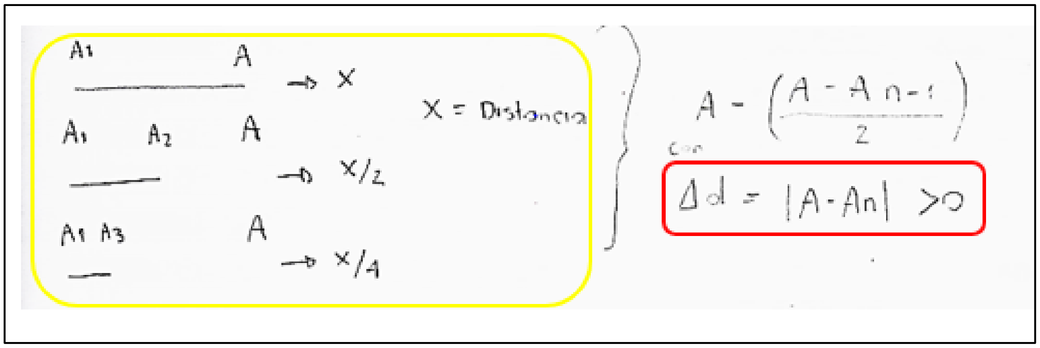


Figura 51. Respuesta de Kevin al ítem *c* de la actividad 2.1 del Taller 2

En esta actividad el estudiante reconoce que es posible aproximarse a un punto en la recta numérica a partir de la disminución de la distancia entre los dos puntos, comparando cada una de las magnitudes respecto a la anterior. Según Blázquez y Ortega (2002) el uso de la noción de aproximación genera un acercamiento intuitivo y dinámico sobre la densidad del campo de los reales, concepto importante que se esconden detrás del estudio de los límites.

Para la segunda parte de la actividad 2 (ver el apartado 3.3.2), se trabajó con un archivo en GeoGebra en el cual lo primero que se observa son "tres puntos" sobre la recta numérica (ver Figura 52), luego mediante el zoom (generado al mover controladamente el deslizador "m") se visualiza la existencia de otros puntos a izquierda y derecha del punto rojo.

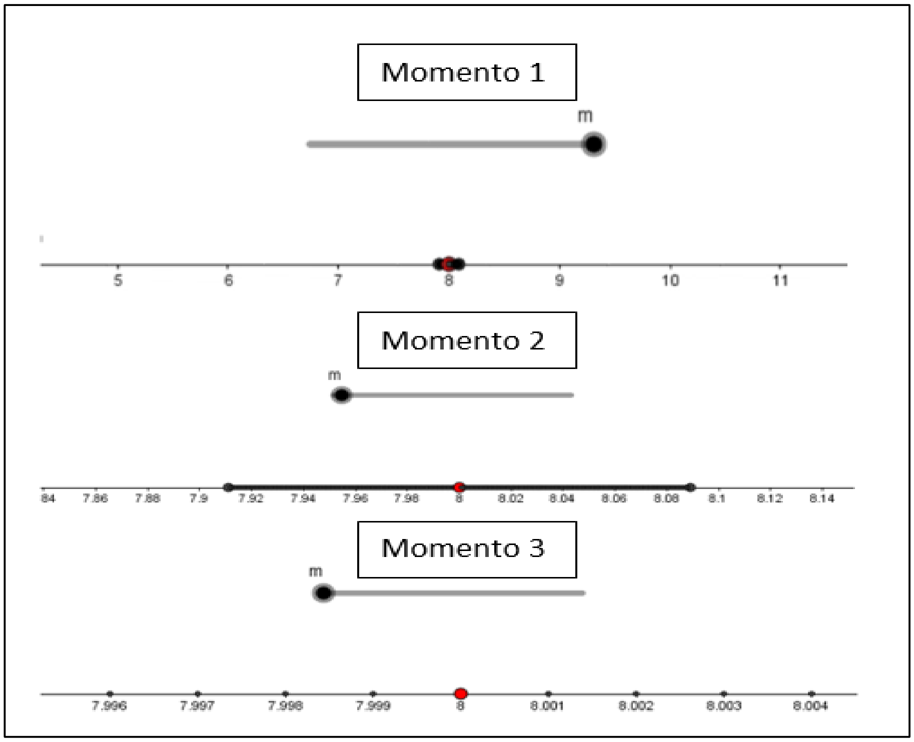


Figura 52. Archivo de GeoGebra para la actividad 2.2 del Taller 2

En la Figura 53 (ver recuadro amarillo), se muestra que el estudiante inicialmente pensaba que los puntos grises estaban muy cerca de 8, pero luego de utilizar el deslizador cambió su opinión, debido a que logró identificar y explicar que había *"una serie de puntos que están a menor distancia que los iniciales"*. En dicha expresión, se evidencia que el estudiante logra comprender que existe una tendencia hacia el punto rojo.

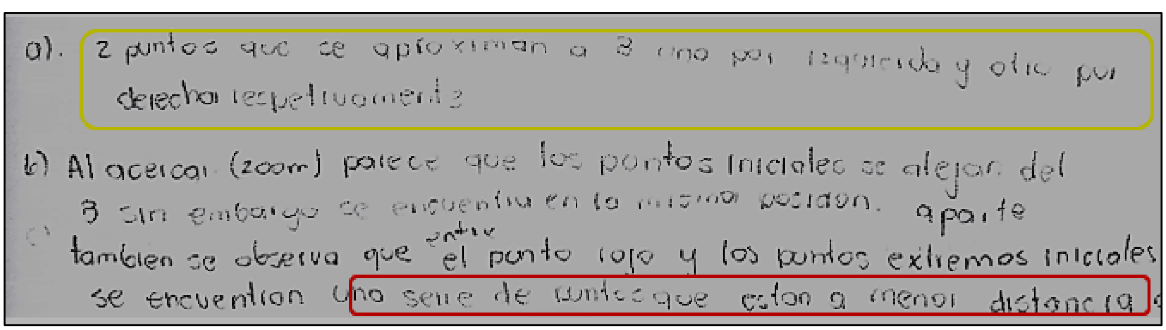


Figura 53. Respuesta de Kevin al ítem *a* y *b* de la actividad 2.2 del Taller 2

En ese sentido, Kevin justifica la existencia de tendencia a partir de que siempre es posible construir un punto más próximo a 8 *"porque la recta numérica es infinita"* (ver Figura 54). Al respecto García, Serrano y Díaz (2002) manifiestan que la tendencia exige una visualización de tipo numérico de los procesos infinitos de aproximación como un todo.

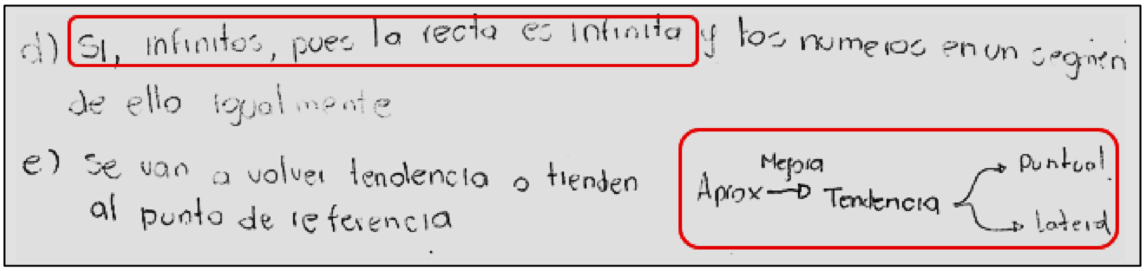


Figura 54. Respuesta de Kevin al ítem *c* y *d* de la actividad 2.2 del Taller 2

Mediante las expresiones de Kevin evidenciadas en la actividad 2.2, se logra identificar que él diferencia la aproximación de la tendencia, al expresar que *"existe tendencia cuando la aproximación mejora"*, otras expresiones a esta actividad se dieron en el siguiente episodio:

I: ¿Existe alguna relación entre aproximación y tendencia?

K: Aproximación, por ejemplo: 2,9 es próximo de 3.

I: ¿Cuándo existiría tendencia?

K: Pues cuando los valores están más cercanos a 3, por ejemplo $2,\overline{9}$.

En el anterior episodio se evidencia como el estudiante entiende y diferencia las nociones de aproximación y tendencia, lo cual en términos de Blázquez (1999) la aproximación se reconoce a través de la disminución del error, mientras que la tendencia requiere, que cualquier aproximación, distinta del valor al que se tiende se pueda mejorar.

Por otra parte, se evidencia que el estudiante expresa que $2,\bar{9}$ es un valor más cercano de 3, pero ese valor es otra forma de escribir el 3. Según Tall (1986) a partir de su idea en la concepción del límite, menciona la siguiente pregunta ¿$0,999\ldots. = 1$?. La dificultad que se presenta al reconocer esta igualdad proviene de la escritura decimal de un número (posiblemente ilimitado) y el número mismo. Además, ante esta igualdad el autor expresa que se debe realizar la distinción entre proceso y objeto, porque ayuda a comprender la distinción entre $0,999\ldots$ que se entiende como un proceso, mientras que 1 se entiende como un objeto. De manera similar, las nociones de infinito potencial e infinito actual permiten explicar que esta igualdad no es aceptada fácilmente.

En la actividad 3, se propone una situación de carácter geométrico en el plano cartesiano para analizar la relación entre las nociones de aproximación y tendencia (ver Figura 55), con la cual se pretende que surja de manera natural la idea de límite.

Actividad 3

3.1 Abra el archivo **Act-3.1.ggb**, mueva el punto P en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia.

a) ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ cuando el ángulo α es igual a $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ y $360°$? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.

b) ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ cuando el ángulo α se aproxima a 0º, 90º, 180º, 270º y 360º? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.

3.2 Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

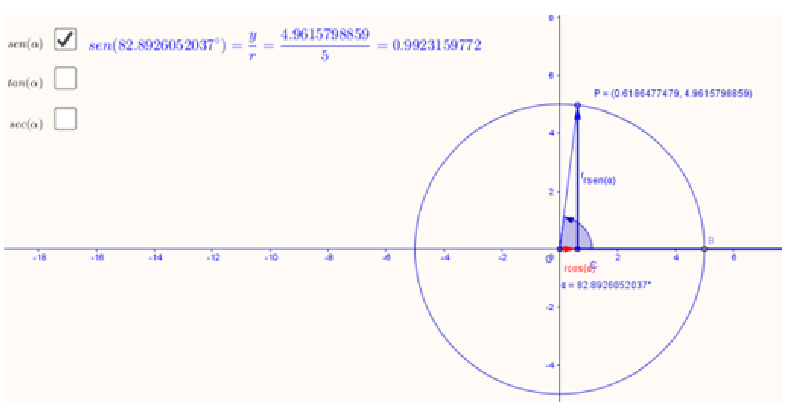
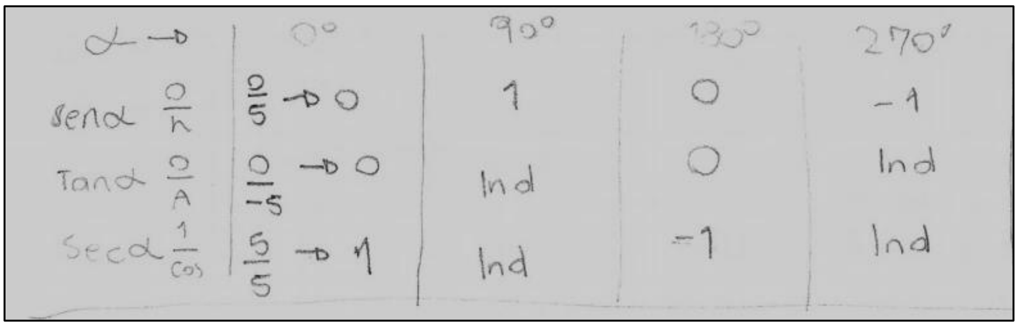


Figura 55. Actividad 3 del Taller 2

En ese sentido, Kevin toma los valores de las longitudes de x, y, r que varían al mover el punto P sobre la circunferencia de radio 5, lo cual le permiten justificar los valores que toman las razones trigonométricas en los ángulos cuadrantales (ver Figura 56). Por ejemplo, si $\alpha = 90°$, $sen(90°) = \frac{y}{r} = \frac{5}{5} = 1$, pero al momento de calcular $\tan(90°)$ y $\sec(90°)$ éstas son *"indefinidas porque su expresión queda* $\frac{5}{0}$*"*



$\alpha \rightarrow$	0°	90°	180°	270°
sen α $\frac{O}{h}$	$\frac{0}{5} \rightarrow 0$	1	0	−1
Tan α $\frac{O}{A}$	$\frac{0}{-5} \rightarrow 0$	Ind	0	Ind
Sec α $\frac{1}{Cos}$	$\frac{5}{5} \rightarrow 1$	Ind	−1	Ind

Figura 56. Respuesta de Kevin al ítem a de la actividad 3 del Taller 2

Con el fin de analizar por qué esas expresiones son indeterminadas se plantea el ítem b de esta actividad (ver Figura 55), se evidencia como el estudiante decide sobre la tendencia de las razones trigonométricas $\mathrm{sen}(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$. En este caso Kevin está analizando que valor toma $sen(\alpha)$ y $tan(\alpha)$ cuando el ángulo α se aproxima a 90º tanto por derecha como por izquierda (haciendo uso de la hoja del software de GeoGebra) tal como se observa en los recuadros amarillos de la Figura 57.

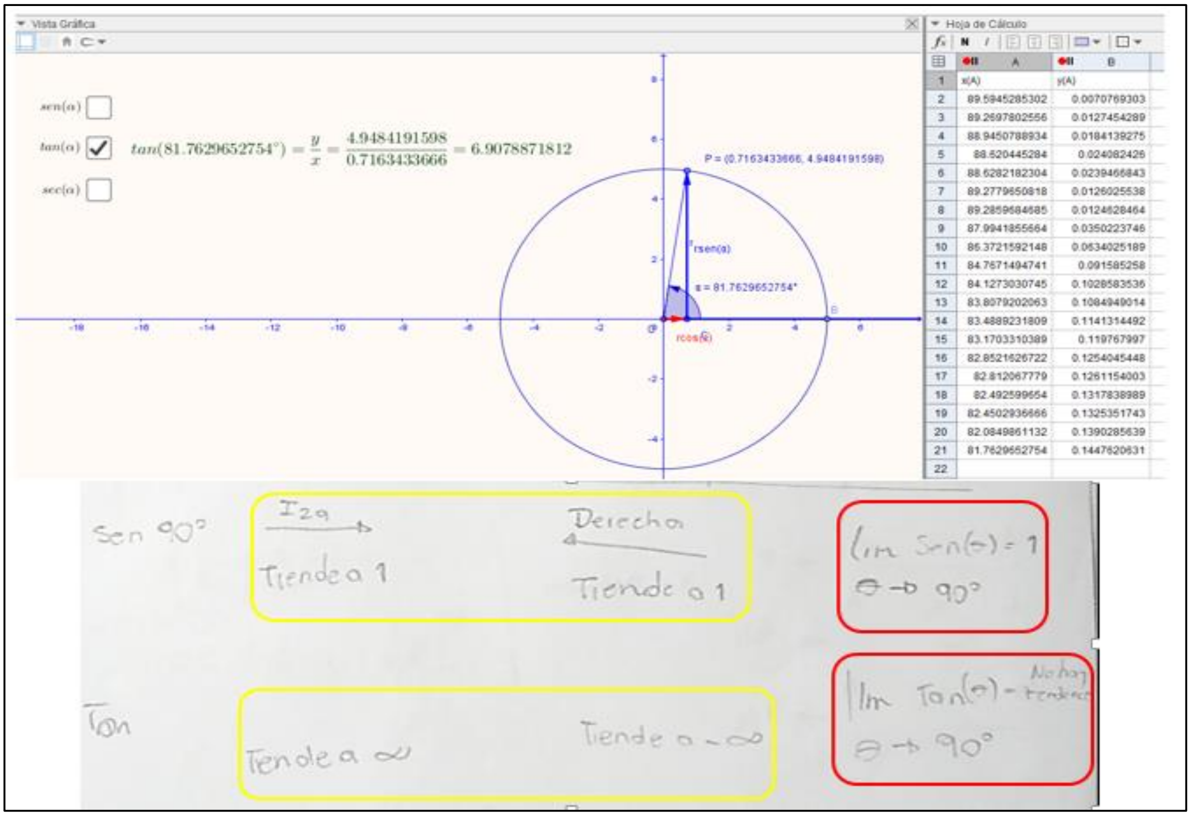


Figura 57. Respuesta de Kevin al ítem *b* de la actividad 3 del Taller 2

Con lo observado en la Figura 57 y con las respuestas en la entrevista al estudiante, se pudo corroborar que el estudiante logra identificar la tendencia de los valores de las razones trigonométricas a medida que α se aproxima a los ángulos cuadrantales, tal como se muestra a continuación:

I: ¿Qué valor toma $sen(\alpha)$ cuando nos aproximamos a 90º por izquierda y por derecha?

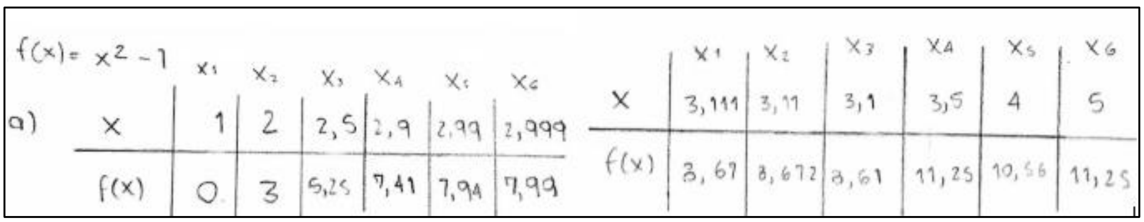
K: Las flechas que realicé indican que α tiende por izquierda y por derecha a 90º. Eso hace que $sen(\alpha)$ tienda a 1, porque por izquierda tiende a 1 y por derecha también. Por lo tanto el límite existe y es 1.

I: Tiende a 1 o es igual a 1.

K: Es 1, porque la variable tiende a 90º y entonces es igual a 1.

Es de resaltar que en esta actividad, el uso de la hoja de cálculo que ofrece el Software Interactivo de GeoGebra, contribuyó de manera dinámica en la construcción del concepto intuitivo de límite. Al respecto, Fernández (2010) expone que la hoja de cálculo puede ser un apoyo importante para que el estudiante construya una idea de aproximación, porque permite tabular valores de una función dada y permite explorar dinámicamente el concepto de límite de una función en un punto.

En los razonamientos expuestos por Kevin para la actividad 4 (ver el apartado 3.3.2), se puede evidenciar que él logró establecer aproximaciones a un valor "x", relacionando las aproximaciones en el dominio de la función, con la tendencia de $f(x)$ a través del registro numérico (en una tabla de valores para $(x_i, f(x_i))$ que se muestra en la Figura 58. Para lo anterior, Kevin fue refinando aproximaciones, en el sentido de ir buscando la aproximación a 3 que indique la existencia de tendencia a medida que las aproximaciones laterales coincidan en un mismo punto.



$f(x) = x^2 - 1$

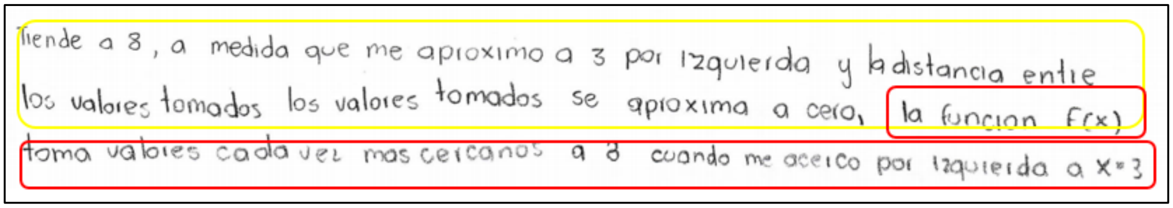
a)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	1	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	0	3	5,25	7,41	7,94	7,99

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	3,111	3,11	3,1	3,5	4	5
f(x)	3,67	8,672	8,61	11,25	10,56	11,25

Figura 58. Respuesta de Kevin al ítem a de la actividad 4 del Taller 2

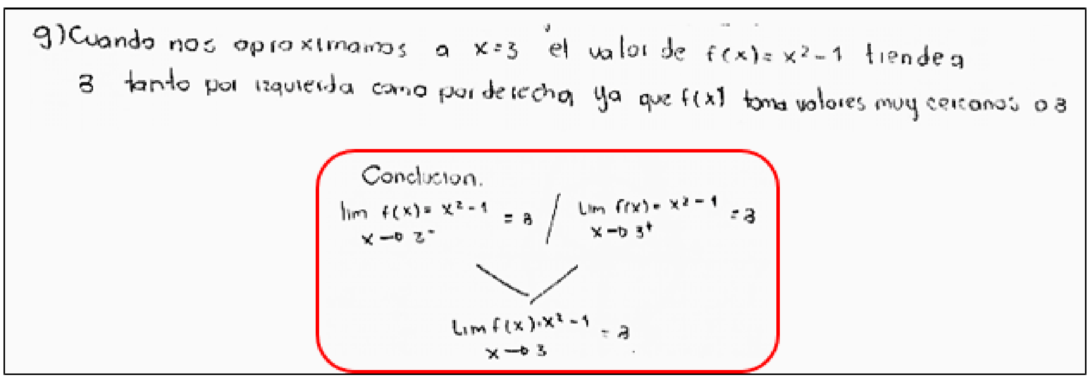
El estudiante durante esta actividad logra escoger dos sucesiones numéricas que se aproximen a 3 por derecha y por izquierda (ver Figura 58) de modo que la distancia entre los valores tomados y 3 se aproximan a cero (acción que se muestra en el recuadro amarillo de la Figura 59). De modo que la función $f(x)$ toma valores más cercanos a 8. El mismo razonamiento es presentado cuando Kevin analiza los valores próximos a derecha de 3.



Tiende a 8, a medida que me aproximo a 3 por izquierda y la distancia entre los valores tomados los valores tomados se aproxima a cero, la funcion $f(x)$ toma valores cada vez mas cercanos a 8 cuando me acerco por izquierda a $x=3$

Figura 59. Respuesta de Kevin al ítem *b* de la actividad 4 del Taller 2

Esas aproximaciones que realizó el estudiante, le permiten justificar que a medida que *"se aproxima a* $x = 3$, $f(x)$ *tiende a* 8 *por izquierda y por derecha"* (realizando dos flechas que indican tendencia), y ese valor sería el límite de la función en ese punto (ver recuadro rojo de la Figura 60).



g) Cuando nos aproximamos a $x=3$ el valor de $f(x)=x^2-1$ tiende a 8 tanto por izquierda como por derecha ya que $f(x)$ toma valores muy cercanos a 8

Conclusion.

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=x^2-1 = 8$ / $\lim_{x\to 3^+} f(x)=x^2-1 = 8$

$\lim_{x\to 3} f(x)=x^2-1 = 8$

Figura 60. Respuesta de Kevin al ítem *g* de la actividad 4 del Taller 2

El primer momento en la comprensión de un concepto matemático según Thom y Pirie (2006) surge cuando se realizan acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto, en este caso se evidencia que Kevin ha logrado *Crear Imagen* para el límite de una función en un punto, porque sus acciones van encaminadas en la *realización de la imagen* (image doing) que hace través del uso de la representación tabular, el uso de la hoja de cálculo de GeoGebra, además de identificar la relación entre aproximación y tendencia para analizar el límite de una función como lo que sucede cerca del punto. Por otro lado, Kevin muestra expresiones enfocadas en el *análisis de la imagen* (image reviewing) al realizar distinción entre las nociones de aproximación y tendencia, con base en la disminución de la distancia (haciendo referencia a calcular el error absoluto) que cada vez puede ser mejorada y también logra establecer aproximaciones en el dominio y en el rango de la función a través del registro numérico.

De acuerdo al análisis de las respuestas de Kevin frente a las actividades relacionadas con las nociones de aproximación y tendencia, se identificaron las siguientes complementariedades de la acción y la expresión para el Nivel 2 de Creación de la imagen asociado al límite de una función en un punto descritas en la Tabla 13.

Tabla 13.

Complementariedades de la acción y expresión de Kevin para el Nivel de Creación de la imagen

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Reconoce numéricamente que es posible aproximarse a un número real tanto como se quiera.	Explica que es posible aproximarse a un valor c en la recta numérica, a través de la disminución de la distancia.
Interpreta la aproximación al límite por izquierda y derecha en un punto analizando la gráfica de la función.	Justifica la existencia del límite de una función en un punto a partir de la gráfica de la función.
Realiza aproximaciones numéricas en un punto $\boldsymbol{c}$ por izquierda y por derecha.	Interpreta la tendencia como una aproximación que es posible mejorar.
Da ejemplos de aproximación y tendencia.	Explica la diferencia entre aproximación y tendencia.

4.3 Acciones y expresiones de Kevin frente a la Concepción dinámica del límite de una función en un punto

En lo relacionado con el ítem a de la actividad 1 de este taller (ver Figura 61), el estudiante identifica que la función no está definida en $x = 2$, dado que ese valor no pertenece al dominio de la función, porque al calcular $f(2)$ le da una indeterminación.

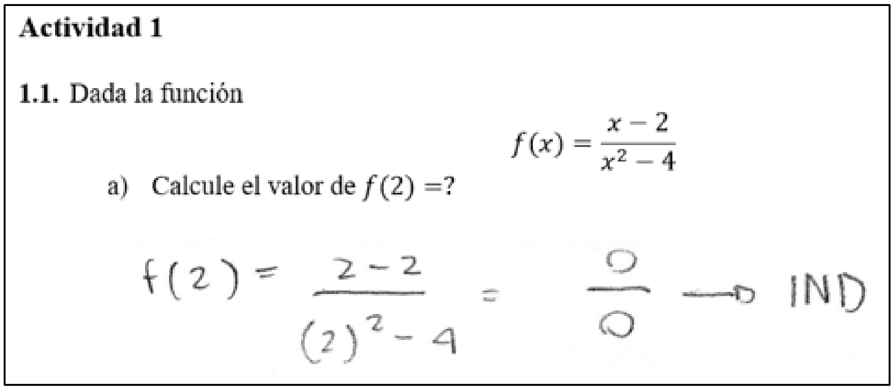


Figura 61. Respuesta de Kevin al ítem a de la actividad 1 del Taller 3

Cuando el investigador le pregunta a Kevin ¿qué sentido tiene el resultado que obtuvo?, él responde lo siguiente:

> K: La función en ese punto no está determinada, porqué ese valor no pertenece al dominio de la función. Porqué al evaluar $x = 2$ no existe la imagen. Posiblemente en ese punto hay un hueco, una asíntota vertical o un salto.

Según lo expresado por Kevin, es de resaltar que tiene presente cual es el dominio de la función, además de explicar qué es lo que está sucediendo cuando la variable independiente toma el valor de 2.

Con el propósito de analizar qué sucede con la función cuando x toma valores próximos de 2, se le solicita a Kevin completar la tabla del ítem b, allí el estudiante reconoce que los valores que toma la variable independiente tienden a 2, tal como se observa en el recuadro amarillo de la Figura 62.

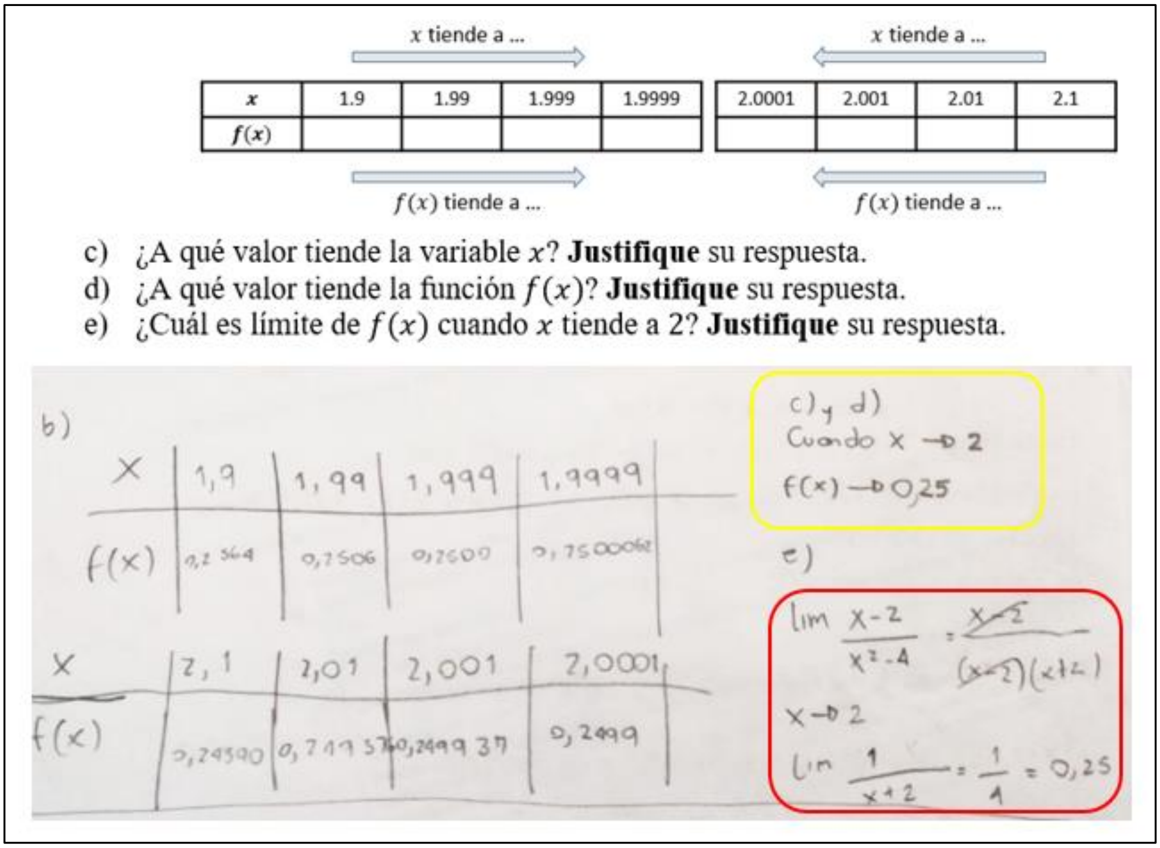
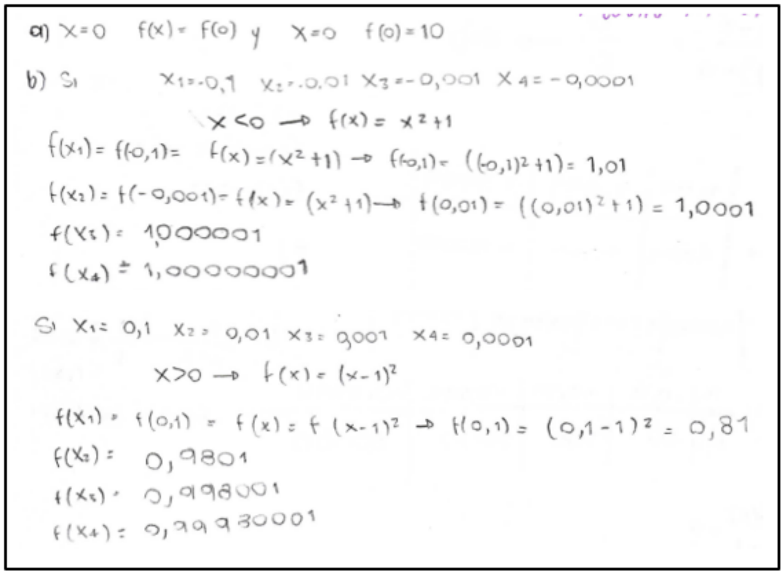


Figura 62. Respuesta de Kevin al ítem c y d de la actividad 1 del Taller 3

La coordinación entre las aproximaciones realizadas en el dominio y en el rango de la función le permitieron identificar que cuando x tiende a 2, el límite de la función $f(x)$ tiende a 0,25. Pero Kevin al no estar convencido de eso, decide realizar el proceso algebraico (ver recuadro rojo de la Figura 19) para verificar la existencia del límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2, corroborando que las aproximaciones que había realizado estaban correctas.

En la actividad 2 (ver apartado 3.3.3), en un primer momento el estudiante determina si $x = 0$ hace parte del dominio de la función, para así calcular la imagen de $f(0) = 10$. Además, Kevin reconoce que cuando x toma valores a izquierda de 0, los valores de la función tienden a 1 (ver recuadro amarillo de la Figura 63). De igual modo, cuando x toma valores a derecha de 0.



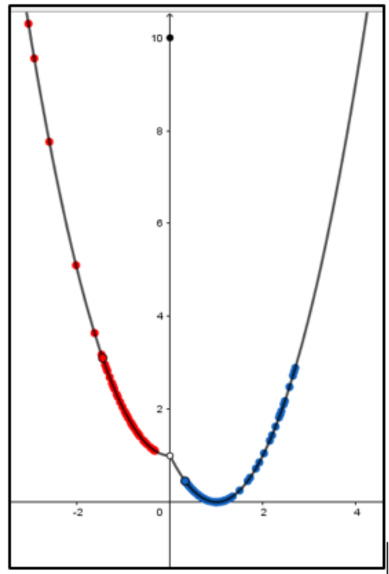


Figura 63. Respuesta de Kevin al ítem a y b de la actividad 2 del Taller 3

Con lo que se muestra en la Figura 63 y con las respuestas de la entrevista, se pudo corroborar que Kevin identifica la existencia del límite de la función cuando x tiende a cero, a través de los límites laterales de la función; analizando lo que sucede cuando x toma valores próximos de 0, al igual que lo expresa en el siguiente episodio:

I: ¿Qué sucede cuando x toma valores próximos a cero por izquierda?

K: Inicialmente como es una función a trozos debo mirar qué parte de la función debo tomar, como son valores próximos a cero por izquierda, entonces tomo $x^2 + 1$ y ahí los evalué, por tanto la función tiende a 1.

I: ¿Qué sucede cuando x toma valores próximos a cero por derecha?

K: Miro la función nuevamente y los valores son mayores a cero, entonces los evaluó en $(x-1)^2$ y los valores de la función también tiende a 1.

I: Entonces ¿Existe el límite de $f(x)$ cuándo x tiende a 0?

K: Si, porque los laterales son iguales por lo tanto el límite es ese valor [muestra el archivo en GeoGebra para referirse a las aproximaciones a izquierda (en color rojo) y derecha (en color azul) que tienden al mismo valor (ver Figura 63)].

I: ¿La función está definida en $x = 0$?

K: Si, es 10.

I: Entonces, ¿Por qué el límite de la función no es 10?

K: Porque no es el valor que tome la función en ese punto, sino cuando me aproximo al punto.

En el anterior episodio, se evidencia que el estudiante identifica que existe el límite de la función en ese punto. Además en la Figura 64 se muestra una de las justificaciones usadas por Kevin para expresar que cuando x tiende a 0 el límite de la función $f(x)$ existe y es 1, esto pasa si los límites laterales existen y son iguales.

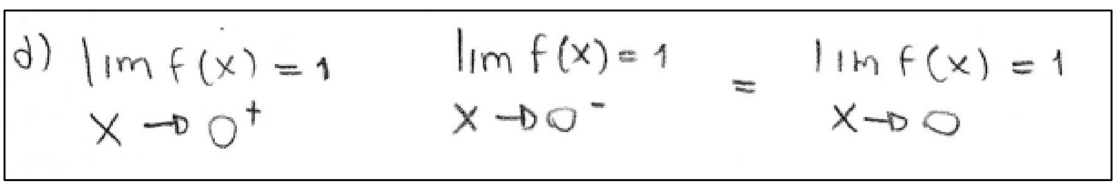
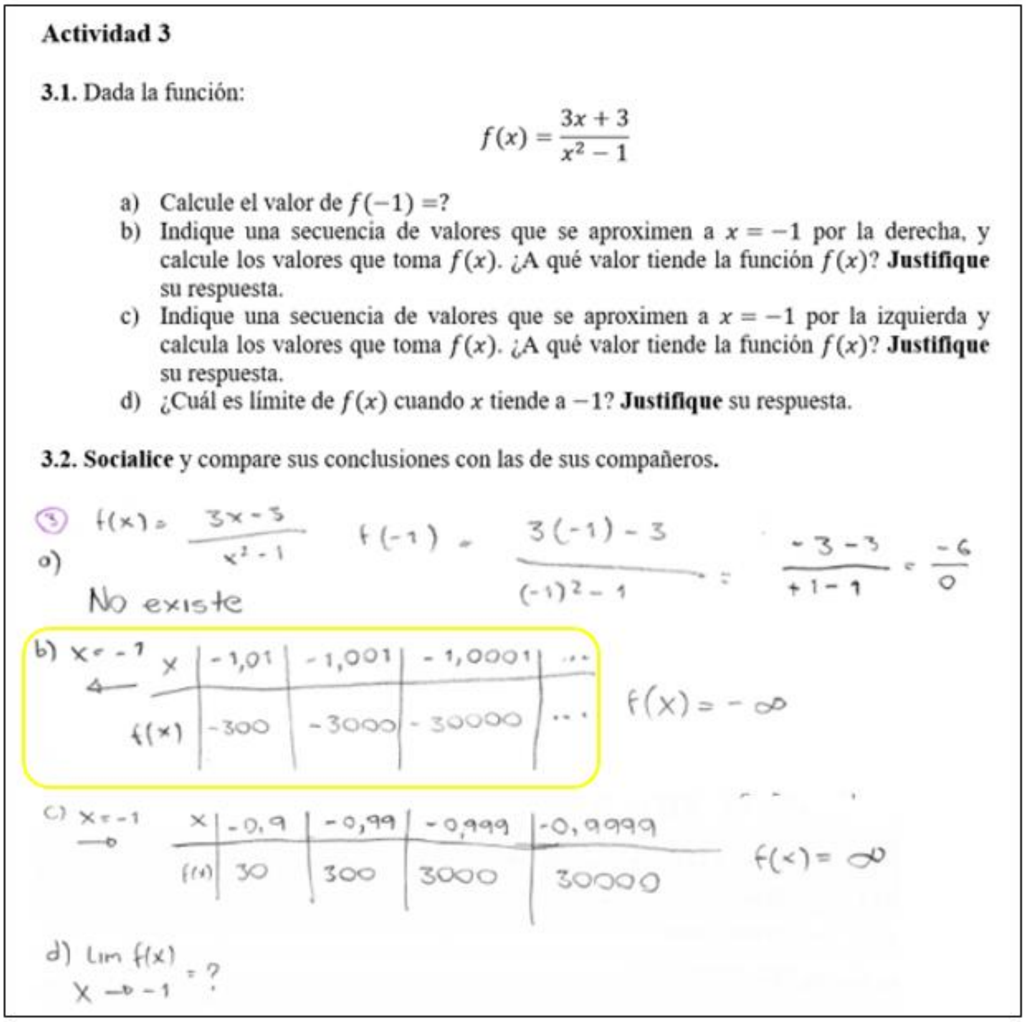


Figura 64. Respuesta de Kevin al ítem d de la actividad 2 del Taller 3

En la actividad 3 que se muestra en la Figura 65, el estudiante reconoce que no es posible determinar el valor de la función en $x = -1$, porque ese valor no pertenece al dominio de la función, pero es posible analizar lo que sucede con la función cuando x toma valores próximos a izquierda y derecha de -1.

En esta actividad, el estudiante recurre a la representación tabular, para establecer qué sucede con la función para valores próximos a -1, y decidir si existe o no el límite de $f(x)$ cuando x tiende a -1, a lo que expresó lo siguiente:

> I: ¿Existe tendencia de $f(x)$ para valores próximos a -1?
>
> K: No, pues cada vez los valores de la función se hacían muy grandes negativamente [con la mano hace un movimiento hacia abajo] que tendían a menos infinito. De igual manera para valores a derecha de -1, los valores son muy grandes [con la mano hace un movimiento hacia arriba] pero positivos y tendían a infinito.
>
> I: Entonces, ¿Existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a -1?
>
> K: No, porque cuando x tiende a -1 el límite de la función no existe [realiza con las manos el movimiento que tiende a menos infinito y a infinito], además no existe porque no hay un punto en común al que se acerquen los valores de $f(x)$.



Actividad 3

3.1. Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x+3}{x^2-1}$$

a) Calcule el valor de $f(-1)$ =?
b) Indique una secuencia de valores que se aproximen a $x = -1$ por la derecha, y calcule los valores que toma $f(x)$. ¿A qué valor tiende la función $f(x)$? **Justifique** su respuesta.
c) Indique una secuencia de valores que se aproximen a $x = -1$ por la izquierda y calcula los valores que toma $f(x)$. ¿A qué valor tiende la función $f(x)$? **Justifique** su respuesta.
d) ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuando x tiende a -1? **Justifique** su respuesta.

3.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

3 $f(x) = \frac{3x-3}{x^2-1}$ $f(-1) = \frac{3(-1)-3}{(-1)^2-1} = \frac{-3-3}{+1-1} = \frac{-6}{0}$

a) No existe

b) $x \leftarrow -1$

x	-1,01	-1,001	-1,0001	...
f(x)	-300	-3000	-30000	...

$f(x) = -\infty$

c) $x \rightarrow -1$

x	-0,9	-0,99	-0,999	-0,9999
f(x)	30	300	3000	30000

$f(x) = \infty$

d) $\lim_{x \to -1} f(x) = ?$

Figura 65. Respuesta de Kevin a la actividad 3 del Taller 3

Ante esta expresión se evidencia que el estudiante logró justificar que el límite de la función no existe, esto fue al comparar las tendencias de los valores de $f(x)$ cuando x toma valores próximos a -1 por izquierda y derecha, las cuales no coinciden.

La actividad 4 se plantea con el fin de observar y analizar la forma en que el estudiante interpreta cada una de las condiciones dadas, además que las debe utilizar todas para trazar la gráfica de una función. En la solución del estudiante se observa que logró interpretar el sentido de todas las condiciones dadas en el enunciado de la Figura 66, puesto que le permitieron realizar la representación gráfica de la función que se presenta a continuación.

El estudiante en primera instancia identificó que la función a bosquejar pasaba por los puntos $(-3,2)$, $(2,0)$ y $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$. También logró interpretar que el límite de la función cuando x tiende a 0 no existe, porque cuando x se aproxima a 0 *"solo por derecha"*, es decir toma valores como 0,01, 0,001, 0,0001, $f(x)$ tiende a 2 y cuando x toma valores próximos a 0 *"solo por izquierda"*, los valores de $f(x)$ tienden a 1, de modo que el límite de la función en ese punto no existe porque los límites laterales no coinciden. Además Kevin identificó que cuando x tiende a -2, el límite de la función existe y este es único, haciendo referencia que cuando se aproxima a -2^{+} y -2^{-} la función debe tender al mismo valor. Por último analizó que cuando se hacen aproximaciones a $x = 3$, tanto por derecha como por izquierda los valores de $f(x)$ tienden a $-\infty$. El interpretar cada una de las condiciones le permitió a Kevin realizar la representación gráfica de la función

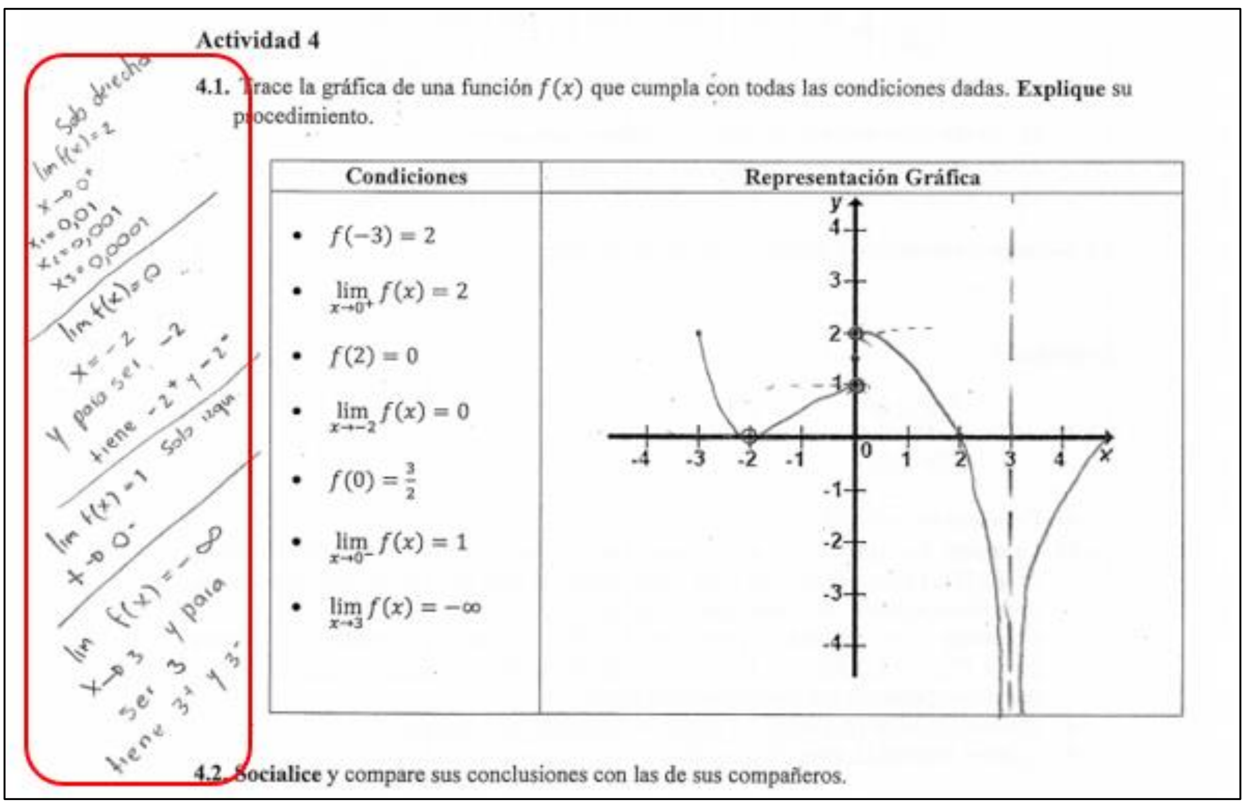


Figura 66. Respuesta de Kevin a la actividad 4 del Taller 3

Como se logró evidenciar en las actividades descritas anteriormente, el estudiante ha logrado adquirir una concepción dinámica del límite de una función en un punto, ya que establece coordinación entre las aproximaciones en el dominio, con las aproximaciones en el rango de la función, diferenciando cuando las aproximaciones laterales coinciden o cuando no coinciden. (Valls, Pons y Llinares, 2011).

En este apartado se evidencia que Kevin ha transitado por los niveles de *Comprensión de la imagen* y *Observación de la propiedad*. El estudiante transitó en el nivel de comprensión de la imagen, porque logró desarrollar imágenes asociadas a la existencia del límite de una función en un punto, vislumbradas en la complementariedad de la acción a través de la *visualización de la imagen* (image seeing); imágenes que para Pirie y Kieren (1992) están asociadas a una sola actividad y se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de esas imágenes mentales, o más precisamente imágenes orientadas por un proceso mental, libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares que logran expresarse mediante la complementariedad de la *expresión de la imagen* (image saying), que se perciben en las actividades propuestas a través de la coincidencia entre las aproximaciones laterales, mediante el uso de las diferentes maneras de representar de una función.

Por otra parte, en el nivel de observación de la propiedad, Kevin ha logrado construir varias imágenes, que puede examinar, establecer conexiones y distinciones entre ellas. Para Thom y Kieren (2006) este nivel es una forma de "caminar atrás" y reflexionar sobre la comprensión existente a fin de promover ese entendimiento (p. 190).

De acuerdo con Pire y Kieren (1989), la diferencia entre el nivel de Comprensión de la imagen y el nivel de la Observación de la propiedad es la habilidad para resaltar una conexión entre imágenes y explicar el método para verificar la conexión.

En este apartado se mostraron evidencias que permitieron identificar en el proceso de comprensión de Kevin, las complementariedades de la acción y la expresión para el Nivel 3 de Comprensión de la imagen (ver Tabla 14) y para el Nivel 4 de Observación de la propiedad (ver Tabla 15) asociadas al límite de una función en un punto.

Tabla 14.

Complementariedades de la acción y expresión de Kevin para el Nivel de Comprensión de la Imagen

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Construye la gráfica o tabla de una función para reconocer las tendencias finitas o infinitas en un punto de la función.	Identifica y relaciona la existencia del límite de una función $f(x)$ en punto con las aproximaciones numéricas muy cercanas al punto.
Explica cuando el límite de una función $f(x)$ existe, y que es único.	Justifica que si una función $f(x)$ tiende a un valor L, cuando la variable independiente x crece o decrece sin límite, entonces se dice que $f(x)$ posee un límite en el infinito.
Calcula el límite de una función $f(x)$ en un punto c, haciendo uso de un proceso de aproximación.	Justifica analíticamente cuando el límite de una función no existe de acuerdo su expresión analítica.
Reconoce que el valor límite se puede alcanzar en un punto a través de un proceso de aproximación infinito.	Utiliza los símbolos de infinito como herramientas de notación para indicar cuando una cantidad decrece o crece sin límite en dirección negativa o positiva.

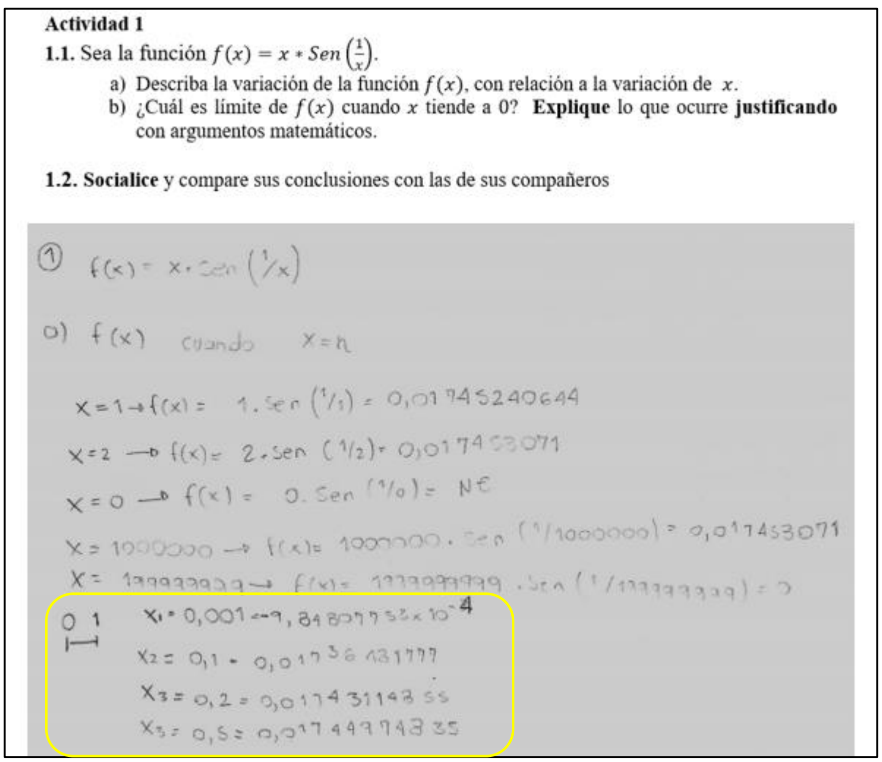
Tabla 15.

Complementariedades de la acción y expresión de Kevin para el Nivel de Observación de la propiedad

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Reconoce de manera gráfica y tabular que no existe el límite de la función al identificar que no existe tendencia.	Interpreta en las diferentes maneras de representar una función la no existencia del límite en un punto c, si cuando x tiende a c , $f(x)$ tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

4.4 Acciones y expresiones de Kevin frente a la Concepción óptima del límite de una función en un punto

En la actividad 1 del Taller 5, el estudiante con el fin de conocer la variación de la función (ver Figura 67), da valores a la variable independiente para intentar hacerse a una imagen de la gráfica de $f(x)$. No obstante, él se queda sin una representación clara de la gráfica de la función y no logra interpretar lo que sucede con la función cuando x toma valores próximos de cero.



Actividad 1

1.1. Sea la función $f(x) = x * Sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Describa la variación de la función $f(x)$, con relación a la variación de x.

b) ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.

1.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros

① $f(x) = x \cdot Sen(1/x)$

a) $f(x)$ cuando $x = n$

$x = 1 \rightarrow f(x) = 1 \cdot Sen(1/1) = 0{,}01745240644$

$x = 2 \rightarrow f(x) = 2 \cdot Sen(1/2) = 0{,}0174453071$

$x = 0 \rightarrow f(x) = 0 \cdot Sen(1/0) = NE$

$x = 1000000 \rightarrow f(x) = 1000000 \cdot Sen(1/1000000) = 0{,}01745 3071$

$x = 1999999999 \rightarrow f(x) = 1999999999 \cdot Sen(1/1999999999) = 0$

0 1

$x_1 = 0{,}001 \rightarrow 9{,}84807753 \times 10^{-4}$

$x_2 = 0{,}1 = 0{,}01736481777$

$x_3 = 0{,}2 = 0{,}0174311485$

$x_5 = 0{,}5 = 0{,}01744974835$

Figura 67. Respuesta de Kevin a la actividad 1 del Taller 4

Continuando con el análisis de la variación, se le solicita al estudiante realizar la actividad 2 que se muestra en la Figura 68. El estudiante se puede apoyar en la hoja de cálculo de GeoGebra para realizar una tabla de valores para x y $f(x)$ con valores más próximos a 0, diferentes a los que ya había calculado en la actividad 1, de manera que identifique si existe o no el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0, de acuerdo a las aproximaciones realizadas en el dominio de la función.

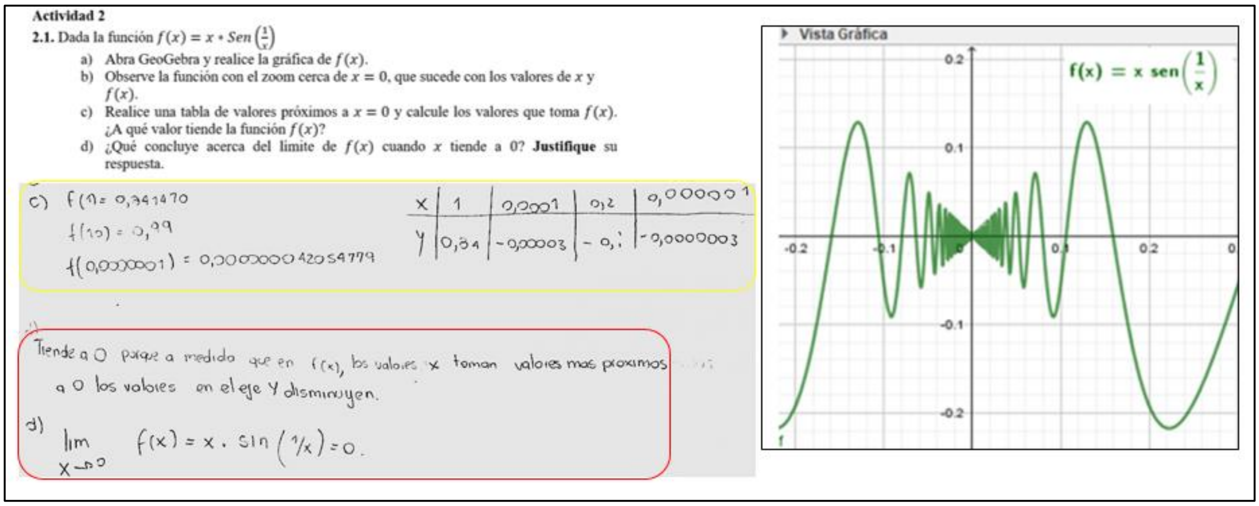
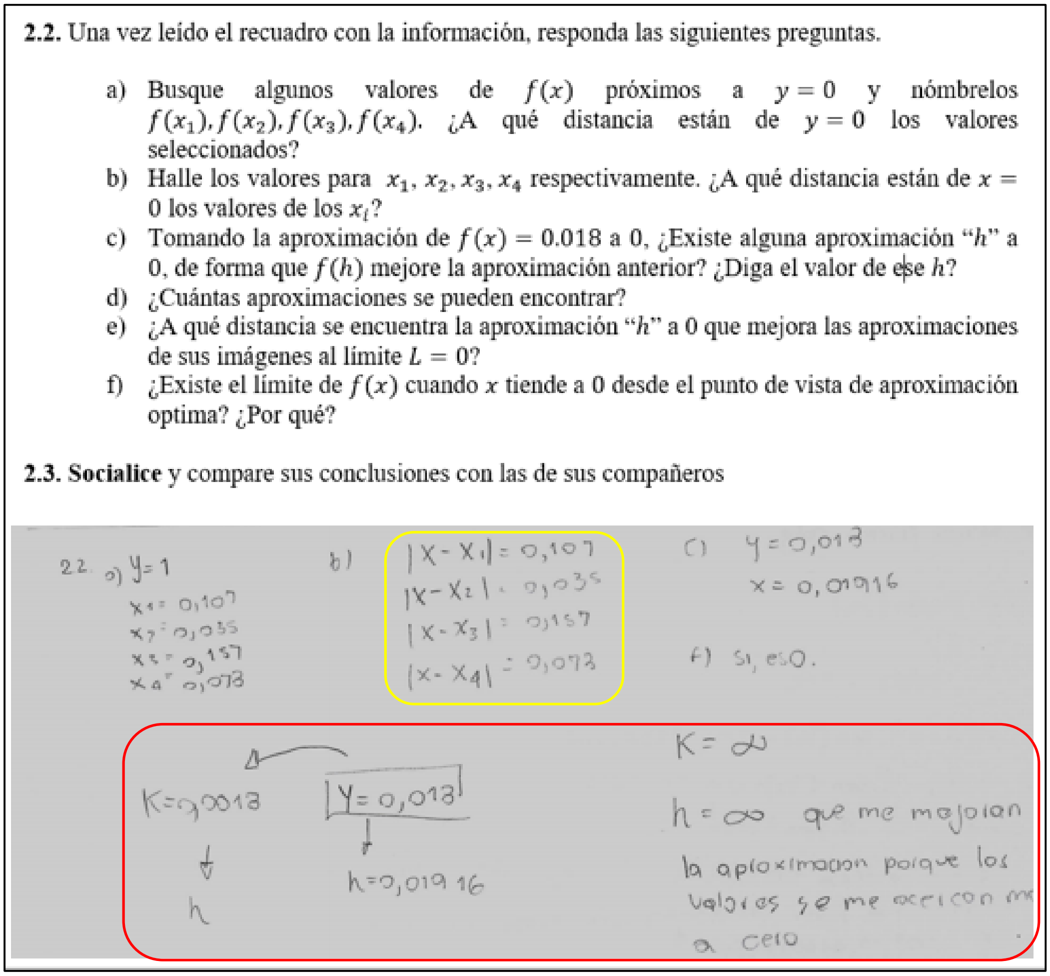


Figura 68. Respuesta de Kevin a la actividad 2.1 del Taller 4

Por ejemplo, en el recuadro amarillo de la Figura 68, se observa que el estudiante elige valores próximos a cero, con el fin de analizar que sucede con $f(x)$ cuando se toman esos valores, de ese modo logró concluir que *"los valores en el eje y tambien disminuyen y el límite de la función es igual cero"*.

Para dar continuidad al análisis de la función, se espera que el estudiante busque valores en el rango próximos al límite de la función que ya había identificado en la actividad anterior. En el recuadro de la Figura 69, se muestra que Kevin elige valores próximos a cero y calcula las distancias entre esos valores y el límite de la función en ese punto, lo que le permite ver que esas distancias se pueden mejorar de tal manera que estén más próximas al límite de la función.

Además, que se puede mejorar la aproximación en el dominio tal como se observa en la expresión del recuadro rojo de la Figura 69.



2.2. Una vez leído el recuadro con la información, responda las siguientes preguntas.

a) Busque algunos valores de $f(x)$ próximos a $y = 0$ y nómbrelos $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$. ¿A qué distancia están de $y = 0$ los valores seleccionados?
b) Halle los valores para x_1, x_2, x_3, x_4 respectivamente. ¿A qué distancia están de $x = 0$ los valores de los x_i?
c) Tomando la aproximación de $f(x) = 0.018$ a 0, ¿Existe alguna aproximación "h" a 0, de forma que $f(h)$ mejore la aproximación anterior? ¿Diga el valor de ese h?
d) ¿Cuántas aproximaciones se pueden encontrar?
e) ¿A qué distancia se encuentra la aproximación "h" a 0 que mejora las aproximaciones de sus imágenes al límite $L = 0$?
f) ¿Existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 desde el punto de vista de aproximación optima? ¿Por qué?

2.3. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros

Figura 69. Respuesta de Kevin a la actividad 2.2 del Taller 4

En la Figura 69, se puede evidenciar que Kevin identifica la existencia del límite usando la concepción óptima del límite de una función en un punto, por lo cual indagamos que entendía él, expresando lo siguiente:

I: ¿Qué entiende por la concepción óptima?

K: Pues que no solamente estamos haciendo aproximaciones en el $eje\ x$ sino también en el $eje\ y$.

I: ¿Cómo se hace?

K: Elegimos un K próximo a L para verificar si el límite de la función existe.

I: Entonces de acuerdo a eso en la Actividad 2.2, ¿Es posible elegir un K próximo a cero?

K: Pues en esta función sí.

I: ¿Cuál fue el valor de K que escogió?

K: $0{,}018$.

I: Para ese valor de K se tiene un h de $0{,}01916$.

K: Mmm si ese es el valor de h y es próximo a x es decir a cero.

I: Entonces, ¿Cuál sería el valor de un K más próximo que $0{,}018$?

K: $0{,}0018$ pues le agrego otro cero y ya es más próximo a cero.

I: ¿Qué se esperaría del valor de h?

K: Sería más pequeño que el anterior y más cercano a cero [mueve las manos para comparar distancias]

I: ¿Cuantos K podríamos encontrar próximos a cero?

K: Infinitos.

Durante este episodio se evidencia que el estudiante logra coordinar aproximaciones óptimas al límite, desde valores en el rango con las del punto en el dominio de la función, produciendo entornos más reducidos para intentar deducir el límite por refinamiento sucesivo de una aproximación óptima (Mira, 2016).

En ese mismo sentido, se planteó la actividad 3 que se presentó en el apartado 3.3.4, donde se evidencia cómo el estudiante decide si existe o no el límite de la función en un punto, a través de la representación gráfica y tabular que proporciona GeoGebra. En un primer momento el estudiante no identifica el dominio de la función, pero sí el rango (ver Figura 70).

En esta actividad la interacción con GeoGebra le permitió a Kevin analizar la variación de $f(x)$ cuando x toma valores próximos a 0, identificando que cuando se toman valores de x próximos a 0 por izquierda, los valores en el rango de la función oscilan entre -1 y 1; además, que se comporta de manera similar para valores próximos a 0 por derecha. Esas acciones realizadas por Kevin, le permitieron expresar que el límite de la función no existe (ver recuadro rojo de la Figura 70).

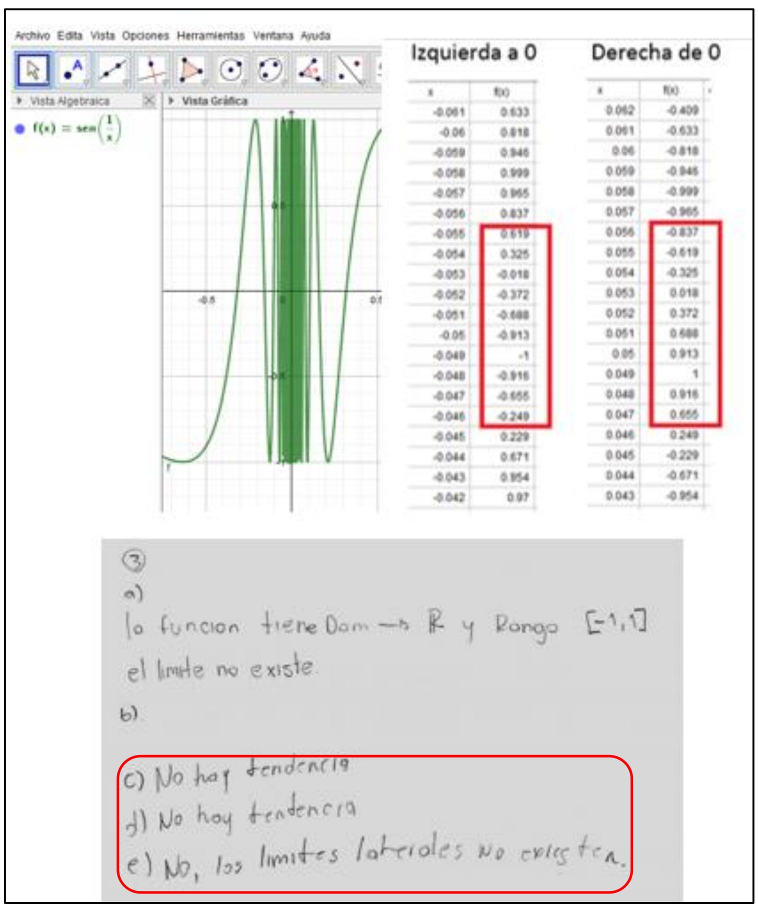


Figura 70. Respuesta de Kevin a la actividad 3 del Taller 4

En la actividad 4 que se muestra en la Figura 71, Kevin reconoce que al refinar las aproximaciones en el dominio de la función, y si estas coinciden o no, le permiten decidir si el límite de $f(x)$ en ese punto existe o no.

Actividad 4

4.1. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Z} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

a) Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \to \frac{5}{3}} f(x) = ? \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = ?$$

b) Si $a \in \mathbb{R}$ ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuándo x tiende a a? **Justifique** su respuesta.
c) ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuándo x tiende a 2.9? **Justifique** su respuesta.
d) ¿Para qué valores de x en el dominio de la función existe el límite de $f(x)$? **Justifique** su respuesta.

Figura 71. Actividad 4 del Taller 4

En esta actividad, el estudiante recurre a la representación gráfica, para establecer qué sucede con la función para valores próximos a $\frac{5}{3}$ y decidir si existe o no el límite de $f(x)$, a lo que expresó lo siguiente:

I: ¿Cuál sería la representación gráfica de la función?

K: Pues sería algo así más o menos [muestra la hoja de trabajo de la Figura 72]

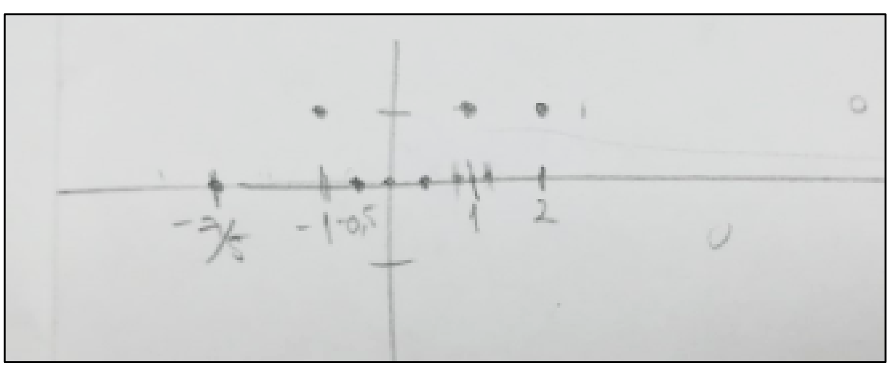


Figura 72. Grafica de la función de la actividad 4 del Taller 4

I: ¿Cuál sería el $\lim_{x\to\frac{5}{3}} f(x)$?

K: El límite sería cero.

I: ¿Por qué?

K: Mmm no mentiras el límite va a ser 1 o va ser cero, ¡ay no!

I: ¿Dónde estaría ubicado $x = \frac{5}{3}$ ahí en su gráfica?

K: Mmm ya cuando me aproximo tanto por izquierda como por derecha es cero.

I: Ahora ¿Cuál sería el $\lim_{x\to 1} f(x)$?

K: Tanto por izquierda como por derecha tiende a 1.

I: Seguro que es 1. ¿Por qué?

K: Pues ahí no sé, no estoy seguro.

I: ¿Qué sucede si elige un valor próximo a 1 por derecha?

K: 1,01 y va a tender a cero.

I: Y ahora ¿Qué sucede si elige un valor próximo a 1 por izquierda?

K: También tiende a cero.

I: Entonces, ¿Existe el límite?

K: Es cero, porque por derecha y por izquierda tiende a cero.

Durante el desarrollo de esta actividad y durante el episodio se pudo observar que Kevin, realiza un *Folding Back* sobre con el fin de reexaminar las imágenes que había construido en la comprensión del límite de una función. En ese sentido Kevin logró reconocer que es posible analizar el límite de una función $f(x)$ en un punto c, haciendo uso de un proceso de aproximación infinito.

Para las actividades descritas en este apartado se observa que Kevin continua en el nivel de Observación de la propiedad, porque las evidencias muestran que el estudiante identifica las propiedades construidas hasta el momento asociadas al límite de una función en un punto, las cuales se combinan para construir definiciones que pueden evolucionar y definir características particulares del objeto matemático de estudio (Meel, 2003).

En el nivel de observación de la propiedad se presentan las complementariedades de la *predicción de la propiedad* (property predicting) y el *registro de la propiedad* (property recording). El acto de la predicción de la propiedad relaciona la imagen con una propiedad observada por el estudiante, en tanto que el registro de la propiedad es un acto que incorpora dentro de la estructura cognitiva del estudiante la propiedad observada como algo que existe y parece funcionar (Pirie y Kieren, 1994).

De acuerdo al análisis de las respuestas de Kevin frente a las actividades relacionadas con la concepción óptima del límite de una función en un punto, se identificaron las siguientes complementariedades de la acción y la expresión para el Nivel 4 de Observación de la propiedad (ver Tabla 16) asociadas al límite de una función en un punto.

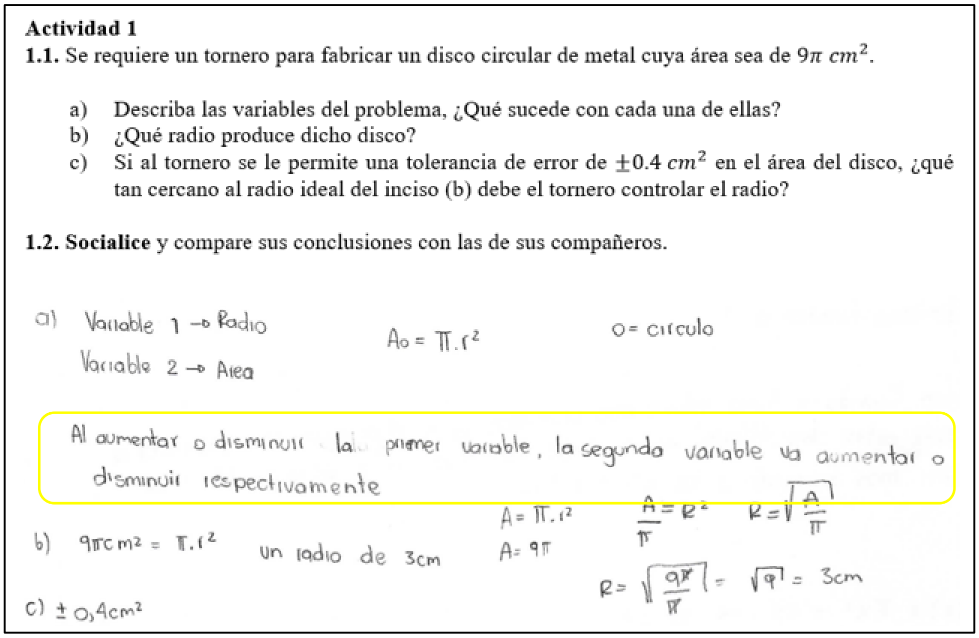
Tabla 16.

Complementariedades de la acción y expresión de Kevin para el Nivel de Observación de la Propiedad

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Interpreta el comportamiento de los límites laterales de una función $f(x)$ de modo que pueden hacerse arbitrariamente próximos a un número L al tomar x suficientemente cerca por izquierda y por derecha, pero sin que sea igual.	Justifica que el límite de una función $f(x)$ no existe cuando limite por la izquierda o limite por derecha de un punto c no existen; también puede ser que existan pero sean diferentes.
Reconoce que es posible realizar aproximaciones desde el rango con las del punto en el dominio de la función.	Coordina aproximaciones óptimas al límite, desde el rango con las del punto en el dominio de la función, produciendo entornos más reducidos para intentar deducir el límite.

4.5 Acciones y expresiones de Kevin frente a la Concepción métrica del límite de una función en un punto

En la actividad 1 relacionada con el taller de la concepción métrica del límite de una función en un punto, se evidencia que el estudiante identifica las variables de la situación, además de reconocer la relación de interdependencia entre el área y el radio del disco circular (ver Figura 73), esto le permitió calcular el valor del radio "r" que generaba el disco circular con un área de $9\pi\ cm^2$.


Actividad 1

1.1. Se requiere un tornero para fabricar un disco circular de metal cuya área sea de $9\pi\ cm^2$.

a) Describa las variables del problema, ¿Qué sucede con cada una de ellas?
b) ¿Qué radio produce dicho disco?
c) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de $\pm 0.4\ cm^2$ en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso (b) debe el tornero controlar el radio?

1.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 73. Respuesta de Kevin al ítem a y b de la actividad 1 del Taller 5

El estudiante identifica que en el ítem *c* de la actividad 1, el error que puede cometer el tornero se realiza sobre al área del disco que desea fabricar (ver Figura 74), lo cual le permite hallar un error mínimo y máximo en el radio del disco circular.

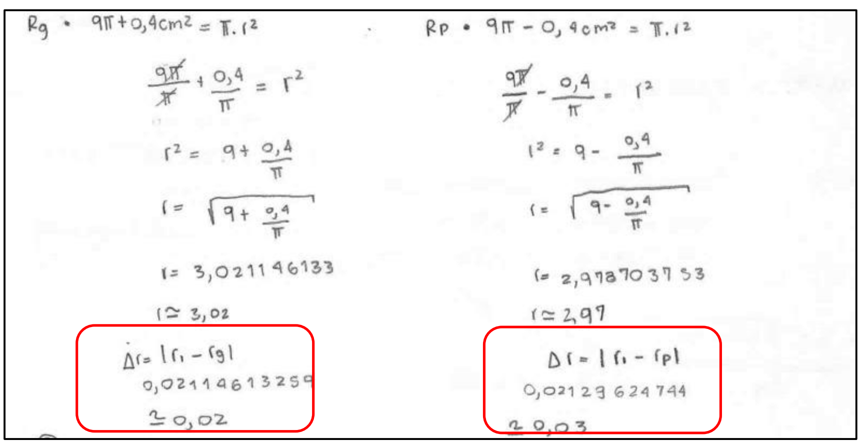
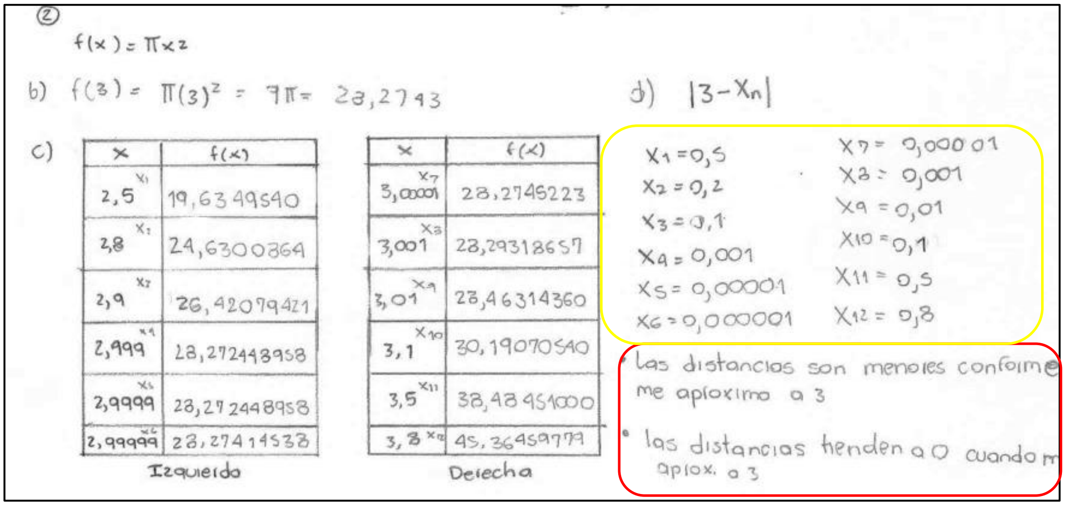


Figura 74. Respuesta de Kevin al ítem *c* de la actividad 1 del Taller 5

En la actividad 2, se evidencia que Kevin realiza aproximaciones a un punto (radio ideal) y al límite del área del disco que se desea fabricar, para observar el comportamiento de disminución de las distancias de las aproximaciones en el dominio y en el rango de la función, mediante un registro tabular y gráfico, con el fin de deducir el límite de la función por concepción métrica (ver Figura 75).



② $f(x) = \pi x^2$

b) $f(3) = \pi(3)^2 = 9\pi = 28{,}2743$

c)

x	f(x)
2,5	19,6349540
2,8	24,6300864
2,9	26,42079421
2,999	28,272448958
2,9999	28,272448958
2,99999	28,27414538

Izquierda

x	f(x)
3,00001	28,2746223
3,001	28,29318657
3,01	28,46314360
3,1	30,19070540
3,5	38,48451000
3,8	45,36459779

Derecha

d) $|3 - X_n|$

$X_1 = 0{,}5$ $X_7 = 0{,}00001$
$X_2 = 0{,}2$ $X_8 = 0{,}001$
$X_3 = 0{,}1$ $X_9 = 0{,}01$
$X_4 = 0{,}001$ $X_{10} = 0{,}1$
$X_5 = 0{,}00001$ $X_{11} = 0{,}5$
$X_6 = 0{,}000001$ $X_{12} = 0{,}8$

• las distancias son menores conforme me aproximo a 3
• las distancias tienden a 0 cuando m aprox. a 3

Figura 75. Respuesta de Kevin al ítem c y d de la actividad 2 del Taller 5

De acuerdo a lo que se muestra en la Figura 75, el estudiante logra identificar y justificar que *"las distancias tienden a cero cuando se aproxima a* 3*"*, aspecto que le permitió decidir sobre la existencia del límite de la función en ese punto, el investigador al indagar sobre la respuesta de la actividad Kevin le expresó lo siguiente:

I: ¿Qué sucede con las distancias cuanto más me aproximo a 3?

K: Las distancias son menores conforme me aproximo a 3 y a 9π.

I: Y si miramos gráficamente ¿Qué está sucediendo? [muestra el archivo de GeoGebra de la Figura 76]

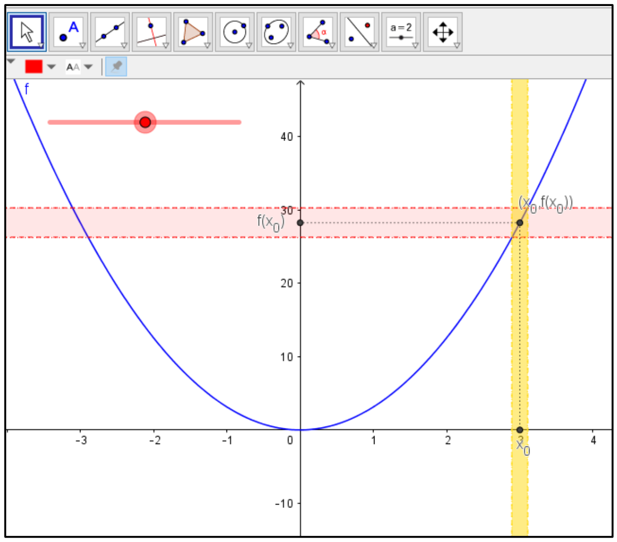


Figura 76. Archivo en GeoGebra para la actividad 2 del Taller 5

K: La distancia tiende a ser cero en ambos lados (refiriéndose a los valores en el dominio y en el rango de la función) y así el límite de la función es 28,27 cuando x tiende a 3.

I: ¿Qué relación existe entre la distancia y la existencia del límite?

K: Pues a medida que los valores están próximos a 3, la distancia tiende a cero y además los valores de $f(x)$ están próximos al límite de la función (ver Figura 77).

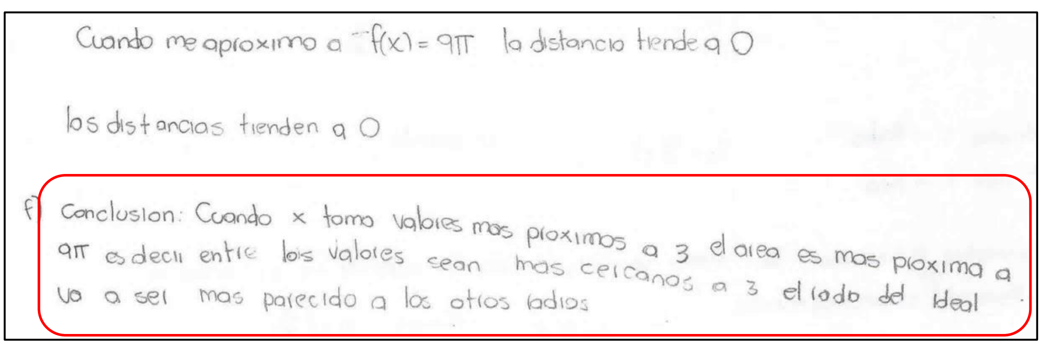


Figura 77. Respuesta de Kevin al ítem f de la actividad 2 del Taller 5

Para Mira (2016) este puede ser el paso previo a la conceptualización métrica de límite de una función en un punto, que el estudiante coordine la tendencia de las distancias al punto y de sus imágenes al límite, a fin de establecer que tienden a cero.

En estas actividades se logró identificar que Kevin está realizando complementariedades de la acción y expresión del nivel de *Formalización*. Para Pirie y Kieren (1989) el estudiante en este nivel es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes, además que tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas con cualidades comunes.

De acuerdo al análisis de las respuestas de Kevin de las actividades relacionadas a la concepción métrica del límite de una función en un punto, se identificaron las siguientes complementariedades de la acción y la expresión para el Nivel de Formalización (ver Tabla 17) asociadas al límite de una función en un punto.

Tabla 17.

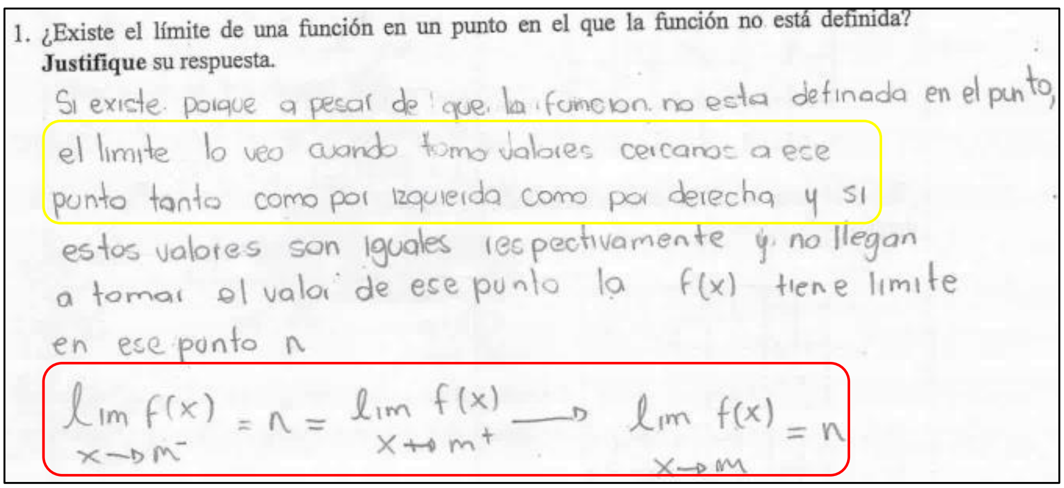
Complementariedades de la acción y expresión de Kevin para el Nivel de Formalización

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Reconoce que es posible realizar aproximaciones desde el rango con aproximaciones en el dominio de la función, a partir de la disminución de las distancias.	Coordina las distancias en el rango con las distancias en el dominio de la función, produciendo entornos más reducidos para intentar deducir el límite por la concepción métrica.
Reconoce usando las diferentes representaciones que el límite de una función $f(x)$ en el punto c, existe si cuando la variable x se aproxima a c, entonces $f(x)$ tiende a L.	Interpreta usando las diferentes representaciones la existencia de un límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a c no depende de si $f(x)$ está definida en c, sino solo de si está definida para x cerca del número c.

4.6 Acciones y expresiones de Kevin en el Taller de Conocimientos finales

En este apartado se presenta el análisis a las respuestas de Kevin durante el desarrollo del Taller de Conocimientos finales (ver apartado 3.3.6), con el cual se puede inferir que el estudiante ha logrado un nivel de Formalización para la comprensión del límite de una función en un punto. En el taller se plantearon enunciados que permitieran dar cuenta de las justificaciones que usa el estudiante para decidir si existe o no el límite de una función en un punto, al igual que la interpretación del límite de una función desde los diferentes tipos de representación.

Para el ítem 1, Kevin logra identificar que es posible que exista el límite de una función en un punto en el que la función no este definida (ver Figura 78), justificando que *"el límite lo veo cuando tomo valores cercanos a ese punto tanto por izquierda como por derecha"*. Pero no tiene en cuenta la otra opción que es posible que la función no este definida, y a su vez no exista el límite de la función en ese punto, como por ejemplo $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando la variable x toma valores próximos a cero.


1. ¿Existe el límite de una función en un punto en el que la función no está definida? **Justifique** su respuesta.

Si existe porque a pesar de que la funcion no esta definada en el punto, el limite lo veo cuando tomo valores cercanos a ese punto tanto como por izquierda como por derecha y si estos valores son iguales respectivamente y no llegan a tomar el valor de ese punto la f(x) tiene limite en ese punto n

$$\lim_{x \to m^-} f(x) = n = \lim_{x \to m^+} f(x) \longrightarrow \lim_{x \to m} f(x) = n$$

Figura 78. Respuesta de Kevin al ítem 1 del Taller 6

Es de resaltar que Kevin usa la concepción dinámica para interpretar la existencia del límite como lo que sucede cerca del punto y no exactamente en el punto (ver recuadro amarillo de la Figura 78). Lo anterior, permite que el estudiante calcule los límites laterales de la función, si estos existen y tienden a un mismo valor de $f(x)$ para valores muy próximos de a, la función tiene límite en ese punto (ver recuadro rojo de la Figura 78). Ante esta respuesta, Kevin ha examinado sus imágenes mentales, en las cuales ha identificado atributos para la existencia del límite de una función en un punto.

Con el enunciado del ítem 2 (ver Figura 79), se pretende observar que justificaciones utiliza el estudiante para verificar o refutar el razonamiento planteado. En el cual se puede identificar que comprende el significado que una función tenga límite finito y además cuando dos funciones tienen el mismo valor de la igual imagen en un mismo punto del dominio (teniendo en cuenta que $f(x)$ y $g(x)$ no son la misma función).

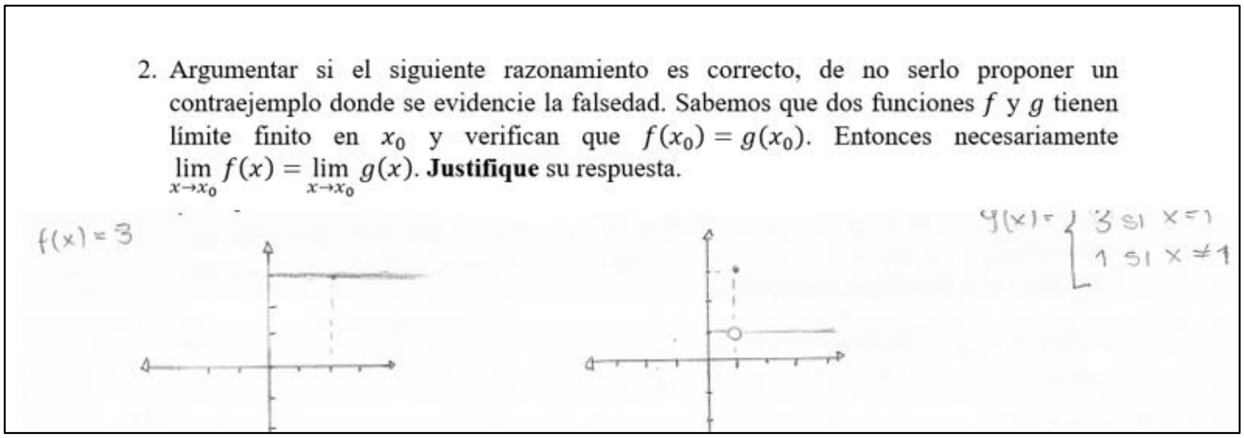


Figura 79. Respuesta de Kevin al ítem 2 del Taller 6

En este caso el estudiante verifica que el enunciado es falso, porque supone dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tal que cada una tenga límite finito en un mismo punto (para este caso cuando x tiende a 1) y además en $x = 1$ las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen la misma imagen. Por ejemplo, si

$$f(x) = 3 \text{ y calcula } \lim_{x\to 1} f(x) = 3 \text{ y}$$

Ahora supone que

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq 1 \\ 3 & si\ x = 1 \end{cases} \text{ y calcula el } \lim_{x\to 1} g(x) = 1$$

y verifica que $f(1) = g(1) = 3$ pero no se cumple

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

En el contraejemplo que presenta Kevin, se evidencia que es capaz de conocer las propiedades para abstraer características comunes de las imágenes que ha construido a lo largo de la secuencia de actividades para el límite de una función en un punto.

En cambio con el ítem 3 que se muestra en la Figura 80, se pretende observar como el estudiante interpreta la existencia o no del límite de una función en un punto, a partir de la representación gráfica. Además, se espera que pueda identificar cuáles son los elementos teóricos que usa Kevin para justificar sus respuestas.

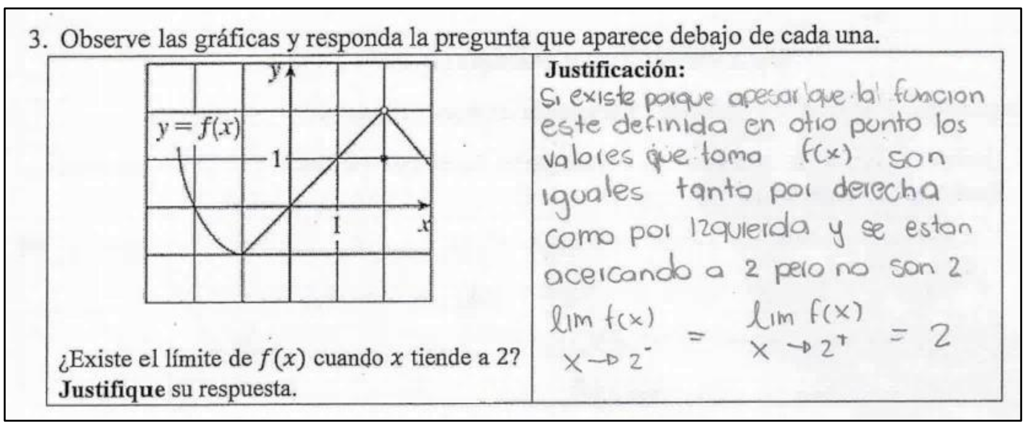


Figura 80. Respuesta de Kevin al inciso a del ítem 3 del Taller 6

En este caso Kevin reconoce que el límite si existe, porque *"los valores que toma* $f(x)$ *son iguales tanto por derecha y por izquierda"*, expresando a través de los límites laterales $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$ que si son iguales.

De igual manera lo hace para la segunda gráfica de esta actividad (ver Figura 81), en la cual Kevin logra identificar que el límite de la función no existe, porque *"los valores que toma* $f(x)$ *son diferentes cuando me acerco a* 3 *por izquierda y por derecha"*, expresando que los límites laterales $\lim_{x \to 3^+} g(x) = 4$ y $\lim_{x \to 3^-} g(x) = 2$ son distintos para valores próximos a 3.

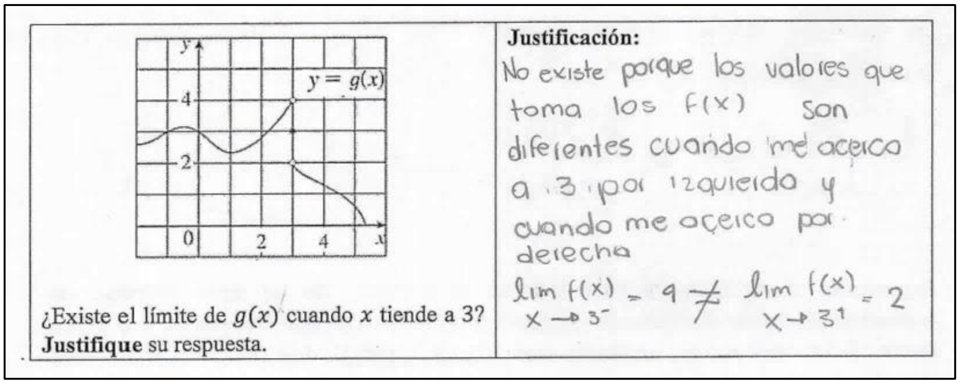


Figura 81. Respuesta de Kevin al inciso *b* del ítem 3 del Taller 6

En esta actividad se evidencia que Kevin, recurre a imágenes mentales ya creadas, con el fin de usar esas imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos (Pirie y Kieren, 1992).

De igual modo que en el ítem 2, en el ítem 4 (ver Figura 82) se pretende observar los argumentos que utiliza el estudiante para verificar o refutar el razonamiento planteado. En este caso, Kevin reconoce que es verdadero, porque al realizar la representación gráfica (realizada en GeoGebra) y tabular de la función, los valores que toma $f(x)$ tiende a 2 cuando x se aproxima 1 por izquierda y derecha, entonces el límite existe y es 2.

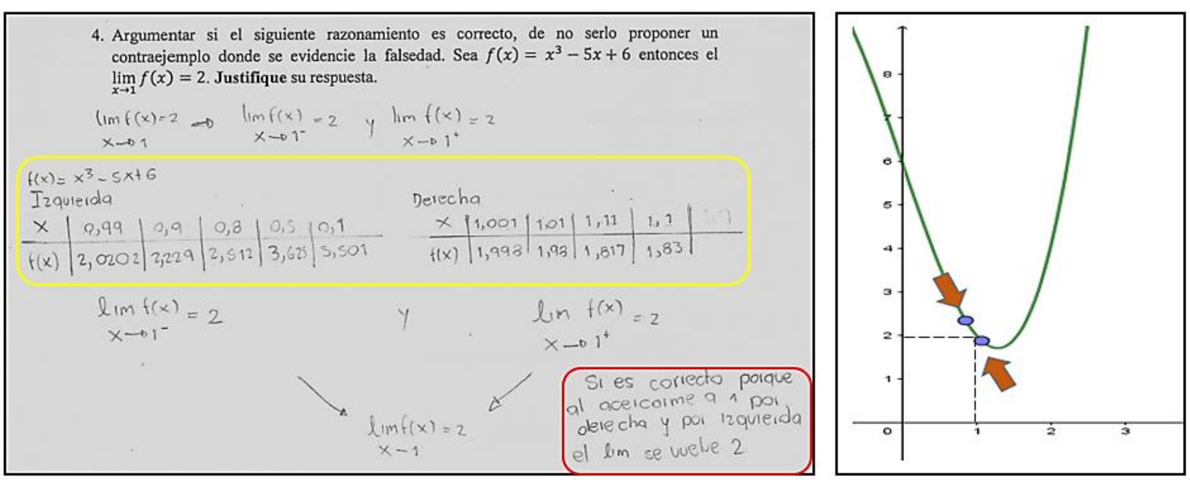


Figura 82. Respuesta de Kevin al ítem 4 del Taller 6

El investigador, con el fin de conocer más acerca de la respuesta de Kevin, le solicito explicar el análisis que había realizado para decidir si era cierto el enunciado, expresando lo siguiente:

> K: El límite es 2, porque cuando x toma valores próximos a 1 tanto por derecha como por izquierda, $f(x)$ tiende a 2 y por derecha también tienden a 2. [usa las manos para dar la dirección que ambas aproximaciones tienden al mismo valor]. Entonces el límite de la función es 2.

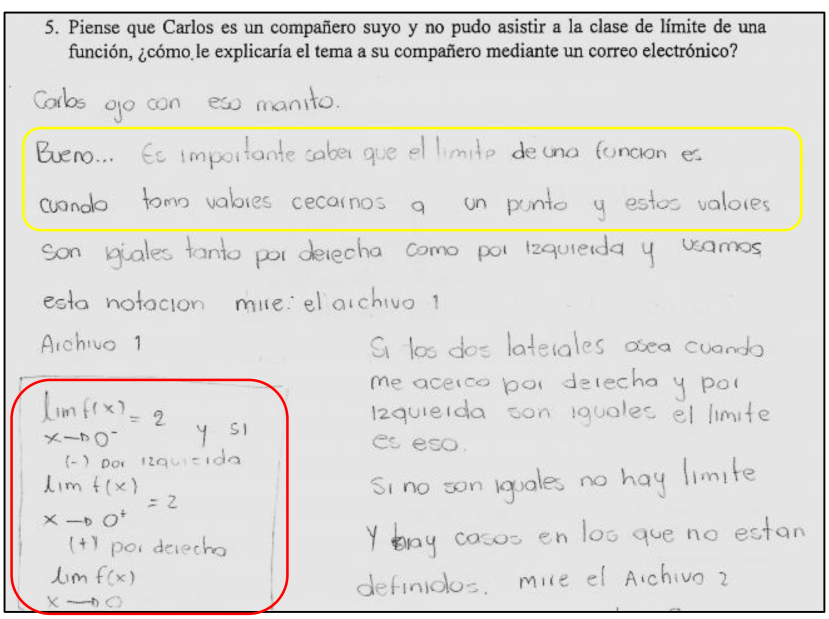
De acuerdo a lo expresado por Kevin en el episodio anterior y lo realizado en la Figura 82, se observa que las acciones que realiza el estudiante están encaminadas en la creación de la imagen del límite de una función en un punto, de acuerdo con Pirie y Kieren (1994), consta solo de acciones potencialmente fructíferas relacionadas con la realización intencional de algún tipo de imagen, con el fin de usar esa imagen para reconocer las propiedades globales.

Para finalizar con la secuencia de actividades, en el último ítem del Taller de Conocimientos finales, se plantea un enunciado con el propósito de identificar cómo el estudiante comprende e interpreta el límite de una función en un punto y cómo a través de un correo explicaría el tema a un compañero (ver Figura 83).

En esa actividad, Kevin inicio describiendo que el *"límite de una función es cuando tomo valores cercanos a un punto"*, aquí es de resaltar que el estudiante está creando una imagen para este concepto. Inferimos lo anterior, porque a través de esa expresión se evidencia que esta imaginando dos sucesiones numéricas que se aproximan a un punto, y que además está coordinando las aproximaciones en el dominio y en el rango para ver si estas coinciden tanto por izquierda como por derecha (ver recuadro amarillo de la Figura 83).

En ese sentido, Kevin usa la notación con el fin de especificar que los límites laterales de la función en ese punto deben ser iguales, y si sucede eso entonces el límite existe, además el estudiante plantea el caso en que los límites no sean iguales. Ante estas especificaciones dadas por Kevin podemos identificar que ha transitado a un nivel de comprensión de la imagen, porque está usando las imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos.

De acuerdo a esas imágenes que ha ido desarrollando Kevin, explica el caso en el cual límite de la función no está definido, a lo que recurre a un ejemplo particular que se ve en el recuadro amarillo de la Figura 84. Allí, el estudiante hace referencia a que cuando x toma valores próximos a cero por derecha $f(x)$ tiende a infinito, y cuando x toma valores próximos a cero por izquierda $f(x)$ tiende a menos infinito. Así, de tal manera que los límites no coinciden, estas expresiones evidencian que el estudiante está en un nivel de observación de la propiedad porque logró examinar una imagen mental y determinar distintos atributos asociados con dicha imagen para determinar la existencia o no del límite.



5. Piense que Carlos es un compañero suyo y no pudo asistir a la clase de límite de una función, ¿cómo le explicaría el tema a su compañero mediante un correo electrónico?

Carlos ojo con eso manito.

Bueno... Es importante saber que el limite de una funcion es cuando tomo valores cercanos a un punto y estos valores son iguales tanto por derecha como por izquierda y usamos esta notacion mire: el archivo 1

Archivo 1

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$ (-) por izquierda y si

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$ (+) por derecha

$\lim_{x \to 0} f(x)$

Si los dos laterales osea cuando me acerco por derecha y por izquierda son iguales el limite es eso.

Si no son iguales no hay limite

Y hay casos en los que no estan definidos. mire el Archivo 2

Figura 83. Primera parte de la respuesta de Kevin al ítem 5 del Taller 6

De acuerdo con el ejemplo planteado por Kevin se evidencia que tiene la habilidad para resaltar una conexión entre imágenes y explicar el método para verificar la conexión, la cual para Pirie y Kieren (1989) es la diferencia entre el nivel 3 y nivel 4.

Continuando con la explicación que realiza Kevin, decide mostrar el caso en el que existe el límite de la función en un punto pero este no es igual a la imagen de la función en ese punto (ver Figura 84). El estudiante para ese caso decidió recurrir a la representación gráfica y además expresó que el límite porque es cuando tomo valores cercanos y no en el punto.

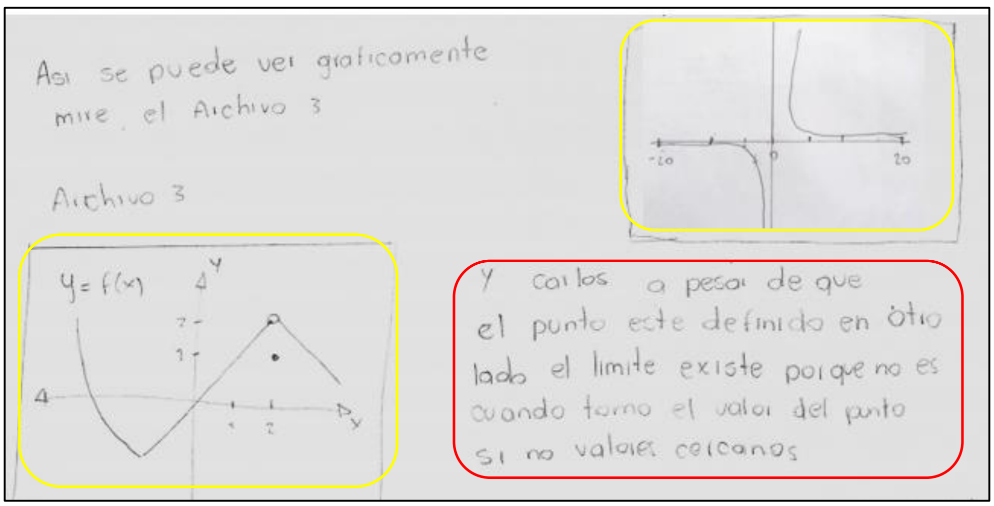


Figura 84. Segunda parte de la respuesta de Kevin al ítem 5 del Taller 6

El estudiante fue capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes que había desarrollado durante la secuencia de actividades. Todo lo anterior, nos permite situar a Kevin en un nivel de Formalización para la comprensión del límite de una función en un punto, esto de acuerdo a las complementariedades de la acción y la expresión que se evidenciaron a lo largo de la secuencia de actividades. Aunque, el lenguaje usado por Kevin para describir el concepto no tiene un lenguaje matemático formal, la descripción suministrada es equivalente a la definición matemática apropiada.

5. Conclusiones

La presentación de las conclusiones la realizaremos en tres secciones: i) La caracterización de los niveles de comprensión del límite de una función en un punto; ii) Reflexiones acerca de la secuencia de actividades para la comprensión del límite de una función en un punto; iii) Perspectivas de investigación.

5.1 Caracterización de los niveles de comprensión del límite de una función en un punto

La caracterización de los niveles de comprensión del límite de una función en un punto, se hizo mediante la comparación de las complementariedades de la acción y expresión que se plantearon *a priori* (apartado 3.5.1) con las que emergieron o se ratificaron en la implementación de la secuencia de actividades para el caso de Kevin. Acciones y expresiones que se evidenciaron en el tránsito de un nivel a otro.

5.1.1 Conocimiento primitivo del límite de una función en un punto. De acuerdo a las hojas de trabajo y a los episodios registrados para cada una de las actividades realizadas durante la implementación de la secuencia, nos ha permitido ratificar las complementariedades de la acción y expresión que se habían previsto con las que desarrolló Kevin en el Taller de Conocimientos previos (ver Tabla 12).

Ese taller nos permitió evidenciar que el estudiante tenía algunos conocimientos acerca del concepto de función, pero a su vez se identificaron ciertas dificultades al hallar el dominio y al trazar la gráfica de la función momento en el cual realizó un *"Folding Back"* para reexaminar sus conocimientos.

En cuanto a las situaciones que se le presentaron a Kevin en relación a las nociones de aproximación y tendencia, se pudo evidenciar que él logró identificar la existencia de estas nociones. Sin embargo, en ese momento él usaba otros términos para referirse a ellas y para realizar aproximaciones numéricas de acuerdo al contexto del enunciado.

5.1.2 Creación de la imagen del límite de una función en un punto. El diseño de las actividades planteadas en el Taller 2 (ver apartado 4.2) favoreció la creación de la imagen del límite de una función en un punto, proceso que se pudo describir a través de las complementariedades de la acción y expresión definidas para este nivel, tal como se mostró en la Tabla 13. La actividad mediada por GeoGebra permitió presentar las nociones de manera unidimensional (recta numérica), de forma geométrica en un plano bidimensional (para analizar las nociones de aproximación y tendencia) y, de forma funcional.

Las diferentes representaciones posibilitadas en el taller, le permitieron a Kevin identificar y diferenciar las nociones de aproximación y tendencia; además, establecer aproximaciones a un valor "x", relacionando las aproximaciones en el dominio de la función, con los valores que toma $f(x)$ para esas aproximaciones.

5.1.3 Comprensión de la imagen del límite de una función en un punto. El estudiante transitó al nivel de comprensión de la imagen, porque logró desarrollar imágenes asociadas a la existencia del límite de una función en un punto (ver Tabla 14). Las acciones y expresiones definidas para este nivel coinciden con las definidas a priori.

Para este nivel es necesario resaltar la importancia de la coordinación entre las aproximaciones realizadas en el dominio y en el rango de la función, porque le permiten al estudiante identificar que cuando x tiende a a, el límite de la función $f(x)$ tiende a L, esto sucede cuando las aproximaciones realizadas coinciden.

El estudiante en este nivel muestra que ha logrado alcanzar la comprensión de las imágenes que ha creado hasta el momento, debido a que logra usar las diferentes formas de representar una función para analizar el límite de una función en un punto.

5.1.4 Observación de la propiedad del límite de una función en un punto. De acuerdo al análisis de las respuestas de Kevin frente a las actividades relacionadas con la concepción dinámica y óptima del límite de una función en un punto, se identificaron las siguientes complementariedades de la acción y la expresión para el Nivel 4 de Observación de la propiedad (ver Tabla 18) asociadas al límite de una función en un punto.

Tabla 18.

Complementariedades de la acción y expresión para el nivel de observación de la propiedad del límite de una función en un punto

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Reconoce de manera gráfica y tabular que no existe el límite de la función al identificar que no existe tendencia.	Interpreta en las diferentes maneras de representar una función la no existencia del límite en un punto c, si cuando x tiende a c , $f(x)$ tiende a $+\infty$ o $-\infty$.
Interpreta el comportamiento de los límites laterales de una función $f(x)$ de modo que pueden hacerse arbitrariamente próximos a un número L al tomar x suficientemente cerca por izquierda y por derecha, pero sin que sea igual.	Justifica que el límite de una función $f(x)$ no existe cuando limite por la izquierda o limite por derecha de un punto c no existen; también puede ser que existan pero sean diferentes.
Explica cuando una función $f(x)$ tiene límite.	Justifica que el límite de una función existe y es único.
Reconoce que es posible realizar aproximaciones desde el rango con las del punto en el dominio de la función.	Coordina aproximaciones óptimas al límite, desde el rango con las del punto en el dominio de la función, produciendo entornos más reducidos para intentar deducir el límite.

Para este nivel, el estudiante debía buscar valores en el rango próximos al límite, analizar las distancias entre esos valores el mismo límite. Además, analizar las distancias de los valores correspondientes en el dominio de la función, análisis que con el apoyo de GeoGebra se ve favorecido pues permite una mejor visualización.

5.1.5 Formalización del límite de una función en un punto. En las respuestas de las actividades desarrollas en el apartado 4.5 y 4.6, se logró identificar que Kevin realizó complementariedades de la acción y expresión asociadas al nivel de *Formalización* que se muestran en la Tabla 19. Kevin logró identificar las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes que logró construir para el límite de una función en un punto. Aunque, el lenguaje usado por Kevin no es formal, la descripción suministrada es equivalente a la definición matemática del concepto.

Tabla 19.

Complementariedades de la acción y expresión para el nivel de formalización del límite de una función en un punto

ACCIÓN	EXPRESIÓN
Reconoce que es posible realizar aproximaciones desde el rango con aproximaciones en el dominio de la función, a partir de la disminución de las distancias.	Coordina las distancias en el rango con las distancias en el dominio de la función, produciendo entornos más reducidos para intentar deducir el límite por la concepción métrica.
Reconoce usando las diferentes representaciones que el límite de una función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ en el punto $\boldsymbol{c}$, existe si cuando la variable $\boldsymbol{x}$ se aproxima a $\boldsymbol{c}$, entonces $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ tiende a $\boldsymbol{L}$.	Interpreta usando las diferentes representaciones la existencia de un límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a c no depende de si $f(x)$ está definida en c, sino solo de si está definida para x cerca del número c.

En el desarrollo de la investigación se utilizaron los primeros 5 niveles de la teoría de comprensión matemática que presentan Pirie y Kieren (1989), para analizar la comprensión del límite de una función en un punto. En ese sentido, un estudiante al terminar el curso de Cálculo Diferencial debería encontrase en un nivel de Formalización para este concepto, logrando comprender el concepto no necesariamente en un lenguaje formal, pero si todos elementos teóricos que están implícitos dentro de su definición. Por tanto, para lograr estar en niveles superiores el estudiante tendrá que realizar verbalizaciones relacionadas con la cognición matemática, sobre el concepto formalizado, haciendo uso de un sistema axiomático y plantear preguntas novedosas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo.

5.2 Reflexiones sobre la secuencia de actividades

El uso de la metodología propuesta por Fiallo y Parada (2018) para un curso de precálculo, nos permitió realizar el diseño de los talleres que hacen parte de la secuencia de actividades, que favoreció la comprensión del límite de una función en un punto. De acuerdo a la estructura de la metodología, en la fase de información y exploración libre, nos permitió identificar los conocimientos previos que utilizaban los estudiantes para resolver los problemas que se planteaban al inicio de cada uno de los talleres de la secuencia, con el fin de aclarar los conceptos vistos e identificar las dificultades que tenían los estudiantes.

Para la fase de socialización de los resultados obtenidos los estudiantes lograron expresar sus soluciones que discutían con su compañero del lado o cuando se discutían en grupo, aquí se aprovecharon las discusiones para motivar a los estudiantes a ofrecer soluciones justificadas de acuerdo a las actividades propuestas. Por otra parte, las actividades que requerían de la exploración de un archivo en GeoGebra, permitió que los estudiantes mediante una orientación guiada por preguntas, encontrara respuesta a las actividades, superaran obstáculos en la construcción de imágenes del concepto, además que para la creación de la imagen del límite de una función en un punto el estudiante usó las diferentes representaciones que ofrece en GeoGebra.

La fase de explicación permitió la discusión entre estudiantes e investigador, debido a que la participación de los estudiantes fue muy activa para dar a conocer sus soluciones que se aprovechó para que lograran construir su conocimiento en cuanto a los aspectos conceptuales en la comprensión del límite de una función en un punto. Al finalizar cada taller se planteó una tarea retadora nos permitió identificar que comprensión habían logrado los estudiantes de acuerdo a los aspectos conceptuales de cada una de las actividades que se habían trabajado en la secuencia.

Las nociones de aproximación y tendencia son un acercamiento a la comprensión del límite de una función en un punto, porque retoma el dinamismo que se esconde detrás de la definición formal del concepto de límite de una función. Al igual que Blázquez y Ortega (2002) se evidencia que este primer acercamiento es más entendible por los estudiantes debido a la simplicidad con la que se presenta.

Se evidencia que la concepción dinámica del límite de una función en un punto es la más recordada por los estudiantes. Lo anterior, porque en la implementación de la actividad con Kevin y el grupo ene general, se pude evidenciar que ello logran coordinar las aproximaciones realizadas en el dominio y el rango de la función, de tal manera que le permiten identificar que cuando x tiende a a, el límite de la función $f(x)$ tiende a L.

También se pudo ver en la implementación, que los estudiantes recurren al uso de la representación gráfica y tabular para decidir sobre la existencia del límite de la función, en ese sentido los trabajos realizados por Engler et al. (2007) reportan que los límites presentados de manera gráfica son más fuertes que las ideas de límite mostradas de forma numérica.

Por otra parte el estudio de la concepción óptima del límite de una función en un punto, permitió que el estudiante lograra coordinar aproximaciones de valores en el rango con las del punto en el dominio de la función, produciendo vecindades más pequeñas para intentar deducir el límite por refinamiento sucesivo de una aproximación óptima (Mira, 2016).

El estudio del límite de una función en un punto desde una concepción métrica, es un trabajo previo sobre la coordinación de la tendencia en las distancias tomadas en el dominio y en el rango de una función. Coincidimos con Zapata et al. (2014) en que el papel de las tecnologías computacionales es ofrecer un registro dinámico, como por ejemplo el de la hoja de cálculo de GeoGebra, en las que se muestra un comportamiento dinámico de a relación épsilon-delta.

5.3 Perspectivas de la investigación

Esta investigación no tan solo se centra en caracterizar los niveles de comprensión del límite de una función en un punto, sino también ha tenido el propósito de aportar una secuencia de actividades para que pueda ser usada por profesores de educación media o educación superior en sus aulas de clase para favorecer la comprensión del límite de una función en un punto.

Reconocemos que en la secuencia no se hace un trabajo enfocado en calcular límites a través de un proceso algebraico, sino más bien está enfocada en retomar las ideas previas del dinamismo que está detrás de la definición del límite de la función en un punto.

Es importante resaltar, que así como se hace el planteamiento de una secuencia para el límite de una función en un punto, sería interesante adecuar una secuencia para los límites al infinito, al igual que los otros contenidos de un curso de cálculo diferencial.

Referencias bibliográficas

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A., Laurentiev, M. (1994). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. *Revista Latinoamericana en Matemáticas Educativa*, *1* (1), 40-55.

Betancur, A., Guarin, S., y Fiallo J. (2015a). La idea de límite como una aproximación óptima. En G. Obando (ed). *16º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Bogotá. Colombia.

Betancur, A., Guarin, S., Parada, S., y Fiallo J. (2015b). La noción de aproximación óptima en la comprensión del concepto de límite. *IX Simposio Nororiental de matemáticas.* Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia.

Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. En Ortega, Tomás (ed.), *Actas del III SEIEM*. Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En Cantoral, R. (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 331-354). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *8*(30), 67-82.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(2), 189-209.

Boyer, C. (1999). Historia de la matemática. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1999). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématicques*, *4(*2), 165-198.

Camacho, A., y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis Preliminar. *Revista RELIME. 4(3)*. 237-265.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167-192.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed), *Advanced mathematical thinking*. (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D., y Gregorini, M. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *Revista Iberoamericana de educación matemática, 11*, 113-132.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D., Gregorini, M. y Henzenn, N. (2008). El límite infinito: una situación didáctica. *Revista Premisa*, *10*(36), 11-21.

Fernández, J. (2010). *Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones.* (Tesis de Maestría). Universidad de Granada. España.

Fernández, J. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio exploratorio.* (Tesis de Doctorado). Universidad de Granada. España.

Fiallo, J., y Parada, S. (2014). Curso de pre-cálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista Científica*, *20*, 56-71.

Fiallo, J., y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación.* Colombia: Universidad Industrial de Santander.

García, G., Serrano, C., y Díaz, H. (2002). *La aproximación: una noción básica en el cálculo: un estudio en la educación básica*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *In XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers*. Michoacan University San Nicolás de Hidalgo. Morelia. Mexico.

Hitt, F y Paez, R. (2004) Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 32, 97-108.

Leithold, L. (1999). *EL CÁLCULO*. Séptima Edición. Oxford University Press. Harla México.

Medina, A. (2000). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis, 1*(9), 44-59.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento dela comprensión matemática y la teoría de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6 (003), 221-278

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas.* Áreas obligatorias y fundamentales. Colombia: M.E.N.

Mira, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje.* (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante. España.

Miranda, R. (2000). *Desarrollo de una idea intuitiva del límite en estudiantes de secundaria.* (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Guerrero. México.

NCTM. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción de M. Fernández (Traducción de la versión del 2000 del NCTM). SAEM Thales. Sevilla.

Pirie, S., y Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the learning of mathematics*, *9*(3), 7-11.

Pirie, S., y Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(5), 505-528.

Pirie, S., y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26* (2-3), 165-190.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante. España.

Rangel, R., Betancourt, A., Árcega, M., y García, J. (2014). Diseño instruccional para el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de caso en el ITCG, la UJED, la UASLP y la UAN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. *37*, 91-110.

Sánchez, M. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada. España.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students y epistemological obstacles related the limitis. *Educational Studies in Mathematics. 18*(4), 371-397.

Tall, D. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics*. (Thesis Ph. D). University of Warwick. England.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Ed). *Advanced mathematical thinking*. (pp. 3-24). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Tall, D. (1992). Students' difficulties in calculus. *In proceedings of working group.* ICME-7. Québec, Canadá.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Thom, J. S., y Pirie, S. E. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. Jounal of mathematical Behavior, 25, 185-195

Torroba, E., Reid, M., y Etcheverry, N. (2006). Enseñanza-aprendizaje del concepto de límite de funciones con el uso de tic's. En Menorías: *I REPEM*. Santa Rosa. Argentina.

Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 325-338.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (Ed), *Advanced mathematical thinking*. (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Muller, D., y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, *8*(29), 9-19.

Zapata, J., Escobar, J., y Bernal, D. (2014). *La comprensión intuitiva del concepto de límite en un grupo estudiantes de cálculo diferencial.* (Tesis de Pregrado). Universidad de Antioquia. Medellín. Colombia.

Zill, D., y Wright, W. (2011). *Cálculo: Trascendentes tempranas*. Mc Graw Hill.