Generación de nuevos modelos newtonianos de galaxias compuestos por discos delgados y halos esferoidales

Yeison Fabian Santos

Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Física

Director

Guillermo Alfonso González Villegas

Doctorado en Matematica Aplicada

Codirector

Oscar Mauricio Pimentel Diaz

Doctor en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2021

Dedicatoria

A mi Madre, Mujer, Hermanos y Profesor Guillermo.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Resumen

Título: Generación de nuevos modelos newtonianos de galaxias compuestos por discos delgados y halos esferoidales [1].

Autor: Yeison Fabian Santos [2].

Palabras Clave: Modelos de galaxias, Gravedad newtoniana, Disco delgado, Halo esferoidal, Curva de rotación.

Descripción: Se construyen dos nuevas familias de modelos tridimensionales newtonianos para galaxias. Los modelos se obtienen suponiendo que el potencial gravitacional satisface la misma ecuación para las condiciones de energía en los modelos de discos relativistas con halo presentados en González and Pimentel (2016). La primera familia de soluciones se obtiene aplicando el método "desplazamiento, corte y reflexion" a la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. La segunda familia de soluciones se obtiene utilizando las coordenadas esferoidales oblatas porque se adaptan a la forma de la fuente e introducen naturalmente un radio de corte para el disco. Las expresiones analíticas que describen las curvas de rotación y las distribuciones de masa en el disco y en el halo se calculan para los primeros tres modelos de la familia de las soluciones. Se muestra que las densidades de masa de los discos y de los halos presentan un máximo en el centro del sistema y llegan a cero en el infinito. Finalmente, las curvas de rotación obtenidas de las nuevas soluciones presentan una región plana para grandes valores de la coordenada radial, como se sugiere en las observaciones de galaxias espirales.

[1] Tesis de Maestria

[2] Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director: Guillermo Alfonso González Villegas, Doctor en Matematica Aplicada, Codirector: Oscar Mauricio Pimentel Diaz, Doctor en Física

Abstract

Title: Generation of new newtonian galaxy models composed of this discs and spheroid halos [1].

Author: Yeison Fabian Santos [**]

Keywords: Galaxy Models, Newtonian Gravity, Thin Disc, Spheroidal Halo, Rotation Curve.

Description: ITwo new families of Newtonian three-dimensional models for galaxies are built. The models are obtained assuming that the gravitational potential satisfies the same equation for the energy conditions in the relativistic disk-halo models presented in González and Pimentel (2016). The first family of solutions is obtained by applying the "displacement, cut and reflection" method to the solution of the Laplace equation in cylindrical coordinates. The second family of solutions is obtained using the Oblate spheroidal coordinates because they adapt to the shape of the source and naturally introduce a cutting radius for the disk. The analytical expressions that describe the rotation curves and the mass distributions in the disk and in the halo are calculated for the first three models. It is shown that the mass densities of the disks and the halos have a maximum at the center of the system and are zero at infinity. Finally, the rotation curves obtained from the new solutions have a flat region for large values of the radial coordinate, as suggested in the observations of spiral galaxies.

---

[1] Magister Thesis

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Fisica. Director: PhD. Guillermo Alfonzo González Villegas.

1. Introduccion

Es posible diferenciar varias regiones en una galaxia: un disco delgado, un bulbo galáctico, un halo de materia y, en algunos casos, un agujero negro central. En el caso de la Vía Láctea Binney and Tremaine (1987), el disco galáctico tiene un radio de 25 kpc y contiene 3.48 % de la masa total de la galaxia, la protuberancia galáctica se extiende a 4 kpc y su masa es aproximadamente 0.5 % de la masa total del sistema; finalmente, el halo tiene un radio de 230 kpc, y se cree que su masa es aproximadamente el 95 % de la masa de la galaxia. Por lo tanto, dado que el disco y el halo son los componentes más grandes y masivos, entonces es posible describir las propiedades físicas globales de un sistema galáctico por medio de modelos de discos con halos de materia. Además, dado que el halo esferoidal tiene un grosor de 170 kpc y el disco de solo 1 kpc, el segundo puede modelarse como una distribución de masa en forma de disco infinitamente delgada, como se puede apreciar en la figura (1).

Los modelos analíticos de discos delgados con halos son importantes desde el punto de vista de la astrofísica porque se pueden usar para calcular algunas propiedades de las galaxias, como por ejemplo las densidades de masa del disco y del halo, las frecuencias epicíclicas y las velocidades de rotación de las estrellas en el plano del disco a partir de datos observacionales Satoh (1980); González and Reina (2006). Dichas observaciones indican que las curvas de rotación de varias galaxias espirales son aproximadamente planas en regiones de 2 a más veces el radio del disco Binney and Tremaine (1987). Este comportamiento no se puede explicar a partir de las observaciones de la luminosidad, indicando que debe existir un halo de materia oscura que no genera radiación electromagnética pero que interactúa gravitacionalmente con las estrellas del disco galáctico (Corbelli and Salucci, 2000; Rubin et al., 1980).

Por otro lado, con los perfiles analíticos de densidad de masa y potencial gravitacional es posible modelar de manera sencilla las diferentes componentes de las galaxias. Inclusive, estos modelos se han usado con éxito para describir la componente de materia oscura que permite explicar el comportamiento aplanado de las curvas de rotación. Por ejemplo, en Lilley et al. (2018a), se presenta un modelo analítico cuyo perfil de densidad se ajusta bien a los halos cosmológicos de materia oscura y no tiene el problema de masa infinita del modelo tradicional de Navarro-Frenk-White (NFW) Navarro et al. (1997) . Los modelos de discos con halo se pueden utilizar, junto con las observaciones del movimiento orbital de las estrellas en el disco, para comparar modelos newtonianos tradicionales, como los de materia oscura, con modelos alternativos, como aquellos que modifican la segunda ley de Newton Read and Moore (2005). Es decir, a partir de estos modelos de galaxias se puede explorar la naturaleza de la materia oscura.

Adicionalmente, a partir de los modelos analíticos se pueden estudiar las desviaciones de la simetría esférica y axial que son características en muchos sistemas galácticos, lo cual brinda una mayor comprensión sobre la dinámica de galaxias más realistas. Por estas razones, es importante obtener modelos analíticos que puedan reproducir el comportamiento de las curvas de rotación de las galaxias observadas.

En varios casos a lo largo de la historia, las galaxias se han modelado teniendo en cuenta solo la contribución del disco. En Kuzmin (1956), Kuzmin introdujo el método de desplazamiento, corte y reflexión para obtener un potencial gravitacional con simetría de reflexión sobre el plano del disco, y muestra que este potencial es generado por una densidad de masa similar a un disco de espesor cero. Posteriormente, en Toomre (1963) se propone un método matemático para calcular la distribución de masa de un sistema autogravitante aplanado a partir de una ley arbitraria de rotación. Más recientemente, en González et al. (2010), los autores presentan un nuevo modelo de disco delgado utilizando el método de Hunter, y utilizan este modelo para calcular la distribución de masa y las frecuencias verticales de algunas galaxias en el cúmulo de la Osa Mayor.

Para incluir las contribuciones del halo de materia y el bulbo galáctico, y así obtener una descripción más realista de un sistema galáctico, se generalizaron en Miyamoto and Nagai (1975) algunas características de la solución de Toomre para obtener modelos donde la masa ya no se limita a un solo plano. Estos modelos se han utilizado con éxito para reproducir las observaciones de las curvas de rotación y las distribuciones de hidrógeno en el disco de la Vía Láctea Barros et al. (2016). Las soluciones de discos o halos tambíen se pueden construir superponiendo modelos conocidos como el de Miyamoto-Nagai, Rojas Niño et al. (2016) o resolviendo la ecuación de Poisson al expandir la densidad y el potencial en un conjunto de funciones base Hernquist and Ostriker (1992); Lilley et al. (2018b). Estos métodos permiten modelar con precisión una amplia variedad de distribuciones de masa de galaxias reales. Hasta este momento, se han utilizado muchos otros modelos para distribuciones tridimensionales de materia con el objetivo de ajustar los datos observacionales y así obtener las propiedades físicas de algunas galaxias particulares Rohlfs and Kreitschmann (1988); Caldwell and Ostriker (1981).

Por otro lado, dentro del marco de la relatividad general, es posible encontrar en la literatura algunos modelos de discos delgados con halos, que describen la distribución de la materia para los sistemas galácticos Vogt and Letelier (2003); Gutiérrez-Piñeres et al. (2013); González and Pimentel (2016). En particular, en González and Pimentel (2016) se presentan dos familias de soluciones, escritas como una expansión en términos de funciones conocidas. Estos modelos relativistas tienen algunas propiedades interesantes: (1) La densidad de masa del halo y el disco es siempre positiva, la gravedad siempre es atractiva y el flujo de energía es tipo tiempo o nulo y siempre está orientado hacia el futuro, (2) la masa gravitacional del disco y el halo es finita, (3) describen apropiadamente el comportamiento cualitativo de las curvas de rotación únicamente con los tres primeros términos de la expansión y (4) incluyen una ecuación de estado que varía entre un fluido de radiación y un fluido de polvo, dependiendo de los parámetros del modelo. Estas propiedades hacen que las soluciones sean potencialmente aplicables a la descripción de discos con halos de materia bariónica y materia oscura.

Para calcular las soluciones en González and Pimentel (2016) se imponen las condiciones de energía de los sistemas gravitacionales en relatividad general, las cuales conducen de manera natural a una ecuación para la función métrica, Φ. Esta funcón tiene una interpretación física importante ya que describe el potencial gravitacional en el límite de campo débil, como se puede apreciar mas detalladamente en el capitulo 2 (Limite y Campos Gravitacionales Newtonianos). Por lo tanto, motivados en las propiedades de los modelos relativistas y en su ecuación para las condiciones de energía, en este trabajo construimos nuevos modelos newtonianos de discos delgados con halo, en los cuales el potencial gravitacional satisface la misma ecuación presentada en González and Pimentel (2016) para la función Φ. Este método nos permite resolver la ecuación de Poisson y, por lo tanto, encontrar soluciones analíticas que describan las propiedades de los sistemas gálacticos.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo 2 presentamos todo el marco teórico de los campos gravitacionales newtonianos, así como también el limite newtoniano, el cuál es de gran importancia en esta investigación; en el capítulo 3 mostramos en detalle las dos componentes de mayor masa en la galaxia como lo son, el halo estelar y el halo de materia oscura, de igual forma presentamos el marco teórico general para obtener modelos newtonianos de discos delgados con halos. En este formalismo, las propiedades físicas del sistema se escriben en términos de soluciones a la ecuación de Laplace. En el capítulo 4 se resuelve la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas para obtener una primer familia de modelos de galaxias. Posteriormente, en el capitulo 5 se presenta una segunda familia de soluciones, ésta vez a partir de la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas, las cuales se adaptan mejor a la geometría del sistema Morgan and Morgan (1969). Al final del los capítulos 4 y 5 analizamos el comportamiento de las curvas de rotación y de las densidades de masa del disco y del halo para los primeros tres primeros modelos de cada familia de soluciones. Finalmente, en el capitulo 6 presentamos los principales resultados y conclusiones de este trabajo, así como los productos derivados del mismo.

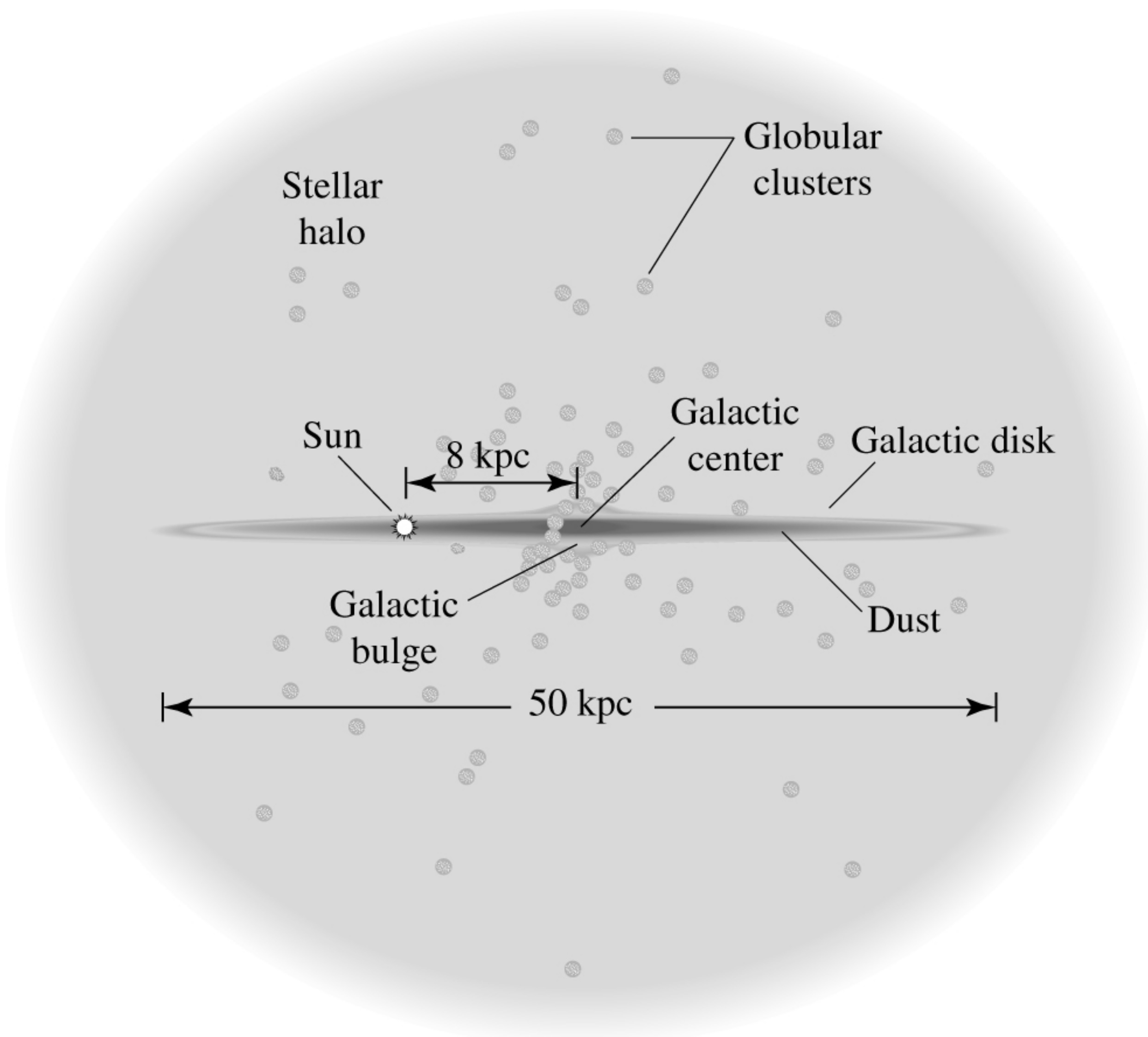

Figura 1. Componentes de una galaxia espiral Carroll and Ostlie (2007). Es importante notar que esta imagen no se encuentra a escala.

2. Campos Gravitacionales y Límite Newtoniano.

2.1. Campos gravitacionales débiles.

Sin gravedad el espacio-tiempo es plano, pero en un campo gravitacional débil el espacio-tiempo es “casi"plano. Esto se define como una variedad en la que existen coordenadas que permiten escribir la métrica como,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

dónde

$$|h_{\alpha\beta}| \ll 1, \tag{2}$$

y $\eta_{\alpha\beta}$ toma la forma diagonal $(-1,+1,+1,+1)$. Estas coordenadas se denominan coordenadas aproximadamente Lorentzianas. A continuación se analizarán dos tipos fundamentales de transformaciones entre sistemas aproximadamente Lorenzianos: las transformaciones de Lorentz de fondo y las transformaciones de gauge. Plummer (1911)

- **Transformaciones de Lorentz de fondo**: Es aquella que tiene la forma

$$x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} x^{\beta}, \tag{3}$$

donde $\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}$ es identica a una transformación de Lorentz en Relatividad Especial (aunque el espacio-tiempo no es exactamente Minkowski).

La transformación del tensor métrico se puede expresar como,

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}g_{\nu\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}\eta_{\mu\nu} + \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}h_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Pero por construcción, la transformación debe garantizar que $\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ y por lo tanto,

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \tag{5}$$

con la definición

$$h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}h_{\mu\nu}. \tag{6}$$

Es interesante que $h_{\mu\nu}$ se comporta como un tensor en relatividad especial bajo transformaciones de Lorentz de fondo. Esto nos permite pensar en un espacio-tiempo ligeramente curvado como uno plano con un “tensor"$h_{\mu\nu}$ definido en él.

- **Transformaciones de Gauge**: Un pequeño cambio en las coordenadas de la forma

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\beta}), \tag{7}$$

también puede dejar (1) y (2) sin alterar, si se exige que $|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}| \ll 1$. Esto se puede demostrar a partir de la matriz de transformación $\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}$, la cual se escribe como

$$\begin{aligned} \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} &= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \xi^{\alpha}{}_{,\beta}, \\ \Lambda^{\alpha}{}_{\beta'} &= \delta^{\alpha}{}_{\beta} - \xi^{\alpha}{}_{,\beta} + 0(|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}|^{2}). \end{aligned} \tag{8}$$

A primer orden, es fácil mostrar que

$$g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}, \tag{9}$$

lo cual significa que el efecto del cambio de coordenadas es cambiar $h_{\alpha\beta}$ por

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}. \tag{10}$$

Si todos los $|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}| \ll 1$ son pequeños, entonces el nuevo $h_{\alpha\beta}$ es aun pequeño. Este cambio se llama transformación de gauge. La libertad de coordenadas de las ecuaciones de Einstein permite elegir un vector arbitrario ξ^{α} en (10) que simplifique las ecuaciones.

2.2. Ecuaciones de Einstein de campo débil

Sabiendo que $h_{\alpha\beta}$ es un tensor del espacio-tiempo de Minkowski, entonces se espera que todas nuestras ecuaciones sean tensoriales cuando se interpretan en relatividad especial. Por tal razón, podemos definir cantidades con el índice arriba

$$h^{\mu}{}_{\beta} := \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta}, \tag{11}$$

$$h^{\mu\nu} := \eta^{\nu\beta} h^{\mu}{}_{\beta}, \tag{12}$$

donde la traza

$$h := h^{\alpha}{}_{\alpha}, \tag{13}$$

y el tensor llamado “traza inversa"de $h_{\alpha\beta}$

$$\bar{h}^{\alpha\beta} := h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h. \tag{14}$$

Tiene este nombre porque

$$\bar{h} := \bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = -h. \tag{15}$$

Además, podemos escribir que la inversa de (14) es

$$h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h}. \tag{16}$$

Partiendo de (1) se puede mostrar que el tensor de Einstein, a primer orden en $h_{\mu\nu}$, es

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu} + 0(h^2_{\alpha\beta})]. \tag{17}$$

La expresión anterior se puede simplificar considerablemente si se logra encontrar un gauge que satisfaga la ecuación

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{18}$$

Esta ecuación se conoce como la condición de gauge.

En un gauge de Lorentz, en el cual se cumple (18), el tensor de Einstein se reduce a

$$G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}^{\alpha\beta}, \tag{19}$$

donde $\Box\bar{h}^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta;\mu}{}_{,\mu}$, siendo $\Box$ el Laplaciano en cuatro dimensiones. Entonces las ecuaciones de Einstein de campo débil son

$$\Box\bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}. \tag{20}$$

Estas se denominan ecuaciones de campo de la teoría linealizada, ya que resultan de mantener los términos lineales en $h_{\alpha\beta}$ Schutz (2009).

2.3. Límite Newtoniano.

La gravedad newtoniana es válida cuando los campos gravitacionales son demasiado débiles para producir velocidades cercanas a la de la luz, es decir, cuando $|\Phi| << 1$ y $|v| << 1$. Cuando las velocidades son pequeñas, las componentes del tensor $T^{\alpha\beta}$ típicamente obedecen las siguientes desigualdades

$$|T^{00}| >> |T^{0i}| >> |T^{ij}|. \tag{21}$$

Ahora, se espera que estas desigualdades se transfieran a $h^{\alpha\beta}$, por medio de la ecuación (20)

$$|\bar{h}^{00}| >> |\bar{h}^{0i}| >> |\bar{h}^{ij}|. \tag{22}$$

Por tanto, el campo gravitacional newtoniano dominante se calcula de la ecuación de campo dominante,

$$\Box \bar{h}^{00} = -16\pi\rho, \tag{23}$$

usando $T^{00} = \rho + 0(\rho v^2)$. Para campos que cambian porque las fuentes se mueven con velocidad v, tenemos que $\partial/\partial t$ es del mismo orden que $v(\partial/\partial x)$ de modo que

$$\Box = \nabla^2 + 0(v^2\nabla^2). \tag{24}$$

Por lo tanto,

$$\nabla^2 \bar{h}^{00} = -16\pi\rho. \tag{25}$$

Ahora, comparando (25) con la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho, \tag{26}$$

y tomando $G = 1$, obtenemos que $\bar{h}^{00} = -4\Phi$. Dado que todas las demás componentes de $\bar{h}^{\alpha\beta}$ son despreciables en este orden, tenemos que $h = h^{\alpha}_{\alpha} = -\bar{h}^{\alpha}_{\alpha} = \bar{h}^{00}$, lo cual implica que $h^{00} = -2\Phi$, $h^{xx} = h^{yy} = h^{zz} = -2\Phi$, o

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + (1-2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{27}$$

Esta métrica conduce a las leyes de movimiento newtonianas correctas, y por tanto se comprueba que la gravedad newtoniana es un caso límite de la relatividad general. Es también importante resaltar que la mayoría de los sistemas astronómicos están bien descritos por la gravedad newtoniana como una primera aproximación Schutz (2009).

Ahora bien, en el trabajo realizado en González and Pimentel (2016), los autores parten del campo gravitacional descrito por el elemento de linea en coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{-2\Phi}(dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2), \tag{28}$$

y calculan la densidad de masa y las presiones

$$\begin{aligned} \rho &= e^{2\Phi}(2\nabla^2\Phi - \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi), \\ p_1 &= e^{2\Phi}\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi, \\ p_2 &= e^{2\Phi}\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi, \\ p_3 &= -e^{2\Phi}\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi, \end{aligned} \tag{29}$$

por medio de las ecuaciones de Einstein. Para encontrar modelos con un buen comportamiento físico, los autores imponen las condiciones de energía sobre la densidad y las presiones. Estas condiciones garantizan que la densidad de energía siempre sea positiva ($\rho \geq 0$), que el flujo de energía sea un vector tipo tiempo orientado hacia el futuro ($|\rho| \geq |p_i|$, $\rho + p_i \geq 0$) y que el campo gravitacional siempre sea atractivo ($\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0$). Se puede demostrar que estas condiciones conducen a la siguiente ecuación para la función métrica Φ,

$$\nabla^2\Phi = k\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi, \tag{30}$$

donde $k \geq 0$.

La función métrica Φ tiene una interpretación interesante, ya que al expandir en series de taylor las componentes del tensor métrico al rededor de $\Phi = 0$,

$$g_{00} = -e^{2\Phi} \approx -(1+2\Phi), \tag{31}$$

$$g_{ii} = e^{-2\Phi} \approx (1-2\Phi), \tag{32}$$

y compararlas con el elemento de linea (27), se puede observar que Φ representa el campo gravitacional en el límite Newtoniano.

Debido a la relación directa entre la función Φ y el campo gravitacional newtoniano, en este trabajo se explora una nueva forma de construir, de manera sencilla, modelos newtonianos de discos con halo, a partir de la ecuación (30). Uno de los objetivos es tratar de obtener en estos nuevos modelos perfiles de velocidad circular aplanados, es decir, velocidades aproximadamente constantes para radios grandes, ya que las galaxias reales poseen este tipo de comportamiento, como se muestra en la figura 2.

3. Modelos Newtonianos de discos delgados con halo

3.1. Halo estelar y de materia oscura

Una componente importante de la galaxia es el halo (ver figura 3). La parte luminosa del halo contiene aproximadamente el 1 % de la masa estelar de la galaxia y esta compuesta por cúmulos globulares y estrellas individuales con grandes velocidades perpendiculares al plano del disco galáctico. Estas componentes pueden estar muy por encima o muy por debajo del plano de la galaxia. La Via Láctea cuenta con al menos 150 cúmulos globulares entre los 500 pc a 120 kpc (medidos desde el centro de la galaxia) Carroll and Ostlie (2007).

La masa total de materia luminosa en la galaxia es aproximadamente $9x10^{10}M_{\odot}$. Este valor está muy de acuerdo con el movimiento orbital del Sol alrededor del centro galáctico, pero no explica las órbitas de las estrellas y del gas en distancias mucho mayores. Aparentemente todavía hay otro componente crucial de la estructura general de nuestra galaxia, él cual llamaremos halo de materia oscura.

Este halo de materia oscura parece estar distribuido de forma casi esférica, envolviendo el halo estelar y extendiéndose hasta 230 kpc. Basado en su influencia gravitacional sobre la materia luminosa, la masa del halo de materia oscura puede ser $5.4x10^{11}M_{\odot}$ dentro de 50 kpc del centro galáctico y $1.9x10^{12}M_{\odot}$ dentro de 230 kpc del centro galáctico. Este halo de materia oscura contiene aproximadamente el 95 % de la masa total de la galaxia.

Aun se desconoce de qué esta compuesto el halo de materia oscura, pero se puede decir que no puede ser de polvo interestelar, porque el polvo no permitiría ver la luz de las estrellas. Además, el halo de materia oscura no podría estar compuesto de gas, porque las líneas de absorción serían evidentes al observar las estrellas del halo. Una posible explicación son las partículas masivas de interacción débil (WIMPs). Los WIMPs no contribuirían a la luminosidad general de la galaxia, pero la afectarían a través de sus interacciones gravitacionales.

Otra hipótesis para la posible composición del halo de materia oscura son los MACHOs u objetos compactos masivos del halo (enanas blancas, estrellas de neutrones, agujeros negros, entre otros), los cuales podrían suministrar la masa invisible que hace falta para explicar el movimiento de las estrellas en el disco galáctico. Si un MACHOs está ubicado entre una estrella distante y la Tierra, la luz de la estrella puede enfocarse con el MACHOs actuando como una lente gravitacional, como se muestra en la figura (5). Cabe resaltar que, hasta el momento, la composición del halo de materia oscura es un misterio. Sin embargo, los modelos de galaxias lo tienen en cuenta por su gran importancia gravitacional. En este trabajo en particular se tendrán en cuenta las dos estructuras de mayor masa y tamaño que son los discos galácticos (abarcan decenas de kiloparsecs), y los halos de materia oscura, los cuales no son observables a través de instrumentos ópticos, pero si infieren por sus efectos gravitacionales en toda la galaxia Binney and Tremaine (1987).

Algunos modelos que se utilizan para representar galaxias consisten en distribuciones continuas de materia con simetría axial, las cuales están caracterizadas por una densidad $\rho(R,z)$ y un potencial gravitacional $\Phi(R,z)$. Las dos cantidades físicas se relacionan a través de la ecuación de Poisson (26), que en nuestro caso será

$$\nabla^2\Phi(R,z) = 4\pi G\rho(R,z), \tag{33}$$

donde R y z son las coordenadas cilíndricas y G es la constante gravitacional.

Por otro lado, en los modelos relativitas de discos delgados con halo que se obtienen en González and Pimentel (2016), la función métrica que describe el potencial gravitacional en el limite de campo débil satisface la ecuación

$$\nabla^2\Phi(R,z) = k\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi \tag{34}$$

donde $k \geq 1$. Esta ecuación es consecuencia de las condiciones de energía, impuestas en González and Pimentel (2016) y por lo tanto garantiza que los modelos sean físicamente razonables. Por lo tanto, si asumimos que el potencial gravitacional de nuestros modelos Newtonianos también satisface la ecuación (34), por medio de la métrica (27), entonces la densidad de masa de (33), la podemos escribir como

$$\rho(R,z) = \frac{k\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi}{4\pi G}. \tag{35}$$

A partir de la expresión (34), y de la ecuación de Poisson (33), obtenemos la densidad de masa como

$$\rho(R,z) = \frac{k}{4\pi G}|\nabla\Phi|^2. \tag{36}$$

Ahora, con el fin de obtener soluciones para la función $\Phi(R,z)$, reescribimos la ecuación (34) como

$$\nabla^2(e^{-k\Phi}) = 0, \tag{37}$$

de tal manera que las soluciones para $\Phi(R,z)$ se pueden obtener a partir de soluciones de la ecuación de Laplace. Además, el potencial en el infinito tiende a cero; por ende el laplaciano del potencial en el infinito tambien tiende a cero. Por lo tanto

$$e^{-k\Phi} = 1 - U, \tag{38}$$

donde U es cualquier solución de la ecuación de Laplace que se anula en el infinito. Ahora, si suponemos que el sistema que queremos describir tiene simetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$, entonces la función Φ debe cumplir la condición

$$\Phi(R,z) = \Phi(R,-z), \tag{39}$$

lo que implica que la componente normal del gradiente de $\Phi(R,z)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, satisface la relación

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R,-z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R,z). \tag{40}$$

Debido a la relación (38), la función U también satisface las condiciones (39) y (40). En la siguiente secczión veremos que esta última condición conduce a la existencia de una distribución de masa discoidal de espesor cero en el plano $z = 0$.

3.2. Modelos de discos delgados finitos

Los modelos de discos delgados con halo se obtienen como soluciones de la ecuación de Poisson, $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$, junto con las condiciones (39) y (40) para el potencial gravitacional. Estas condiciones garantizan la existencia de una fuente discoidal de masa en el plano $z = 0$. En otras palabras, el potencial gravitacional del sistema está formado por la contribución del disco, Φ_D, y del halo, Φ_H, de manera que $\Phi = \Phi_D + \Phi_H$.

Para calcular la distribución de masa del disco, el primer paso es integrar en el volumen la ecuación de Poisson,

$$\int_V \nabla \cdot \nabla \Phi dV = 4\pi G M. \tag{41}$$

En esta expresión $M = \int_V \rho dV$ es la masa contenida en el volumen V. El teorema de Stokes permite remplazar la integral en la parte izquierda de la ecuación anterior por una integral de superficie sobre la frontera del volumen, S

$$\oint_S \nabla \Phi \cdot d\vec{s} = 4\pi G M. \tag{42}$$

Esta ecuación se conoce como la ley de Gauss para el campo gravitacional. Para resolver estas integrales, escogemos una superficie cilíndrica gausiana cuyo eje es normal al disco (en la dirección z). Esta superficie es dividida en dos por el plano $z = 0$.

El segundo paso para calcular la densidad de masa del disco es suponer que el cilindro tiene un grosor infinitesimalmente pequeño, lo cual implica que el flujo a travÃ©s de la superficie lateral del cilindro es cero y que la masa contenida en el cilindro sólo hace parte del disco ($M = M_d$). De esta manera, la ecuación anterior se convierte en

$$\int_{S_+} \nabla \Phi \cdot d\vec{s}_+ + \int_{S_-} \nabla \Phi \cdot d\vec{s}_- = 4\pi G M_d, \tag{43}$$

donde S_+ es la superficie de la tapa superior del cilindro y S_- es la superficie de la tapa inferior. Los términos dentro de las integrales se pueden reescribir de la siguiente forma,

$$\nabla\Phi \cdot d\vec{s}_+ = \nabla\Phi \cdot (ds\hat{z}) = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0^+} ds, \tag{44}$$

$$\nabla\Phi \cdot d\vec{s}_- = \nabla\Phi \cdot (-ds\hat{z}) = -\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0^-} ds, \tag{45}$$

y por lo tanto, la ecuación (43) se reduce a

$$\int_S \left(\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0^+} - \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0^-} \right) ds = 4\pi G M_d, \tag{46}$$

donde S es el area de las tapas del cilindro.

Además del grosor cero, se supone que las tapas del cilindro son extremadamente pequeñas, de manera que la densidad de masa es aproximadamente constante dentro de esta región circular. Con estas consideraciones, la masa contenida en la superficie gausiana se puede escribir como $M_d = \sigma S$ y por lo tanto, (42) se convierte en

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0^+} - \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0^-} = 4\pi G\sigma. \tag{47}$$

Ahora bien, encontrar un potencial gravitacional que satisfaga la condición (39) o (40) evita que los términos en la parte izquierda de la ecuación anterior se cancelen. Es decir, la condición (39) garantiza la existencia de una distribución discoidal de masa en el plano $z = 0$, la cual se puede describir por la densidad,

$$\sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\bigg|_{z=0^+}. \tag{48}$$

Esta última expresión se puede escribir en términos de la función U a partir de (38) como

$$\sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \frac{\partial U/\partial z}{k(1-U)}\bigg|_{z=0^+}. \tag{49}$$

La densidad de masa del halo (36) también se puede calcular a partir de U como

$$\rho(R,z) = \frac{U_{,R}^2 + U_{,z}^2}{4\pi G k(1-U)^2}. \tag{50}$$

Estas densidades de masa permiten describir sistemas galácticos compuestos por un disco delgado y un halo.

Una cantidad importante desde el punto de vista observacional es la velocidad circular de una partícula de prueba en el plano del disco ($z = 0$) a una distancia R del centro. Una expresión para esta velocidad se puede obtener fácilmente al igualar la fuerza gravitacional en dirección radial , $|F_R| = \partial\Phi/\partial R$, a la aceleración centrípeta v_c^2/R. Se puede demostrar que

$$|F_R| = \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{k^{-1}}{1-U} \frac{\partial U}{\partial R}, \tag{51}$$

de manera que la velocidad circular en el plano del disco toma la forma

$$v_c^2 = \frac{R}{k(1-U)} \frac{\partial U}{\partial R}\bigg|_{z=0}. \tag{52}$$

Es importante mencionar que la existencia de un disco delgado ($\sigma \neq 0$) también requiere que $\partial\Phi/\partial z$ evaluado en $z = 0^+$ sea diferente de cero. En los siguientes capítulos se presentan dos posibles soluciones a la ecuación de Poisson que satisfacen las condiciones para la existencia de una distribución discoidal de masa. Cada una de estas soluciones da origen a una familia distinta de discos delgados con halo con el potencial para describir sistemas galácticos reales.

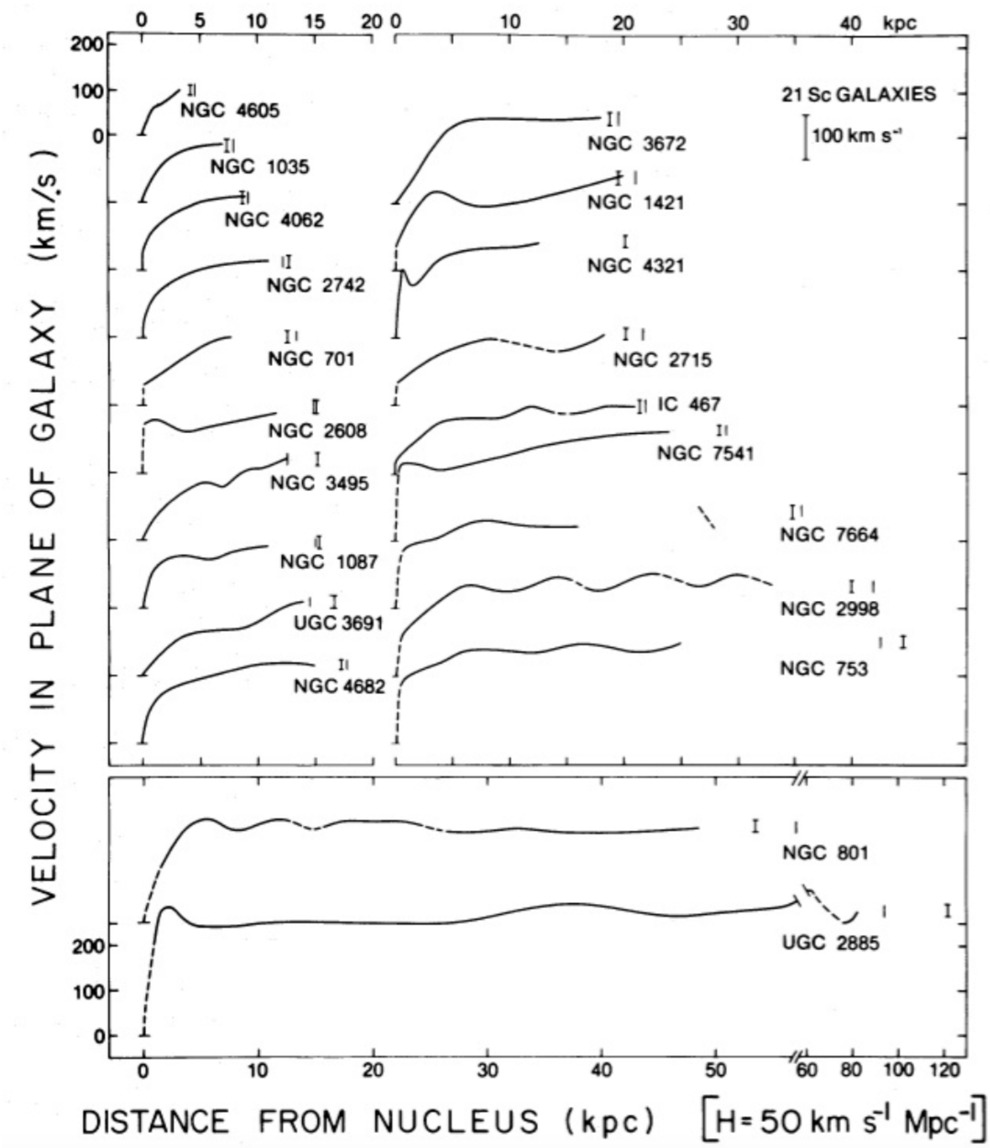

Figura 2. Curvas de rotación para una muestra de 21 galaxias espirales. Imagen tomada de **?**.

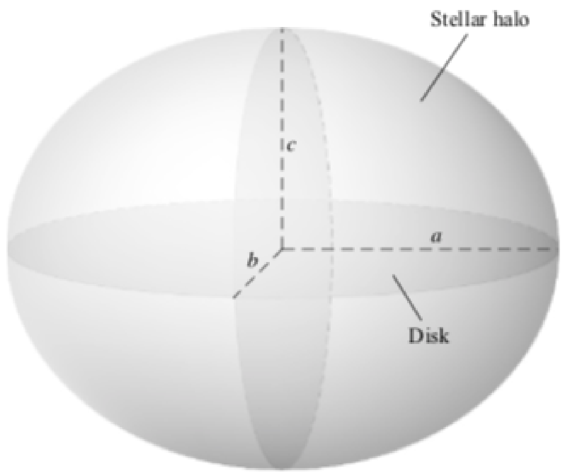

Figura 3. La forma general de un sistema esferoidal triaxial, donde se supone que tienen los tres ejes del esferoide. El disco galáctico es aproximadamente circular Carroll and Ostlie (2007).

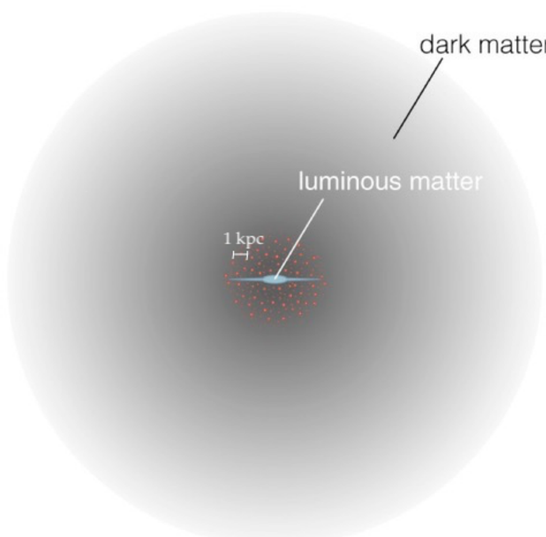

Figura 4. extensión del halo de materia oscura Carroll and Ostlie (2007).

Figura 5. Lente gravitacional (enfoque) de la luz de las estrellas producida por un MACHOs interviniente Carroll and Ostlie (2007).

4. Modelos Newtonianos de Kuzmin-Toomre.

4.1. Expansión multipolar del potencial gravitacional

Una expresión general para una expansión multipolar del potencial gravitacional en coordenadas esféricas es dada por

$$U = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m P_m(cos\theta)}{r^{m+1}} \tag{53}$$

donde P_m es el polinomio de Legendre, C_m son constantes y θ es el ángulo polar en coordenadas esféricas. Considerando la expansión del potencial gravitacional hasta el término $m = 3$, obtenemos

$$U(r,\theta) = -\frac{C_o}{r} - \frac{C_1 \cos\theta}{r^2} - \frac{C_2(3\cos^2\theta - 1)}{2r^3} - \frac{C_3(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)}{2r^4} - ... \tag{54}$$

al pasar de un sistema de coordenadas esféricas a un sistema de coordenadas cilíndricas, se emplean las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} \cos\theta &\to \frac{z}{r}, \\ r &\to \sqrt{R^2 + z^2}, \end{aligned} \tag{55}$$

el potencial gravitacional en coordenadas cilíndricas se puede expresar como

$$U(R,z) = -\frac{C_o}{(R^2+z^2)^{1/2}} - \frac{C_1 z}{(R^2+z^2)^{3/2}} - \frac{C_2(2z^2 - R^2)}{2(R^2+z^2)^{5/2}} - \frac{C_3 z(2z^2 - 3R^2)}{2(R^2+z^2)^{7/2}}. \tag{56}$$

Está claro que se pueden obtener diferentes soluciones para $\sigma(R)$, $\rho(R,z)$ y $v^2(R)$, dependiendo de la función $U(R,z)$. En la siguiente sección, obtendremos una nueva familia de modelos newtonianos de discos delgados con halo para una forma particular que satisface (39).

Tanto la densidad de la materia como la velocidad circular son propiedades físicas que describen el sistema de disco-halo. Estas propiedades están escritas en términos de la solución de la ecuación de Laplace U. Sin embargo, como vimos en el capitulo 2, $U(R,z)$ desaparece en el infinito y satisface la condición (39) para definir una densidad superficial de la materia en el plano $z=0$.

4.2. Modelo de Kuzmin-Toomre.

Para obtener una nueva familia de modelos, elegimos U como una solución a la ecuación de Laplace usando las coordenadas esféricas (r,θ,ϕ), donde r y θ están relacionados con las coordenadas cilíndricas (R, z) por la transformación de coordenadas $r^2 = R^2 + z^2$ y $\cos\theta = z/r$. Sin embargo, en esta forma U no tiene una simetría de reflexión con respecto al plano $z=0$, por lo tanto, no satisface las condiciones (39) y (40). Para resolver este problema, seguimos los trabajo de (Kuzmin (1956); Toomre (1963)), donde se aplica el método de desplazamiento, corte y reflexión para obtener el potencial gravitacional de un disco con las propiedades de simetría mencionadas anteriormente. El método se basa en la siguiente transformación,

$$z \to |z| + a, \tag{57}$$

donde a es una constante. Entonces (53) toma la forma,

$$U_m(R,z) = -\sum_{l=0}^{m} \frac{C_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), \tag{58}$$

donde $r^2 = R^2 + (|z|+a)^2$, $\cos\theta = (|z|+a)/r$, C_l son constantes arbitrarias, y $P(\cos\theta)$ son los polinomios de Legendre. Ahora, teniendo en cuenta la relación (38) entre el potencial gravitacional, $\Phi(R,z)$, y reemplazando la solución a la ecuación de Laplace presentada en (58) en (49), podemos escribir la densidad de masa del disco como,

$$\sigma_m(R) = \frac{1}{2\pi Gk} \frac{\sum_{l=0}^{m} \left[C_l(l+1)P_{l+1}(a/r_0)\right]/r_0^{l+2}}{\left[1+\sum_{l=0}^{m} C_l P_l(a/r_0)/r_0^{l+1}\right]}, \tag{59}$$

donde $r_0^2 = R^2 + a^2$. De manera similar, podemos escribir la densidad de masa del halo como,

$$\begin{aligned}\rho_m(R,z) = {} & \frac{1}{4\pi G} \frac{\left[\sum_{l=0}^{m} c_l r P'_{l+1}(\frac{|z|+a}{r})\right]^2}{\left[1+\sum_{l=0}^{m} c_l P_l(a/r)/r^{l+1}\right]^2} \\ & + \frac{1}{4\pi G} \frac{\left[\sum_{l=0}^{m} \left(c_l(l+1)P_{l+1}(\frac{|z|+a}{r})\right)/r^{l+2}\right]^2}{\left[1+\sum_{l=0}^{m} c_l P_l(a/r)/r^{l+1}\right]^2}.\end{aligned} \tag{60}$$

Basándonos en las soluciones para σ_m y ρ_m, y en el comportamiento matemático de los polinomios de Legendre, podemos concluir que la distribución de materia de los modelos de disco-halo presenta tres características generales: la densidad de masa del sistema siempre es positiva, su valor máximo se encuentra en el centro, es decir, en $z=0$ y $R=0$, y finalmente, se desvanece en el infinito. Además, con la ecuación (58), la velocidad circular (52) toma la forma

$$v_m(R) = \frac{R^2}{R^2+a^2} \frac{\sum_{l=0}^{m}(c_l/r_0^{l+1})P'_{l+1}(a/r_0)}{1+\sum_{l=0}^{m}(c_l/r_0^{l+1})P'_l(a/r_0)}. \tag{61}$$

En la siguiente sección analizaremos la densidad del halo, del disco y la velocidad circular en los tres primeros terminos del potencial gravitacional.

4.2.1. Expresiones analíticas de la densidad del halo, disco, y la velocidad circular para $m = 0, 1, 2$ en el modelo de Kuzmin-Toomre.. En esta sección, se presentarán los modelos que se obtuvieron al considerar la expansión multipolar del potencial hasta el término $m = 2$. Las expresiones analíticas para la densidad del halo y del disco, y la velocidad circular, correspondientes a las ecuaciones (59),(60),(61), estarían parametrizadas en términos de a con el fin de realizar un análisis gráfico sencillo de dichas cantidades . De acuerdo a lo anterior, se obtendrán las expresiones junto con sus correspondientes gráficas, para las superficies de densidad constante y las curvas de las variables físicas, correspondientes a diferentes valores de los parámetros utilizados.

4.2.2. Modelo $m = 0$. En el caso cuando $m = 0$, el potencial (58) toma la forma

$$U_0(R,z) = -\frac{C_o}{(R^2+(|z|+a)^2)^{1/2}}, \tag{62}$$

con este potencial 62, la densidad de materia del halo (60) cuando $m = 0$, y considerando ($\tilde{R} = R/a$),($\tilde{z} = z/a$),($\tilde{C}_0 = C_0/a$) y $\tilde{\rho}_m = [4\pi a^2 G]\rho_m$, se obtiene la ecuación para la densidad del halo como

$$\tilde{\rho}_0(R,z) = \frac{\tilde{C_0}^2}{k(\tilde{R}^2+(|\tilde{z}|+1)^2)\left[\sqrt{\tilde{R}^2+(|\tilde{z}|+1)^2}+\tilde{C}_0\right]^2}. \tag{63}$$

En el caso de la densidad del disco (59), cuando U es de la forma (62), y parametrizando $\tilde{\sigma}_0 = Ga\sigma_0$, obtenemos la expresion para la densidad del disco, cuando $z = 0$

$$\tilde{\sigma}_0(R) = \frac{1}{2\pi k}\frac{\tilde{C}_0}{(\tilde{R}^2+1)(\sqrt{\tilde{R}^2+1}+\tilde{C}_0)}, \tag{64}$$

la densidad superficial que se presenta esta normalizada, es decir el disco de materia que se extiende en el intervalo de $0 \leq \tilde{R} \leq 1$ en el plano $z = 0$. Cabe resaltar que la notación $\tilde{R} = R/a$ muestra el caracter adimensional de la coordenada radial y adémas muestra el escalamiento de esta coordenada con respecto al radio del disco a.

La última cantidad física que queremos calcular, es la velocidad circular, debido a su relevancia astrofísica. Las expresiones analíticas que describen la velocidad de una partícula que se mueve en órbitas circulares en el plano del disco se pueden obtener, para los primeros tres modelos, eligiendo $m = 0,1,2$ en la ecuación (61), podemos hallar $v^2(R)$ derivado de (52) con respecto al radio R cuando $m = 0$ y utilizando el potencial (62) con las parametrizaciones mencionadas anteriormente , obtenemos

$$v_0^2(R) = \frac{\tilde{C}_0\tilde{R}^2}{k(\tilde{R}^2+1)(\tilde{C}_0+(\tilde{R}^2+1)^{1/2})}. \tag{65}$$

4.2.3. Modelo $m = 1$. Reemplazando $m = 1$ en la ecuación (58), obtenemos

$$U_1(R,z) = -\frac{C_0}{\sqrt{R^2 + (|z|+a)^2}} - \frac{C_1 z}{(R^2 + (|z|+a)^2)^{3/2}}, \tag{66}$$

En el caso cuando $m = 1$, la densidad del halo (60) toma la forma

$$\rho_1(R,z) = \frac{r(R,z) + r_1(R,z)}{4\pi G k r_2(R,z)}, \tag{67}$$

donde

$$r(R,z) = \left[\frac{C_0 R}{(R^2 + (|z|+a)^2)^{3/2}} + \frac{3C_1 R(|z|+a)}{(R^2 + (|z|+a)^2)^{5/2}}\right]^2, \tag{68}$$

$$r_1(R,z) = \left[\frac{C_0 z(|z|+a)}{|z|(R^2 + (|z|+a)^2)^{3/2}} - \frac{C_1 z}{|z|(R^2 + (|z|+a)^2)^{3/2}} + \frac{3C_1 z(|z|+a)^2}{|z|(R^2 + (|z|+a)^2)^{5/2}}\right]^2, \tag{69}$$

$$r_2(R,z) = \left[\frac{C_0}{\sqrt{R^2 + (|z|+a)^2}} + \frac{C_1(|z|+a)}{(R^2 + (|z|+a)^2)^{3/2}} + 1\right]^2, \tag{70}$$

teniendo en cuenta los valores de las constantes $\tilde{C}_0 = C_0/a$, $\tilde{C}_1 = C_1/a^2$ y las utilizadas en $\tilde{\rho}_0$, obtenemos la ecuación de la densidad del halo cuando $m = 1$

$$\tilde{r}(R,z) = \frac{\tilde{R}^2 \left[\tilde{C}_0(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2 + 1) + |\tilde{z}|(2\tilde{C}_0 + 3\tilde{C}_1) + 3\tilde{C}_1\right]^2}{a^2(\tilde{R}^2 + (|\tilde{z}|+1)^2)^5}, \tag{71}$$

$$\tilde{r}_1(R,z) = \frac{\left[\tilde{R}^2(\tilde{C}_0(|\tilde{z}|+1) - \tilde{C}_1) + |\tilde{z}|(\tilde{C}_0(|\tilde{z}|^2+3) + 4\tilde{C}_1) + \tilde{z}^2(3\tilde{C}_0 + 2\tilde{C}_1) + \tilde{C}_0 + 2\tilde{C}_1\right]^2}{a^2(\tilde{R}^2 + (|\tilde{z}|+1)^2)^5}, \quad (72)$$

$$\tilde{r}_2(R,z) = \frac{\left[(\tilde{R}^2 + (|\tilde{z}|+1)^2)^{3/2} + |\tilde{z}|(2\tilde{C}_0 + \tilde{C}_1) + \tilde{C}_0(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2 + 1) + \tilde{C}_1\right]^2}{(\tilde{R}^2 + (|\tilde{z}|+1)^2)^3}, \quad (73)$$

por tanto la densidad del halo parametrizado $\tilde{\rho}_1 = (4\pi G a^4/M)\rho_1$ es de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_1(R,z) = &\frac{\left[\tilde{C}_0\tilde{R}^3 + \tilde{Z}(\tilde{C}_0\tilde{R}\tilde{Z} + 3\tilde{C}_1\tilde{R})\right]^2}{k(X)^7\left[(X)^{3/2} + \tilde{C}_0(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2 + 1) + |\tilde{z}|(\tilde{C}_1 + 2\tilde{C}_0) + \tilde{C}_1\right]^2} \\ &+ \frac{\left[\tilde{C}_0\xi(\tilde{R}^2 + \tilde{Z}^2 - \tilde{C}_1(\tilde{R}^2 - 2\tilde{Z}^2))^2\right]^2}{k(X)^7\left[(X)^{3/2} + \tilde{C}_0(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2 + 1) + |\tilde{z}|(\tilde{C}_1 + 2\tilde{C}_0) + \tilde{C}_1\right]^2}.\end{aligned} \quad (74)$$

donde $\tilde{Z} = (|\tilde{z}|+1), X = \tilde{R}^2 + (\tilde{Z})^2$

Ahora procedemos a calcular la expresión matemática que describe la densidad del disco (59), es claro notar que cuando realizamos la derivada del potencial U respecto de z, y la sustracción del denominador de la Ec. 48 y luego evaluamos en $z = 0$, está solo depende de la coordenada radial, como es lo esperado y lo obtenido en la literaruta Kuzmin (1956). A continuación se muestra la expresión matemática para la densidad del disco que se obtiene con la parametrización $\tilde{\sigma}_1 = Ga\sigma_1$

$$\tilde{\sigma}_1 = -\frac{\tilde{C}_0(\tilde{R}^2+1) + \tilde{C}_1(\tilde{R}^2-2)}{2\pi k(\tilde{R}^2+1)((\tilde{R}^2+1)^{3/2} + \tilde{C}_0(\tilde{R}^2+1) + \tilde{C}_1)}. \quad (75)$$

Por último procederemos a calcular la velocidad circular para este caso y bajo las parametrizaciones utilizadas anteriormente. bajo dichos terminos, se mostrará su procedimiento aritmético

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial R}\right|_{z=0^+} = \frac{\tilde{C}_0\tilde{R}}{a(\tilde{R}^2+1)^{3/2}} + \frac{3\tilde{C}_1\tilde{R}_1}{a(\tilde{R}^2+1)^{5/2}}, \tag{76}$$

$$(1-U_2)|_{z=0^+} = \frac{(\tilde{R}^2+1)^{3/2}+\tilde{C}_0(\tilde{R}^2+1)+\tilde{c}_1}{2(\tilde{R}^2+1)^{3/2}}, \tag{77}$$

reemplazando (76) y (77) en (52), la velocidad circular será

$$v_1^2(R) = \frac{\tilde{C}_0\tilde{R}^2(\tilde{R}^2+1)+3\tilde{C}_1\tilde{R}^2}{k(\tilde{R}^2+1)((\tilde{R}^2+1)^{3/2}+\tilde{C}_0(\tilde{R}^2+1)+\tilde{C}_1)}. \tag{78}$$

4.2.4. Modelo $m = 2$. Ahora, la densidad de materia del halo (60) cuando $m = 2$

$$\rho_2 = \frac{r_3(R,z)+r_4(R,z)}{4\pi k r_5(R,z)}, \tag{79}$$

donde, y por medio de la parametrización de las expresiones y asumiendo $\tilde{C}_2 = C_2/a^3$,$\tilde{C}_1 = C_1/a^2$, $\tilde{C}_0 = C_0/a$, por tanto

$$\tilde{r}_3 = \frac{1}{a^2}\left[\frac{3\tilde{R}\tilde{C}_1(|\tilde{z}|+1)}{(\tilde{R}^2+(|\tilde{z}|+1)^2)^{5/2}} - \frac{3\tilde{C}_2\tilde{R}(R^2-2(|\tilde{z}|+1)^2)}{2(\tilde{R}^2+(|\tilde{z}|+1)^2)^{7/2}} + \frac{\tilde{C}_0\tilde{R}}{(\tilde{R}^2+(|\tilde{z}|+1)^2)^{3/2}}\right]^2, \tag{80}$$

$$\tilde{r}_4 = \frac{1}{a^2}\left[\frac{3\tilde{C}_2\tilde{z}(|\tilde{z}|+1)(3\tilde{R}^2-2(|\tilde{z}|+1)^2)}{2|\tilde{z}|(\tilde{R}^2+(|\tilde{z}|+1)^2)^{7/2}} - \frac{\tilde{C}_1\tilde{z}(\tilde{R}^2-2(|\tilde{z}|+1)^2)}{|\tilde{z}|(\tilde{R}^2+(|\tilde{z}|+1)^2)^{5/2}} + \frac{\tilde{C}_0\tilde{z}(|\tilde{z}|+1)}{|\tilde{z}|(\tilde{R}^2+(|\tilde{z}|+1)^2)^{3/2}}\right]^2, \tag{81}$$

$$\tilde{r}_5 = \left[1 + \frac{\tilde{C}_0}{\sqrt{\tilde{R}^2+(|\tilde{z}|+1)}} - \frac{\tilde{C}_2(\tilde{R}^2-2(|\tilde{z}|+1)^2)}{2(\tilde{R}^2+(|\tilde{z}|+1)^2)^{5/2}} + \frac{\tilde{C}_1(|\tilde{z}|+1)}{(\tilde{R}^2+(|\tilde{z}|+1)^2)^{3/2}}\right]^2, \tag{82}$$

simplificando, y teniendo en cuenta $\tilde{R} = R/a$, $\tilde{z} = z/a$ y $\tilde{\rho}_2 = (4\pi G a^4/M)\rho_2$ la densidad de masa del halo cuando $m = 2$ es de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_2(R,z) = &\frac{\left[\tilde{C}_0\tilde{R}(X)^{3/2} + 3\tilde{C}_1\tilde{R}(\tilde{Z})(X) - 3\tilde{C}_2\tilde{R}^3\right]^2}{k(X)\left[2\tilde{C}_0(X)^2 - 2\tilde{C}_1(\tilde{Z})(X) - \tilde{C}_2(\tilde{R}^2-2(\tilde{Z})^2) + 2(X)^{5/2}\right]^2} \\ &+ \frac{\left[2\tilde{C}_0(\tilde{Z}) + 2\tilde{C}_1(\tilde{R}^2+2(\tilde{Z})^2) - 3\tilde{C}_2(\tilde{Z})(3\tilde{R}^2-2(\tilde{Z})^2)\right]^2}{k(X)\left[2\tilde{C}_0(X)^2 - 2\tilde{C}_1(\tilde{Z})(X) - \tilde{C}_2(\tilde{R}^2-2(\tilde{Z})^2) + 2(X)^{5/2}\right]^2},\end{aligned} \tag{83}$$

con $\tilde{Z} = |\tilde{z}| + 1$, $X = \tilde{R}^2 + (\tilde{Z})^2$.

Ahora, para poder obtener la expresión de la densidad del disco es necesario tener en cuenta U cuando $m = 2$ y la parametrización necesaria en este caso $\tilde{R} = R/a$, $\tilde{C}_2 = C_2/a^3$, $\tilde{C}_1 = C_1/a^2$, $\tilde{C}_0 = C_0/a$ por tanto U es de la forma

$$U_2 = -\frac{C_0}{\sqrt{R^2+(|z|+a)^2}} - \frac{C_1 z}{(R^2+(|z|+a)^2)^{3/2}} - \frac{C_2(2z^2-R^2)}{2(R^2+(|z|+a)^2)^{5/2}}, \tag{84}$$

donde la derivada de U respecto de z y evaluando en $z = 0$, está determinada por

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial z}\right|_{z=0^+} = \frac{\tilde{C}_0}{a(\tilde{R}^2+1)^{3/2}} - \frac{\tilde{C}_1}{a(\tilde{R}^2+1)^{3/2}} - \frac{5\tilde{R}^2\tilde{C}_2}{2a(\tilde{R}^2+1)^{7/2}}, \tag{85}$$

de igual forma la sustracción del denominador en (48) y evaluando en $z = 0$, es

$$(1-U_2)|_{z=0^+} = \frac{2(\tilde{R}^2+1)^{5/2} + 2\tilde{C}_0\tilde{R}^4 + \tilde{R}^2(4\tilde{C}_0 - \tilde{C}_2) + 2\tilde{C}_0}{2(\tilde{R}^2+1)^{5/2}}, \tag{86}$$

por tanto reemplazando (85) y (86) en (48), bajo la parametrización de $\tilde{\sigma}_2 = Gka\sigma_2$, obtenemos la expresión para la densidad del disco cuando $m = 2$

$$\tilde{\sigma}_2(R) = \frac{1}{2\pi k}\frac{2\tilde{R}^4(\tilde{C}_1 - \tilde{C}_0) + \tilde{R}^2(9\tilde{C}_2 - 2\tilde{C}_1 - 4\tilde{C}_0) - 2(\tilde{C}_0 + 2\tilde{C}_1 + 3\tilde{C}_2)}{2(\tilde{R}^2+1)^{5/2} + 2\tilde{C}_0\tilde{R}_4 + \tilde{R}^2(2\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 + 4\tilde{C}_0) + 2(\tilde{C}_2 + \tilde{C}_0)}. \tag{87}$$

Por ultimo, la expresión para la velocidad circular, ecuación (52), se obtiene reemplazando el potencial (84) en la ecuación (85), bajo las parametrizaciones utilizadas en este caso, y calculando la derivada respecto al radio R, obtenemos

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial R}\right|_{z=0^+} = \frac{\tilde{C}_0\tilde{R}}{a(\tilde{R}^2+1)^{3/2}} + \frac{3\tilde{C}_1\tilde{R}}{a(\tilde{R}^2+1)^{5/2}} + \frac{\tilde{C}_2\tilde{R}}{a(\tilde{R}^2+1)^{5/2}} - \frac{5\tilde{C}_2\tilde{R}(\tilde{R}-2)}{2a(\tilde{R}^2+1)^{7/2}}, \tag{88}$$

$$(1-U_2)|_{z=0^+} = \frac{(\tilde{R}^2+1)^{3/2} + \tilde{C}_0(\tilde{R}^2+1) + \tilde{C}_1}{(\tilde{R}^2+1)^{3/2}}, \tag{89}$$

por tanto la velocidad circular dependiente de R, es

$$v_2^2(R) = \frac{\tilde{R}\left(\tilde{C}_0\tilde{R} + \frac{3\tilde{C}_2\tilde{R}}{\tilde{R}^2+1} - \frac{5\tilde{C}_2\tilde{R}(\tilde{R}^2-2)}{2(\tilde{R}^2+1)^2}\right)}{k((\tilde{R}^2+1)^{3/2} + \tilde{C}_0(\tilde{R}^2+1) + \tilde{C}_1)}. \tag{90}$$

4.3. Análisis del modelo de Kuzmin-Toomre

En la siguiente sección se analizarán y graficarán las ecuaciones estudiadas y obtenidas en el capítulo (3.1) del modelo de Kuzmin-Toomre, esto se logró considerando un disco delgado y un halo esferoidal, bajo un potencial gravitacional impuesto por la ecuación (58) que cumple las condiciones (57).

De acuerdo con lo anterior, se presentarán las gráficas correspondientes a cada modelo ($m = 0, 1, 2$) para las superficies de densidad del halo, del disco y las curvas de rotación de las variables físicas estudiadas, con sus parámetros y constantes utilizadas.

4.3.1. Modelo $m = 0$. Reemplazando los valores de las constantes $\tilde{C}_0 = 2$ y $k =$[7.9, 8.9, 9.9, 10.9, 15.9, 20.9] en la ecuación (58) y en la densidad del disco (64), obtenemos las expresiones matemáticas

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{01}(R) &= \frac{0.126583}{\pi(\tilde{R^2}+1)^{3/2}\left(\left(\frac{2}{(\tilde{R^2}+1)^{1/2}}\right)+1\right)},\\
\tilde{\sigma}_{02}(R) &= \frac{0.112359}{\pi(\tilde{R^2}+1)^{3/2}\left(\left(\frac{2}{(\tilde{R^2}+1)^{1/2}}\right)+1\right)},\\
\tilde{\sigma}_{03}(R) &= \frac{0.101010}{\pi(\tilde{R^2}+1)^{3/2}\left(\left(\frac{2}{(\tilde{R^2}+1)^{1/2}}\right)+1\right)},\\
\tilde{\sigma}_{04}(R) &= \frac{0.091743}{\pi(\tilde{R^2}+1)^{3/2}\left(\left(\frac{2}{(\tilde{R^2}+1)^{1/2}}\right)+1\right)},\\
\tilde{\sigma}_{05}(R) &= \frac{0.062893}{\pi(\tilde{R^2}+1)^{3/2}\left(\left(\frac{2}{(\tilde{R^2}+1)^{1/2}}\right)+1\right)},\\
\tilde{\sigma}_{06}(R) &= \frac{0.047847}{\pi(\tilde{R^2}+1)^{3/2}\left(\left(\frac{2}{(\tilde{R^2}+1)^{1/2}}\right)+1\right)},
\end{aligned}
\tag{91}
$$

Los perfiles de densidad de masa superficial del disco (91), que se muestran en la Figura 6, satisfacen las condiciones exigidas en la literatura para la distribución de materia de los discos delgados finitos. En la gráfica podemos apreciar que los perfiles son cero en el infinito y sus valores máximos están en el centro del disco. Podemos modificar el máximo de $\tilde{\sigma}_0$ cambiando los valores de las constantes $\tilde{C}_0$ y k. En el modelo, la curva superior (azul) corresponde al valor inferior de la constante $k =$7.9 , mientras que la curva inferior (aguamarina) corresponde al valor mayor de $k = 20.9$. En los perfiles de densidad de la Fig. 6, la mayor parte de la densidad se concentra en la región central del disco y disminuye rápidamente a medida que aumenta la relación R/a. Podemos ver que los valores de las constantes modifican la distribución de la materia en la galaxia, por lo que podemos obtener una solución en la que la mayor parte de la materia se concentra en una región central.

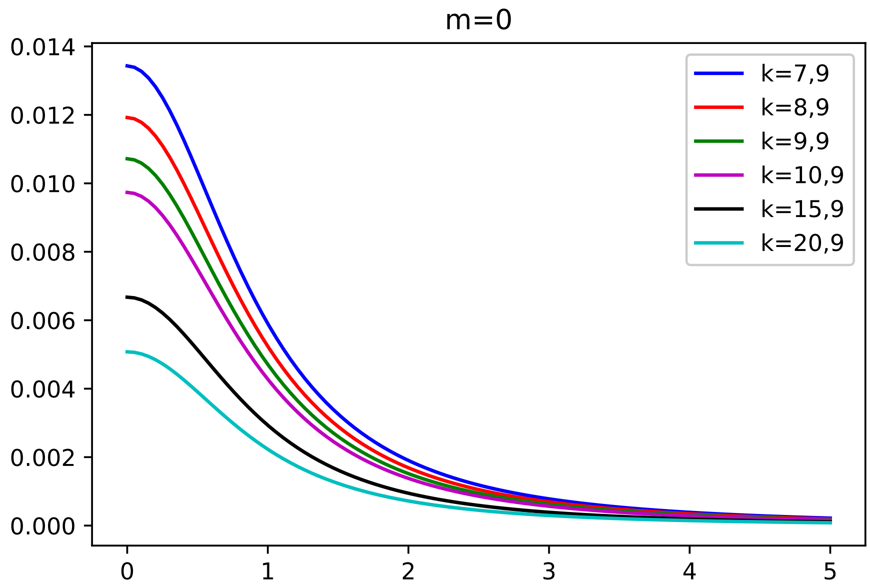

Figura 6. Densidad de masa superficial del disco $\tilde{\sigma}_0$ en función de R/a para el modelo $m = 0$ de la familia de soluciones.

Ahora, reemplazando los valores de las constantes en la densidad de masa del halo (74) con k =7.9

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{1}{7.9\pi\left(\tilde{R}^2 + 2|\tilde{z}| + \tilde{z}^2 + 1\right)\left((\tilde{R}^2 + 2|\tilde{z}| + \tilde{z}^2 + 1)^{1/2} + 2\right)^2}, \tag{92}$$

la densidad de materia del halo está presente en todo el espacio, para visualizar la ecuación (92) se utiliza contornos de densidad en el plano $\tilde{R}, \tilde{z}$, los cuales muestran un mapa topográfico, es decir, un mapa de alturas de la función ρ_0 que en nuestro caso la barra de colores nos lo indica. Estos contornos de halo son una distribución tridimensional de la materia que rodea el disco.

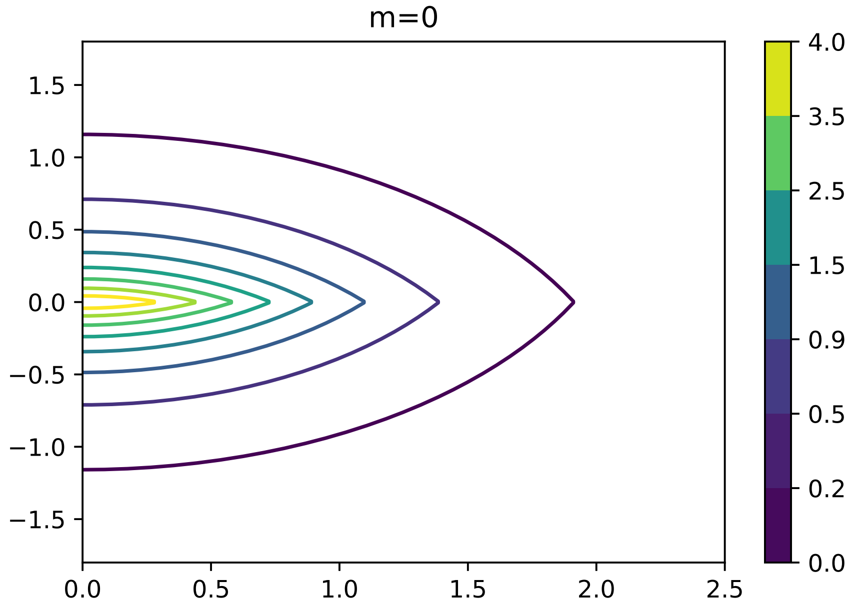

Figura 7. Contorno de densidad de masa del halo en función de R/a (eje horizontal) y z/a (eje vertical). Los contornos corresponden al modelo $m = 0$, con las constantes $\tilde{C}_0 = 2$ y $k = 7.9$.

En la Figura 7, gráficamos los contornos de densidad de masa del halo para soluciones con $m = 0$, y con valores de las constantes k =7.9 y $\tilde{C}_0$ =2. Según esta figura, la densidad de masa del halo es mayor cerca del disco, especialmente en el centro del sistema. También podemos observar que la densidad de masa decrece ligeramente mas rápido en la coordenada $\tilde{z}$ que en la coordenada radial $\tilde{R}$, presentando así un achatamiento a lo largo de la coordenada azial $\tilde{z}$. Aunque se extiende hasta el infinito, disminuye rápidamente con el aumento de $\tilde{R}$, este mismo comportamiento se puede apreciar en la Fig. 8, donde los autores muestra contornos de densidad del halo numérico para diferentes funciones.

La última expresión matemática y de gran importancia astrofísica, es la velocidad circular, la cual se obtienen usando las derivadas del potencial (58) en (61), y reemplazando los valores de las

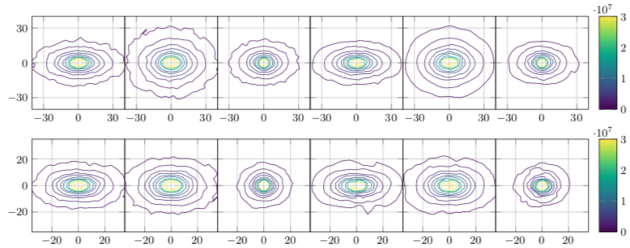

Figura 8. De izquierda a derecha: contornos de densidad en los tres planos principales del halo numérico original, luego contornos de densidad en los mismos tres planos principales del halo reconstruidos con funciones básicas hasta $n = 20$ y $l = 12$ Lilley et al. (2018b).

constantes $\tilde{C}_0 = 100, k = [5.9, 6.9, 7.9, 8.9, 10]$ por lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}
v_{01}^2 &= \frac{(16.9492\tilde{R}^2)}{((\tilde{R}^2+1)^{3/2}(100/(\tilde{R}^2+1)^{1/2}+1))},\\
v_{02}^2 &= \frac{(14.4928\tilde{R}^2)}{((\tilde{R}^2+1)^{3/2}(100/(\tilde{R}^2+1)^{1/2}+1))},\\
v_{03}^2 &= \frac{(12.6582\tilde{R}^2)}{((\tilde{R}^2+1)^{3/2}(100/(\tilde{R}^2+1)^{1/2}+1))},\\
v_{04}^2 &= \frac{(12.5\tilde{R}^2)}{((\tilde{R}^2+1)^{3/2}(100/(\tilde{R}^2+1)^{1/2}+1))},\\
v_{05}^2 &= \frac{(11.236\tilde{R}^2)}{((\tilde{R}^2+1)^{3/2}(100/(\tilde{R}^2+1)^{1/2}+1))},\\
v_{06}^2 &= \frac{(10\tilde{R}^2)}{((\tilde{R}^2+1)^{3/2}(100/(\tilde{R}^2+1)^{1/2}+1))}.
\end{aligned} \tag{93}$$

En la Figura 9 se gráficaron las curvas de rotación (65) en función de la coordenada radial $\tilde{R}$, para el mismo conjunto de constantes (k =5.9, 6.9, 7.9, 8.9, 10, $\tilde{C}_0 = 100$) que se usaron para obtener los perfiles de densidad de masa del disco. Esto nos permite comparar cualitativamente $\tilde{\sigma}_0$ con la velocidad circular, y establecer la relación entre la densidad de masa y el movimiento de una partícula de prueba. Para este modelo con $m = 0$ vemos que las curvas de rotación aumentan rápidamente

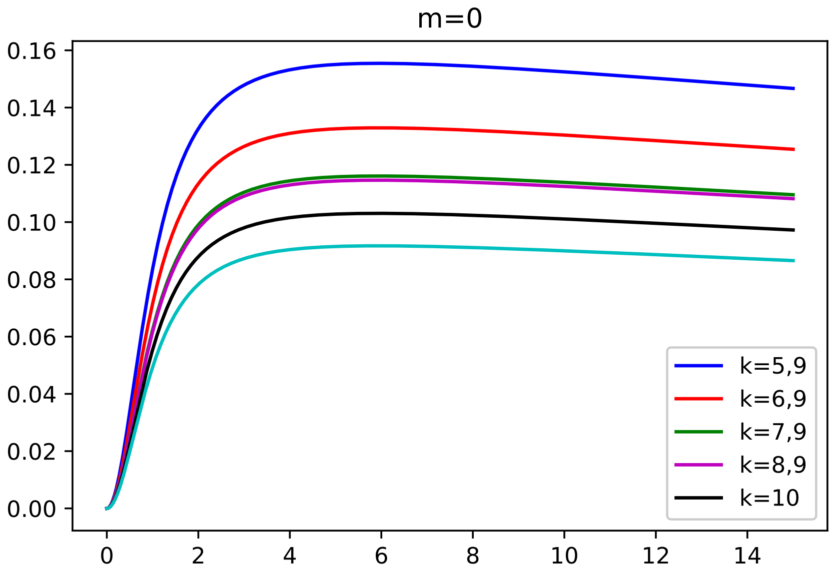

Figura 9. Dcurvas de rotación v_0^2 en función de R/a, para el primer modelo de la familia de soluciones. Estas curvas de rotación se obtienen con los mismos parámetros de la figura 4-1.

desde cero a un valor máximo en $\tilde{R} = 1$ (Región del disco), esto se debe particularmente al tipo de modelo de disco que escogimos, después de este valor, no se presenta un cambio significativo con la distancia $\tilde{R}$. Sin embargo, para algunos valores de las constantes, como en el caso de la curva azul con $k = 5.9$, presenta una disminución en la razón $\tilde{R}$ mayor que los presentados en las curvas (verde, magenta, negro y aguamarina) con los valores de $k = 7.9$ a $k = 10$.

4.3.2. Modelo $m = 1$. Reemplazando los valores de las constantes $\tilde{C_0} = 167$, $\tilde{C_1} = 46$ y $k = [292, 392, 492, 592, 792, 992]$ en la ecuación (58) y en la densidad del disco (75), obtenemos las expresiones matemáticas

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{11}(R) &= \frac{(121\tilde{R}^2+259)}{584(\pi(\tilde{R}^2+1)((\tilde{R}^2+1)^{3/2}+167\tilde{R}^2+213))},\\
\tilde{\sigma}_{12}(R) &= \frac{(121\tilde{R}^2+259)}{784(\pi(\tilde{R}^2+1)((\tilde{R}^2+1)^{3/2}+167\tilde{R}^2+213))},\\
\tilde{\sigma}_{13}(R) &= \frac{(121\tilde{R}^2+259)}{984(\pi(\tilde{R}^2+1)((\tilde{R}^2+1)^{3/2}+167\tilde{R}^2+213))},\\
\tilde{\sigma}_{14}(R) &= \frac{(121\tilde{R}^2+259)}{1184(\pi(\tilde{R}^2+1)((\tilde{R}^2+1)^{3/2}+167\tilde{R}^2+213))},\\
\tilde{\sigma}_{15}(R) &= \frac{(121\tilde{R}^2+259)}{1584(\pi(\tilde{R}^2+1)((\tilde{R}^2+1)^{3/2}+167\tilde{R}^2+213))},\\
\tilde{\sigma}_{16}(R) &= \frac{(121\tilde{R}^2+259)}{1984(\pi(\tilde{R}^2+1)((\tilde{R}^2+1)^{3/2}+167\tilde{R}^2+213))}.
\end{aligned}
\tag{94}
$$

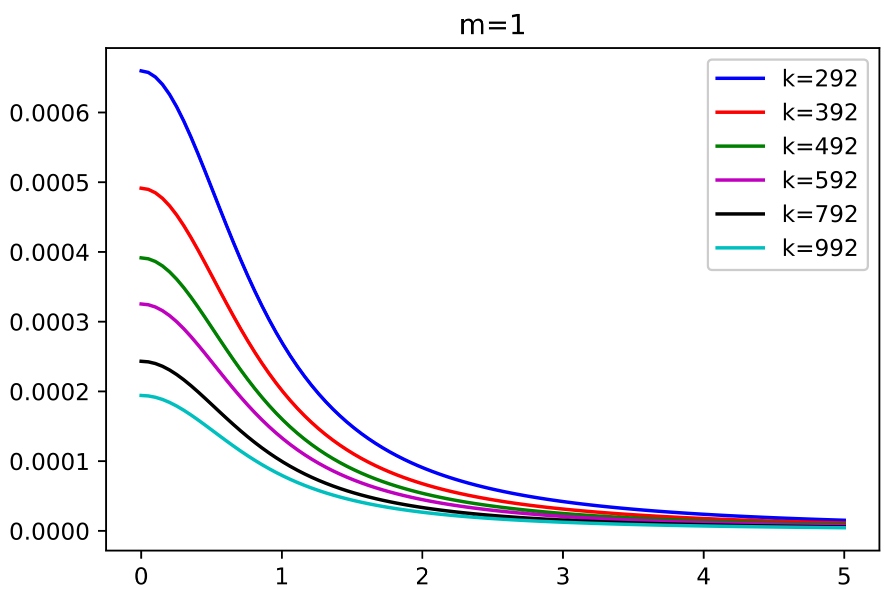

Figura 10. Densidad de masa superficial del disco $\tilde{\sigma}_1$ en función de R/a para el modelo $m = 1$ de la familia de soluciones.

Los perfiles de densidad de masa superficial del disco (94), que se muestran en la Figura 10, al igual que el modelo $m = 0$ presenta un máximo cerca al centro de la galaxia (Región $\tilde{R} \leq 1$ dentro del disco) y decae rápidamente a cero en el infinito, que es lo que se observa en la literatura, como por ejemplo en la Fig. 11 los autores muestran la densidad superficial del disco de Kalnajs, y en ella podemos observar el mismo comportamiento.

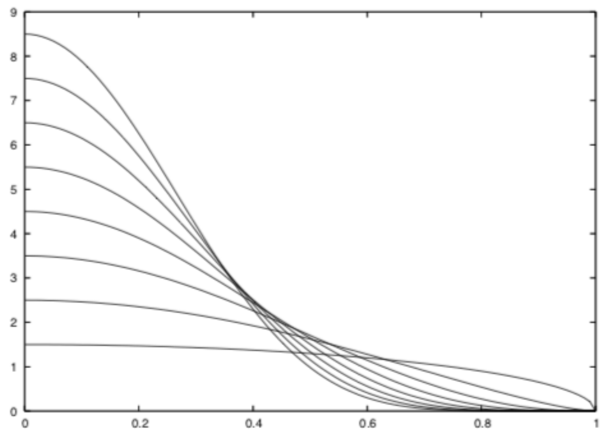

Figura 11. Densidad de superficie σ_m en función de $\tilde{R}$ para modelos de discos de Kalnajs generalizados con m = 1 (curva inferior) hasta m = 8 (curva superior). González and Reina (2006).

Ahora, reemplazando los valores de las constantes $\tilde{C}$ y k en la ecuación (74) se obtiene la expresión matemática

$$\tilde{\rho_1} = \frac{\left[\tilde{C}_0\tilde{R}\tilde{A}^{3/2} + 3\tilde{C}_1\tilde{R}\tilde{Z}\tilde{A} - 3\tilde{C}_2\tilde{R}^3\right]^2 + \left[2\left(\tilde{C}_0\tilde{Z} + \tilde{C}_1\tilde{A}\right) - 3\tilde{C}_2\tilde{Z}(3\tilde{R}^2 - 2\tilde{Z}^2)\right]^2}{k\tilde{A}^2\left[2\left(\tilde{C}_0\tilde{A}^2 - \tilde{C}_1\tilde{Z}\tilde{A}\right)\right) - \tilde{C}_2\tilde{B} + 2\tilde{A}^{5/2}\right]^2}. \tag{95}$$

con $\tilde{Z} = |\tilde{z}| + 1$, $\tilde{A} = \tilde{R}^2 + \tilde{Z}^2$, $\tilde{B} = \tilde{R}^2 - 2\tilde{Z}^2$, y $\tilde{\rho}_1 = [4\pi a^2 G]\rho_1$.

En los perfiles de masa del halo presentados en la Figura 12, se puede observar que la coordenada $\tilde{R}$ presenta un mayor aumento en comparación con la coordenada axial $\tilde{z}$, este comportamiento

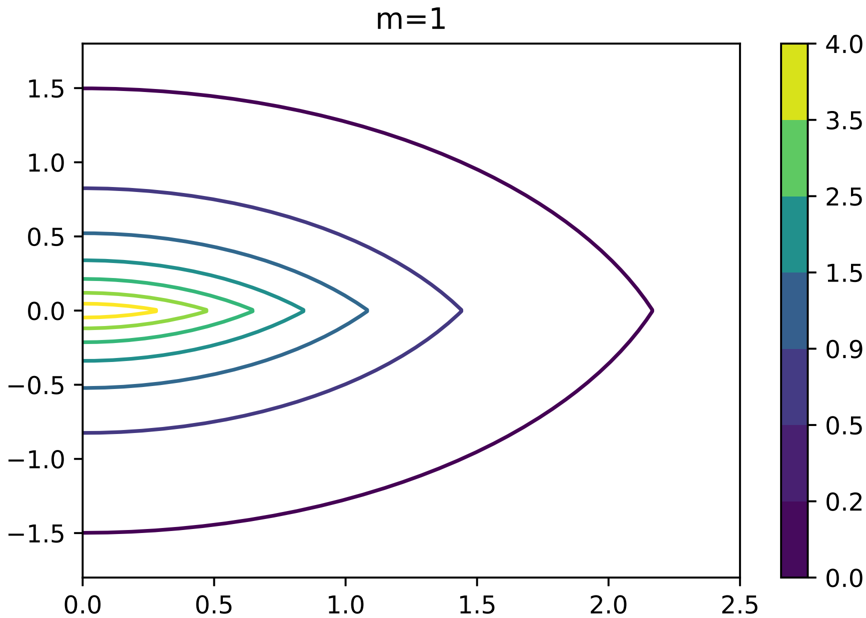

Figura 12. Densidad de masa del halo $\tilde{\rho}_1$ en función de R/a y z/a para el modelo $m = 1$ de la familia de soluciones.

conlleva a que la densidad de masa del halo sea oblata. En las barras de colores podemos observar los perfiles con mayor masa y a medida que oscurecen los colores va decreciendo el valor de la densidad a medida que crece $\tilde{R}$. De igual manera podemos resaltar que la mayor distribución de masa del halo se encuentra dentro de la región del disco.

La última cantidad física que queremos calcular, debido a su relevancia astrofísica, es la velocidad circular. Estas expresiones analíticas son importantes, debido a que describen la velocidad de una partícula que se mueve en órbitas circulares en el plano del disco, bajo las siguientes constantes

$\tilde{C_0} = 100, \tilde{C_1} = -20, \tilde{C_2} = 90$, k =[18.12, 19.12, 20.12, 21.12, 22.12, 25.12].

$$
\begin{aligned}
v_{11}^2 &= \frac{(\tilde{R}((167\tilde{R})/(\tilde{R^2}+1)^{3/2}+(138\tilde{R})/(\tilde{R^2}+1)^{5/2}))}{292((167/(\tilde{R^2}+1)^{1/2}+46/(\tilde{R^2}+1)^{3/2}+1))},\\
v_{12}^2 &= \frac{(\tilde{R}((167\tilde{R})/(\tilde{R^2}+1)^{3/2}+(138\tilde{R})/(\tilde{R^2}+1)^{5/2}))}{392((167/(\tilde{R^2}+1)^{1/2}+46/(\tilde{R^2}+1)^{3/2}+1))},\\
v_{13}^2 &= \frac{(\tilde{R}((167\tilde{R})/(\tilde{R^2}+1)^{3/2}+(138\tilde{R})/(\tilde{R^2}+1)^{5/2}))}{492((167/(\tilde{R^2}+1)^{1/2}+46/(\tilde{R^2}+1)^{3/2}+1))},\\
v_{14}^2 &= \frac{(\tilde{R}((167\tilde{R})/(\tilde{R^2}+1)^{3/2}+(138\tilde{R})/(\tilde{R^2}+1)^{5/2}))}{592((167/(\tilde{R^2}+1)^{1/2}+46/(\tilde{R^2}+1)^{3/2}+1))},\\
v_{15}^2 &= \frac{(\tilde{R}((167\tilde{R})/(\tilde{R^2}+1)^{3/2}+(138\tilde{R})/(\tilde{R^2}+1)^{5/2}))}{692((167/(\tilde{R^2}+1)^{1/2}+46/(\tilde{R^2}+1)^{3/2}+1))},\\
v_{16}^2 &= \frac{(\tilde{R}((167\tilde{R})/(\tilde{R^2}+1)^{3/2}+(138\tilde{R})/(\tilde{R^2}+1)^{5/2}))}{800((167/(\tilde{R^2}+1)^{1/2}+46/(\tilde{R^2}+1)^{3/2}+1))}.
\end{aligned}
\tag{96}
$$

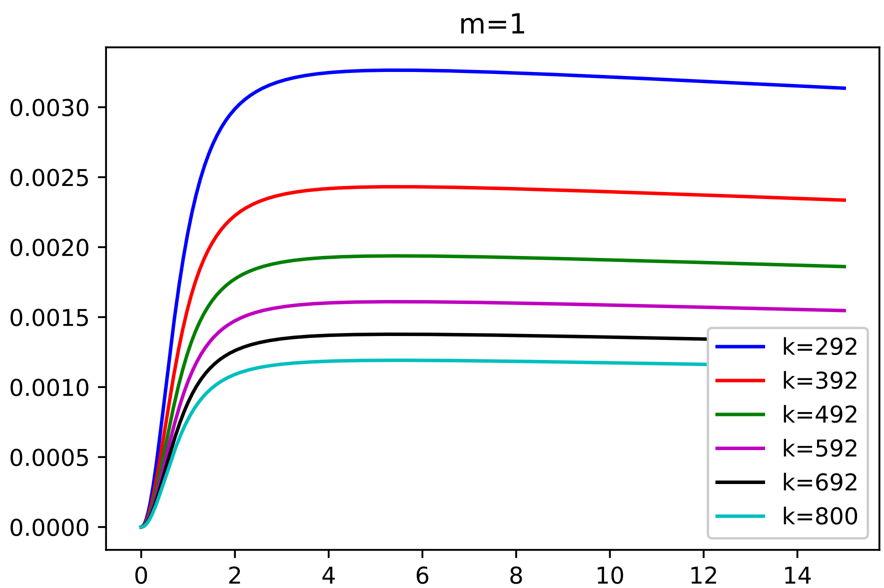

Figura 13. curvas de rotación v_1^2 en función de R/a, para el segundo modelo de la familia de soluciones.

En la Figura 13 las curvas de rotación presentan un incremento rapido en la región del disco $\tilde{R} \leq 1$ hasta llegar al pico característico de estos modelos, pero podemos observar que en la región fuera del disco $\tilde{R} \geq 1$ las curvas de rotación tienden a mantenerse constantes, como se observa en la curva (aguamarina) cuya contante $k = 800$ presentando una región casi plana.

4.3.3. Modelo $m = 2$. Reemplazando los valores de las constantes $\tilde{C}_0 = 100$, $\tilde{C}_1 = -20$, $\tilde{C}_2 = 90$ y k =[15.12, 18.12, 19.12, 20.12, 21.12, 40.12, 70.12, 90.12] en la ecuación (58) y en la densidad del disco (87), obtenemos las expresiones matemáticas

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{21}(R) &= \frac{(0.0552)5\tilde{R}^2(20\tilde{R}^4+\tilde{R}^2+116)}{(Ra(\tilde{R}^4(Ra)^{1/2}+2\tilde{R}^2(Ra)^{1/2}+(Ra)^{1/2}+100\tilde{R}^4+135\tilde{R}^2+170))},\\
\tilde{\sigma}_{22}(R) &= \frac{(0.0523)5\tilde{R}^2(20\tilde{R}^4+\tilde{R}^2+116)}{(Ra(\tilde{R}^4(Ra)^{1/2}+2\tilde{R}^2(Ra)^{1/2}+(Ra)^{1/2}+100\tilde{R}^4+135\tilde{R}^2+170))},\\
\tilde{\sigma}_{23}(R) &= \frac{(0.0497)5\tilde{R}^2(20\tilde{R}^4+\tilde{R}^2+116)}{(Ra(\tilde{R}^4(Ra)^{1/2}+2\tilde{R}^2(Ra)^{1/2}+(Ra)^{1/2}+100\tilde{R}^4+135\tilde{R}^2+170))},\\
\tilde{\sigma}_{24}(R) &= \frac{(0.0474)5\tilde{R}^2(20\tilde{R}^4+\tilde{R}^2+116)}{(Ra(\tilde{R}^4(Ra)^{1/2}+2\tilde{R}^2(Ra)^{1/2}+(Ra)^{1/2}+100\tilde{R}^4+135\tilde{R}^2+170))},\\
\tilde{\sigma}_{25}(R) &= \frac{(0.0452)5\tilde{R}^2(20\tilde{R}^4+\tilde{R}^2+116)}{(Ra(\tilde{R}^4(Ra)^{1/2}+2\tilde{R}^2(Ra)^{1/2}+(Ra)^{1/2}+100\tilde{R}^4+135\tilde{R}^2+170))},\\
\tilde{\sigma}_{26}(R) &= \frac{(0.0398)5\tilde{R}^2(20\tilde{R}^4+\tilde{R}^2+116)}{(Ra(\tilde{R}^4(Ra)^{1/2}+2\tilde{R}^2(Ra)^{1/2}+(Ra)^{1/2}+100\tilde{R}^4+135\tilde{R}^2+170))},
\end{aligned}
\tag{97}
$$

donde $Ra = \tilde{R}^2 + 1$.

Ahora, reemplazando los valores de las constantes $\tilde{C}$ y k en la ecuación (83) se obtiene la expresión matemática para la densidad de masa del halo.

$$
\tilde{\rho}_2 = \frac{\left[\tilde{C}_0\tilde{R}\tilde{A}^{3/2} + 3\tilde{C}_1\tilde{R}\tilde{Z}\tilde{A} - 3\tilde{C}_2\tilde{R}^3\right]^2}{k\tilde{A}^2\left[2\tilde{A}\beta - \tilde{C}_2\tilde{B} + 2\tilde{A}^{5/2}\right]^2} + \frac{\left[2\left(\tilde{C}_0\tilde{Z} + \tilde{C}_1\tilde{A}\right) - 3\tilde{C}_2\tilde{Z}\tilde{D}\right]^2}{k\tilde{A}^2\left[2\tilde{A}\beta - \tilde{C}_2\tilde{B} + 2\tilde{A}^{5/2}\right]^2}, \tag{98}
$$

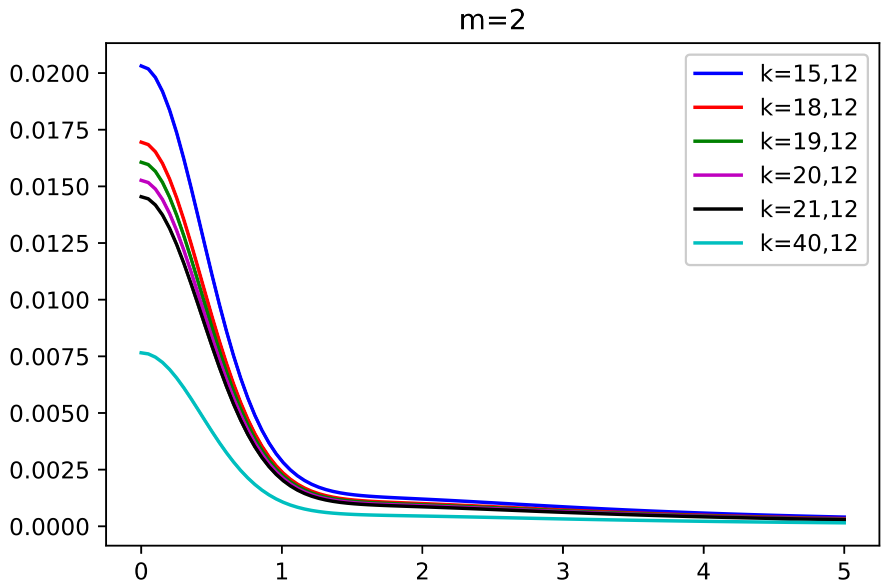

Figura 14. Densidad de masa superficial del disco $\tilde{\sigma}_2$ en función de R/a para el modelo $m = 2$ de la familia de soluciones.

donde $\beta = \left(\tilde{C}_0\tilde{A}^2 - \tilde{C}_1\tilde{Z}\right)$.

De acuerdo con la Figura 14 los perfiles de densidad del disco presentan un comportamiento mas pronunciado en comparación con los modelos $m = 0$ y $m = 1$, dentro del disco $\tilde{R} \leq 1$ se presenta la mayor cantidad de materia concentrada en dicha región, y fuera de este los perfiles de densidad son prácticamente nulos.

A continuación se presentan las ecuaciones de las curvas de rotación bajo las constantes especificadas anteriormente, estas son reemplazadas en la ecuación (61) calculada en el capitulo 3,

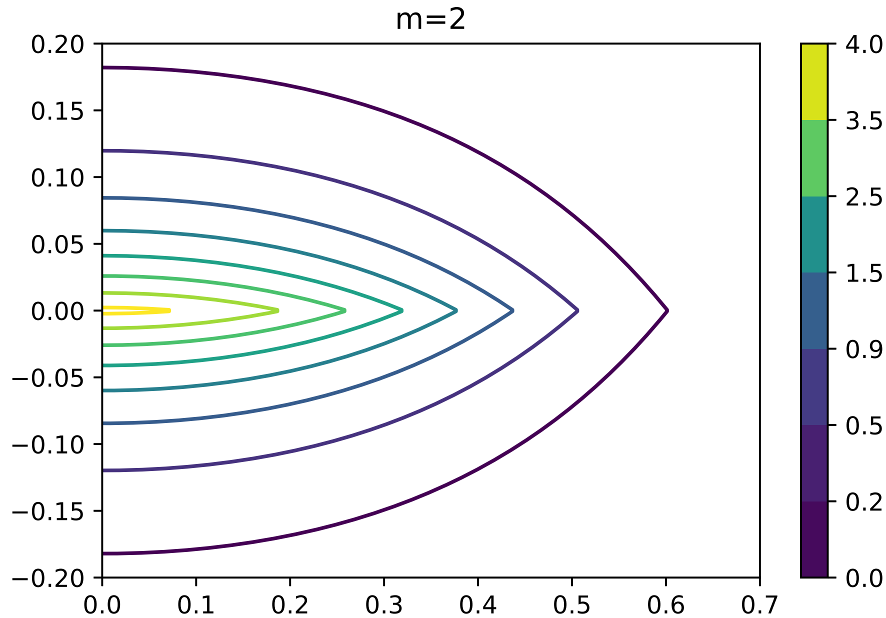

Figura 15. Densidad de masa del halo $\tilde{\rho}_2$ en función de R/a y z/a para el modelo $m = 2$ de la familia de soluciones.

obteniendo como resultado

$$
\begin{aligned}
v_{21}^2 &= \frac{(0.0552)5\tilde{R}^2(20\tilde{R}^4+\tilde{R}^2+116)}{(Ra(\tilde{R}^4(Ra)^{1/2}+2\tilde{R}^2(Ra)^{1/2}+(Ra)^{1/2}+100\tilde{R}^2+135\tilde{R}^2+170))},\\
v_{22}^2 &= \frac{(0.0523)5\tilde{R}^2(20\tilde{R}^4+\tilde{R}^2+116)}{(Ra(\tilde{R}^4(Ra)^{1/2}+2\tilde{R}^2(Ra)^{1/2}+(Ra)^{1/2}+100\tilde{R}^2+135\tilde{R}^2+170))},\\
v_{23}^2 &= \frac{(0.0497)5\tilde{R}^2(20\tilde{R}^4+\tilde{R}^2+116)}{(Ra(\tilde{R}^4(Ra)^{1/2}+2\tilde{R}^2(Ra)^{1/2}+(Ra)^{1/2}+100\tilde{R}^2+135\tilde{R}^2+170))},\\
v_{24}^2 &= \frac{(0.04735)5\tilde{R}^2(20\tilde{R}^4+\tilde{R}^2+116)}{(Ra(\tilde{R}^4(Ra)^{1/2}+2\tilde{R}^2(Ra)^{1/2}+(Ra)^{1/2}+100\tilde{R}^2+135\tilde{R}^2+170))},\\
v_{25}^2 &= \frac{(0.04521)5\tilde{R}^2(20\tilde{R}^4+\tilde{R}^2+116)}{(Ra(\tilde{R}^4(\tilde{R}^2+1)^{1/2}+2\tilde{R}^2(Ra)^{1/2}+(Ra)^{1/2}+100\tilde{R}^2+135\tilde{R}^2+170))},\\
v_{26}^2 &= \frac{(0.03981)5\tilde{R}^2(20\tilde{R}^4+\tilde{R}^2+116)}{(Ra(\tilde{R}^4(Ra)^{1/2}+2\tilde{R}^2(Ra)^{1/2}+(Ra)^{1/2}+100\tilde{R}^2+135\tilde{R}^2+170))},
\end{aligned}
\tag{99}
$$

donde $Ra = \tilde{R}^2 + 1$

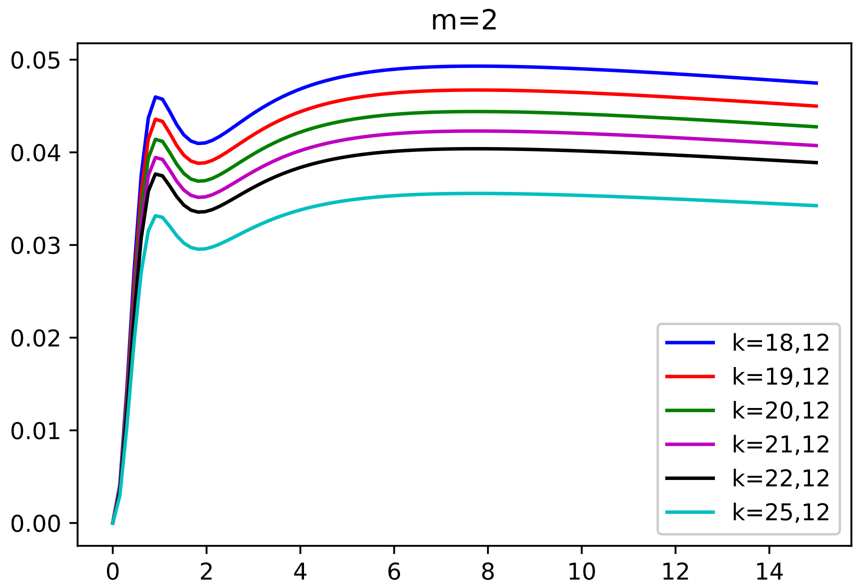

Figura 16. curvas de rotación v_2^2 en función de R/a, para el segundo modelo de la familia de soluciones.

Observando la Figura 16 de las curvas de rotación obtenidas por medio de la ecuación (99), se obtienen un comportamiento interesante porque las curvas de rotación tienen dos máximos. La velocidad circular aumenta rápidamente hasta alcanzar el primer máximo, esto sucede en la región donde se encuentra la mayor parte de la masa del disco galáctico. Después de este máximo, la velocidad circular disminuye porque el gradiente de densidad de masa es menor, sin embargo, la velocidad aumenta nuevamente hasta alcanzar un segundo máximo más o menos en la región del halo. Este comportamiento cualitativo se observa en algunas curvas de rotación para galaxias espirales , como las reportadas en (17), (18) y (19).

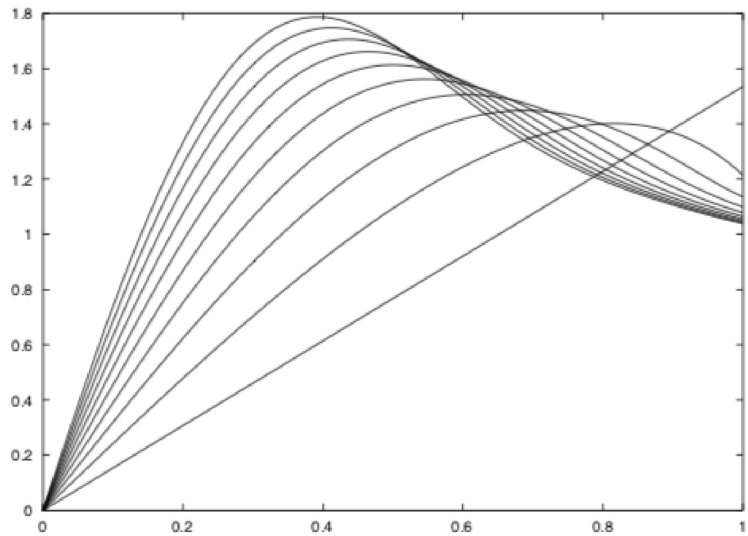

Figura 17. Curvas de rotación v_m como funciones de $\tilde{R}$ para modelos de discos de Kalnajs generalizados con $m = 1$ (línea derecha) hasta $m = 10$ (curva superior) González and Reina (2006).

5. Modelos Newtonianos de Morgan-Morgan.

5.1. Coordenadas esferoidales oblatas

Para obtener una nueva familia de discos delgados con halos, usamos las coordenadas esferoidales oblatas (ξ, η, ϕ) para resolver la ecuación de Laplace. La distribución de la materia está restringida al disco $z = 0$, $0 \leq R \leq a$, las relaciones de transformación con las coordenadas cilíndricas se introducen como

$$R^2 = a^2(1+\xi^2)(1-\eta^2); \quad z = a\xi\eta, \tag{100}$$

donde $0 \leq \xi \leq \infty$ y $-1 \leq \eta \leq 1$. En el disco las coordenadas de radio son $\xi = 0$ y $0 \leq \eta^2 \leq 1$, y si cruzamos el disco, η cambia de signo.

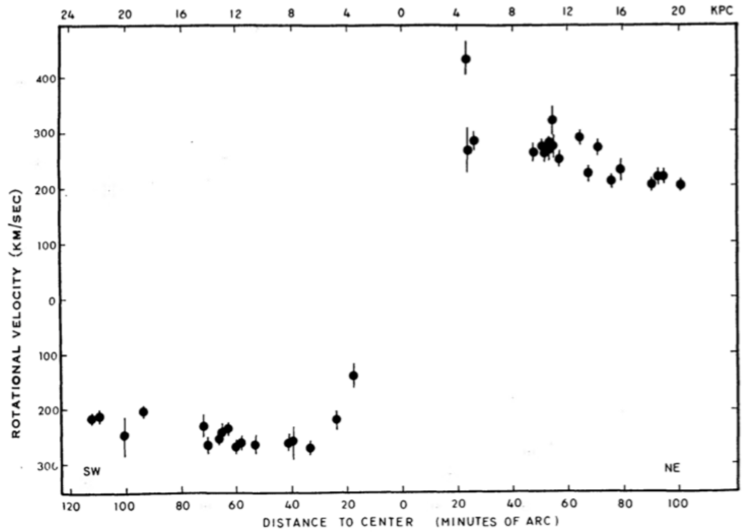

Figura 18. Curvas de rotación medias para treinta y cuatro asociaciones OB más tres regiones externas en M31, en función de la distancia desde el centro. Las barras de error indican el error promedio de la velocidad de la asociación, calculado a partir de las velocidades de las regiones de emisión individuales en la asociación, o de los errores de observación, cualquiera que sea mayor Rubin and Ford (1970).

De acuerdo con la Ec. (100), se procederá a realizar un análisis detallado con el fin de facilitar los cálculos para las densidades de masa del disco y del halo, así como también la velocidad circular del sistema.

Partiendo de (100) y derivando a ambos lados por $\frac{\partial}{\partial R}$ y $\frac{\partial}{\partial z}$ en la expresión para r

$$\frac{\partial R}{\partial R}R = \frac{a^2}{2}\frac{\partial}{\partial R}\left[(1+\xi^2)(1-\eta^2)\right] \Rightarrow R = a^2\left[\xi(1-\eta^2)\frac{\partial \xi}{\partial R} - \eta(1+\xi^2)\frac{\partial \eta}{\partial R}\right], \qquad (101)$$

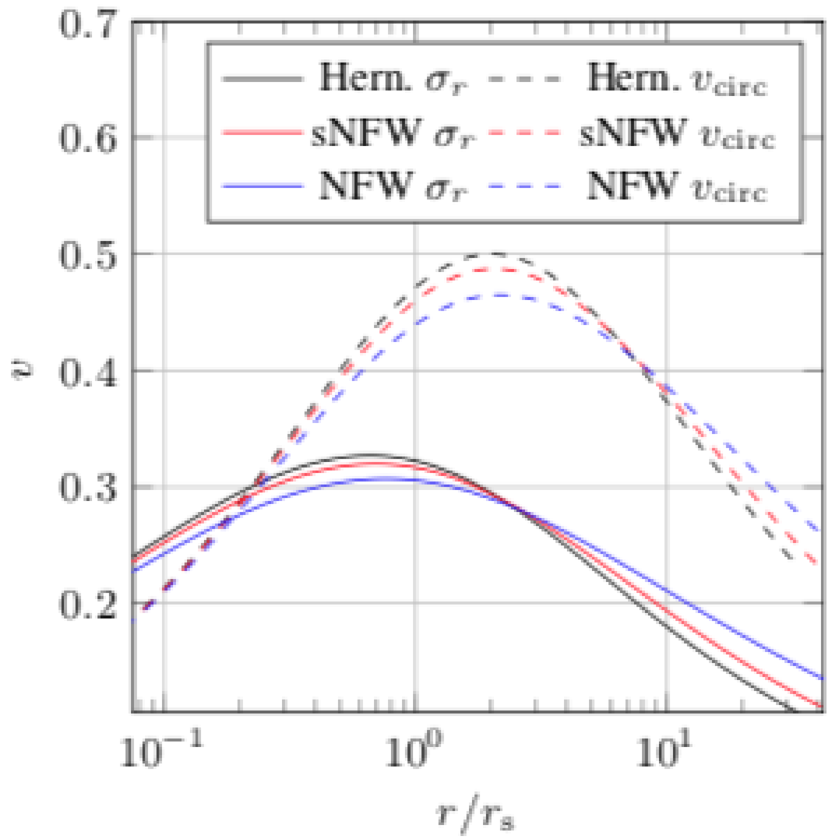

Figura 19. La dispersión de velocidad (completa) y la curva de rotación (punteada) del modelo sNFW (rojo) en comparación con los modelos Hernquist (negro) y NFW (azul) trazados contra el radio (en unidades de rs). Tenga en cuenta que los picos de la curva de rotación y la dispersión de la velocidad de los modelos son comparables, pero la disminución para el modelo de Hernquist se produce más rápidamente que para los modelos sNFW y NFW Lilley et al. (2018a).

$$\frac{\partial R^2}{\partial z} = a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left[(1+\xi^2)(1-\eta^2)\right] \Rightarrow 0 = a^2\left[\xi(1-\eta^2)\frac{\partial \xi}{\partial z} - \eta(1+\xi^2)\frac{\partial \eta}{\partial z}\right], \tag{102}$$

y $\frac{\partial}{\partial R}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ para la expresión para z

$$z = a\xi\eta \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial R} = a\left[\eta\frac{\partial \xi}{\partial R} + \xi\frac{\partial \eta}{\partial R}\right], \tag{103}$$

$$0 = a\left[\eta\frac{\partial \xi}{\partial R} + \xi\frac{\partial \eta}{\partial R}\right] \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial z} = a\left[\eta\frac{\partial \xi}{\partial z} + \xi\frac{\partial \eta}{\partial z}\right], \tag{104}$$

a continuación, se parametrizará cada ecuación y luego se procederá a sus respectivos análisis de

$$\frac{\partial \xi}{\partial R}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial z}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial R}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z}, \tag{105}$$

se analizará el caso cuando $\xi = 0$ y cuando $\eta = 0$, con lo cual reemplazando en las ecuaciones (101, 102) y (103, 104) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta\xi}{\delta R} &= \begin{cases} 0 & \xi = 0 \\ \frac{R}{a^2\xi} & \eta = 0 \end{cases} \\ \frac{\delta\eta}{\delta R} &= \begin{cases} \frac{-R}{a^2\eta} & \xi = 0 \\ 0 & \eta = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{106}$$

Por tanto la ecuación de Laplace axialmente simétrica en coordenadas esferoidales oblatas, es

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1+\xi^2)\frac{\partial U}{\partial \xi}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial U}{\partial \eta}\right] = 0. \tag{107}$$

Según las coordenadas esferoidales oblatas, la solución a la ecuación de Laplace toma la forma

$$U(\xi,\eta) = -\sum_{l=0}^{\infty} C_{2l} q_{2l}(\xi) P_{2l}(\eta), \tag{108}$$

donde $P_{2l}(\eta)$ son los polinomios Legendre de orden 2, $q_{2l}(\xi)$ son las funciones de Legendre de segunda clase y C_{2l} las constantes elegidas para satisfacer las condiciones de contorno (39) y (40). Las constantes C_{2l} se encuentran al imponer la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre

$$C_{2l} = \frac{MG}{2a}\left[\frac{\pi^{1/2}(4l+1)(2m+1)!}{2^{2m}(m-l)!\Gamma(m+l+3/2)(2l+1)q_{2l+1}(0)}\right], \tag{109}$$

donde M y a son la masa total y el radio del disco parametrizado, cuyos polinomios de Legendre y funciones de Legendre de segunda clase son

$$\begin{aligned} &P = 1; \quad P(1) = \eta, \quad P(m) = \left(\frac{2m-1}{m}\right)\eta P(m-1) * \left(\frac{m-1}{m}\right) P, \\ &q(0) = acot(\xi); \quad q(1) = 1 - \xi acot(\xi), \\ &q(m) = \left[(m-1)q(m-2) - (2m-1)\xi q(m-1)/m\right], \end{aligned} \tag{110}$$

por lo que vamos a elegir solo los tres primeros modelos $(m = 0,1,2)$ para ver el comportamiento de las densidades de masas del disco, del halo, y las curvas de rotación. Para analizar las cantidades físicas, tenemos que considerar soluciones particulares restringiendo la suma en (108). Consideramos el potencial gravitacional newtoniano de un disco delgado, con las constantes C_{2n} previamente impuestas. En el caso del disco $\xi = 0$ y $\frac{\partial \xi}{\partial R} = 0$, por tanto

$$R = -a^2 \eta \frac{\partial \eta}{\partial r}, \tag{111}$$

de acuerdo con lo anterior podemos recordar la densidad del disco (49) y bajo las condiciones dentro del disco, la ecuación característica para la densidad del disco es de la forma

$$\sigma = \frac{1}{2\pi Gka\eta} \frac{\partial U/\partial \xi|_{\xi=0}}{(1-U)}, \tag{112}$$

donde usando la forma del potencial (108), σ queda expresada como la siguiente ecuación

$$\sigma = \frac{1}{2\pi Gka\eta} \frac{\sum_{l=0}^{\infty} C_{2l} q'_{2l}(\xi) P_{2l}(\eta)}{(1 + \sum_{l=0}^{\infty} C_{2l} q_{2l}(\xi) P_{2l}(\eta))}, \tag{113}$$

dado que η^2 es continuo en todo el disco y η es discontinuo, solo necesitamos considerar los polinomios de Legendre pares. Para el caso de la velocidad circular ecuación (52)

$$v^2 = \frac{R}{k(1-U)} \frac{\partial U}{\partial R}, \tag{114}$$

reescribiendo U, en términos de las coordenadas esferoidales oblatas

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial R} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial R}, \tag{115}$$

de acuerdo con las ecuaciones dentro del disco impuestas en (106), la velocidad circular se divide en dos ecuaciones importantes, la primera dentro del disco cuando $\xi = 0$ y la otra fuera del mismo cuando $\eta = 0$, por tanto v^2

$$v^2 = \begin{cases} \frac{-\tilde{R}^2}{k\eta} \frac{\partial U/\partial \eta}{(1-U)} & z = 0, 0 \leq R \leq 1 \\ \\ \frac{\tilde{R}^2}{k\xi} \frac{\partial U/\partial \xi}{(1-U)} & z = 0, R \geq 1 \end{cases} \tag{116}$$

Para este modelo particular la densidad del halo de acuerdo con el potencial (108), y la ecuación (50) es

$$\rho_m(R,z) = \frac{U_{m,R}^2 + U_{m,z}^2}{4\pi Gk(1-U_m)^2}, \tag{117}$$

donde las derivadas del potencial gravitacional dependiente de la sumatoria en m

$$U_{m,R} = \frac{\partial U_m}{\partial R} = \frac{\partial U_m}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial R} + \frac{\partial U_m}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial R} \tag{118}$$

$$U_{m,z} = \frac{\partial U_m}{\partial z} = \frac{\partial U_m}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial U_m}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} \tag{119}$$

re-definimos la coordenada radial R, de la forma

$$R_+ = (R^2 + (z+ia)^2)^{1/2}, \tag{120}$$

$$R_- = (R^2 + (z - ia)^2)^{1/2}, \tag{121}$$

esta coordenadas presentan una discontinuidad en el plano $z = 0$, puesto que su valor cambia de signo al atravesar el plano $z = 0$, por tanto las coordenadas ξ y η toman la forma

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{R_+ + R_-}{2a}, \\ \eta &= \frac{R_+ - R_-}{2ia}, \end{aligned} \tag{122}$$

donde sus respectivas derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_+}{\partial R} &= \frac{R}{R_+}, \\ \frac{\partial R_+}{\partial z} &= \frac{z + ia}{R_+}, \\ \frac{\partial R_-}{\partial R} &= \frac{R}{R_-}, \\ \frac{\partial R_-}{\partial z} &= \frac{z - ia}{R_-}, \end{aligned} \tag{123}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial R} &= \frac{R}{2a} \left\{ \frac{R_+ + R_-}{R_+ R_-} \right\}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} &= \frac{1}{2a} \left\{ \frac{z + ia}{R_+} + \frac{z - ia}{R_-} \right\}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial R} &= \frac{R}{2ia} \left\{ \frac{R_- - R_+}{R_+ R_-} \right\}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} &= \frac{1}{2ia} \left\{ \frac{z + ia}{R_+} - \frac{z - ia}{R_-} \right\}, \end{aligned} \tag{124}$$

reemplazando estas derivadas en la ecuación de la densidad del halo (117) se obtiene la expresión de ρ_m en términos de las coordenadas R_+ y R_- en las derivadas $U_{m,R}$ y $U_{m,z}$

$$U_{m,R} = \frac{\tilde{R}}{2}\left\{-i\frac{\partial U_m}{\partial \eta}\left[\frac{R_+ - R_-}{R_+R_-}\right] + \frac{\partial U_m}{\partial \xi}\left[\frac{R_+ - R_-}{R_+R_-}\right]\right\}, \tag{125}$$

$$U_{m,z} = \frac{1}{2a}\frac{z+ia}{R_+}\left\{\frac{\partial U_m}{\partial \xi} + \frac{1}{i}\frac{\partial U_m}{\partial \eta}\right\} + \frac{1}{2a}\frac{z-ia}{R_-}\left\{\frac{\partial U_m}{\partial \xi} - \frac{1}{i}\frac{\partial U_m}{\partial \eta}\right\}, \tag{126}$$

5.1.1. Ecuaciones analíticas de la densidad del halo, disco, velocidad circular en términos de $m = 1,2,3$ para el modelo de Morgan-Morgan.. Para analizar las cantidades físicas, tenemos que considerar soluciones particulares restringiendo la suma en (108), consideramos que U es el potencial gravitacional newtoniano de un disco finito, con las constantes C_{2n} impuestas previamente.

De acuerdo con lo anterior los primeros tres terminos para el potencial gravitacional U_m

$$\begin{aligned}
U_1 &= -\bar{M}\left[acot(\xi) + A(3\eta^2 - 1)\right], \\
U_2 &= -\bar{M}\left[acot(\xi) + \frac{10A}{7}(3\eta^2 - 1) + B(D)\right], \\
U_3 &= -\bar{M}\left[acot(\xi) + \frac{10A}{6}(3\eta^2 - 1) + \frac{21BD}{11} + C(231\eta^6 - 315\eta^4 + 105^2 - 5)\right],
\end{aligned} \tag{127}$$

cuyas variables son de la forma

$$
\begin{aligned}
\bar{M} &= \frac{MG}{a} \\
A &= \frac{1}{4}\left[(3\xi^2+1)acot(\xi)-3\xi\right], \\
B &= \frac{3}{448}\left[(35\xi^4+30\xi^2+3)acot(\xi)-35\xi^3-\frac{55}{3}\xi\right], \\
C &= \frac{5}{8448}\left[(231\xi^6+315\xi^4+105\xi^2+5)acot(\xi)-231\xi^5-238\xi^3-\frac{231}{5}\xi\right]. \\
D &= 35\eta^4-30\eta^2+3
\end{aligned}
\tag{128}
$$

Podemos calcular las primeras derivadas del potencial U_m, en términos de ξ y η, de modo que

$$
\frac{\partial U_1}{\partial \eta} = -\frac{3\tilde{C}_2\eta(3\xi^2 acot(\xi)+acot(\xi)-3\xi)}{2}, \tag{129}
$$

$$
\frac{\partial U_2}{\partial \eta} = -\frac{\tilde{C}_4(140\eta^3-60\eta)}{192}(105\xi^4 acot(\xi)
$$

$$
+90\xi^2 acot(\xi)+9acot(\xi)-105\xi^3-55\xi)+\frac{\partial U_1}{\partial \eta}, \tag{130}
$$

$$
\frac{\partial U_3}{\partial \eta} = -\frac{\partial U_1}{\partial \eta}-\frac{\partial U_2}{\partial \eta}-\frac{C_6(\alpha)(-1155\xi^5-1190\xi^3-231\xi+(b)acot(\xi))}{1280}, \tag{131}
$$

donde $\alpha = 1386\eta^5 - 1260\eta^3 + 210\eta$ y $b = 1155\xi^6 + 1575\xi^4 + 525\xi^2 + 25$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \xi} = \frac{\tilde{C}_0}{\xi^2+1} - \frac{\tilde{C}_2(3\eta^2-1)}{4}\left(6\xi acot(\xi) - \frac{3\xi^2}{\xi^2+1} - \frac{1}{\xi^2+1} - 3\right), \tag{132}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \xi} = -\frac{\tilde{C}_4(35\eta^4-30\eta^2+3)}{192}(420\xi^3 acot(\xi) + 180\xi acot(\xi)$$

$$-\frac{105\xi^4}{\xi^2+1} - \frac{90\xi^2}{\xi^2+1} - \frac{9}{\xi^2+1} - 315\xi^2 - 55) + \frac{\partial(U_1)}{\partial \xi}, \tag{133}$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial \xi} = -\frac{\tilde{C}_6(231\eta^6-315\eta^4+105\eta^2-5)}{1280}(acot(\xi)(d) - (1)/(\xi^2+1)(e)$$

$$-5775\xi^4 - 3570\xi^2 - 231) + \frac{\partial(U_2)}{\partial \xi}, \tag{134}$$

donde $d = 6930\xi^5 + 6300\xi^3 + 1050\xi$, y $e = 1155\xi^6 + 1575\xi^4 + 525\xi^2 + 25$

De acuerdo con las derivadas obtenidas $U_{m,R}$ y $U_{m,z}$, las expresiones para la densidad de masa del halo se expresan en términos de estas derivadas, usando $m = 1,2,3$ obtuvimos las expresiones matemáticas que describen el comportamiento de la densidad de masa del halo para cada familia

$$\rho_1(R,z) = \frac{1}{4\pi G}\frac{U_{1,R}^2 + U_{1,z}^2}{k(1-U_1)^2}, \tag{135}$$

$$\rho_2(R,z) = \frac{1}{4\pi G}\frac{U_{2,R}^2 + U_{2,z}^2}{k(1-U_2)^2}, \tag{136}$$

$$\rho_3(R,z) = \frac{1}{4\pi G}\frac{U_{3,R}^2 + U_{3,z}^2}{k(1-U_3)^2}, \tag{137}$$

donde por ejemplo (135) las derivadas $U_{1,R}$ y $U_{1,z}$, son de la forma

$$U_{1,R} = \frac{R}{2}\left[\frac{\partial U_1}{\partial \xi}\right]\left[\frac{R_+ + R_-}{R_+ R_-}\right], \tag{138}$$

$$U_{1,z} = \frac{1}{2a}\left[\frac{\partial U_1}{\partial \xi}\right]\left[\frac{z+ia}{R_+} + \frac{z-ia}{R_-}\right]. \tag{139}$$

A continuación se presentan las ecuaciones de dependencia entre las coordenadas esferoidales oblatas y las coordenadas cilíndricas, estas ecuaciones son de gran peso ya que con ellas podemos transformas las ecuaciones de la densidad del halo en coordendas cilíndricas, muy importante a la hora de graficar los contornos de densidad.

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{\sqrt{(R^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2} + (R^2+z^2-a^2)}{2a^2}, \\ \eta^2 &= \frac{\sqrt{(R^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2} - (R^2+z^2-a^2)}{2a^2}. \end{aligned} \tag{140}$$

5.1.2. Modelo $m = 1$. En el caso cuando $m = 1$, por medio de la derivada de (132), y

$$(1-U_1)|_{\xi=0} = 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}(3\eta^2 - 1) = \frac{(3\pi\eta^2 + 3\pi + 8)}{8}, \tag{141}$$

$$(1-U_1)|_{\eta=0} = \frac{-((3\xi^2 acot(\xi) + acot(\xi) - 3\xi))}{4} + acot(\xi) + 1, \tag{142}$$

reemplazando en la ecuación (141) en (113) y tomando $\eta = (1-\tilde{R}^2)^{1/2}$ se obtiene la expresión matemática para la densidad del disco dependiente de $\tilde{R}$, asumiendo además la parametrización $\tilde{\sigma}_1 = Ga\sigma_1$

$$\tilde{\sigma}_1 = -\frac{6(1-\tilde{R}^2)^{1/2}}{15\pi\tilde{R}^2 - 30\pi - 40}. \tag{143}$$

En el plano $\tilde{z} = 0$ la expresión analítica para la velocidad circular tiene dos partes, la primera parte corresponde a la partícula que se mueve en el disco con $\xi = 0$ en el intervalo $(0 \le \tilde{R} \le 1)$ en (116); y la segunda parte corresponde a la velocidad de una partícula fuera del disco con $(\tilde{R} \ge 1)$ y $\eta = 0$. Ambas partes deben coincidir exactamente en $\tilde{R} = 1$, usando la expresión (129) , (132) junto con la ecuación (142) y (141) junto con las ecuaciones de transformación (140) , obtenemos las soluciones para la velocidad circular para los modelos que estamos considerando, entonces

$$v_1^2 = \begin{cases} -\frac{3\pi\tilde{R}^2\tilde{M}}{(10(3\pi\tilde{R}^2-6\pi-8)} & 0 \leq R \leq 1 \\ \\ \frac{3\tilde{R}^2\tilde{M}\left((\tilde{R}^2+2)acot\left(\sqrt{\tilde{R}^2-1}\right)(\tilde{R}^2-1)-\tilde{R}^2-1\right)}{10(\tilde{R}^2+2)\left(\tilde{R}^2-1\right)^{1/2}\left(3\left(\tilde{R}^2-1\right)^{1/2}-3\tilde{R}^2acot\left(\sqrt{\tilde{R}^2-1}\right)+4\right)} & R \geq 1. \end{cases} \quad (144)$$

En este caso la densidad de masa del halo es de la forma (135).

5.1.3. Modelo $m = 2$. La densidad de masa del disco cuando $m = 2$ se obtiene usando la ecuación (133) junto con la siguiente expresion

$$(1-U_2)|_{\xi=0} = \frac{45\pi\eta^4 + 30\pi\eta^2 + 45\pi + 128}{128}, \quad (145)$$

$$(1-U_2)|_{\eta=0} = \frac{45\xi^4 acot(\xi) - 30\xi^2 acot(\xi) + 45acot(\xi) - 45\xi^3 + 45\xi + 64}{64}, \quad (146)$$

se reemplazan en la ecuación (145) en (113) cuya parametrización es $\tilde{\sigma}_2 = Gka\sigma_2$

$$\tilde{\sigma}_2 = \frac{32\tilde{R}^4 - 64\tilde{R}^2 + 32}{(1-\tilde{R}^2)^{1/2}(45\pi\tilde{R}^4 - 120\pi\tilde{R}^2 + 120\pi + 128)}. \quad (147)$$

Las soluciones para la velocidad circular se obtienen por medio de las ecuaciones (130), (133) sobre (145) , (146) y reemplazando las ecuaciones de transformación (140), el resultados de la velocidad circular es

$$v_2^2 = \begin{cases} -\frac{3\pi\tilde{R}^2\tilde{M}(105\tilde{R}^2-116)}{5\left(315\pi\tilde{R}^4-696\pi\tilde{R}^2+744\pi+896\right)} & 0 \leq R \leq 1 \\ \\ \frac{3\tilde{R}^2\tilde{M}\left(acot\left((\tilde{R}^2-1)^{1/2}\right)\left((\tilde{R}^2-1)^{1/2}\right)(B+304\tilde{R}^2)-\left(105\tilde{R}^4+188\right)-269\tilde{R}^2+8\right)}{5(\tilde{R}^2+2)\left(\tilde{R}^2-1\right)^{1/2}(acot\left((\tilde{R}^2-1)^{1/2}\right)\left(315\tilde{R}^4+564\tilde{R}^2+612\right)-D\right)} & R \geq 1, \end{cases} \tag{148}$$

cuyas constantes son $B = 105\tilde{R}^4 + 188$, $L = \tilde{R}^2 - 1$ $D = L^{1/2}(315\tilde{R}^2 + 144) - 488$.

Y la densidad de masa del halo es de la forma (136).

5.1.4. Modelo $m = 3$. Reemplazando $m = 3$ en el potencial (108) y usando la ecuación (134) se obtiene la densidad de masa del disco en $\xi = 0$

$$(1 - U_3)|_{\xi=0} = \frac{175\pi\eta^6 + 105\pi\eta^4 + 105\pi\eta^2 + 175\pi + 512}{512}, \tag{149}$$

$$(1 - U_3)|_{\eta=0} = -\frac{acot(\xi)(\beta(\xi^5 - 1) - \alpha(\xi^2 - 1)) - \beta(\xi^4 + 1) + 490\xi^3 - 768}{768}, \tag{150}$$

donde $\beta = 525\xi$, $\alpha = 315\xi^2$, dividiendo (134) sobre (149), y con la parametrización $\tilde{\sigma_3} = Gka\sigma_3$ obtenemos

$$\tilde{\sigma}_3 = \frac{896\tilde{R}^6 - 2688\tilde{R}^4 + 2688\tilde{R}^2 - 896}{(1 - \tilde{R}^2)^{1/2}(\pi(875\tilde{R}^6 - 3150\tilde{R}^4 + 4200\tilde{R}^2 - 2800) - 2560)}. \tag{151}$$

Para el caso de la velocidad circular tendremos en cuenta las ecuaciones (131) para el caso dentro del disco cuando $\xi = 0$, y (134) cuando estamos fuera del disco y luego dividimos respectivamente cada una por la ecuación (149) y (150),obteniendo al final la siguiente expresión

$$v_3^2 = \begin{cases} \frac{-3\pi\tilde{R^2}\tilde{M}(40425\tilde{R^4}-71820\tilde{R^2}+40424)}{(40425\pi\tilde{R^6}-107730\pi\tilde{R^4}+121272\pi\tilde{R^2}-101008\pi-118272)} & 0 \leq R \leq 1 \\ \\ \frac{-(2(cL^{1/2}A-213460\tilde{R^4}L^{1/2}A+121272\tilde{R^2}L^{1/2}A-c+E+50504}{L^{1/2}(40425\tilde{R^4}(\tilde{R^2}A-L^{1/2})-107730\tilde{R^4}A+121272\tilde{R^2}A-f+4L^{1/2}G)} & R \geq 1, \end{cases} \tag{152}$$

con $A = acot\left(\sqrt{\tilde{R^2}-1}\right)$, $B = 105\tilde{R^4}+188$, $L = \tilde{R^2}-1$,$c = 121275\tilde{R^6}$, $E = 255855\tilde{R^4}-176922\tilde{R^2}$, $f = 101008A+59136$, $D = L^{1/2}(315\tilde{R^2}+144)-488$ y $G = 20195\tilde{R^2}-175253$.

Y la densidad de masa del halo es de la forma (137).

5.2. Análisis del modelo de Morgan-Morgan

En esta sección se graficará las ecuaciones estudiadas y obtenidas anteriomente en el modelo de Morgan-Morgan, por medio de la consideración de un disco delgado y un halo esferoidal, bajo un potencial gravitacional impuesto por la ecuación (127) y las condiciones (57).

De acuerdo con lo anterior, se presentarán las graficas correspondientes a cada modelo ($m = 1,2,3$) para las superficies de densidad del halo y del disco y las curvas de rotación de las variables físicas estudiadas con sus parámetros y constantes utilizadas.

5.2.1. Modelo $m = 1$. Reemplazando los valores de las constantes $\tilde{C_0} = 1$, $\tilde{C_0} = 1$ y $k = [7,8,9,10,20]$ en la ecuación (127) y en la densidad del disco (143), obtenemos las expresiones matemáticas

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{10}(R) &= \frac{-24(1-\tilde{R^2})^{1/2}}{21\pi\tilde{R^2}-42\pi-56},\\
\tilde{\sigma}_{11}(R) &= \frac{-3(1-\tilde{R^2})^{1/2}}{3\pi\tilde{R^2}-6\pi-8},\\
\tilde{\sigma}_{12}(R) &= \frac{-8(1-\tilde{R^2})^{1/2}}{9\pi\tilde{R^2}-18\pi-24},\\
\tilde{\sigma}_{13}(R) &= \frac{-12(1-\tilde{R^2})^{1/2}}{15\pi\tilde{R^2}-30\pi-40},\\
\tilde{\sigma}_{14}(R) &= \frac{-6(1-\tilde{R^2})^{1/2}}{15\pi\tilde{R^2}-30\pi-40},
\end{aligned}
\tag{153}
$$

de acuerdo con las ecuaciones (153), gráficamos la densidad de masa del disco con respecto de $\tilde{R}$, esto se muestran en la Figura 5-1 para los valores constantes $k = [7,8,9,10,20]$. En esta gráfica, vemos que $\tilde{\sigma}_1$ tiene como máximo en el centro del sistema ($\tilde{R} = 0$) y va rápidamente a cero en el borde ($\tilde{R} = 1$). Podemos modificar el máximo de (σ_m) cambiando los valores de las constantes ($\tilde{C}_m$) y k. La curva superior (azul) corresponde al valor más bajo de la constante k, mientras que la curva inferior (aguamarina) corresponde al mayor valor de k. Podemos ver que los valores de las constantes modifican la distribución de la materia en la galaxia, por lo que podemos obtener una solución en la que la mayor parte de la materia se concentra en una región central.

En la Figura 5-2, eligiendo correctamente el valor de la constante k, podemos ver el comportamiento que se presenta en la gráfica para $m = 1$, la cual presenta una distribución inusual de la masa en forma de anillo, donde la masa más alta se encuentra concentrada en $\tilde{z} = 0$ y $\tilde{R} = 1$ cerca del borde del disco y luego va desvaneciendo hasta llegar a cero en el infinito.

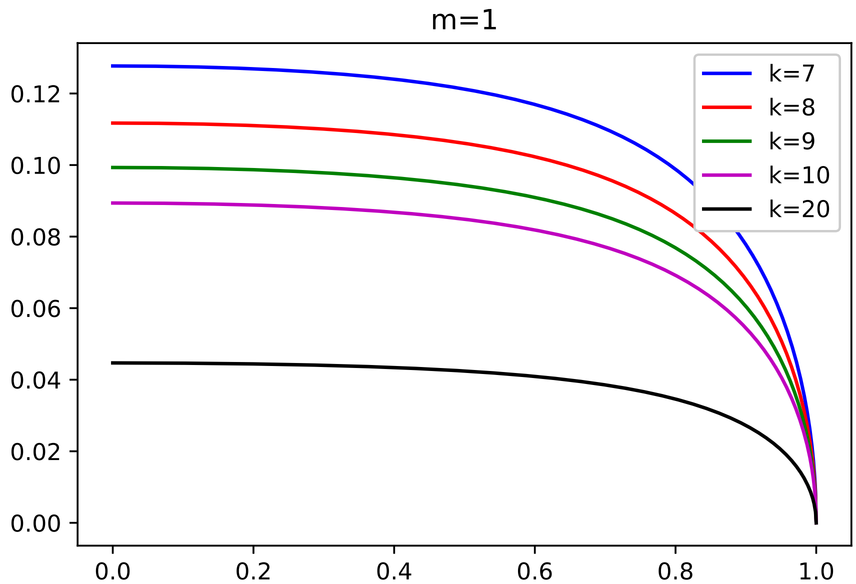

Figura 20. Densidad de masa superficial del disco $\tilde{\sigma}_1$ en función de R/a para el modelo $m = 1$ de la familia de soluciones.

$$v^{2_1} = \begin{cases} -\frac{180\pi\tilde{R}^2}{7(45\pi\sqrt{\tilde{R}^4-2\tilde{R}^2+1}-45\pi\tilde{R}^2+135\pi+8)} & 0 \leq R \leq 1 \\ \frac{-180\tilde{R}^2(FJ\sqrt{\tilde{R}^4-2\tilde{R}^2+1}+\sqrt{2}\tilde{R}^2F\sqrt{H+\tilde{R}^2-1}+FJ+(-2)H+(-2)\tilde{R}^2+2)}{(7\sqrt{H+\tilde{R}^2-1}(H+\tilde{R}^2+1)(45F\sqrt{2}H+45\sqrt{2}\tilde{R}^2F+(-135)\sqrt{2}F+(-90)\sqrt{H}} & R \geq 1, \end{cases} \tag{154}$$

donde $F = acot\left(\sqrt{\sqrt{\tilde{R}^4 - 2\tilde{R}^2 + 1} + \tilde{R}^2 - 1}/\sqrt{2}\right)$, $H = \sqrt{\tilde{R}^4 - 2\tilde{R}^2 + 1}$, $J = \sqrt{2}\sqrt{H + \tilde{R}^2 - 1}$

En la Figura 5-3, se muestra los perfiles de la velocidad circular en función de $\tilde{R}$ para algunos valores constantes k, en esta grafica se observa un pico muy pronunciado dentro de la región del disco galáctico, la velocidad empieza en crecimiento exponencial hasta llegar a un valor máximo que depende del valor de la constante k, luego la velocidad decae a un valor que permanece constante

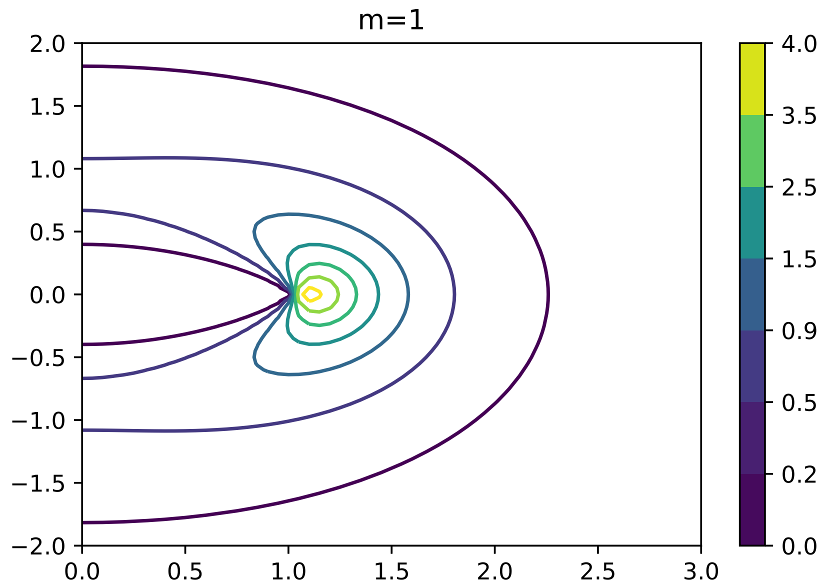

Figura 21. Contorno de densidad de masa del halo en función de R/a (eje horizontal) y z/a (eje vertical). Los contornos corresponden al modelo $m = 1$, con las constantes $\tilde{C}_0 = 1$, $\tilde{C}_2 = 1$ y $k = 20$.

hasta el infinito. Se puede observar además que dicho comportamiento constante es mas pronunciado con valores altos de la constante k, como se observa en el caso cuando $k = 20$ (curva de color negro), esto es muy importante porque muchos estudios de curvas de rotación reales hechos en galaxias espirales Rubin and Ford (1970) presentan el mismo comportamiento.

5.2.2. Modelo $m = 2$. Reemplazando los valores de las constantes $\tilde{C}_0 = 1$, $\tilde{C}_2 = 11/7$, $\tilde{C}_4 = 3/7$ y $k =$[7, 8, 9, 10, 20] en la ecuación (127) y en la densidad del disco (147), obtenemos

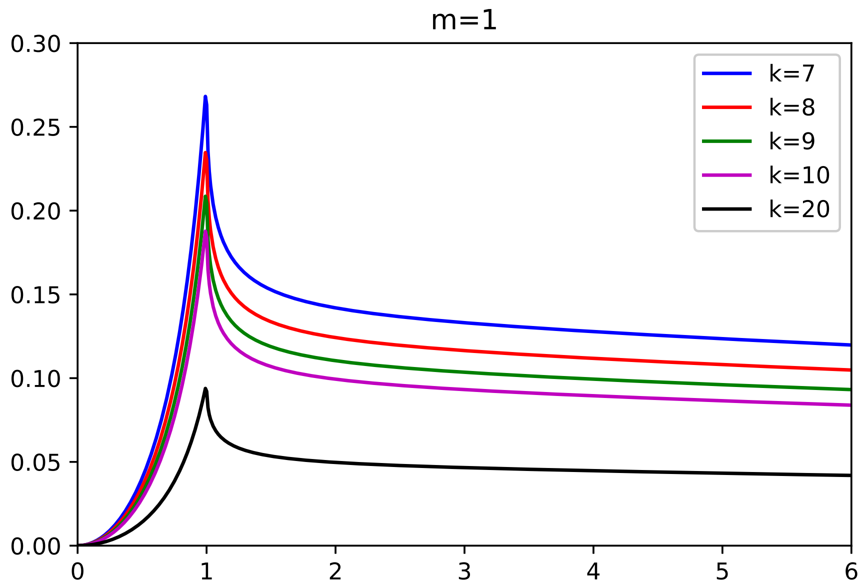

Figura 22. curvas de rotación v_1^2 en función de R/a, para el primer modelo de la familia de soluciones. Estas curvas de rotación se obtienen con los mismos parámetros de la figura 5-1.

las expresiones matemáticas

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{20}(R) &= \frac{640\tilde{R}^4 - 1280\tilde{R}^2 + 640}{(1-\tilde{R}^2)^{1/2}(315\pi\tilde{R}^4 - 840\pi\tilde{R}^2 + 840\pi + 896)},\\
\tilde{\sigma}_{21}(R) &= \frac{80\tilde{R}^4 - 160\tilde{R}^2 + 80}{(1-\tilde{R}^2)^{1/2}(45\pi\tilde{R}^4 - 120\pi\tilde{R}^2 + 120\pi + 128)},\\
\tilde{\sigma}_{22}(R) &= \frac{640\tilde{R}^4 - 1280\tilde{R}^2 + 640}{(1-\tilde{R}^2)^{1/2}(405\pi\tilde{R}^4 - 1080\pi\tilde{R}^2 + 1080\pi + 1152)},\\
\tilde{\sigma}_{23}(R) &= \frac{64\tilde{R}^4 - 128\tilde{R}^2 + 64}{(1-\tilde{R}^2)^{1/2}(45\pi\tilde{R}^4 - 120\pi\tilde{R}^2 + 120\pi + 128)},\\
\tilde{\sigma}_{24}(R) &= \frac{32\tilde{R}^4 - 64\tilde{R}^2 + 32}{(1-\tilde{R}^2)^{1/2}(45\pi\tilde{R}^4 - 120\pi\tilde{R}^2 + 120\pi + 128)},
\end{aligned} \tag{155}$$

En la figura 5-4, podemos ver que al cambiar los valores de k, podemos manipular el valor máximo de la densidad de masa. Para este caso cuando $m = 2$, podemos ver que la densidad de masa cae

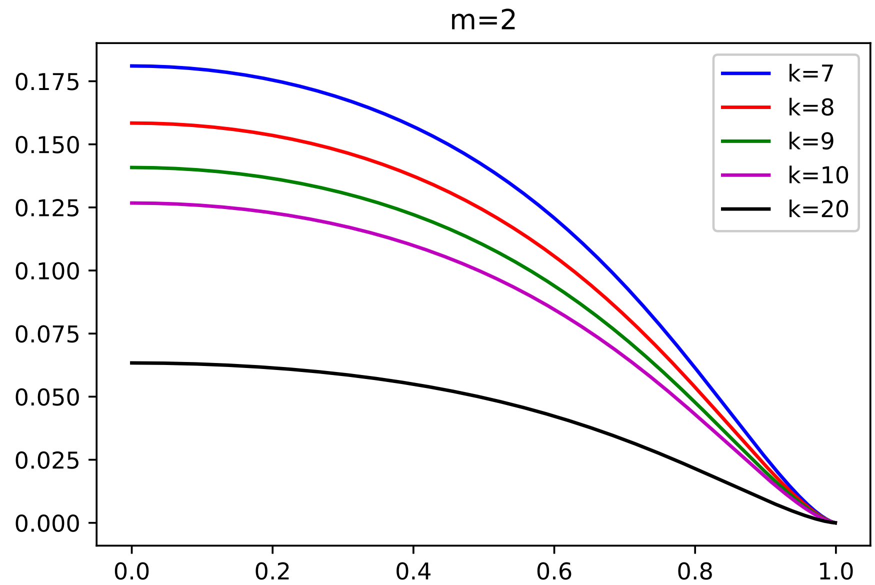

Figura 23. Densidad de masa superficial del disco $\tilde{\sigma}_2$ en función de R/a para el modelo $m = 2$ de la familia de soluciones.

rápidamente a cero cuando $\tilde{R} = 1$, si aumentamos el valor de k, vemos que la densidad de masa decae suavemente de $\tilde{R} = 0.6$ a $\tilde{R} = 1$ y al igual que en el caso cuando $m = 1$ la distribución de la masa se concentra en el centro de disco.

En la Figura 5-5, eligiendo los valores de la constante k para este modelo, podemos ver el comportamiento que se presenta en la grafica cuando $m = 2$ donde la densidad de masa del halo alcanza su máximo en el centro del halo en $\tilde{z} = \tilde{R} = 0$ y luego llega a cero en el infinito, esto es por la masa que está cerca de la región del disco. Como se observo en la figura 4-8 de la densidad de masa del halo para el modelo de Kuzmin-Toomre.

En el plano $\tilde{z} = 0$ la expresión analítica para la velocidad circular tiene dos partes, la primera parte corresponde a la partícula que se mueve dentro del disco en el intervalo $(0 \leq \tilde{R} \leq 1)$; y la segunda

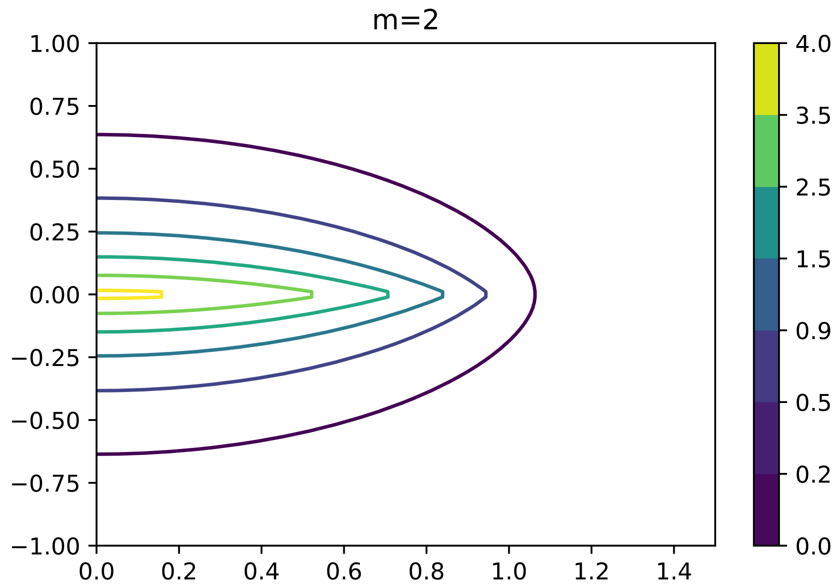

Figura 24. Contorno de densidad de masa del halo en función de R/a (eje horizontal) y z/a (eje vertical). Los contornos corresponden al modelo $m = 2$, con las constantes $\tilde{C}_0 = 1$, $\tilde{C}_2 = 11/7$, $\tilde{C}_4 = 3/7$ y $k = 132$.

parte corresponde a la velocidad de una partícula fuera del disco con ($\tilde{R} \geq 1$). Ambas partes deben coincidir exactamente en $\tilde{R} = 1$, usando la expresión (142) y (141), obtenemos las soluciones para la velocidad circular para el modelo que estamos considerando, entonces de acuerdo con la ecuación (148), calculada en el capitulo 3.2.4, gráficamos ($\tilde{R}$) en función de (v_2^2).

En la figura 5-6, mostramos los perfiles de la velocidad circular en función de $\tilde{R}$ para algunos valores constantes k, aquí podemos observar que el pico es menos agudo en comparación con el modelo $m = 1$ y el valor máximo de v se alcanza más cerca del centro del disco.

5.2.3. Modelo $m = 3$. Reemplazando los valores de las constantes $\tilde{C}_0 = 2$, $\tilde{C}_2 = 5/3$, $\tilde{C}_4 = 9/11$ y k =[7, 8, 9, 10, 20] en la ecuación (127) y en la densidad del disco (151), obtenemos las

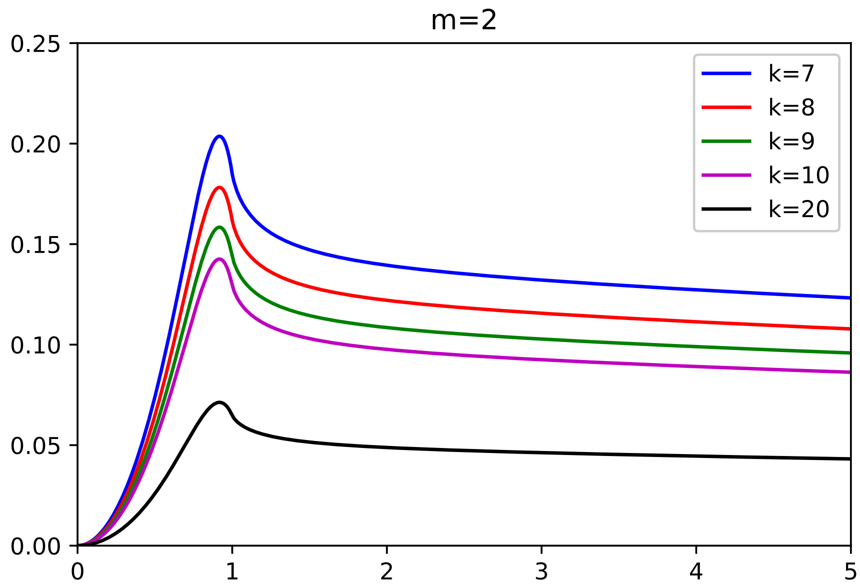

Figura 25. curvas de rotación v_2^2 en función de R/a, para el primer modelo de la familia de soluciones. Estas curvas de rotación se obtienen con los mismos parámetros de la figura 5-4.

expresiones matemáticas

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{30}(R) &= \frac{512\tilde{R^6} - 1536\tilde{R^4} + 1536\tilde{R^2} - 512}{(1-\tilde{R^2})^{1/2}(175\pi\tilde{R^6} - 630\pi\tilde{R^4} + 840\pi\tilde{R^2} - 560\pi - 512)},\\
\tilde{\sigma}_{31}(R) &= \frac{448\tilde{R^6} - 1344\tilde{R^4} + 1344\tilde{R^2} - 448}{(1-\tilde{R^2})^{1/2}(175\pi\tilde{R^6} - 630\pi\tilde{R^4} + 840\pi\tilde{R^2} - 560\pi - 512)},\\
\tilde{\sigma}_{32}(R) &= \frac{3584\tilde{R^6} - 10752\tilde{R^4} + 10752\tilde{R^2} - 3584}{(1-\tilde{R^2})^{1/2}(1575\pi\tilde{R^6} - 5670\pi\tilde{R^4} + 7560\pi\tilde{R^2} + (-5040)\pi - 4608)},\\
\tilde{\sigma}_{33}(R) &= \frac{1792\tilde{R^6} - 5376\tilde{R^4} + 5376\tilde{R^6} - 1792}{(1-\tilde{R^2})^{1/2}(875\pi\tilde{R^6} - 3150\pi\tilde{R^4} + 4200\pi\tilde{R^2} + (-2800)\pi - 2560)},\\
\tilde{\sigma}_{34}(R) &= \frac{896\tilde{R^6} - 2688\tilde{R^4} + 2688\tilde{R^2} - 896}{(1-\tilde{R^2})^{1/2}(875\pi\tilde{R^6} - 3150\pi\tilde{R^4} + 4200\pi\tilde{R^2} + (-2800)\pi - 2560)},
\end{aligned}
\tag{156}
$$

en la Figura 5-7, graficamos la densidad de masa σ_m del disco en función del radio normalizado para el modelo $m = 3$. En esta gráfica, vemos que la densidad de masa del disco, tiene como máximo el centro del sistema ($\tilde{R}=0$) y va a cero rápidamente en el borde ($\tilde{R}=1$), podemos ver que al cambiar los valores k, podemos manipular el valor máximo de la densidad de masa. Comparando con los modelos estudiados en el método de Kuzmin-Toomre, cuando $m=0,1,2$, podemos ver que esta densidad presenta un comportamiento muy similar, la masa tiene su máximo en ($\tilde{R}=0$) y luego decae muy rápido hasta llegar a cero en ($\tilde{R}=1$).

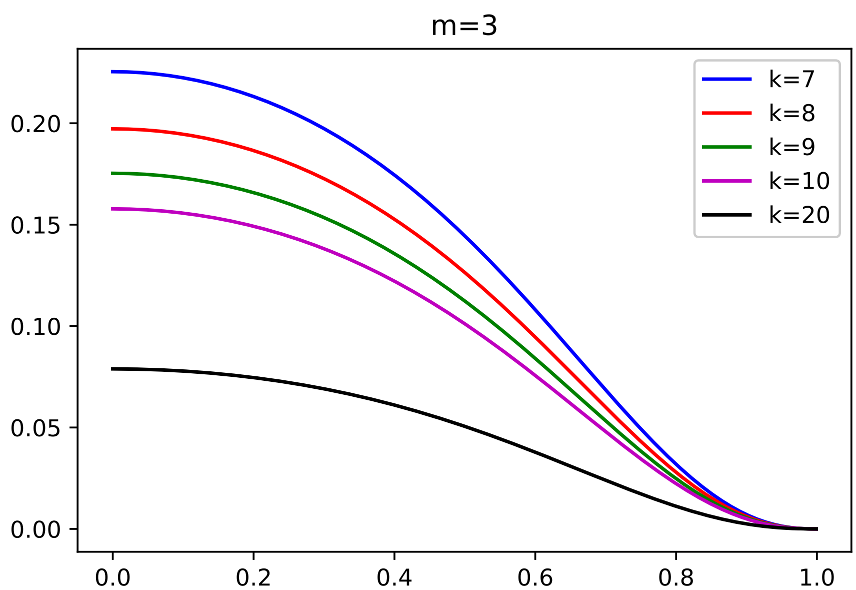

Figura 26. Densidad de masa superficial del disco $\tilde{\sigma}_3$ en función de R/a para el modelo $m=3$ de la familia de soluciones.

En la Figura 5-8, eligiendo correctamente el valor de la constante $k=17$, podemos ver el comportamiento que se presenta en la gráfica para $m=3$ donde la densidad de masa del halo alcanza su máximo en el centro del halo en $\tilde{z}=\tilde{R}=0$ y luego llega a cero en el infinito, esto es por la masa que está concentrada en la región del disco. A continuación se muestra la expresión matemática que describen el comportamiento de la velocidad circular cuando $k=7$ con una masa total $M=30$

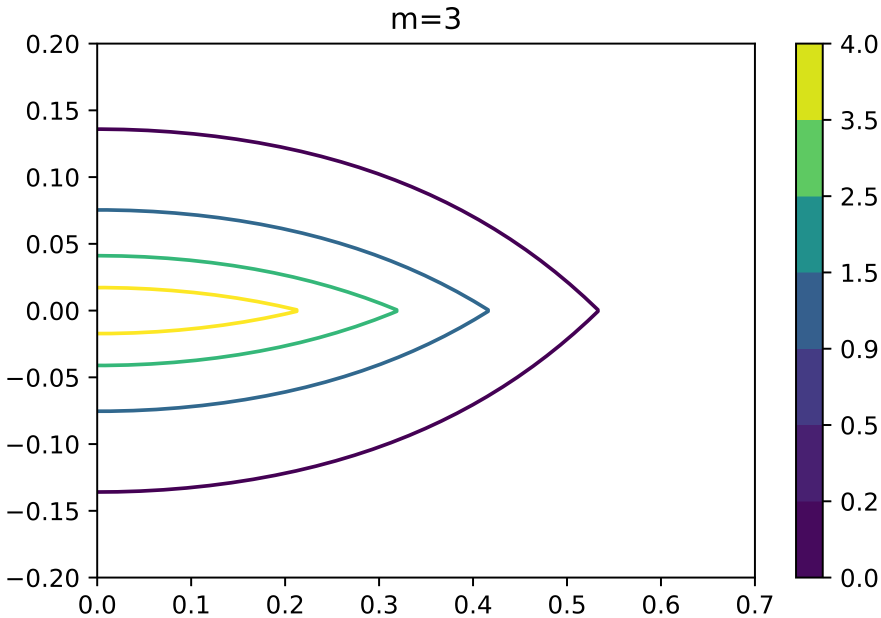

Figura 27. Contorno de densidad de masa del halo en función de R/a (eje horizontal) y z/a (eje vertical). Los contornos corresponden al modelo $m = 3$, con las constantes $\tilde{C}_0 = 2$, , $\tilde{C}_2 = 5/3$, $\tilde{C}_4 = 9/11$, $\tilde{C}_4 = 5/33$ y $k = 17$.

masas solares

$$v_3^2 = \begin{cases} \dfrac{19792.08\tilde{R}^2(-\tilde{R}^2(5D+12)+7D+5\tilde{R}^4+9)}{7(3298.68(-\tilde{R}^2(13D+24)+\tilde{R}^4(5D+18)+11D-5\tilde{R}^6+21)+1024)} & R \leq 1 \\ \\ \dfrac{12600\tilde{R}^2\sqrt{2}(-2(8-26\tilde{R}^2+15\tilde{R}^4)(F)^2+3\sqrt{2}F(1+5\tilde{R}^6+E+\tilde{R}^4(-12+5E)-R^2(-8+7E))acot(F/\sqrt{2}))}{7F^{3/2}(3072+35\sqrt{2}30FG-21030(-21+5\tilde{R}^6+11E+R^4(-18+5E)-\tilde{R}^2(-24+13E))acot(F/\sqrt{2}))} & R \geq 1, \end{cases} \tag{157}$$

donde $D = \sqrt{(R^2-1)^2}$, $E = \sqrt{(-1+\tilde{R}^2)^2}$, $F = \sqrt{-1+\tilde{R}^2+E}$, $G = (59+15\tilde{R}^4-29E+R^2(-44+$

$15E)$) De acuerdo con la ecuación (157) de la velocidad circular cuando $m = 3$, se puede observar en la figura 5-9, que esta crece rápidamente dentro de la región del disco galáctico, alcanzando su máximo y luego decae suavemente permaneciendo constante hasta el infinito, esto se observa en los estudios realizados para las curvas de rotación en galaxias espirales.

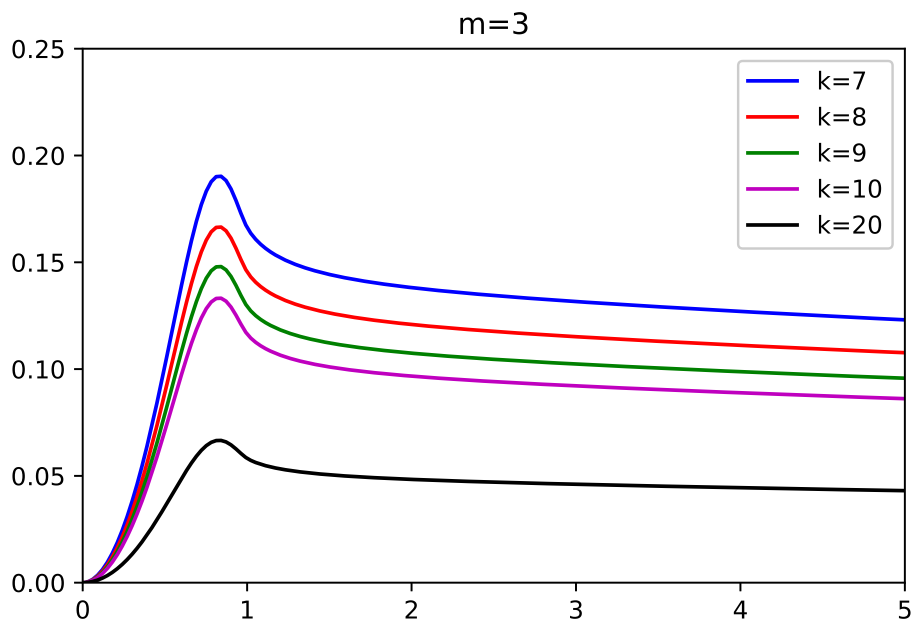

Figura 28. curvas de rotación v_3^2 en función de R/a, para el primer modelo de la familia de soluciones. Estas curvas de rotación se obtienen con los mismos parámetros de la figura

6. Conclusiones

Hemos presentado dos nuevas familias de pares densidad-potencial para modelos de galaxias compuestas por discos delgados de radio infinito con halos esferoidales. En la formación de nuestros modelos, exigimos que el disco sea delgado, que la densidad de masa sea cero en el infinito y que el halo sea tridimensional. Estos modelos se obtuvieron a partir de la ecuación (30) para la función métrica, Φ, la cual representa el potencial gravitacional en el límite de campo débil en los modelos relativistas de discos con halo que se presentan en González and Pimentel (2016).

Para nuestro primer modelo se aplicó el método de desplazamiento, corte y reflexión a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas Kuzmin (1956); Toomre (1963). Una vez hecho esto, calculamos la densidad de masa del disco y la del halo, las curvas de rotación de estrellas para los modelos cuando m = 0,1,2. Descubrimos que, aunque nuestros modelos son de extensión infinita, la densidad de masa del disco disminuye rápidamente a medida que crece la distancia R desde el centro. De acuerdo con los perfiles de densidad, la mayor cantidad de masa se encuentra en $R = z = 0$. En el caso de la densidad de halo, mostramos que la mayor cantidad de materia está cerca del disco. Debe notarse que en las Figuras(5-2, 5-5 y 5-8), en el primer grafico , la mayor concentraci'on de densidad de masa se encuentra en $z = 0$ y $R = 1$, en el borde del disco.

Las curvas de rotación para ambas familias de soluciones tienen el mismo comportamiento: la velocidad circular aumenta desde el centro del disco hasta un máximo, luego, en el caso del modelo de Kuzmin-Toomre, la velocidad circular permanece prácticamente constante a medida que aumenta la distancia radial (Figuras 4-3 y 4-6, modelos $m = 0$ y $m = 1$). En el modelo Toomre (1963), el comportamiento de la velocidad circular, después de alcanzar su máximo, decae muy suavemente a medida que aumenta la distancia. Cabe señalar que en el modelo con $m = 2$ la velocidad circular tiene dos máximos, que son consistentes con las curvas de rotación observadas en algunas galaxias espirales Rubin and Ford (1970); González and Reina (2006) y en el trabajo de Lilley et al. (2018a) figura 3 y 4 donde el autor obtiene curvas de rotación por medio del método de Hernquist y NFW.

Cabe resaltar que en los perfiles de densidad del halo, presentados en las figuras (5.2, 5.5, 5.8, 6.2, 6.5, y 6.8) muestran una gran similitud en forma e isocontornos con las figuras (7 y 8) obtenidas por los autores Lilley et al. (2018b), el cual por medio de halos esféricos numéricos tipo NFW y obteniendo familias de soluciones bajo la expansión Hernquist and Ostriker (1992), muestra los isocontornos de densidad para halos numéricos hasta $n = 20$, en los cuales se puede apreciar mayor concentración de masa en el centro del halo y va disminuyendo de forma gradual a medida que crece el radio. En nuestro caso presentamos isocontornos para los modelos de Kuzmin (1956); Toomre (1963) obteniendo resultados muy similares en las primeras tres familias de soluciones.

Los principales resultados de este trabajo se han divulgado a través de una serie de artículos y ponencias, los cuales se detallan a continuación:

- Artículo: Y. F. Santos, O. M. Pimentel and G. A. González. *New analytical potential-density pairs for galaxy models compound by thin discs and spheroidal halos*, sometido a la revista Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (MNRAS)

- Ponencia en LARIM (XV Latin American Regional Meeting of the IAU 2019) realizado desde el 3 al 9 de noviembre del 2019 en Antofagasta-Chile.

- Ponencia en COCOA (VI Congreso Colombiano de Astronomía y Astrofísica) realizado desde el 15 al 18 de octubre del 2019 en Medellin-Colombia.

- Ponencia en EWASS (European Week of Astronomy and Space Science 2019), realizado desde el 24 al 28 de junio del 2019 en Lyon-Francia.

Referencias Bibliográficas

Barros, D. A., Lépine, J. R. D., and Dias, W. S. (2016). Models for the 3D axisymmetric gravitational potential of the Milky Way galaxy. A detailed modelling of the Galactic disk., 593:A108.

Binney, J. and Tremaine, S. (1987). *Galactic dynamics, Second Edition, Princeton University Press*.

Caldwell, J. A. R. and Ostriker, J. P. (1981). The mass distribution within our Galaxy - A three component model., 251:61–87.

Carroll, B. W. and Ostlie, D. A. (2007). *An Introduction to Modern Astrophysics, Second Edition, Pearson*.

Corbelli, E. and Salucci, P. (2000). The extended rotation curve and the dark matter halo of m33. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 311(2):441–447.

González, G. A. and Pimentel, O. M. (2016). Static thin disks with haloes as sources of conformastatic spacetimes., 93(4):044034.

González, G. A., Plata-Plata, S. M., and Ramos-Caro, J. (2010). Finite thin disc models of four galaxies in the UrsaMajor cluster: NGC3877, NGC3917, NGC3949 and NGC4010., 404(1):468–474.

González, G. A. and Reina, J. I. (2006). An infinite family of generalized Kalnajs discs., 371(4):1873–1876.

Gutiérrez-Piñeres, A. C., González, G. A., and Quevedo, H. (2013). Conformastatic disk-haloes in Einstein-Maxwell gravity., 87(4):044010.

Hernquist, L. and Ostriker, J. P. (1992). A self-consistent field method for galactic dynamics. *The Astrophysical Journal*, 386:375–397.

Kuzmin, G. G. (1956). *Astron. Zh.*, 33:27.

Lilley, E. J., Evans, N. W., and Sanders, J. L. (2018a). The super-NFW model: an analytic dynamical model for cold dark matter haloes and elliptical galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476(2):2086–2091.

Lilley, E. J., Sanders, J. L., Evans, N. W., and Erkal, D. (2018b). Galaxy halo expansions: a new biorthogonal family of potential-density pairs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476(2):2092–2109.

Miyamoto, M. and Nagai, R. (1975). Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies., 27:533–543.

Morgan, T. and Morgan, L. (1969). The Gravitational Field of a Disk. *Physical Review*, 183(5):1097–1101.

Navarro, J. F., Frenk, C. S., and White, S. D. (1997). A universal density profile from hierarchical clustering. *The Astrophysical Journal*, 490(2):493.

Plummer, H. C. (1911). On the problem of distribution in globular star clusters., 71:460–470.

Read, J. and Moore, B. (2005). Tidal streams in a mond potential: constraints from sagittarius. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 361(3):971–976.

Rohlfs, K. and Kreitschmann, J. (1988). Dynamical mass modelling of the Galaxy., 201(1):51–62.

Rojas Niño, A. Read, J. I., Aguilar, L., and Delorme, M. (2016). An efficient positive potential-density pair expansion for modelling galaxies., 459(3):3349–3355.

Rubin, V. C. and Ford, W. Kent, J. (1970). Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions., 159:379.

Rubin, V. C., Ford Jr, W. K., and Thonnard, N. (1980). Rotational properties of 21 sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from ngc 4605/r= 4kpc/to ugc 2885/r= 122 kpc. *The Astrophysical Journal*, 238:471–487.

Satoh, C. (1980). Dynamical Models of Axisymmetric Galaxies and Their Applications to the Elliptical Galaxy NGC4697., 32:41.

Schutz, B. F. (2009). *A first course in general relativity*.

Toomre, A. (1963). On the Distribution of Matter Within Highly Flattened Galaxies., 138:385.

Vogt, D. and Letelier, P. S. (2003). Exact general relativistic perfect fluid disks with halos., 68(8):084010.