

SIMULACIÓN DE UN MÉTODO BASADO EN MEDIDAS PARA CÁLCULO DEL  
EQUIVALENTE DE THEVENIN EN UN SISTEMA ELÉCTRICO DE POTENCIA

MIGUEL ANGEL ACOSTA BASTO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOMECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS  
ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA  
2018

SIMULACIÓN DE UN MÉTODO BASADO EN MEDIDAS PARA CÁLCULO DEL  
EQUIVALENTE DE THEVENIN EN UN SISTEMA ELÉCTRICO DE POTENCIA

MIGUEL ANGEL ACOSTA BASTO

Trabajo de Grado para optar al título de  
Ingeniero Electricista

Director

Ricardo Alzate Castaño

Doctorado en Ingeniería Informática y Automática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOMECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS  
ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA

2018

## DEDICATORIA

A Dios por permitirme alcanzar tan anhelado logro.

A mis padres *Saúl Acosta* y *Miriam Basto* , que me impulsaron a asumir este reto y me brindaron su incondicional apoyo para lograrlo.

A mi familia, a mis tíos *Ana Basto*, *Gladis Basto*, *Alicia Basto*, *Ramiro Basto* por siempre creer en mi y contar con su apoyo, a mi hermana y mis primos gracias por la complicidad y consejos.

A *Leydy Vargas* por su paciencia, comprensión y apoyo incondicional en los momentos más difíciles.

Y a todas aquellas personas que apoyaron el desarrollo y ejecución de este trabajo de grado.

## **AGRADECIMIENTOS**

Mi sincero agradecimiento a todas las personas que ayudaron en la realización de este proyecto, en especial al director de esta investigación, el Ingeniero *Ricardo Alzate Castaño*, quien siempre estuvo acompañándome en el proceso, con gran dedicación, disposición y brindando sus conocimientos durante la ejecución del proyecto.

## CONTENIDO

	pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>13</b>
<b>1. OBJETIVOS</b>	<b>20</b>
1.1. OBJETIVO GENERAL	20
1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	20
<b>2. EQUIVALENTE DE THEVENIN BASADO EN MEDIDAS</b>	<b>21</b>
2.1. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ QUE DEPENDE DE PARÁMETROS	21
2.2. REGLA DE CRAMER Y SOLUCIÓN DE CIRCUITOS	24
2.2.1. Solución de circuitos empleando la <i>regla de Cramer</i>	25
2.2.2. Solución del circuito basada en medidas	28
2.3. EL CASO PARTICULAR DEL EQUIVALENTE DE <i>THEVENIN</i>	38
2.3.1. Equivalente de <i>Thevenin</i> basado en medidas	39
<b>3. DIMENSIONAMIENTO DE FALLOS PARA SEP A PARTIR DE MEDIDAS</b>	<b>46</b>
3.1. CÁLCULO DE CORRIENTES DE FALLA EN SEP	46
3.1.1. Condiciones de falla en un SEP a partir de medidas	47
<b>4. RECOMENDACIONES</b>	<b>53</b>
<b>5. TRABAJO FUTURO</b>	<b>54</b>
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>55</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>57</b>

## LISTA DE FIGURAS

	<b>pág.</b>
Figura 1. Circuito ilustrativo para un sistema de potencia	14
Figura 2. Pasos para determinar condiciones de falla	16
Figura 3. Circuito resistivo con fuentes dependientes	26
Figura 4. Esquema para análisis de dependencia paramétrica	35
Figura 5. $I_4$ como función de $R_8$	37
Figura 6. Transformaciones de circuito para determinar $R_{th}$	44
Figura 7. SEP empleado como caso de estudio	47
Figura 8. Falla trifásica balanceada	48
Figura 9. Esquema para análisis de SEP sometido a fallos	48
Figura 10. Equivalente de Thevenin para SEP sometido a fallos	50
Figura 11. Falla línea a línea	51

## LISTA DE TABLAS

	<b>pág.</b>
Tabla 1. Valores de parámetros circuitales	26
Tabla 2. Coeficientes calculados para ecuación (38) suponiendo $\beta_1 = 1$	43
Tabla 3. Expresiones para cálculo de transformaciones en Fig. 6	45
Tabla 4. Valores nominales para SEP analizado	49
Tabla 5. Valores en <i>PowerWorld</i> ante falla trifásica balanceada	49
Tabla 6. Valores en <i>PowerWorld</i> ante falla línea a línea	51
Tabla 7. Constraste resultados cálculo para corrientes de falla	52

## GLOSARIO

**SISTEMA ELÉCTRICO DE POTENCIA (SEP)** es un conjunto de elementos que tiene como fin generar, transformar, transmitir, distribuir y consumir la energía eléctrica de tal forma que se logre la mayor calidad al menor costo posible.

**EQUIVALENTE DE THEVENÍN** tiene como objetivo simplificar los cálculos de un sistema eléctrico complejo por un circuito eléctrico equivalente mucho más simple, constituido por una fuente de tensión y una resistencia.

**FALLAS EN UN SEP** es cualquier evento que interfiere con el flujo normal de la corriente eléctrica, colocando el sistema en un punto de operación fuera de lo normal.

**FALLA LÍNEA A LÍNEA** es un tipo de falla categorizada como de tipo asimétrica, la cual afecta a dos de las líneas, haciendo que la tensión de la línea restante permanezca en condición de vacío.

**FALLA TRIFÁSICA BALANCEADA** es un tipo de falla categorizada como de tipo simétrica, la cual se caracteriza porque las tensión y la corriente de línea de la barra varían de manera equivalente en magnitud y presenta un desfase angular que obedece al tipo de secuencia disponible en la red.

**POWERWORLD SIMULATOR** es un paquete de simulación de sistema de energía interactivo diseñado para simular el funcionamiento del sistema de energía de alto voltaje en un período de tiempo de varios minutos a varios días. El software contiene un paquete de análisis de flujo de potencia altamente efectivo capaz de resolver sistemas de hasta 250,000 buses de manera eficiente.

## RESUMEN

**TÍTULO:** SIMULACIÓN DE UN MÉTODO BASADO EN MEDIDAS PARA CÁLCULO DEL EQUIVALENTE DE THEVENIN EN UN SISTEMA ELÉCTRICO DE POTENCIA \*

**AUTOR:** MIGUEL ANGEL ACOSTA BASTO \*\*

**PALABRAS CLAVE:** Corrientes de falla, Equivalente de Thevenin, Método basado en medidas, Sistemas Eléctricos de Potencia.

### DESCRIPCIÓN:

Se presenta la formulación matemática y la aplicación en el análisis de fallas para sistemas eléctricos de potencia de un método basado en medidas para calcular el equivalente de Thévenin. El método se formula a partir de un resultado conocido como el Teorema bilineal de Bode y permite construir a partir de pocas medidas un modelo equivalente entre estímulos y medidas de un sistema de estructura desconocida operando en régimen permanente ante la variación de parámetros, siendo ideal para tareas de análisis en línea. En el caso particular que el parámetro varía en el punto de medida, se muestra que el modelo equivalente coincide con el equivalente de Thévenin del sistema en ese punto. De esta manera es posible emplear dicho método para realizar cálculos rápidos del equivalente de Thévenin en sistemas eléctricos de potencia sometidos a condiciones de fallo. En particular, se consideran fallas de tipo simétrico y asimétrico. Resultados de simulación en PowerWorld permiten corroborar las predicciones del método propuesto respecto a cálculos convencionales basados en la estructura circuital del sistema. Trabajo complementario incluye la utilización de bases de datos reales para validar predicciones y el análisis de la influencia de ruidos de medida en la precisión de los resultados.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y telecomunicaciones. Director: Ricardo Alzate Castaño, Doctorado en Ingeniería Informática y Automática.

## ABSTRACT

**TÍTULO:** SIMULATION OF A METHOD BASED ON MEASURES TO CALCULATE THEVENIN EQUIVALENT IN AN ELECTRICAL POWER SYSTEM \*

**AUTHOR:** MIGUEL ANGEL ACOSTA BASTO \*\*

**KEYWORDS:** ELECTRIC POWER SYSTEM, FAULT CURRENT, MEASUREMENT-BASED METHOD, THEVENIN EQUIVALENT.

**DESCRIPTION:**

The mathematical model formulation is presented and its application in the analysis of failures for electrical power systems of a method based on measurements to calculate the Thevenin equivalent. The method is formulated from a result known as Bode Bilinear Theorem and allows to build from a few measurements an equivalent stimulus method and an unknown structure system model working in a permanent regime before the variation of the parameters, being ideal for Analysis tasks in line. In the particular case that the function corresponds to the measurement point, it is shown that the equivalent model matches with the Thevenin equivalent at that point. In this way, it is possible to use this method to rapidly calculate the Thevenin equivalent in electrical power systems under failure conditions. In particular, faults of symmetric and asymmetric type are considered. Simulation results in PowerWorld allow to corroborate the predictions of the method in relation to the calculations in the structure of the system. Complementary work includes the use of real databases to validate predictions and the analysis of the influence of measured noises on the accuracy of the results.

---

\* degree work

\*\* Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y telecomunicaciones. Director: Ricardo Alzate Castaño, Doctorado en Ingeniería Informática y Automática.

## INTRODUCCIÓN

Un sistema eléctrico de potencia (SEP), se define como una red formada por unidades generadoras, cargas y/o líneas de transmisión de potencia, incluyendo el equipo asociado, conectado eléctricamente o mecánicamente a la red <sup>1</sup>.

La operación de un SEP comprende las actividades necesarias para garantizar seguridad y continuidad en el suministro de energía eléctrica, así como la correcta coordinación entre el sistema de producción y la red de transporte, asegurando que la energía producida por los generadores sea transportada hasta las redes de distribución con estándares de calidad vigente.

En la Fig. 1 se ilustra un SEP típico, el cuál consta fundamentalmente de generadores, transformadores, cargas y barras. A su vez, las barras se clasifican como: 1) slack (infinita) o de referencia, en la cual se conoce la magnitud y la fase de la tensión; 2) PQ (carga), que especifica la magnitud de las potencias activas y reactivas; y 3) PV (control de tensión), donde se conocen magnitudes de tensión y potencia.

Las condiciones nominales de operación en estado estacionario para un SEP, se determinan a partir del análisis de flujos de potencia (o flujos de carga). El procedimiento para el cálculo del flujo de potencia es el siguiente <sup>2</sup>:

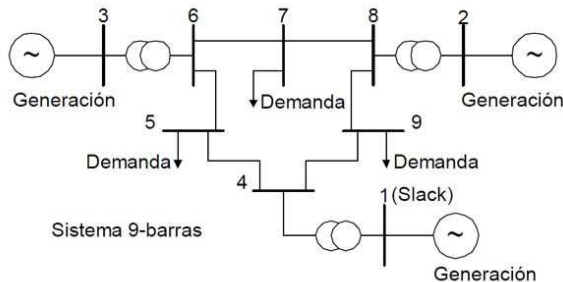
- Inicialmente se define una barra Slack, y se determina el tipo de las barras

---

<sup>1</sup> J. D. Glover y M. S. Sarma. *Power system analysis and design: with personal computer applications*. 2nd. Boston: PWS-KENT Publishing Company, 1994.

<sup>2</sup> Arthur Bergen. *Power System Analysis*. 2nd. Upper Saddle River, N.J: Ed. Prentice-Hall, 1986.

Figura 1. Circuito ilustrativo para un sistema de potencia



restantes del sistema (PQ o PV);

- Se formulan ecuaciones, de potencia reactiva para las barras PQ y de potencia activa tanto para las PQ como para las PV;
- Se calcula la matriz de admitancias (también conocida como Ybus);
- Se calculan las potencias netas inyectadas en cada barra;
- Se resuelven los sistemas de ecuaciones formulados, empleando métodos numéricos. Popularmente se emplean los de Newton-Raphson y Gauss-Seidel.

Estas condiciones de operación nominal en un SEP, son de gran importancia en la planeación y diseño de la expansión futura de los sistemas de potencia, así como también en la determinación de las mejores condiciones de operación de los sistemas existentes.

Ahora bien, una falla en un circuito es definida como cualquier evento que interfiere con el flujo normal de corriente <sup>3</sup>. En un SEP, una falla se puede catalogar como trifásica simétrica (trifásica, trifásica a tierra) cuando intervienen las tres fases

---

<sup>3</sup> John J. Grainger y W. Stevenson. *Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia*. 2nd. New York: Ed. McGraw-Hill, 1982.

simultáneamente, y trifásica asimétrica (línea a tierra, línea a línea, doble línea a tierra) cuando existe desbalance entre fases. Por tanto, el estudio de fallas eléctricas en SEP constituye un área de reconocido interés a nivel científico y tecnológico, con reciente auge debido a las exigencias actuales de calidad de suministro en una sociedad dependiente de recursos energéticos y a la tendencia hacia métodos de generación distribuida (micro-redes).

Asimismo, a partir de la teoría fundamental de circuitos <sup>4</sup> se define el equivalente de Thevenin para un circuito lineal de dos terminales, como una representación circuital equivalente que consta de una fuente de tensión  $E$  en serie con un resistor  $R_{th}$ , siendo  $E$  la tensión de circuito abierto y  $R_{th}$  la entrada o resistencia equivalente en las terminales cuando las fuentes independientes se apagan. Para el caso de un SEP esta definición es igualmente válida y permite calcular fallas de tipo simétrico y asimétrico. En particular, el procedimiento tradicional para determinar fallos en un SEP se ilustra en el diagrama de flujo de la Fig. 2, donde el cálculo de corrientes y tensiones desequilibradas en el punto de falla se realiza empleando simplificación del sistema polifásico desbalanceado mediante superposición de sistemas balanceados (Teorema de Fortescue <sup>5</sup>).

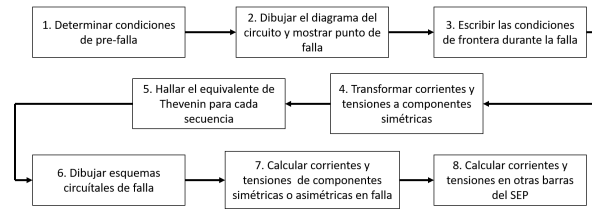
De otro lado, los sistemas de procesamiento de datos en tiempo real para el análisis de operación de un sistema de potencia, experimentan un vertiginoso auge especialmente por la disponibilidad actual de unidades de medida fasorial (PMU - Phasor Measurement Units) a través de las cuales es posible determinar, con amplios

---

<sup>4</sup> Alexander Charles; y Matthew Sadiku. *Fundamentos de Circuitos Eléctricos*. 3ra. New York: Ed. McGraw-Hill, 2000.

<sup>5</sup> Quíntela F. y Redondo Roberto. *Redes Eléctricas de Kirchhoff*. 2nd. Bejar (Salamanca): Ed. Revide S.L., 2005.

Figura 2. Pasos para determinar condiciones de falla



niveles de precisión, valores instantáneos de corriente y tensión con respectivas informaciones de fase sobre diversos puntos del sistema. Entre las aplicaciones más comunes que implican el uso de PMUs se incluyen la estimación de estados, la estabilidad transitoria y de tensión, el monitoreo de oscilaciones, detección de eventos y fallos, al igual que la validación de modelos <sup>6</sup>.

En este sentido, se requieren sistemas de análisis y gestión de información que permitan manipular mayores volúmenes de datos para determinar el estado de operación de sistemas cada vez de mayor porte. Al respecto, se documentan interesantes trabajos en la literatura, de los cuales se resalta <sup>7</sup>, donde se aborda con especial interés el procesamiento de datos en línea provenientes de medidas de PMU para SEP. En particular, se extrae de dicho texto la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -I_r(t_1) & I_i(t_1) \\ 0 & 1 & -I_i(t_1) & -I_r(t_1) \\ 1 & 0 & -I_r(t_2) & I_i(t_2) \\ 0 & 1 & -I_i(t_2) & -I_r(t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_i \\ R_{th} \\ X_{th} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_r(t_1) \\ V_i(t_2) \\ V_r(t_2) \\ V_i(t_2) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

<sup>6</sup> Jian M., Yuri M. y Zhaoyang D. *Phasor Measurement Unit and Its Application in Modern Power Systems*. 1er. Berlin: Ed. Springer, 2010.

<sup>7</sup> Zhang Jiangmeng. "On the application of PMU measurements to system stability analysis". Master's Thesis. University of Illinois at Urbana-Champaign, 2012.

siendo los subíndices  $r$  e  $i$  indicaciones para componentes reales e imaginarias de corrientes y tensiones en un punto de prueba del SEP, para el cual  $R_{th}$  y  $X_{th}$  son respectivamente las componentes real e imaginaria de la impedancia equivalente de Thevenin. Como se observa de (1), asumiendo que la impedancia de Thevenin ( $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$ ) y el voltaje de Thevenin ( $E = E_r + jE_i$ ) son constantes durante un intervalo  $t = [t_1, t_2]$ , es posible constituir y resolver un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, a partir de tan sólo dos medidas sucesivas de PMU en un punto del SEP, lo cual reduce de manera ostensible el costo computacional asociado a la determinación en tiempo real para este tipo de parámetro.

A partir de lo anterior, es claro que existen nuevas metodologías para aproximar equivalentes de Thevenin para SEP en tiempo de ejecución, con un sin número de posibilidades prácticas de aplicación.

En este sentido, Bhaya et al aplicaron en <sup>8</sup> las ideas fundamentales del teorema bilineal de Bode para utilizar el principio de máxima transferencia de energía sobre un SEP empleando medidas. Las mismas ideas fueron desarrolladas por Bhattacharyya et al en <sup>9</sup>, para construir un método de estimación de parámetros (del cual el equivalente de Thevenin constituye un caso especial) basado en un conjunto reducido de medidas sobre un modelo arbitrario de un sistema lineal. De manera más reciente, Alzate et al en <sup>10</sup> extendieron la aplicación a sistemas no lineales.

---

<sup>8</sup> Amit Bhaya, Edwin Alejandro Herrera y Oumar Diene. "Revisiting the maximum power transfer for linear n-ports with uncoupled loads and applications to power systems". En: *International Journal of Circuit Theory and Applications* 44.9 (2016), págs. 1631-1656.

<sup>9</sup> Shankar B., Keel L. y Daniel Mohsenizadeh. *Linear Systems: A Measurement Based Approach*. 1er. Nueva Delhi: Ed. Springer, 2014.

<sup>10</sup> V. Oliveira, R. Alzate y S. Bhattacharyya. "A measurement-based approach with accuracy evaluation and its applications to circuit analysis and synthesis". En: *International Journal of Circuit*

Una revisión de la literatura, permitió encontrar trabajos afines con la temática propuesta, como en <sup>11</sup> donde se resuelven problemas de conexión y desconexión por fallas en generadores distribuidos mediante una unidad de protección central (CPU) basada en PMUs; en <sup>12</sup><sup>13</sup> se estudian desbalances entre los sistemas de generación y de transmisión y su repercusión en pérdidas de potencia a partir de equivalentes de Thevenin calculados mediante información de PMUs; en <sup>14</sup><sup>15</sup> se analiza la estabilidad de tensión de un SEP, formulando zonas de operación seguras a partir de estimación del equivalente de Thevenin; en <sup>16</sup> se revisan desafíos computacionales para estimar equivalentes de Thevenin en una red de sistemas de energía a gran escala; en <sup>17</sup> se propone un método para localización de fallas basado en medido-

---

*Theory and Applications* (2017).

- <sup>11</sup> Pooria Mohammadi. "PMU-Based Adaptive Central Protection Unit for Power Systems with High DG Penetration". Master's Thesis. University of Texas at Tyler, 2014.
- <sup>12</sup> Andrés Zuluaga. "Estabilidad de tensión con equivalentes Thevenin en tiempo real involucrando agotamiento de reactivos". Tesis de maestría. Universidad Pontificia Bolivariana, 2015.
- <sup>13</sup> Sobhy M Abdelkader y D John Morrow. "Online Thevenin equivalent determination considering system side changes and measurement errors". En: *IEEE Transactions on Power Systems* 30.5 (2015), págs. 2716-2725.
- <sup>14</sup> Mohammad M. e Iftakhar. "Thevenin Equivalent Circuit Estimation and Application for Power System Monitoring and Protection". Master's Thesis. University of Kentucky, 2008.
- <sup>15</sup> L. Paniagua y RB Prada. "Voltage stability assessment using equivalent Thevenin". En: *Central American and Panama Convention, 2015 IEEE Thirty Fifth*. IEEE. 2015, págs. 1-6.
- <sup>16</sup> Christian Sanchez. "Estimating the parameters of a Thevenin equivalent system based on output voltage and current measurements: computational challenges and simulated studies". Master's Thesis. University of Illinois at Urbana-Champaign, 2012.
- <sup>17</sup> Jorge Garrido. *Método para la localización de fallas de red a partir de la instalación de medidores inteligentes en los sistemas eléctricos de distribución*. Tesis de grado. Bucaramanga-Colombia: Universidad industrial de Santander, 2016.

res inteligentes de tensión en la red eléctrica; mientras que <sup>1819</sup> abordan la ubicación precisa de fallos en un SEP a partir del cálculo de equivalentes de Thevenin.

Por tanto, el presente trabajo de grado propone integrar las ideas anteriores en un método para el cálculo del equivalente de Thevenin en un SEP sometido a fallos de tipo simétrico (trifásico o trifásico a tierra), basado en medidas de variables relevantes para el punto de análisis, actualizadas periódicamente.

En desarrollo del proyecto se buscará atender inquietudes como las siguientes: ¿Es posible determinar con precisión el equivalente de Thevenin para un SEP basado en medidas de un escaso número de datos? ¿Bajo qué condiciones dicha aproximación se considera como una medida válida para caracterizar la operación del sistema? ¿Qué aplicaciones podrían considerarse aptas para emplear la información proporcionada por el método de cálculo del equivalente de Thevenin basado en el teorema bilineal de Bode?

---

<sup>18</sup> Matt C-Y Chuang, S-J Steven Tsai y Chia-Chi Chu. "Fault locating estimation using Thevenin equivalent in power systems". En: *IPEC, 2010 Conference Proceedings*. IEEE. 2010, págs. 499-504.

<sup>19</sup> J. Zhang y D. Chen. "On the application of Phasor Measurement Units to power system stability monitoring and analysis". En: *Power and Energy Conference at Illinois (PECI), 2012 IEEE*. IEEE. 2012, págs. 1-6.

## **1. OBJETIVOS**

### **1.1. OBJETIVO GENERAL**

- Implementar el método de cálculo del equivalente Thevenin de un sistema eléctrico de potencia basado en medidas, comparando su desempeño con técnicas convencionales.

### **1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Interpretar el método de cálculo para el equivalente de Thevenin basado en medidas desarrollado por Bhattacharyya et al en <sup>9</sup>, adaptando su formulación para cálculos en un sistema eléctrico de potencia;
- Diseñar y simular un escenario de pruebas para cálculo del equivalente de Thevenin en un sistema eléctrico de potencia, aplicado al estudio de componentes simétricas y asimétricas de fallas;
- Comparar el desempeño del método propuesto para cálculo del equivalente de Thevenin con respecto a una técnica convencional (e.g. cálculo teórico).

## 2. EQUIVALENTE DE THEVENIN BASADO EN MEDIDAS

El presente capítulo presenta las bases conceptuales para un método basado en medidas, a partir del cual es posible aproximar una función que describe la relación entre una variable de interés y un parámetro. Este método se fundamenta en el *Teorema bilineal de Bode* propuesto por el mismo autor en <sup>20</sup>. Versiones más recientes para dicho teorema, se encuentran en los trabajos de Bhaya *et al* en <sup>8</sup> y Bhattacharyya *et al* en <sup>9</sup>. En este último caso, los autores mostraron la manera en la cual, para la condición especial en que la variable de interés se encuentra en el punto donde se varía el parámetro, la función corresponde con el equivalente de Thevenin.

### 2.1. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ QUE DEPENDE DE PARÁMETROS

En estudios de álgebra lineal, se considera al rango de una matriz como una relación directa con la cantidad de vectores fila y/o columnas linealmente independientes <sup>21</sup>, constituyendo un concepto claro y fácilmente verificable a partir de cálculos simples. Asimismo, se relaciona el rango de una matriz con su determinante mediante el concepto de *singularidad*. De hecho, una matriz de rango completo es *no singular*, lo cual implica que su determinante sea diferente de cero.

No es común, sin embargo, encontrar problemas en los cuales las matrices posean parámetros que condicionen dichos resultados. A manera de ilustración, considere

---

<sup>20</sup> Hendrik Wade Bode y col. "Network analysis and feedback amplifier design". En: (1945).

<sup>21</sup> Stanley I. Grossman. *Algebra lineal*. 2nd. Belmont: Grupo Editorial Iberoamérica, 1987.

la matriz:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + p\mathbf{B}, \quad (2)$$

siendo  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_0$  y  $\mathbf{B}$  matrices cuadradas con elementos reales o complejos y  $p$  un parámetro escalar real o complejo. El determinante de  $\mathbf{A}$  puede expresarse como un polinomio del parámetro  $p$  en el modo siguiente <sup>9</sup>:

$$|\mathbf{A}| = \alpha_r p^r + \alpha_{r-1} p^{r-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0, \quad (3)$$

siendo  $r$  en rango de  $\mathbf{B}$ .

Para ilustrar el resultado anterior considere la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+p & 1-p \\ p & 2+p \end{bmatrix}, \quad (4)$$

misma que puede re-escribirse como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + p\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Así entonces, siendo el rango de  $\mathbf{B}$  igual a 2, el determinante de  $\mathbf{A}$  podrá ser expresado como un polinomio de grado 2 con respecto al parámetro  $p$ ; es decir:

$$|\mathbf{A}| = \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0. \quad (6)$$

Lo anterior puede verificarse fácilmente tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}| &= (1+p)(2+p) - p(1-p) \\
 &= (2+p+2p+p^2) - (p-p^2) \\
 &= 2+3p+p^2 - p+p^2 \\
 &= 2p^2+2p+2,
 \end{aligned}$$

de lo cual  $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_0 = 2$ . Más interesante aún, es que el resultado anterior pueda generalizarse para un conjunto  $n$  de parámetros, considerando una matriz:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + p_1\mathbf{A}_1 + p_2\mathbf{A}_2 + \cdots + p_n\mathbf{A}_n, \quad (7)$$

de manera tal que su determinante pueda ser expresado como:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i_n=0}^{r_n} \cdots \sum_{i_2=0}^{r_2} \sum_{i_1=0}^{r_1} \alpha_{i_1 i_2 \cdots i_n} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_n^{i_n}, \quad (8)$$

siendo  $r_i$  el rango de  $\mathbf{A}_i \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Por tanto, sea la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+p_1 & p_1+p_2 \\ 1 & p_1+2p_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

con  $n = 2$ . Dicha matriz puede re-escribirse como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + p_1\mathbf{A}_1 + p_2\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + p_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

y por tanto, tomando en cuenta que el rango de  $\mathbf{A}_1$  es 2 y el rango de  $\mathbf{A}_2$  es 1, a

partir de (8) su determinante puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}| &= \sum_{i_2=0}^1 \sum_{i_1=0}^2 \alpha_{i_1 i_2} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \\
 &= \alpha_{00} + \alpha_{10} p_1 + \alpha_{20} p_1^2 + \alpha_{01} p_2 + \alpha_{11} p_1 p_2 + \alpha_{21} p_1^2 p_2.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Lo anterior puede verificarse fácilmente tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}| &= (1 + p_1)(p_1 + 2p_2) - (p_1 + p_2) \\
 &= (p_1 + 2p_2 + p_1^2 + 2p_1 p_2) - p_1 - p_2 \\
 &= p_1 - p_1 + 2p_2 - p_2 + p_1^2 + 2p_1 p_2 \\
 &= p_1^2 + p_2 + 2p_1 p_2,
 \end{aligned}$$

de lo cual  $\alpha_{00} = \alpha_{10} = \alpha_{21} = 0$ ,  $\alpha_{20} = \alpha_{01} = 1$ ,  $\alpha_{11} = 2$ .

## 2.2. REGLA DE CRAMER Y SOLUCIÓN DE CIRCUITOS

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales pueden emplearse muchos métodos, entre ellos uno denominado la *regla de Cramer*<sup>21</sup>. Este método es simple y eficiente para sistemas de dimensión reducida. Fundamentalmente, consiste en calcular la solución  $x_i$  en el vector  $\mathbf{x}$  de dimensión  $n$  para el sistema lineal:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{12}$$

siendo  $\mathbf{A}$  una matriz de términos constantes y  $\mathbf{b}$  un vector de valores conocidos, todo ello empleando la relación siguiente:

$$x_i = \frac{|\mathbf{T}|}{|\mathbf{A}|}, \tag{13}$$

donde  $|A|$  representa el determinante de  $A$ , al tiempo que  $|T|$  indica el determinante para una matriz  $T$  constituida a partir de  $A$  reemplazando su  $i$ -ésima columna por  $b$ .

Para ilustrar la *regla de Cramer* considere la ecuación siguiente:

$$\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, siguiendo los lineamientos de (13) se obtiene:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{79}{-61} = -1.2951, \quad (15)$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-61} = 0.0656. \quad (16)$$

**2.2.1. Solución de circuitos empleando la *regla de Cramer*** Considere el circuito resistivo mostrado en la Fig. 3, constituido de sólo fuentes independientes, para los valores de parámetro indicados en la Tabla 1.

Figura 3. Circuito resistivo con fuentes dependientes

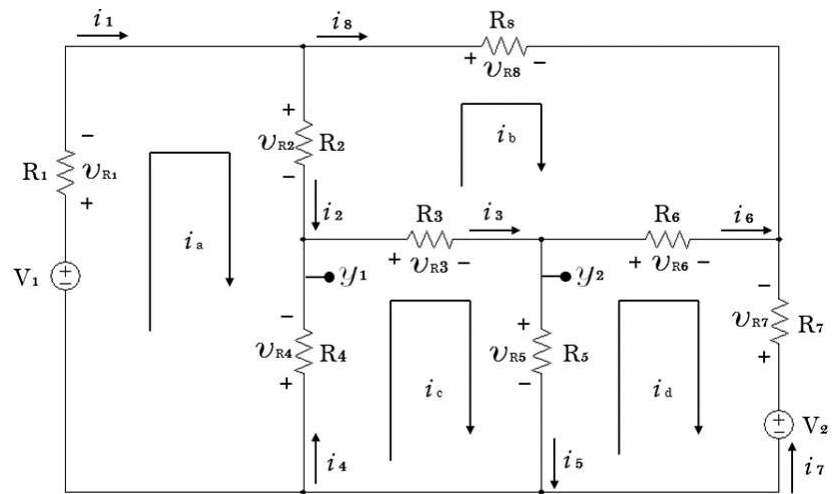


Tabla 1. Valores de parámetros circuitales

Parámetro	Valor
$V_1$	15 V
$V_2$	20 V
$R_1$	1 k $\Omega$
$R_2$	2.5 k $\Omega$
$R_3$	0.5 k $\Omega$
$R_4$	1.5 k $\Omega$
$R_5$	5.6 k $\Omega$
$R_6$	2 k $\Omega$
$R_7$	3.6 k $\Omega$
$R_8$	4 k $\Omega$

Empleando *ley de voltajes de Kirchhoff* (LVK), es posible construir el siguiente con-

junto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}V_{R1} + V_{R2} - V_{R4} &= V_1 \\V_{R2} + V_{R3} + V_{R6} - V_{R8} &= 0 \\V_{R3} + V_{R4} + V_{R5} &= 0 \\V_{R5} - V_{R6} + V_{R7} &= V_2\end{aligned}\tag{17}$$

Tomando en cuenta la relación existente entre corrientes y voltajes, y asumiendo la convención:

$$\begin{aligned}I_1 &= I_a \\I_2 &= I_a - I_b \\I_3 &= I_c - I_b \\I_4 &= I_c - I_a \\I_5 &= I_c - I_d \\I_6 &= I_d - I_b \\I_7 &= -I_d \\I_8 &= I_b,\end{aligned}$$

es posible escribir:

$$\begin{aligned}(I_a)R_1 + (I_a - I_b)R_2 - (I_c - I_a)R_4 &= V_1 \\(I_a - I_b)R_2 + (I_c - I_b)R_3 + (I_d - I_b)R_6 - (I_b)R_8 &= 0 \\(I_c - I_b)R_3 + (I_c - I_a)R_4 + (I_c - I_d)R_5 &= 0 \\(I_c - I_d)R_5 - (I_d - I_b)R_6 + (-I_d)R_7 &= V_2.\end{aligned}$$

De esta manera se formula un problema similar al propuesto en (12), para resolver

el vector de corrientes de malla a partir de:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & -R_2 & -R_4 & 0 \\ R_2 & -R_2 - R_3 - R_6 - R_8 & R_3 & R_6 \\ -R_4 & -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ 0 & R_6 & R_5 & -R_5 - R_6 - R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Así entonces, siguiendo un procedimiento equivalente al presentado en (15)-(16) es posible calcular las corrientes de malla del circuito a través de la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{|\mathbf{T}_a|}{|\mathbf{A}|} = 2.73467 \text{ [mA]} \\ I_b &= \frac{|\mathbf{T}_b|}{|\mathbf{A}|} = 0.17398 \text{ [mA]} \\ I_c &= \frac{|\mathbf{T}_c|}{|\mathbf{A}|} = -1.17435 \text{ [mA]} \\ I_d &= \frac{|\mathbf{T}_d|}{|\mathbf{A}|} = -2.3418 \text{ [mA]}. \end{aligned}$$

A partir de ello, las variables de salida del circuito pueden resolverse en el modo siguiente:

$$\begin{aligned} y_1 &= -V_{R4} \\ &= -I_4 R_4 \\ &= -(I_c - I_a) R_4 \\ &= 5.8635 \text{ [V]}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} y_2 &= V_{R5} \\ &= I_5 R_5 \\ &= (I_c - I_d) R_5 \\ &= 6.5377 \text{ [V]}. \end{aligned} \quad (20)$$

**2.2.2. Solución del circuito basada en medidas** Una manera alternativa de resolver para el circuito anterior, los valores de salida:

$$y = [y_1 \ y_2]^T = [-V_{R4} \ V_{R5}]^T, \quad (21)$$

es a través de la formulación de un conjunto de ecuaciones ampliado para (18) que considere las corrientes que circulan por cada elemento; es decir:

$$\mathbf{x} = [I_1 \cdots I_8]^T. \quad (22)$$

Por tanto, sea la siguiente versión para (17) incorporando la *ley de Ohm*:

$$\begin{aligned} (I_1 R_1) + (I_2 R_2) - (I_4 R_4) &= V_1 \\ (I_2 R_2) + (I_3 R_3) + (I_6 R_6) - (I_8 R_8) &= 0 \\ (I_3 R_3) + (I_4 R_4) + (I_5 R_5) &= 0 \\ (I_5 R_5) - (I_6 R_6) + (I_7 R_7) &= V_2, \end{aligned}$$

que combinada con la *ley de corrientes de Kirchhoff* (LCK):

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_8 &= 0 \\ I_2 - I_3 + I_4 &= 0 \\ I_3 - I_5 - I_6 &= 0 \\ I_6 + I_7 + I_8 &= 0, \end{aligned}$$

permite constituir la siguiente representación matricial alternativa para el sistema de

ecuaciones lineales que describen el circuito:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{bu}, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & 0 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & 0 & -R_8 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & -R_6 & R_7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}.$$

De esta manera, aprovechando la linealidad del sistema es posible emplear superposición para obtener, a través de la regla de Cramer, la siguiente formulación para la solución del vector de incógnitas del sistema:

$$I_i = \sum_{j=1}^2 \frac{|\mathbf{T}_{ij}|}{|\mathbf{A}|} V_j,$$

donde  $\mathbf{T}_{ij}$  se construye a partir de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{b}$ , reemplazando la  $i$ -ésima columna de  $\mathbf{A}$  por la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{b}$ .

Así entonces, reemplazando los valores incluidos en la Tabla 1, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 I_4 = & \frac{\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & 0 & -R_8 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & -R_6 & R_7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & 0 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & 0 & -R_8 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & -R_6 & R_7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} V_1 + \\
 & \frac{\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & 0 & -R_8 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & R_5 & -R_6 & R_7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & 0 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & 0 & -R_8 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & -R_6 & R_7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} V_2 \\
 = & \left( \frac{-2.5224 \times 10^{11}}{1.5174 \times 10^{15}} \times 15 \right) + \left( \frac{-1.074 \times 10^{11}}{1.5174 \times 10^{15}} \times 20 \right) = -3.9090 \text{ [mA]};
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
I_5 = & \left[ \begin{array}{cccccccc} R_1 & R_2 & 0 & -R_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & 0 & -R_8 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_6 & R_7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] V_1 + \\
& \left[ \begin{array}{cccccccc} R_1 & R_2 & 0 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & 0 & -R_8 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & -R_6 & R_7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] V_2 \\
& \left[ \begin{array}{cccccccc} R_1 & R_2 & 0 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & 0 & -R_8 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -R_6 & R_7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] V_2 \\
= & \left( \frac{6.5010 \times 10^{10}}{1.5174 \times 10^{15}} \times 15 \right) + \left( \frac{3.9750 \times 10^{10}}{1.5174 \times 10^{15}} \times 20 \right) = 1.1674 [mA].
\end{aligned} \tag{25}$$

A partir de lo anterior:

$$\begin{aligned}y_1 &= -V_{R4} \\ &= -I_4 R_4 \\ &= -(-3.9090 \text{ mA}) \times 1.5 \text{ k}\Omega \\ &= 5.8635 \text{ [V]},\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}y_2 &= V_{R5} \\ &= I_5 R_5 \\ &= 1.1674 \text{ mA} \times 5.6 \text{ k}\Omega \\ &= 6.5377 \text{ [V]},\end{aligned}\tag{27}$$

replicando los resultados presentados previamente en (20).

Más interesante aún es retomar los desarrollos abordados en la *Sección 2.1*, respecto al determinante de una matriz dependiente de parámetros.

Para ello, se introduce el *Teorema de las formas bilineales* atribuido a Lin, pero que constituye una forma alternativa para el *Teorema bilineal de Bode*, según se discute ampliamente en <sup>8</sup>:

*“Considere una red lineal e invariante en el tiempo, de parámetros concentrados, consistente en impedancias, admitancias y los 4 tipos de fuentes controladas. Considere además que algunos o todos los elementos de esta red, se caracterizan por variables distintas  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , mientras que a los elementos restantes se les asignan valores numéricos. Entonces, cualquier función  $T$  de la red que bien puede ser:  $\frac{V_o}{V_i}$ ,  $\frac{V_o}{I_i}$ ,  $\frac{I_o}{V_i}$  o bien  $\frac{I_o}{I_i}$ , puede ser expresada como el cociente de dos polinomios de primer grado en cada variable  $x_i \forall i = 1, 2, \dots, n$ ”.*

Tomando en cuenta lo anterior, *Bhattacharyya et al.* en <sup>9</sup> establecieron que:

*“La dependencia paramétrica entre corrientes y resistencias de un circuito eléctrico de corriente continua, puede ser representada mediante matrices de **rango 1** con respecto a dichos parámetros”.*

Así, considerando una variación paramétrica en  $R_8$  para el circuito de ejemplo, es válido a partir de (8) escribir la siguiente representación alternativa para (24):

$$\begin{aligned} I_4(R_8) &= \frac{|\mathbf{T}_{41}(R_8)|}{|\mathbf{A}(R_8)|} V_1 + \frac{|\mathbf{T}_{42}(R_8)|}{|\mathbf{A}(R_8)|} V_2 \\ &= \left( \frac{\alpha_{01} + \alpha_{11} R_8}{\beta_{01} + \beta_{11} R_8} \right) V_1 + \left( \frac{\alpha_{02} + \alpha_{12} R_8}{\beta_{02} + \beta_{12} R_8} \right) V_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Aplicando superposición, los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  pueden calcularse empleando ecuaciones recursivas en el modo siguiente. Inicialmente, considere  $V_2 = 0$  mientras  $V_1 \neq 0$ . En este caso, dados valores conocidos para  $R_8$ ,  $I_4$  y  $V_1$  en un instante  $k$ , la expresión (28) puede re-escribirse como:

$$\beta_{01} I_4[k] + \beta_{11} R_8[k] I_4[k] - \alpha_{11} R_8[k] V_1[k] = \alpha_{01} V_1[k] \quad (29)$$

Luego, considerando 3 instantes sucesivos para  $k$  es posible escribir:

$$\begin{aligned} \alpha_{01} V_1[1] &= \beta_{01} I_4[1] + \beta_{11} R_8[1] I_4[1] - \alpha_{11} R_8[1] V_1[1]; \\ \alpha_{01} V_1[2] &= \beta_{01} I_4[2] + \beta_{11} R_8[2] I_4[2] - \alpha_{11} R_8[2] V_1[2]; \\ \alpha_{01} V_1[3] &= \beta_{01} I_4[3] + \beta_{11} R_8[3] I_4[3] - \alpha_{11} R_8[3] V_1[3], \end{aligned}$$

expresión con representación matricial equivalente dada por:

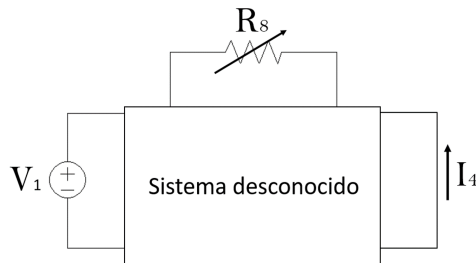
$$\begin{bmatrix} I_4[1] & R_8[1]I_4[1] & -R_8[1]V_1[1] \\ I_4[2] & R_8[2]I_4[2] & -R_8[2]V_1[2] \\ I_4[3] & R_8[3]I_4[3] & -R_8[3]V_1[3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{01} \\ \beta_{11} \\ \alpha_{11} \end{bmatrix} = \alpha_{01} \begin{bmatrix} V_1[1] \\ V_1[2] \\ V_1[3] \end{bmatrix} \quad (30)$$

Así entonces, asumiendo  $\alpha_{01} = 1$  serán suficientes sólo 3 valores de  $R_8$ ,  $I_4$  y  $V_1$  para calcular los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  restantes, mediante la solución siguiente:

$$\begin{bmatrix} \beta_{01} \\ \beta_{11} \\ \alpha_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_4[1] & R_8[1]I_4[1] & -R_8[1]V_1[1] \\ I_4[2] & R_8[2]I_4[2] & -R_8[2]V_1[2] \\ I_4[3] & R_8[3]I_4[3] & -R_8[3]V_1[3] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1[1] \\ V_1[2] \\ V_1[3] \end{bmatrix}. \quad (31)$$

En particular, siendo  $V_1[1] = V_1[2] = V_1[3] = 15 \text{ V}$ ;  $R_8[1] = 1 \text{ k}\Omega$ ;  $R_8[2] = 6 \text{ k}\Omega$  y  $R_8[3] = 10 \text{ k}\Omega$ , se obtuvieron medidas para  $I_4[k]$  dadas respectivamente por  $I_4[1] = 2.69 \text{ [mA]}$ ;  $I_4[2] = 2.44 \text{ [mA]}$ ;  $I_4[3] = 2.39 \text{ [mA]}$ , empleando el esquema general mostrado en la Fig. 4.

Figura 4. Esquema para análisis de dependencia paramétrica en variables de un sistema desconocido



A partir de ello, los coeficientes calculados para (31) fueron:

$$\begin{bmatrix} \beta_{01} \\ \beta_{11} \\ \alpha_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.20 \times 10^3 \\ 2.34 \\ 35.51 \times 10^{-5} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Un planteamiento similar, tomando  $V_1 = 0$  mientras  $V_2 = 20$  para los mismos valores de  $R_8$ , permitieron calcular:

$$\begin{bmatrix} \beta_{02} \\ \beta_{12} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.87 \times 10^4 \\ 8.42 \\ 6.77 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

bajo la suposición  $\alpha_{02} = 1$ .

De esta manera, se obtuvo el siguiente modelo aproximado para la relación paramétrica entre la corriente  $I_4$  (la variable de interés) y la resistencia  $R_8$  (el parámetro):

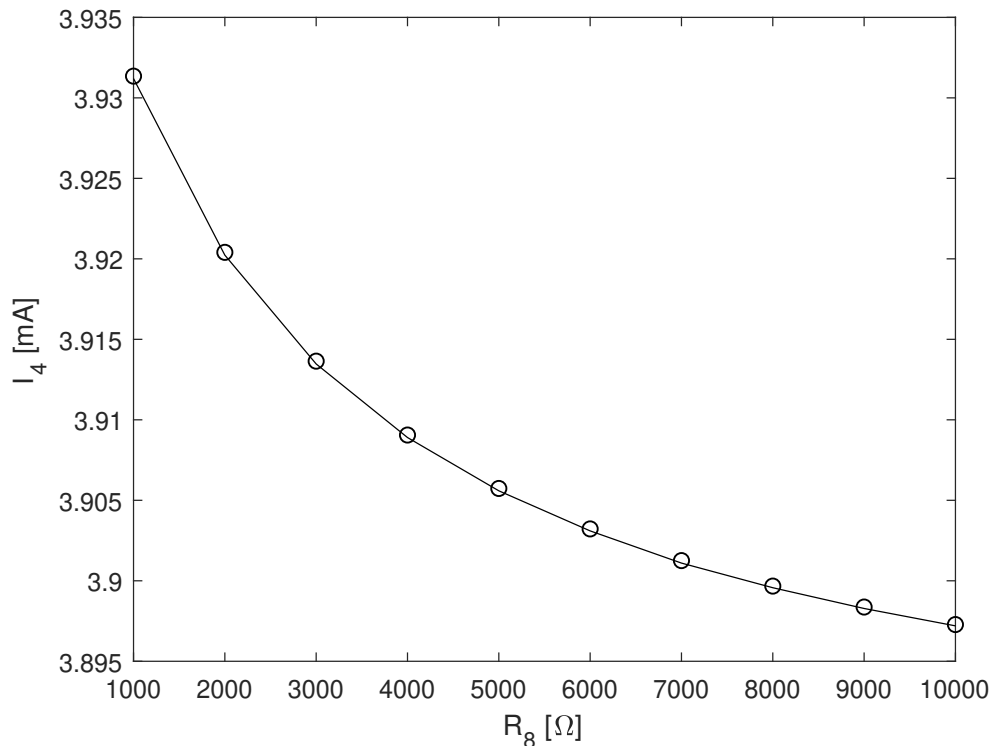
$$I_4(R_8) = \left( \frac{1 + 35.51 \times 10^{-5} R_8}{5.20 \times 10^3 + 2.34 R_8} \right) 15 + \left( \frac{1 + 6.77 \times 10^{-4} R_8}{1.87 \times 10^4 + 8.42 R_8} \right) 20. \quad (34)$$

Posteriormente, se realizó una evaluación numérica de la expresión anterior ante un barrido en los valores de  $R_8$  para 10 puntos en el rango  $R_8 \in [1, 10] \text{ k}\Omega$ , obteniendo la función correspondiente para  $I_4(R_8)$  visualizada en la Fig.5 (línea continua).

El mismo escenario se simuló para un circuito ante diferentes valores de  $R_8$ , empleando la herramienta *PSIM* (<https://powersimtech.com/>). Los valores de estado estacionario para la corriente  $I_4$  en el circuito, ante diferentes valores de  $R_8$  en el

rango de interés, se superponen (mediante círculos) a la evaluación numérica de la función (34) en la Fig.5, para efectos de comparación.

Figura 5.  $I_4$  como función de  $R_8$ , mostrando en la línea continua la aproximación funcional (34) y en los círculos una validación circuital en *PSIM*



Como se observa, la predicción obtenida por el modelo (34) es bastante pertinente con respecto al comportamiento del circuito, lo cual muestra el potencial de la metodología presentada para determinar representaciones matemáticas (funciones) para la dependencia paramétrica en variables de interés de sistemas con estructura desconocida, ante valores de parámetro y de entrada conocidos.

Es interesante también observar que el modelo (34), requiere solamente de 6 medidas en los valores de parámetro y la variable de salida, para ser determinado. Lo

anterior, reduce de manera ostensible el costo computacional del procedimiento de estimación de parámetros al compararse con otros métodos sugeridos en la literatura.

Ahora bien, evaluando (34) para el valor nominal de  $R_8$  consignado en la Tabla 1 se obtiene:

$$\begin{aligned} I_4(4\text{ k}\Omega) &= \left( \frac{1 + 35.51 \times 10^{-5} \times 4 \times 10^3}{5.20 \times 10^3 + 2.34 \times 4 \times 10^3} \right) 15 + \left( \frac{1 + 6.77 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^3}{1.87 \times 10^4 + 8.42 \times 4 \times 10^3} \right) 20 \\ &= 3.9090 \text{ [mA]}, \end{aligned}$$

lo cual coincide (en magnitud) con el resultado calculado previamente en (24). Para entender el cambio de signo basta analizar el sentido con el cual se tomó la medida en el esquema general de la Fig. 4. En cualquier caso, este resultado demuestra que el método predice con bastante precisión el valor para  $y_1$ , con similares conclusiones para el caso de  $I_5$  e  $y_2$ .

Finalmente, es bueno resaltar que la dependencia explícita de  $I_4$  en  $R_8$  y la dependencia explícita de  $y_1$  en  $I_4$  (ver (19)), permiten constituir una dependencia implícita de  $y_1$  en  $R_8$ ; es decir,  $y_1(I_4) = g(f(R_8)) = y_1(R_8)$ . Por tanto, el método basado en medidas presentado puede ser equivalentemente aplicado para calcular  $y_1$  de manera directa.

### **2.3. EL CASO PARTICULAR DEL EQUIVALENTE DE THEVENIN**

Cuando en el esquema general de la Fig. 4 el parámetro se ubica en los mismos terminales que la variable de interés, la dependencia entre ambas cantidades asume una forma especial que se relaciona, para el caso de circuitos eléctricos, con su equivalente de *Thevenin*.

De la teoría general de circuitos se sabe que el *teorema de Thevenin* <sup>22</sup> permite reemplazar cualquier red eléctrica, excluyendo la carga, por un circuito equivalente que contenga sólo una fuente de voltaje independiente en serie con una resistencia, de tal forma que la relación voltaje-corriente en la carga se conserve sin cambio.

El método tradicional para cálculo del equivalente de *Thevenin* en un circuito es invasivo e implica cortocircuitar el punto de análisis, siendo una situación inviable desde un punto de vista práctico por razones de seguridad e integridad en la operación del sistema (del cual el circuito hace parte).

Alternativamente, se puede pensar en un escenario experimental en el cual se retira la carga y se mide la tensión de circuito abierto con el circuito alimentado, mientras que sin alimentación se determina la medida de la impedancia en terminales de la carga, evidenciando la necesidad de detener la operación del sistema (del cual el circuito hace parte) para realizar la medición.

A continuación se describe una forma alternativa para cálculo del equivalente de *Thevenin* en sistemas eléctricos, a partir de medidas. Este método es no invasivo y permite realizar cálculos sin alterar la estructura del sistema.

**2.3.1. Equivalente de *Thevenin* basado en medidas** Suponga que se desea encontrar el equivalente de Thevenin para el circuito de la Fig.3, en los terminales que conectan la resistencia  $R_2$ .

---

<sup>22</sup> J. D. Irwin. *Análisis básico de circuitos en ingeniería*. 5nd. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., 1997.

A partir de la formulación general para el sistema lineal de ecuaciones que describe el circuito dada en (24), es claro que la solución para la corriente  $I_2$  que fluye a través de  $R_2$ , empleando la regla de cramer, no presenta dependencia en términos de dicho parámetro. De hecho:

$$I_2(R_2) = \frac{|\mathbf{T}_{21}|}{|\mathbf{A}(R_2)|} V_1 + \frac{|\mathbf{T}_{22}|}{|\mathbf{A}(R_2)|} V_2, \quad (35)$$

siendo:

$$|\mathbf{T}_{21}| = \begin{vmatrix} R_1 & 1 & 0 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & 0 & -R_8 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & -R_6 & R_7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (36)$$

y

$$|\mathbf{T}_{22}| = \begin{vmatrix} R_1 & 0 & 0 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & 0 & -R_8 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R_5 & -R_6 & R_7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (37)$$

cantidades que evidentemente no dependen del parámetro  $R_2$ . Así, es posible aproximar un polinomio equivalente de orden cero, para los términos del numerador en la función (35), en el modo siguiente:

$$I_2(R_2) = \left( \frac{\alpha_{01}}{\beta_{01} + \beta_{11}R_2} \right) V_1 + \left( \frac{\alpha_{02}}{\beta_{02} + \beta_{12}R_2} \right) V_2.$$

Ahora bien, bajo la suposición que  $V_1$  y  $V_2$  son de valor constante, es posible escribir:

$$I_2(R_2) = \frac{\bar{\alpha}}{\beta_0 + \beta_1 R_2}, \quad (38)$$

siendo  $\bar{\alpha} = \alpha_{01}V_1 + \alpha_{02}V_2$ . Nótese que se asume para esta condición especial que  $\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_0$  y  $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_1$ , tomando en cuenta que al ser las fuentes de entrada constantes no se requiere aplicar superposición, en términos de la dependencia paramétrica.

De esta manera, el voltaje en la resistencia puede expresarse como:

$$\begin{aligned} V_{R_2} &= R_2 I_2 \\ &= \frac{R_2 \bar{\alpha}}{\beta_0 + \beta_1 R_2}, \end{aligned} \quad (39)$$

y por tanto, el voltaje en circuito abierto ocurre para  $R_2 \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} v_{oc} &= V_{R_2} \Big|_{R_2 \rightarrow \infty} \\ &= \frac{R_2 \bar{\alpha}}{\beta_0 + \beta_1 R_2} \Big|_{R_2 \rightarrow \infty} \\ &= \frac{\frac{R_2 \bar{\alpha}}{R_2}}{\frac{\beta_0 + \beta_1 R_2}{R_2}} \Big|_{R_2 \rightarrow \infty} \\ &= \frac{\bar{\alpha}}{\beta_1}. \end{aligned} \quad (40)$$

De manera similar, se tiene que la corriente de cortocircuito ocurre para  $R_2 \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
 i_{sc} &= I_{R_2} \Big|_{R_2 \rightarrow 0} \\
 &= \frac{\bar{\alpha}}{\beta_0 + \beta_1 R_2} \Big|_{R_2 \rightarrow 0} \\
 &= \frac{\bar{\alpha}}{\beta_0}.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Así entonces, el voltaje de *Thevenin*  $V_{th}$  corresponde con la tensión de circuito abierto  $v_{oc}$ , al tiempo que la resistencia (o impedancia) de *Thevenin* se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
 R_{th} &= \frac{V_{th}}{i_{sc}} \\
 &= \frac{\bar{\alpha}}{\beta_1} / \frac{\bar{\alpha}}{\beta_0} \\
 &= \frac{\beta_0}{\beta_1}.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Con estos resultados para  $V_{th}$  y  $R_{th}$ , se procedió a determinar los coeficientes  $\bar{\alpha}$ ,  $\beta_0$  y  $\beta_1$  en la ecuación (38), empleando el método iterativo ilustrado en la *Sección* 2.2.2. Los valores obtenidos para el circuito de la Fig.3 empleando simulaciones en la herramienta *PSIM*<sup>23</sup> se incluyen en la Tabla 2.

A partir de estos resultados, se determina de (40)-(42) el equivalente de *Thevenin* para el circuito en dicho punto, en el modo siguiente:

---

<sup>23</sup> Es importante aclarar que para este cálculo se emplearon dos mediciones y se asumió  $\beta_1 = 1$ . Los valores de parámetro empleados fueron:  $R_2[1] = 4 \text{ k}\Omega$  y  $R_2[2] = 10 \text{ k}\Omega$ . Asimismo, los valores correspondientes medidos en la corriente fueron:  $I_2[1] = 1.8673 \text{ mA}$  e  $I_2[2] = 0.9021 \text{ mA}$ .

Tabla 2. Coeficientes calculados para ecuación (38) suponiendo  $\beta_1 = 1$

Parámetro	Valor
$\beta_0$	1607.97
$\bar{\alpha}$	10.47

$$\begin{aligned}
 V_{th} &= \frac{\bar{\alpha}}{\beta_1} \\
 &= \frac{10.47}{1} \\
 &= 10.47 [V]; \tag{43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{th} &= \frac{\beta_0}{\beta_1} \\
 &= \frac{1607.97}{1} \\
 &= 1607.97 [\Omega]. \tag{44}
 \end{aligned}$$

Los mismos resultados se contrastan calculando dichos parámetros mediante el método invasivo tradicional, en el cual la resistencia de *Thevenin* se obtiene haciendo cero las fuentes independientes. Siguiendo este procedimiento se genera el diagrama circuital reducido para el circuito de la Fig.3, mostrado en la Fig.7(a). A partir de ello, se realizan las transformaciones circuitales ilustradas en las Figs.7(b)-7(i) para obtener un valor  $R_{th} = 1607.51 [\Omega]$ , involucrando las expresiones relacionadas en la Tabla 3.

Para el caso de  $V_{th}$ , se deben plantear y resolver las ecuaciones del circuito para  $I_2 = 0 [A]$  y determinar la diferencia de potencial entre el nodo que une las resistencias  $R_1$  y  $R_8$  y el nodo que une las resistencias  $R_4$  y  $R_3$ . A partir de cálculos que serán omitidos por simplicidad, se obtiene:  $V_{th} = 10.68 [V]$ .

Figura 6. Transformaciones de circuito para determinar  $R_{th}$

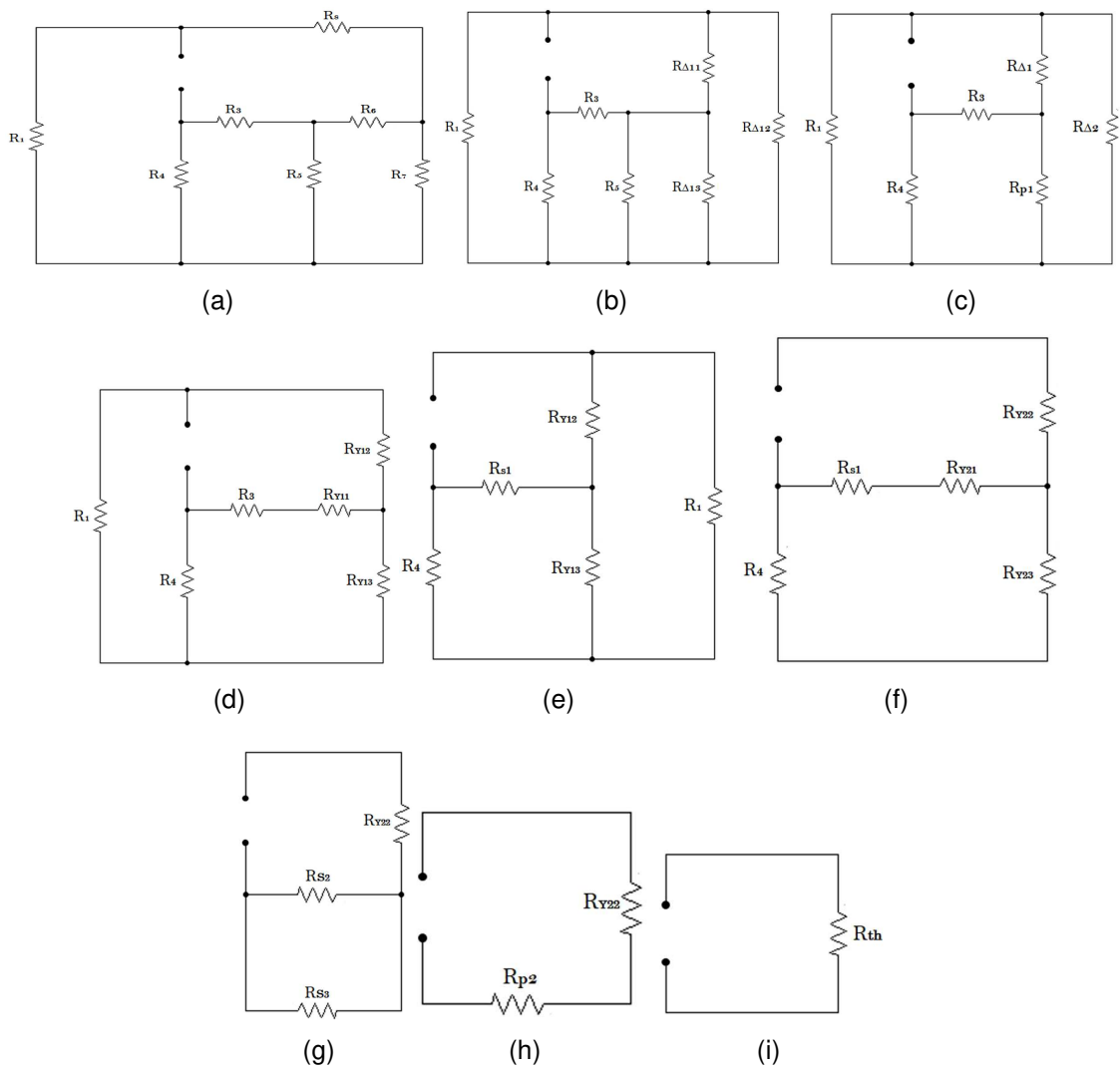


Tabla 3. Expresiones para cálculo de transformaciones en Fig. 6

Parámetro	Expresión
$R_{\Delta 11}$	$\frac{R_6 R_7 + R_6 R_8 + R_7 R_8}{R_7}$
$R_{\Delta 12}$	$\frac{R_6 R_7 + R_6 R_8 + R_7 R_8}{R_6}$
$R_{\Delta 13}$	$\frac{R_6 R_7 + R_6 R_8 + R_7 R_8}{R_8}$
$R_{y11}$	$\frac{R_{\Delta 1} R_{p1}}{R_{\Delta 1} + R_{\Delta 2} + R_{p1}}$
$R_{y12}$	$\frac{R_{\Delta 2} R_{\Delta 1}}{R_{\Delta 1} + R_{\Delta 2} + R_{p1}}$
$R_{y13}$	$\frac{R_{\Delta 2} R_{p1}}{R_{\Delta 1} + R_{\Delta 2} + R_{p1}}$
$R_{p1}$	$\frac{R_{\Delta 13} R_5}{R_{\Delta 13} + R_5}$
$R_{p2}$	$\frac{R_{s2} R_{s3}}{R_{s2} + R_{s3}}$
$R_{s1}$	$R_3 + R_{y11}$
$R_{s2}$	$R_{s1} + R_{y21}$
$R_{s3}$	$R_4 + R_{y23}$
$R_{th}$	$R_{p2} + R_{y22}$

Como se observa, los resultados obtenidos con el método tradicional son bastante consistentes con los del método basado en medidas. En el *Capítulo* siguiente se realizará una aplicación de las ideas presentadas, para el caso de análisis de fallos en Sistemas Eléctricos de Potencia.

### 3. DIMENSIONAMIENTO DE FALLOS PARA SEP A PARTIR DE MEDIDAS

El método basado en medidas abordado en el *Capítulo* anterior para determinar la relación entre variables y parámetros de un sistema en régimen permanente, se utiliza en el presente apartado para efectuar análisis de fallos en *sistemas eléctricos de potencia* (SEP). Particularmente, se hará uso del equivalente de *Thevenin* basado en medidas para estimar, en un modo no invasivo, las corrientes de falla en un SEP como resultado fundamental para el dimensionamiento de sus respectivas protecciones.

#### 3.1. CÁLCULO DE CORRIENTES DE FALLA EN SEP

Los SEP son el objeto de estudio de la ingeniería eléctrica y por tanto, revisten no solamente la mayor importancia desde el punto de vista disciplinar sino también la mayor complejidad en términos de análisis, debido al alto número de elementos que deben interactuar apropiadamente para asegurar la correcta operación del sistema.

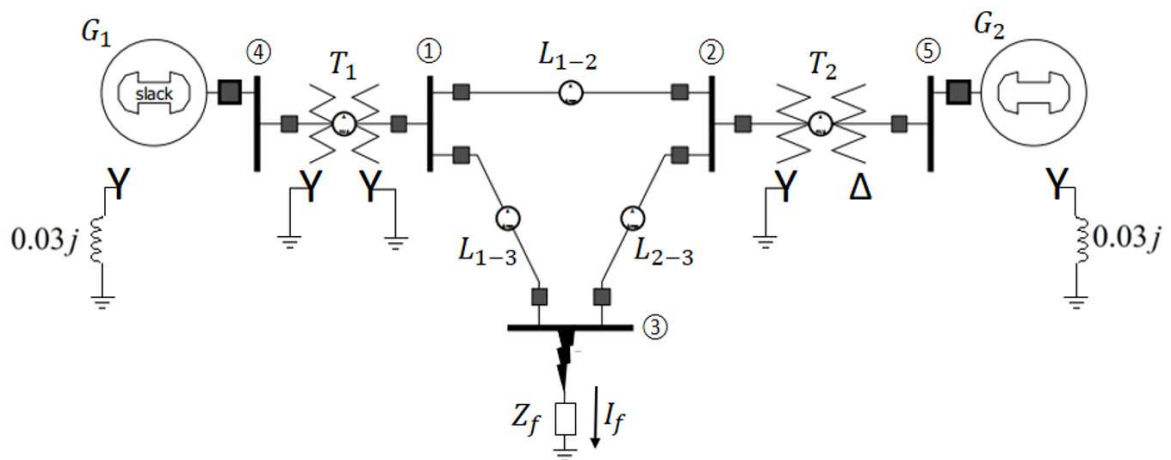
De los posibles escenarios que interesan a un SEP, existe uno de particular importancia que tiene que ver con la manera en la cual responde ante una situación inesperada denominada *fallo*.

En la *Introducción* se realizó una breve mención a los tipos de falla en un SEP, así como el procedimiento general para determinar las condiciones de falla en el sistema (ver Fig. 2). Para un tratamiento más puntual de la temática, se recomienda al lector interesado consultar <sup>3</sup>.

A continuación, se ilustrará mediante un ejemplo simple, el cálculo para las condiciones de falla en un SEP empleando el método basado en medidas.

**3.1.1. Condiciones de falla en un SEP a partir de medidas** Considere el SEP mostrado en la Fig. 7. Dicho sistema está constituido por dos generadores, dos transformadores (con conexión  $Y - Y$  e  $Y - \Delta$  respectivamente) y líneas de transmisión entre las barras 1, 2 y 3.

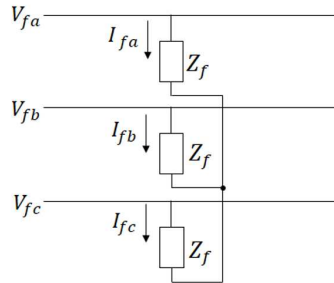
Figura 7. SEP empleado como caso de estudio



La elección para dicho sistema como caso de estudio se justifica por ser un ejemplo sugerido en <sup>1</sup> (*Ejercicio 9-11, Capítulo 9*) para el análisis de fallas. A partir de ello, el estudio a realizar en el presente *Capítulo* se concentrará en una falla con impedancia de  $0.1 \Omega$  aplicada en la barra 3, atendiendo a dos escenarios distintos: una falla simétrica de tipo *trifásico balanceado* y una falla asimétrica de tipo *línea a línea*.

**Fallo trifásico balanceado** Una falla *trifásica balanceada* (ver Fig. 8) es categorizada como de tipo simétrico. Se caracteriza porque las tensiones de línea en la barra varían de manera equivalente en magnitud y presentan un desfase angular

Figura 8. Falla trifásica balanceada



que obedece al tipo de secuencia disponible en la red (en este caso de secuencia positiva).

Por tanto, empleando el método basado en medidas y más particularmente el equivalente de *Thevenin* descrito en la *Sección 2.3*, se realiza el cálculo para las corrientes de falla asumiendo la estructura presentada en la Fig. 9, donde  $V$  representa la entrada correspondiente al conjunto de generadores en el sistema y  $Z_f$  el valor para la impedancia de falla (en adelante el parámetro).

Figura 9. Esquema para análisis de SEP sometido a fallos



Ahora bien, el comportamiento en estado estacionario para el SEP de la Fig. 7 ante las condiciones nominales indicadas en la Tabla 4, fue determinado empleando simulación numérica en la herramienta *PowerWorld* (<https://www.powerworld.com/>) para dos valores distintos de la impedancia de falla  $Z_f$ .

A partir de ello, los valores de tensión en la barra 3 correspondientes a los voltajes

Tabla 4. Valores nominales para SEP analizado

Elemento	Valor
$G_1$	100 MVA; 25 kV
$G_2$	100 MVA; 13.8 kV
$T_1$	100 MVA; 25/230 kV
$T_2$	100 MVA; 13.8/230 kV
$L_{1-2}$	100 MVA; 230 kV
$L_{2-3}$	100 MVA; 230 kV
$L_{3-1}$	100 MVA; 230 kV

Tabla 5. Valores simulados en *PowerWorld* para SEP ante falla trifásica balanceada

$Z_f$	$V_{fa}$	$V_{fb}$	$V_{fc}$
0.1	$0.494 \angle -55.46^\circ$	$0.494 \angle -175.46^\circ$	$0.494 \angle 64.54^\circ$
0.05	$0.274 \angle -69.26^\circ$	$0.274 \angle 170.74^\circ$	$0.274 \angle 50.74^\circ$

de falla ante las condiciones de falla  $Z_f$  consideradas, fueron medidos según listado en la Tabla 5.

Aquí  $V_{f_i}$  hace alusión al  $i$ -ésimo voltaje de línea que, como se observa, conserva su magnitud en las tres fases para el caso de una falla simétrica.

De esta manera, asumiendo a partir de (39) (para  $\beta_1 = 1$ ) una relación paramétrica entre las tensiones de falla  $V_f$  y la impedancia de falla  $Z_f$ , dada por:

$$V_f = \frac{Z_f \bar{\alpha}}{\beta_0 + Z_f},$$

es posible constituir el siguiente sistema de ecuaciones para dos medidas consecutivas:

$$\begin{aligned} \beta_0 V_f[1] - Z_f[1] \bar{\alpha} &= -Z_f[1] V_f[1]; \\ \beta_0 V_f[2] - Z_f[2] \bar{\alpha} &= -Z_f[2] V_f[2], \end{aligned}$$

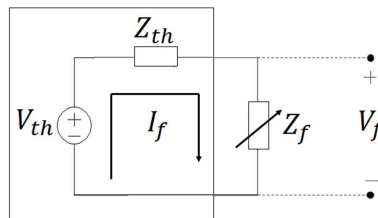
que matricialmente permite definir:

$$\begin{bmatrix} V_f[1] & -Z_f[1] \\ V_f[2] & -Z_f[2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Z_f[1]V_f[1] \\ Z_f[2]V_f[2] \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Reemplazando los valores obtenidos en la Tabla 5 (siendo  $V_f = V_a$ ), es posible obtener como solución:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.175 \angle 90^\circ \\ 0.9963 \angle 4.77^\circ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Z_{th} \\ V_{th} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Figura 10. Equivalente de Thevenin para SEP sometido a fallos



Dicho equivalente de *Thevenin* permite reemplazar la estructura del SEP en la Fig. 9 por el esquema mostrado en la Fig. 10 (ante la condición nominal de falla  $Z_f = 0.1\Omega$ ), constituyendo una malla a partir de la cual el cálculo para la corriente de falla en la línea viene dado de manera simple como:  $I_{f_a} = 4.9430 \angle -55.4851^\circ [A]$ .

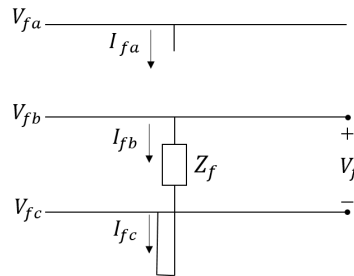
Resultados equivalentes pueden obtenerse para las líneas *b* y *c* según mostrado en la Tabla 7.

Tabla 6. Valores simulados en *PowerWorld* para SEP ante falla línea a línea

$Z_f$	$V_{fa}$	$V_{fb}$	$V_{fc}$
0.1	$0.996\angle 4.8^\circ$	$0.729\angle -170.08^\circ$	$0.278\angle 171.25^\circ$
0.05	$0.996\angle 4.8^\circ$	$0.619\angle -173.61^\circ$	$0.378\angle -177.82^\circ$

**Fallo línea a línea** Una falla *línea a línea* es categorizada como de tipo asimétrica (ver Fig. 11). A diferencia de la falla *trifásica balanceada* esta afecta dos líneas, haciendo que la tensión de la línea restante permanezca constante.

Así entonces, siguiendo el mismo planteamiento que para el caso simétrico, se Figura 11. Falla línea a línea



emplea el esquema basado en medidas de la Fig. 9 considerando la falla entre las líneas *b* y *c*; es decir:  $V_f = V_{fb} - V_{fc}$ .

Ante esta situación, las tensiones de falla medidas empleando simulación numérica en la herramienta *PowerWorld* se incluyen en la Tabla 6 y por tanto la versión equivalente del sistema de ecuaciones (45) permite obtener para este caso: resultado que una vez más permite reemplazar la estructura del SEP por el esquema de la Fig. 10 (ante la condición nominal de falla  $Z_f = 0.1 \Omega$ ), constituyendo una malla a partir de la cual el cálculo para la corriente de falla viene dado como:  $I_f = 4.7262\angle -158.6482^\circ [A]$ .

Los resultados obtenidos para las corrientes de falla tanto para el caso *asimétrico* como *simétrico*, fueron validados a partir de cálculos equivalentes generados en la herramienta *PowerWorld*, mostrando una alta efectividad en las predicciones por parte del método basado en medidas según se evidencia a partir del contraste in-

Tabla 7. Constraste resultados cálculo para corrientes de falla

Método	$I_{f_a}$ simétrica	$I_{f_b}$ simétrica	$I_{f_c}$ simétrica	$I_f$ asimétrica
Basado en medidas	4.9430∠ - 55.4851° [A]	4.9395∠ - 175.4496° [A]	4.9397∠64.5520° [A]	4.7262∠ - 158.6482° [A]
Teórico simulado	4.9440∠ - 55.4600° [A]	4.9440∠ - 175.4600° [A]	4.9440∠64.5400° [A]	4.7420∠ - 159.2600° [A]
% error	-0.0202	-0.0910	-0.0870	-0.3332

cluido en la Tabla 7<sup>24</sup>.

---

<sup>24</sup> El porcentaje de error fue calculado sobre la magnitud del número complejo.

#### **4. RECOMENDACIONES**

La determinación de los coeficientes que permiten aproximar la dependencia paramétrica en las señales de interés del sistema, se debe realizar para rangos del parámetro que incluyan aquellos valores esperados en la práctica. Lo anterior asegura una mayor precisión en las predicciones del modelo obtenido, según documentado en trabajos relacionados con la temática y reportados en la literatura.

## **5. TRABAJO FUTURO**

Actividades complementarias a los desarrollos presentados, incluyen la utilización de bases de datos reales para validar las predicciones del método propuesto y el análisis de la influencia de ruidos de medida en la precisión de los resultados.

## 6. CONCLUSIONES

A partir de los desarrollos presentados y los resultados obtenidos en el presente trabajo de grado, es posible enunciar la siguiente conclusión general:

- Se implementó el método de cálculo del equivalente de *Thevenin* de un sistema eléctrico de potencia basado en medidas, comparando su desempeño con técnicas convencionales. Fue posible determinar con tan sólo dos medidas sucesivas, el circuito equivalente en un punto del sistema para el cual se asumen fallas con valores de impedancia conocida y a partir de ello, calcular la corriente de falla correspondiente ante condiciones nominales del sistema. Lo anterior se verificó tanto para fallas de tipo simétrico como asimétrico.

De manera más puntual:

- Se interpretó el método de cálculo para el equivalente de *Thevenin* basado en medidas desarrollado por Bhattacharyya *et al* en <sup>9</sup>, adaptando su formulación para cálculos en un sistema eléctrico de potencia. En particular, el *Capítulo 2* realizó una descripción del teorema bilineal de Bode y su adaptación a la resolución de circuitos eléctricos mediante una forma alternativa de la *Regla de Cramer*, aproximando mediante polinomios de primer grado los determinantes de matrices dependientes de parámetros circuitales. Un caso especial fue abordado en la *Sección 2.3* donde se mostró que la variación de un parámetro en el punto de medida permite obtener el equivalente de *Thevenin* en dicho punto.

- Se diseñó y simuló un escenario de pruebas para cálculo del equivalente de *Thevenin* en un sistema eléctrico de potencia, aplicado al estudio de componentes simétricas y asimétricas de fallas. Empleando como base un sistema sugerido en <sup>1</sup> (*Ejercicio 9-11, Capítulo 9*) para el análisis de fallas, se analizó en la *Sección 3.1.1* los casos correspondientes a una falla simétrica de tipo *trifásico balanceado* y una falla asimétrica de tipo *línea a línea*. Para ambas situaciones se simularon las medidas del sistema de potencia en estado estacionario empleando la herramienta *PowerWorld* (<https://www.powerworld.com/>) para valores distintos de la impedancia de falla  $Z_f$ .
  
- Se comparó el desempeño del método propuesto para cálculo del equivalente de *Thevenin* con respecto a una técnica convencional (e.g. cálculo teórico). Empleando la herramienta *PowerWorld* (<https://www.powerworld.com/>) se verificaron los valores para las corrientes de falla calculados mediante el equivalente de *Thevenin* proporcionado por el método basado en medidas, permitiendo corroborar su efectividad. En particular, la *Tabla 7* incluye un contraste de resultados entre el método basado en medidas y el teórico simulado en *PowerWorld*, valorado mediante una medida porcentual de error inferior al 1%.
  
- Es importante mencionar que los resultados presentados sugieren que el método no presenta un funcionamiento apropiado cuando se desarrolla en fallas que presentan secuencia cero, es decir que tienen componente a tierra ya que los resultados arrojados por el método, no coinciden con los valores obtenidos a través de simulación.

## BIBLIOGRAFÍA

- Abdelkader, Sobhy M y D John Morrow. "Online Thevenin equivalent determination considering system side changes and measurement errors". En: *IEEE Transactions on Power Systems* 30.5 (2015), págs. 2716-2725 (vid. pág. 18).
- B., Shankar, Keel L. y Daniel Mohsenizadeh. *Linear Systems: A Measurement Based Approach*. 1er. Nueva Delhi: Ed. Springer, 2014 (vid. págs. 17, 20-22, 34, 55).
- Bergen, Arthur. *Power System Analysis*. 2nd. Upper Saddle River, N.J: Ed. Prentice-Hall, 1986 (vid. pág. 13).
- Bhaya, Amit, Edwin Alejandro Herrera y Oumar Diene. "Revisiting the maximum power transfer for linear n-ports with uncoupled loads and applications to power systems". En: *International Journal of Circuit Theory and Applications* 44.9 (2016), págs. 1631-1656 (vid. págs. 17, 21, 33).
- Bode, Hendrik Wade y col. "Network analysis and feedback amplifier design". En: (1945) (vid. pág. 21).
- Charles; Alexander y Matthew Sadiku. *Fundamentos de Circuitos Eléctricos*. 3ra. New York: Ed. McGraw-Hill, 2000 (vid. pág. 15).
- Chuang, Matt C-Y, S-J Steven Tsai y Chia-Chi Chu. "Fault locating estimation using Thevenin equivalent in power systems". En: *IPEC, 2010 Conference Proceedings*. IEEE. 2010, págs. 499-504 (vid. pág. 19).
- F., Quíntela y Redondo Roberto. *Redes Eléctricas de Kirchhoff*. 2nd. Bejar (Salamanca): Ed. Revide S.L, 2005 (vid. pág. 15).

- Garrido, Jorge. *Método para la localización de fallas de red a partir de la instalación de medidores inteligentes en los sistemas eléctricos de distribución*. Tesis de grado. Bucaramanga-Colombia: Universidad industrial de Santander, 2016 (vid. pág. 18).
- Glover, J. D. y M. S. Sarma. *Power system analysis and design: with personal computer applications*. 2nd. Boston: PWS-KENT Publishing Company, 1994 (vid. págs. 13, 47, 56).
- Grainger, John J. y W. Stevenson. *Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia*. 2nd. New York: Ed. McGraw-Hill, 1982 (vid. págs. 14, 46).
- Grossman, Stanley I. *Algebra lineal*. 2nd. Belmont: Grupo Editorial Iberoamérica, 1987 (vid. págs. 21, 24).
- Irwin, J. D. *Análisis básico de circuitos en ingeniería*. 5nd. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., 1997 (vid. pág. 39).
- Jiangmeng, Zhang. "On the application of PMU measurements to system stability analysis". Master's Thesis. University of Illinois at Urbana-Champaign, 2012 (vid. pág. 16).
- M., Jian, Yuri M. y Zhaoyang D. *Phasor Measurement Unit and Its Application in Modern Power Systems*. 1er. Berlin: Ed. Springer, 2010 (vid. pág. 16).
- M., Mohammad e Iftakhar. "Thevenin Equivalent Circuit Estimation and Application for Power System Monitoring and Protection". Master's Thesis. University of Kentucky, 2008 (vid. pág. 18).

- Mohammadi, Pooria. "PMU-Based Adaptive Central Protection Unit for Power Systems with High DG Penetration". Master's Thesis. University of Texas at Tyler, 2014 (vid. pág. 18).
- Oliveira, V., R. Alzate y S. Bhattacharyya. "A measurement-based approach with accuracy evaluation and its applications to circuit analysis and synthesis". En: *International Journal of Circuit Theory and Applications* (2017) (vid. pág. 17).
- Paniagua, L. y RB Prada. "Voltage stability assessment using equivalent Thevenin". En: *Central American and Panama Convention, 2015 IEEE Thirty Fifth*. IEEE. 2015, págs. 1-6 (vid. pág. 18).
- Sanchez, Christian. "Estimating the parameters of a Thevenin equivalent system based on output voltage and current measurements: computational challenges and simulated studies". Master's Thesis. University of Illinois at Urbana-Champaign, 2012 (vid. pág. 18).
- Zhang, J. y D. Chen. "On the application of Phasor Measurement Units to power system stability monitoring and analysis". En: *Power and Energy Conference at Illinois (PECI), 2012 IEEE*. IEEE. 2012, págs. 1-6 (vid. pág. 19).
- Zuluaga, Andrés. "Estabilidad de tensión con equivalentes Thevenin en tiempo real involucrando agotamiento de reactivos". Tesis de maestría. Universidad Pontificia Bolivariana, 2015 (vid. pág. 18).