

Energía oscura como interacción entre los campos bosónicos de Higgs y Yang-Mills

Miguel Ángel Álvarez Ballesteros

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director

Yeinzon Rodríguez García

Doctorado en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2019

### **Dedicatoria**

Para mi Papá, mi Mamá y Francy, que siempre han estado allí para apoyarme, para Milenita que siempre me hace reír y para Emiliano.

### **Agradecimientos**

La culminación de mis estudios en el pregrado se ve representada en esta tesis, que no solo es mía, es también de todas las personas que me han ayudado y brindado una mano amiga durante los años que he cursado en la universidad. Entre estas personas resaltan mi familia, que me ha ayudado incondicionalmente y con los cuales estoy sumamente agradecido, todo es para ellos. Se destaca también mi director de tesis, el profesor Yeinzon Rodríguez, del cual he aprendido casi todo lo que sé de cosmología, cómo hacer ciencia y cómo atacar los problemas; considero que la formación que me ha brindado es especial y por lo tanto estoy profundamente agradecido. Quiero agradecer también a John Bayron Orjuela-Quintana y a el profesor César Valenzuela, por las fructíferas discusiones y consejos.

Agradecimientos también a mi novia, Nicky, la cual me ha ayudado, ofreciendome coraje y apoyo. Mis amigos que siempre han estado ahí cuando los he necesitado, Rafael, Daniel, Carlos, Camila, Camilo, David, Jose, Cristian y muchos otros que seguramente me perdonarán por no incluir sus nombres en esta larga lista, gracias parceros; también agradezco a los muchachos de residencias que han sido grandes compañeros, y finalmente a la UIS, que me ha brindado un hogar, literal y figurativamente.

**Tabla de Contenido**

<b>1. Introducción</b>	<b>18</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>22</b>
2.1. Principio cosmológico	22
2.2. Métrica de Bianchi tipo I	24
2.3. Ecuación de continuidad para fluidos ideales	26
2.4. Fluido ideal	28
2.5. Teoría de Yang-Mills	29
2.6. Sector de Higgs	40
2.7. Triada cósmica	44
<b>3. Modelo Einstein Yang-Mills Higgs SU(2)</b>	<b>46</b>
3.1. Interacción entre dos tipos de bosones: Higgs y Yang-Mills SU(2)	46
3.2. Sistema dinámico	56
3.2.1. Parametrización en términos de variables adimensionales	56
3.2.2. Puntos críticos, variedades críticas y estabilidades	60
3.3. Solución numérica	64
3.3.1. Dominación por la quinción	69
3.3.2. Dominación por la radiación	71

EINSTEIN YANG-MILLS HIGGS	7
3.3.3. Dominación por la materia	73
3.3.4. Dominación por la energía oscura	73
3.3.5. Evolución total	74
3.4. Conexión con física de partículas	77
<b>4. Modelo Einstein Yang-Mills Higgs SO(3)</b>	<b>81</b>
4.1. Interacción entre dos tipos de bosones: Higgs y Yang-Mills SO(3)	81
4.2. Sistema dinámico	88
4.2.1. Parametrización en términos de variables adimensionales	88
4.2.2. Puntos críticos, variedades críticas y su estabilidad	92
4.3. Solución numérica	99
4.4. Conexión con física de partículas	112
<b>5. Conclusiones</b>	<b>114</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>116</b>
5.1. Ecuaciones de campo de Einstein	144
5.2. Ecuaciones de campo de Euler-Lagrange	150

### Lista de Figuras

- Figura 2.1. Se muestra la gráfica de los datos de Hubble del paper en el que publicó sus resultados Hubble (1929). En el eje absciso se encuentra la distancia medida en parsecs, en el eje ordenado se encuentra la velocidad, se puede observar la interpolación usada por Hubble relacionando las distancias con las velocidades. 23
- Figura 2.2. Se muestran dos mallas, cada malla representa las coordenadas comóviles cartesianas para diferentes tiempos  $t_1$  y  $t_2$ . Se puede observar que cada una de las galaxias tiene las mismas coordenadas para los diferentes tiempos, pero su distancia física con respecto al origen cambia según el coeficiente  $a(t)$ . Esta configuración corresponde a  $K = 0$ . 24
- Figura 2.3. En la gráfica se puede observar el cambio de los logaritmos de las densidades de energía en función del logaritmo del parámetro de expansión. Originalmente se tiene una dominación de la radiación; la razón de decrecimiento de la densidad de materia es menor que la de la densidad de radiación, dando paso a una época dominada por materia, la densidad de la energía de vacío permanece constante independientemente de la expansión, dando lugar eventualmente a una dominación por la constante cosmológica. 29

Figura 2.4. Se muestra el valor del potencial  $V(\phi)$  en función de la parte imaginaria y real del campo  $\phi_H$ ,  $\phi_H^I$  y  $\phi_H^R$ , respectivamente; anulando el campo  $\phi_G$ , es decir,  $\phi_G = 0$ . Se puede observar que el mínimo no es único, y que se extiende a lo largo del anillo del potencial de sombrero Mexicano con infinitas configuraciones, incluso cuando se fijan los campos de  $\phi_H$ , como en la gráfica; si se anulan los campos de  $\phi_H$  y se dejan libres los campos de  $\phi_G$  se puede encontrar una gráfica con la misma forma.

42

Figura 3.1. Evolución térmica del universo en términos del corrimiento al rojo, el cual crece hacia el pasado. En el presente ( $z=0$ ) se tiene una dominación de la energía oscura, la cual se extiende indefinidamente hacia el futuro; hacia el pasado, entre los corrimientos al rojo  $z \approx 0.3$  y  $z \approx 3000$ , está la época de dominación de la materia, que precede a la época de dominación por la radiación entre los corrimientos al rojo  $z \approx 3000$  y  $z \approx 1.4 \times 10^{14}$ , finalmente se encuentra la época de dominación por la quinación que va de  $z \approx 1.4 \times 10^{14}$  en adelante.

67

Figura 3.2.  $\omega_{eff}$  corresponde al parámetro de estado efectivo,  $q$  es el parámetro de desaceleración. En la época de dominación por la energía oscura se tiene un parámetro de estado y de desaceleración  $\omega_{eff} = q = -1$  que emulan a la constante cosmologica; hacia el pasado está la dominación por materia con  $\omega_{eff} = 0$  y  $q = 1/2$ , en donde la presión es despreciable; la época que antecede a la dominación por materia es la dominación por radiación, en esta se tienen  $\omega_{eff} = 1/3$  y  $q = 1$ , finalmente se encuentra la época de dominación por la quinación, con  $q = 2$  y  $\omega_{eff} = 1$ , el parámetro de estado igual a uno corresponde a materia rígida.

68

Figura 3.3. (a) velocidad del campo de Higgs, (b) el campo de Higgs, (c) el campo de gauge y su velocidad (d) para el periodo de **quinación**; es importante notar que las cantidades están escaladas cada una por un factor diferente y que el eje vertical puede estar en escala logarítmica.

70

Figura 3.4. Para la época dominada por la **radiación** se tiene que la velocidad del campo de Higgs (a) sigue decreciendo hacia el futuro, el campo de Higgs (b) llega a un valor asintótico, la velocidad del campo de gauge (d) sigue creciendo desde valores negativos hacia el cero con una razón más grande, consecuentemente, el campo de gauge (c) disminuye.

71

Figura 3.5. En este conjunto de figuras se encuentran los campos para el periodo dominado por la **materia**, las figuras (a), (b), (c), (d) son la velocidad del campo de Higgs, el campo de Higgs, el campo de gauge y su velocidad respectivamente. La derivada del Higgs alcanza valores del orden de unidades, la derivada del campo de gauge sigue disminuyendo en magnitud y consecuentemente el campo de gauge sigue disminuyendo (aproximadamente de manera lineal).

72

Figura 3.6. Campos físicos para la época dominada por la **energía oscura**, en la figura (a) se encuentra la derivada del campo de Higgs la cual decrece a valores negativos. El campo de gauge (c) decrece linealmente en función del corrimiento al rojo, su derivada temporal (d) crece linealmente hacia el futuro. El valor para el parámetro de Hubble se hace prácticamente constante, emulando la constante cosmológica.

74

Figura 3.7. En las gráficas (a), (b), (c) y (d) se presenta la evolución del universo desde la época de quincación hasta la época actual (energía oscura) del campo de Higgs, su velocidad, el campo de gauge y su derivada temporal respectivamente.

75

Figura 3.8. Parámetro de Hubble en función del corrimiento al rojo.

77

Figura 4.1. Desde los corrimientos al rojo más altos hasta el presente se observan las abundancias de energía, comenzando por una época de dominación entre la quinación y la anisotropía, que termina alrededor de  $z \approx 6.6 \times 10^{11}$ , para dar paso a la época dominada por la radiación que tiene una duración hasta el punto de equivalencia entre materia y radiación, en  $z \approx 3133$ . La época de dominación de materia termina en el corrimiento al rojo  $z \approx 0.29$ , en donde empieza la época de dominación por la energía oscura, extendiéndose infinitamente hacia el futuro.

101

Figura 4.2. Cada época se distingue por un parámetro de desaceleración y de estado diferente, en esta gráfica se muestran cada uno de ellos: Para quinación y anisotropía se tienen  $q = 2$  y  $\omega_{ef} = 1$ , en radiación los parámetros son  $q = 1$  y  $\omega_{ef} = 1/3$ , después de la dominación radiación se encuentra la dominación de materia con  $q = 1/2$  y  $\omega_{ef} = 0$ , finalizando la evolución está la época dominada por la energía oscura en donde los parámetros tienen el valor  $q = \omega_{ef} = 1$ .

102

Figura 4.3. En esta gráfica se presenta la evolución del campo de Higgs, que, en la época de quinación y anisotropía crece hasta llegar a un valor constante; este valor constante implica un valor constante del potencial de Higgs, simulando así a la constante cosmológica.

104

Figura 4.4. La figura corresponde a la derivada temporal del Higgs, que disminuye en función del tiempo. Se puede ver como la derivada decrece a medida que transcurre el tiempo.

105

Figura 4.5. La figura corresponde a el campo de gauge  $G_2J$ , su dependencia con el campo es una función por partes, en quinación la evolución es aproximadamente lineal con respecto al corrimiento al rojo,  $G_2J \propto (z + 1)$ , para tiempos más recientes se tiene  $G_2J \propto (z + 1)^{\frac{2}{3}}$ .

106

Figura 4.6. La figura corresponde a la derivada del campo de gauge  $G_2J$ , es importante notar que la derivada es negativa, durante su evolución la derivada está en función de las potencias 1, 2.5, 3 y 3.5 del corrimiento al rojo para la dominación de energía oscura, materia, radiación y quinación, respectivamente.

107

Figura 4.7. En esta figura se puede observar la evolución del invariante  $G_1I$ , en las épocas de energía oscura, materia y radiación evoluciona aproximadamente de manera lineal con respecto al corrimiento al rojo,  $G_1I \propto z + 1$ , en la época de quinación y anisotropía este resultado cambia, siendo proporcional aproximadamente a  $G_1I \propto (z + 1)^{\frac{7}{4}}$ .

108

Figura 4.8. La derivada temporal del campo  $G_1I$  se presenta en esta imagen, nótese que al igual que la derivada de  $G_2J$  esta derivada también es negativa.

109

Figura 4.9. En esta figura se observa como la razón que existe entre los campos  $G_1I$  y  $G_2J$ , hasta radiación se mantiene constante, pero en quinación la razón aumenta hacia el pasado.

110

Figura 4.10. Se encuentra el parámetro de Hubble, su evolución es constante durante la época dominada por la energía oscura, durante la época de materia este parámetro evoluciona aproximadamente en función del corrimiento al rojo como una potencia de grado  $3/2$ ,  $H \propto (1+z)^{3/2}$ ; en la dominación por radiación su evolución tiene la misma forma que un polinomio de grado 2,  $H \propto (1+z)^2$ ; en su última etapa de quinación y anisotropía este parámetro tiene la forma  $H \propto (1+z)^3$ . Esta evolución imita al modelo de concordancia.

111

Figura 4.11. El denominado parámetro de shear o anisotropía se observa en esta figura, desde la época de anisotropía y quinación, en donde tiene un valor constante, pasando por radiación en donde su evolución es lineal con respecto al corrimiento al rojo; en la época de materia su evolución es  $\Sigma \propto (1+z)^{3/2}$ , en la época de energía oscura su evolución es más pronunciada,  $\Sigma \propto (1+z)^3$ .

112

**Lista de Apéndices**

	<b>pág.</b>
Apéndice A. Componentes de la métrica de Bianchi tipo I	124
Apéndice B. Condición de nulidad	128
Apéndice C. Ecuaciones de campo para el modelo SU(2)	130
Apéndice D. Tensor de Einstein	138
Apéndice E. Masa de los campos en el modelo SU(2)	142
Apéndice F. Ecuaciones de campo para el modelo SO(3)	144
Apéndice G. Masa de los campos en el modelo SO(3)	157

## Resumen

**Título:** Energía oscura como interacción entre los campos bosónicos de Higgs y Yang-Mills \*

**Autor:** Miguel Ángel Álvarez Ballesteros \*\*

**Palabras Clave:** Energía oscura, Historia térmica del universo, Campo de Higgs, Campos de gauge, Sistemas dinámicos.

**Descripción:** La acción de Einstein Yang-Mills Higgs (EYMH) reúne dos clases de campo tipo bosón que interactúan entre ellos: los vectores de gauge y el campo de Higgs, los cuales, son capaces de generar la historia térmica del universo desde la época de dominación de la radiación hasta la época de expansión acelerada tardía. Adicionalmente genera una época dominada por la parte cinética del campo de Higgs, normalmente llamada quinción. La acción EYMH, invariante localmente ante los grupos  $SU(n)$  y  $SO(n)$ , es estudiada específicamente para los casos  $SU(2)$  y  $SO(3)$ , cada uno individualmente. La isotropía observada en el Universo exige que los campos de gauge estén en la forma de tríada cósmica y el campo de Higgs en la configuración unitaria, que fortuitamente se deshace de los bosones de Goldstone, dejando solamente un campo en la dirección de crecimiento del potencial. En el caso de la acción invariante ante las transformaciones  $SO(3)$ , estas condiciones no son suficientes, de manera que se genera una anisotropía en las presiones, que pueden ser modeladas con la métrica de Bianchi I y por una tríada cósmica axialmente simétrica. El modelo EYMH, logra mantener el campo de Higgs y a su potencial en un valor virtualmente constante así emulando la constante cosmológica y generando energía oscura por medio de campos con la forma de campos del modelo estándar.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física.  
Director: Yeinzon Rodríguez García, Doctorado en Física.

## Abstract

**Title:** Dark energy as interaction between the Higgs and Yang-Mills bosonic fields \*

**Author:** Miguel Ángel Álvarez Ballesteros \*\*

**Keywords:** Dark energy, Thermal history of the universe, Higgs field, Gauge fields, Dynamic Systems.

**Description:** The Einstein Yang-Mills Higgs (EYMH) action gathers two kind of interacting boson-like fields: the gauge vector fields and the Higgs field, which can generate the thermal history of the universe from radiation dominated era to the late accelerated expansion period. Additionally generating an era dominated by the kinetic part of the Higgs field, usually called kination. The EYMH action is either locally  $SU(n)$  invariant or  $SO(n)$  invariant, we study specifically the  $SU(2)$  and  $SO(3)$  cases separately. The observed isotropy of the universe requires the gauge fields in the cosmic triad configuration and the Higgs field in the unitary configuration, which gets rid of the Goldstone bosons, leaving the field in the direction of the evolution of the Higgs potential. In the specific case of the  $SO(3)$  invariant action, these conditions are not sufficient, because of an anisotropic pressure is generated, which have to be at least modeled by the Bianchi I metric and by an axially symmetric cosmic triad. The EYMH model keeps the Higgs field and its potential in a virtually constant value, emulating the cosmological constant and generating dark energy by means of the standard-model-like fields.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física.  
Director: Yeinzon Rodríguez García, Doctorado en Física.

## 1. Introducción

La actual expansión acelerada del universo ha sido corroborada por varias observaciones como las supernovas tipo Ia y cefeidas (Perlmutter et al. (1999); Riess et al. (1999); Riess et al. (1998)), estructura a gran escala (Tegmark et al. (2006, 2004)), oscilaciones acústicas de bariones (OAB) (Bolton et al. (2012); Dawson et al. (2016)), lentes gravitacionales (Troxel et al. (2018); Hildebrandt et al. (2017)), clusters de galaxias (Allen et al. (2011)), radiación cósmica de fondo(RCF) (Aghanim et al. (2016, 2018)) entre otras. Al causante de esta expansión acelerada se le ha llamado energía oscura (Huterer and Shafer (2018)), una forma de energía de vacío que permea el universo. Esta expansión acelerada es relativamente reciente<sup>1</sup> ya que el Universo ha atravesado por diferentes épocas, empezando por una etapa inflacionaria seguida de una época dominada por la radiación y posteriormente por una época dominada por la materia hasta la actual expansión acelerada (Weinberg (2008)).

Múltiples modelos han sido planteados con el objetivo de explicar esta última época, dividiéndose este conjunto en dos ramas: en la primera se encuentran aquellos modelos que modifican la teoría de la gravedad de Einstein, como los modelos  $f(R)$  (De Felice and Tsujikawa (2010)), teorías tensor-escalar (Heisenberg (2019); Kobayashi (2019); Quiros (2019)), y teorías de mundo de membranas (Maartens and Koyama (2010)v, entre otras; en la segunda están aquellos que mo-

---

<sup>1</sup> Este hecho despierta incertidumbre en la comunidad científica, teniendo incluso nombre propio: “El problema de la coincidencia” (Velten et al. (2014)).

difican el contenido material del universo, entre ellos están quinta esencia (Tsujikawa (2013)),  $K$  esencia (Armendariz-Picon et al. (2001); Armendariz-Picon et al. (2000)), modelos de fluidos perfectos (Alvarenga et al. (2002)), y  $\Lambda$  materia oscura fría ( $\Lambda$ CDM) que, aun siendo el más simple, es el que mejor se ajusta a las observaciones (Aghanim et al. (2018)). El modelo  $\Lambda$ CDM incluso con todas sus cualidades, exhibe grandes problemas a la hora de explicar el origen físico de la constante cosmológica  $\Lambda$  como energía de vacío, ya que la estimación de esta en el modelo estándar de partículas produce varios órdenes de magnitud de diferencia (Rugh and Zinkernagel (2002); Weinberg (1989)). Aún se sigue en la búsqueda de un modelo que explique la totalidad de la historia térmica del Universo y que, además, tenga conexión con las teorías fundamentales de la Física.

El modelo Einstein Yang-Mills Higgs (EYMH) contiene 2 tipos de campos de partículas, los bosones vectoriales de gauge  $A_\mu$  y un campo de Higgs, que provee de masa a los bosones de gauge por medio del mecanismo de Higgs. Este tipo de acción ha sido estudiada en varios contextos de cosmología (Adshead and Sfakianakis (2017); Baldes and Garcia-Cely (2019)); específicamente en el área de energía oscura, los trabajos (Rinaldi (2015b)) y (Rinaldi (2015a)) en los que originalmente se plantea la acción EYMH, lograron generar exitosamente una época de expansión acelerada tardía; lamentablemente, debido a errores importantes en el método de variación de la acción, sus conclusiones pierden validez.

En este trabajo se retomaron dos diferentes acciones de EYMH, una de ellas invariante ante las transformaciones  $SU(2)$  y la otra invariante ante las transformaciones  $SO(3)$ <sup>2</sup>. El modelo de

---

<sup>2</sup> Aunque estos dos grupos están relacionados por medio de un homomorfismo, esto no hace que los modelos sean

EYMH toma dos de las más exitosas ideas del modelo estándar de partículas(SM)<sup>3</sup>: la teoría de Yang- Mills, que genera los bosones vectoriales( $W^\pm, \gamma, \dots$ ) y el bosón de Higgs, recientemente encontrado; este tipo de aproximamiento en el que se toman ideas ya establecidas del modelo estándar para explicar diferentes fenómenos en cosmología es valioso, ya que ofrece la posibilidad de unificar y expandir dos ramas de la diferentes de la Física.

Se estudian los modelos EYMH con la condición de representación unitaria para el campo de Higgs, con la simetría de la tríada cósmica (Rodríguez and Navarro (2018); Armendariz-Picon (2004); Maleknejad and Sheikh-Jabbari (2011)) y una tríada cósmica axialmente simétrica, que aseguren una geometría del universo en concordancia con lo observado; estas geometrías están representadas por las métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker(FLRW) y Bianchi tipo I, en donde esta última surge naturalmente a partir del término de interacción de los bosones, causando de esta manera una anisotropía perpetua que solo se desvanece para el caso en el que uno de los dos campos bosónicos se hace cero. Las métricas de Bianchi han sido estudiadas en varios contextos, como en teorías tensor escalar (Kumar and Singh (2008)), modelos fluido magnéticos (Pradhan and Singh (2004)), modelos de fluidos perfectos (Saha (2006)), teorías  $f(R)$  (Aditya and Reddy (2018); Shamir (2010)) entre otras. Aunque el modelo más favorable está en la métrica FLRW, las cotas sobre los parámetros de anisotropía permiten la utilización de la métrica de Bian-

---

equivalentes ya que el homomorfismo solo existe entre las transformaciones y no entre los objetos que transforman.

<sup>3</sup> De ahora en adelante en el trabajo se llamará al modelo estándar de partículas como modelo estándar y al modelo estándar de cosmología como modelo de concordancia.

chi tipo I. Un estudio reciente que muestra los parámetros de isotropía del universo se puede ver en la referencia (Saadeh et al. (2016)).

La organización del documento es la siguiente: en el capítulo dos se presentan el marco teórico necesario tanto en cosmología como en física de partículas para entender los modelos; en el tercer capítulo se estudia el modelo invariante ante las transformaciones  $SU(2)$ , se discute la variación de las ecuaciones, los puntos críticos, su estabilidad, y se obtiene una solución numérica; en el cuarto capítulo se hace el mismo tratamiento que en el tercer capítulo pero esta vez para el modelo invariante ante  $SO(3)$ . El último capítulo corresponde a las conclusiones; después de esto se encuentran los apéndices y finalmente la bibliografía.

## 2. Marco teórico

### 2.1. Principio cosmológico

La alta homogeneidad del Universo se evidencia con diferentes observaciones como el efecto kSZ Bull et al. (2012), las mediciones del corrimiento al rojo de galaxias Sabiu (2007); Ntelis et al. (2017), velocidades peculiares Truebenbach and Darling (2018), entre otras; claramente la homogeneidad es una simetría del Universo que no es perfecta, ya que existen diferentes estructuras astronómicas que no son homogéneas tales como estrellas, galaxias, grupos de galaxias, filamentos, entre otras; por lo tanto se dice que la homogeneidad solo se alcanza a distancias mayores a los 100 Mpc. Otro tipo de simetría se puede observar desde la tierra, la isotropía, que, de nuevo, no es perfecta, pero sus fluctuaciones con respecto a la media a gran escala son relativamente pequeñas, el ejemplo más representativo de estas fluctuaciones es la temperatura de la radiación cósmica de fondo (CMB) cuyas variaciones están acotadas de la siguiente manera:  $\frac{\delta T}{T} < 10^{-5}$  Akrami et al. (2018).

En 1929, Edwin Hubble publicó su trabajo en el que postulaba un universo en constante expansión, dicha expansión se puede parametrizar a través de la velocidad entre dos puntos del Universo llamados observadores comóviles, en donde la magnitud de la velocidad es directamente proporcional a la distancia que separa a los dos puntos

$$\vec{V} = H\vec{d}, \quad (1)$$

en donde  $H$  es la constante de Hubble<sup>4</sup>. Hubble apoyó este modelo con sus observaciones (véase en la Fig. 2.1), en las que, a groso modo, interpoló una función lineal con respecto a la distancia; más tarde esta relación se pudo corroborar con suficiente rigor.

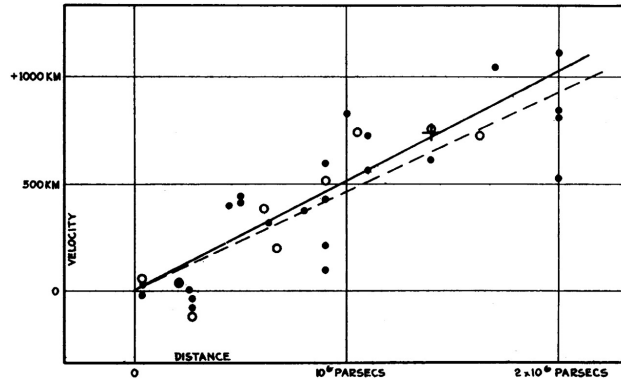


Figura 2.1. Se muestra la gráfica de los datos de Hubble del paper en el que publicó sus resultados Hubble (1929). En el eje absciso se encuentra la distancia medida en parsecs, en el eje ordenado se encuentra la velocidad, se puede observar la interpolación usada por Hubble relacionando las distancias con las velocidades.

El elemento de línea asociado al Principio Cosmológico utiliza la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker(FLRW), la cual en coordenadas cartesianas es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ d\vec{x}^2 + K \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - K\vec{x}^2} \right], \quad (2)$$

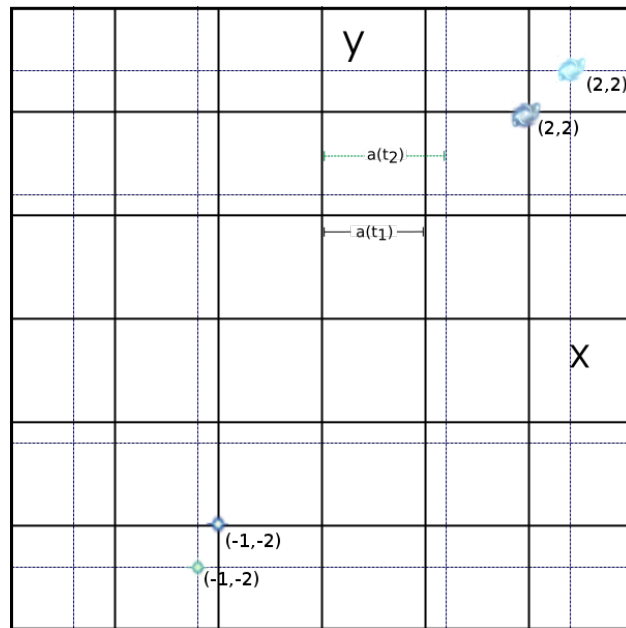
es decir, las componentes del tensor métrico son

$$g_{ij} = a^2(t) \left[ \delta_{ij} + K \frac{x_i x_j}{1 - K\vec{x}^2} \right], \quad g_{0i} = 0, \quad g_{00} = -1, \quad (3)$$

<sup>4</sup> El nombre de *constante* de Hubble se debe a que originalmente se desconocía la dependencia de  $H$  con respecto al tiempo, actualmente se usan los términos de parámetro de Hubble y el término “constante de Hubble” se usa más para referirse al parámetro de Hubble hoy en día.

en donde  $a(t)$  es el factor de escala de Robertson-Walker y  $K$  puede tener los valores  $-1, 0$  y  $1$  que corresponden a una métrica hiperesférica, Euclidian y esférica respectivamente, siendo éstas las únicas tres posibilidades que respetan la homogeneidad e isotropía del espacio Weinberg (1972).

Las coordenadas utilizadas son comúnmente llamadas coordenadas comóviles. Como su nombre lo indica estas coordenadas se mueven con los observadores. En el caso de un universo espacialmente plano, isótropo y homogéneo se reescalan según el coeficiente  $a(t)$ , en la figura 2.2 se muestra un ejemplo.



*Figura 2.2.* Se muestran dos mallas, cada malla representa las coordenadas comóviles cartesianas para diferentes tiempos  $t_1$  y  $t_2$ . Se puede observar que cada una de las galaxias tiene las mismas coordenadas para los diferentes tiempos, pero su distancia física con respecto al origen cambia según el coeficiente  $a(t)$ . Esta configuración corresponde a  $K = 0$ .

## 2.2. Métrica de Bianchi tipo I

Las métricas de Bianchi son aquellas métricas homogéneas, solo algunas de ellas tienen un límite isótropo Saadeh et al. (2016); Ellis and MacCallum (1969) y están divididas en los tipos I y VII<sub>0</sub>, V

y VII<sub>h</sub>, y IX las cuales forman los universos plano, abierto y cerrado respectivamente. La métrica tipo I es la más sencilla y está dada por el elemento de línea

$$ds^2 = -dt^2 + A(t)^2 dx^2 + B(t)^2 dy^2 + C(t)^2 dz^2, \quad (4)$$

en donde  $x, y, z$  son las coordenadas comóviles cartesianas; este elemento de línea es claramente homogéneo, ya que solo dependen del parámetro temporal, como caso específico de esta métrica está  $A(t) = B(t) = C(t)$ , que no es más que la métrica FLRW plana. Al igualar un elemento de la métrica a otro,  $B(t) = C(t)$ , el intervalo espaciotemporal se convierte en  $ds^2 = -dt^2 + A(t)^2 dx^2 + B(t)^2 (dy^2 + dz^2)$ , este nuevo elemento de línea tiene una simetría cilíndrica la cual produce una isotropía con respecto a dos direcciones, es decir, existe una simetría ante las rotaciones en el plano  $yz$ .

La métrica se puede reparametrizar en términos de las cantidades relacionadas con el escalar de shear y el parámetro de Hubble  $H$  de la siguiente manera

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2(\alpha-2\sigma)} dx^2 + e^{2(\alpha+\sigma)} (dy^2 + dz^2) \quad (5)$$

en donde  $\Sigma = \sqrt{3}\sigma$  es el escalar de shear. El desarrollo de esta parametrización se encuentra en el apéndice 1.

### 2.3. Ecuación de continuidad para fluidos ideales

La primera ley de la termodinámica en forma diferencial es:

$$dU = dQ - dW = dQ - pdV, \quad (6)$$

en donde  $dU$  es el diferencial de la energía,  $dW$  es el diferencial del trabajo que el sistema realiza sobre su entorno y  $dQ$  es el diferencial del calor absorbido por el sistema. Debido a la homogeneidad del universo la variación de la energía calorífica es nula,  $dQ = 0$ . Ahora bien, si se considera un elemento de volumen  $V = a(t)^3$ , de manera que

$$U = \rho a^3, \quad (7)$$

en donde  $\rho$  es la densidad volumétrica de la energía, y se toma la variación de la Ec.(6) con respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW}{dt}, \quad (8)$$

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -\frac{pdV}{dt}, \quad (9)$$

$$a^3 \frac{d\rho}{dt} + 3a^2 \rho \frac{da}{dt} = -3pa^2 \frac{da}{dt}, \quad (10)$$

$$(11)$$

en donde  $p$  es la presión. La ecuación resultante es

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3}{a} \frac{da}{dt} (\rho + p) = 0. \quad (12)$$

Al considerar la ecuación de estado más simple que relaciona la densidad con la presión:

$$p = w\rho, \quad (13)$$

en donde  $w$  es una constante, la solución a la Ec (12) viene dada por

$$\rho = ca^{-3(w+1)}, \quad (14)$$

en donde  $c$  es una constante de integración. La evolución de la densidad de energía de acuerdo al contenido material que se tiene según la ecuación de estado es Weinberg (2008):

- Materia no relativista (denominada simplemente ‘materia’):  $p \simeq 0$

$$\rho \propto a^{-3},$$

cabe aclarar que la materia no relativista está compuesta por materia barionica y también por materia oscura fría(CDM).

- Materia relativista (denominada simplemente ‘radiación’):  $p = \rho/3$

$$\rho \propto a^{-4},$$

- Energía de vacío:  $p = -\rho$

$$\rho = cte,$$

siendo esta última un tipo de energía que está homogéneamente distribuida a lo largo del universo generando una presión negativa.

El universo ha pasado por lo que es comunmente llamado ‘épocas’ en las que un tipo de materia domina, debido a que su densidad es mayor a las demás; la primera de estas etapas es la época dominada por la radiación, seguida de la época dominada por la materia y por último está la época dominada por la energía oscura, como se ilustra en la gráfica 2.3.

#### 2.4. Fluido ideal

Un fluido ideal se define como aquel que tiene una presión isotropa en el sistema comóvil inercial con el fluido, esto para cada punto del espacio-tiempo, es decir, el tensor de energía momentum en el sistema comóvil inercial tiene componentes

$$T_{00} = \rho, \quad T_{ij} = \delta_{ij}p, \quad T_{0i} = 0, \quad (15)$$

que escritas de manera tensorial toman la forma

$$T_{\mu\nu} = p\eta_{\mu\nu} + (\rho + p)u_\mu u_\nu, \quad u^\mu u_\mu = -1, \quad (16)$$

en donde  $u_\mu$  es la cuadrivelocidad del fluido y  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski. Para observar la isotropía es necesario que el fluido sea comóvil con el sistema comóvil inercial en cada punto,

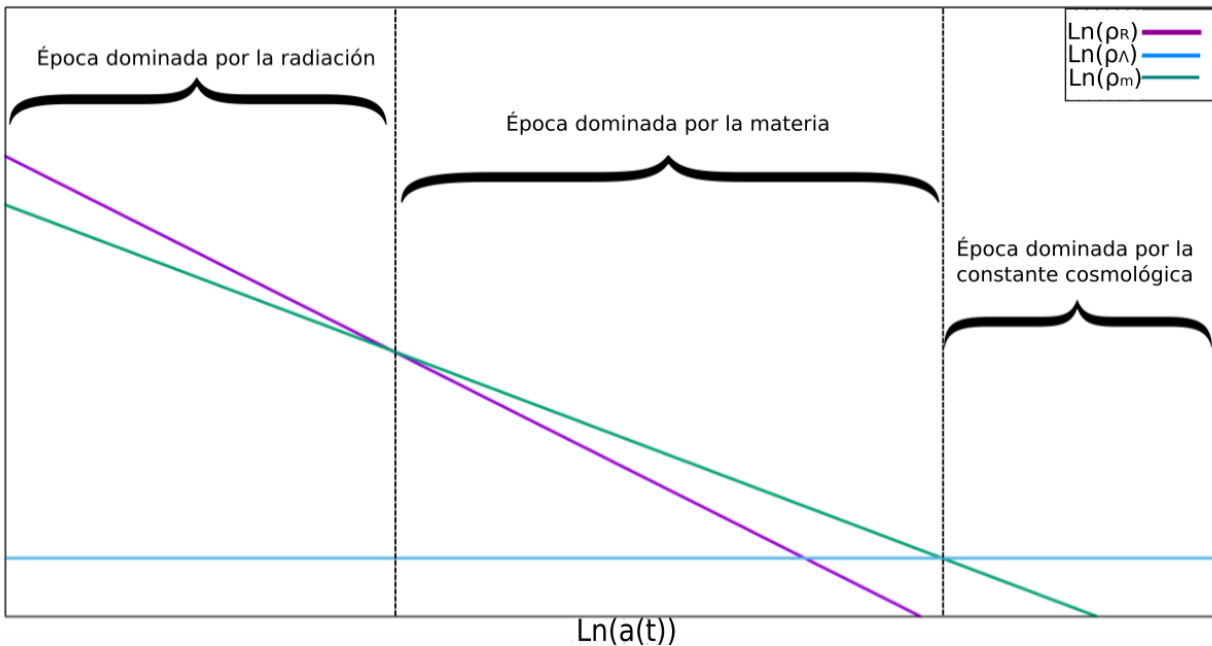


Figura 2.3. En la gráfica se puede observar el cambio de los logaritmos de las densidades de energía en función del logaritmo del parámetro de expansión. Originalmente se tiene una dominación de la radiación; la razón de decrecimiento de la densidad de materia es menor que la de la densidad de radiación, dando paso a una época dominada por materia, la densidad de la energía de vacío permanece constante independientemente de la expansión, dando lugar eventualmente a una dominación por la constante cosmológica.

de manera que la cuadrivelocidad del fluido tenga las componentes  $u^0 = -1$  y  $u^i = 0$ . El tensor momentum energía se puede promover para cualquier sistema coordenado, tomando la forma

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (\rho + p) u_\mu u_\nu. \quad (17)$$

en donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica.

## 2.5. Teoría de Yang-Mills

El grupo  $SO(n)$  está compuesto por las matrices de componentes reales de orden  $n \times n$  ortogonales con determinante igual a uno, este grupo representa las rotaciones espaciales en  $\mathbb{R}^3$  y es un grupo

de Lie con el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(n)$  asociada. El grupo  $SU(n)$  está compuesto por las matrices complejas de orden  $n \times n$  unitarias con determinante igual a uno y también es un grupo de Lie, asociada con el álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(n)$ .

Se puede representar la linealización alrededor de la unidad<sup>5</sup> de los grupos  $SO(n)$  y  $SU(n)$  utilizando sus respectivas álgebras; así mismo con un mapeo exponencial es posible relacionar las álgebras de Lie con sus respectivos grupos de Lie; el mapeo exponencial se define como

$$A = e^B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!}, \quad (18)$$

en donde  $B$  es el argumento del mapeo exponencial. Las álgebras de Lie  $\mathfrak{so}(n)$  están formada por las matrices antisimétricas  $n \times n$  que tienen un total de  $\frac{n(n-1)}{2}$  componentes independientes<sup>6</sup>. El mapeo exponencial aplicado al álgebra  $\mathfrak{su}(n)$  es  $A = e^B$ , en donde  $A \in SU(n)$  y  $B \in \mathfrak{su}(n)$ . Las álgebras de Lie  $\mathfrak{su}(n)$  están formadas por las matrices  $n \times n$  antihermíticas con traza nula, las cuales tienen un total de  $n^2 - 1$  componentes independientes Gallier (2001).

Un álgebra de Lie puede ser definida por el operador  $[\cdot, \cdot]$ , que, en una representación matricial del álgebra toma la forma de conmutador:

$$[T_a, T_b] = if^c_{ab} T_c, \quad (19)$$

---

<sup>5</sup> Con unidad me refiero a la matriz unitaria.

<sup>6</sup> El número de componentes independientes determina el número de bosones que el grupo genera.

en donde  $T_a$  con  $a = \{1, 2, \dots, d\}$  es la base del álgebra de Lie y  $f^c_{ab}$  son las constantes de estructura del grupo. La antisimetría del conmutador asegura que  $f^c_{ab} = -f^c_{ba}$ . A partir de la identidad de Jacobi y el conmutador se tiene que

$$f^d_{ab}f^e_{dc} + f^d_{ca}f^e_{db} + f^d_{bc}f^e_{da} = 0. \quad (20)$$

Cualquier conjunto de matrices que cumpla con la ecuación (20) y con la antisimetría de las constantes de estructura define al menos un conjunto de matrices Weinberg (1995):

$$(T_a^A)^b_c = -if^b_{ca}, \quad (21)$$

a este tipo de matrices se les llama representación adjunta. La ecuación (19) se puede reescribir como:

$$[T_a, T_b] = (T_a^A)^c_b T_c. \quad (22)$$

Un claro ejemplo de algebra de Lie lo conforman los generadores de las transformaciones SU(2),

$$\left[ \frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}, \quad (23)$$

en donde  $\sigma_i$  representa las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

y en donde las constantes de estructura del grupo son el tensor de Levi-Civita

$$f_{bc}^a = \epsilon_{abc}. \quad (25)$$

La representación adjunta para este grupo se compone de las matrices

$$(T_i^A)^j = -i\epsilon_{ijk}, \quad (26)$$

$$(T_1^A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (T_2^A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (T_3^A) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

esta representación adjunta está compuesta por matrices proporcionales a los generadores del grupo de rotaciones espaciales SO(3).

La teoría cuántica de campos se construye con el propósito de encontrar una teoría que reúna la relatividad especial y la mecánica cuántica; el uso de campos se hace necesario para representar fenómenos y principios de cada una de las teorías, como la creación y aniquilación de partículas. Un principio propio de la relatividad general es la cuasalidad, que puede violarse si la información

viaja a una rapidez mayor a la rapidez de la luz, siendo el método para incorporar la causalidad y una rapidez de la luz finita a la teoría la exigencia de la localidad de los campos, la cual se consigue creando una dependencia de los campos con respecto al espaciotiempo y, planteando un lagrangiano que dependa de derivadas espacio temporales de los campos Kane (1993).

En el resto de la sección se presenta brevemente la construcción de la teoría de Yang-Mills. Se asume que el lagrangiano de la teoría de Yang-Mills es invariante ante un grupo de transformaciones infinitesimales locales,

$$\delta\psi_a = i\varepsilon^\alpha(x)(t_\alpha)^b{}_a\psi_b, \quad (28)$$

donde  $\psi$  es un espinor,  $\varepsilon^\alpha(x)$  son reales infinitesimales dependientes del espacio tiempo y  $t_\alpha$  son la base de un grupo de transformaciones. La derivada espaciotemporal de la transformación se convierte en

$$\partial_\mu\delta\psi_a = \delta(\partial_\mu\psi_a) = i(\partial_\mu\varepsilon^\alpha(x))(t_\alpha)^b{}_a\psi_b + i\varepsilon^\alpha(x)(t_\alpha)^b{}_a\partial_\mu\psi_b, \quad (29)$$

el primer término de la parte derecha de la anterior ecuación evita que la transformación de la derivada tome la forma de la ecuación (28), para lidiar con este molesto término se plantean los campos de gauge<sup>7</sup>  $A_\mu^a$ , cuya transformación debe contener un término proporcional a los campos

---

<sup>7</sup> Estos campos representan a los bosones vectoriales

$\partial_\mu \varepsilon^a$ , de esta manera

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \varepsilon^a + i\varepsilon^b (t_b^A)^a{}_c A_\mu^c, \quad (30)$$

se plantea un término que contenga ambos campos de manera que la derivada de los campos infinitesimales se cancele, este término se define como

$$(D_\mu \psi)_l \equiv \partial_\mu \psi_l - iA_\mu^b (t_b)^m{}_l \psi_m. \quad (31)$$

De la transformación de este término se obtiene

$$\delta(D_\mu \psi)_l = i\varepsilon^b (t_b)^m{}_l (D_\mu \psi)_m - \varepsilon^a A_\mu^b \psi_m \left[ (t_b)^m{}_g (t_a)^g{}_l - (t_a)^m{}_g (t_b)^g{}_l - (t_a^A)^g{}_l (t_g)^m{}_l \right]. \quad (32)$$

Es sugerente cómo el segundo término de la parte derecha de la ecuación (32) se debe anular para lograr que la transformación de la derivada obtenga la forma de la Ec. (28), la anulación de tal término implica

$$[t_a, t_b] = (t_a^A)^c{}_b t_c, \quad (33)$$

donde la sumatoria de índices se expresó como producto de matrices; esta última ecuación es la definición de un álgebra de Lie, lo que implica que  $t_a$  son las bases del álgebra y  $(t_a^A)^c{}_b$  es la representación adjunta.

Una transformación que modifique el campo infinitesimalmente a partir de su valor original se puede lograr con la transformación infinitesimal del campo mas el propio campo, es decir,  $\psi \rightarrow \Delta\psi = \psi + \delta\psi = (1 + i\varepsilon^\alpha(x)t_\alpha) \psi$ , aplicando esta transformación infinitas veces de manera sucesiva se puede obtener una transformación finita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^n \psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + i \frac{\Lambda^\alpha(x)}{n} t_\alpha \right)^n \psi \quad (34)$$

$$\psi' = \exp(i\Lambda^\alpha(x)t_\alpha) \psi \quad (35)$$

en donde  $\varepsilon^\alpha(x) = \frac{\Lambda^\alpha(x)}{n}$ , de esta manera los objetos  $\Lambda^\alpha(x)$  se convierten en parámetros finitos. La anterior transformación es el mapeo exponencial de un álgebra de Lie, por lo tanto es un grupo de Lie.

De ahora en adelante se expresará la transformación  $\exp(i\Lambda^\alpha(x)t_\alpha)$  como  $e^{ig\vec{\varepsilon}(x)\cdot\vec{T}}$  donde  $g$  es una constante real comunmente denominada como constante de acoplamiento del grupo,  $\vec{\varepsilon}(x)$ <sup>8</sup> es el vector monto de la transformación que depende de la posición del espacio tiempo y  $\vec{T}$  son las matrices bases del álgebra, también llamadas generadores del grupo. La invarianza de la derivada convariante ante la transformación obliga a los campos de gauge a transformar de la siguiente

---

<sup>8</sup> No confundir con los parámetros infinitesimales  $\varepsilon^\alpha(x)$ , las cantidades  $\vec{\varepsilon}(x)$  son finitas.

manera:

$$A'_\mu = e^{ig\vec{\epsilon}(\vec{x})\cdot\vec{T}} A_\mu e^{-ig\vec{\epsilon}(\vec{x})\cdot\vec{T}} - \frac{i}{g} \partial_\mu \left( e^{ig\vec{\epsilon}(\vec{x})\cdot\vec{T}} \right) e^{-ig\vec{\epsilon}(\vec{x})\cdot\vec{T}}, \quad (36)$$

donde  $A_\mu = A_\mu^a T_a$ .

La introducción de los bosones de gauge exige que exista un término cinético que los presente en la acción; la cinemática de los campos se ve reflejada en derivadas temporales, específicamente en primeras derivadas temporales de los campos de gauge, estos términos pueden ser encontrados directamente en el conmutador de la derivada covariante.

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] \psi &= \partial_\mu \partial_\nu \psi - ig \partial_\mu (A_\nu) \psi - ig A_\nu \partial_\mu \psi - ig A_\mu \partial_\nu \psi - g^2 A_\mu A_\nu \psi \\ &\quad - \partial_\nu \partial_\mu \psi + ig \partial_\nu (A_\mu) \psi + ig A_\mu \partial_\nu \psi + ig A_\nu \partial_\mu \psi + g^2 A_\nu A_\mu \psi, \end{aligned} \quad (37)$$

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]) \psi, \quad (38)$$

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = -igF_{\mu\nu} \psi,$$

se llama a  $F_{\mu\nu}$  tensor de esfuerzos del campo de gauge:

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu], \quad (39)$$

transformando la Ec. (38)

$$\begin{aligned} [D'_\mu, D'_\nu] \psi' &= -igF'_{\mu\nu} \psi', \\ e^{ig\vec{\epsilon}(\vec{x}) \cdot \vec{T}} [D_\mu, D_\nu] \psi &= -igF'_{\mu\nu} e^{ig\vec{\epsilon}(\vec{x}) \cdot \vec{T}} \psi, \end{aligned} \quad (40)$$

se encuentra que el tensor de esfuerzos del campo de gauge transforma como

$$F'_{\mu\nu} = e^{ig\vec{\epsilon}(\vec{x}) \cdot \vec{T}} F_{\mu\nu} e^{-ig\vec{\epsilon}(\vec{x}) \cdot \vec{T}}. \quad (41)$$

Si bien este tensor de esfuerzos no es invariante de gauge, su traza sí lo es, como se observa en la siguiente ecuación:

$$Tr(F'_{\mu\nu}) = Tr(e^{ig\vec{\epsilon}(\vec{x}) \cdot \vec{T}} F_{\mu\nu} e^{-ig\vec{\epsilon}(\vec{x}) \cdot \vec{T}}) = Tr(e^{ig\vec{\epsilon}(\vec{x}) \cdot \vec{T}} e^{-ig\vec{\epsilon}(\vec{x}) \cdot \vec{T}} F_{\mu\nu}) = Tr(F_{\mu\nu}), \quad (42)$$

de igual manera, la traza de la contracción de dos tensores de esfuerzos del campo de gauge también es invariante de gauge:

$$Tr(F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}) = Tr(e^{ig\vec{\epsilon}(\vec{x}) \cdot \vec{T}} e^{-ig\vec{\epsilon}(\vec{x}) \cdot \vec{T}} F_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}) = Tr(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (43)$$

a su vez, el término es invariante de Lorentz, por lo que constituye el término cinético buscado:

$$\mathcal{L}_K = -Tr \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (44)$$

Utilizando los generadores de la Ec. (23), que son los generadores del grupo SU(2), una de las representaciones de este trabajo, la derivada covariante toma la forma:

$$D_\mu = \nabla_\mu - igT^a A_\mu^a, \quad (45)$$

$$= \nabla_\mu - \frac{ig}{2} \sigma^a A_\mu^a, \quad (46)$$

a partir de esta derivada el tensor de esfuerzos de los campos de gauge se convierte en

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (47)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu^a \sigma^a - \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu^a \sigma^a - ig \left[ \frac{\sigma^b}{2}, \frac{\sigma^c}{2} \right] A_\mu^b A_\nu^c, \quad (48)$$

$$= \frac{\sigma^a}{2} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right), \quad (49)$$

y el término cinético del lagrangiano (44) adopta la forma

$$\text{Tr} \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = \frac{1}{8} \text{Tr} \left( \sigma^a \sigma^b \right) \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right) \quad (50)$$

$$\left( \partial^\mu A^{b\nu} - \partial^\nu A^{b\mu} + g \varepsilon^{bdc} A^{d\mu} A^{c\nu} \right),$$

$$= \frac{1}{8} \left( \delta^{ab} \text{Tr}(\mathbf{I}) + \varepsilon^{abc} \text{Tr}(\sigma^c) \right) \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right) \quad (51)$$

$$\left( \partial^\mu A^{b\nu} - \partial^\nu A^{b\mu} + g \varepsilon^{bdc} A^{d\mu} A^{c\nu} \right),$$

$$= \frac{1}{4} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right) \quad (52)$$

$$\left( \partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g \varepsilon^{ade} A^{d\mu} A^{e\nu} \right),$$

$$= \frac{1}{4} F^a{}_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}, \quad (53)$$

en donde

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (54)$$

La segunda representación que se utiliza en el trabajo actual es la representación adjunta, con la cual se describen las rotaciones en el espacio tridimensional SO(3), la derivada covariante aplicada sobre un campo  $\psi$  entonces se convierte en

$$D_\mu \psi^a = \partial_\mu \psi^a - ig \left( T^{Ab} \right)^{ac} A_\mu^b \psi^c, \quad (55)$$

$$= \partial_\mu \psi^a - g\epsilon^{bac} A_\mu^b \psi^c, \quad (56)$$

$$= \partial_\mu \psi^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b \psi^c, \quad (57)$$

en donde, por comodidad, se ha utilizado una notación diferente para el espinor  $\psi$ . El tensor de esfuerzos se ve afectado por el cambio de transformaciones

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (58)$$

$$= \partial_\mu A_\nu^a T^{Aa} - \partial_\nu A_\mu^a T^{Aa} - ig[T^{Ab}, T^{Ac}]A_\mu^b A_\nu^c, \quad (59)$$

$$(F_{\mu\nu})^{bc} = -i\partial_\mu A_\nu^a \epsilon^{abc} + i\partial_\nu A_\mu^a \epsilon^{abc} + ig \left[ \epsilon^{dbf} \epsilon^{efc} - \epsilon^{ebf} \epsilon^{dfc} \right] A_\mu^d A_\nu^e, \quad (60)$$

$$= -i\epsilon^{abc} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{ade} A_\mu^d A_\nu^e \right), \quad (61)$$

de manera que el término cinético en la acción

$$\text{Tr} \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu})^{bc} (F^{\mu\nu})^{cb} \quad (62)$$

$$= \frac{-1}{2} \varepsilon^{abc} \varepsilon^{fcb} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^{aed} A_\mu^e A_\nu^d \right) \quad (63)$$

$$\left( \partial^\mu A^{f\nu} - \partial^\nu A^{f\mu} + g \varepsilon^{fgh} A^{g\mu} A^{h\nu} \right),$$

$$= \delta^{af} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^{aed} A_\mu^e A_\nu^d \right) \quad (64)$$

$$\left( \partial^\mu A^{f\nu} - \partial^\nu A^{f\mu} + g \varepsilon^{fgh} A^{g\mu} A^{h\nu} \right),$$

$$= F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (65)$$

en donde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (66)$$

De esta manera se construyen los términos de la teoría de Yang-Mills, cualquier contracción escalar entre los términos  $D_\mu \psi$  y  $F_{\mu\nu}$  es invariante ante las transformaciones a partir de las cuales fueron construidas.

## 2.6. Sector de Higgs

En la anterior sección se describieron brevemente los campos fermiónicos, que, matemáticamente están descritos por espinores. En esta sección se tienen en cuenta los campos escalares y se hace un tratamiento análogo para estos.

Se considera un lagrangiano

$$L = T - V = (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi), \quad (67)$$

en donde  $\phi$  es un campo escalar complejo

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_G \\ \phi_H \end{pmatrix}, \quad (68)$$

que transforma localmente ante el grupo SU(2)

$$\phi' = e^{\frac{ig}{2} \vec{\epsilon}(\vec{x}) \cdot \vec{\sigma}} \phi, \quad (69)$$

en donde  $\vec{\sigma}$  es el vector compuesto por las matrices de Pauli. Ahora bien, para asegurar la invarianza del Lagrangiano ante transformaciones locales de tipo SU(2), se debe modificar la derivada parcial por la respectiva derivada covariante:

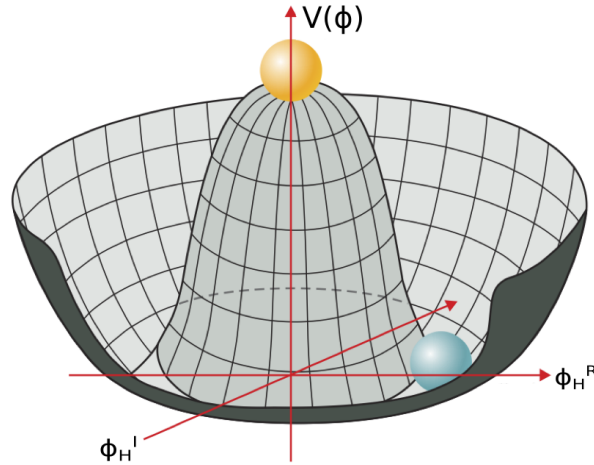
$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu, \quad (70)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu. \quad (71)$$

Para construir el potencial se toman las potencias del campo de Higgs menores o iguales a 4 de manera que la acción sea renormalizable, el término de grado tres no se tiene en cuenta con el fin de que el hamiltoniano esté acotado por debajo:

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2(\phi^\dagger \phi) + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2, \quad (72)$$

siendo ambos parámetros  $\mu^2$  y  $\lambda$  reales; con el fin de implementar el mecanismo de la ruptura espontánea de la simetría,  $\mu^2$  debe ser negativo mientras que  $\lambda$  debe ser positivo.



*Figura 2.4.* Se muestra el valor del potencial  $V(\phi)$  en función de la parte imaginaria y real del campo  $\phi_H$ ,  $\phi_H^I$  y  $\phi_H^R$ , respectivamente; anulando el campo  $\phi_G$ , es decir,  $\phi_G = 0$ . Se puede observar que el mínimo no es único, y que se extiende a lo largo del anillo del potencial de sombrero Mexicano con infinitas configuraciones, incluso cuando se fijan los campos de  $\phi_H$ , como en la gráfica; si se anulan los campos de  $\phi_H$  y se dejan libres los campos de  $\phi_G$  se puede encontrar una gráfica con la misma forma.

Así, el valor esperado del campo escalar en el mínimo del potencial viene dado por:

$$\phi^\dagger \phi = (\phi_H^R)^2 + (\phi_H^I)^2 + (\phi_G^R)^2 + (\phi_G^I)^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda} = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (73)$$

en donde  $\phi_H^R$  y  $\phi_H^I$  son la parte real y la parte imaginaria del campo  $\phi_H$ ,  $\phi_G^R$  y  $\phi_G^I$  son la parte real y la parte imaginaria del campo  $\phi_G$ , respectivamente.

Como se puede observar en la figura 2.4, existe un número infinito de configuraciones del campo  $\phi$  en las cuales la condición anterior se cumple (el anillo del potencial tipo sombrero Mexicano). Es posible elegir la más simple de estas configuraciones:

$$\langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (74)$$

al hacer esto se están rompiendo tres simetrías globales Kane (1993).

Gracias a la invarianza del lagrangiano ante transformaciones locales del grupo SU(2) se puede escoger una transformación del campo en la que solo la parte real de una componente del doblete no se anule:

$$\phi' = e^{\frac{ig}{2} \vec{\epsilon}'(\vec{x}) \cdot \vec{\sigma}} \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix}, \quad (75)$$

se dice que las componentes anuladas han sido ‘eliminadas por la calibración.

Al expandir el campo alrededor del valor del vacío:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \tilde{\phi} + \langle \phi \rangle_0, \quad (76)$$

en donde se define el campo  $\tilde{\phi}$  como el campo de Higgs menos el valor esperado en el vacío

$$\tilde{\phi} = \phi - \langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) \end{pmatrix}, \quad (77)$$

este campo corresponde a la partícula física del Higgs Kane (1993), el valor esperado del nuevo campo en el vacío se anula

$$\langle \tilde{\phi} \rangle = \langle \phi \rangle - \langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (78)$$

Mediante la expansión alrededor del mínimo del potencial el término cinético del campo escalar contribuye con los siguientes términos:

$$(D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = (\partial^\mu H)^* (\partial_\mu H) - ig \left[ (\partial^\nu \phi)^\dagger A_\nu^i \sigma_i \phi - ((\partial^\nu \phi)^\dagger A_\nu^i \sigma_i \phi)^* \right] + g^2 \phi^\dagger (A^\mu)^\dagger A_\mu \phi, \quad (79)$$

en donde se puede identificar el término para la propagación del campo escalar, los términos de interacción entre el bosón de Higgs su parte cinética y los campos de gauge, y el término de la interacción entre el Higgs y los bosones vectoriales, que genera la masa para los bosones vectoriales cuando se expande el campo de Higgs alrededor del vacío Kane (1993).

## 2.7. Triada cósmica

Históricamente, los modelos cosmológicos basados en campos escalares han sido preferidos ante los modelos vectoriales gracias a su inherente isotropía. En contraste, los modelos cosmológicos basados en campos vectoriales adolecen de una anisotropía inconsistente con las observaciones en virtud de que estos campos definen de manera inherente direcciones privilegiadas. Sin embargo,

existen algunas propuestas que abordan y resuelven este problema: el campo vectorial temporal de Kiselev (2004); Carroll and Lim (2004); Böhmer and Harko (2007); Koivisto and Mota (2008), el modelo de campo vectorial de ‘Vecto inflation’ Golovnev et al. (2008b,a); Golovnev and Vanchurin (2009) y el campo vectorial de la ‘triada cósmica’ Rodríguez and Navarro (2018); Armendariz-Picon (2004); Maleknejad and Sheikh-Jabbari (2011) que se basa en un trio de vectores mutuamente ortogonales, de igual norma y homogéneos, garantizando así la isotropía y la homogeneidad.

Para los propósitos de nuestro trabajo, se identifican a los bosones vectoriales de esta tríada cósmica con los bosones de gauge asociados a la invarianza de la acción ante transformaciones locales tipo SU(2). De las doce componentes de  $A_i^\mu$ , nueve son físicas Maleknejad and Sheikh-Jabbari (2011), las tres restantes pueden ser fijadas como:

$$A_i^0 = 0, \tag{80}$$

las coordenadas espaciales cartesianas  $i, j, k$  pueden ser identificadas con los índices  $a, b, c$  de los generadores del grupo SU(2) de la siguiente manera

$$A_i^a = A(t)\delta_i^a. \tag{81}$$

La fijación de las componentes asegura que las rotaciones SO(3) puedan ser vistas como transformaciones de gauge; gracias a que el lagrangiano está construido con una invarianza SU(2), el sistema también es invariante ante las transformaciones SO(3).

### 3. Modelo Einstein Yang-Mills Higgs SU(2)

#### 3.1. Interacción entre dos tipos de bosones: Higgs y Yang-Mills SU(2)

El marco de trabajo propuesto por Yang-Mills es un ejemplo de éxito reiterado dentro del modelo estándar y la teoría cuántica de campos, siendo el mecanismo que genera los bosones mediadores de tres de las fuerzas fundamentales del universo: eléctrica, nuclear débil y fuerte. La teoría de Yang-Mills usa la invarianza de la acción ante transformaciones locales de gauge de diferentes campos, ya sean campos fermionicos o el campo escalar que representa al boson de Higgs, este último, genera las masas para algunos de los bosones vectoriales a través del mecanismo de Higgs (Kane (1993)).

La acción que incluye al boson de Higgs en la forma de un doblete y la teoría de Yang-Mills ante transformaciones locales SU(2) en el marco de una teoría de la gravitación de Einstein es

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{m_P^2}{2} R - (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^2) - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_m \right], \quad (82)$$

en donde el primer término de la acción corresponde a la parte geométrica de la teoría y está compuesta por el escalar de Ricci  $R$  y la masa de Planck  $m_p$ ; el segundo término contiene la parte cinética del Higgs más las interacciones entre los bosones de gauge y el Higgs, se construye a partir de la contracción de la derivada covariante con su transpuesta conjugada, con el propósito de asegurar que el término pertenezca a los reales. Se revisó este término en la subsección del marco

teórico de la teoría de Yang-Mills (46)

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - i\gamma \frac{\sigma_b}{2} A_\mu^b \Phi, \quad (83)$$

en donde las matrices  $\sigma_b$  son las matrices de Pauli (24),  $\gamma$  es la constante de acoplamiento, que está asociada con las masas de las partículas de gauge (Kane (1993)),  $\Phi$  es el campo de Higgs, que está en la forma de doblete complejo

$$\Phi(t) \equiv \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(t) + i\psi_1(t) \\ \phi_2(t) + i\psi_2(t) \end{pmatrix}, \quad (84)$$

en donde los campos  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son reales y solo dependen del tiempo;  $A_\mu^b$  son los campos de gauge, que adoptan toman la configuración de tríada cósmica para asegurar la isotropía del universo

$$A_\mu^a(t) = f(t) \delta_\mu^a, \quad (85)$$

las letras latinas toman los valores  $a = 1, 2, 3$  y las letras griegas toman los valores  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .

El tercer término de la acción es el potencial de Higgs o, como es conocido popularmente, potencial sombrero mexicano o potencial de base de botella de vino, adquiere estos nombres debido a la forma que tiene cuando es generado por un doblete real o un campo escalar. Éste se puede

observar en la figura 2.4. El potencial de Higgs se define como

$$V(\Phi^2) \equiv \frac{\lambda}{4} (\Phi^2 - \Phi_0^2)^2, \quad (86)$$

en donde  $\Phi_0$  es el valor del campo en el mínimo del potencial y  $\lambda$  es la constante de acoplamiento del potencial.

El cuarto término de la acción corresponde a la parte cinética de los bosones vectoriales, está compuesto por el tensor de esfuerzos de los campos de gauge

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \gamma \varepsilon_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (87)$$

este tensor está construido a partir de los operadores de la derivada covariante (39);  $\varepsilon_{bc}^a$  es el tensor de Levi-Civita en espacio tiempo plano.

Los dos últimos términos de la acción representan la materia relativista y no relativista, en forma de fluidos perfectos. Se utiliza la métrica de un universo plano, homogéneo e isótropo, es decir, la métrica FLRW plana, que tiene un elemento de línea en unidades naturales

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\vec{x}^2. \quad (88)$$

El tensor momentum energía (TEM) se define como

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (89)$$

en donde el lagrangiano está definido por

$$\mathcal{L} \equiv -(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^2) - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_m, \quad (90)$$

$$= \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{YM} + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_m, \quad (91)$$

y cada uno de los lagrangianos están dados por

$$\mathcal{L}^H \equiv -(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^2), \quad \mathcal{L}^{YM} \equiv -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a, \quad (92)$$

el TEM es lineal con respecto al lagrangiano, por lo tanto se puede escribir en términos de la suma de los TEM de cada campo

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^H + T_{\mu\nu}^{YM} + T_{\mu\nu}^r + T_{\mu\nu}^m, \quad (93)$$

en donde a cada tensor le corresponde un lagrangiano de la Ec. (92).

El lagrangiano de Yang-Mills  $\mathcal{L}^{YM}$  derivado con respecto a la métrica toma la forma

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \mathcal{L}^{YM}}{g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \left[ g^{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} F_{a\rho\alpha} F_{\sigma\beta}^a \right], \\ &= -\frac{1}{2} F_{a\rho\alpha} F_{\sigma\beta}^a \left[ \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma g^{\alpha\beta} + \delta_\mu^\alpha \delta_\sigma^\beta g^{\rho\sigma} \right], \\ &= -F_a^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu}^a, \end{aligned} \quad (94)$$

reemplazando con la tríada cósmica se obtiene

$$2 \frac{\partial \mathcal{L}^{YM}}{g^{\mu\nu}} = f^2 \left( \delta_\mu^a \delta_{va} - \frac{3}{a^2} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \right) - 2\gamma^2 \frac{f^4}{a^2} \delta_\mu^b \delta_{vb}, \quad (95)$$

este término es un tensor diagonal ya que sus componentes  $\mu \neq \nu$  se hacen cero, sus componentes espaciales, es decir,  $\mu = i$ , son iguales, lo que representa la isotropía.

El lagrangiano de YM es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{YM} &= -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{a\mu\alpha} F_{\nu\beta}^a, \\ &= -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \left( \partial_\mu A_\alpha^a - \partial_\alpha A_\mu^a + \gamma \epsilon_{bc}^a A_\mu^b A_\alpha^c \right) \left( \partial_\nu A_{a\beta} - \partial_\beta A_{a\nu} + \gamma \epsilon_{ade} A_\nu^d A_\beta^e \right), \end{aligned} \quad (96)$$

reemplazando con la tríada cósmica se tiene

$$\mathcal{L}^{YM} = -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \left( \delta_\alpha^a \partial_\mu f - \delta_\mu^a \partial_\alpha f + \gamma \epsilon_{bc}^a \delta_\mu^b \delta_\alpha^c f^2 \right) \left( \delta_{a\beta} \partial_\nu f - \delta_{a\nu} \partial_\beta f + \gamma \epsilon_{ade} \delta_\nu^d \delta_\beta^e f^2 \right), \quad (97)$$

teniendo en cuenta la característica homogénea de la tríada cósmica, es decir, que solo depende del tiempo y que la contracción de los símbolos de Levi-Civita es  $\epsilon_{bc}^a \epsilon_{ade} = \delta_{db} \delta_{ec} - \delta_{de} \delta_{cb}$ , se puede reducir el lagrangiano a

$$\mathcal{L}^{YM} = \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{\dot{f}}{a} \right)^2 - \gamma^2 \left( \frac{f}{a} \right)^4 \right], \quad (98)$$

reemplazando las ecuaciones (98) y (95) en la Ec. (89) se obtiene

$$T_{\mu\nu}^{YM} = \frac{3}{2}g_{\mu\nu} \left[ \left( \frac{\dot{f}}{a} \right)^2 - \gamma^2 \left( \frac{f}{a} \right)^4 \right] - \dot{f}^2 \left( \delta_{\mu}^a \delta_{\nu a} - \frac{3}{a^2} \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 \right) + 2\gamma^2 \frac{f^4}{a^2} \delta_{\mu}^b \delta_{\nu b}. \quad (99)$$

Este tensor es diagonal ya que sus componentes  $\mu \neq \nu$  se hacen cero; sus componentes espaciales, es decir,  $\mu = \nu = i$ , son iguales.

Por definición (2.4), el TEM de un fluido perfecto es

$$T_{\mu\nu}^n = p^n g_{\mu\nu} + (\rho^n + p^n) u_{\mu} u_{\nu}. \quad (100)$$

en donde  $n = r, m$ , para representar la radiación y la materia respectivamente. Estos tensores, al igual que el TEM de YM, son isotrópicos y homogéneos.

La derivada del TEM de Higgs  $\mathcal{L}^H$  con respecto a la métrica es

$$\frac{\partial \mathcal{L}^H}{\partial g^{\mu\nu}} = - (D_{(\mu} \Phi)^{\dagger} (D_{\nu)} \Phi), \quad (101)$$

$$= - \left[ \partial_{\mu} \Phi^{\dagger} \partial_{\nu} \Phi - i \frac{\gamma}{2} \partial_{(\mu} \Phi^{\dagger} \sigma_b A_{\nu)}^b \Phi + i \frac{\gamma}{2} \Phi^{\dagger} \sigma_b A_{(\mu}^b \partial_{\nu)} \Phi + \frac{\gamma^2}{4} \Phi^{\dagger} \sigma_b \sigma_c A_{(\mu}^b A_{\nu)}^c \Phi \right], \quad (102)$$

reemplazando la anterior ecuación con la tríada cósmica y el campo de Higgs homogéneo además de tener en cuenta la relación de las matrices de Pauli  $\sigma_a \sigma_b = \varepsilon_{ab}^c \sigma_c + \delta_{ab} I$  se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}^H}{\partial g^{\mu\nu}} = -\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 \Phi^{\dagger} \Phi + i \frac{\gamma f}{2} \delta_{(\mu}^0 \delta_{\nu)}^b \left( \Phi^{\dagger} \sigma_b \Phi - \Phi^{\dagger} \sigma_b \Phi \right) - \frac{\gamma^2 f^2}{4} \delta_{(\mu}^b \delta_{\nu)}^c \delta_{bc} \Phi^{\dagger} \Phi. \quad (103)$$

Al reemplazar por la tríada cósmica y por el campo de Higgs homogéneo en el lagrangiano de Higgs se obtiene

$$\mathcal{L}^H = \dot{\Phi}^\dagger \dot{\Phi} - \frac{3\gamma^2 f^2}{4a^2} \Phi^\dagger \Phi - V(\Phi^2), \quad (104)$$

el cual genera un TEM de Higgs

$$T_{\mu\nu}^H = g_{\mu\nu} \dot{\Phi}^\dagger \dot{\Phi} - g_{\mu\nu} \frac{3\gamma^2 f^2}{4a^2} \Phi^\dagger \Phi - g_{\mu\nu} V(\Phi^2) \quad (105)$$

$$+ 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \dot{\Phi}^\dagger \dot{\Phi} - i\gamma f \delta_{(\mu}^0 \delta_{\nu)}^b \left( \dot{\Phi}^\dagger \sigma_b \Phi - \Phi^\dagger \sigma_b \dot{\Phi} \right) + \frac{\gamma^2 f^2}{2} \delta_\mu^b \delta_\nu^c \delta_{bc} \Phi^\dagger \Phi, \quad (106)$$

sorprendentemente, este TEM no es isótropo, ya que las componentes  $\mu = 0, \nu = i$  tienen términos diferentes de cero, generando flujo de energía y densidad de momentum, cantidades altamente anisótropas. Con este resultado la consistencia de las ecuaciones se ve afectada, ya que una métrica isótropa y homogénea no puede ser generada a partir de un TEM anisótropo. Por compatibilidad de las ecuaciones este término se tiene que anular

$$-i\gamma f \delta_{(\mu}^0 \delta_{\nu)}^b \left( \dot{\Phi}^\dagger \sigma_b \Phi - \Phi^\dagger \sigma_b \dot{\Phi} \right) = -i\gamma f \delta_{(\mu}^0 \delta_{\nu)}^b \text{Im} \left( \dot{\Phi}^\dagger \sigma_b \Phi \right) = 0. \quad (107)$$

Existen cuatro formas de satisfacer la ecuación (107), la primera implica hacer cero al campo del gauge, lo que anula la invarianza de la acción ante transformaciones locales; aun más importante, suprime toda la dinámica de los campos de gauge; la acción se reduce entonces a un modelo de quinta esencia con un campo de Higgs, en el contexto de inflación existen varios

modelos que se reducen a esta acción en casos especiales (Bezrukov and Shaposhnikov (2008); Garcia-Bellido et al. (2011)); quinta esencia con potencial de Higgs también se analiza para el caso de energía oscura en (Ketov and Watanabe (2014)).

La segunda opción se basa en hacer el campo de Higgs constante  $\dot{\Phi} = 0$ , la acción resultante es una simplificación de modelos estudiados en el contexto de inflación como (Golovnev et al. (2008b)), y energía oscura (Böhmer and Harko (2007)).

La tercera opción consiste en hacer la constante de acoplamiento igual a cero  $\gamma=0$ , anular este parámetro desacopla los campos de gauge y el campo de Higgs, a su vez rompe la invarianza ante transformaciones locales, ya que el término de la interacción encargado de anular el término resultante de la derivada espacio temporal de la transformación SU(2) se desvanece (esto se puede observar en ecuación (32) en la sección 5 del capítulo 2). Este escenario equivale a la suma directa de las acciones de quinta esencia para el campo de Higgs y los bosones de gauge sin masa en una teoría de YM.

Ninguna de las anteriores opciones provee un sustento físico lo suficientemente fuerte para ser analizado, por suerte, existe una última opción: hacer la parte imaginaria del producto de los dobletes de Higgs con las matrices de Pauli nulo,  $\text{Im}(\dot{\Phi}^\dagger \sigma_b \Phi) = 0$ , esto es equivalente a

$$\begin{aligned} \text{Im}(\dot{\Phi}_1^* \Phi_2 + \dot{\Phi}_2^* \Phi_1) &= 0, \\ \text{Re}(\dot{\Phi}_1^* \Phi_2 - \dot{\Phi}_2^* \Phi_1) &= 0, \\ \text{Im}(\dot{\Phi}_1^* \Phi_1 - \dot{\Phi}_2^* \Phi_2) &= 0, \end{aligned} \tag{108}$$

que se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1 \psi_2 - \dot{\psi}_1 \phi_2 + \dot{\phi}_2 \psi_1 - \dot{\psi}_2 \phi_1 &= 0, \\
\dot{\phi}_1 \phi_2 + \dot{\psi}_1 \psi_2 - \dot{\phi}_2 \phi_1 - \dot{\psi}_2 \psi_1 &= 0, \\
\dot{\phi}_1 \psi_1 - \dot{\psi}_1 \phi_1 - \dot{\phi}_2 \psi_2 + \dot{\psi}_2 \phi_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{109}$$

Una solución de este sistema de ecuaciones es el campo en la representación unitaria

$$\Phi(t) \equiv \begin{pmatrix} \phi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{110}$$

pero esta no es la única solución, existen infinitas soluciones que están relacionadas con la representación unitaria por medio de una transformación SU(2) independiente del tiempo,  $\Phi' = U\Phi$ , la demostración se encuentra en el apéndice 2.

Retomando el cálculo del TEM, se suman las ecuaciones (103), (106) y (100) y toma el tensor en su forma mixta, de manera que el TEM total se reduce a

$$-T_0^0 = \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{f}}{a}\right)^2 + \frac{3\gamma^2}{2} \left(\frac{f}{a}\right)^4 + \frac{3\gamma^2}{4} \left(\frac{\phi f}{a}\right)^2 + \dot{\phi}^2 + V(\phi^2) + \rho_m + \rho_r, \tag{111}$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{f}}{a}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{f}{a}\right)^4 + \frac{\gamma^2}{4} \left(\frac{\phi f}{a}\right)^2 + \dot{\phi}^2 - V(\phi^2) + \frac{\rho_r}{3}, \tag{112}$$

$$\tag{113}$$

gracias a la configuración unitaria del Higgs las componentes no diagonales del TEM se anulan y sus tres componentes diagonales son iguales, lo que corresponde a un universo isótropo.

Las ecuaciones de Einstein se escriben en forma tensorial

$$G_{\mu}^{\nu} = -\frac{T_{\mu}^{\nu}}{m_p^2}, \quad (114)$$

en donde se utilizaron las unidades naturales; las dos ecuaciones de Einstein resultantes se convierten en la ecuación de Friedmann y en la ecuación del parámetro de desaceleración

$$H^2 = \frac{1}{3m_p^2} \left[ \frac{3}{2} \frac{\dot{f}^2}{a^2} + \dot{\phi}^2 + \frac{3}{2} \frac{\gamma^2 f^4}{a^4} + \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 \phi^2 f^2}{a^2} + V(\phi^2) + \rho_r + \rho_m \right], \quad (115)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2m_p^2} \left[ 2 \frac{\dot{f}^2}{a^2} + 2\dot{\phi}^2 + 2 \frac{\gamma^2 f^4}{a^4} + \frac{\gamma^2 \phi^2 f^2}{2a^2} + \frac{4}{3} \rho_r + \rho_m \right]. \quad (116)$$

El cálculo del tensor de Einstein se encuentra en la parte final del apéndice 4; la ecuación (116) es la combinación entre la primera y segunda ecuación de Einstein.

Las ecuaciones de Euler Lagrange del campo de gauge y de Higgs son respectivamente

$$\ddot{f} + H\dot{f} + \frac{\gamma^2 f \phi^2}{2} + 2 \frac{\gamma^2 f^3}{a^2} = 0, \quad (117)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 f^2 \phi}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (118)$$

cada una de estas ecuaciones cuenta respectivamente con un término que contiene una derivada de segundo orden, un acoplamiento al parámetro de Hubble, un término de acoplamiento y la derivada

del potencial con respecto a los respectivos campos; el cálculo de las ecuaciones de Euler-Lagrange se encuentra en el apéndice 3.

### **3.2. Sistema dinámico**

El sistema encontrado es altamente no lineal, por lo que una solución analítica está fuera del alcance de este trabajo. De ninguna manera esto implica que no se pueda obtener información acerca del sistema, las características más importantes de la dinámica del modelo se pueden deducir a través de un tratamiento de sistemas dinámicos, siendo una herramienta muy útil a la hora de tratar con energía oscura (Amendola and Tsujikawa (2010)). En esta sección, por medio de un mapeo, se obtiene un sistema autónomo de variables adimensionales, ideales para su tratamiento; además se encuentran los puntos de equilibrio o puntos críticos, para los cuales se les deduce y describe su estabilidad por medio de la aproximación lineal.

**3.2.1. Parametrización en términos de variables adimensionales.** La parametrización de las ecuaciones debe ser tal que estas sean lo más sencillas posible, esto implica encontrar ecuaciones que tengan el menor orden y que no tengan variables en el denominador,<sup>9</sup> lo cual se

---

<sup>9</sup> En la sección 4.2.1 se explicarán más a fondo las consecuencias de estas características.

logra para el modelo EYMH SU(2) con la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\dot{f}}{\sqrt{2}am_p H}, & y &= \frac{\gamma f^2}{\sqrt{2}a^2 m_p H}, \\
 w &= \frac{\gamma f \dot{\phi}}{2am_p H}, & k &= \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{3}m_p H}, \\
 v &= \frac{1}{m_p H} \sqrt{\frac{V(\phi)}{3}}, & r &= \frac{1}{m_p H} \sqrt{\frac{\rho_r}{3}}, \\
 m &= \frac{1}{m_p H} \sqrt{\frac{\rho_m}{3}}, & l &= \frac{\sqrt{2}am_p}{f}.
 \end{aligned} \tag{119}$$

De esta manera la ecuación de Friedmann (115) se convierte en la ligadura de Friedmann

$$x^2 + y^2 + w^2 + k^2 + v^2 + r^2 + m^2 = 1. \tag{120}$$

Esta ligadura permite obtener una variable en términos de las otras seis; debido a que todas las variables deben tomar valores reales, es fácil ver a través de la ligadura, que ninguna de las normas de las variables puede superar el valor de uno,  $|n| \leq 1$ , siendo  $n$  cualquier variable de la ligadura. El parametro de desaceleración  $q \equiv -\ddot{a}/\dot{a}^2 = -1 - \dot{H}/H^2$ , se construye con la combinación lineal de las ecuaciones (115) y (116) de manera que no dependa de la variable para la materia<sup>10</sup>

$$q = \frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2 - w^2 + 3k^2 - 3v^2 + r^2). \tag{121}$$

---

<sup>10</sup> Esto se hace con el propósito de disminuir el número de ecuaciones del sistema dinámico en uno.

El sistema de ecuaciones dinámicas se construye derivando respecto al número de *e-folds*  $N$ , en donde  $a = e^N$ . Esta escogencia del parámetro afín tiene dos motivaciones principales: es necesario escoger una variable adimensional, de este modo es posible escribir las derivadas en términos de las variables adimensionales del sistema dinámico; la segunda motivación está relacionada con el análisis del sistema, debido a que es mucho más fácil visualizar la evolución térmica del Universo en esta escala<sup>11</sup>. El sistema de ecuaciones derivado con respecto al número de *e-folds* es

$$x' = x(q - 1) - l(2y^2 + w^2), \quad (122)$$

$$y' = y(2xl + q - 1), \quad (123)$$

$$w' = w(xl + q) + \frac{\sqrt{3}}{2}lyk, \quad (124)$$

$$k' = k(q - 2) - wl \left( 2\mu v + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right), \quad (125)$$

$$v' = v(q + 1) + \mu lwk, \quad (126)$$

$$r' = r(q - 1), \quad (127)$$

$$m' = m\left(q - \frac{1}{2}\right), \quad (128)$$

$$l' = l(1 - lx), \quad (129)$$

---

<sup>11</sup> A la hora de graficar, es posible escoger como variable al corrimiento al rojo y fijar el eje absciso en escala logarítmica, de esta manera se mantiene la forma de la gráfica con respecto al número de *e-folds* en escala lineal.

en donde el único parámetro del sistema es  $\mu \equiv \sqrt{\lambda/2\gamma^2}$ .

Debido a la elección de las variables el sistema cuenta con algunas simetría ante cambio de signo, en la siguiente lista se describen dichas simetrías.

- $\{x \rightarrow -x, l \rightarrow -l, y \rightarrow -y, v \rightarrow -v\}$ ,
- $\{x \rightarrow -x, l \rightarrow -l, w \rightarrow -w\}$ ,
- $\{x \rightarrow -x, l \rightarrow -l, k \rightarrow -k\}$ ,
- $\{x \rightarrow -x, l \rightarrow -l, k \rightarrow -k, y \rightarrow -y, w \rightarrow -w, v \rightarrow -v\}$ ,
- $\{x \rightarrow -x, l \rightarrow -l, k \rightarrow -k, v \rightarrow -v\}$ ,
- $\{k \rightarrow -k, y \rightarrow -y, v \rightarrow -v\}$ ,
- $\{w \rightarrow -w, y \rightarrow -y, v \rightarrow -v\}$ ,
- $\{w \rightarrow -w, k \rightarrow -k\}$ .

Estas simetrías son útiles a la hora de reducir el análisis del sistema, como un ejemplo está la reducción del número de puntos críticos que se usará en la siguiente subsección.

Las variables dinámicas tienen el propósito de transformar el sistema a una configuración más amigable, en este proceso, la interpretación directa con la que cuentan las variables originales se pierde; para un óptimo análisis es necesario tener las variables originales en términos del nuevo sistema, estas variables originales son: el campo de gauge  $f/a$ , su derivada con respecto al tiempo

o velocidad  $\frac{d}{dt} \left( \frac{f}{a} \right)$ , el campo de Higgs  $\frac{\phi}{m_P}$ , su derivada temporal  $\frac{\dot{\phi}}{m_P}$  y el parámetro de Hubble  $H$ :

$$\frac{1}{m_P} \frac{f}{a} = \frac{\sqrt{2}}{l}, \quad (130)$$

$$\frac{1}{\gamma m_P} \frac{d}{dt} \left( \frac{f}{a} \right) = \sqrt{2} \frac{(xl-1)}{yl^3}, \quad (131)$$

$$\frac{\phi}{m_P} = 2 \frac{w}{yl}, \quad (132)$$

$$\frac{\dot{\phi}}{m_P} = \sqrt{6} \frac{k}{yl^2}. \quad (133)$$

$$\frac{H}{\gamma m_P} = \frac{\sqrt{2}}{yl^2}. \quad (134)$$

**3.2.2. Puntos críticos, variedades críticas y estabilidades.** Los puntos críticos o puntos de equilibrio son aquellos lugares en los que las derivadas de las variables del sistema dinámico son nulas, en estos puntos la dinámica del sistema queda congelada, es decir, los valores de las variables son constantes. Los puntos críticos pueden ser inestables o estables (José and Saletan (2000)). Las variedades críticas generalizan el punto crítico sobre una región, una variedad crítica es la unión de puntos críticos. Teniendo en cuenta las simetrías del sistema, existen dos variedades críticas y cuatro puntos críticos para el sistema EYMH SU(2).

- **Primera variedad crítica** (Dominación de radiación):

$$r = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad w = 0, \quad k = 0, \quad v = 0, \quad m = 0, \quad l = 0.$$

Esta variedad cuenta con un parámetro de desaceleración  $q = 1$ , su dominación puede ser alcanzada ya sea por la dominación del fluido perfecto de radiación o por los campos de gauge. Este punto es un punto de silla no hiperbólico. Durante este periodo el campo de

Higgs tiene una evolución desacelerada en magnitud, debido a que las variables  $y$  y  $l$  son repelentes alrededor de cero; en contraste  $k$  es atraída hacia este valor. La variable  $l$  es un repelente alrededor de cero, esto se traduce en el decrecimiento en magnitud del campo de gauge.

Las variables  $m$  y  $v$  también son repelentes alrededor de cero, abriendo la posibilidad de una dominación de materia o energía oscura posterior a radiación. Existe otro punto igual a este excepto por el valor de la variable de radiación  $r = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ , gracias a las simetrías ante cambio de signo se determina que es la misma variedad crítica.

- **Segunda variedad crítica** (Dominación de radiación):

$$r = \sqrt{1-x^2}, l = 1/x, y = 0, w = 0, k = 0, v = 0, m = 0.$$

Esta variedad cuenta con un parámetro de desaceleración  $q = 1$ ; la dominación no puede ser totalmente alcanzada por el fluido perfecto de radiación, esto significaría la divergencia de  $l$ . Este punto es un punto de silla.

Durante el periodo de dominación de este punto, el campo de Higgs tiene una evolución desacelerada en magnitud debido a la estabilidad de las variables  $y$  y  $k$ , repelente y atractora alrededor de cero respectivamente;  $l$  es atraída hacia un valor constante. Las variables  $m$  y  $v$  también son repelentes alrededor de cero, abriendo la posibilidad de una dominación de materia o energía oscura posterior a radiación. Existe otro punto equivalente a este, en el que la variable de radiación toma valores negativos.

- **Primer punto crítico** (Dominación de quinción):

$$k = 1, x = 0, y = 0, w = 0, v = 0, r = 0, m = 0, l = 0.$$

Este punto se denomina quinación, llamado así debido la parte cinética del campo de Higgs, que domina en este periodo. Cuenta con un parámetro de desaceleración  $q = 1$ , es un punto repelente hiperbólico y, debido a que solo existe un punto crítico repelente, es altamente probable que el sistema evolucione hacia el pasado para terminar inevitablemente en esta configuración, independientemente de los valores iniciales que se tomen. Existe otro punto equivalente a este con  $k = -1$ .

Debido a que las variables  $l$  y  $y$  son repelentes alrededor del cero, el cociente  $1/yl^2$  decrece y por lo tanto también lo hace el parámetro de Hubble, a su vez, la variable  $k$  es repelente alrededor del valor 1, por la liguadura (120) sabemos que la variable no puede ser mayor a la unidad, por lo tanto,  $k$  disminuye, haciendo que la derivada con respecto al tiempo del Higgs disminuya, es decir, el Higgs tiene una evolución desacelerada en magnitud. La variable  $l$  es un repelente alrededor de cero, esto significa que el campo de gauge va decreciendo en magnitud.

■ **Segundo punto crítico** (Dominación de materia):

$$m = 1, x = 0, y = 0, w = 0, k = 0, v = 0, r = 0, l = 0.$$

Este punto es solamente dominado por el fluido de materia, tiene un parámetro de desaceleración de  $q = \frac{1}{2}$  y es un punto de silla no hiperbólico. La variable  $l$  es un repelente en el cero, por lo tanto el campo de gauge decrece en magnitud con el tiempo; el cambio del campo de Higgs con respecto al número de *e-folds* es desacelerado, dicho de otra manera, la variable

$k$  es atraída hacia el cero. Las variables que generan radiación:  $y$ ,  $r$  y  $x$ , son atractores hacia el cero, por lo tanto la posibilidad de una dominación por radiación después de la época de dominación de la materia es nula.

Existe un punto crítico con  $m = -1$  que es equivalente a este; las variables  $v$  y  $w$  son repelentes de cero, por lo tanto el siguiente punto crítico tiene que ser energía oscura o una época de dominación por la interacción.

■ **Tercer punto crítico** (Dominación de la interacción):

$$w = 1, x = 0, y = 0, k = 0, v = 0, r = 0, m = 0, l = 0.$$

Este punto es dominado por el acople entre el campo de Higgs y el campo de gauge, tiene un parámetro de desaceleración de  $q = 0$ , lo que implica una expansión constante; es un punto de silla hiperbólico. El comportamiento de las variables  $l$  y  $k$  en este punto es idéntico al punto de materia. El punto con  $w = -1$  es equivalente a este. La materia y la radiación disminuyen debido a que las variables  $m$ ,  $y$ ,  $x$  y  $r$  son atractores del cero.

■ **Cuarto punto crítico**(Dominación de la energía oscura):

$$w = 1, x = 0, y = 0, k = 0, v = 0, r = 0, m = 0, l = 0.$$

Este punto es dominado por el potencial del Higgs, tiene un parámetro de desaceleración de  $q = -1$ , lo que lo hace un generador de expansión del universo acelerado, es un atractor en todas las variables excepto en  $l$ , y es hiperbólico. El campo de Higgs, a través del número de  $e$ -folds crece desaceleradamente, el campo de gauge crece. Este punto tiene el mayor

número de atractores, por esto es el candidato más probable para ser el último punto que domine hacia el futuro. Existe un punto con  $\nu = -1$  equivalente a este. Este punto es el más importante de todos ya que genera energía oscura.

### 3.3. Solución numérica

El análisis de sistema dinámico provee información acerca de las fases por las que un sistema puede evolucionar, en este caso, dichas fases están parametrizadas por el parámetro de desaceleración  $q^{12}$ ; la linealización del sistema puede proveer información cualitativa sobre la evolución de las variables en cada fase de dominación, aunque dicha información es extremadamente útil y da una clara noción del comportamiento del sistema, esta se limita al vecindario cercano a los puntos críticos. Una solución numérica refuerza el análisis dinámico y conecta el sistema con las condiciones iniciales<sup>13</sup> del Universo.

Por medio de las observaciones de la radiación cósmica de fondo se encuentra el valor actual de la abundancia de radiación y materia , esta última incluyendo a la materia oscura y la

---

<sup>12</sup> Incluso para las variedades críticas, las cuales tienen variables libres, el parámetro de desaceleración tiene un valor constante.

<sup>13</sup> Las condiciones iniciales se refieren a las condiciones actuales del Universo.

materia bariónica<sup>14</sup> (Aghanim et al. (2018))

$$\Omega_{ro} \equiv r_0^2 = 10^{-4}, \quad \Omega_{m0} \equiv m_0^2 = 0.313. \quad (135)$$

La ligadura de Friedmann (120) limita los valores que pueden tomar algunas variables, esto, junto con la expansión acelerada del Universo, lleva a fijar el potencial de Higgs con un valor significativamente más alto que las otras variables, lo cual se traduce en que los valores absolutos de las variables  $x, y, w, k$  deben ser menores al valor absoluto de la variable  $v$ .

La variable  $l$  no hace parte de la ligadura, en principio podría tomar cualquier valor excepto por el cero, debido a que de otra manera diverge. Además, en todos los puntos críticos, excepto en la segunda variedad crítica,<sup>15</sup> la variable es un repelente del cero, en otras palabras, desde la más temprana evolución hasta la actualidad  $l$  se ha alejado del cero, por lo tanto su valor inicial en la simulación numérica debe ser grande, para evitar ajuste fino.

Un conjunto de valores que permiten una evolución en la que todas las etapas térmicas del universo se alcanzan, con la proporciones correctas, está descrito a groso modo<sup>16</sup> por:

---

<sup>14</sup> Estas cantidades están sujetas al modelo con el que fueron ajustadas(en este caso  $\Lambda$ CDM), es decir, las variables dependen del modelo ya que los análisis de las observaciones se ajustan a ciertas funciones; un análisis en el que se ajusten los parámetros del modelo EYMH va más allá de los objetivos de este proyecto de grado. Existen trabajos en los cuales se analizan las observaciones de manera independiente del modelo, algunas de ellas son (L'Huillier et al. (2018); Li et al. (2016); Zhai and Wang (2019)).

<sup>15</sup> Esta variedad crítica queda descartada como parte de la evolución del universo, las razones serán presentadas más adelante.

<sup>16</sup> Se hizo una malla numérica con los posibles valores de las variables y se observaron cuales valores obtienen

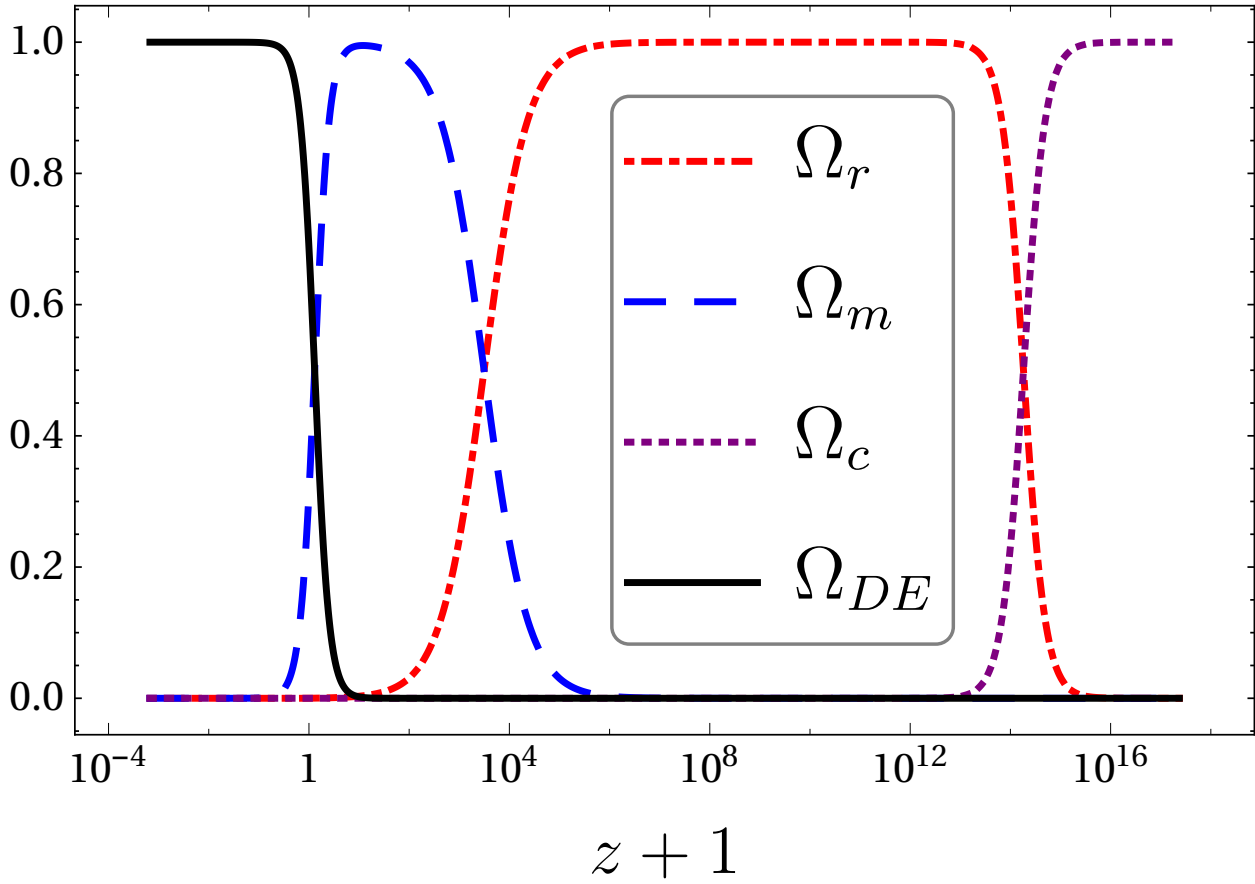
$$\boxed{
 \begin{aligned}
 |x_0| \lesssim 10^{-3}, |y_0| \lesssim 10^{-3}, |k_0| \lesssim 10^{-17}, |\alpha l_0| \lesssim 10^5, |w_0| \lesssim 10^{-17}, \\
 |l_0 k_0| \approx |l_0 y_0| \approx |l_0 x_0| \approx |l_0 w_0| \lesssim 10^{-1},
 \end{aligned}
 } \tag{136}$$

de donde se toman unas condiciones genéricas para la simulación numérica

$$x_0 = 10^{-18}, y_0 = 10^{-18}, k_0 = 10^{-17}, w_0 = 10^{-17}, l_0 = 10, \mu = 1. \tag{137}$$

---

una evolución en la que la duración de las épocas tenga una proporción correcta. A diferencia de este modelo, existen distintos trabajos en los cuales sus puntos críticos son escalantes, esto es útil a la hora de acotar los parámetros con la ayuda de las observaciones en diferentes épocas, un ejemplo de este tipo de modelos se presenta en (Beltrán Almeida et al. (2019)).



*Figura 3.1.* Evolución térmica del universo en términos del corrimiento al rojo, el cual crece hacia el pasado. En el presente ( $z=0$ ) se tiene una dominación de la energía oscura, la cual se extiende indefinidamente hacia el futuro; hacia el pasado, entre los corrimientos al rojo  $z \approx 0.3$  y  $z \approx 3000$ , está la época de dominación de la materia, que precede a la época de dominación por la radiación entre los corrimientos al rojo  $z \approx 3000$  y  $z \approx 1.4 \times 10^{14}$ , finalmente se encuentra la época de dominación por la cuantización que va de  $z \approx 1.4 \times 10^{14}$  en adelante.

Las abundancias de energía son cantidades que ayudan a visualizar la historia térmica del universo, se definen a partir de la ecuación de Friedmann

$$\Omega_m \equiv m^2, \quad \Omega_r \equiv r^2, \quad \Omega_{DE} \equiv v^2, \quad \Omega_c \equiv w^2 + y^2 + x^2 + k^2, \quad (138)$$

de tal manera que

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_{DE} + \Omega_c, \quad (139)$$

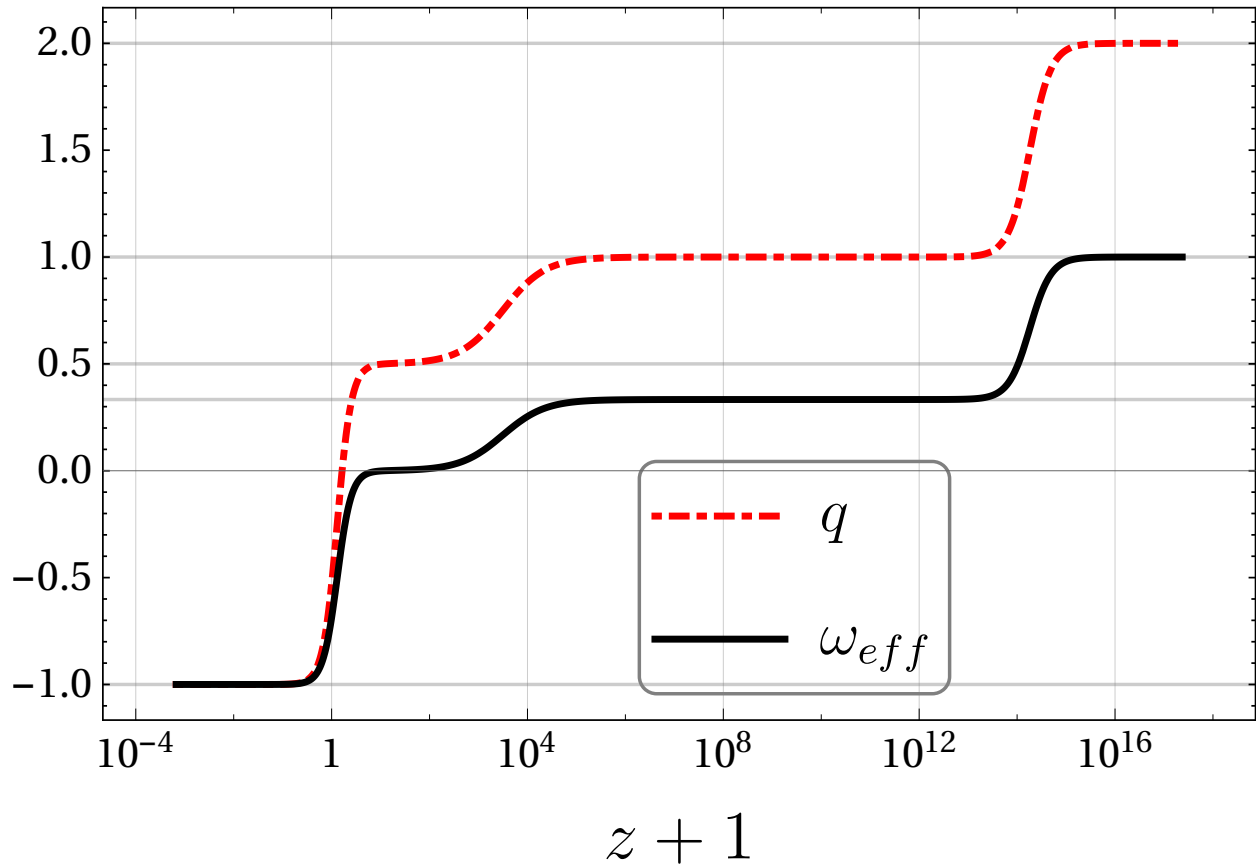


Figura 3.2.  $\omega_{eff}$  corresponde al parámetro de estado efectivo,  $q$  es el parámetro de desaceleración. En la época de dominación por la energía oscura se tiene un parámetro de estado y de desaceleración  $\omega_{eff} = q = -1$  que emulan a la constante cosmológica; hacia el pasado está la dominación por materia con  $\omega_{eff} = 0$  y  $q = 1/2$ , en donde la presión es despreciable; la época que antecede a la dominación por materia es la dominación por radiación, en esta se tienen  $\omega_{eff} = 1/3$  y  $q = 1$ , finalmente se encuentra la época de dominación por la quinación, con  $q = 2$  y  $\omega_{eff} = 1$ , el parámetro de estado igual a uno corresponde a materia rígida.

en donde  $\Omega_m$  es la abundancia de materia,  $\Omega_r$  es la abundancia de radiación,  $\Omega_{DE}$  es la

abundancia de energía oscura y  $\Omega_c$  está compuesto por los términos de interacción, potencial del campo de gauge y cinético para el campo de Higgs. En la figura 3.1 se pueden observar la división de la historia térmica del universo<sup>17</sup> y en la figura 3.2 se pueden observar el parámetro de desaceleración  $q$  y el parámetro efectivo de estado  $\omega_{eff} = (2q - 1)/3$  de cada época.

A continuación se listarán las épocas térmicas del universo empezando por la dominación por la quinación para terminar con la dominación por energía oscura.

**3.3.1. Dominación por la quinación.** Esta época se encuentra desde corrimientos al rojo más altos que  $z \approx 1.4 \times 10^{14}$ ; tiene un parámetro de desaceleración  $q = 2$  y un parámetro de estado  $\omega_{eff} = 1$ . Este periodo de dominación corresponde al primer punto crítico; que al ser un repelente, obliga al sistema a empezar<sup>18</sup> la evolución con dominación por quinación. La quinación es causada por la parte cinética del campo de Higgs. La evolución de los campos físicos se puede ver en la figura 3.3,<sup>19</sup> desde el pasado la derivada temporal del campo de Higgs disminuye, el campo de Higgs aumenta desaceleradamente, el campo de gauge disminuye y la derivada del campo de gauge aumenta desde valores negativos aproximándose hacia el cero.

---

<sup>17</sup> La gráfica está en términos del corrimiento al rojo en vez del número de *e-folds*, que es el parámetro afín con el que se corrió la simulación. El objetivo de este cambio de variable es tener una visualización más física del problema, ya que el corrimiento al rojo puede ser medido directamente y se pueden encontrar puntos de referencia fácilmente en la literatura, un ejemplo representativo de estos puntos de referencia es el corrimiento al rojo de la última dispersión  $z \simeq 1100$  (Weinberg (2008)). La conversión entre el número de *e-folds* y el corrimiento al rojo es  $z + 1 = e^{-N}$ .

<sup>18</sup> Con empezar se hace referencia a épocas tempranas, corrimientos al rojo grandes.

<sup>19</sup> No todas las gráficas están en la misma escala, es importante tener esto en cuenta para evitar interpretaciones erróneas.

La disminución de la derivada del campo de Higgs da cuenta del decrecimiento de la quinción, dando paso a la época dominada por la radiación. Esta época no se encuentra en el modelo de concordancia ni en la cosmología estándar, esto puede ser visto como una mala señal o también puede ser visto como la posibilidad de una época de recalentamiento en el caso de una eventual unión con la época de inflación (Opferkuch et al. (2019)).

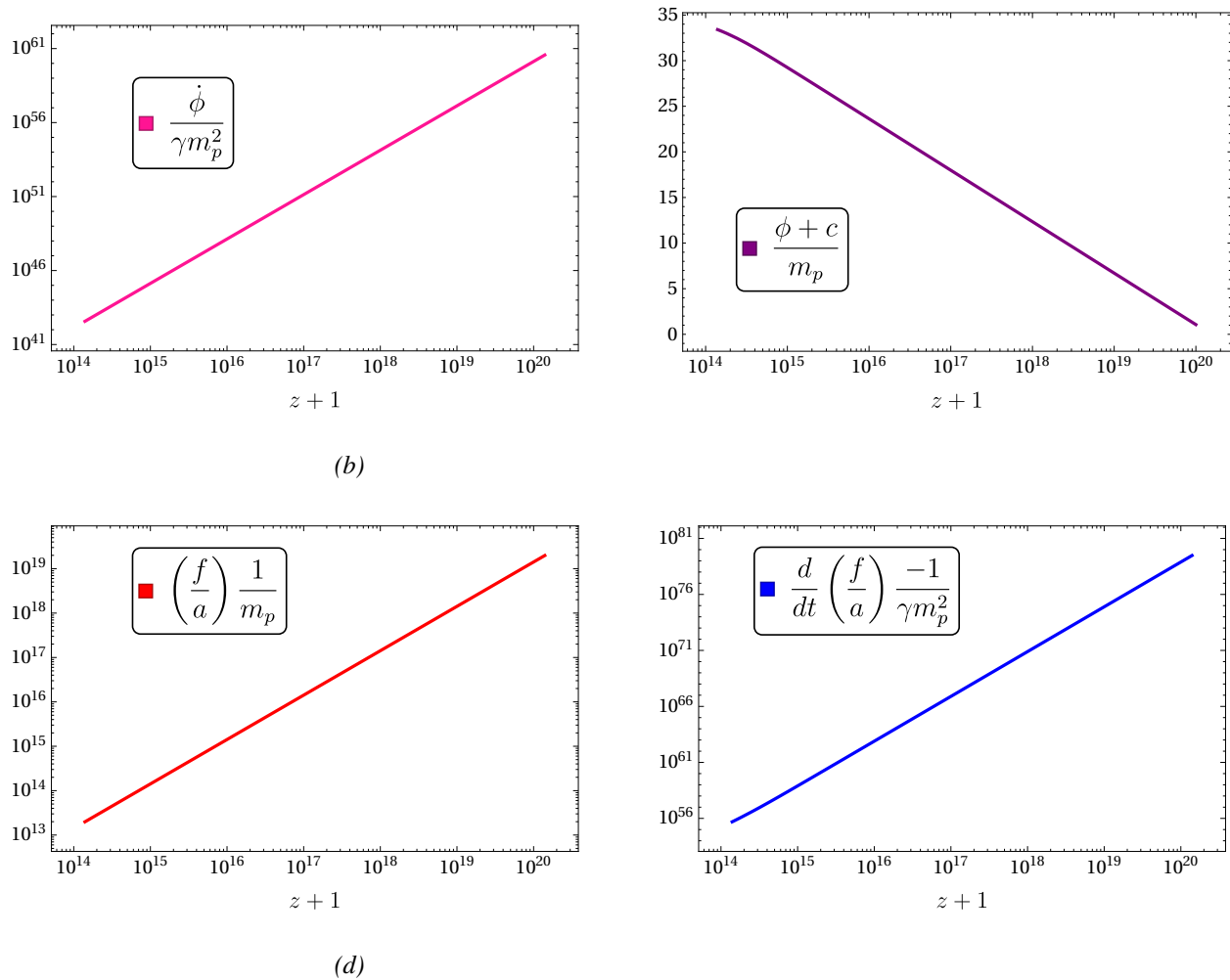
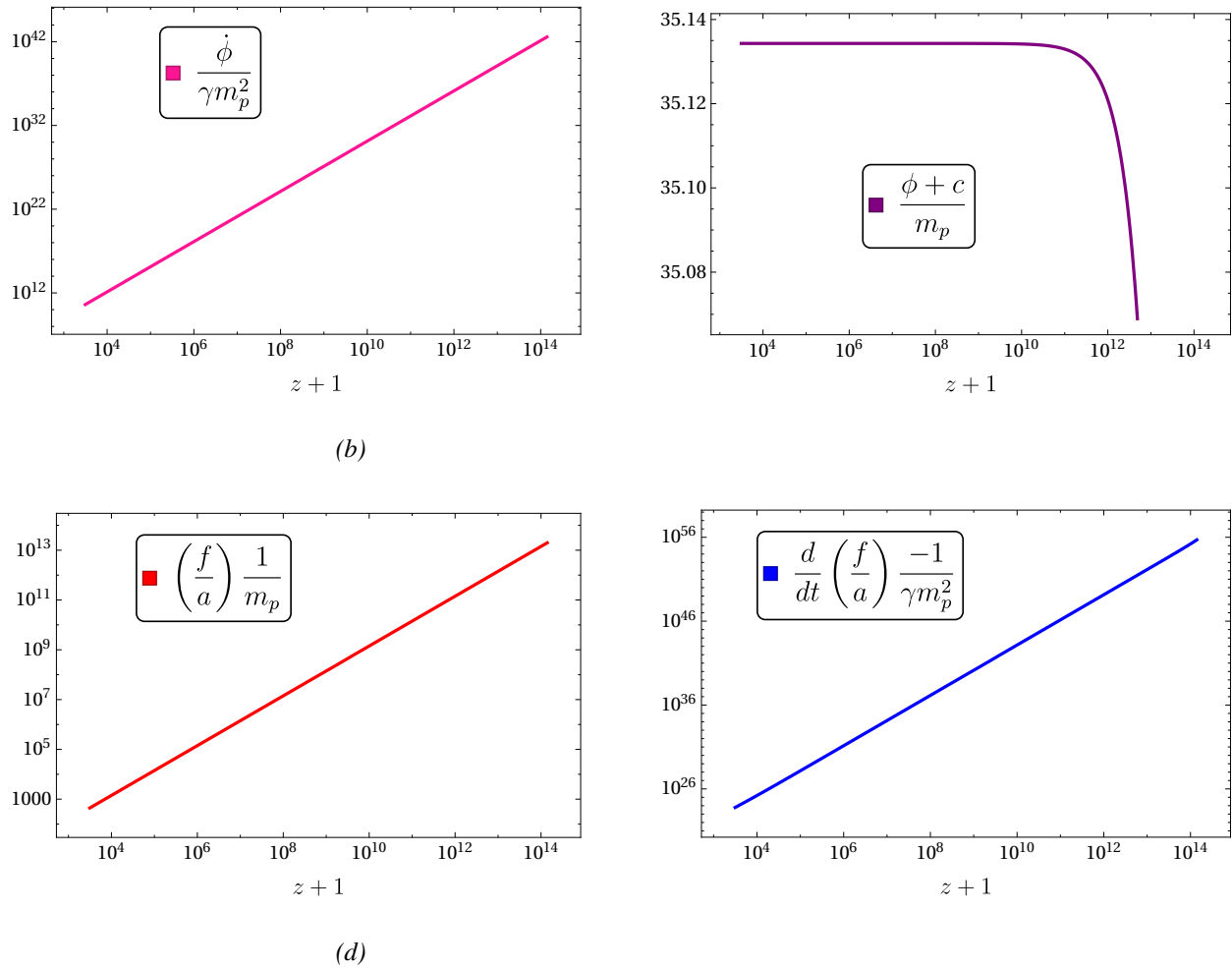


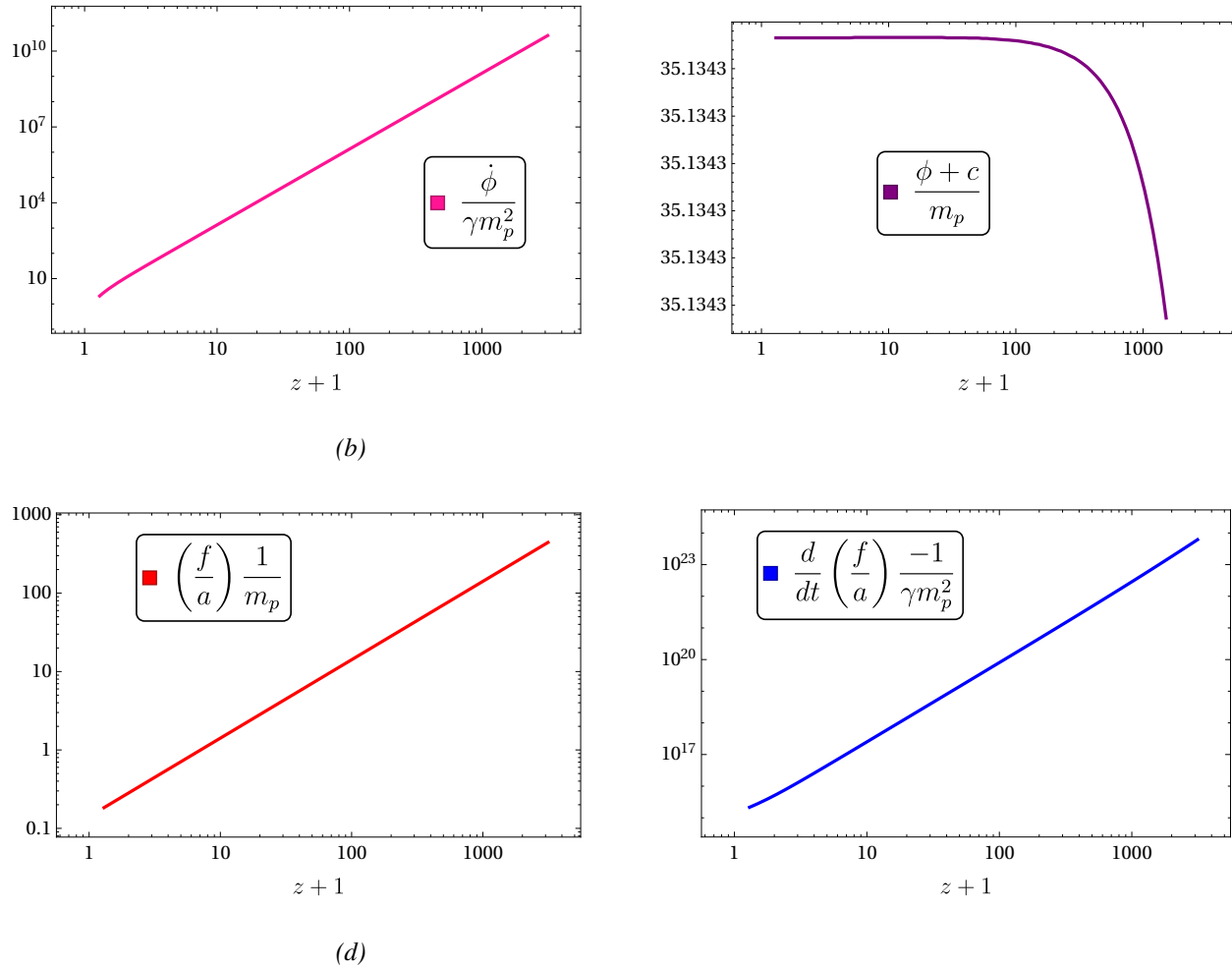
Figura 3.3. (a) velocidad del campo de Higgs, (b) el campo de Higgs, (c) el campo de gauge y su velocidad (d) para el periodo de **quinción**; es importante notar que las cantidades están escaladas cada una por un factor diferente y que el eje vertical puede estar en escala logarítmica.



*Figura 3.4.* Para la época dominada por la **radiación** se tiene que la velocidad del campo de Higgs (a) sigue decreciendo hacia el futuro, el campo de Higgs (b) llega a un valor asintótico, la velocidad del campo de gauge (d) sigue creciendo desde valores negativos hacia el cero con una razón más grande, consecuentemente, el campo de gauge (c) disminuye.

**3.3.2. Dominación por la radiación.** Este periodo se extiende desde el corrimiento al rojo  $z \approx 1.4 \times 10^{14}$  hasta  $z \approx 3 \times 10^3$ . La dominación debe ser alcanzada únicamente por el fluido perfecto de radiación, ya que diferentes observaciones de procesos durante esta época coinciden en un alto grado con la suposición de dominación de un fluido de radiación perfecta (Weinberg

(1989)); la primera y segunda variedad generan una época de radiación, esta última tiene necesariamente una fracción de radiación oscura generada por el término  $x^2$  durante la evolución, debido a que  $l = 1/x$  diverge de otra manera, esta característica de la segunda variedad la descarta como parte de la historia térmica del universo.

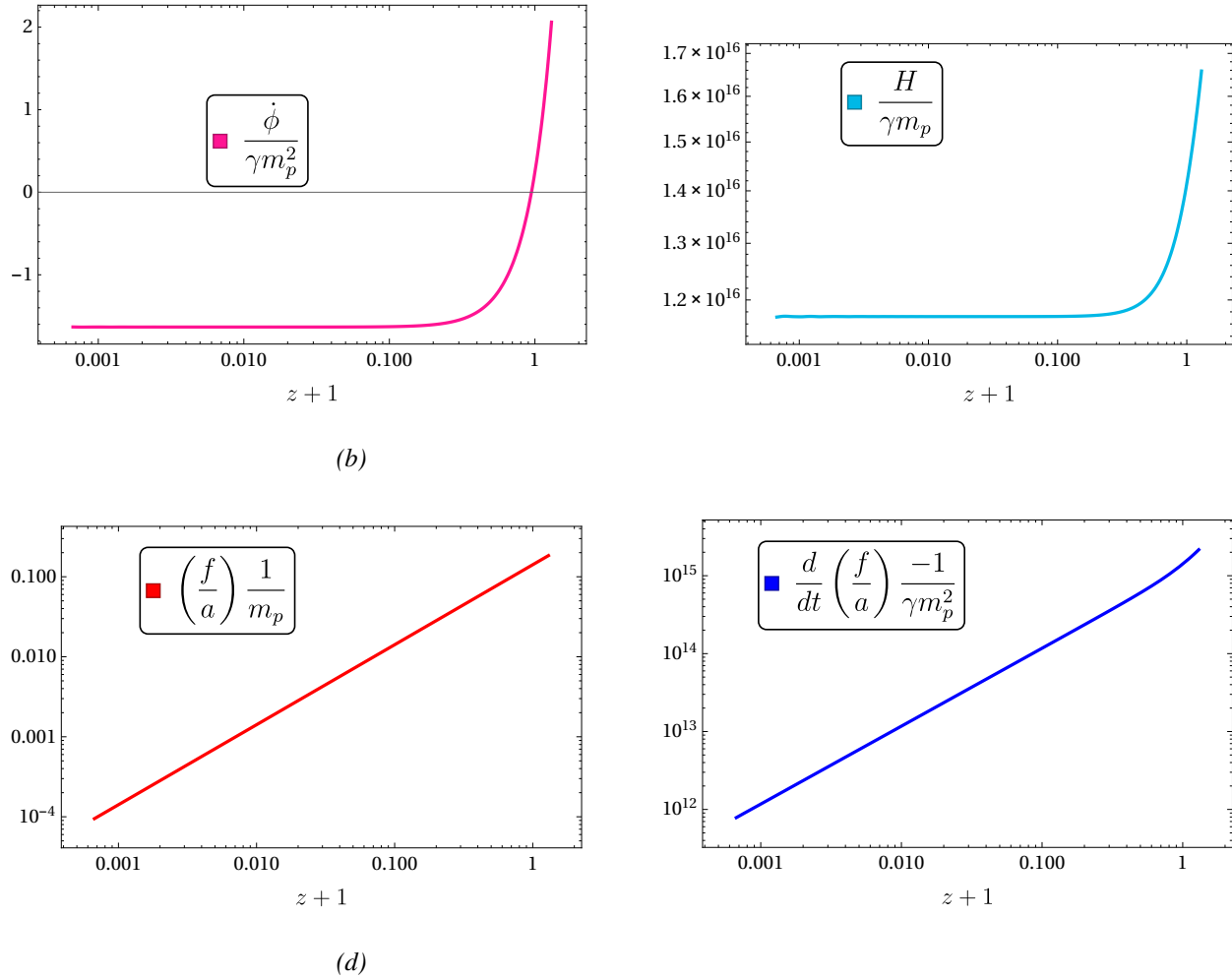


*Figura 3.5.* En este conjunto de figuras se encuentran los campos para el periodo dominado por la **materia**, las figuras (a), (b), (c), (d) son la velocidad del campo de Higgs, el campo de Higgs, el campo de gauge y su velocidad respectivamente. La derivada del Higgs alcanza valores del orden de unidades, la derivada del campo de gauge sigue disminuyendo en magnitud y consecuentemente el campo de gauge sigue disminuyendo (aproximadamente de manera lineal).

La dinámica de los campos durante esta etapa se puede observar en la figura 3.4, se observa que la velocidad del campo de Higgs se decrece, el campo de Higgs alcanza un valor asintótico, el campo de gauge decrece al igual que la magnitud de la derivada del campo de gauge.

**3.3.3. Dominación por la materia.** Este periodo se extiende desde el corrimiento al rojo  $z \approx 3 \times 10^3$  hasta  $z \approx 0.3$ . La dominación es alcanzada únicamente por el fluido perfecto de materia, que está representada por el segundo punto crítico. La evolución presentada en la figura 3.5 es la siguiente: la derivada del Higgs disminuye hasta alcanzar valores pequeños, el campo de Higgs es virtualmente constante, el campo de gauge disminuye desaceradamente al igual que la magnitud de la derivada del campo de gauge.

**3.3.4. Dominación por la energía oscura.** Este periodo se extiende desde el corrimiento al rojo  $z \approx 0.3$  pasando por el presente y eternamente hasta el futuro. Se tiene una relativamente corta duración de la época dominada por la energía oscura hasta la actualidad, desafortunadamente, el denominado "problema de coincidencia" (Velten et al. (2014)) también se encuentra en el modelo EYMH. El punto crítico que domina con energía oscura es el cuarto punto, el término dominante en este caso es el potencial de Higgs. La evolución de las cantidades físicas se puede ver en la gráfica 3.6, en la que se muestra como la velocidad del campo de Higgs pasa asintóticamente a un valor negativo, el campo de gauge a su vez tiende a cero, la velocidad del campo de gauge disminuye en magnitud; por último, se observa como el parámetro de Hubble obtiene un valor constante positivo, esta característica la tiene también la constante cosmológica, causando así una evolución exponencial del parámetro de escala en función del tiempo  $a(t) \approx e^{ct}$ , en donde  $c$  es una constante real positiva.

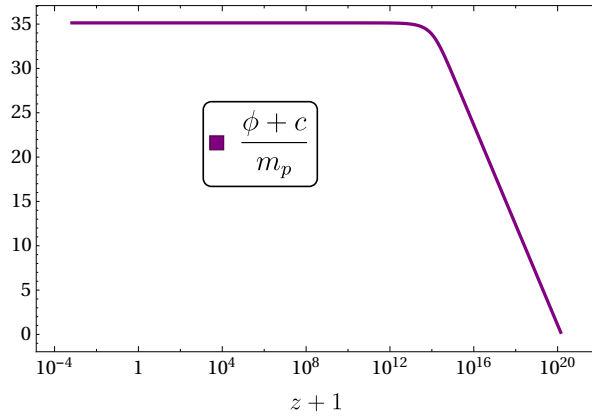


*Figura 3.6.* Campos físicos para la época dominada por la **energía oscura**, en la figura (a) se encuentra la derivada del campo de Higgs la cual decrece a valores negativos. El campo de gauge (c) decrece linealmente en función del corrimiento al rojo, su derivada temporal (d) crece linealmente hacia el futuro. El valor para el parámetro de Hubble se hace prácticamente constante, emulando la constante cosmológica.

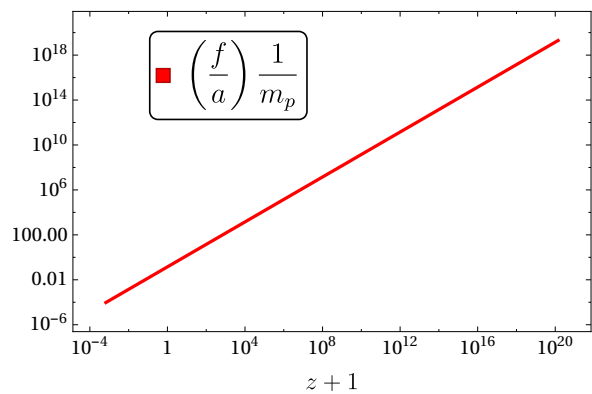
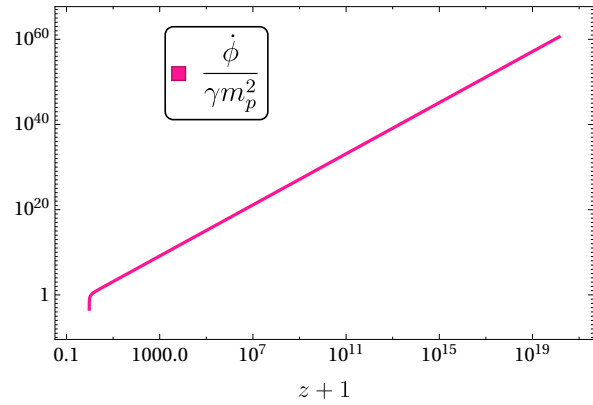
**3.3.5. Evolución total.** La evolución de las cantidades físicas (130)-(134) para el modelo EYMH SU(2) a lo largo de las cuatro épocas de dominación se presenta en la figura 3.7. El campo de Higgs aumenta logarítmicamente desde valores de corrimiento al rojo altos, es decir, empieza su evolución desde quinación con un crecimiento logarítmico que se extiende hasta parte

de la época de radiación; posteriormente se hace constante hasta la actualidad.

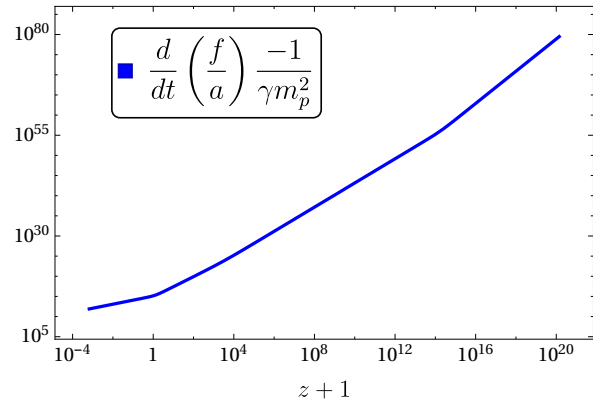
La derivada temporal del campo de Higgs decrece aproximadamente como una función cúbica con respecto al corrimiento al rojo  $\dot{\phi} \propto -(z+1)^3$  en todas las épocas excepto hacia el futuro (época dominada por la materia en adelante), en donde abruptamente toma valores negativos.



(b)



(d)



*Figura 3.7.* En la gráficas (a), (b), (c) y (d) se presenta la evolución del universo desde la época de quincación hasta la época actual (energía oscura) del campo de Higgs, su velocidad, el campo de gauge y su derivada temporal respectivamente.

Durante toda la evolución el campo de gauge disminuye aproximadamente de manera lineal

con respecto al corrimiento al rojo,  $f/a \approx -(z+1)$ . En la época dominada por la energía oscura, el parámetro de Hubble se hace constante, de manera que el corrimiento al rojo se hace proporcional a la exponencial negativa del tiempo  $z+1 \propto e^{-ct}$ , donde  $c$  es una constante positiva; esto significa que un crecimiento lineal en  $z$  representa un crecimiento logarítmico en el tiempo, por lo tanto la evolución lineal del campo de gauge con respecto a  $z$  se traduce como una evolución asintótica con respecto al tiempo del campo de gauge, en consecuencia nunca se hace completamente nulo.

La derivada del campo de gauge es aproximadamente una función por partes, en donde cada función definida en cierto intervalo es una función polinomial. En quinción su evolución es  $d(f/a)/dt \approx -(z+1)^4$ , en radiación  $d(f/a)/dt \approx -(z+1)^3$ , en materia  $d(f/a)/dt \approx -(z+1)^{2.5}$ , finalmente, en dominación por la energía oscura  $d(f/a)/dt \approx -(z+1)$ .

El parámetro de Hubble es uno de los observables con más significado físico ya que da cuenta de la rapidez de expansión del universo, a diferencia del parámetro de escala  $a$ , esta cantidad sí es medible; aunque su evolución puede depender del modelo, como ya se mencionó anteriormente, existen diferentes parametrizaciones independientes del modelo físico que ajustan las observaciones (usualmente datos de Super Novas tipo IA (Zhai and Wang (2019); Li et al. (2016); L'Huillier et al. (2018)), existen también trabajos recientes de datos combinados de Cefeidas, Super Novas tipo IA y cuasares que se parametrizan con diferentes modelos físicos (Taubenberger et al. (2019))) es posible que en próximos trabajos se contrasten dichos ajustes al parámetro de Hubble y otras cantidades.

En la figura 3.8 se encuentra la evolución del parámetro de Hubble durante toda su evolución; al igual que la derivada del campo de gauge, el parámetro de Hubble es aproximadamente

una función polinómica por partes, en quinación toma valores al cubo del corrimiento al rojo  $H \propto (z+1)^3$ , en la dominación por la materia el polinomio es de segundo grado  $H \propto (z+1)^2$ , seguido por la dominación por materia en donde la potencia del corrimiento es  $3/2$ , es decir,  $H \propto (z+1)^{3/2}$ , la última etapa es energía oscura con un parámetro de Hubble constante.

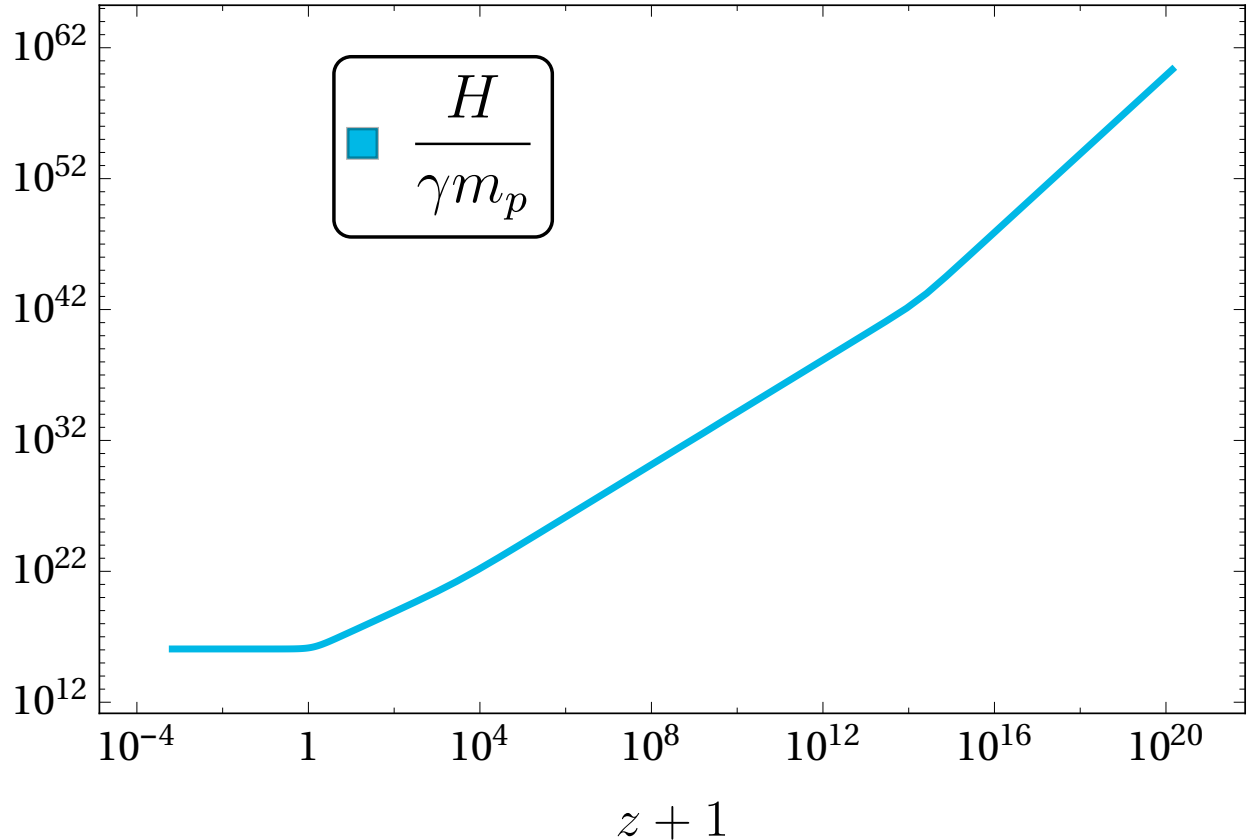


Figura 3.8. Parámetro de Hubble en función del corrimiento al rojo.

### 3.4. Conexión con física de partículas

En la anterior sección se encontró la evolución asintótica del campo de Higgs, expandiendo alrededor de este valor y teniendo en cuenta la lenta evolución del campo de gauge en función del tiempo, se toma el valor actual de este campo como una cantidad de fondo  $f_0$ . En el apéndice 5 se

presenta el cálculo de las masas de los campos de gauge y de Higgs

$$m_f \propto \gamma \sqrt{12 \left( \frac{f_0}{a_0} \right)^2 + \phi_{as}^2}, \quad (140)$$

$$m_\phi \propto \gamma \sqrt{\left( \frac{f_0}{a_0} \right)^2 + 4\mu^2 \phi_{as}^2 - \frac{4}{3} \mu^2 \phi_0^2}, \quad (141)$$

en donde  $\phi_{as}$  es el valor asintótico del campo de Higgs y  $\phi_0$  es el valor del campo en el mínimo del potencial.

Estas masas difieren en forma de las masas del modelo estándar de partículas por dos razones, la primera es que no se alcanza un rompimiento espontáneo de la simetría en el mínimo del potencial, en cambio se rompe en un valor asintótico; la segunda razón es el valor de fondo del campo de gauge en la actualidad  $f_0$ , en donde en el modelo estándar es igual a cero. Las masas en el modelo estándar son

$$m_f \propto \gamma \phi_0, \quad (142)$$

$$m_\phi \propto \alpha \gamma \phi_0. \quad (143)$$

Uno de los problemas actuales de la cosmología estándar es la tensión del parámetro de Hubble entre las medidas locales (SN Ia, cefeidas, entre otras) y las medidas obtenidas a partir de la radiación cósmica de fondo y también por las oscilaciones acústicas de bariones, que asumen el modelo de concordancia (Mörtsell and Dhawan (2018); Feeney et al. (2019)). Estimados de los valores obtenidos por observaciones del CMB (Aghanim et al. (2018)) son  $h = 67.27 \pm 0.60$ , a su

vez el estimado de las observaciones locales es  $h = 73.24 \pm 1.74$  (Riess et al. (2016)).

En el modelo EYMH SU(2) el parámetro de Hubble está dado por

$$\frac{H}{m_p} = \sqrt{2} \frac{\gamma}{y l^2}, \quad (144)$$

teniendo en cuenta los valores anteriormente mencionados y el conjunto de posibles condiciones iniciales (136) el valor del parámetro de acople  $\gamma$  es

$$\gamma = \frac{H_0 y_0 l_0^2}{m_p \sqrt{2}} \lesssim \frac{H_0}{m_p} \frac{1}{\sqrt{2} y_0} \approx \frac{10^{-61}}{\sqrt{2} y_0} (5 \sim 5.7), \quad (145)$$

en donde  $5 \times 10^{-63} m_p$  y  $5.7 \times 10^{-63} m_p$  son aproximadamente los valores para el parámetro de Hubble actualmente medidos por el CMB y mediciones locales respectivamente; esto quiere decir que el parámetro de acople puede tener un rango de valores que sean mayores a  $\gamma \approx 3.5 \times 10^{-61}$ . Las constantes de acople en el modelo estándar de partículas toman valores de unidades (Kane (1993)), al ser constantes adimensionales cumplen con un criterio de naturalidad, pasando así la prueba del ajuste fino, a diferencia de la constante cosmológica. Un valor de la variable del campo de gauge que logre la naturalidad para  $\gamma$  es  $y_0 = 10^{-63}$ . Teniendo en cuenta las condiciones (136), los valores de  $k_0$ ,  $x_0$  y  $w_0$  estarían alrededor del mismo orden; estos montos tan pequeños pueden ser vistos también como ajuste fino, aunque pueden ser justificados parcialmente por la estabilidad de dichas variables durante las épocas de materia y energía oscura:  $x$ ,  $y$  y  $k$  son atractores hacia el cero en ambas épocas mientras que  $w$  es repelente y atractora hacia el cero en las épocas de materia y energía oscura respectivamente.

El modelo EYMH no solamente es usado para encontrar energía oscura, también es se utiliza en otros contextos como inflación(Adshead and Sfakianakis (2017)) y materia oscura (Balde and Garcia-Cely (2019)). En esta última referencia se utiliza un acople del campo de Higgs del modelo estándar con el campo de Higgs del modelo EYMH, este enfoque puede ser un aproximamiento para un futuro trabajo, en el que se incorpore la diferencia entre materia barionica y materia oscura.

## 4. Modelo Einstein Yang-Mills Higgs SO(3)

### 4.1. Interacción entre dos tipos de bosones: Higgs y Yang-Mills SO(3)

A diferencia de las transformaciones SU(2), las transformaciones en SO(3) tienen una interpretación física más intuitiva y directa como rotaciones del espacio, por lo que asociar este tipo de invarianza a un triplete de Higgs tiene un valor físico fácilmente interpretable gracias a nuestra experiencia diaria tridimensional<sup>20</sup>; aunque ningún tipo de partícula del SM haya sido asignada al grupo SO(3), este tipo de transformaciones es un buen candidato para explorar la teoría de YM en otras representaciones en el contexto de la cosmología.

La acción de Yang-Mills 146 está compuesta por: el término geométrico de la acción de Einstein-Hilbert, la derivada covariante del triplete de Higgs, es decir, el término cinético para el campo de Higgs, un potencial para el campo de Higgs, un término cinético para los bosones vectoriales de gauge, y fluidos perfectos para simular las abundancias de materia fría y relativista del Universo

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{m_p^2 R}{2} - \frac{1}{2} (D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a) - V(\phi^2) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_r \right], \quad (146)$$

---

<sup>20</sup> Es preciso aclarar que la invarianza de la acción ante transformaciones SO(3) del triplete de Higgs no implica un universo isótropo, ya que las componentes del triplete de Higgs no tienen ninguna dirección espacial asignada, en vez de esto, forman un espacio  $\mathbb{R}^3$  abstracto.

la notación de la derivada es diferente a la usada en el capítulo anterior para mayor comodidad.

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + \gamma \varepsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c, \quad (147)$$

en donde  $\varepsilon^{abc}$  es el tensor de Levi-Civita en espacio tiempo plano,  $\gamma$  es la constante de acoplamiento y el campo de Higgs está en la forma de triplete real

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad (148)$$

en donde los campos  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  son reales y solo dependen del tiempo para no generar inhomogeneidades;  $A_\mu^b$  representan los campos de gauge y está en la configuración de tríada cósmica

$$A_\mu^a(t) = f(t) \delta_\mu^a, \quad (149)$$

al igual que con las transformaciones SU(2) los índices latinos toman los valores  $a = 1, 2, 3$  y los griegos toman los valores  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .

El tercer término de la acción es el potencial de Higgs que se define con la misma forma

que en el modelo  $SU(2)$ <sup>21</sup>

$$V(\Phi^2) \equiv \frac{\lambda}{4} (\Phi^2 - \Phi_0^2)^2. \quad (150)$$

en donde  $\Phi_0$  es el valor del campo en el mínimo del potencial y  $\lambda$  es la constante de acoplamiento del potencial.

El cuarto término de la acción corresponde a la parte cinética de los bosones vectoriales, está compuesto por el tensor de esfuerzos de los campos de gauge<sup>22</sup>

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \gamma \varepsilon_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (151)$$

Los dos últimos términos de la acción representan la materia relativista y no relativista, en forma de fluidos perfectos.

Definimos el lagrangiano total como

$$\mathcal{L} \equiv - (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^2) - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_m, \quad (152)$$

$$= \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{YM} + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_m, \quad (153)$$

---

<sup>21</sup> Aunque la forma del potencial es la misma, no es exactamente igual, esto se debe a que el campo de Higgs está en un triplete en vez de un doblete.

<sup>22</sup> Este término es exactamente el mismo para las transformaciones  $SU(2)$  y  $SO(3)$  debido a que el grupo  $SO(3)$  es la representación adjunta de  $SU(2)$ .

en donde  $\mathcal{L}_r$  es el lagrangiano del fluido perfecto de radiación y  $\mathcal{L}_m$  es el lagrangiano del fluido perfecto de materia. Los lagrangianos de YM y de Higgs se definen como

$$\mathcal{L}^H \equiv -\frac{1}{2}(D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a) - V(\phi^2), \quad \mathcal{L}^{YM} \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (154)$$

Siguiendo la definición del TEM (89) y aplicandola al lagrangiano de Higgs

$$T_{\mu\nu}^H = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(D_\beta \phi^a)(D^\beta \phi^a) - g_{\mu\nu}V(\phi) + (D_{(\mu} \phi^a)(D_{\nu)} \phi^a), \quad (155)$$

en donde es evidente que los dos primeros términos de la parte derecha de la ecuación (155) gozan de isotropía si la métrica es isótropa<sup>23</sup>. La isotropía del último término no es tan evidente, expandido luce como

$$\begin{aligned} (D_{(\mu} \phi^a)(D_{\nu)} \phi^a) &= \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \dot{\phi}^a \dot{\phi}^a + 2\gamma \varepsilon^{abc} A_{(\mu}^b \partial_{\nu)} \phi^a \phi^c + \gamma^2 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ade} A_{(\mu}^b A_{\nu)}^d \phi^e \phi^c, \\ &= \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \dot{\phi}^a \dot{\phi}^a + 2\gamma \varepsilon^{abc} A_{(\mu}^b \partial_{\nu)} \phi^a \phi^c + \gamma^2 (A_\mu^b A_\nu^b \phi^c \phi^c - A_\mu^b A_\nu^d \phi^b \phi^d), \end{aligned} \quad (156)$$

en esta forma, se puede observar que el producto de las derivadas covariantes tiene términos en las componentes no diagonales  $\mu \neq \nu$ , explícitamente los términos  $2\gamma \varepsilon^{abc} A_{(\mu}^b \partial_{\nu)} \phi^a \phi^c$  cuando  $\mu = 0$  &  $\nu = i$ , y  $-\gamma^2 A_\mu^b A_\nu^d \phi^b \phi^d$  cuando  $\mu = i \neq \nu = j$ .

Al igual que con el caso SU(2), la única manera de anular estos términos no diagonales sin

---

<sup>23</sup> Esto se ve representado por la forma diagonal de la métrica, en donde las tres últimas componentes de la diagonal deben ser iguales.

afectar la constante de acople  $\gamma$  ni los campos de gauge  $A_\mu^b$  es modificando las componentes del triplete de Higgs, de manera que  $A_i^b A_j^d \phi^b \phi^d = 0$ ; esto se logra exigiendo que el campo de Higgs esté en la representación unitaria, ya sea en la primera, segunda o tercera componente, todas ellas son equivalentes; en este trabajo se escoge la primera componente como representación unitaria

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (157)$$

Afortunadamente esta escogencia del campo de Higgs también anula el término  $2\gamma\epsilon^{abc}A_{(\mu}^b\partial_{\nu)}\phi^a\phi^c$ , que representa las densidades de momentum y es áltamente anisótropo. Sin embargo, incluso con este término anulado, aún se presenta otro tipo de anisotropía en las componentes diagonales del TEM que causa una diferencia de presiones en las direcciones espaciales, esto se ve reflejado en el último término de la ecuación (156)

$$\gamma^2(A_\mu^b A_\nu^b \phi^c \phi^c - A_\mu^b A_\nu^d \phi^b \phi^d) = \gamma^2 \phi^2 (A_\mu^2 A_\nu^2 + A_\mu^3 A_\nu^3), \quad (158)$$

en donde no existe interacción del campo de gauge  $A_1^1$  con el campo de Higgs; este tipo de anisotropía se puede modelar por medio de la métrica de Bianchi tipo I en forma de simetría axial

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2(\alpha-2\sigma)} dx^2 + e^{2(\alpha+\sigma)} (dy^2 + dz^2), \quad (159)$$

en el apéndice 1 se deducen los significados de los parámetros  $\alpha$  y  $\sigma$ . La isotropía axial de esta métrica permite un grado de libertad para la tríada cósmica, que es parametrizada de la siguiente manera

$$A_0^a = 0, \quad A_i^a = e_i^a \psi_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (160)$$

en donde

$$e_1^1 = e^{\alpha-2\sigma}, \quad e_2^2 = e_3^3 = e^{\alpha+\sigma}, \quad (161)$$

por comodidad se denotarán los campos de gauge como  $A_1^1 = I$  y  $A_2^2 = A_3^3 = J$ , y las componentes de la métrica como  $G_1 = \sqrt{g^{11}}$  y  $G_2 = \sqrt{g^{22}} = \sqrt{g^{33}}$ . Además, en el resto de este capítulo se denomina esta configuración axialmente simétrica de la tríada cósmica simplemente como tríada cósmica.

El TEM de Higgs queda reducido a

$$T_{\mu\nu}^H = g_{\mu\nu} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \gamma^2 \phi^2 G_2^2 J^2 - V(\phi) \right) + \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \dot{\phi}^2 \quad (162)$$

$$+ \gamma^2 \phi^2 J^2 (\delta_\mu^2 \delta_\nu^2 + \delta_\mu^3 \delta_\nu^3), \quad (163)$$

en donde el último termino es el responsable de la anisotropía.

El TEM de YM es

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{\text{YM}} = & g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} (G_1 \dot{I})^2 + (G_2 J)^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 (G_2 J)^2 (2(G_2 I)^2 + (G_2 J)^2) \right) \\
& + \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 ((IG_1)^2 + 2(JG_2)^2) - \delta_\mu^1 \delta_\nu^1 I^2 - (\delta_\mu^2 \delta_\nu^2 + \delta_\mu^3 \delta_\nu^3) J^2 \\
& + \gamma^2 \left( 2\delta_\mu^1 \delta_\nu^1 (IG_1)^2 (JG_2)^2 + (\delta_\mu^2 \delta_\nu^2 + \delta_\mu^3 \delta_\nu^3) ((IG_1)^2 + (JG_2)^2) (JG_2)^2 \right),
\end{aligned} \tag{164}$$

la deducción de estas ecuaciones se encuentra en detalle en el apéndice 6.

Las ecuaciones de Einstein son

$$\begin{aligned}
H^2 - \dot{\sigma}^2 = & \frac{1}{3m_p^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \gamma^2 \phi^2 (G_2 J)^2 + V(\phi) + \frac{1}{2} (G_1 \dot{I})^2 + (G_2 J)^2 \right. \\
& \left. + \frac{\gamma^2}{2} (G_2 J)^2 (2(G_1 I)^2 + (G_2 J)^2) + \rho_m + \rho_r \right],
\end{aligned} \tag{165}$$

$$\ddot{\sigma} + 3\dot{\sigma}H = \frac{1}{3m_p^2} \left[ \gamma^2 \phi^2 (G_2 J)^2 + (G_1 \dot{I})^2 - (G_2 J)^2 + \gamma^2 (G_2 J)^2 [(G_2 J)^2 - (G_1 I)^2] \right], \tag{166}$$

$$\begin{aligned}
\dot{H} + 3H^2 = & \frac{1}{3m_p^2} \left[ 3V(\phi) + \frac{1}{2} (G_1 \dot{I})^2 + (G_2 J)^2 + \frac{\gamma^2}{2} (G_2 J)^2 [2(G_1 I)^2 + (G_2 J)^2] \right. \\
& \left. + 2\gamma^2 \phi^2 (G_2 J)^2 + \frac{3}{2} \rho_m + \rho_r \right],
\end{aligned} \tag{167}$$

en donde la ecuación (165) es la ecuación de Friedmann, (166) es la ecuación del shear y (167) es la ecuación del parámetro de desaceleración.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos de gauge y el campo de Higgs son

respectivamente

$$G_1 \ddot{I} + (2\dot{G}_1 + 3HG_1) \dot{I} + 2\gamma^2 G_1 I (G_2 J)^2 = 0, \quad (168)$$

$$G_2 \ddot{J} + J (2\dot{G}_2 + 3HG_2) + \gamma^2 G_2 [J(G_1 I)^2 + (G_2)^2 J^3 + J\phi^2] = 0, \quad (169)$$

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}H + [2\gamma^2 G_2^2 J^2 + \lambda (\phi^2 - \phi_0^2)] \phi = 0. \quad (170)$$

podemos ver que la ecuación de campo para el Higgs no tiene acople con el campo  $I$  y viceversa, por lo tanto, el único término de interacción de los campos de gauge con el campo de Higgs lo tiene  $J$ .

## 4.2. Sistema dinámico

El análisis por sistemas dinámicos es ideal para este problema ya que el modelo EYMH SO(3) está descrito por siete variables<sup>24</sup>.

**4.2.1. Parametrización en términos de variables adimensionales.** La escogencia de las variables adimensionales es un proceso clave para el desarrollo del análisis dinámico, ya que la búsqueda de los puntos críticos puede verse afectada según que tan adecuada sea la parametrización.

---

<sup>24</sup> Si se tienen en cuenta las densidades de energía de los fluidos perfectos, dos más que el modelo EYMH SU(2).

A la hora de utilizar un software para encontrar los puntos críticos es importante conocer algunos problemas que podrían ocurrir, uno de estos problemas está relacionado con la escogencia de las variables; cuando una o más variables  $\zeta$  están como una potencia negativa en las ecuaciones dinámicas, es posible que un punto crítico exista; esto sucede si  $\zeta = 0$  y además las ecuaciones dinámicas tienen un valor indeterminado. En este tipo de casos es muy probable que el software utilizado no detecte los valores indeterminados, llevando a un conocimiento incompleto de los puntos críticos.

El grado de las ecuaciones dinámicas es una de las razones por las que se dificulta la resolución de las mismas, en algunos casos el grado se puede disminuir con una parametrización diferente, en otros casos, es necesario la reparametrización de los campos originales, de tal manera que el proceso de variación de la acción es diferente y es posible que el sistema se simplifique.

La parametrización escogida es

$$\begin{aligned}\Sigma &= \frac{\dot{\sigma}}{H}, & x &= \frac{G_1 \dot{I}}{\sqrt{3}m_p H}, & y &= \frac{G_2 \dot{J}}{\sqrt{3}m_p H}, & w &= \frac{\gamma \phi G_2 J}{\sqrt{3}m_p H}, \\ p &= \frac{\sqrt{\gamma} G_1 I}{\sqrt{\sqrt{3}m_p H}}, & s &= \frac{\sqrt{\gamma} G_2 J}{\sqrt{\sqrt{3}m_p H}}, & k &= \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}m_p H}, & v &= \sqrt{\frac{V(\phi)}{3m_p^2 H^2}}, \\ \xi &= \frac{\sqrt{3}m_p}{G_2 J}, & r &= \frac{\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{3}m_p H}, & m &= \frac{\sqrt{\rho_m}}{\sqrt{3}m_p H}.\end{aligned}$$

Con esta parametrización, la ecuación de Friedmann (165) se convierte en la ligadura de Friedmann

$$\Sigma^2 + \frac{1}{2}s^2 p^2 + s^4 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + w^2 + k^2 + v^2 + r^2 + m^2 = 1. \quad (171)$$

El parámetro de desaceleración,  $q \equiv -\ddot{a}a/\dot{a}^2 = -1 - \dot{H}/H^2$ , se construye con la combinación lineal de la ecuación de Friedmann y la ecuación (167)

$$q = 1 - \frac{m^2}{2} + 2v^2 - w^2 + k^2 + \Sigma^2. \quad (172)$$

El parámetro efectivo de estado es

$$\omega_{ef} = \frac{(2q - 1)/3 - \Sigma^2}{1 - \Sigma^2}, \quad (173)$$

hay una clara diferencia entre los parámetros de estados del modelo SU(2) y del modelo SO(3); la libertad que se le agregó a la métrica, es decir, la libertad de isotropía o shear, afecta al parámetro de estado efectivo; es directo ver que para un parámetro de shear nulo el parámetro de estado se reduce al parámetro de estado para la métrica FLRW plana.

El sistema de ecuaciones dinámicas se deduce derivando las variables adimensionales con

respecto a un parámetro afín

$$\begin{aligned}
\Sigma' &= \Sigma(q-2) - s^2(p^2 - s^2) + w^2 - y^2 + x^2, \\
x' &= x(q - 2\Sigma - 1) - 2s^3 p \xi, \\
y' &= y(q + \Sigma - 1) - \xi(s^2(p^2 + s^2) + w^2), \\
w' &= w(q - \Sigma + y\xi) + \sqrt{2}ks^2\xi, \\
p' &= \frac{1}{2}p(q + 4\Sigma - 1) + x\xi s, \\
s' &= \frac{1}{2}s(q - 2\Sigma + 2y\xi - 1), \\
k' &= k(q - 2) - w\xi(\mu v + \sqrt{2}s^2), \\
v' &= v(q + 1) + \mu\xi wk, \\
\xi' &= \xi(1 - \xi y + \Sigma), \\
r' &= r(q - 1), \\
m' &= m(q - \frac{1}{2}).
\end{aligned} \tag{174}$$

en donde el único parámetro del sistema es  $\mu \equiv \sqrt{2\lambda/\gamma^2}$ .

Al igual que el sistema SU(2) el sistema SO(3) cuenta con simetrías ante el cambio de signo de las variables, estas simetrías están listadas en la tabla 1; adicionalmente a lo mostrado en la tabla, el sistema es invariante ante los cambios de signo de las variables  $r$  y  $m$  en todos los escenarios, es decir, las variables  $r$  y  $m$  pueden cambiar su signo independientemente de las otras variables; debido a esto, a cada una de las 15 simetrías se les puede agregar uno de los cambios de

variables del siguiente conjunto  $\{\{r \rightarrow -r, m \rightarrow -m\}, \{m \rightarrow -m\}, \{r \rightarrow -r\}\}$  de manera que el total de simetrías es de 60.

Es importante notar que la variable  $\Sigma$  no cuenta con ninguna simetría, esto se debe a que los valores positivos y negativos la variable del shear tienen diferentes significados, para  $\Sigma \geq 0$  el espacio se expande en las direcciones de las coordenadas  $y$  y  $z$ , mientras que se contrae en la dirección  $x$ ; para  $\Sigma \leq 0$  pasa exactamente lo opuesto, el espacio en las direcciones  $z$  y  $y$  se contrae mientras que en la dirección  $x$  se expande. Como se mencionó en el capítulo anterior, estas simetrías son útiles para reducir el conjunto de condiciones iniciales posibles.

$$\begin{aligned}
\frac{G_1 I}{\sqrt{3} m_p} &= \frac{p}{\xi s}, & \frac{1}{3 m_p^2 \gamma} \frac{d(G_1 I)}{dt} &= \frac{x + \frac{p}{\xi s} (2\Sigma - 1)}{s^2 \xi^2}, \\
\frac{G_2 J}{\sqrt{3} m_p} &= \xi^{-1}, & \frac{1}{3 m_p^2 \gamma} \frac{d(G_2 J)}{dt} &= \frac{y - \frac{\Sigma + 1}{\xi}}{s^2 \xi^2}, \\
\frac{\phi}{\sqrt{3} m_p} &= \frac{w}{s^2 \xi}, & \frac{\dot{\phi}}{3 \sqrt{2} m_p^2 \gamma} &= \frac{k}{s^2 \xi^2}, \\
\varepsilon \equiv \frac{G_1 I}{G_2 J} &= \frac{p}{s}, & \kappa \equiv \frac{\frac{d(G_1 I)}{dt}}{\frac{d(G_2 J)}{dt}} &= \frac{\xi x s + p(2\Sigma - 1)}{\xi y s - s(\Sigma - 1)}, \\
\frac{H}{\sqrt{3} m_p \gamma} &= \frac{1}{\xi^2 s^2}. & &
\end{aligned} \tag{175}$$

#### 4.2.2. Puntos críticos, variedades críticas y su estabilidad. Teniendo en cuenta

las simetrías del sistema se tienen cuatro variedades críticas y cuatro puntos críticos:

- **Primera variedad crítica** (Dominación de radiación):

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{1 - \frac{3}{2}(s^2 p^2 + y^2)} = \sqrt{1 - \frac{3}{2}(s^4 + x^2)}, \quad w = 0, \quad k = 0, \quad v = 0, \quad m = 0, \\
\Sigma &= 0, \quad \xi = 0.
\end{aligned}$$

x	y	w	k	v	u	s	$\xi$	$\Sigma$
-	-	-	+	+	+	+	-	+
-	-	+	-	+	+	+	-	+
+	+	-	-	+	+	+	+	+
-	+	+	+	+	-	+	+	+
+	-	-	+	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-	+
-	+	-	-	+	-	+	+	+
-	+	+	+	+	+	-	+	+
+	-	-	+	+	+	-	-	+
+	-	+	-	+	+	-	-	+
-	+	-	-	+	+	-	+	+
+	+	+	+	+	-	-	+	+
-	-	-	+	+	-	-	-	+
-	-	+	-	+	-	-	-	+
+	+	-	-	+	-	-	+	+

Tabla 1

En este cuadro se presentan las 15 simetrías ante cambio de signo del sistema, en cada fila se encuentran los cambios de signos simultáneos que preservan el sistema de ecuaciones, el signo - representa el cambio de signo de la variable mientras que + representa que la variable debe mantener su signo.

Esta variedad cuenta con un parámetro de desaceleración  $q = 1$ , es una variedad inestable ya que es un punto de silla, es no hiperbólica. Su dominación puede ser alcanzada ya sea por la dominación del fluido perfecto de radiación o por los campos de gauge o por una combinación de ellos.

La variable  $k$  es un atractor hacia el cero, por lo tanto se deduce que el Higgs tiene una evolución acelerada a lo largo del número de e-folds; la variable  $\xi$  es un repelente hacia el cero, lo que implica un decrecimiento del campo de gauge  $JG_2$  en magnitud; las variables  $w, v, m$  son repelentes de cero, de manera las posibles épocas de dominación posteriores a radiación son dominación por materia o energía oscura<sup>25</sup>. Existe otra variedad crítica equivalente a esta en donde  $r = -\sqrt{1 - \frac{3}{2}(s^2 p^2 + y^2)}$ .

■ **Segunda variedad crítica** (Dominación de radiación):

$$r = \sqrt{1 - \frac{3}{2\xi^2}}, \quad x = \frac{1}{\xi^2}, \quad y = \frac{1}{\xi^2}, \quad w = 0, \quad k = 0, \quad v = 0, \quad m = 0,$$

$$\Sigma = 0, \quad s = 0.$$

Esta variedad cuenta con un parámetro de desaceleración  $q = 1$ , la dominación puede ser alcanzada por el fluido de radiación o las partes cinéticas de los campos de gauge. Este punto es un punto de silla no hiperbólico.

---

<sup>25</sup> A diferencia de modelo SU(2), no se cuenta una época dominada por la interacción ya que tal punto crítico no existe.

La variable  $\xi$  es un atractor hacia un valor constante;<sup>26</sup> la variable de quinción  $k$  es un repelente, esto indica una época dominada por la parte cinética del Higgs precedente a esta; las variables  $s$ ,  $m$ ,  $v$  y  $w$  son repelentes alrededor de cero, esto sugiere que la siguiente época de dominación debe estar entre materia y energía oscura. Teniendo en cuenta la tendencia de las variables dinámicas es posible determinar cualitativamente la evolución de algunas variables físicas: el campo de Higgs disminuye de manera desacelerada, el campo de gauge  $G_2J$  toma valores constantes y el parámetro de Hubble disminuye.

Debido a la parametrización es posible que la variable  $p$  (campo de gauge  $G_1I$ ) tome cualquier valor, ya que su abundancia en la ecuación (171) está restringida por su interacción con la variable  $s$  (campo de gauge  $G_2J$ ) mientras la variable  $s$  tiene un término propio en la ligadura. Las variedades con  $r = -\sqrt{1 - \frac{3}{2\xi^2}}$  o  $x = -\frac{1}{\xi^2}$  o  $y = -\frac{1}{\xi^2}$  son equivalentes a esta variedad crítica.

■ **Tercera variedad crítica** (Dominación de radiación):

$$r = \sqrt{1 - \frac{3x^2}{2}}, x = y, w = 0, k = 0, v = 0, m = 0, \Sigma = 0, p = 0, \xi = 0.$$

La segunda y tercera variedad comparten muchas de sus características, su única diferencia apreciable está relacionada con la variable auxiliar  $\xi$ , en este caso la variable no está ligada

---

<sup>26</sup> En esta variedad crítica, la variable  $\xi$  no tiene ninguna restricción aparte de  $\xi \leq \sqrt{3/2}$ , la cual asegura que  $r$  pertenezca a los números reales.

a los valores  $x, y$ ; en cambio, es un atractor alrededor del valor cero.

Con ayuda de las simetrías (1) es posible determinar que las variedades críticas con  $r =$

$-\sqrt{1 - \frac{3x^2}{2}}$  o  $x = -y$  son equivalentes a la tercera variedad.

■ **Cuarta variedad crítica** (Anisotropía y quinación):

$$k = \sqrt{1 - \Sigma^2}, x = 0, y = 0, w = 0, v = 0, r = 0, m = 0, p = 0,$$

$$s = 0, \xi = 0.$$

Esta variedad crítica cuenta con un parámetro de desaceleración  $q = 2$ , y es una variedad no hiperbólica. La estabilidad del punto crítico depende del valor del parámetro de shear, para valores  $\Sigma < 1/2$ <sup>27</sup> las variables  $x$  y  $s$  son repelentes, en cambio, para  $\Sigma > 1/2$ ,  $x$  y  $s$  cambian de estabilidad para convertirse en atractores; para  $\Sigma = 1/2$  la estabilidad de  $x$  y  $s$  es desconocida<sup>28</sup>. La variable  $p$  también cambia de estabilidad a lo largo de la variedad, para  $\Sigma > -1/4$  es repelente, para  $\Sigma < -1/4$  es atractor; las variables restantes son repelentes independientemente del valor del shear en toda la variedad.

Teniendo en cuenta las estabilidades es posible conocer a grosso modo la evolución de algunos campo físicos: el campo de gauge  $G_2J$  disminuye en magnitud en toda la variedad

---

<sup>27</sup> Este rango es exactamente  $-1 \leq \Sigma < 1/2$  debido a la ligadura de Friedmann, recordar que  $\Sigma$  no tiene simetría con respecto a cambio de signo, por lo tanto se tiene en cuenta todo el intervalo  $-1 \leq \Sigma < 1/2$  incluyendo las partes negativas.

<sup>28</sup> Los valores propios de la matriz Jacobiana correspondientes a  $x$  y  $s$  se hacen cero.

crítica; se puede deducir, solo para el intervalo  $\Sigma > -1/4$ , que el campo  $G_1 I$  disminuye también en magnitud, el parámetro de Hubble disminuye para  $\Sigma < 1/2$ .

Debido a los rangos anteriormente mencionados es posible dividir la variedad en tres intervalos: el primero es  $\Sigma < -1/4$ , el cual es un punto de silla no hiperbólico; el segundo esta entre  $-1/4 < \Sigma < 1/2$ , este es una variedad crítica repelente no hiperbólica, de hecho es la variedad mas inestable o repelente de todo el sistema, por lo tanto es muy probable que la solución al sistema terminó allí en el pasado; el tercer intervalo es  $\Sigma > 1/2$  es un punto de silla no hiperbólico.

La variedad crítica con  $k = -\sqrt{1 - \Sigma^2}$  hace parte de esta variedad.

■ **Primer punto crítico** (Quinación y anisotropía):

$$k = \sqrt{\frac{15}{16}}, \Sigma = -\frac{1}{4}, x = 0, y = 0, w = 0, v = 0, r = 0, m = 0,$$

$$s = 0, \xi = 0.$$

Este punto crítico tiene las mismas características que la cuarta variedad crítica para los valores  $k = \sqrt{\frac{15}{16}}$  y  $\Sigma = -\frac{1}{4}$ , excepto por la restricción de la variable  $p$ , en este caso  $p$  puede tomar cualquier valor. El punto crítico con el valor  $k = -\sqrt{\frac{15}{16}}$  es equivalente a este punto.

■ **Segundo punto crítico** (Anisotropía):

$$\Sigma = -1, k = 0, x = 0, y = 0, w = 0, v = 0, r = 0, m = 0,$$

$$u = 0, p = 0.$$

Al igual que el primer punto, este punto crítico tiene las mismas características que la cuarta variedad para los valores  $k = 0$  y  $\Sigma = -1$ , excepto por la libertad que adquiere la variable  $\xi$ , la cual deja de estar ligada al valor cero.

■ **Tercer punto crítico**(Dominación de materia):

$$m = 1, x = 0, y = 0, w = 0, k = 0, v = 0, r = 0, s = 0, p = 0, \xi = 0, \Sigma = 0.$$

Este punto es solamente dominado por el fluido de materia, tiene un parámetro de desaceleración de  $q = \frac{1}{2}$  y es un punto de silla hiperbólico. La variable  $\xi$  es un repelente en el cero, por lo tanto el campo de gauge  $G_2J$  decrece en magnitud con el tiempo; la variable  $k$  es atraída hacia el cero, dicho de otra manera, el cambio del campo de Higgs con respecto al número de e-folds es desacelerado; las variables  $v$  y  $w$  son repelentes de cero, es sugerente que la próxima época debe ser energía oscura.

Existe un punto crítico con  $m = -1$  que es equivalente a este.

■ **Cuarto punto crítico** (Dominación de la energía oscura):

$$v = 1, x = 0, y = 0, w = 0, k = 0, r = 0, m = 0, s = 0, p = 0, \xi = 0, \Sigma = 0.$$

Este punto está generado por el potencial de Higgs, tiene un parámetro de desaceleración de  $q = -1$ , que genera expansión acelerada, es un punto de silla hiperbólico con una única variable repelente  $\xi$ . Los campos de gauge  $G_2J$  decrecen en magnitud al igual que la aceleración del campo de Higgs. Existe un punto con  $v = -1$  equivalente a este.

La estabilidad de las variedades y puntos críticos sugiere una secuencia de ocurrencia de

las épocas del universo, empezando en el pasado con los puntos más inestables pasando gradualmente a los más atractores. Teniendo en cuenta lo anterior, se puede deducir que el sistema empieza en el pasado con el intervalo  $-1/4 < \Sigma < 1/2$  de la cuarta variedad, después de esto, puede pasar a los otros intervalos de la cuarta variedad o seguir por las variedades de radiación<sup>29</sup>, seguidas por el tercer punto (materia) para finalizar en el cuarto punto (energía oscura).

### 4.3. Solución numérica

En esta sección se presenta una solución numérica que apoya el análisis dinámico. Las condiciones iniciales pueden ser obtenidas por medio de diferentes observaciones (lentes gravitacionales, oscilación acústica de bariones, entre otros), en este trabajo se consideran las observaciones de la radiación cósmica de fondo, obteniendo valores para la abundancia de materia y radiación de (Aghanim et al. (2018)), y la anisotropía de (Saadeh et al. (2016))<sup>30</sup>

$$\Omega_{ro} \equiv r_0^2 = 10^{-4}, \quad \Omega_{m0} \equiv m_0^2 = 0.313, \quad -3.8 \times 10^{-11} < \Sigma_0 < 5.54 \times 10^{-11}. \quad (176)$$

La ligadura de Friedmann (120) ofrece la única restricción para las condiciones iniciales; debido a la actual expansión acelerada del Universo se identifica esta época con el cuarto punto

---

<sup>29</sup> Esta secuencia no necesariamente es la única, intervalos como la dominación de radiación y materia se pueden evitar dependiendo de las condiciones iniciales, conduciendo a una evolución desde la cuarta variedad hasta el cuarto punto crítico. En general es posible evadir épocas con las condiciones iniciales, pero es altamente improbable alterar el orden de estas.

<sup>30</sup> En esta referencia se toman los datos recopilados por el satélite Planck y se analizan con las métricas de Bianchi para obtener cotas sobre los parámetros de anisotropía, esto hace que sea la referencia ideal para obtener cotas sobre el scalar de shear.

crítico, por lo tanto se le otorga un gran monto de la abundancia a la variable del potencial de Higgs. Los puntos y variedades críticas muestran que la variable  $\xi$  es un repelente en la mayoría de ellas, para evitar ajuste fino se le da a esta variable un valor de  $\xi = 10^2$ ; un conjunto de condiciones iniciales que cumple con una duración estimada correcta de las duraciones de las épocas es:

$$\begin{aligned} x_0 = 10^{-11}, \quad y_0 = 10^{-17}, \quad p_0 = 10^{-15}, \quad s_0 = 10^{-13}, \quad \Sigma_0 = 10^{-14}, \\ k_0 = 10^{-15}, \quad w_0 = 10^{-15}, \quad v_0 = 0.828, \quad \mu = 1. \end{aligned} \quad (177)$$

Las abundancias de energía se definen a partir de la ecuación de Friedmann

$$\Omega_m \equiv m^2, \quad \Omega_r \equiv r^2, \quad \Omega_\Sigma \equiv \Sigma^2, \quad \Omega_{DE} \equiv v^2, \quad (178)$$

$$\Omega_c \equiv w^2 + y^2 + x^2 + k^2 + s^2 + p^2, \quad (179)$$

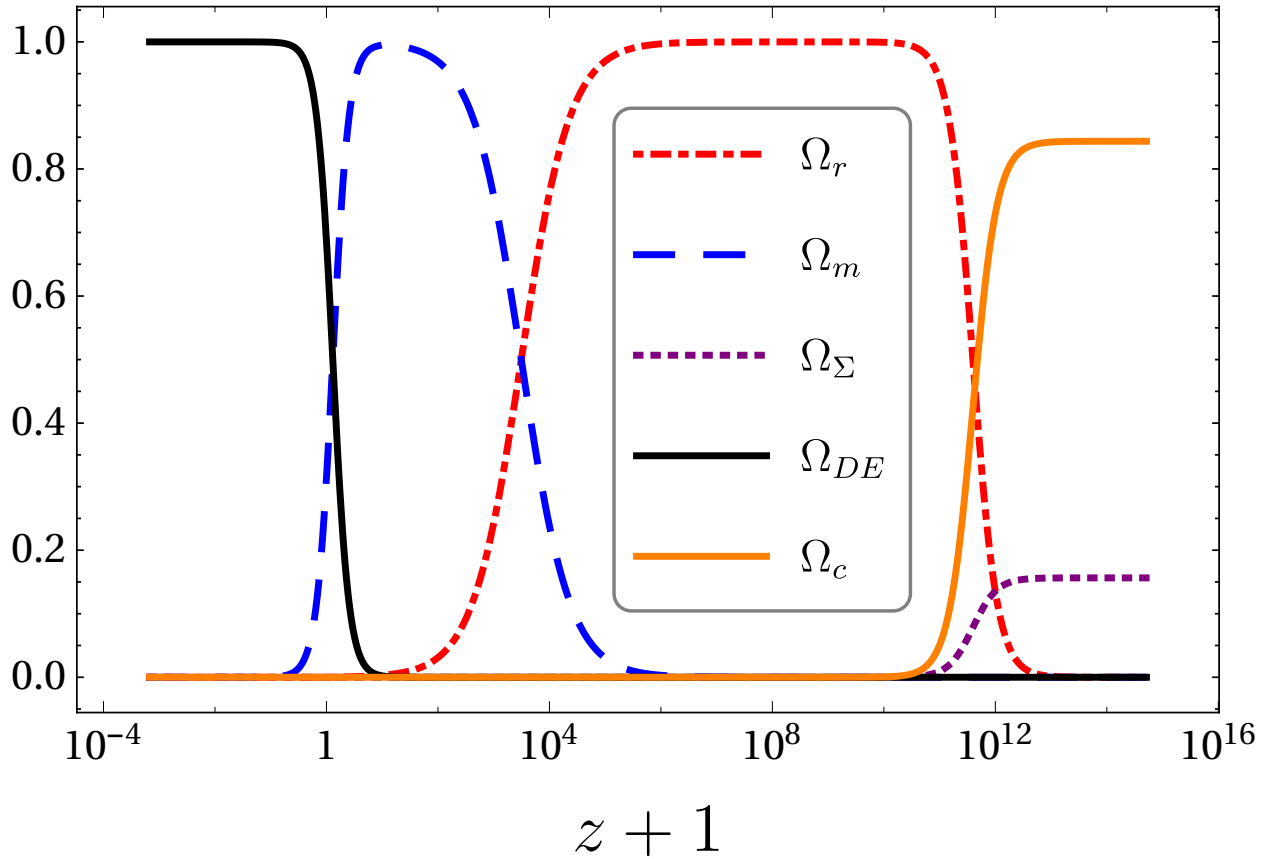
de tal manera que

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Sigma + \Omega_{DE} + \Omega_c, \quad (180)$$

en donde  $\Omega_m$  es la abundancia de materia,  $\Omega_r$  es la abundancia de radiación,  $\Omega_{DE}$  es la abundancia de energía oscura,  $\Omega_\Sigma$  el término de anisotropía y  $\Omega_c$  es la abundancia de la parte cinética de los campos, el término de interacción y el potencial del campo de gauge.

En la figura 4.1 se observan la distribución de las abundancias de cada tipo de materia en función del corrimiento al rojo, en la gráfica es clara la división entre las épocas de evolución del

universo. En la figura 4.2 se pueden observar el parámetro de desaceleración  $q$  y el parámetro de estado  $\omega_{ef}$  de cada época.



*Figura 4.1.* Desde los corrimientos al rojo más altos hasta el presente se observan las abundancias de energía, comenzando por una época de dominación entre la quinación y la anisotropía, que termina alrededor de  $z \approx 6.6 \times 10^{11}$ , para dar paso a la época dominada por la radiación que tiene una duración hasta el punto de equivalencia entre materia y radiación, en  $z \approx 3133$ . La época de dominación de materia termina en el corrimiento al rojo  $z \approx 0.29$ , en donde empieza la época de dominación por la energía oscura, extendiéndose infinitamente hacia el futuro.

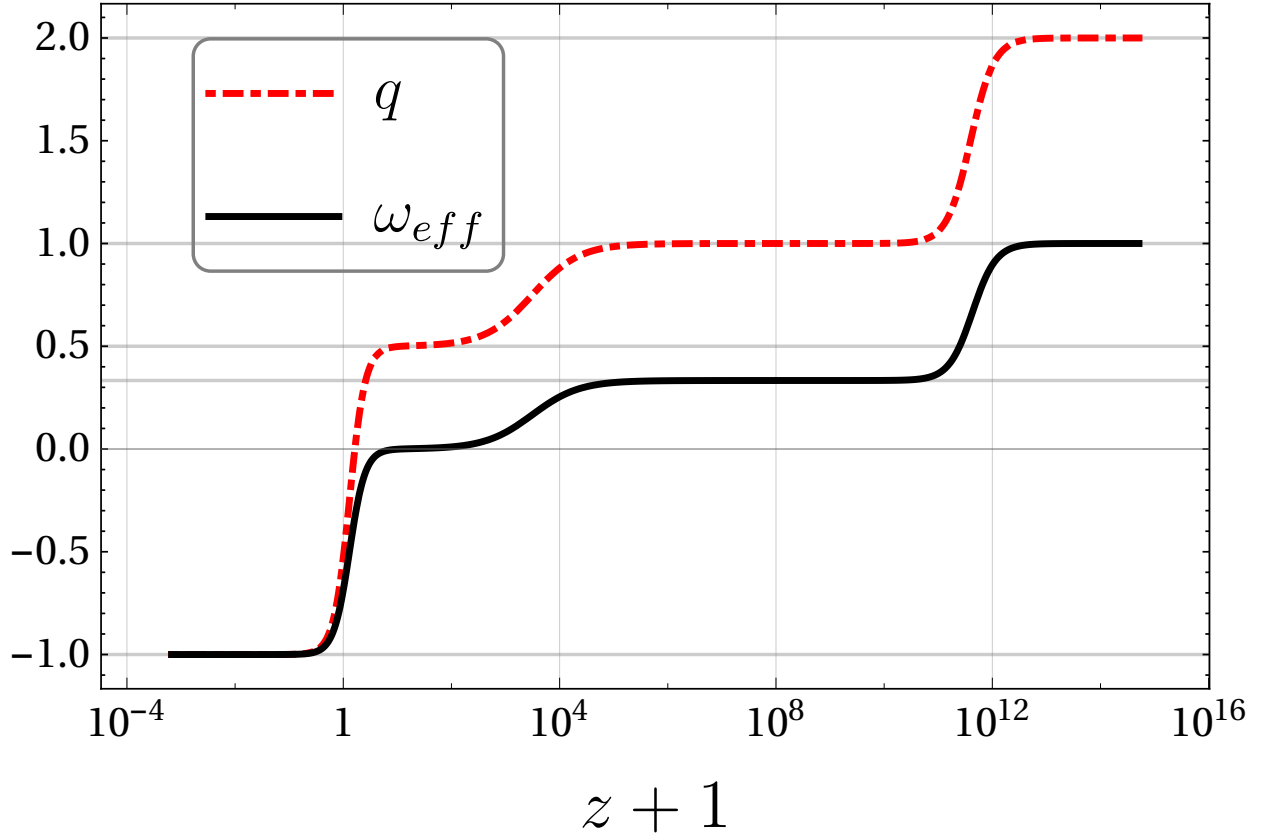


Figura 4.2. Cada época se distingue por un parámetro de desaceleración y de estado diferente, en esta gráfica se muestran cada uno de ellos: Para quinación y anisotropía se tienen  $q = 2$  y  $\omega_{ef} = 1$ , en radiación los parámetros son  $q = 1$  y  $\omega_{ef} = 1/3$ , después de la dominación radiación se encuentra la dominación de materia con  $q = 1/2$  y  $\omega_{ef} = 0$ , finalizando la evolución está la época dominada por la energía oscura en donde los parámetros tienen el valor  $q = \omega_{ef} = 1$ .

Los campos de interés físico son los campo invariantes ante cambio de coordenadas, para el caso de los campos de gauge se pueden construir los siguientes invariantes

$$A_{\mu}^1 A^{\mu 1} = (G_1 I)^2, \quad A_{\mu}^2 A^{\mu 2} = (G_2 J)^2, \quad (181)$$

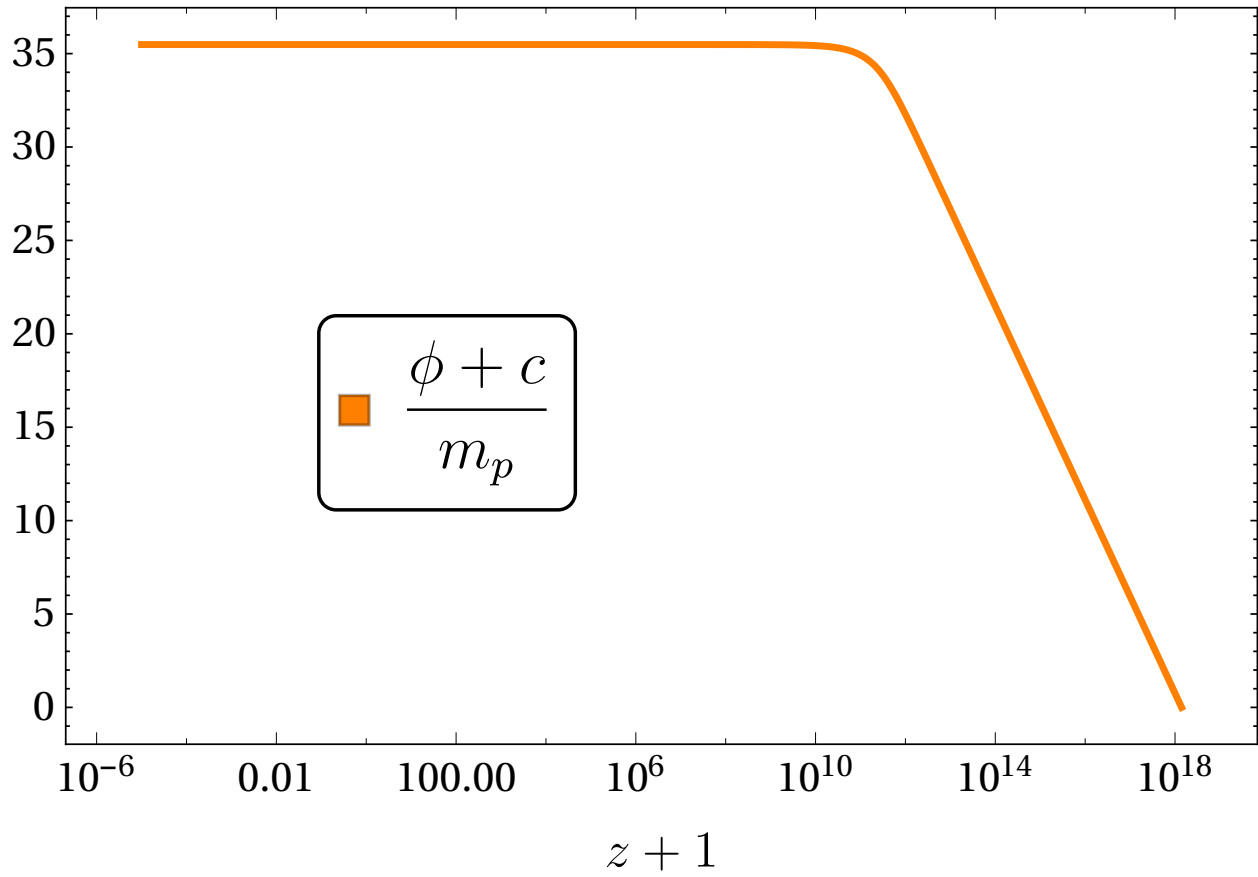
a su vez, sus derivadas temporales también son invariantes, ya que el tiempo coordinado es el

tiempo propio de los observadores fundamentales. El campo de Higgs goza de la invarianza debido a su naturaleza escalar.

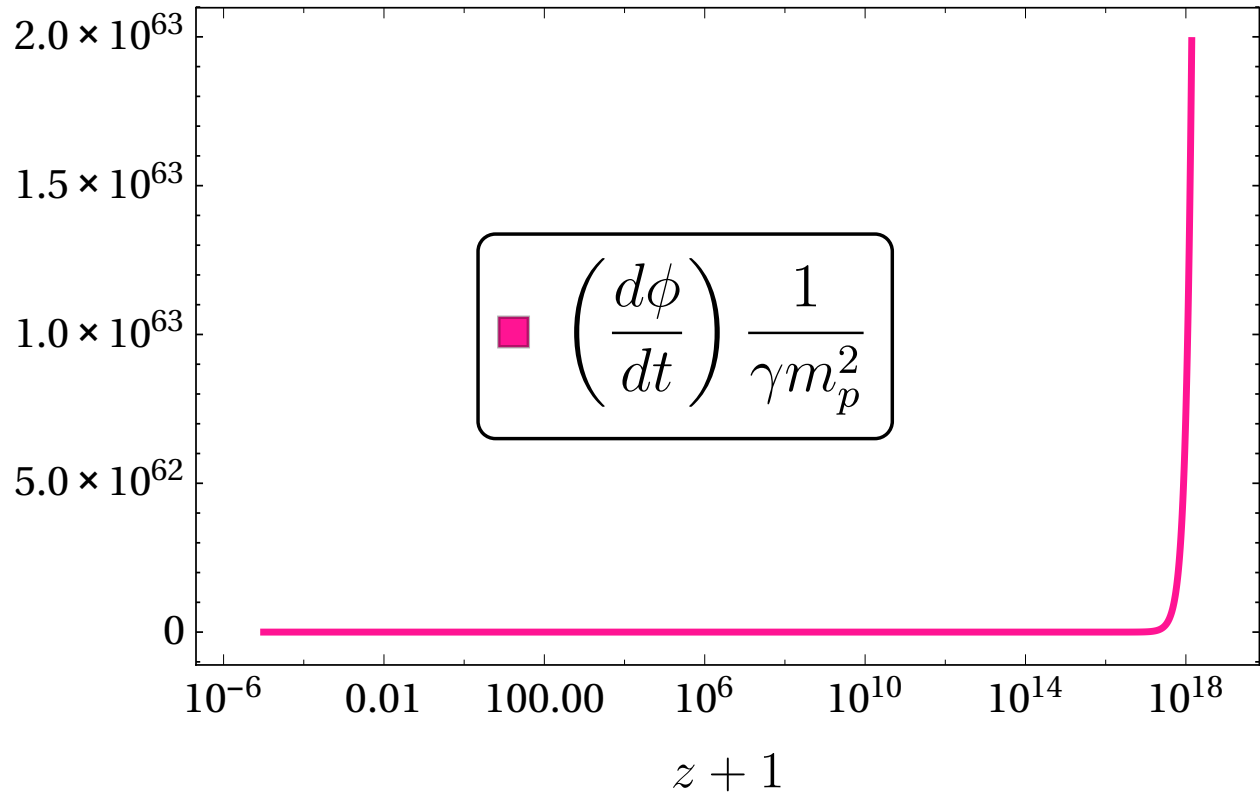
En la figuras 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 se encuentran la evolución de los invariantes anteriormente nombrados, que se encuentran en total concordancia con el análisis dinámico. Es remarkable como los campos de gauge aumentan durante toda su evolución, independientemente de ello, nunca llegan a dominar. Con un cambio que aumenta su monto en las condiciones iniciales, es posible tener un sistema en el cual la radiación que producen los campos dominen junto con la radiación del fluido perfecto, este escenario es descartado debido a que las observaciones coinciden con una dominación total por el fluido de radiación (Weinberg (2008)). Este modelo, al igual que el modelo EYMH SU(2) genera un potencial constante, que imita la constante cosmológica, tal mecanismo generador del potencial constante empieza en la época de radiación.

La evolución de la razón entre los campos de gauge (que también es un invariante) se encuentra en la figura 4.9, se puede observar que esta razón se mantiene constante en un valor  $10^2$  hasta radiación, en la época dominada por la anisotropía y quinación esta razón aumenta, de manera que no solo la anisotropía geométrica  $\Sigma$  cambia, también lo hace la anisotropía de los campos.

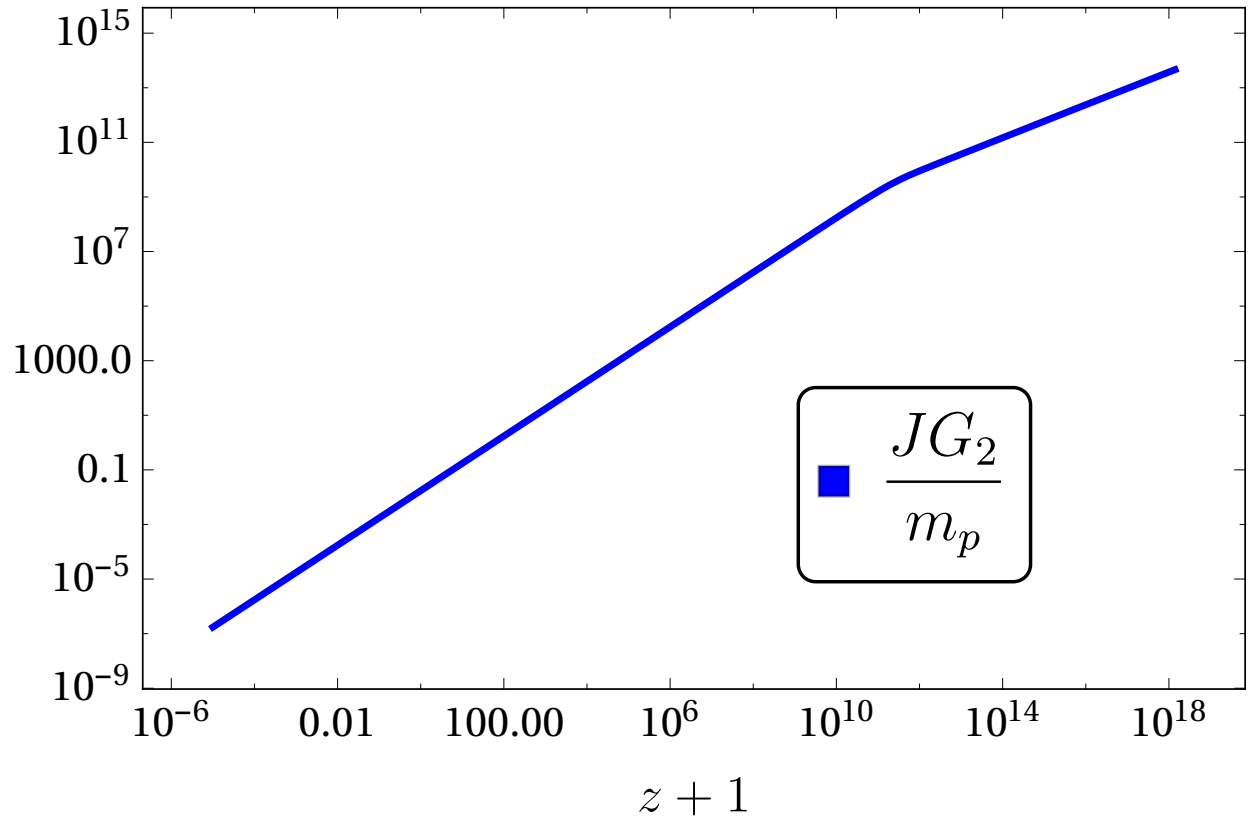
El parámetro de Hubble se presenta en la figura 4.10, la evolución de este parámetro en el modelo de concordancia es muy similar a la presentada. En la figura 4.11 se puede observar evolución del parámetro de anisotropía, que es constante en la época de quinación y anisotropía, durante radiación y materia decrece, finalmente en la época de energía oscura se tiene un decrecimiento marcado.



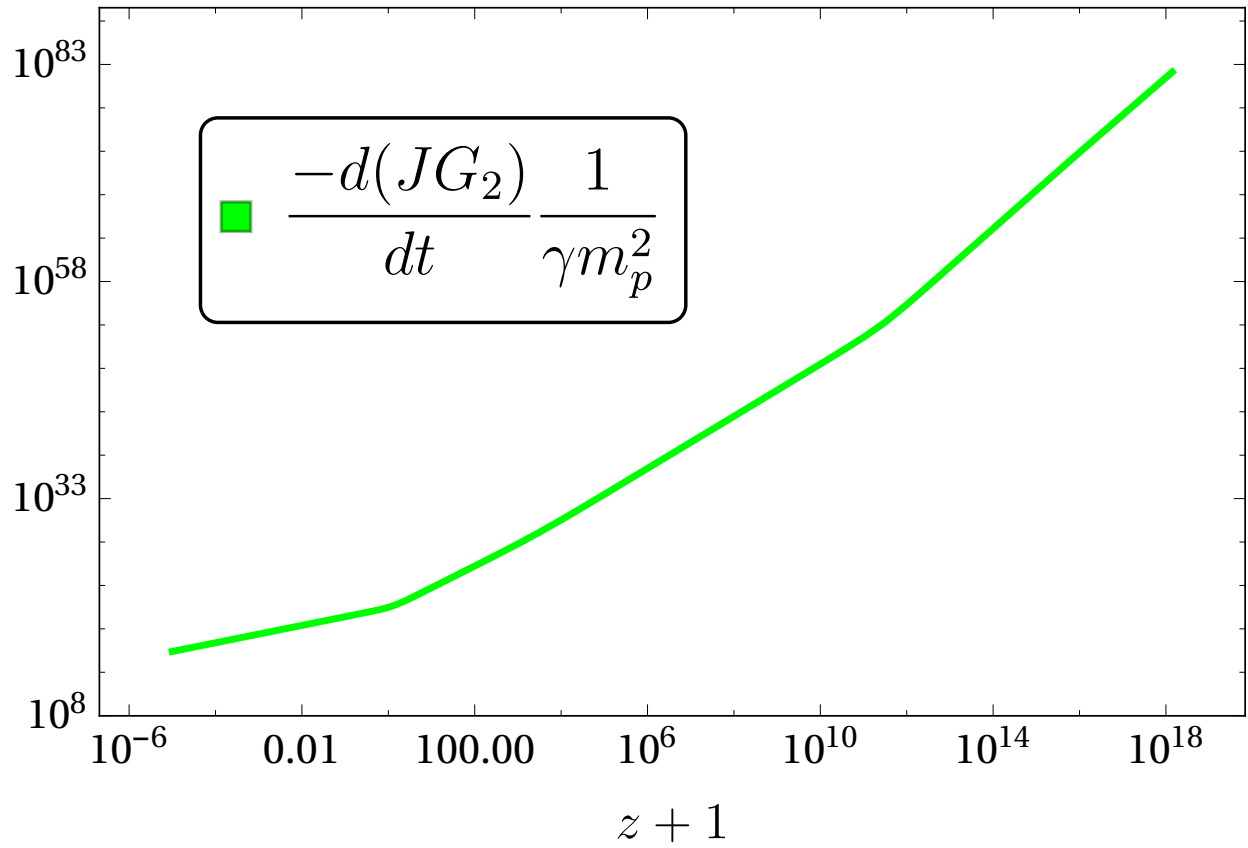
*Figura 4.3.* En esta gráfica se presenta la evolución del campo de Higgs, que, en la época de quinación y anisotropía crece hasta llegar a un valor constante; este valor constante implica un valor constante del potencial de Higgs, simulando así a la constante cosmológica.



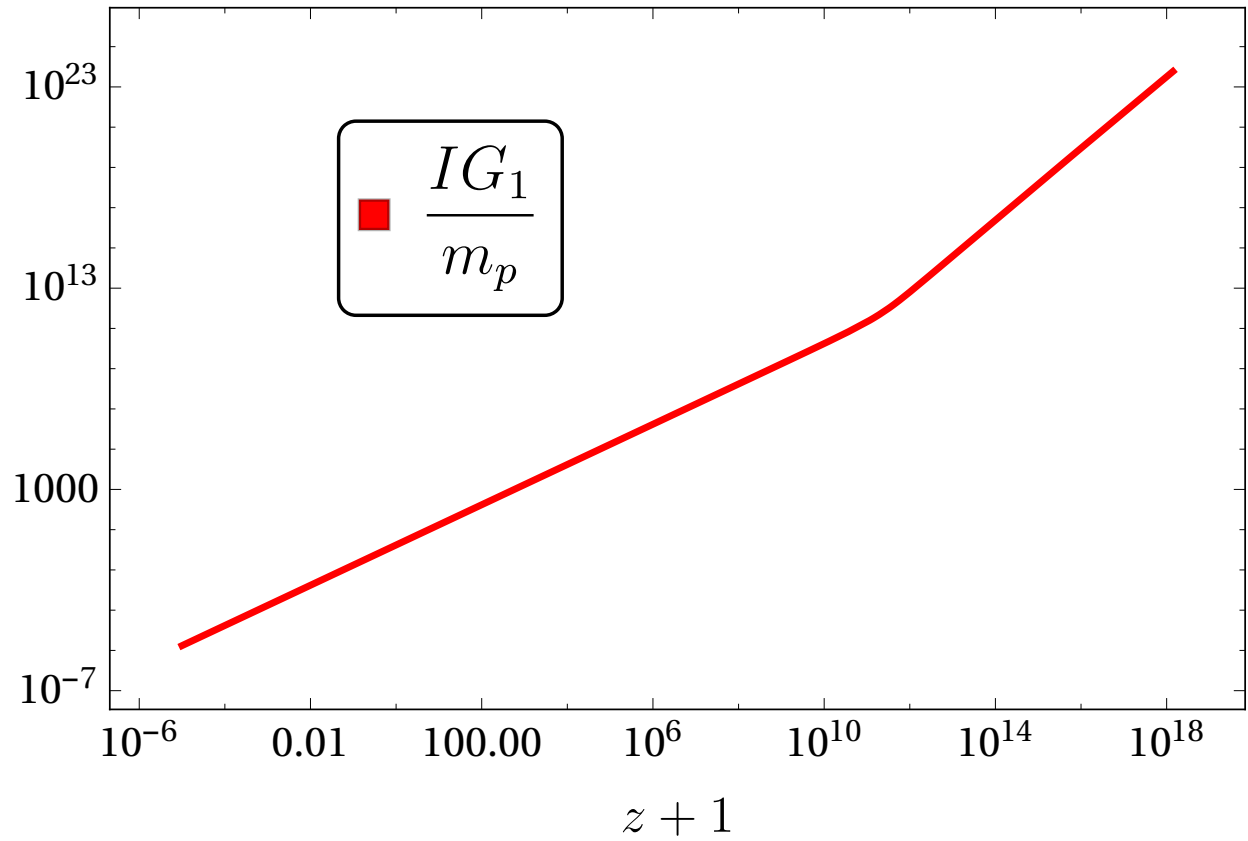
*Figura 4.4.* La figura corresponde a la derivada temporal del Higgs, que disminuye en función del tiempo. Se puede ver como la derivada decrece a medida que transcurre el tiempo.



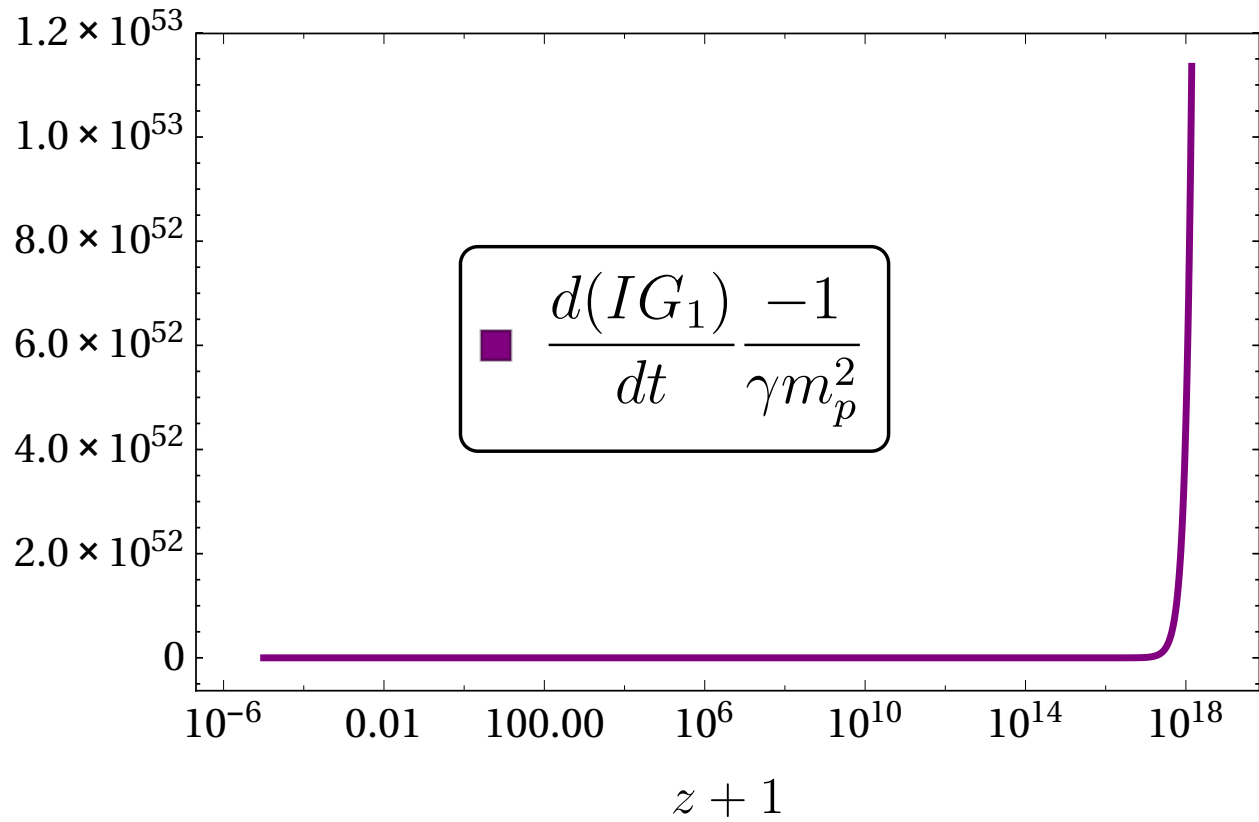
*Figura 4.5.* La figura corresponde a el campo de gauge  $G_2J$ , su dependencia con el campo es una función por partes, en quincación la evolución es aproximadamente lineal con respecto al corrimiento al rojo,  $G_2J \propto (z+1)$ , para tiempos más recientes se tiene  $G_2J \propto (z+1)^{\frac{2}{3}}$ .



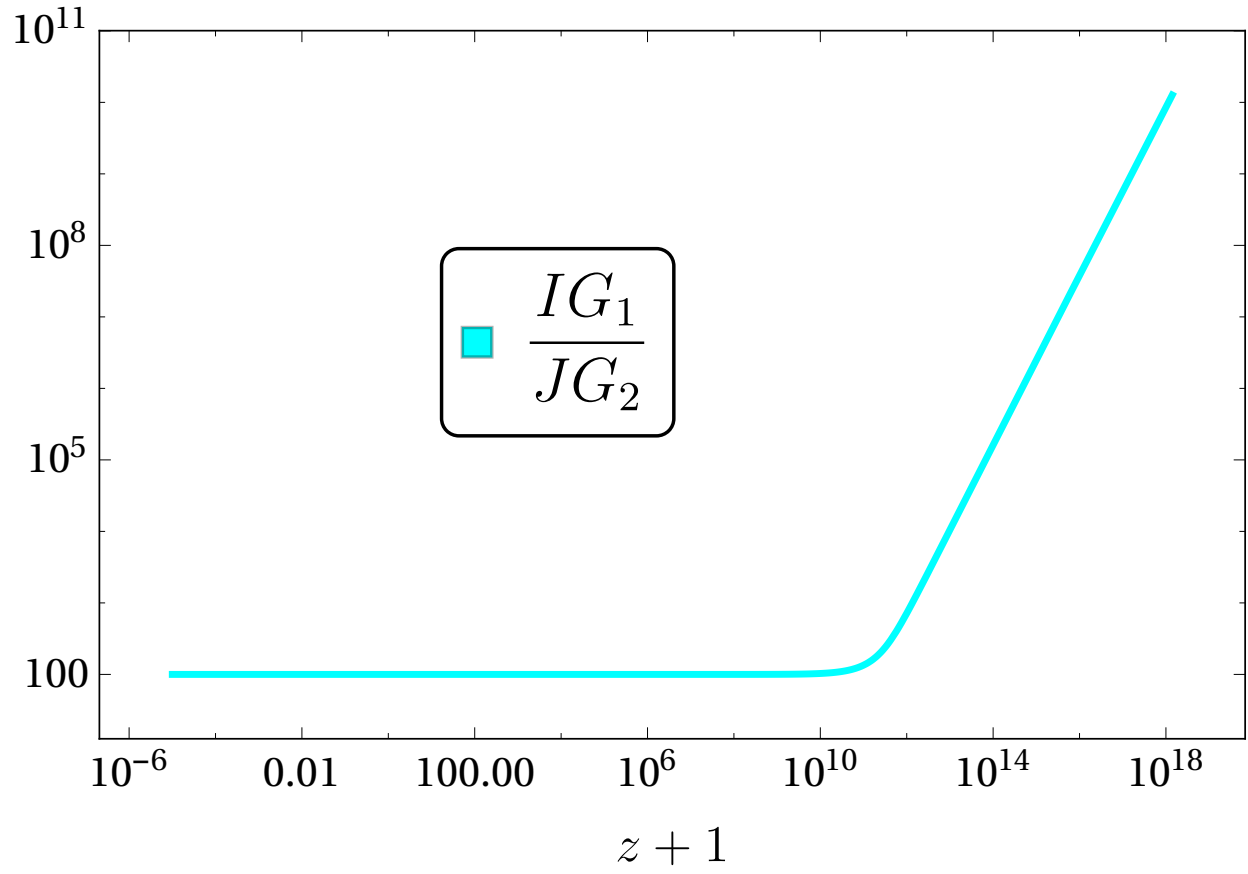
*Figura 4.6.* La figura corresponde a la derivada del campo de gauge  $G_2J$ , es importante notar que la derivada es negativa, durante su evolución la derivada está en función de las potencias 1, 2.5, 3 y 3.5 del corrimiento al rojo para la dominación de energía oscura, materia, radiación y quinación, respectivamente.



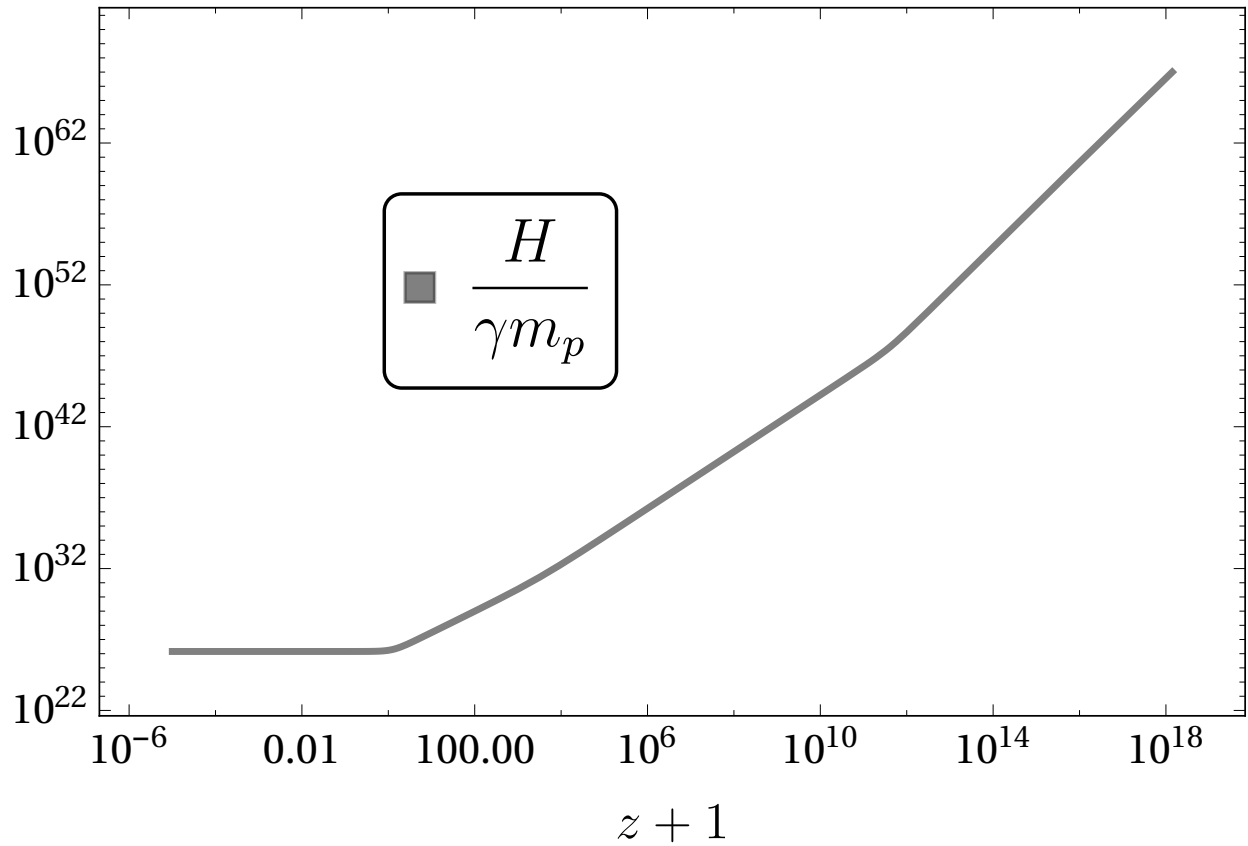
*Figura 4.7.* En esta figura se puede observar la evolución del invariante  $G_1 I$ , en las épocas de energía oscura, materia y radiación evoluciona aproximadamente de manera lineal con respecto al corrimiento al rojo,  $G_1 I \approx z + 1$ , en la época de quinación y anisotropía este resultado cambia, siendo proporcional aproximadamente a  $G_1 I \approx (z + 1)^{\frac{7}{4}}$ .



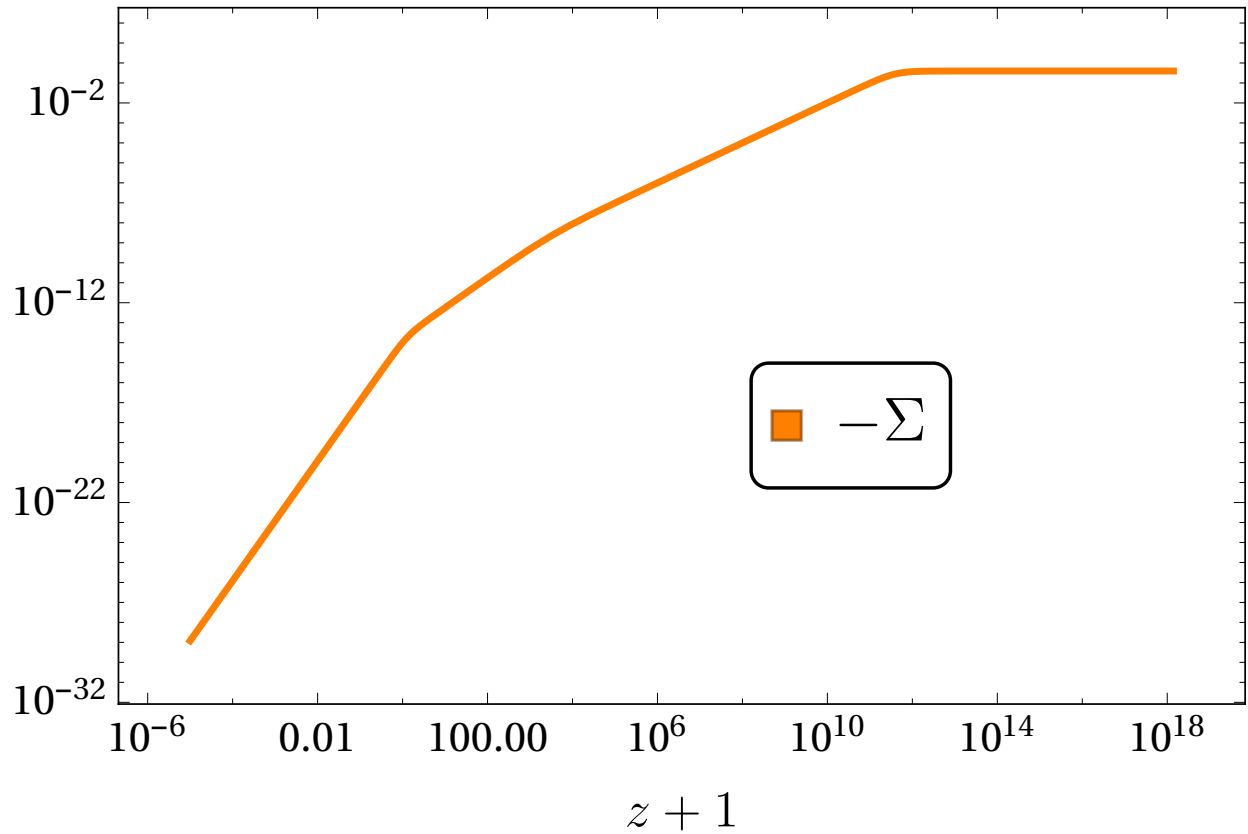
*Figura 4.8.* La derivada temporal del campo  $G_1I$  se presenta en esta imagen, nótese que al igual que la derivada de  $G_2J$  esta derivada también es negativa.



*Figura 4.9.* En esta figura se observa como la razón que existe entre los campos  $G_1I$  y  $G_2J$ , hasta radiación se mantiene constante, pero en quinación la razón aumenta hacia el pasado.



*Figura 4.10.* Se encuentra el parámetro de Hubble, su evolución es constante durante la época dominada por la energía oscura, durante la época de materia este parámetro evoluciona aproximadamente en función del corrimiento al rojo como una potencia de grado  $3/2$ ,  $H \propto (1+z)^{3/2}$ ; en la dominación por radiación su evolución tiene la misma forma que un polinomio de grado 2,  $H \propto (1+z)^2$ ; en su última etapa de quinación y anisotropía este parámetro tiene la forma  $H \propto (1+z)^3$ . Esta evolución imita al modelo de concordancia.



*Figura 4.11.* El denominado parámetro de shear o anisotropía se observa en esta figura, desde la época de anisotropía y quinación, en donde tiene un valor constante, pasando por radiación en donde su evolución es lineal con respecto al corrimiento al rojo; en la época de materia su evolución es  $\Sigma \approx (1+z)^{3/2}$ , en la época de energía oscura su evolución es más pronunciada,  $\Sigma \approx (1+z)^3$ .

#### 4.4. Conexión con física de partículas

De las ecuaciones (175) se obtiene la constante de acople  $\gamma$

$$\gamma = \frac{H_0 \xi_0^2 s_0^2}{m_p \sqrt{3}} \approx \frac{5 \times 10^{-85}}{\sqrt{3}}, \quad (182)$$

en donde se tuvo en cuenta que el parámetro de Hubble toma el valor  $H_0 \approx 5 \times 10^{-63} m_p$  (Aghanim et al. (2018)). Un valor tan pequeño de la constante de acople puede ser fácilmente visto como

ajuste fino, en ese sentido el modelo EYMH SO(3) sufre del mismo problema que el modelo de concordancia, sin embargo, este valor es tentativo; es necesario investigar a profundidad el conjunto de condiciones iniciales que producen un universo que se ajuste a las observaciones para obtener un estimado de los valores que la constante de acople puede tener.

En la época actual, dominación de energía oscura, los campos de gauge evolucionan linealmente como funciones del corrimiento al rojo, esto junto con la evolución constante del parámetro de Hubble, implican que la evolución de los campos con respecto al tiempo propio es asintótica, por lo tanto se pueden tomar los valores actuales de los campos como valores de fondo, las masa de los campos de Higgs son

$$m_\phi \propto \sqrt{\phi_s^2 - \phi_0^2 + \frac{4G_2^2 J_0^2}{\mu}}, \quad (183)$$

$$m_J \propto \gamma \sqrt{I_0^2 G_1^2 G_2^2 + 3G_2^4 J_0^2 + G_2^2 \phi_s^2}, \quad (184)$$

$$m_I \propto \gamma J_0 G_1 G_2, \quad (185)$$

en donde  $\phi_s$ ,  $I_0$  y  $J_0$  son los valores en el presente que alcanzan los campos  $\phi$ ,  $I$  y  $J$  respectivamente,  $\phi_0$  es el valor del campo de Higgs en el vacío. En este caso, el valor para la constante de acople hace que las masas de los campos de gauge se reduzcan drásticamente. Al igual que con la constante de acople, es necesario un estudio más profundo para obtener el conjunto de los posibles valores de los campos y así determinar sus masas.

## 5. Conclusiones

Se estudió el modelo Einstein Yang-Mills Higgs, invariante ante las transformaciones  $SU(2)$  o  $SO(3)$  locales, en el contexto de energía oscura, inspirados en el trabajo de Rinaldi en (Rinaldi (2015b,a)); a diferencia de este se tuvieron en cuenta términos no despreciables, se aclararon errores con respecto al cálculo de las ecuaciones de campo y en el proceso se encontró que el mecanismo del modelo difiere sustancialmente del explicado por Rinaldi.

Por dos décadas la energía oscura ha sido una de las mayores si no la mayor motivación científica en el campo de la cosmología, en este trabajo se analiza un mecanismo que, exitosamente produce expansión acelerada tardía, imitando el modelo  $\Lambda$ CDM en ciertos aspectos. Se produce un mecanismo que solamente deja el campo de Higgs con un grado de libertad en la dirección en la que crece el potencial y evitando que de vueltas al rededor de este; de esta manera haciendo que este escenario difiera totalmente del de “espitecencia” (véase en la Ref. (Boyle et al. (2002))). Un diferente mecanismo, que produce energía oscura, evita que el campo de Higgs caiga al mínimo del potencial así generando la expansión acelerada. Los campos de gauge y sus velocidades disminuyen asintóticamente aproximándose hacia el cero. Para el caso específico del modelo EYMH  $SO(3)$  se agrega una libertad anisótropa que se produce naturalmente de las ecuaciones, tal anisotropía no viola las cotas observadas; esta anisotropía forma parte de una variedad crítica escalante junto con la quinación.

Los modelos describen exitosamente las tres de las épocas del universo descritas por la cosmología estándar (dominación por radiación, materia y energía oscura), una época de quinación

al principio de la evolución que está causada por la parte cinética del campo de Higgs y, una época adicional de anisotropía que solo se produce en el modelo  $SO(3)$ .

No se descarta la época de quinción como una valiosa herramienta al momento de incorporar la época de inflación a los modelos, produciendo la etapa de recalentamiento (Opferkuch et al. (2019)). Es deseable que este tipo de modificación, junto con un posible acoplamiento del campo de Higgs con el campo de Higgs del modelo estándar, como el que se muestra en la Ref. (Baldes and Garcia-Cely (2019)) para generar materia oscura, puedan llevar a una fenomenología nueva en la que se establezcan más relaciones entre la física de partículas y la cosmología.

El modelo EYMH se encarga de obtener resultados positivos sin modificar la gravedad de Einstein ni postular formas extrañas de materia, en vez de esto, utiliza la teoría de Yang- Mills con un campo tipo Higgs, los cuales han sido exitosos en teoría cuantica de campos.

### Referencias Bibliográficas

- Aditya, Y. and Reddy, D. R. K. (2018). Locally rotationally symmetric Bianchi type-I string cosmological models in  $f(R)$  theory of gravity. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 15:1850156.
- Adshead, P. and Sfakianakis, E. I. (2017). Higgsed Gauge-flation. *JHEP*, 1708:130.
- Aghanim, N. et al. (2016). Planck 2015 results. XI. CMB power spectra, likelihoods, and robustness of parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A11.
- Aghanim, N. et al. (2018). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters.
- Akrami, Y. et al. (2018). Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck.
- Allen, S. W., Evrard, A. E., and Mantz, A. B. (2011). Cosmological Parameters from Observations of Galaxy Clusters. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 49:409–470.
- Alvarenga, F. G., Fabris, J. C., Lemos, N. A., and Monerat, G. A. (2002). Quantum cosmological perfect fluid models. *Gen. Rel. Grav.*, 34:651–663.
- Amendola, L. and Tsujikawa, S. (2010). *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press.
- Armendariz-Picon, C. (2004). Could dark energy be vector-like? *JCAP*, 0407:007.
- Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V., and Steinhardt, P. J. (2001). Essentials of k-essence. *Phys. Rev. D*, 63:103510.

- Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V. F., and Steinhardt, P. J. (2000). Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4438–4441.
- Baldes, I. and Garcia-Cely, C. (2019). Strong gravitational radiation from a simple dark matter model. *JHEP*, 1905:190.
- Beltrán Almeida, J. P., Guarnizo, A., Kase, R., Tsujikawa, S., and Valenzuela-Toledo, C. A. (2019). Anisotropic 2-form dark energy. *Phys. Lett.*, B793:396–404.
- Bezrukov, F. and Shaposhnikov, M. (2008). The standard model higgs boson as the inflaton. *Phys. Lett. B*, 659:703 – 706.
- Böhmer, C. and Harko, T. (2007). Dark energy as a massive vector field. *Eur. Phys. J. C*, 50:423–429.
- Bolton, A. et al. (2012). Spectral Classification and Redshift Measurement for the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey. *Astrophys. J.*, 144:144.
- Boyle, L. A., Caldwell, R. R., and Kamionkowski, M. (2002). Spintessence! New models for dark matter and dark energy. *Phys. Lett.*, B545:17–22.
- Bull, P., Clifton, T., and Ferreira, P. G. (2012). The kSZ effect as a test of general radial inhomogeneity in LTB cosmology. *Phys. Rev. D*, 85:024002.

Carroll, S. M. and Lim, E. A. (2004). Lorentz-violating vector fields slow the universe down. *Phys. Rev. D*, 70:123525.

Dawson, K. S. et al. (2016). The SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Overview and Early Data. *Astrophys. J.*, 151:44.

De Felice, A. and Tsujikawa, S. (2010).  $f(R)$  Theories. *Liv. Rev. Relativ.*, 13:3.

Ellis, G. F. R. and MacCallum, M. A. H. (1969). A class of homogeneous cosmological models. *Communications in Mathematical Physics*, 12:108–141.

Feeney, S. M., Peiris, H. V., Williamson, A. R., Nissanke, S. M., Mortlock, D. J., Alsing, J., and Scolnic, D. (2019). Prospects for resolving the Hubble constant tension with standard sirens. *Phys. Rev. D*, 122:061105.

Gallier, J. (2001). *Basics of Classical Lie Groups: The Exponential Map, Lie Groups, and Lie Algebras*. Springer New York, New York, NY.

Garcia-Bellido, J., Rubio, J., Shaposhnikov, M., and Zenhausern, D. (2011). Higgs-Dilaton Cosmology: From the Early to the Late Universe. *Phys. Rev. D*, 84:123504.

Golovnev, A., Mukhanov, V., and Vanchurin, V. (2008a). Gravitational waves in vector inflation. *JCAP*, 0811:018.

Golovnev, A., Mukhanov, V., and Vanchurin, V. (2008b). Vector inflation. *JCAP*, 0806:009.

- Golovnev, A. and Vanchurin, V. (2009). Cosmological perturbations from vector inflation. *Phys. Rev. D*, 79:103524.
- Heisenberg, L. (2019). A systematic approach to generalisations of general relativity and their cosmological implications. *Physics Reports*, 796:1 – 113.
- Hildebrandt, H. et al. (2017). KiDS-450: Cosmological parameter constraints from tomographic weak gravitational lensing. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 465:1454.
- Hubble, E. (1929). A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15:168–173.
- Huterer, D. and Shafer, D. L. (2018). Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests. *Rept. Prog. Phys.*, 81:016901.
- José, J. and Saletan, E. (2000). *Classical dynamics: a contemporary approach*. Cambridge University Press.
- Kane, G. (1993). *Modern Elementary Particle Physics: The Fundamental Particles and Forces?* Addison-Wesley Pub.
- Ketov, S. V. and Watanabe, N. (2014). On the Higgs-like Quintessence for Dark Energy. *Mod. Phys. Lett. A*, 29:1450117.
- Kiselev, V. V. (2004). Vector field as a quintessence partner. *Class. Quantum Grav.*, 21:3323–3335.

- Kobayashi, T. (2019). Horndeski theory and beyond: a review. *Reports on Progress in Physics*, 82:086901.
- Koivisto, T. and Mota, D. F. (2008). Vector Field Models of Inflation and Dark Energy. *JCAP*, 0808:021.
- Kumar, S. and Singh, C. P. (2008). Exact bianchi type-i cosmological models in a scalar-tensor theory. *International Journal of Theoretical Physics*, 47:1722–1730.
- L’Huillier, B., Shafieloo, A., and Kim, H. (2018). Model-independent cosmological constraints from growth and expansion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476:3263–3268.
- Li, Z., Gonzalez, J. E., Yu, H., Zhu, Z. H., and Alcaniz, J. S. (2016). Constructing a cosmological model-independent Hubble diagram of type Ia supernovae with cosmic chronometers. *Phys. Rev. D*, 93:043014.
- Maartens, R. and Koyama, K. (2010). Brane-World Gravity. *Liv. Rev. Relativ.*, 13:5.
- Maleknejad, A. and Sheikh-Jabbari, M. M. (2011). Non-Abelian gauge field inflation. *Phys. Rev. D*, 84:043515.
- Maleknejad, A., Sheikh-Jabbari, M. M., and Soda, J. (2013). Gauge Fields and Inflation. *Phys. Rept.*, 528:161–261.

- Mörtsell, E. and Dhawan, S. (2018). Does the Hubble constant tension call for new physics? *JCAP*, 1809:025.
- Ntelis, P. et al. (2017). Exploring cosmic homogeneity with the BOSS DR12 galaxy sample. *JCAP*, 1706:019.
- Opferkuch, T., Schwaller, P., and Stefanek, B. A. (2019). Ricci Reheating. *JCAP*, 1907:016.
- Perlmutter, S. et al. (1999). Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565–586.
- Pradhan, A. and Singh, S. K. (2004). Bianchi type i magnetofluid cosmological models with variable cosmological constant revisited. *Int. Jour. of Mod. Phys. D*, 13:503–516.
- Quiros, I. (2019). Selected topics in scalar–tensor theories and beyond. *Int. J. Mod. Phys. D*, 28:1930012.
- Riess, A. G. et al. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038.
- Riess, A. G. et al. (1999). BVRI Light Curves for 22 Type IA Supernovae. *Astron. J.*, 117:707–724.
- Riess, A. G. et al. (2016). A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. *Astrophys. J.*, 826:56.
- Rinaldi, M. (2015a). Dark energy as a fixed point of the Einstein Yang-Mills Higgs Equations. *JCAP*, 1510:023.

Rinaldi, M. (2015b). Higgs Dark Energy. *Class. Quant. Grav.*, 32:045002.

Rodríguez, Y. and Navarro, A. A. (2018). Non-Abelian S-term dark energy and inflation. *Phys. Dark Univ.*, 19:129–136.

Rugh, S. E. and Zinkernagel, H. (2002). The Quantum vacuum and the cosmological constant problem. *Stud. Hist. Phil. Sci. B*, 33:663–705.

Saadeh, D., Feeney, S. M., Pontzen, A., Peiris, H. V., and McEwen, J. D. (2016). How isotropic is the Universe? *Phys. Rev. Lett.*, 117:131302.

Sabiu, C. G. (2007). *Probing the Large-Scale Homogeneity of the Universe with Galaxy Redshift Surveys*. PhD thesis, Glasgow U.

Saha, B. (2006). Anisotropic cosmological models with a perfect fluid and a  $\lambda$  term. *The Astrophysical and Space Science*, 302:83–91.

Shamir, M. F. (2010). Some Bianchi Type Cosmological Models in  $f(R)$  Gravity. *Astrophys. Space Sci*, 330:183–189.

Taubenberger, S., Suyu, S. H., Komatsu, E., Jee, I., Birrer, S., Bonvin, V., Courbin, F., Rusu, C. E., Shajib, A. J., and Wong, K. C. (2019). The Hubble Constant determined through an inverse distance ladder including quasar time delays and Type Ia supernovae.

Tegmark, M. et al. (2004). Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Phys. Rev. D*, 69:103501.

Tegmark, M. et al. (2006). Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies. *Phys. Rev. D*, 74:123507.

Troxel, M. A. et al. (2018). Dark Energy Survey Year 1 results: Cosmological constraints from cosmic shear. *Phys. Rev. D*, 98:043528.

Truebenbach, A. and Darling, J. (2018). Toward a Measurement of the Transverse Peculiar Velocity of Galaxy Pairs. *Astrophys. J.*, 868:69.

Tsujikawa, S. (2013). Quintessence: a review. *Class. Quantum Grav.*, 30:214003.

Velten, H. E. S., vom Marttens, R. F., and Zimdahl, W. (2014). Aspects of the cosmological “coincidence problem”. *Eur. Phys. J. C*, 74:3160.

Weinberg, S. (1972). *Gravitation and cosmology*. Wiley New York.

Weinberg, S. (1989). The Cosmological Constant Problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23.

Weinberg, S. (1995). *The Quantum Theory of Fields*, volume 2. Cambridge University Press.

Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press.

Zhai, Z. and Wang, Y. (2019). Robust and model-independent cosmological constraints from distance measurements. *JCAP*, 1907:005.

### Apéndice A. Componentes de la métrica de Bianchi tipo I

En este apéndice se encuentra la relación entre las componentes de la métrica tipo I de Bianchi y los parámetros de la descomposición 3 + 1, esto para un observador fundamental.

Las componentes de la métrica de Bianchi tipo I y de sus proyecciones, en forma covariante y con simetría cilíndrica son:

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{22} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{22} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (186)$$

en donde  $h_{\mu\nu}$  es el tensor que representa la métrica proyectada en la hipersuperficie espacial, y  $U_{\mu\nu}$  es la proyección de la métrica en la dirección de la cuadrivelocidad. La métrica se puede escribir como:

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - U_{\mu\nu}. \quad (187)$$

La proyección del derivada covariante de la cuadrivelocidad sobre la hipersuperficie espacial es

$$\bar{\nabla}_\alpha u_\beta = \nabla_\alpha u_\beta + u_\alpha \dot{u}_\beta = \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \Theta + \Sigma_{\alpha\beta} + \Omega_{\beta\alpha}, \quad (188)$$

$$\Theta \equiv \bar{\nabla}_\alpha u^\alpha, \quad \Sigma_{\alpha\beta} \equiv \bar{\nabla}_{(\alpha} u_{\beta)} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \Theta, \quad \Omega_{\beta\alpha} \equiv \bar{\nabla}_{[\alpha} u_{\beta]}, \quad (189)$$

en donde  $\Theta$  es la expansión isotrópica,  $\Sigma_{\alpha\beta}$  es el tensor de esfuerzos o shear y  $\Omega_{\beta\alpha}$  es el tensor de vorticidad. La derivada covariante de la cuadrivelocidad es

$$\nabla_\alpha u_\beta = \partial_\alpha u_\beta - u_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\rho, \quad (190)$$

$$= \Gamma_{\alpha\beta}^0, \quad (191)$$

$$= \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,0}, \quad (192)$$

en donde la coma representa derivadas con respecto a las coordenadas  $(\partial/\partial x^\nu)B_\mu = B_{\mu,\nu}$  y la cuadrivelocidad de un observador fundamental es  $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$ . La cuadriaceleración es entonces

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = u^\alpha \partial_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} u^\alpha u_0 h_{\alpha\beta,0} = 0. \quad (193)$$

Reemplazando la cuadriaceleración y la derivada covariante de la velocidad en la Ec. (188) se obtiene

$$\bar{\nabla}_\alpha u_\beta = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,0}, \quad (194)$$

de manera que el tensor de shear y el tensor de vorticidad son

$$\Theta = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,0} g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,0} h^{\alpha\beta}, \quad \Sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,0} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \Theta, \quad \Omega_{\beta\alpha} = 0. \quad (195)$$

El escalar de shear se define como

$$\Sigma^2 \equiv \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,0} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \Theta \right) \left( \frac{1}{2} h_{\mu\nu,0} h^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} - \frac{1}{3} h^{\alpha\beta} \Theta \right), \quad (196)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} h_{\alpha\beta,0} h_{\mu\nu,0} h^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta,0} h^{\alpha\beta} \Theta + \frac{1}{9} h_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \Theta^2 \right), \quad (197)$$

$$= \frac{1}{8} \left( (g_{11})^{-2} (g_{11,0})^2 + 2(g_{22})^{-2} (g_{22,0})^2 \right) - \frac{1}{6} \Theta^2. \quad (198)$$

La expansión isótropa se convierte en

$$\Theta = \frac{1}{2} \left( (g_{11})^{-1} g_{11,0} + 2(g_{22})^{-1} g_{22,0} \right), \quad (199)$$

despejando el primer término de la ecuación (199) y reemplazándolo en la ecuación (198) se encuentra

$$\left( \frac{g_{22,0}}{g_{22}} \right)^2 - \frac{4}{3} \Theta \frac{g_{22,0}}{g_{22}} + \frac{4}{9} \Theta^2 - \frac{4}{3} \Sigma^2 = 0, \quad (200)$$

la anterior ecuación es cuadrática, con raíces

$$\frac{g_{22,0}}{g_{22}} = \frac{2}{3} \Theta \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \Sigma, \quad (201)$$

escogiendo la solución positiva y encontrando la solución de la ecuación

$$g_{22} = C_2 e^{2(\theta/3 + \sigma)}, \quad (202)$$

en donde

$$\dot{\theta} \equiv \Theta = 3H, \quad \dot{\sigma} \equiv \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}, \quad (203)$$

reemplazando este resultado en la Ec. (199), se llega a la solución

$$g_{11} = C_1 e^{2(\theta/3 - 2\sigma)}, \quad (204)$$

gracias a que las magnitudes físicamente medibles son independientes de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  podemos reescalar estas constantes sin modificar la física del sistema, haciéndolas iguales a la unidad; teniendo en cuenta que  $H = \frac{1}{3}\Theta$ , se pueden reescribir las componentes de la métrica de la siguiente manera

$$g_{11} = e^{2(\alpha - 2\sigma)}, \quad g_{22} = e^{2(\alpha + \sigma)}, \quad (205)$$

donde  $\dot{\alpha} \equiv H$ .

## Apéndice B. Condición de nulidad

En este apéndice se demuestra que la condición de nulidad (107) es invariante ante transformaciones  $SU(2)$  independientes del tiempo del campo  $\Phi$ .

Primero, se transforma el campo en la representación unitaria

$$\Phi' = e^{-ig\epsilon_a \cdot \frac{\sigma_a}{2}} \Phi, \quad \dot{\Phi}' = e^{-ig\epsilon_a \cdot \frac{\sigma_a}{2}} \dot{\Phi}, \quad \Phi'^{\dagger} = \dot{\Phi}^{\dagger} e^{ig\epsilon_a \cdot \frac{\sigma_a}{2}}, \quad (206)$$

la condición (107) se convierte en

$$\text{Im} \left( \dot{\Phi}'^{\dagger} \sigma_b \Phi' \right) = \text{Im} \left( \dot{\Phi}^{\dagger} e^{ig\epsilon_a \cdot \frac{\sigma_a}{2}} \sigma_b e^{-ig\epsilon_a \cdot \frac{\sigma_a}{2}} \Phi \right) = \text{Im} \left( \dot{\Phi}^{\dagger} e^{ig\epsilon_a \cdot \frac{\sigma_a}{2}} \delta_{ab} \sigma_a e^{-ig\epsilon_a \cdot \frac{\sigma_a}{2}} \Phi \right) = 0. \quad (207)$$

Existe una relación entre las rotaciones de un vector  $(k_1, k_2, k_3)$  en  $\mathbb{R}^3$  y las transformaciones  $SU(2)$  de las matrices  $2 \times 2$  hermíticas y sin traza<sup>31</sup>

$$\mathbf{k}' = e^{ig\epsilon_a \cdot T_a} \mathbf{k} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\sigma}) = e^{-ig\epsilon_a \cdot \frac{\sigma_a}{2}} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}) e^{+ig\epsilon_a \cdot \frac{\sigma_a}{2}}, \quad (208)$$

$$k'_a = R_{ab} k_b \quad \Longleftrightarrow \quad (k'_a \cdot \sigma_a) = U^{-1} (k_a \cdot \sigma_a) U, \quad (209)$$

en donde el espacio de las matrices  $2 \times 2$  hermíticas y sin traza es representado por una base que está compuesta por las matrices de Pauli  $\sigma_a$ ;  $T_a$  son los generadores de las transformadas  $SO(3)$ ,  $R_{ab}$  son las componentes de la respectiva matriz de transformación y  $U$  es la matriz transformación

---

<sup>31</sup> Este tipo de relaciones se utiliza para encontrar términos invariantes en teoría cuántica de campos, también es utilizado para la para como el demostrar la isotropía de la tríada cósmica (Maleknejad et al. (2013)).

SU(2).

Usando esta relación, el término (207) se puede escribir de la siguiente manera

$$\text{Im} \left( \dot{\Phi}^\dagger e^{ig\epsilon_a \cdot \frac{\sigma_a}{2}} \delta_{ab} \sigma_a e^{-ig\epsilon_a \cdot \frac{\sigma_a}{2}} \Phi \right) = \text{Im} \left( \dot{\Phi}^\dagger R_{ac} \delta_{cb} \sigma_a \Phi \right) = R_{ab} \text{Im} \left( \dot{\Phi}^\dagger \sigma_a \Phi \right) = 0, \quad (210)$$

mostrando que cualquier transformación global de la configuración unitaria cumple la condición (107).

### Apéndice C. Ecuaciones de campo para el modelo SU(2)

En este apéndice se encuentran los cálculos detallados de las ecuaciones de campo dinámicas (ecuaciones de Euler- Lagrange). Es importante señalar que el correcto procedimiento para obtener las ecuaciones es: variar la acción en términos de los campos más específicos (en este los cada una de las componentes de los campos  $A_\mu^a$ ) y finalmente reemplazar con la simetría de estos campos; la inversión en los pasos de este procedimiento, es decir, reemplazar la simetría de los campos para seguidamente variar la acción puede traer diferencias en las ecuaciones de campo, este método falla específicamente en el segundo término de la Ec.(89).

Todos los campos del lagrangiano que no son función de la métrica cumplen la condición

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\zeta} - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\zeta)} = 0, \quad (211)$$

en donde  $\zeta$  representa el campo. Estas ecuaciones para los campos de gauge son

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A_\eta^b} - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu A_\eta^b)} = 0, \quad (212)$$

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A_\eta^b} - \sqrt{-g}\partial_\gamma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)} - \partial_\gamma (\sqrt{-g}) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)} = 0, \quad (213)$$

tomando el primer término de la anterior ecuación

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A_\eta^b} = -\sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} \frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial A_\eta^b} + \frac{\partial((D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi)}{\partial A_\eta^b} \right], \quad (214)$$

en donde el término del potencial se desvance debido a que solo depende del Higgs. La derivada

de estos términos es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial A_\eta^b} &= 2g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha}^a \frac{\partial F_{\mu\beta}^a}{\partial A_\eta^b}, \\
&= 2g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha}^a \left[ \gamma \varepsilon^{afc} \left( \delta_\mu^\eta \delta^{fb} A_\beta^c - \delta_\beta^\eta \delta^{cb} A_\mu^f \right) \right], \\
&= 2\gamma \left( g^{\eta\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha}^a \varepsilon^{abc} A_\beta^c + g^{\mu\nu} g^{\alpha\eta} F_{\alpha\nu}^a \varepsilon^{abf} A_\mu^f \right), \\
&= 4\gamma g^{\eta\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha}^a \varepsilon^{abc} A_\beta^c,
\end{aligned} \tag{215}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial A_\eta^b} &= 4\gamma g^{\eta\nu} g^{\alpha\beta} \left( \partial_\nu A_\alpha^a - \partial_\alpha A_\nu^a + g \varepsilon^{adf} A_\nu^d A_\alpha^f \right) \varepsilon^{abc} A_\beta^c, \\
&= 4\gamma^2 g^{\eta\nu} g^{\alpha\beta} \varepsilon^{adf} \varepsilon^{abc} A_\nu^d A_\alpha^f A_\beta^c, \\
&= 4\gamma^2 g^{\eta\nu} g^{\alpha\beta} \left( \delta^{db} \delta^{fc} - \delta^{dc} \delta^{fb} \right) A_\nu^d A_\alpha^f A_\beta^c, \\
&= 4\gamma^2 g^{\eta\nu} g^{\alpha\beta} \left( A_\nu^b A_\alpha^c A_\beta^c - A_\alpha^b A_\nu^c A_\beta^c \right).
\end{aligned} \tag{216}$$

Ahora bien, cuando ya se ha variado con respecto a los campos más generales  $A_\mu^a$  es posible reemplazar con la simetría que sea pertinente, en este caso la simetría de la tríada cósmica y la simetría de la métrica FLRW, de manera que el término se reduce a

$$\frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial A_\eta^b} = 8\gamma^2 \delta^{\eta b} \frac{f^3}{a^2}. \tag{217}$$

El término de la derivada covariante del Higgs en la Ec. (298) es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)]}{\partial A_\eta^b} &= g^{\mu\nu} \left[ (D_\mu \Phi)^\dagger \frac{\partial D_\nu \Phi}{\partial A_\eta^b} + \frac{\partial (D_\mu \Phi)^\dagger}{\partial A_\eta^b} D_\nu \Phi \right], \\
&= g^{\mu\nu} 2\text{Re} \left[ (D_\mu \Phi)^\dagger \frac{\partial D_\nu \Phi}{\partial A_\eta^b} \right] \\
&= g^{\mu\nu} 2\text{Im} \left[ (\partial_\mu \Phi + i\frac{\gamma}{2} \sigma_c A_\mu^c \Phi)^\dagger \frac{\gamma}{2} \sigma_a \Phi \delta_\nu^\eta \delta_{ab} \right],
\end{aligned} \tag{218}$$

en donde  $\mathbf{Re}()$  y  $\mathbf{Im}()$  son los operadores real e Imaginario respectivamente. De la misma manera con la que se reemplazaron las simetrías en la ecuación 217, se puede reemplazar la configuración unitaria del Higgs en este caso

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)]}{\partial A_\eta^b} &= g^{\mu\nu} 2\text{Im} \left[ \frac{\gamma}{2} \delta_\mu^0 \dot{\Phi}^\dagger \sigma_a \Phi \delta_\nu^\eta \delta_{ab} + i\frac{\gamma^2}{4} \Phi^\dagger \sigma_c \sigma_a \Phi \delta_\nu^\eta \delta_{ab} A_\mu^c \right], \\
&= g^{\mu\nu} 2\text{Re} \left[ \frac{\gamma^2}{4} \Phi^\dagger (i\epsilon_{cak} \sigma_k + \delta_{ca}) \Phi \delta_\nu^\eta \delta_{ab} A_\mu^c \right], \\
&= g^{\mu\nu} 2\text{Re} \left[ \frac{\gamma^2}{4} \Phi^\dagger \Phi \delta_\nu^\eta \delta_{ab} A_\mu^c \right],
\end{aligned} \tag{219}$$

finalmente, reemplazando con la tríada cósmica

$$\frac{\partial [(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)]}{\partial A_\eta^b} = \frac{\gamma^2}{2a^2} \delta_b^\eta \phi^2 f. \tag{220}$$

El segundo término de la Ec. (297) es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma A_\eta^b)} = - \left[ \frac{1}{4} \frac{\partial (F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial (\partial_\gamma A_\eta^b)} + \frac{\partial ((D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi)}{\partial (\partial_\gamma A_\eta^b)} \right], \tag{221}$$

el primer término de la anterior ecuación es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)} &= 2g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} F_{\mu\beta}^a \frac{\partial(F_{\nu\alpha}^a)}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)}, \\
&= 2g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} F_{\mu\beta}^a (\delta_\nu^\gamma \delta_\alpha^\eta - \delta_\alpha^\gamma \delta_\nu^\eta) \delta^{ab}, \\
&= 2 \left( g^{\eta\beta} g^{\mu\gamma} F_{\mu\beta}^b - g^{\gamma\beta} g^{\mu\eta} F_{\mu\beta}^b \right), \\
&= 4g^{\eta\beta} g^{\mu\gamma} F_{\mu\beta}^b,
\end{aligned} \tag{222}$$

para  $\gamma = 0$

$$\frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial(\partial_0 A_\eta^b)} = -4\delta^{\eta b} \frac{\dot{f}}{a^2}. \tag{223}$$

Derivando la ecuación (222) con respecto a las coordenadas se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_\gamma \frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)} &= 4\partial_\gamma \left[ g^{\eta\beta} g^{\mu\gamma} F_{\mu\beta}^b \right], \\
&= 4 \left[ g^{\mu\gamma} F_{\mu\beta}^b \partial_\gamma g^{\eta\beta} + g^{\eta\beta} F_{\mu\beta}^b \partial_\gamma g^{\mu\gamma} + g^{\eta\beta} g^{\mu\gamma} \partial_\gamma F_{\mu\beta}^b \right], \\
&= 4 \left[ g^{00} F_{0\beta}^b \partial_0 g^{\eta\beta} + g^{\eta\beta} F_{0\beta}^b \partial_0 g^{00} + g^{\eta\beta} g^{00} \partial_0 F_{0\beta}^b \right], \\
&= -4 \left[ \partial_0 A_i^b \partial_0 g^{\eta i} + g^{\eta i} \partial_0^2 A_i^b \right], \\
&= -4\delta^{\eta b} \left[ \frac{\ddot{f}}{a^2} - 2H \frac{\dot{f}}{a^2} \right],
\end{aligned} \tag{224}$$

en donde en las dos últimas ecuaciones se reemplazó la tríada cósmica y la métrica FLRW.

El segundo término de la Ec. (303)

$$\frac{\partial((D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi)}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)} = 0. \quad (225)$$

El determinante de una matriz diagonal es el producto de sus componentes

$$\sqrt{\det(-g_{\mu\nu})} = \sqrt{-g} = a^3. \quad (226)$$

Reemplazando las ecuaciones (300), (220), (223), (305) y (306) en la Ec. (297)

$$\ddot{f} + H\dot{f} + 2\frac{\gamma^2 f^3}{a^2} + \frac{\gamma^2 f \phi^2}{2} = 0. \quad (227)$$

Las ecuaciones de movimiento para el Higgs son

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi^b} - \sqrt{-g}\partial_\gamma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)} - \partial_\gamma(\sqrt{-g}) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)} = 0, \quad (228)$$

tomando el primer término de la anterior ecuación y teniendo en cuenta que el tensor de esfuerzos

de gauge solo depende del campo de gauge

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi^b} = -\sqrt{-g} \left[ \frac{\partial((D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi)}{\partial\phi^b} + \frac{\partial V(\Phi^2)}{\partial\phi^b} \right], \quad (229)$$

el primer término de la anterior ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial((D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi)}{\partial\phi^b} &= 2g^{\mu\nu}\text{Re}\left[(D_\mu\Phi)^\dagger\frac{\partial D_\nu\Phi}{\partial\phi^b}\right], \\
&= \gamma g^{\mu\nu}\text{Im}\left[(D_\mu\Phi)^\dagger\sigma_c\frac{\partial\Phi}{\partial\phi^b}A_\nu^c\right], \\
&= \gamma g^{\mu\nu}\text{Im}\left[(\partial_\mu\Phi + i\frac{\gamma}{2}\sigma_d A_\mu^d\Phi)^\dagger\sigma_c\frac{\partial\Phi}{\partial\phi^b}A_\nu^c\right], \\
&= \frac{\gamma^2}{2}g^{\mu\nu}\text{Re}\left[\Phi^\dagger\sigma_d\sigma_c\frac{\partial\Phi}{\partial\phi^b}A_\mu^d A_\nu^c\right],
\end{aligned} \tag{230}$$

reemplazando con las simetrías

$$\begin{aligned}
\frac{\partial((D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi)}{\partial\phi^b} &= \frac{\gamma^2}{2}g^{\mu\nu}\text{Re}\left[\Phi^\dagger(i\varepsilon_{\mu\nu k}\sigma_k + \delta_{cd}\delta_\mu^d\delta_\nu^c)\frac{\partial\Phi}{\partial\phi^b}f^2\right], \\
&= \frac{\gamma^2}{2}\text{Re}\left[\Phi^\dagger(ig^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu k}\sigma_k + 3a^{-2})\frac{\partial\Phi}{\partial\phi^b}f^2\right], \\
&= \frac{3\gamma^2}{2a^2}\text{Re}\left[\Phi^\dagger\frac{\partial\Phi}{\partial\phi^b}f^2\right], \\
&= \frac{3\gamma^2}{2a^2}\delta_1^b\phi f^2.
\end{aligned} \tag{231}$$

El segundo término en la Ec. (314)

$$\frac{\partial V(\Phi^2)}{\partial\phi^b} = \frac{\lambda}{4}\frac{\partial(\Phi^2 - \frac{v}{2})^2}{\partial\phi^b}, \tag{232}$$

$$= \lambda\left(\phi^2 - \frac{v}{2}\right)\phi\delta_1^b. \tag{233}$$

Solamente la contracción entre las derivadas covariantes depende de la derivada del Higgs,

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)} &= -\frac{\partial((D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi)}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)}, \\
&= -g^{\mu\nu}2\text{Re}\left[(D_\mu\Phi)^\dagger\frac{\partial D_\nu\Phi}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)}\right], \\
&= -g^{\mu\nu}2\text{Re}\left[(D_\mu\Phi)^\dagger\frac{\partial(\partial_\nu\Phi)}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)}\right], \\
&= -g^{\mu\nu}2\text{Re}\left[(\partial_\mu\Phi+i\frac{\gamma}{2}\sigma_d A_\mu^d\Phi)^\dagger\frac{\partial(\partial_\nu\Phi)}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)}\right],
\end{aligned}
\tag{234}$$

Los modelos describen exitosamente las tres de las épocas del universo descritas por la cosmología estándar (dominación por radiación, materia y energía oscura), una época de quinación al principio de la evolución que está causada por la parte cinética del campo de Higgs y, una época adicional de anisotropía que solo se produce en el modelo SO(3).

No se descarta la época de quinación como una valiosa herramienta al momento de incorporar la época de inflación a los modelos, produciendo la etapa de recalentamiento (Opferkuch et al. (2019)). Es deseable que este tipo de modificación, junto con un posible acoplamiento del campo de Higgs con el campo de Higgs del modelo estándar, como el que se muestra en la Ref. (Baltes and Garcia-Cely (2019)) para generar materia oscura, puedan llevar a una fenomenología nueva en la que se establezcan relaciones más claras entre la física de partículas y la cosmología. reemplazando con las simetrías y configuraciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)} &= -2\text{Re} \left[ (\partial_\mu\Phi g^{\mu\nu} + i\frac{\gamma}{2}\sigma_d g^{\mu\nu} \delta_\mu^d f\Phi)^\dagger \frac{\delta_\nu^0 \partial(\partial_0\Phi)}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)} \right], \\
&= 2\text{Re} \left[ \partial_0\Phi^\dagger \frac{\partial(\partial_0\Phi)}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)} \right], \\
&= 2\dot{\phi} \delta_1^b \delta_0^\gamma.
\end{aligned} \tag{235}$$

Derivar la anterior ecuación conduce a

$$\partial_\gamma \frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)} = 2\ddot{\phi} \delta_1^b, \tag{236}$$

reemplazando las ecuaciones 320, 322, 326 y 329 en Ec. (228) se encuentra que

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 f^2 \phi}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \tag{237}$$

### Apéndice D. Tensor de Einstein

En este apéndice se encuentran el cálculo de las componentes del tensor de Einstein para la métrica de Bianchi tipo I, que es un tensor diagonal, por lo tanto sus componentes contravariantes son el inverso de las correspondientes componentes covariantes

$$g^{00} = -1, \quad g^{11} = e^{-2(\alpha-2\sigma)}, \quad g^{22} = g^{33} = e^{-2(\alpha+\sigma)}, \quad (238)$$

la conexión se define como

$$\Gamma_{\nu\eta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma} [\partial_{\eta}g_{\gamma\nu} + \partial_{\nu}g_{\eta\gamma} - \partial_{\gamma}g_{\nu\eta}], \quad (239)$$

donde cada una de sus componentes para este caso son

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= 0, \\
\Gamma_{0i}^0 &= 0, \\
\Gamma_{11}^0 &= (\dot{\alpha} - 2\dot{\sigma}) e^{2(\alpha-2\sigma)}, \\
\Gamma_{22}^0 &= \Gamma_{33}^0 = (\dot{\alpha} + \dot{\sigma}) e^{2(\alpha+\sigma)}, \\
\Gamma_{12}^0 &= \Gamma_{13}^0 = \Gamma_{23}^0 = 0, \\
\Gamma_{00}^i &= 0, \\
\Gamma_{10}^1 &= \dot{\alpha} - 2\dot{\sigma}, \\
\Gamma_{20}^2 &= \Gamma_{30}^3 = \dot{\alpha} + \dot{\sigma}, \\
\Gamma_{20}^1 &= \Gamma_{10}^2 = \Gamma_{03}^1 = \Gamma_{10}^3 = \Gamma_{20}^3 = \Gamma_{03}^2 = 0, \\
\Gamma_{jk}^i &= 0,
\end{aligned} \tag{240}$$

el tensor de Ricci se define como

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\gamma + \Gamma_{\mu\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\nu}^\gamma - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\gamma, \tag{241}$$

siendo sus componentes

$$\begin{aligned}
R_{00} &= 3\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2 + 6\dot{\sigma}^2, \\
R_{11} &= -e^{2(\alpha-2\sigma)} \left[ (\ddot{\alpha} - 2\ddot{\sigma}) - 2(\dot{\alpha} - 2\dot{\sigma})^2 + 2(\dot{\alpha} - 2\dot{\sigma})^2 + 3\dot{\alpha}(\dot{\alpha} - 2\dot{\sigma}) \right], \\
R_{11} &= -e^{2(\alpha-2\sigma)} \left[ \ddot{\alpha} - 2\ddot{\sigma} + 3\dot{\alpha}^2 - 6\dot{\alpha}\dot{\sigma} \right], \\
R_{22} &= -e^{2(\alpha+\sigma)} \left[ \ddot{\alpha} + \ddot{\sigma} + 2(\dot{\alpha} + \dot{\sigma})^2 - 2(\dot{\alpha} + \dot{\sigma})^2 + 3\dot{\alpha}(\dot{\alpha} + \dot{\sigma}) \right], \\
R_{22} = R_{33} &= -e^{2(\alpha+\sigma)} \left[ \ddot{\alpha} + \ddot{\sigma} + 3\dot{\alpha}^2 + 3\dot{\sigma}\dot{\alpha} \right],
\end{aligned} \tag{242}$$

el escalar de Ricci se define como

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R_{00}g^{00} + R_{11}g^{11} + 2R_{22}g^{22}, \tag{243}$$

$$= -6(\ddot{\alpha} + \dot{\sigma}^2 + 2\dot{\alpha}^2), \tag{244}$$

utilizando el escalar y el tensor de Ricci se puede encontrar el tensor de Einstein

$$G_{\mu}{}^{\nu} = R_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu}{}^{\nu}R, \tag{245}$$

siendo sus componentes

$$G_0{}^0 = 3(\dot{\alpha}^2 - \dot{\sigma}^2), \tag{246}$$

$$G_1{}^1 = 2\ddot{\alpha} + 2\ddot{\sigma} + 3\dot{\alpha}^2 + 3\dot{\sigma}^2 + 6\dot{\alpha}\dot{\sigma}, \tag{247}$$

$$G_2{}^2 = 2\ddot{\alpha} - \ddot{\sigma} + 3\dot{\alpha}^2 + 3\dot{\sigma}^2 - 3\dot{\alpha}\dot{\sigma}. \tag{248}$$

La métrica de Bianchi tipo I se reduce a la métrica FLRW plana para el caso en el que la anisotropía se reduce a cero, por lo tanto el cálculo de las cantidades tensoriales de la métrica de

Bianchi también se reduce a los de la métrica FLRW. Las componentes de conexión

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= 0, \\
\Gamma_{0i}^0 &= 0, \\
\Gamma_{11}^0 &= \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = \dot{\alpha} e^{2\alpha} = \dot{a}a, \\
\Gamma_{12}^0 &= \Gamma_{13}^0 = \Gamma_{23}^0 = 0, \\
\Gamma_{00}^i &= 0, \\
\Gamma_{10}^1 &= \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{30}^3 = \dot{\alpha} = H, \\
\Gamma_{20}^1 &= \Gamma_{10}^2 = \Gamma_{03}^1 = \Gamma_{10}^3 = \Gamma_{20}^3 = \Gamma_{03}^2 = 0, \\
\Gamma_{jk}^i &= 0,
\end{aligned} \tag{249}$$

en donde  $a = e^\alpha$ . De esta manera las componentes de tensor de Einstein se reducen a

$$G_0^0 = 3\dot{\alpha}^2 = 3H^2, \tag{250}$$

$$G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = 2\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2 = 2\dot{H} + 3H^2. \tag{251}$$

### Apéndice E. Masa de los campos en el modelo SU(2)

En esta sección se presenta el cálculo de la masa de los campos. Sea el lagrangiano del sistema

$$\mathcal{L} = \frac{3}{2} \left( \frac{\dot{f}}{a} \right)^2 - \frac{3\gamma^2}{2} \left( \frac{f}{a} \right)^4 + \dot{\phi}^2 - \frac{3\gamma^2 f^2}{4a^2} \phi^2 - V(\phi^2) + \mathcal{L}^m + \mathcal{L}^r, \quad (252)$$

y tomando solo aquellos terminos que contribuyan a la masa de los campos, es decir, los términos cuadráticos de alguno o los dos campos

$$-\frac{3\gamma^2}{2} \left( \frac{f}{a} \right)^4 - \frac{3\gamma^2 f^2}{4a^2} \phi^2 - V(\phi^2) \subset \mathcal{L}. \quad (253)$$

Se puede expandir los campos alrededor del los valores actuales, de manera que  $f \equiv F + f_0$  donde  $f_0$  es el valor del campo hoy en día y  $F$  es el campo físico de gauge, con el boson de Higgs se hace un tratamiento similar de manera que  $\phi \equiv h + \phi_{as}$  donde  $h$  es el nuevo campo físico de Higgs y  $\phi_{as}$  es el valor asintótico del campo. Reemplazando estas definiciones en los términos de masa del lagrangiano

$$-\frac{3\gamma^2}{2} \left( \frac{F + f_0}{a} \right)^4 - \frac{3\gamma^2 (F + f_0)^2}{4a^2} (h + \phi_{as})^2 - \frac{\lambda}{4} ((h + \phi_{as})^2 - \phi_0)^2 \subset \mathcal{L}, \quad (254)$$

expandiendo los anteriores binomios y tomando solamente aquellos que contengan el cuadrado de los campos  $h$  o  $F$  se encuentra

$$-\frac{9\gamma^2 f_0^2}{a_0^4} F^2 - \frac{3\gamma^2 \phi_{as}^2}{4a_0^2} F^2 - \frac{3\gamma^2 f_0^2}{4a_0^2} h^2 - \frac{3\lambda \phi_{as}^2}{2} h^2 + \frac{\lambda \phi_0^2}{2} h^2 \subset \mathcal{L}, \quad (255)$$

el cuadrado de la masa de una partícula es proporcional al factor que multiplica al cuadrado de dicho campo en el lagrangiano (Kane (1993); Weinberg (1989)), por lo tanto las masas para el campo de Higgs y el campo de gauge son

$$m_f \propto \gamma \sqrt{12 \left( \frac{f_0}{a_0} \right)^2 + \phi_{as}^2}, \quad (256)$$

$$m_\phi \propto \gamma \sqrt{\left( \frac{f_0}{a_0} \right)^2 + 4\alpha^2 \phi_{as}^2 - \frac{4}{3} \alpha^2 \phi_0^2}. \quad (257)$$

## Apéndice F. Ecuaciones de campo para el modelo SO(3)

### 5.1. Ecuaciones de campo de Einstein

Sea el lagrangiano del modelo SO(3)

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_r, \quad (258)$$

en donde los  $\mathcal{L}_r$  es el lagrangiano del fluido perfecto de radiación y  $\mathcal{L}_m$  es el lagrangiano del fluido perfecto de materia, los lagrangianos de Yang-Mills y Higgs se definen como

$$\mathcal{L}_{YM} \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_H \equiv -\frac{1}{2}(D_\mu\phi^a)(D^\mu\phi^a) - V(\phi). \quad (259)$$

El tensor energía momentum (TEM) se define como

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (260)$$

de manera que los TEM de Yang-Mills y de Higgs son

$$T_{\mu\nu}^{YM} = -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^a F^{a\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial(F_{\alpha\beta}^a F^{a\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (261)$$

$$= -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^a F^{a\alpha\beta} + F_{\mu\beta}^a F^{a\beta}{}_\nu, \quad (262)$$

$$T_{\mu\nu}^H = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(D_\beta\phi^a)(D^\beta\phi^a) - g_{\mu\nu}V(\phi) + \frac{\partial((D_\beta\phi^a)(D^\beta\phi^a) + 2V(\phi))}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (263)$$

$$= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(D_\beta\phi^a)(D^\beta\phi^a) - g_{\mu\nu}V(\phi) + (D_\mu\phi^a)(D_\nu\phi^a). \quad (264)$$

habiendo variado ya la acción, podemos proceder a expandir y reemplazar con las simetrías de la métrica y la configuración de tríada cósmica

$$F_{\mu\alpha}^a F_{\nu}^{a\alpha} = g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^a, \quad (265)$$

$$= g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} A_{\alpha}^a - \partial_{\alpha} A_{\mu}^a + \gamma \epsilon^{abc} A_{\mu}^b A_{\alpha}^c) (\partial_{\nu} A_{\beta}^a - \partial_{\beta} A_{\nu}^a + \gamma \epsilon^{ade} A_{\nu}^d A_{\beta}^e), \quad (266)$$

$$\begin{aligned} &= g^{\alpha\beta} \partial_{\mu} A_{\alpha}^a \partial_{\nu} A_{\beta}^a - g^{\alpha\beta} \partial_{\mu} A_{\alpha}^a \partial_{\beta} A_{\nu}^a + \gamma g^{\alpha\beta} \epsilon^{ade} \partial_{\mu} A_{\alpha}^a A_{\nu}^d A_{\beta}^e \\ &\quad - g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} A_{\mu}^a \partial_{\nu} A_{\beta}^a + g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} A_{\mu}^a \partial_{\beta} A_{\nu}^a - \gamma g^{\alpha\beta} \epsilon^{ade} \partial_{\alpha} A_{\mu}^a A_{\nu}^d A_{\beta}^e \\ &\quad + \gamma g^{\alpha\beta} \epsilon^{abc} \partial_{\nu} A_{\beta}^a A_{\mu}^b A_{\alpha}^c - \gamma g^{\alpha\beta} \epsilon^{abc} \partial_{\beta} A_{\nu}^a A_{\mu}^b A_{\alpha}^c + \gamma^2 g^{\alpha\beta} \epsilon^{abc} \epsilon^{ade} A_{\mu}^b A_{\alpha}^c A_{\nu}^d A_{\beta}^e, \end{aligned} \quad (267)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\beta}^a F_{\nu}^{a\beta} &= g^{\alpha\beta} \partial_{\mu} A_{\alpha}^a \partial_{\nu} A_{\beta}^a - g^{\beta\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^a \partial_{\beta} A_{\nu}^a + \gamma g^{\beta\alpha} \epsilon^{ade} \partial_{\mu} A_{\alpha}^a A_{\nu}^d A_{\beta}^e \\ &\quad - g^{\beta\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}^a \partial_{\nu} A_{\beta}^a + g^{00} \partial_0 A_{\mu}^a \partial_0 A_{\nu}^a - \gamma g^{\beta\alpha} \epsilon^{ade} \partial_{\alpha} A_{\mu}^a A_{\nu}^d A_{\beta}^e \\ &\quad + \gamma g^{\beta\alpha} \epsilon^{abc} \partial_{\nu} A_{\beta}^a A_{\mu}^b A_{\alpha}^c - \gamma g^{\beta\alpha} \epsilon^{abc} \partial_{\beta} A_{\nu}^a A_{\mu}^b A_{\alpha}^c \\ &\quad + \gamma^2 g^{\alpha\beta} \left( A_{\alpha}^c A_{\beta}^c A_{\mu}^b A_{\nu}^b - A_{\mu}^b A_{\beta}^c A_{\alpha}^b A_{\nu}^c \right), \end{aligned} \quad (268)$$

reemplazando con la tríada cósmica axialmente simétrica y teniendo en cuenta que la métrica es una matriz diagonal

$$F_{\mu\beta}^a F_{\nu}^{a\beta} = g^{\alpha\beta} \partial_{\mu} A_{\alpha}^a \partial_{\nu} A_{\beta}^a + g^{00} \partial_0 A_{\mu}^a \partial_0 A_{\nu}^a + \gamma^2 g^{\alpha\beta} \left( A_{\alpha}^c A_{\beta}^c A_{\mu}^b A_{\nu}^b - A_{\mu}^b A_{\beta}^c A_{\alpha}^b A_{\nu}^c \right). \quad (269)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (269), el lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\mu\beta}^a F^{a\nu\beta}, \quad (270)$$

$$= -\frac{1}{4}g^{\mu\nu} \left( g^{\alpha\beta} \partial_\mu A_\alpha^a \partial_\nu A_\beta^a + g^{00} \partial_0 A_\mu^a \partial_0 A_\nu^a + \gamma^2 g^{\alpha\beta} \left( A_\alpha^c A_\beta^c A_\mu^b A_\nu^b - A_\mu^b A_\beta^c A_\alpha^b A_\nu^c \right) \right),$$

$$= \frac{1}{2}(G_1 \dot{I})^2 + (G_2 J)^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 (G_2 J)^2 (2(G_1 I)^2 + (G_2 J)^2), \quad (271)$$

en donde  $G_1 = \sqrt{g^{11}}$  y  $G_2 = \sqrt{g^{22}}$ , con el lagrangiano y la ecuación (269) el TEM de Yang-Mills

$$T_{\mu\nu}^{YM} = g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2}(G_1 \dot{I})^2 + (G_2 J)^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 (G_2 J)^2 (2(G_1 I)^2 + (G_2 J)^2) \right)$$

$$+ g^{\alpha\beta} \partial_\mu A_\alpha^a \partial_\nu A_\beta^a + g^{00} \partial_0 A_\mu^a \partial_0 A_\nu^a \quad (272)$$

$$+ \gamma^2 g^{\alpha\beta} \left( A_\alpha^c A_\beta^c A_\mu^b A_\nu^b - A_\mu^b A_\beta^c A_\alpha^b A_\nu^c \right),$$

que en su forma mixta es

$$T_\mu^{\nu\text{ YM}} = \delta_\mu^\nu \left( \frac{1}{2}(G_1 \dot{I})^2 + (G_2 J)^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 (G_2 J)^2 (2(G_1 I)^2 + (G_2 J)^2) \right)$$

$$+ g^{\nu\rho} g^{\alpha\beta} \partial_\mu A_\alpha^a \partial_\rho A_\beta^a - g^{\nu\rho} \partial_0 A_\mu^a \partial_0 A_\rho^a + \gamma^2 g^{\nu\rho} g^{\alpha\beta} \left( A_\alpha^c A_\beta^c A_\mu^b A_\rho^b - A_\mu^b A_\beta^c A_\alpha^b A_\rho^c \right), \quad (273)$$

y tiene las componentes

$$T_0^0 \text{ YM} = -\frac{1}{2}G_1^2 \dot{I}^2 - G_2^2 J^2 - \frac{\gamma^2}{2} G_2^2 J^2 (2G_1^2 I^2 + G_2^2 J^2), \quad (274)$$

$$T_1^1 \text{ YM} = -\frac{1}{2}G_1^2 \dot{I}^2 + G_2^2 J^2 + \frac{\gamma^2}{2} G_2^2 J^2 (2G_1^2 I^2 - G_2^2 J^2), \quad (275)$$

$$T_2^2 \text{ YM} = T_3^3 \text{ YM} = \frac{1}{2}G_1^2 \dot{I}^2 + \frac{\gamma^2}{2} G_2^4 J^4. \quad (276)$$

Del último término de la ecuación (263)

$$\frac{\partial \left( (D_\beta \phi^a)(D^\beta \phi^a) + 2V(\phi) \right)}{\partial g^{\mu\nu}} = (D_\mu \phi^a)(D_\nu \phi^a) \quad (277)$$

$$= (\partial_\mu \phi^a + \gamma \varepsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c)(\partial_\nu \phi^a + \gamma \varepsilon^{ade} A_\nu^d \phi^e), \quad (278)$$

$$= \partial_\mu^a \phi \partial_\nu \phi^a + \gamma \varepsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c \partial_\nu \phi^a + \partial_\mu \phi^a \gamma \varepsilon^{ade} A_\nu^d \phi^e \quad (279)$$

$$+ \gamma^2 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ade} A_\mu^b \phi^c A_\nu^d \phi^e,$$

después de reemplazar con la configuración unitaria del Higgs y la tríada cósmica axialmente simétrica

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi^a)(D_\nu \phi^a) &= \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \dot{\phi}^2 \gamma g \varepsilon^{1b1} A_\mu^b \phi \partial_\nu \phi + \gamma \varepsilon^{1d1} A_\nu^d \phi \partial_\mu \phi \\ &+ \gamma^2 (\phi)^2 (A_\mu^b A_\nu^b - A_\mu^1 A_\nu^1), \end{aligned} \quad (280)$$

usando la ecuación (280), se puede obtener el lagrangiano de Higgs

$$\mathcal{L}_H = -\frac{1}{2} (D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a) - V(\phi), \quad (281)$$

$$= \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \gamma^2 \phi^2 G_2^2 J^2 - V(\phi), \quad (282)$$

el cual puede ser reemplazado en la ecuación(263), para obtener el TEM de Higgs

$$T_{\mu\nu}^H = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(D_\beta\phi^a)(D^\beta\phi^a) - g_{\mu\nu}V(\phi) + (D_\mu\phi^a)(D_\nu\phi^a), \quad (283)$$

$$=g_{\mu\nu}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \gamma^2\phi^2G_2^2J^2 - V(\phi)\right) + \delta_\mu^0\delta_\nu^0\dot{\phi}^2 \quad (284)$$

$$+ \gamma^2\phi^2(A_\mu^bA_\nu^b - A_\mu^1A_\nu^1),$$

que en su versión mixta es

$$T_{\mu}{}^{\nu H} = \delta_\mu{}^\nu \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - g^2\phi^2G_2^2J^2 - V(\phi)\right) + g^{0\nu}\delta_\mu^0\dot{\phi}^2 \quad (285)$$

$$+ g^2g^{\beta\nu}\phi^2(A_\mu^bA_\beta^b - A_\mu^1A_\beta^1),$$

el cual tiene las componentes diagonales

$$T_0{}^0 H = -\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \gamma^2\phi^2G_2^2J^2 + V(\phi)\right), \quad (286)$$

$$T_1{}^1 H = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \gamma^2\phi^2G_2^2J^2 - V(\phi), \quad (287)$$

$$T_2{}^2 H = T_3{}^3 H = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (288)$$

Las ecuaciones de Einstein son

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{m_p^2}T_{\mu\nu}, \quad (289)$$

en su versión mixta las ecuaciones son

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^2 - \dot{\sigma}^2 = \frac{1}{3m_p^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \gamma^2 \phi^2 (G_2 J)^2 + V(\phi) + \frac{1}{2} (G_1 \dot{I})^2 + (G_2 J)^2 + \frac{\gamma^2}{2} (G_2 J)^2 \left( 2(G_1 I)^2 + (G_2 J)^2 \right) \right. \\ \left. + \rho_m + \rho_r \right], \end{aligned} \quad (290)$$

$$\begin{aligned} 2\ddot{\alpha} + 2\ddot{\sigma} + 3\dot{\alpha}^2 + 3\dot{\sigma}^2 + 6\dot{\alpha}\dot{\sigma} = -\frac{1}{m_p^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \gamma^2 \phi^2 (G_2 J)^2 - V(\phi) - \frac{1}{2} (G_1 \dot{I})^2 \right. \\ \left. + (G_2 J)^2 + \frac{\gamma^2}{2} (G_2 J)^2 \left( 2(G_1 I)^2 - (G_2 J)^2 \right) + P_r \right], \end{aligned} \quad (291)$$

$$2\ddot{\alpha} - \ddot{\sigma} + 3\dot{\alpha}^2 + 3\dot{\sigma}^2 - 3\dot{\alpha}\dot{\sigma} = -\frac{1}{m_p^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) + \frac{1}{2} (G_1 \dot{I})^2 + \frac{\gamma^2}{2} (G_2 J)^4 + P_r \right], \quad (292)$$

en donde  $\rho_r$  y  $\rho_m$  representan densidad de energía de radiación y materia respectivamente,  $P_r$  representa la presión de radiación, con la combinación lineal de las ecuaciones (290), (291) y (292) se obtienen

$$\ddot{\sigma} + 3\dot{\sigma}\dot{\alpha} = \frac{1}{3m_p^2} \left[ \gamma^2 \phi^2 (G_2 J)^2 + (G_1 \dot{I})^2 - (G_2 J)^2 + \gamma^2 (G_2 J)^2 [(G_2 J)^2 - (G_1 I)^2] \right], \quad (293)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{3m_p^2} \left[ 3V(\phi) + \frac{1}{2} (G_1 \dot{I})^2 + (G_2 J)^2 + \frac{\gamma^2}{2} (G_2 J)^2 [2(G_1 I)^2 + (G_2 J)^2] \right. \\ \left. + 2\gamma^2 \phi^2 (G_2 J)^2 + \frac{3}{2} \rho_m + \rho_r \right]. \end{aligned} \quad (294)$$

## 5.2. Ecuaciones de campo de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\zeta} - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\zeta)} = 0, \quad (295)$$

en donde  $\zeta$  representa el campo con respecto al que se varía la acción. Para el caso específico de los campos de gauge

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A_\eta^b} - \partial_\gamma \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)} = 0, \quad (296)$$

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A_\eta^b} - \sqrt{g}\partial_\gamma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)} - \partial_\gamma (\sqrt{-g}) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)} = 0, \quad (297)$$

tomando el primer término de la ecuación (297)

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A_\eta^b} = -\sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} \frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial A_\eta^b} + \frac{1}{2} \frac{\partial(D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a)}{\partial A_\eta^b} \right], \quad (298)$$

en donde el termino del potencial se anula gracias a que solo depende del Higgs, la derivada del primer término de la parte derecha de la ecuación (298) es

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial A_\eta^b} &= 2g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha}^a \frac{\partial F_{\mu\beta}^a}{\partial A_\eta^b}, \\ &= 2g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha}^a \left[ \gamma \epsilon^{afc} \left( \delta_\mu^\eta \delta^{fb} A_\beta^c - \delta_\beta^\eta \delta^{cb} A_\mu^f \right) \right], \\ &= 2\gamma \left( g^{\eta\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha}^a \epsilon^{abc} A_\beta^c + g^{\mu\nu} g^{\alpha\eta} F_{\alpha\nu}^a \epsilon^{abf} A_\mu^f \right), \\ &= 4\gamma g^{\eta\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha}^a \epsilon^{abc} A_\beta^c, \end{aligned} \quad (299)$$

el cual, después de reemplazar con tríada simétrica

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial A_\eta^b} &= 4\gamma g^{\eta\nu} g^{\alpha\beta} \left( \partial_\nu A_\alpha^a - \partial_\alpha A_\nu^a + \gamma \varepsilon^{adf} A_\nu^d A_\alpha^f \right) \varepsilon^{abc} A_\beta^c, \\
&= 4\gamma^2 g^{\eta\nu} g^{\alpha\beta} \varepsilon^{adf} \varepsilon^{abc} A_\nu^d A_\alpha^f A_\beta^c, \\
&= 4\gamma^2 g^{\eta\nu} g^{\alpha\beta} \left( \delta^{db} \delta^{fc} - \delta^{dc} \delta^{fb} \right) A_\nu^d A_\alpha^f A_\beta^c, \\
&= 4\gamma^2 g^{\eta\nu} g^{\alpha\beta} \left( A_\nu^b A_\alpha^c A_\beta^c - A_\alpha^b A_\nu^c A_\beta^c \right).
\end{aligned} \tag{300}$$

El término de la derivada covariante de la ecuación (298) es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [(D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a)]}{\partial A_\eta^b} &= 2g^{\mu\nu} D_\mu \phi^a \frac{\partial D_\nu \phi^a}{\partial A_\eta^b}, \\
&= 2\gamma g^{\mu\eta} D_\mu \phi^a \varepsilon^{abc} \phi^c,
\end{aligned} \tag{301}$$

reemplazando con la representación unitaria del Higgs

$$\begin{aligned}
&= 2\gamma g^{\mu\eta} \left( \partial_\mu \phi^a + \gamma \varepsilon^{adf} A_\mu^d \phi^f \right) \varepsilon^{abc} \phi^c, \\
&= 2\gamma^2 g^{\mu\eta} \varepsilon^{adf} \varepsilon^{abc} A_\mu^d \phi^f \phi^c, \\
&= 2\gamma^2 g^{\mu\eta} \left( \delta^{db} \delta^{fc} - \delta^{cd} \delta^{fb} \right) A_\mu^d \phi^f \phi^c, \\
&= 2\gamma^2 g^{\mu\eta} \left( A_\mu^b \phi^c \phi^c - \phi^b A_\mu^c \phi^c \right), \\
&= 2\gamma^2 g^{\mu\eta} \left( A_\mu^b \phi^1 \phi^1 - \delta^{b1} \delta_\mu^1 \phi^1 A_1^1 \phi^1 \right)
\end{aligned} \tag{302}$$

El segundo término de la ecuación (297)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma A_\eta^b)} = - \left[ \frac{1}{4} \frac{\partial (F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial (\partial_\gamma A_\eta^b)} + \frac{1}{2} \frac{\partial (D_\mu \phi^a D^\mu \phi^a)}{\partial (\partial_\gamma A_\eta^b)} \right], \tag{303}$$

el último término de la ecuación (303)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)} &= 2g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} F_{\mu\beta}^a \frac{\partial(F_{\nu\alpha}^a)}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)}, \\
&= 2g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} F_{\mu\beta}^a (\delta_\nu^\gamma \delta_\alpha^\eta - \delta_\alpha^\gamma \delta_\nu^\eta) \delta^{ab}, \\
&= 2 \left( g^{\eta\beta} g^{\mu\gamma} F_{\mu\beta}^b - g^{\gamma\beta} g^{\mu\eta} F_{\mu\beta}^b \right), \\
&= 4g^{\eta\beta} g^{\mu\gamma} F_{\mu\beta}^b,
\end{aligned} \tag{304}$$

derivando este término respecto a las coordenadas

$$\begin{aligned}
\partial_\gamma \frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)} &= 4\partial_\gamma \left[ g^{\eta\beta} g^{\mu\gamma} F_{\mu\beta}^b \right], \\
&= 4 \left[ g^{\mu\gamma} F_{\mu\beta}^b \partial_\gamma g^{\eta\beta} + g^{\eta\beta} F_{\mu\beta}^b \partial_\gamma g^{\mu\gamma} + g^{\eta\beta} g^{\mu\gamma} \partial_\gamma F_{\mu\beta}^b \right], \\
&= 4 \left[ g^{00} F_{0\beta}^b \partial_0 g^{\eta\beta} + g^{\eta\beta} F_{0\beta}^b \partial_0 g^{00} + g^{\eta\beta} g^{00} \partial_0 F_{0\beta}^b \right], \\
&= -4 \left[ \partial_0 A_i^b \partial_0 g^{\eta i} + g^{\eta i} \partial_0^2 A_i^b \right],
\end{aligned} \tag{305}$$

en donde en las dos últimas líneas, la configuración axialmente simétrica y la métrica de Bianchi tipo I fueron reemplazadas.

El segundo término en la ecuación (303)

$$\frac{\partial(D_\mu \phi^a D^\mu \phi^a)}{\partial(\partial_\gamma A_\eta^b)} = 0. \tag{306}$$

El determinante de la métrica de Bianchi es:

$$g = \sqrt{-g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}} = e^{3\alpha} \quad (307)$$

Reemplazando las ecuaciones (300), (302), (305) y (306) en la ecuación (297)

$$\begin{aligned} -e^{3\alpha}\gamma^2 g^{\eta\nu} \left[ g^{\alpha\beta} \left( A_\nu^b A_\alpha^c A_\beta^c - A_\alpha^b A_\nu^c A_\beta^c \right) + \left( A_\nu^b \phi^1 \phi^1 - \delta^{b1} \delta_\nu^1 \phi^1 A_1^1 \phi^1 \right) \right] \\ -e^{3\alpha} \left( \partial_0 A_i^b \partial_0 g^{\eta i} + g^{\eta i} \partial_0^2 A_i^b \right) - 3\dot{\alpha} e^{3\alpha} \partial_0 A_i^b g^{\eta i} = 0, \end{aligned} \quad (308)$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 g^{\eta\nu} \left[ g^{\alpha\beta} \left( A_\nu^b A_\alpha^c A_\beta^c - A_\alpha^b A_\nu^c A_\beta^c \right) + \left( A_\nu^b (\phi)^2 - \delta^{b1} \delta_\nu^1 (\phi)^2 A_1^1 \right) \right] \\ + \partial_0 A_i^b (\partial_0 g^{\eta i} + 3\dot{\alpha} g^{\eta i}) + g^{\eta i} \partial_0^2 A_i^b = 0, \end{aligned} \quad (309)$$

la ecuación (309) depende de los índices  $\eta$  y  $b$ , para  $\eta = 1$  y  $b = 1$

$$2\gamma^2 G_1 I (G_2 J)^2 + (2\dot{G}_1 + 3\dot{\alpha} G_1) \dot{I} + G_1 \ddot{I} = 0, \quad (310)$$

para los índices  $\eta = 2$  y  $b = 2$

$$\begin{aligned} \gamma^2 G_2 [J (G_1 I)^2 + (G_2)^2 J^3 + J \phi^2] \\ + \dot{J} (2\dot{G}_2 + 3\dot{\alpha} G_2) + G_2 \ddot{J} = 0, \end{aligned} \quad (311)$$

puede ser fácilmente visto que el mismo resultado se obtiene para los índices  $\eta = b = 3$ . Para los casos  $\eta \neq b$  o  $\eta = b = 0$  toda la ecuación se anula, como es esperado.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo de Higgs son

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi^b} - \partial_\gamma \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)} = 0, \quad (312)$$

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi^b} - \partial_\gamma(\sqrt{-g}) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)} - \sqrt{-g}\partial_\gamma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\phi^b)} = 0, \quad (313)$$

tomando el primer término de la ecuación (313)

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\mathcal{L})}{\partial A_\eta^b} = -\sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial(D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a)}{\partial\phi^b} + V(\phi) \right], \quad (314)$$

el primer término de la anterior ecuación es (314):

$$\frac{\partial(D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a)}{\partial\phi^b} = 2g^{\mu\nu} D_\mu\phi^a \frac{\partial D_\nu\phi^a}{\partial\phi^b}, \quad (315)$$

$$= 2\gamma g^{\mu\nu} D_\mu\phi^a \varepsilon^{adc} \delta^{cd} A_\nu^d, \quad (316)$$

$$= 2\gamma g^{\mu\nu} \left( \partial_\mu\phi^a + \gamma \varepsilon^{afe} A_\mu^f \phi^e \right) \varepsilon^{adb} A_\nu^d, \quad (317)$$

$$= \gamma^2 g^{\mu\nu} \varepsilon^{afe} \varepsilon^{adb} A_\mu^f A_\nu^d \phi^e, \quad (318)$$

$$= 2\gamma^2 g^{\mu\nu} \left( \delta^{fd} \delta^{eb} - \delta^{fb} \delta^{ed} \right) A_\mu^f A_\nu^d \phi^e, \quad (319)$$

$$= 2\gamma^2 g^{\mu\nu} \left( A_\mu^d A_\nu^d \phi^b - A_\mu^b A_\nu^d \phi^d \right), \quad (320)$$

en donde en las tres últimas líneas se usó el hecho de que el Higgs solo depende del tiempo, la métrica es diagonal y la tríada cósmica tiene la componente temporal nula, es decir,  $A_0^a = 0$ .

El segundo término de la ecuación (314)

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi^b} = \frac{\lambda}{4} \frac{\partial (\phi^2 - \phi_0^2)^2}{\partial \phi^b}, \quad (321)$$

$$= \lambda (\phi^2 - \phi_0^2) \phi^b \quad (322)$$

Solamente la contracción entre las derivadas covariantes depende del campo de Higgs, entonces

$$\frac{\partial (\mathcal{L})}{\partial (\partial_\gamma \phi^b)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (D_\mu \phi^a D^\mu \phi^a)}{\partial (\partial_\gamma \phi^b)}, \quad (323)$$

$$= -g^{\mu\nu} D_\mu \phi^a \frac{\partial D^\mu \phi^a}{\partial (\partial_\gamma \phi^b)}, \quad (324)$$

$$= -g^{\mu\nu} D_\mu \phi^a \delta^{ab} \delta_\nu^\gamma, \quad (325)$$

$$= -g^{\mu\gamma} D_\mu \phi^b, \quad (326)$$

derivando la anterior expresión

$$\partial_\gamma \frac{\partial (\mathcal{L})}{\partial (\partial_\gamma \phi^b)} = -\partial_\gamma (g^{\mu\gamma} D_\mu \phi^b), \quad (327)$$

$$= -g^{00} \partial_0 D_0 \phi^b, \quad (328)$$

$$= \ddot{\phi}^b. \quad (329)$$

Tomando las ecuaciones (320), (322), (326) y (329) y reemplazandolas en la ecuación (313)

$$-e^{3\alpha} \left[ \gamma^2 g^{\mu\nu} (A_\mu^d A_\nu^d \phi^b - A_\mu^b A_\nu^d \phi^d) + \lambda \left( \phi^2 - \frac{V}{2} \right) \phi^b \right] - e^{3\alpha} \ddot{\phi}^b - 3\dot{\alpha} e^{3\alpha} \dot{\phi}^b = 0, \quad (330)$$

$$\gamma^2 g^{\mu\nu} (A_\mu^d A_\nu^d \phi^b - A_\mu^b A_\nu^d \phi^d) + \lambda \left( \phi^2 - \frac{V}{2} \right) \phi^b + \ddot{\phi}^b + 3\dot{\alpha} \dot{\phi}^b = 0, \quad (331)$$

para  $b = 1$

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}\dot{\phi} + \left[ 2\gamma^2 G_2^2 J^2 + \lambda \left( \phi^2 - \frac{V}{2} \right) \right] \phi = 0, \quad (332)$$

la ecuación 331 se anula completamente para  $b \neq 1$ .

**Apéndice G. Masa de los campos en el modelo SO(3)**

El lagrangiano para el modelo EYMH SO(3) es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(G_1\dot{I})^2 + (G_2\dot{J})^2 - \frac{1}{2}\gamma^2(G_2J)^2(2(G_1I)^2 + (G_2J)^2) \\ & + \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \gamma^2\phi^2G_2^2J^2 - V(\phi) + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_m, \end{aligned} \quad (333)$$

los términos del lagrangiano que cuentan con potencias cuadradas de los campos de Higgs y de gauge son

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{2}\gamma^2(G_2J)^2(2G_1^2I^2 + G_2^2J^2) - \gamma^2\phi^2G_2^2J^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \phi_0^2)^2, \quad (334)$$

Se definen unos campos de manera que su origen esté en los valores actuales de los campos

$$j \equiv J - J_0, \quad i \equiv I - I_0, \quad h \equiv \phi - \phi_s, \quad (335)$$

y se reemplazan en el lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & -\frac{1}{2}\gamma^2(G_{20}(J_0 + j))^2 \left( 2G_{10}^2(I_0 + i)^2 + G_{20}^2(J_0 + j)^2 \right) \\ & - \gamma^2(\phi_s + h)^2 G_{02}^2(J_0 + j)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi_s^2 + 2\phi_s h + h^2 - \phi_0^2)^2, \end{aligned} \quad (336)$$

el resultado de expandir estos términos y tomar aquellos que sean potencias al cuadradas de los

campos es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & -\frac{\lambda}{2}\phi_s^2 h^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2 h^2 - \gamma^2 G_1^2 G_2^2 I_0^2 j^2 - \gamma^2 G_2^2 J_0^2 h^2 \\ & - \gamma^2 G_1^2 G_2^2 J_0^2 i^2 - 3\gamma^2 G_2^4 j^2 J_0^2 - \gamma^2 G_2^2 j^2 \phi_s^2, \end{aligned} \quad (337)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & -h^2 \left( \frac{\lambda}{2}\phi_s^2 - \frac{\lambda}{2}\phi_0^2 + \gamma^2 G_2^2 J_0^2 \right) \\ & - j^2 \left( \gamma^2 G_1^2 G_2^2 I_0^2 + \gamma^2 3G_2^4 J_0^2 + \gamma^2 G_2^2 \phi_s^2 \right) \\ & - i^2 \gamma^2 G_1^2 G_2^2 J_0^2, \end{aligned} \quad (338)$$

de manera que la masa de los campos para cada uno de ellos es

$$m_\phi \propto \sqrt{\phi_s^2 - \phi_0^2 + \frac{4G_2^2 J_0^2}{\mu}}, \quad (339)$$

$$m_J \propto \gamma \sqrt{I_0^2 G_1^2 G_2^2 + 3G_2^4 J_0^2 + G_2^2 \phi_s^2}, \quad (340)$$

$$m_I \propto \gamma J_0 G_1 G_2. \quad (341)$$