

**DISEÑO DE MATRICES DE SENSADO EN
COMPRESIÓN DE IMÁGENES ESPECTRALES
USANDO ANÁLISIS DE COMPONENTES
PRINCIPALES**

JONATHAN ARLEY MONSALVE SALAZAR

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
BUCARAMANGA
2018

DISEÑO DE MATRICES DE SENSADO EN COMPRESIÓN DE IMÁGENES ESPECTRALES USANDO ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

JONATHAN ARLEY MONSALVE SALAZAR

Trabajo de investigación para optar por el título de:
Magister en Ingeniería de Sistemas e Informática

Director:

Ph.D., HENRY ARGUELLO FUENTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
BUCARAMANGA
2018

Índice general

| | |
|---|-----------|
| INTRODUCCIÓN | 11 |
| 1 MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE | 14 |
| 1.1 IMÁGENES ESPECTRALES | 14 |
| 1.1.1 Espectroscopía | 14 |
| 1.1.2 Métodos de adquisición de imágenes espectrales | 14 |
| 1.2 MUESTREO COMPRESIVO | 16 |
| 1.2.1 Adquisición compresiva de imágenes espectrales | 16 |
| 1.2.2 Escasez | 17 |
| 1.2.3 Matriz de muestreo | 18 |
| 1.3 ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES EN IMÁGENES ESPECTRALES | 20 |
| 2 PROPUESTA | 22 |
| 2.1 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN | 22 |
| 2.2 HIPÓTESIS | 22 |
| 2.3 OBJETIVO GENERAL | 22 |
| 3 DISEÑO DE LAS MATRICES DE MUESTREO | 24 |
| 4 ESTIMACIÓN DE LA MATRIZ DE COVARIANZA | 27 |
| 4.1 ANÁLISIS DE LA PROPIEDAD DE ISOMETRÍA RESTRICTIVA | 30 |
| 5 APLICACIÓN EN ARQUITECTURAS CSI REALES | 33 |
| 5.1 DD-CASSI | 33 |
| 5.2 SSCI | 36 |
| 6 RESULTADOS Y SIMULACIONES | 39 |
| 6.1 IMAGEN ESPECTRAL URBAN | 39 |
| 6.2 IMAGEN ESPECTRAL STANFORD LANDSCAPE | 43 |
| 7 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO | 47 |
| 7.1 CONCLUSIONES | 47 |
| 7.2 TRABAJO FUTURO | 47 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 1.1 Esquema de un espectrómetro | 15 |
| 1.2 Esquema de espectrómetro de escaneo por línea espacial | 15 |
| 1.3 Representación escaza en el dominio de una base kronecker | 18 |
| 1.4 Componentes principales | 21 |
| 5.1 Arquitectura DD-CASSI | 34 |
| 5.2 Proceso de adquisición en DD-CASSI | 34 |
| 5.3 Diseño de un número limitado de patrones | 35 |
| 5.4 Comparación de matrices de muestreo en DD-CASSI | 36 |
| 5.5 Representación esquemática de la arquitectura SSCSI | 37 |
| 5.6 Representación de la codificación producida en SSCSI | 37 |
| 5.7 Comparación de patrones factibles y no factibles para SSCSI | 38 |
| 6.1 Imagen urban | 40 |
| 6.2 Comparación de firmas espectrales - Urban | 41 |
| 6.3 Comparación del PSNR en las reconstrucciones con diferentes arquitecturas | 42 |
| 6.4 Comparación visual imagen Urban | 43 |
| 6.5 Imagen de Stanford | 44 |
| 6.6 Comparación de firmas espectrales - Stanford landscape | 45 |
| 6.7 Comparación del PSNR en las reconstrucciones con diferentes arquitecturas - Stanford landscape | 46 |

Índice de Tablas

| | | |
|-----|---|----|
| 6.1 | Desempeño de la reconstrucción usando como métrica PSNR y MSE . . . | 40 |
| 6.2 | Desempeño de la reconstrucción usando como métrica PSNR y MSE . . . | 43 |

Resumen

TITULO: DISEÑO DE MATRICES DE SENSADO EN COMPRESIÓN DE IMÁGENES ESPECTRALES USANDO ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES¹

AUTOR: JONATHAN ARLEY MONSALVE SALAZAR ²

PALABRAS CLAVE: Análisis de componentes principales, muestreo compresivo, componentes principales binarios.

La técnica de adquisición compresiva de imágenes espectrales (CSI, *compressive spectral imaging*) aprovecha los principios de la teoría de muestreo compresivo (CS, *Compressive sensing*) en la adquisición de imágenes espectrales tal que permite reconstruir una señal usando una cantidad reducida de medidas en comparación con técnicas tradicionales. Una característica importante en CSI es el protocolo de muestreo, por esta razón, su diseño es abordado en este trabajo. La coherencia y la propiedad de isometría restrictiva han sido estudiadas con el fin de producir matrices de muestreo universales, esto quiere decir, sin tener en cuenta los datos adquiridos para guiar el proceso. Por otro lado, el uso de mediciones adaptativas puede mejorar los resultados de reconstrucción, dado que estos toman ventaja de la información en la escena para guiar el proceso de adquisición. Por otra parte, el análisis de componentes principales (PCA, *Principal Component analysis*) se ha usado satisfactoriamente en problemas de reducción dimensional, por lo tanto, se puede usar esta técnica para diseñar las medidas adaptativas dado que CSI incluye un proceso de reducción dimensional. Por esto, se propone un algoritmo para diseñar las matrices de muestreo de algunos sistemas CSI usando PCA, con el objetivo de reducir el error cuadrático medio entre las medidas y los datos reales. Para realizar el diseño adaptativo de las matrices, los vectores propios son estimados directamente de las medidas comprimidas. Simulaciones computacionales muestran una mejora de hasta 4 dB en PSNR (*peak signal to noise ratio*) comparado con reconstrucciones obtenidas a partir de medidas aleatorias.

¹Trabajo de Investigación

²Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática. Director, Henry Arguello.

Abstract

TITLE: SENSING MATRIX DESIGN IN COMPRESSIVE SPECTRAL IMAGING USING PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS ¹

AUTHOR: JONATHAN ARLEY MONSALVE SALAZAR ²

KEYWORDS: Compressive spectral imaging, coded aperture design, principal component analysis, adaptive sampling.

Compressive spectral imaging (CSI) is a framework that takes advantage of the compressive sensing (CS) theory in the acquisition of spectral images allowing to recover a signal by using far fewer measurements than those required by traditional methods based on Nyquist theorem. The sensing protocol is a key feature in CSI, thus, its design is addressed in this work. Coherence and the restricted isometry property have been widely studied in order to produce universal sensing matrices without knowledge of the data. Further, the use of adaptive measurements can improve the reconstruction results since they take advantage of the information in the scene to guide the sensing process. Moreover, principal component analysis (PCA) has been successfully used in dimensionality reduction tasks; therefore it can be used to design the adaptive measurements since CSI includes a dimensionality reduction process. We propose an algorithm to design the sensing matrices of some CSI systems by using PCA, in order to reduce the mean square error between the measurements and the ground truth. In particular, eigenvectors are estimated directly from the compressive measurements allowing to design the sensing matrix adaptively. Several simulations show an improvement of up to 4 dB PSNR compared with reconstruction obtained from random measurements.

¹Research Work

²Department of Systems Engineering and Informatics. Advisor, Ph.D. Henry Arguello Fuentes.

INTRODUCCIÓN

La técnica de adquisición compresiva de imágenes espectrales (CSI) realiza la adquisición de una imagen espectral mediante proyecciones bi-dimensionales codificadas, tal que, el número de medidas necesarias para una reconstrucción son menores que las requeridas por técnicas tradicionales basadas en el teorema de Nyquist-Shannon. CSI aprovecha el hecho de que las escenas naturales pueden ser representadas de manera precisa en un subespacio de menor dimensión. Este concepto se conoce comúnmente como escasez, o bajo rango [3, 8, 16, 20]. Para garantizar una reconstrucción precisa, el operador lineal usado para adquirir los datos comprimidos debe ser incoherente con la base de representación donde dichos datos se expresan de manera escasa. Esto garantiza alta probabilidad de obtener una reconstrucción precisa, dado que una matriz incoherente tiene una representación densa en el dominio de la base, por esto, no es necesario suponer características específicas en los datos.

Por otro lado, si se conoce información a-priori de los datos, el protocolo de muestreo se puede diseñar de tal forma que solo los coeficientes más relevantes sean tenidos en cuenta. Por consiguiente, con base en en la teoría de muestreo compresivo, donde la escasez es un requisito, el problema consiste en muestrear las zonas donde están ubicados los coeficientes más relevantes[30]. Sin embargo, en CSI, usualmente no se tiene conocimiento alguno sobre la señal, por esto, el protocolo de muestreo se debe diseñar durante el proceso de adquisición, esto se conoce como muestreo adaptativo. El procedimiento de captura de datos en CSI se puede modelar matemáticamente como $y = \mathbf{H}f + e$, donde \mathbf{H} es una matriz de muestreo, f es una imagen en forma vectorial y e es ruido aditivo. Esta formulación se puede ver como una tarea de reducción dimensional donde el principal objetivo es mantener la estructura de los datos. La propiedad de isometría restrictiva (RIP, *Restricted isometry property*) describe que tan ortonormal es un sistema, en combinaciones lineales escasas [11] mediante la búsqueda de la constante $\delta_s \in (0, 1)$ más pequeña, tal que, para una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, y para cualquier vector s -escaso $x \in \mathbb{R}^n$, la desigualdad $(1 - \delta_s)\|x\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}x\|_2^2 \leq (1 + \delta_s)\|x\|_2^2$ se cumple, con $\|\cdot\|_2$ representa la norma $l - 2$. Esta propiedad ha sido estudiada a profundidad para di-

señar matrices de muestreo en CSI[3, 9]. Es importante aclarar, sin embargo, que la RIP no tiene en cuenta información de la señal de interés dado que la constante δ_s considera el peor caso de ortogonalidad. Por otra parte, En un sistema adaptativo se puede diseñar la matriz A de tal manera que dicha constante sea menor para una realización específica de la señal x .

El análisis de componentes principales (PCA) es una técnica usada para reducción dimensional mediante la proyección de los datos en un subespacio formado por los vectores propios de la señal, tal que, la mayor parte de la varianza en la imagen se conserve[20, 35, 39]. PCA usa los m vectores propios asociados con los mayores eigenvalores de la matriz de covarianza de la señal f_i como proyector lineal. Así, una matriz $W \in \mathbb{R}^{l \times m}$ con m vectores propios es usada para transformar los datos por medio de $\tilde{f}_i = W^T f_i$, con $\tilde{f}_i \in \mathbb{R}^m$ y $f_i \in \mathbb{R}^l$ para $i = 0, 1, \dots, n^2$, con n^2 el número de píxeles, y $m < l$. El uso de PCA en muestreo compresivo, para mejorar la calidad de reconstrucción, ha sido estudiado previamente. Masiero et al.[32] usa PCA para escoger la mejor base de representación en el proceso de reconstrucción. Ke et al. usa PCA para diseñar las matrices de muestreo en adquisición de imágenes con bajos niveles de luz (L^3 -imaging)[27] y en adquisición de imágenes de característica específica[26]. No obstante, a pesar que en [26] el diseño se hace de manera adaptativa, dicha matriz no es binaria, lo cual es un requerimiento en arquitecturas ópticas como SSCSI[29] o DD-CASSI[22]. Por otro lado, en [27] los autores diseñan matrices binarias solucionando un problema de optimización que minimice el error entre la matriz de vectores propios y una matriz binaria. Sin embargo, esto se realiza para imágenes L^3 y solucionan un problema de optimización basado en la norma Frobenius que minimice el error entre una matriz y ella misma afectada por el operador *sign* lo cual impone una restricción binaria.

En este trabajo, se propone el diseño de las matrices de muestreo para la adquisición compresiva de imágenes espectrales usando la técnica PCA. El protocolo de muestreo y de reconstrucción se divide en 3 pasos: primero un conjunto de medidas aleatorias se capturan para estimar los componentes principales; después, la matriz de muestreo usada posteriormente se diseña resolviendo un problema de optimización no convexo que maximiza la varianza de los datos en el subespacio formado por las matrices binarias; finalmente la imagen espectral se reconstruye usando las matrices aleatorias y diseñadas. El resto de este documento está organizado de la siguiente manera: El marco teórico se presenta en el capítulo 1. Los objetivos y pregunta de investigación se presentan en el capítulo 2. El capítulo 3 describe el

algoritmo para el diseño de las matrices de muestreo usando PCA. En el capítulo 4 se explica el proceso de estimación de la matriz de covarianza a partir de las medias comprimidas. Los resultados obtenidos se presentan en el capítulo 6, y el capítulo 7 presenta las conclusiones.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE

1.1. IMÁGENES ESPECTRALES

Un espectrómetro mide la intensidad lumínica de las ondas de la luz como la respuesta de un objeto ante la absorción o emisión de radiación electromagnética en ciertas longitudes de onda. Estas respuestas forman firmas espectrales que al ser concatenadas producen una imagen en 3 dimensiones, conocida como imagen espectral, la cual tiene dimensión espacial $N \times N$ y L bandas espectrales. Esto propicia el uso de este tipo de imágenes en aplicaciones que involucran detección y clasificación, basándose en las características espectrales. Entre las aplicaciones donde son ampliamente utilizadas se incluyen: agricultura[24], medio ambiente[38], farmacología[23].

1.1.1 Espectroscopía Esencialmente la técnica de espectroscopía consiste en el estudio de la interacción de la luz con un material, con el fin de analizar sus características. Esto es posible debido a que en la interacción entre la materia y la luz, hay intercambios de energía lo cual usualmente provee información del material. Más importante, estos cambios energéticos son únicos para cada material posibilitando su identificación.

La figura 1.1 muestra la estructura de un espectrómetro básico que consta de una fuente de luz que irradia un objeto, la luz reflejada se hace pasar por un prisma que la descompone en sus diferentes longitudes de onda, para finalmente ser medidos con un detector.

1.1.2 Métodos de adquisición de imágenes espectrales Dado que una imagen espectral es un arreglo tridimensional de imágenes de dos dimensiones, no se puede adquirir en una sola captura puesto que los detectores son arreglos de 2 dimensiones. Por esto, existen diversos métodos de adquisición, todos basados en adquirir secciones de 2 dimensiones de forma secuencial. En algunas cámaras

Esquema de un espectrómetro

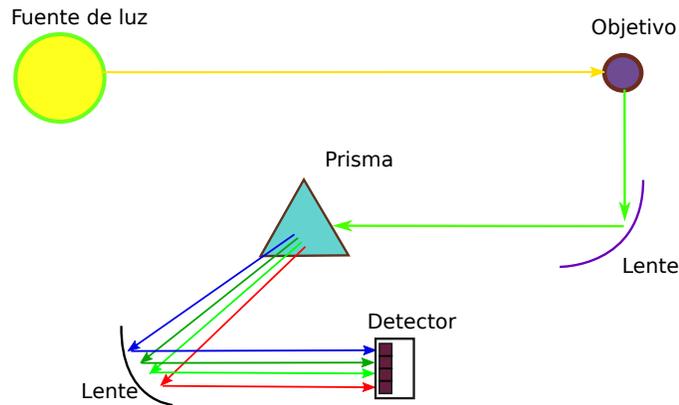


Figura 1.1: Un espectrómetro consta usualmente de una fuente de luz, lentes, un elemento dispersivo como un prisma y un detector

espectrales, se descompone una línea espacial de la escena en sus longitudes de onda, esto genera una imagen que es capturada por un sensor[34]. Este proceso es repetido para todas las líneas espaciales de la escena, como se ilustra en la figura 1.2(a), el fenómeno que ocurre en el sensor es ilustrado en la figura 1.2(b). Otra técnica consiste en la utilización de filtros que solo permiten el paso de la información en un rango de longitudes de onda; posteriormente, las bandas espectrales restantes son adquiridas utilizando el filtro correspondiente para cada una[21].

Esquema de espectrómetro de escaneo por línea espacial

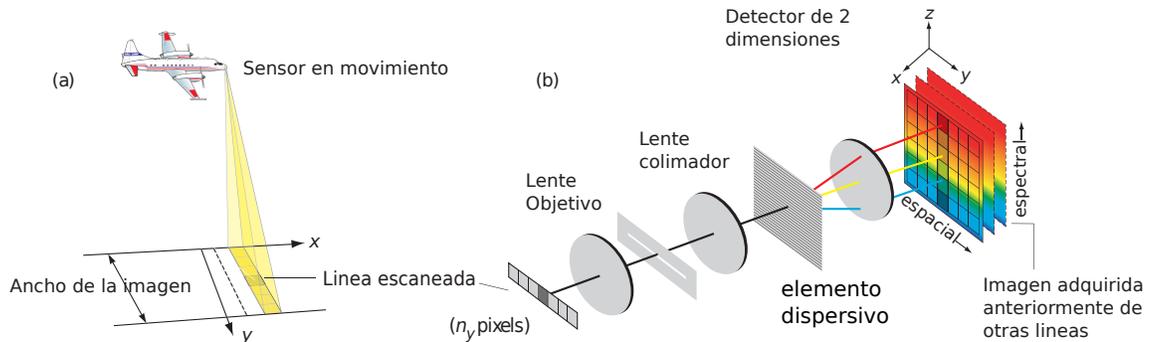


Figura 1.2: Este tipo de espectrómetros hacen un barrido sobre la zona de interés capturando líneas espaciales y concatenándolas para formar una imagen

En todos estos métodos los tiempos de adquisición son elevados debido a las limitaciones de los dispositivos de medición, que deben adquirir una sección cada vez, y a que se deben exponer un determinado tiempo a la radiación proveniente del

objeto para que así la medición, que consiste en la cantidad de fotones que ingresan, sea suficiente. Adicionalmente, la cantidad de información crece proporcionalmente con la resolución de la imagen, dificultando la manipulación de los datos.

1.2. MUESTREO COMPRESIVO

Tradicionalmente, una señal debe ser adquirida con base en el teorema de Nyquist/Shannon, el cual establece que una señal debe ser muestreada como mínimo al doble de su frecuencia máxima si se quiere que ésta sea estimada de manera exacta[33, 36]. Sin embargo, en muchas aplicaciones esto puede ser excesivo. Por otro lado E.J. Candes[12, 16] ha introducido un nuevo concepto llamado muestreo compresivo (CS), con el cual se puede adquirir una señal con muchas menos medidas que las requeridas por las técnicas tradicionales [8, 12]. Este concepto es aplicado en la adquisición de muchas señales de manera que se comprime y adquiere la señal al mismo tiempo, es decir que se reduce la cantidad de información que se debe transmitir, almacenar o procesar.

1.2.1 Adquisición compresiva de imágenes espectrales La teoría de CS establece que a partir de un conjunto de mediciones $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ de una señal $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^l$, tal que $m < l$, se puede estimar la señal de interés de manera precisa. Matemáticamente el problema se expresa como

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{e}, \quad (1.1)$$

donde \mathbf{e} representa ruido aditivo, y $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz de muestreo. La adquisición compresiva de imágenes espectrales (CSI) por su parte, es una técnica que implementa la teoría de CS en la adquisición de imágenes espectrales[1, 2, 4], en este caso \mathbf{f} representa a la imagen de interés, de la cual se capturan proyecciones bidimensionales. Esto permite un proceso de muestreo más veloz ya que no se requiere un escaneo lineal de la información como los espectrómetros tradicionales, por ejemplo el mostrado en la Fig. 1.2. Las metodologías que implementan esta técnica se pueden dividir en tres categorías, *i*) cámaras basadas en codificación espacial tal como la cámara espectral basada en aperturas codificadas (*Coded aperture snapshot Spectral imager*, CASSI)[1], *ii*) cámaras basadas en codificación espectral, como por ejemplo la cámara espectral compresiva de codi-

ficación espacio-espectral, (*Spatio-spectral encoded Compressive Spectral Imager*, SSCSI)[29] o la arquitectura CASSI de color [5], y *iii*) los enfoques teóricos para comprimir imágenes espectrales HYCA (*Hyperspectral coded aperture*)[31] o la proyección compresiva de análisis de componentes principales(CPPCA)[20].

En el desarrollo de esta propuesta se utilizarán algunos conceptos de la arquitectura CPPCA dadas las ventajas que ofrece, como por ejemplo estimar de manera rápida la señal. El problema de muestreo en CPPCA a diferencia de la Ec. 1.1 se expresa en forma matricial como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}^T \mathbf{F}, \quad (1.2)$$

donde \mathbf{Q} es una matriz de muestreo aleatoria y $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n]$ es el cubo de datos o imagen espectral ordenada de forma matricial, tal que cada columna $\mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^l$ es un píxel de la imagen. En este caso la matriz \mathbf{Q} debe ser ortonormal, esto quiere decir que $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Teniendo en cuenta esta restricción, CPPCA recupera algunos de los componentes principales, así como los coeficientes PCA directamente de las medidas. Lo cual puede ser usado como estrategia para extraer la información necesaria para el diseño de las matrices de muestreo. La diferencia entre la formulación en la ecuación 1.2 y la ecuación tradicional de CS descrita en la ecuación 1.1 yace en que en la última, la señal de interés está en forma vectorial lo cual no permite realizar análisis como la extracción de componentes principales pues la estructura matricial se pierde. Por otro lado la formulación en 1.2 es difícil de implementar en un aparato de medición real, si no se diseña adecuadamente la matriz \mathbf{Q} y se utilizan conceptos de álgebra lineal como la descomposición en valores singulares para convertirla en ortonormal, por lo cual los aportes desde este punto de vista podrían ser meramente teóricos. Sin embargo, se puede diseñar la matriz \mathbf{H} de tal forma que pueda modelar un comportamiento similar al descrito en la Ec. 1.2.

1.2.2 Escasez CSI supone que la señal es escasa en algún dominio, en términos matemáticos, una señal $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{nl}$ se dice que es s -escasa o se puede aproximar por una señal s -escasa en la base de representación $\Psi \in \mathbb{R}^{nl \times nl}$ si todos excepto s coeficientes de $\boldsymbol{\theta} = \Psi \mathbf{f}$ son diferentes de cero. Este concepto se expresa matemáticamente como

$$\mathbf{f} = \Psi_s^T \boldsymbol{\theta}_s, \quad s = \{i \in [1, 2, \dots, nl] | \theta_i \neq 0\}, \quad (1.3)$$

donde T representa la transpuesta, y $\Psi_s \in \mathbb{R}^{nl \times s}$ contiene únicamente los s átomos correspondientes a los coeficientes de θ que son diferentes de cero. Tradicionalmente, en datos espectrales se usa una base de representación de la forma $\Psi = (\Psi_{2D} \otimes \Psi_{1D})$, con Ψ_{2D} una base de representación 2-D, usualmente wavelet, Ψ_{1D} una base 1-D usualmente coseno y \otimes representa el producto Kronecker [1, 3]. La figura 1.3 muestra los coeficientes de una imagen espectral en el dominio transformado en comparación con la imagen en el dominio original, Es posible notar que la representación de la imagen en la base Ψ presenta una gran cantidad de valores cercanos a cero.

Representación escasa en el dominio de una base Kronecker

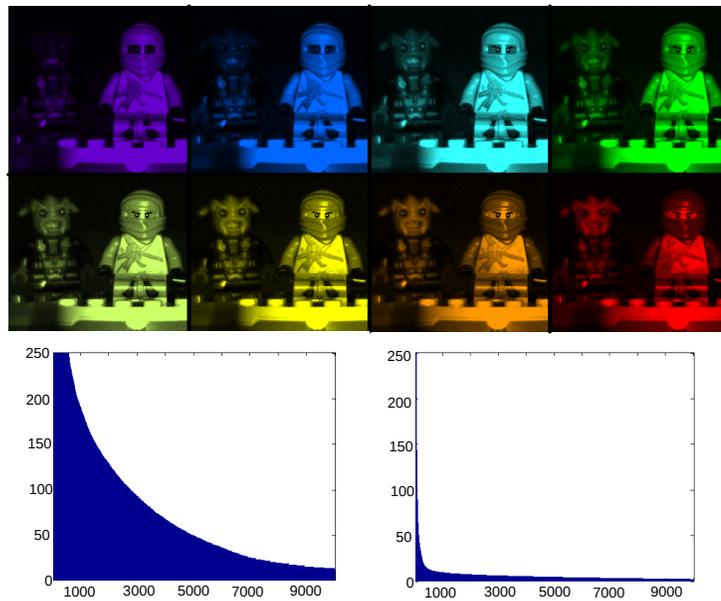


Figura 1.3: Comparación entre la magnitud de los coeficientes de una imagen sin transformar (izquierda) y la imagen transformada en el dominio Wavelet (derecha) estas gráficas resultan de ordenar el valor absoluto de los coeficientes de la señal con el fin de analizar cómo y en cuántos coeficientes se distribuye la energía de la señal [18].

1.2.3 Matriz de muestreo Reconstruir la señal f de la ecuación 1.1 es un problema con infinitas soluciones, dado que es un sistema de ecuaciones lineales cuyo número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. Sin embargo, al usar una base Ψ donde f es escasa, es posible escribir el problema como

$$y = Hf = H\Psi^T \theta = A\theta, \quad (1.4)$$

donde \mathbf{H} es la matriz de muestreo. En este caso θ es un vector escaso, lo que quiere decir que $\|\theta\|_0 \ll nl$, donde $\|\cdot\|_0$ representa la normal l_0 . Dado que al multiplicar \mathbf{H} con Ψ el rango de la matriz resultante es el mismo que el de \mathbf{H} , la matriz de transformación resultante no es cuadrada y por esto hay que asegurarse de que los átomos en Ψ correspondientes a los coeficientes diferentes de cero en θ se mantengan[10]. Esto quiere decir que dada una señal \mathbf{f} que se puede representar de forma escasa como la combinación lineal de algunos átomos de Ψ como

$$\mathbf{f} = \theta_1 \psi_1 + \theta_2 \psi_2 + \dots + \theta_s \psi_s, \quad (1.5)$$

donde ψ_i son columnas de Ψ . Se debe garantizar que la operación $\mathbf{A} = \mathbf{H}\Psi$ preserve dichos átomos, de otra manera se estarían muestreando regiones sin información relevante. Una forma de asegurarse de que no solo se muestreen zonas con ceros es el uso de la incoherencia (la cual se explicará más adelante), ya que esto garantiza que toda la región sea muestreada casi uniformemente. Sin embargo, \mathbf{H} también se puede diseñar de manera que la matriz \mathbf{A} contenga solo los átomos ψ necesarios. Usualmente una sola captura de la imagen no es suficiente para cumplir estos requerimientos, por lo que a menudo se hacen varias adquisiciones variando \mathbf{H} , esto mejora las propiedades de invertibilidad de \mathbf{A} . Una forma de encontrar la mejor matriz \mathbf{H} es demostrar que son cercanamente ortogonales en combinaciones escasas, a través de la propiedad de isometría restrictiva (RIP)[3] definida como

$$(1 - \delta_s) \leq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \leq (1 + \delta_s), \quad (1.6)$$

la cual se debe cumplir para cualquier vector con escasez s , para la menor constante $\delta_s \in (0, 1)$, dada la naturaleza teórica de la RIP otra métrica conocida como incoherencia es usada[17] para describir la calidad de la matriz de muestreo, ya que es más sencilla de calcular. Para ello se busca el valor más pequeño de coherencia entre la matriz de muestreo y la base de representación, la coherencia se calcula mediante la fórmula

$$\mu(\mathbf{H}, \Psi) = \max_{1 \leq i, j \leq N} |\langle \mathbf{h}_i, \psi_j \rangle|, \quad (1.7)$$

donde $\mu(\mathbf{H}, \Psi)$ es la coherencia entre las columnas de la matriz \mathbf{H} y la matriz Ψ , \mathbf{h}_i es una columna de \mathbf{H} y ψ_j es una columna de Ψ [8]. Esta característica mide la capacidad de la matriz de muestreo de adquirir uniformemente los coeficientes

escasos de la señal; una coherencia alta implica que se muestrean más ciertas zonas y otras quedan sin ser capturadas, dando la posibilidad de que en dichas zonas sin muestrear estén algunos coeficientes importantes.

1.3. ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES EN IMÁGENES ESPECTRALES

Las imágenes espectrales representan un gran reto a la hora de ser analizadas debido a sus grandes dimensiones, por lo cual existe una necesidad de reducir su tamaño. Para ello se deben aplicar técnicas de reducción dimensional sin perder la información relevante. Existe una variedad de métodos para hacer esto, entre las que se encuentran análisis de componentes principales[14], análisis de componentes independientes[25], transformada discreta wavelet[7]. Todos estos métodos proyectan los datos en un sub-espacio de menor dimensión conservando la mayor cantidad de información.

La técnica de análisis de componentes principales (PCA, *principal component analysis*) es muy usada en reducción dimensional y tareas de clasificación[14, 15]. En esta técnica los componentes o vectores en la dirección de máxima variabilidad son estimados y se conocen como componentes principales o vectores propios, este concepto se muestra en la figura 1.4.

Dada una imagen espectral ésta puede ser re-ordenada de tal forma que cada columna represente un píxel, y las filas correspondan a las bandas espectrales tal que

$$\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n], \quad (1.8)$$

donde $\mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^l$ representa cada píxel de la imagen. Para calcular la base de los vectores propios, primero se debe restar la media de los datos, la media se puede aproximar mediante la fórmula

$$\mathbf{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i. \quad (1.9)$$

Por otra parte, La matriz de covarianza está definida como $cov(\mathbf{f}) = \mathbb{E}\{(\mathbf{f} - \mathbb{E}\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - \mathbb{E}\{\mathbf{f}\})^T\}$, donde \mathbb{E} representa el operador valor esperado, dicha matriz puede ser

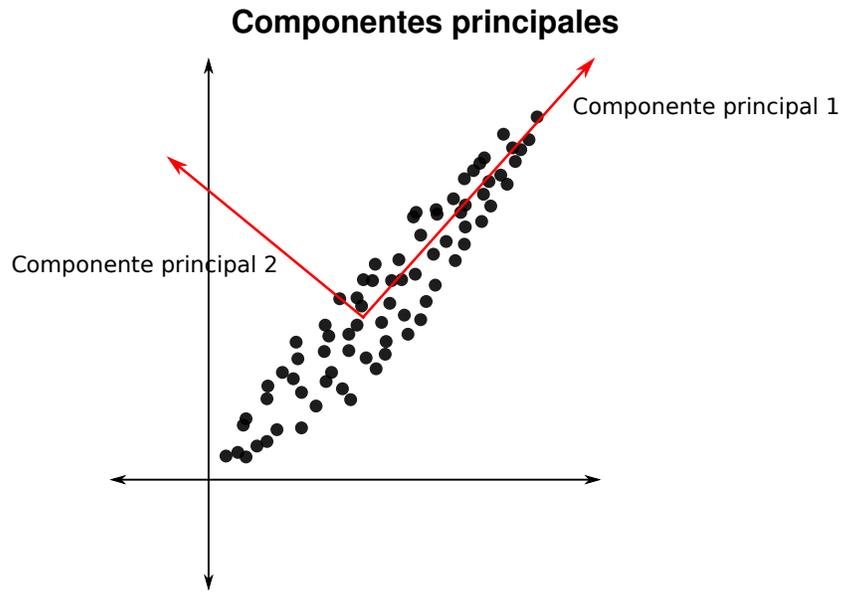


Figura 1.4: Representación esquemática del concepto de componentes principales, cada componente señala en la dirección de mayor variabilidad de los datos.

aproximada mediante

$$\Sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{f}_i - \mathbf{m})(\mathbf{f}_i - \mathbf{m})^T. \quad (1.10)$$

Una vez calculada la matriz de covarianza muestral se procede a realizar el cálculo de la descomposición de valores propios, el cual tiene la forma

$$\Sigma = \mathbf{W}\Lambda\mathbf{W}^T, \quad (1.11)$$

donde \mathbf{W} es la matriz con los vectores propios y Λ es una matriz diagonal con los valores propios. La transformación lineal de análisis de componentes principales se realiza sobre la matriz con media reajustada a cero dada por

$$\mathbf{G} = [\mathbf{f}_1 - \mathbf{m}, \mathbf{f}_2 - \mathbf{m}, \dots, \mathbf{f}_{N^2} - \mathbf{m}] \quad (1.12)$$

tal que

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{W}^T \mathbf{G}. \quad (1.13)$$

De esta forma la primera banda de la imagen transformada $\tilde{\mathbf{G}}$ contiene la mayor varianza y las últimas la menor. Por lo tanto, usar las primeras K bandas de $\tilde{\mathbf{G}}$ es suficiente para representar de manera precisa la imagen.

Capítulo 2

PROPUESTA

2.1. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Es posible diseñar matrices de muestreo de un sistema de adquisición compresiva de imágenes espectrales mediante la técnica de análisis de componentes principales?

2.2. HIPÓTESIS

El uso de la técnica de análisis de componentes principales permitirá diseñar la matriz de muestreo de tal manera que se capture la información relevante de la señal con el fin de obtener reconstrucciones mejoradas.

2.3. OBJETIVO GENERAL

Diseñar la matriz de muestreo de un sistema compresivo de imágenes espectrales con base en la técnica de análisis de componentes principales.

Objetivos específicos

- Determinar el modelo de muestreo matricial de las arquitecturas de muestreo compresivo espectral que admiten una representación matricial.
- Diseñar las matrices de muestreo espectral para aumentar la calidad de las imágenes reconstruidas mediante la estimación de los componentes principales de los datos bajo análisis.
- Desarrollar los algoritmos para la reconstrucción de imágenes espectrales a partir de las medidas compresivas y la estimación de los componentes principales.

-
- Verificar el desempeño de las matrices diseñadas comparándolas con sistemas de compresión de imágenes basadas en matrices aleatorias.

Capítulo 3

DISEÑO DE LAS MATRICES DE MUESTREO

Sea $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n]$ una imagen espectral, donde cada $\mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^l$ es un píxel (un vector con información a lo largo del espectro en una determinada posición espacial). PCA proyecta los datos en un subespacio formado por los vectores propios, tal que para un determinado píxel \mathbf{f}_i la transformación es realizada por medio de $\tilde{\mathbf{f}}_i = \mathbf{W}^T \mathbf{f}_i$, donde \mathbf{W} contiene los vectores propios de la matriz de covarianza Σ . Asumiendo que los datos siguen una distribución gaussiana con media cero, esta matriz se estima por medio de $\Sigma = \mathbf{F}\mathbf{F}^T/n$. Una reducción dimensional se logra al construir una matriz $\mathbf{W}_k \in \mathbb{R}^{l \times k}$ que contiene los k vectores propios asociados con los k mayores valores propios tal que $k < l$ y realizando la proyección lineal dada por

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{W}_k^T \mathbf{F}. \quad (3.1)$$

La principal ventaja de PCA es que preserva la estructura de los datos en una dimensión menor, minimizando el error entre la señal \mathbf{F} y su proyección en el subespacio formado por las columnas de \mathbf{W} dado por $\mathbf{W}\mathbf{W}^T \mathbf{F}$, i.e. minimiza $\|\mathbf{F} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T \mathbf{F}\|_F^2$. Sin embargo, PCA requiere conocer los datos y por ello el dispositivo de medición debería capturar y calcular la matriz de proyección antes de aplicar el procedimiento de compresión. Por otro lado, CSI es una técnica usada para capturar y comprimir los datos directamente en el detector, permitiendo recuperarla de forma precisa asumiendo que los datos satisfacen propiedades como escasez, bajo rango, y excentricidad en los valores propios [1, 6, 28]. Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{l \times v}$ una matriz de muestreo con $v < l$, el problema de captura de datos en CSI se puede modelar como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}^T \mathbf{F}, \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{v \times n}$ representa las medidas. CSI no requiere conocimiento de la señal de antemano, y comprime los datos sin realizar ningún cálculo en el detector. Con base en esto, se quiere diseñar la matriz de muestreo \mathbf{Q} descrita en la Ec. 3.2 para ser aproximadamente la matriz \mathbf{W}_k en la Ec. 3.1. No obstante, la matriz \mathbf{Q} es usual-

mente binaria en arquitecturas CSI implementables como *Spatial-Spectral Encoded Compressive HS Imager* (SSCSI) [29] y *Dual disperser Coded Aperture Snapshot Spectral Imaging* (DD-CASSI) [22]. Considerando esto, el problema de optimización tradicional de PCA debe ser modificado para incluir la restricción binaria. Entonces, la matriz \mathbf{W}_k es la solución al problema

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{W}_k} \quad & \|\mathbf{F} - \mathbf{W}_k \mathbf{W}_k^T \mathbf{F}\|_2^2 \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{W}_k \mathbf{W}_k^T = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Este problema es convexo e intuitivamente fácil de entender, sin embargo, añadir una restricción binaria hace difícil solucionarlo, por esto el problema en la Ec. 3.3 no es considerado y en su lugar se toma una versión equivalente dada por

$$\begin{aligned} \arg \max_{\mathbf{w}_i} \quad & \mathbf{w}_i^T \Sigma \mathbf{w}_i \\ \text{sujeto a} \quad & \|\mathbf{w}_i\|_2 = 1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde \mathbf{w}_i es la i -ésima columna de la matriz \mathbf{W}_k . Una restricción binaria se añade al problema para el diseño de \mathbf{Q} como

$$\begin{aligned} \arg \max_{\mathbf{q}_i} \quad & \mathbf{q}_i^T \Sigma \mathbf{q}_i \\ \text{sujeto a} \quad & q_i^j \in \{0, 1/\sqrt{b}\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde q_i^j es el j -ésimo elemento en la i -ésima columna, b es el número de elementos diferentes de cero en la i -ésima columna, Σ es la matriz de covarianza de los datos. Este problema tiene como objetivo encontrar el subespacio formado por vectores binarios \mathbf{q}_i que maximice la varianza de los datos, Por lo que \mathbf{q}_i es un componente principal binario. Dado que la función en la Ec. 3.5 no es convexa, se desarrolló el algoritmo 1 para aproximar su solución.

El algoritmo 1 inicializa el patrón de codificación o componente principal binario con ceros. En cada iteración busca la mejor posición donde un uno maximiza el valor de la función objetivo manteniendo los unos encontrados anteriormente en una posición fija. Este algoritmo tiene orden $O(dl^3)$ de complejidad computacional temporal, esto dado que el paso 8 se puede optimizar utilizando el resultado de iteraciones anteriores. Para el calculo de la linea 8, se define $\mathbf{q}_i^{1:k} = (\mathbf{q}_i^{1:k-1} + \mathbf{q}_i^k)$ como

Algoritmo 1 B-PCA: Estimación de PCA binario

```
1: input:  $\Sigma, d$  Número de adquisiciones diseñadas
2:  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^l$ 
3: for  $i = 1$  to  $d$  hacer
4:    $max \leftarrow 0$ 
5:   for  $j = 1$  to  $l$  hacer
6:     for  $k = 1$  to  $l$  hacer
7:        $\mathbf{q}_i(k) \leftarrow 1$  coloca un uno en la k-ésima posición
8:        $c \leftarrow \frac{\mathbf{q}_i^T}{\|\mathbf{q}_i\|} \Sigma \frac{\mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_i\|}$  calcula la función objetivo
9:       si  $c > max$  entonces
10:         $max = c$ 
11:         $index = k$ 
12:       fin si
13:        $\mathbf{q}_i(k) \leftarrow 0$  remueve el uno
14:     fin for
15:      $\mathbf{q}_i(index) \leftarrow 1$  coloca el uno en la mejor posición
16:   fin for
17:    $\Sigma \leftarrow \Sigma - (\mathbf{q}_i \Sigma \mathbf{q}_i)(\mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T)$ 
18: fin for
19: output:  $\mathbf{H} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_p]$ 
```

el vector en la k -ésima iteración, con \mathbf{q}_i^k un vector con solo un elemento diferente de cero. Entonces, la función objetivo $c \leftarrow \frac{\mathbf{q}_i^T}{\|\mathbf{q}_i\|} \Sigma \frac{\mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_i\|}$ en la iteración k se puede calcular mediante la expresión

$$\begin{aligned} c_k &= (\mathbf{q}_i^{1:k-1} + \mathbf{q}_i^k)^T \Sigma (\mathbf{q}_i^{1:k-1} + \mathbf{q}_i^k) \\ &= c_{k-1} + 2(\mathbf{q}_i^{1:k-1})^T \Sigma \mathbf{q}_i^k + (\mathbf{q}_i^k)^T \Sigma \mathbf{q}_i^k. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dado que \mathbf{q}_i^k tiene un solo elemento diferente de cero, los productos que lo involucran en la Ec. (3.6) se pueden calcular eficientemente. La prueba de esto se muestra en el apéndice 7.2. Finalmente, el valor de la función objetivo esta dado por $c = 1/k(c_k)$. Adicionalmente, en las imágenes espectrales usualmente tienen l bandas espectrales que oscilan entre 50 y 500 , y por esto la complejidad del algoritmo 1 no es un problema, pues el computo de los vectores \mathbf{q}_i se puede realizar de manera rápida. Sin embargo, en CSI la matriz de covarianza Σ no se conoce, así que esta debe ser estimada de las medidas. Esto se hace capturando algunas medidas aleatorias y estimando la matriz Σ como se describe en la siguiente sección.

Capítulo 4

ESTIMACIÓN DE LA MATRIZ DE COVARIANZA

El objetivo principal en CSI, es estimar una señal a partir de un conjunto de medidas, razón por la cual se desconoce la matriz de covarianza Σ . Sin embargo, se puede hacer una estimación rápida utilizando técnicas como el algoritmo CPPCA. No obstante, se deben hacer algunas modificaciones en la ecuación que modela el proceso de muestreo en CSI. El problema de muestreo matricial presentado en la Ec. 3.2 no es fácilmente implementable en arquitecturas reales como SSCSI y DD-CASSI, además, usar un solo proyector lineal \mathbf{H} hace más difícil estimar la matriz de covarianza dado que el algoritmo *compressive-projection principal component analysis* (CPPCA) usado para su estimación se basa en la intersección de varios sub-espacios para encontrar la dirección de los vectores propios[20, 35]. Por otro lado, el problema vectorial tradicional en estas arquitecturas hace más difícil el diseño de la matriz de muestreo dado que esta es altamente estructurada, además hace que la estructura de la matriz de covarianza de la señal se pierda impidiendo añadir restricciones matriciales sobre ésta que ayuden en su solución[6]. Por lo anterior, el problema vectorial se debe considerar y proponer algunos cambios. El problema vectorial está dado por

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{e}, \quad (4.1)$$

donde \mathbf{y} son las medidas, $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T, \mathbf{f}_2^T, \dots, \mathbf{f}_n^T]^T$ es la imagen vectorizada, \mathbf{e} es ruido aditivo, y \mathbf{H} es una matriz de muestreo diagonal a bloques representada como $\mathbf{H} = \text{diag}(\mathbf{Q}_1^T, \mathbf{Q}_2^T, \dots, \mathbf{Q}_n^T)$ donde $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{l \times v}$, siendo l el número de bandas espectrales, y v el número de capturas. La señal se reconstruye resolviendo el problema de optimización dado por

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 + \tau\|\boldsymbol{\theta}\|_1. \quad (4.2)$$

Si se fuerza a que cada matriz $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_j$, el problema en la Ec. 4.1 se convierte en un problema equivalente al problema en la Ec. 3.2 puesto que cada píxel es comprimido usando la misma matriz. A pesar de que esta formulación es más conveniente para

el uso de PCA como se describe en la Ec. 3.1, también presenta algunos inconvenientes relacionados con la recuperación de información y con su implementación en arquitecturas ópticas reales. Teniendo esto en cuenta, se puede limitar a p el número de diferentes matrices \mathbf{Q}_i tal que $p \leq n$, lo que permite redefinir el problema en la Ec. 4.1 de la siguiente manera

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{F}} + \mathbf{E}, \quad (4.3)$$

donde $\tilde{\mathbf{Y}} = [\mathbf{Y}_1^T, \dots, \mathbf{Y}_p^T]^T$, $\tilde{\mathbf{H}} = \text{diag}(\mathbf{Q}_1^T, \dots, \mathbf{Q}_p^T)$ y $\tilde{\mathbf{F}} = [\mathbf{F}_1^T, \dots, \mathbf{F}_p^T]^T$ donde cada $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{l \times n/p}$ es un subconjunto de píxeles de la imagen \mathbf{F} que son afectados por el mismo proyector. Además, cada \mathbf{F}_i contiene píxeles de toda la imagen, por lo que cada uno se asemeja estadísticamente a la imagen \mathbf{F} . Este hecho se puede usar para estimar sus vectores propios directamente de las medidas comprimidas \mathbf{Y}_i adquiriendo primero algunas medidas aleatorias y usándolas para diseñar las mediciones subsecuentes. El algoritmo *compressive-projection principal component analysis* (CPPCA)[20] se usa para estimar la matriz de covarianza muestral. CPPCA tiene como objetivo recuperar los vectores propios basándose en la técnica de optimización de proyección en conjuntos convexos (*projections-onto-convex-sets* (POCS)). Sin embargo, CPPCA requiere que \mathbf{Q}_i sea ortonormal. Por esta razón, se reformula el problema en la Ec. (4.3) haciendo descomposición de valores singulares de $\mathbf{Q}_i = \mathbf{U}_i \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{V}_i^T$ y luego modificando las medidas

$$\tilde{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{\Lambda}_i^\dagger \mathbf{U}_i^T \mathbf{Y}_i = \mathbf{V}_i^T \mathbf{F}_i, \quad (4.4)$$

donde \dagger representa la pseudo-inversa. Con esta modificación, el problema en la Ec. 4.4 cumple con el requerimiento de usar un proyector ortonormal dado que \mathbf{V} lo es. Adicionalmente, los datos deben estar centrados i.e. tener media cero para poder usar la técnica PCA como se describe en la Sec. 1, pero usualmente las imágenes espectrales toman valores entre 0 y $2^{nbits} - 1$, por esta razón, suponer media cero no es realista. Por otro lado, reconstruir la imagen para calcular su media generará altos costos computacionales. Debido a esto, se desea estimar la media directamente de las medidas comprimidas. La media se puede estimar usando las

medidas adquiridas con las matrices aleatorias, usando la formula[35]

$$\hat{\mathbf{f}} = \alpha \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^k \mathbf{Q}_i^T (\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i^T)^{-1} \mathbf{y}_i^j, \quad (4.5)$$

donde $\alpha = v/n^2$, \mathbf{y}_i^j es el j -ésimo píxel en el i -ésimo subconjunto o partición, y k es el número de píxeles en cada partición. Se ha probado que la Ec. (4.5) converge a la verdadera media cuando $n \rightarrow \infty$ [35]. Una vez estimada la media, las medidas son corregidas restándoles la media $\tilde{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{Y}_i - \mathbf{Q}_i^T (\hat{\mathbf{f}} \otimes \mathbf{1}^T)$, donde \otimes representa el producto Kronecker, y $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^k$ es un vector de longitud k . Esta operación replica la media y la resta de las medidas.

Usando CPPCA se pueden recuperar m vectores propios asociados con los m valores propios más grandes en magnitud. Para ello, definamos $\mathbf{W}_k \in \mathbb{R}^{l \times k}$ como la matriz que contiene dichos vectores, los coeficientes PCA se estiman por medio de $\hat{\mathbf{F}}_i \approx (\mathbf{V}_i^T \mathbf{W})^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_i$. Luego, la imagen se reconstruye con

$$\hat{\mathbf{F}}_i \approx \mathbf{W} \hat{\mathbf{F}}_i, \quad (4.6)$$

a partir de esta señal estimada, la matriz de covarianza se calcula como $\Sigma \approx \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^T / n$. Wei Li et al.[28] proponen una heurística para determinar la cantidad m , i.e. el número de vectores propios que pueden ser recuperados de forma precisa, esto es importante dado que estimar incorrectamente un vector propio y usarlo en la estrategia de muestreo puede impactar de forma negativa el proceso (por ejemplo se puede recuperar un vector del espacio nulo de la señal). El cálculo de este valor se hace mediante la formula $m = \lfloor (\rho v / \log l) \rfloor$ para alguna constante ρ , donde v es el número de capturas, l es el número de bandas de la imagen espectral, y $\lfloor \cdot \rfloor$ representa redondeo al entero inmediatamente anterior.

El protocolo de muestreo y reconstrucción se resume en el Algoritmo 2. Primero, se generan algunas matrices aleatoriamente, siguiendo una distribución Bernoulli, y se usan como patrones de codificación en la imagen. Usando estas medidas se calcula la media y se resta de las medidas como se muestra en las líneas 6-11. Luego, la matriz de covarianza se estima (línea 12) y las matrices de muestreo se diseñan usando el Algoritmo 1 (línea 13). A continuación, las matrices diseñadas \mathbf{Q} se concatenan con las matrices aleatorias como se muestra en las líneas 14-16. Finalmente se soluciona el problema de optimización para recuperar la imagen

(línea 18) donde Ψ es una base de representación como Wavelet o la transformada DCT.

Algoritmo 2 Algoritmo de reconstrucción

```

1: entrada:  $n, \mathbf{F}_i, p$ 
2: for  $i = 1$  hasta  $p$  hacer
3:    $\tilde{\mathbf{H}}_i \leftarrow$  Generadas aleatoriamente
4:    $\mathbf{Y}_i \leftarrow \tilde{\mathbf{H}}_i \mathbf{F}_i$ 
5: fin for
6:  $\tilde{\mathbf{\Omega}} \leftarrow [\tilde{\mathbf{H}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{H}}_p]$ 
7:  $\hat{\mathbf{f}} = \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^k \mathbf{H}_i^T (\mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^T)^{-1} \mathbf{y}_i^j$ 
8: for  $i = 1$  hasta  $p$  hacer
9:    $\tilde{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{Y}_i - \tilde{\mathbf{T}}_i (\hat{\mathbf{f}} \otimes \mathbf{1}^T)$  Restar la media
10: fin for
11:  $\mathbf{F} = \text{CPPCA}(\mathbf{H}, \mathbf{Y})$ 
12:  $\tilde{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{n} \mathbf{F} \mathbf{F}^T$  Estimar la matriz de covarianza
13:  $\mathbf{Q} \leftarrow \text{B-PCA}(\tilde{\mathbf{\Sigma}}, d)$ 
14: for  $i = 1$  hasta  $p$  capturas hacer
15:    $\mathbf{H}_i \leftarrow [\tilde{\mathbf{H}}_i^T, \mathbf{Q}^T]^T$ 
16: fin for
17:  $\tilde{\mathbf{H}} \leftarrow \text{diag}(\mathbf{H}_1^T, \dots, \mathbf{H}_p^T)$ 
18:  $\tilde{\mathbf{F}} \leftarrow \Psi^{-1}(\arg \min_{\Theta} \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{H}} \Psi^{-1} \Theta\|_2^2 + \tau \|\Theta\|_1)$ 
19: Salida:  $\tilde{\mathbf{F}}$ 

```

4.1. ANÁLISIS DE LA PROPIEDAD DE ISOMETRÍA RESTRICTIVA

En esta sección se mostrará que el uso de PCA satisface la RIP en casos específicos. Sea $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ una imagen espectral que se puede representar precisamente en un subespacio de dimensión $m < l$. Esto significa que hay algunos valores propios de la matriz de covarianza que son cero, esto es $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_l = 0$. Además cualquier píxel \mathbf{f}_i de la imagen se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_i &= \lambda_1 \omega_1^i \mathbf{w}_1 + \dots + \lambda_k \omega_k^i \mathbf{w}_k + \lambda_{(k+1)} \omega_{(k+1)}^i \mathbf{w}_{(k+1)} + \dots + \lambda_l \omega_l^i \mathbf{w}_l \\
&= \lambda_1 \omega_1^i \mathbf{w}_1 + \dots + \lambda_k \omega_k^i \mathbf{w}_k,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde \mathbf{w}_j son los vectores propios de la señal, y ω_j ($j = 1, 2, \dots, k$) son los coeficientes de la proyección del píxel en el subespacio del vector propio. La matriz \mathbf{W}_k contiene los auto vectores asociados a los k valores propios más importantes, entonces $\mathbf{W}_k^T \mathbf{f}_i = [\lambda_1 \omega_1^i, \dots, \lambda_m \omega_m^i]^T$. Por ende, se puede mostrar que $\|\mathbf{f}_i\|_2^2 = \|\mathbf{W}_k^T \mathbf{f}_i\|_2^2$. Tenga en cuenta que los vectores propios son ortonormales entre si, por esto

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{f}_i\|_2^2 &= \|\lambda_1 \omega_1^i \mathbf{w}_1 + \dots + \lambda_k \omega_k^i \mathbf{w}_k\|_2^2 \\
&= \|\lambda_1 \omega_1^i \mathbf{w}_1\|_2^2 + \dots + \|\lambda_k \omega_k^i \mathbf{w}_k\|_2^2 \\
&= (\lambda_1 \omega_1^i)^2 + \dots + (\lambda_k \omega_k^i)^2 \\
&= \|\mathbf{W}_k^T \mathbf{f}_i\|_2^2.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Se puede concluir que \mathbf{W}_k satisface la RIP para un conjunto específico de vectores pertenecientes a la señal \mathbf{F} con $\delta_k = 0$, i.e. $(1 - \delta_k) \|\mathbf{f}\|_2^2 \leq \|\mathbf{W}^T \mathbf{f}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{f}\|_2^2$. En el caso más general donde \mathbf{f}_i no puede ser representado exactamente en una dimensión menor, la constante δ_k puede ser acotada. Sea \mathbf{f}_i un píxel que puede ser aproximado en una dimensión k usando PCA, tal que los auto valores de la matriz de covarianza son todos diferentes de cero i.e. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \dots \geq \lambda_l$. \mathbf{f}_i es modelado como

$$\mathbf{f}_i = \lambda_1 \omega_1^i \mathbf{w}_1 + \dots + \lambda_m \omega_m^i \mathbf{w}_m + \dots + \lambda_l \omega_l^i \mathbf{w}_l. \tag{4.9}$$

Se puede ver que la norma del vector $\|\mathbf{f}_i\|_2^2 = (\lambda_1 \omega_1^i)^2 + \dots + (\lambda_l \omega_l^i)^2$ por esto

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{W}_k^T \mathbf{f}_i\|_2^2 &= \|\mathbf{f}_i\|_2^2 - (\lambda_{(k+1)} \omega_{(k+1)}^i)^2 + \dots + (\lambda_l \omega_l^i)^2 \\
&= \|\mathbf{f}_i\|_2^2 - \frac{\|\mathbf{f}_i\|_2^2 (\lambda_{(k+1)} \omega_{(k+1)}^i)^2 + \dots + (\lambda_l \omega_l^i)^2}{\|\mathbf{f}_i\|_2^2} \\
&= \|\mathbf{f}_i\|_2^2 \left(1 - \frac{(\lambda_{(k+1)} \omega_{(k+1)}^i)^2 + \dots + (\lambda_l \omega_l^i)^2}{\|\mathbf{f}_i\|_2^2} \right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Reemplazando la Ec. (4.8) en (4.10) se obtiene

$$\|\mathbf{W}_k^T \mathbf{f}_i\|_2^2 = \|\mathbf{f}_i\|_2^2 \left(1 - \frac{(\lambda_{(k+1)} \omega_{(k+1)}^i)^2 + \dots + (\lambda_l \omega_l^i)^2}{(\lambda_1 \omega_1^i)^2 + \dots + (\lambda_l \omega_l^i)^2} \right), \tag{4.11}$$

entonces $\delta_k = (\sum_{j=k+1}^l (\lambda_j \omega_j^i)^2) / ((\sum_{j=1}^l (\lambda_j \omega_j^i)^2))$. Teniendo en cuenta que en escenas naturales la mayoría de la información se mantiene en los primeros auto vecto-

res, se puede decir que $\sum_{j=1}^l (\lambda_j \omega_j^i)^2 \gg \sum_{j=k+1}^l (\lambda_j \omega_j^i)^2$, y así δ_k es pequeño. Note sin embargo que, este trabajo usa una versión binaria de los vectores propios con los que se construye la matriz \mathbf{Q} , los cuales no son necesariamente ortonormales entre ellos. Por esto, la diferencia será acotada por

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{W}_k - \mathbf{Q})\mathbf{f}_i\|_2 &\leq \|\mathbf{W}_k - \mathbf{Q}\|_{2 \rightarrow 2} \|\mathbf{f}_i\|_2 \\ \frac{\|(\mathbf{W}_k - \mathbf{Q})\mathbf{f}_i\|_2}{\|\mathbf{f}_i\|_2} &\leq \|\mathbf{W}_k - \mathbf{H}\|_{2 \rightarrow 2} = \|\mathbf{W}_k - \mathbf{Q}\|_{2 \rightarrow 2}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde $\|\cdot\|_{2 \rightarrow 2}$ representa la norma espectral. La diferencia entre $\mathbf{W}^T \mathbf{f}$ y $\mathbf{Q}^T \mathbf{f}$ se relaciona con

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_k - \mathbf{Q}\|_{2 \rightarrow 2} &= \sigma_{\max}(\mathbf{W}_k - \mathbf{Q}) \\ &= \lambda_{\max}((\mathbf{W}_k - \mathbf{Q})^T (\mathbf{W}_k - \mathbf{Q})) \\ &= \lambda_{\max}(\mathbf{W}_k^T \mathbf{W}_k - \mathbf{W}_k^T \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{W}_k^T + \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) \\ &= \lambda_{\max}(\mathbf{I} - \mathbf{W}_k^T \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{W}_k^T + \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) \\ &= 1 - \lambda_{\max}(\mathbf{W}_k^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{W}_k^T - \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) \\ &= 1 - \delta_t = \delta_T. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dado que \mathbf{W}_k y \mathbf{Q} maximizan el varianza explicada, se espera que δ_t sea cercano a 1 y por esto la diferencia $\|(\mathbf{W}_k - \mathbf{Q})\mathbf{f}_i\|_2$ es pequeña. La RIP estará acotada por

$$(1 - \delta_k - \delta_T) \|\mathbf{f}\|_2^2 \leq \|\mathbf{H}\mathbf{f}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k + \delta_T) \|\mathbf{f}\|_2^2, \quad (4.14)$$

donde δ_k se describe en Ec. (4.11)

Capítulo 5

APLICACIÓN EN ARQUITECTURAS CSI REALES

El procedimiento de captura que se usa requiere que cada subconjunto F_i sea proyectado con una matriz diferente, además no se asume ninguna correlación entre las matrices Q_i . Sin embargo, en arquitecturas implementables no se puede reproducir este comportamiento dado que las matrices de muestreo Q_i exhiben una fuerte correlación entre ellas. En esta sección explicamos el problema y analizamos posibles soluciones.

5.1. DD-CASSI

La arquitectura *Dual Disperser Coded Aperture Snapshot Spectral Imaging* [22] es una arquitectura CSI en la cual se puede implementar la propuesta de este trabajo. Ésta usa dos elementos dispersivos y una apertura codificada. Los dos elementos dispersivos están dispuestos en oposición tal que el segundo prisma cancela exactamente la dispersión introducida por el primero. Una apertura codificada es utilizada en medio, de manera que la escena es codificada antes de integrarse en el detector. La representación esquemática de la arquitectura se muestra en la Fig. 5.1, y el proceso físico de muestreo se muestra en la Fig. 5.2. Las medidas en el detector se modelan como

$$y(x, y) = \int_{\Omega_\lambda} t(x - \alpha(\lambda - \lambda_c), y) f(x, y, \lambda) d\lambda, \quad (5.1)$$

donde, λ describe la dispersión lineal y λ_c la longitud de onda central; $y(x, y)$ son las medidas y $t(x, y)$ la apertura codificada y α es un parámetro de calibración.

En esta arquitectura la apertura se puede diseñar para producir un número limitado de patrones en el eje espectral, lo cual permitirá restringir el número de matrices Q_i . Por ejemplo, en la Fig. 5.2 produce solamente 2 patrones de codificación diferentes para toda la imagen, esto se logra repitiendo un patrón espacial de tamaño 2 a lo largo de toda la imagen. Sin embargo, se puede variar el número de patrones como se muestra en la Fig. 5.3. Esto está relacionado con la cantidad de subconjuntos F_i

Arquitectura DD-CASSI

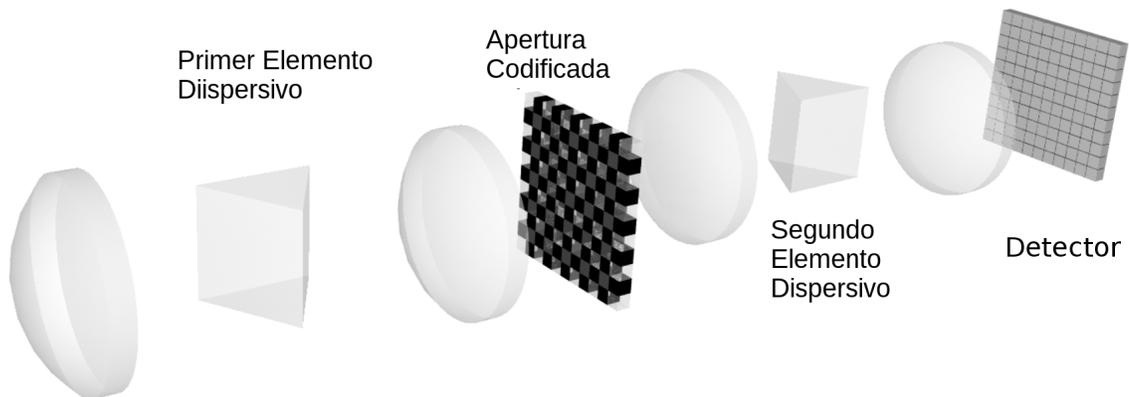


Figura 5.1: Representación esquemática de la arquitectura DD-CASSI. Además de los lentes, la característica importante es el uso de dos prismas para cancelar el efecto dispersivo de uno y otro, pero logrando una codificación espectral

Proceso de adquisición en DD-CASSI

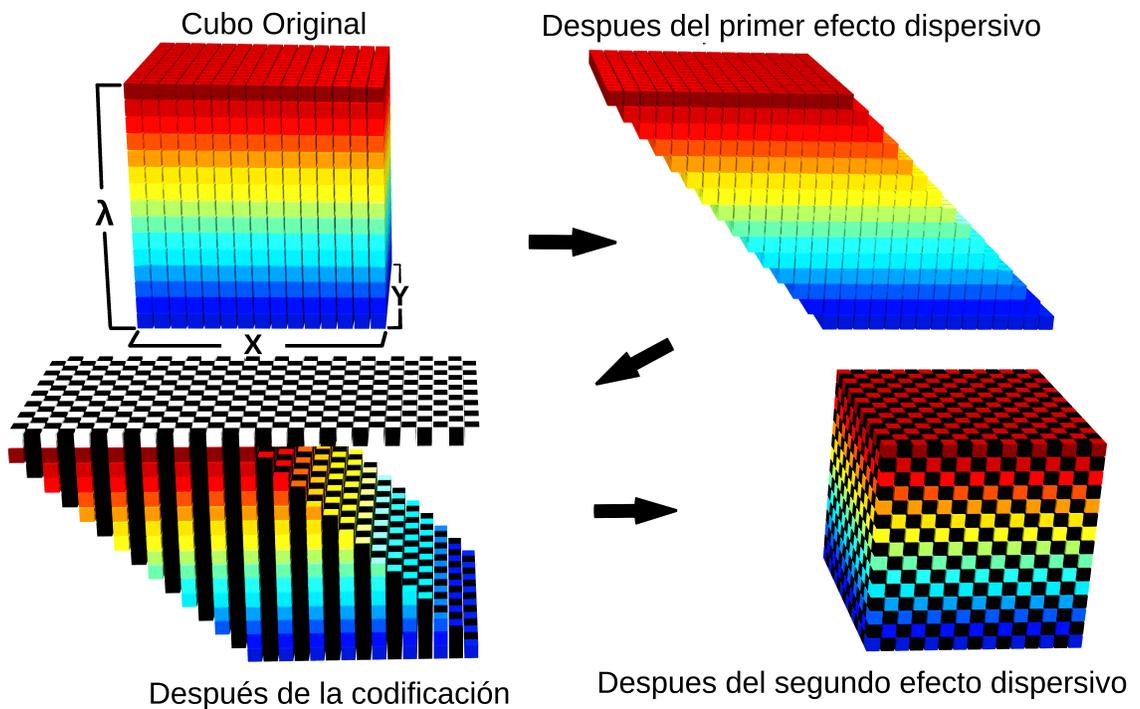


Figura 5.2: Representación del proceso físico de muestreo llevado a cabo por la arquitectura DD-CASSI. Primero un prisma produce un efecto de dispersión, después una apertura codificada codifica la escena espectral entonces un segundo prisma cancela el efecto del primero y finalmente la imagen es integrada en el detector.

descritos en la Ec. (4.3). La forma de generar un número diferente de patrones se explica en la Fig. 5.3.

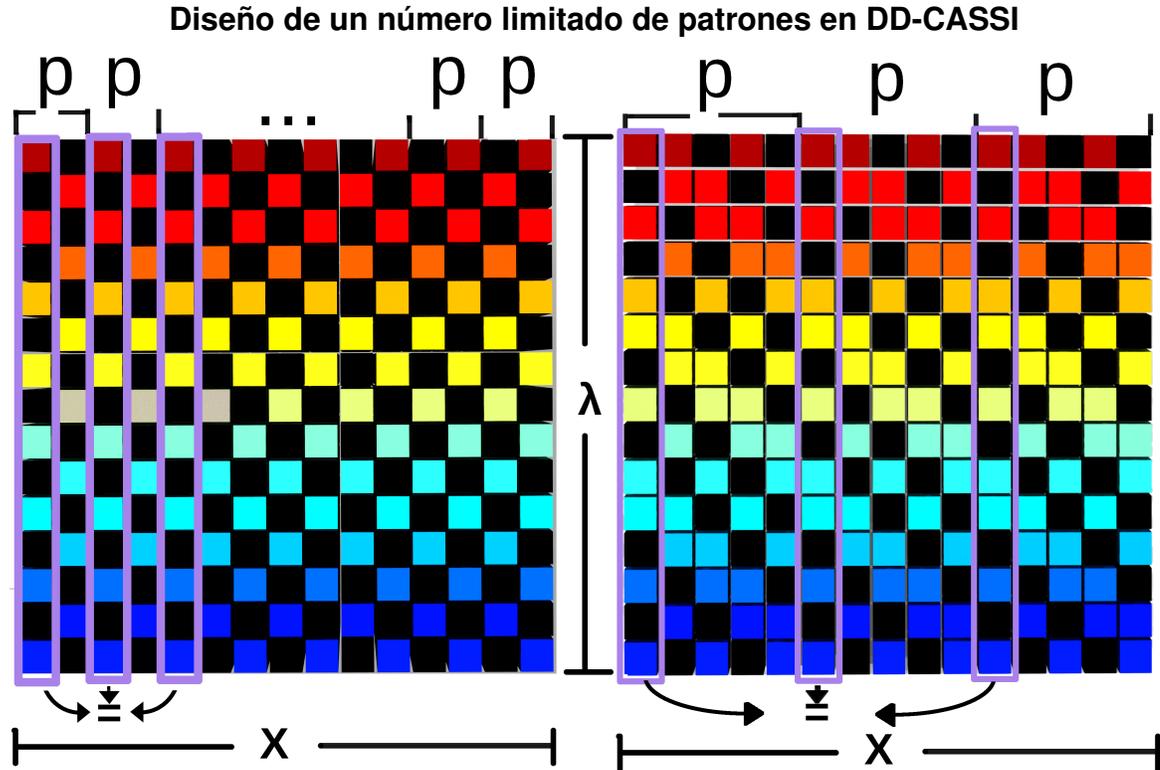


Figura 5.3: Procedimiento para generar un número limitado de patrones. Un patrón con p elementos es repetido a lo largo de la dimensión espacial lo cual genera un número limitado de patrones en el dominio espectral (filtros) generando p particiones. Izquierda: diseño de patrones con $p = 2$ particiones. Derecha: Diseño de patrones con $p = 5$ particiones.

Por simplicidad el número de subconjuntos se estableció como $p = l$. M. E. Gehm et al [22] exponen diferentes distribuciones espaciales que se pueden lograr con esta arquitectura. Una característica especial de esta arquitectura es que para cierto patrón de codificación de un píxel, el patrón de la izquierda y de la derecha son permutaciones cíclicas, e.j. para un píxel codificado con los elementos $\{a, b, c, d\}$ los píxeles de la derecha y la izquierda se codificarán por $\{b, c, d, a\}$ y $\{d, a, b, c\}$ respectivamente. En la formulación matricial, esto implica que las matrices Q_i son iguales, excepto por un desplazamiento circular, i.e. $Q_i = \Pi^{i-j} Q_j$, donde Φ es una matriz de permutación. Esto se muestra en la Fig. 5.4.

Por esto, diseñar una sola matriz $Q = Q_i$ determinará el resto de matrices Q_j dado que las matrices $Q_i = \Pi^{i-j} Q_j$, donde Π es una matriz de permutación. Esto

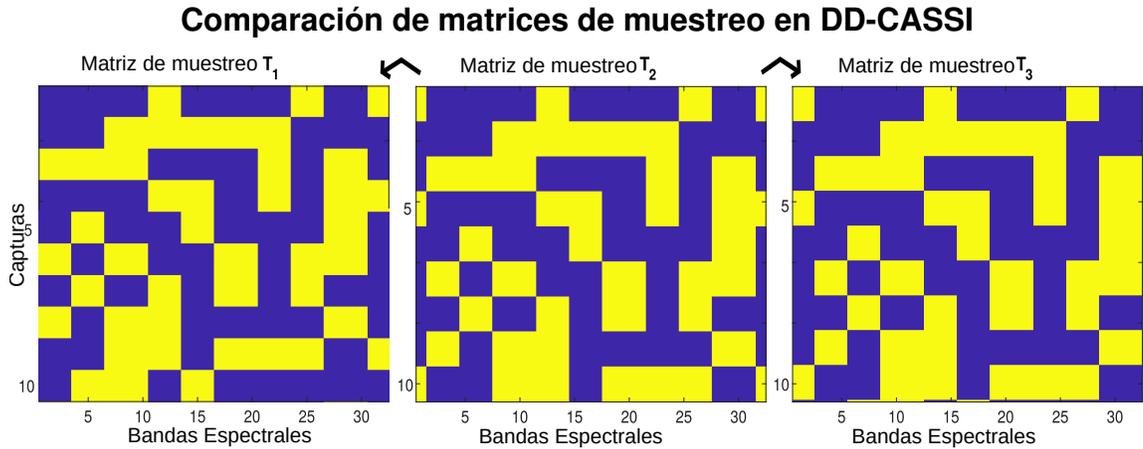


Figura 5.4: Desplazamiento circular en las matrices de muestreo de DD-CASSI. Cada captura representa una adquisición. Se puede notar que son la misma matriz excepto por la permutación circular, donde la matriz del centro es igual a la de la izquierda excepto por una columna, sin embargo esta columna sale por la izquierda e ingresa por la derecha.

significa que solo una de estas matrices se puede diseñar siguiendo el procedimiento de PCA aquí propuesto. Sin embargo, se espera que las matrices Q_j cercanas a Q sean aún buenas aproximaciones a PCA binario.

5.2. SSCSI

La arquitectura *Spatial-Spectral Encoded Compressive Hyperspectral Imager* (SSCSI) es otra cámara CSI. Esta usa un único elemento dispersivo y una apertura codificada. Con esta configuración logra una codificación espectral no uniforme de la imagen al codificar de forma diferente cada banda usando una apertura codificada binaria. Esto se logra colocando la apertura codificada entre el plano del sensor y el plano espectral formado por la rejilla de difracción[29]. La representación esquemática de la arquitectura se muestra en la Fig. 5.5

Las medidas en el detector se pueden modelar como

$$y(x, y) = \int_{\Omega_\lambda} t(x + s(a\lambda - x), y) f(x, y, \lambda) d\lambda, \quad (5.2)$$

donde $y(x, y)$ representa las medidas en el detector, t representa la apertura codificada, $f(x, y, \lambda)$ es la imagen espectral, a es un parámetro de calibración para convertir una coordenada espectral a una espacial, y s controla el efecto dispersi-

Representación esquemática de la arquitectura SSCSI

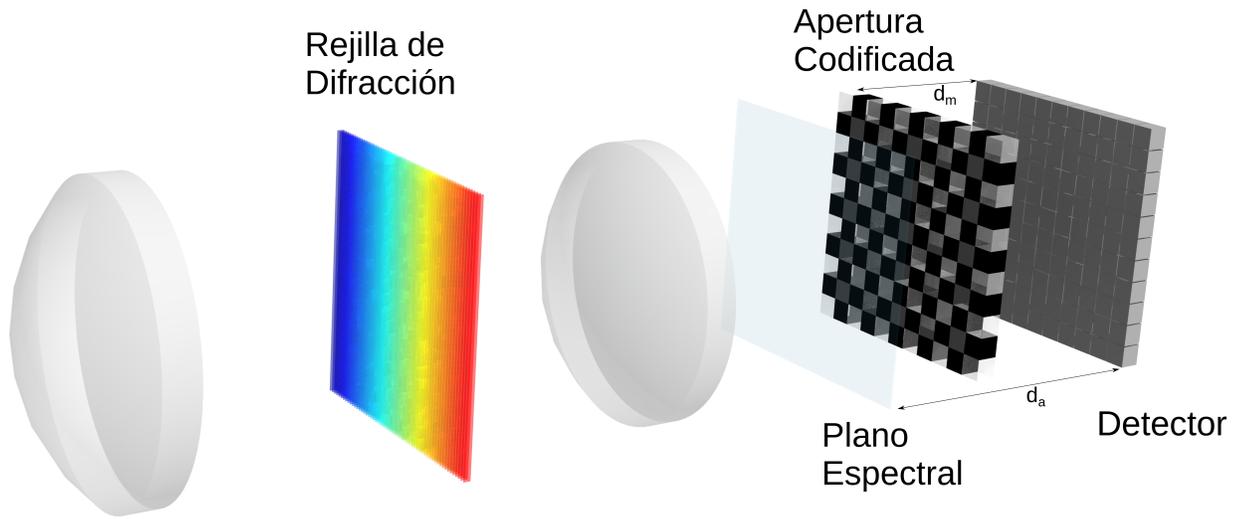


Figura 5.5: Una rejilla de difracción y una apertura codificada se usan para lograr la codificación

vo de los patrones de codificación. Variar el parámetro s produce un cambio en la codificación de la escena como se muestra en la Fig. 5.6.

Representación de la codificación producida en SSCSI

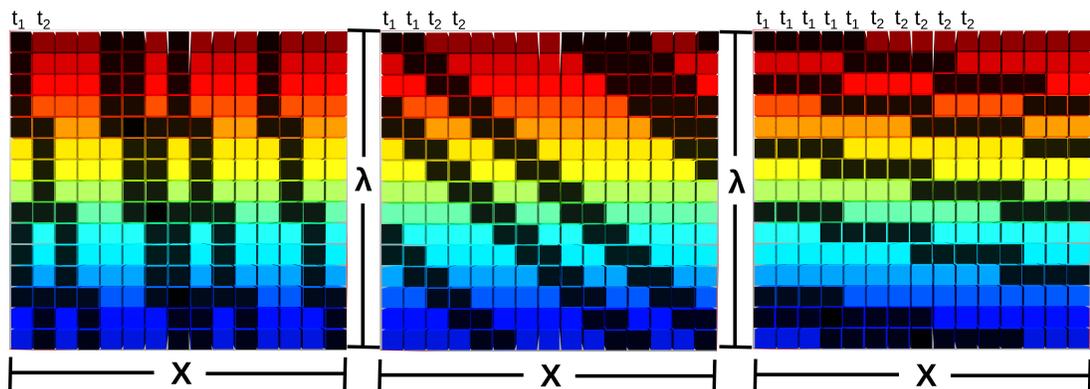


Figura 5.6: Representación de la codificación producida en la dimensión espectral en la arquitectura SSCSI usando la misma apertura codificada pero variando el parámetro s . Se puede observar como 2 elementos t_1, t_2 de la apertura codificada codifica la imagen cuando s cambia. Izquierda: codificación con $s = 0,1$, medio: $s = 0,5$ y derecha: $s = 0,9$

De acuerdo con la Fig. 5.6 $s = 0,5$ es el mejor valor para el enfoque aquí propuesto dado que así se asemeja a la codificación de la arquitectura DD-CASSI lo

que facilita la implementación de los patrones propuestos. En el caso de $s = 0,1$ se genera una codificación espectral que disminuye los grados de libertad puesto que un solo elemento de codificación se repite a lo largo del espectro. En el caso de $s = 0,9$ la codificación produce una correlación espacial en la codificación lo cual se ha demostrado que afecta negativamente la reconstrucción[13]. Tomando esto en cuenta se fija $s = 0,5$ como el valor usado de aquí en adelante. Esto, sin embargo, produce algunos problemas en las matrices dado que se forman núcleos de 2 elementos. Por esta razón, se debe tener en cuenta en el algoritmo de diseño. La Fig. 5.7 explica algunas consideraciones que se tienen en cuenta a la hora de diseñar los vectores binarios para SSCSI.

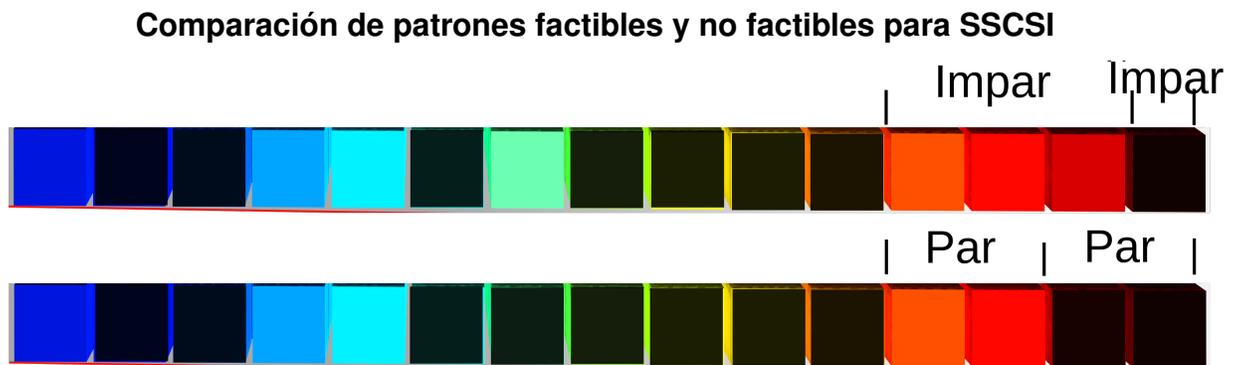


Figura 5.7: Patrones de la arquitectura SSCSI generados usando $s = 0,5$, usando este valor no es posible obtener bloques con un número impar de elementos de bloque o traslucidos en la dimensión espectral, arriba: patrones diseñados sin tener en cuenta esta consideración, abajo: patrones que se pueden generar usando SSCSI

Capítulo 6

RESULTADOS Y SIMULACIONES

La efectividad de las matrices propuestas se demuestra en varias escenas comparando su desempeño con el uso de matrices aleatorias binarias. El algoritmo *Gradient Projection for Sparse Reconstruction* (GPSR [19]) se usó para resolver la Ec. (4.2), como criterio de parada se seleccionaron 20 iteraciones. La imagen espectral \mathbf{F} se dividió en $p = l$ subconjuntos de tal forma que el proceso de muestreo se puede modelar usando la Ec. 4.3. Además, la transmitancia de los patrones de codificación en las matrices aleatorias se configuró a "40 %", la transmitancia se define como el número de elementos translúcidos sobre el total de elementos en la apertura codificada, para encontrar este valor se realizaron varias simulaciones variando este parámetro y se encontró que este es el valor óptimo. La base de representación usada fue $\Psi_{3D} = \Psi_{2D} \otimes \Psi_{1D}$, donde Ψ_{2D} es la transformada Wavelet Symmlet 8 2D, y Ψ_{1D} es la base DCT.

6.1. IMAGEN ESPECTRAL URBAN

La primer imagen usada fue urban[40]. Esta imagen hiperespectral tiene 256×256 píxeles de resolución espacial y $l = 128$ bandas espectrales. Una banda espectral y tres diferentes píxeles se muestran en la Fig. 6.1. Esta imagen se divide en $p = 128$ subconjuntos.

Como prueba de concepto, primero la aproximación de la imagen fue realizada usando una pseudo-inversa con matrices aleatorias y diseñadas i.e. la imagen se reconstruyó resolviendo la Ec. 4.2 con $\tau = 0$. El resultado de esta prueba se muestra en la Fig. 6.2. Para el caso de las matrices diseñadas se supone que se conoce la matriz de covarianza dado que el objetivo de esta prueba es mostrar que usando patrones binarios basados en PCA efectivamente supera el desempeño de usar solo matrices aleatorias. La tabla 6.1 muestra la comparación de la calidad de reconstrucción usando MSE (*mean square error*) definido como $\|\mathbf{F} - (\mathbf{Q}^T)^{\dagger} \mathbf{Q}^T \mathbf{F}\|_2$ y PSNR $20 \log \frac{Max}{\sqrt{MSE}}$ con *Max* el máximo valor de amplitud de la señal (*peak signal*)

Imagen Urban

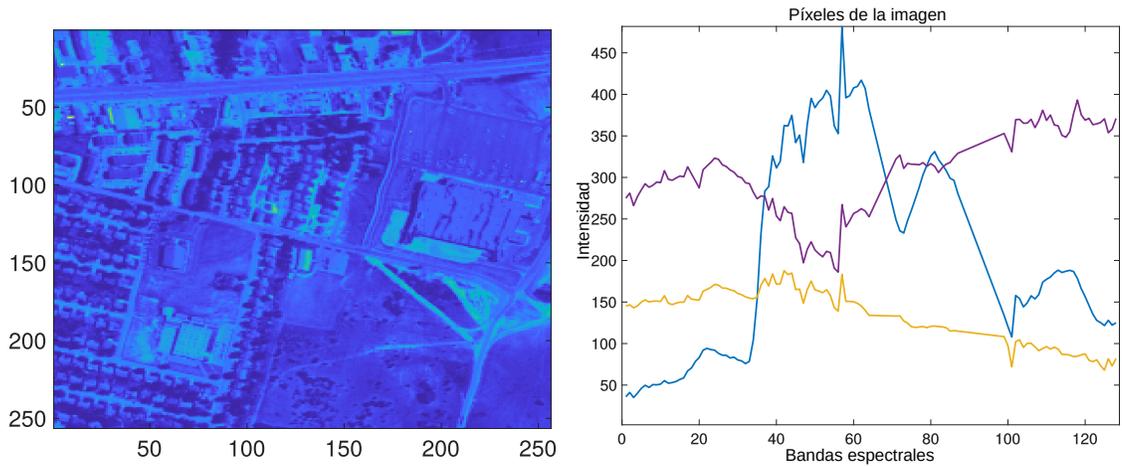


Figura 6.1: Urban, primer imagen espectral usada en simulaciones, Izquierda: distribución espacial en la 100-ésima banda espectral, derecha: 3 firmas espectrales en diferentes píxeles de la imagen

to noise ratio).

Tabla 6.1: Desempeño de la reconstrucción usando como métrica PSNR y MSE

| | Aleatorias | Σ Estimada | Σ Conocida a priori |
|---|------------|-------------------|----------------------------|
| $\ \mathbf{F} - \tilde{\mathbf{F}}\ _2$ | 119.511 | 15.991 | 15.939 |
| PSNR (dB) | 16.875 | 31.085 | 31.955 |

En la tabla 6.1, la columna "Estimada" representa las matrices \mathbf{Q} diseñadas usando la matriz de covarianza estimada desde las medidas aleatorias, la columna "conocida a priori" es el resultado de usar las matrices \mathbf{Q} diseñadas conociendo la verdadera matriz de covarianza. Se puede notar que usando las matrices propuestas se obtiene un mejor desempeño en ambas métricas (PSNR, y MSE) sin importar cómo se estime la matriz de covarianza. En términos de MSE, las matrices propuestas logran una mejora de cerca de 8 veces, comparado con medidas aleatorias, y alrededor de 2 veces en términos de PSNR.

En el proceso de adquisición, el número de capturas varía desde 14 hasta 26. En cada caso algunas capturas fueron generadas aleatoriamente y otra parte fue diseñada siguiendo la ecuación $\text{redondear}(\rho v / \log l)$ con $\rho = 1$. Esto debido a que la reconstrucción se ve afectada negativamente si los vectores propios son estimados de manera errónea. Por ello, se debe garantizar que se recuperen de la manera más precisa posible. Basado en la formula anterior, el número de vectores propios a

Comparación de firmas espectrales - Urban

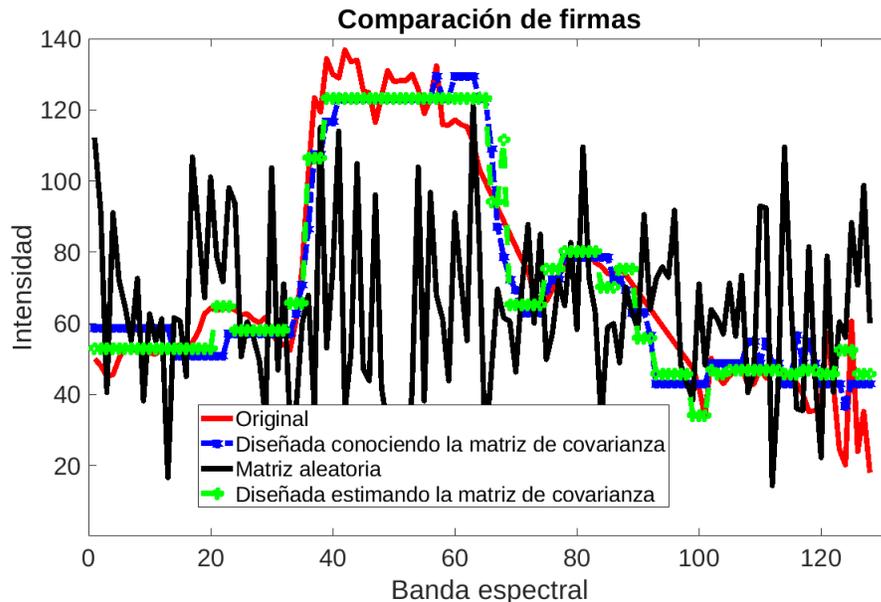


Figura 6.2: Comparación de una firma espectral de la aproximación de la imagen haciendo una pseudo-inversa con capturas 8 diseñadas y aleatorias.

estimar se calculaba y éstos eran usados en el diseño de las matrices. Por ejemplo en el caso de $v = 14$, 12 adquisiciones se generaron aleatoriamente y 2 fueron diseñadas (dado que $\text{redondear}[1 \times 12 / \log 128] = 2$). Así, 2 vectores propios son estimados de las medidas comprimidas usando CCPCA y luego el Algoritmo 1 se utilizó para el diseño de los patrones.

Los Resultados usando PSNR como métrica se muestran en la Fig. 6.3. Se muestran 3 gráficas diferentes. Primero, los resultados usando las matrices diseñadas imponiendo solo la restricción binaria, donde se ve que estas matrices logran una mejora de hasta 5 dB en comparación con medidas aleatorias. Cuando adicionalmente se imponen las restricciones de la arquitectura DD-CASSI en el problema, los resultados son similares a los de la primera parte. Finalmente, Usando la condiciones de SSCSI la reconstrucción alcanzada con los patrones aleatorios mejora, sin embargo, las matrices diseñadas mejoran estos resultados por alrededor de 1 dB. Cabe resaltar que en el caso de SSCSI las medidas aleatorias usaron un parámetro $s = 0,1$ dado que los autores recomiendan éste como el mejor valor[29]

Una comparación espacial y espectral se muestra en la Fig. 6.4 donde algunos píxeles al azar fueron seleccionados y mostrados para comparar el desempeño de las matrices diseñadas.

Comparación del PSNR en las reconstrucciones

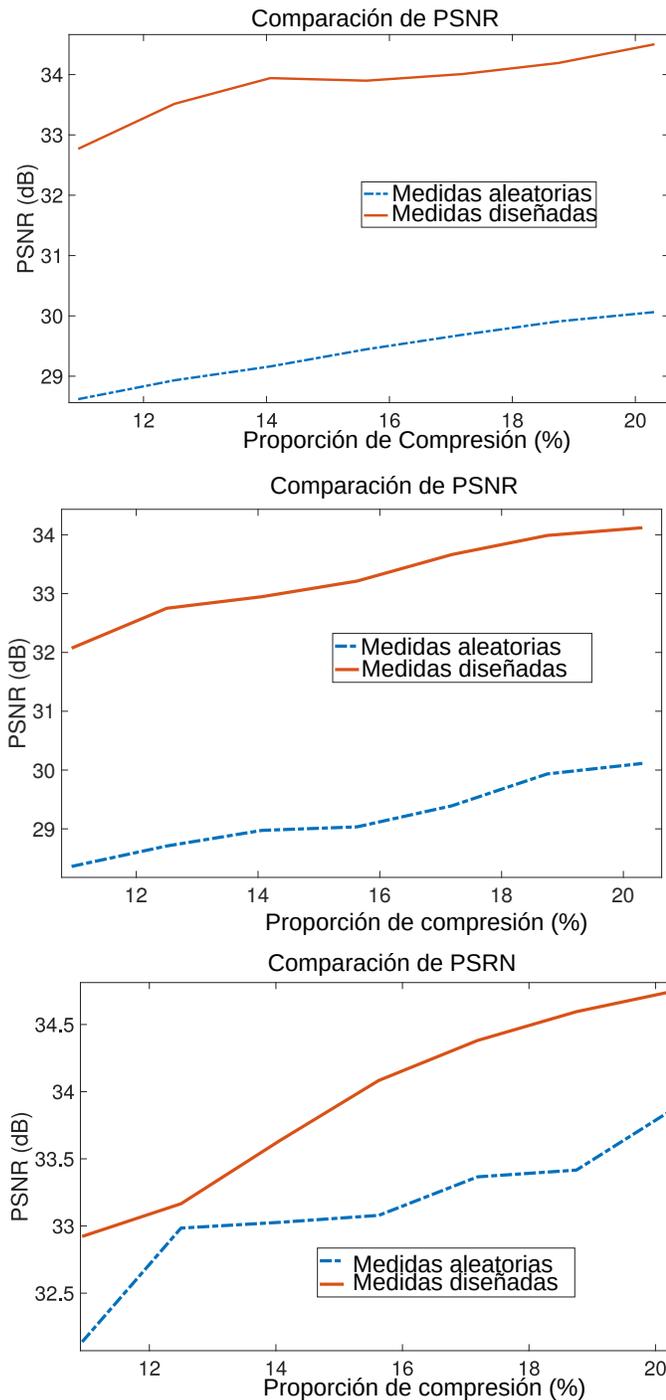


Figura 6.3: PSNR de la imagen hiperespectral reconstruida para varias tasas de compresión. Arriba: Comparación del PSNR en la reconstrucción usando matrices diseñadas y aleatorias, usando solo la restricción binaria. Medio: Comparación del PSNR en la reconstrucción usando las restricciones binaria y de la arquitectura DD-CASSI. abajo: Comparación del PSNR de la reconstrucción usando la restricción binaria y de la arquitectura SSCSI.

Comparación visual de la imagen Urban

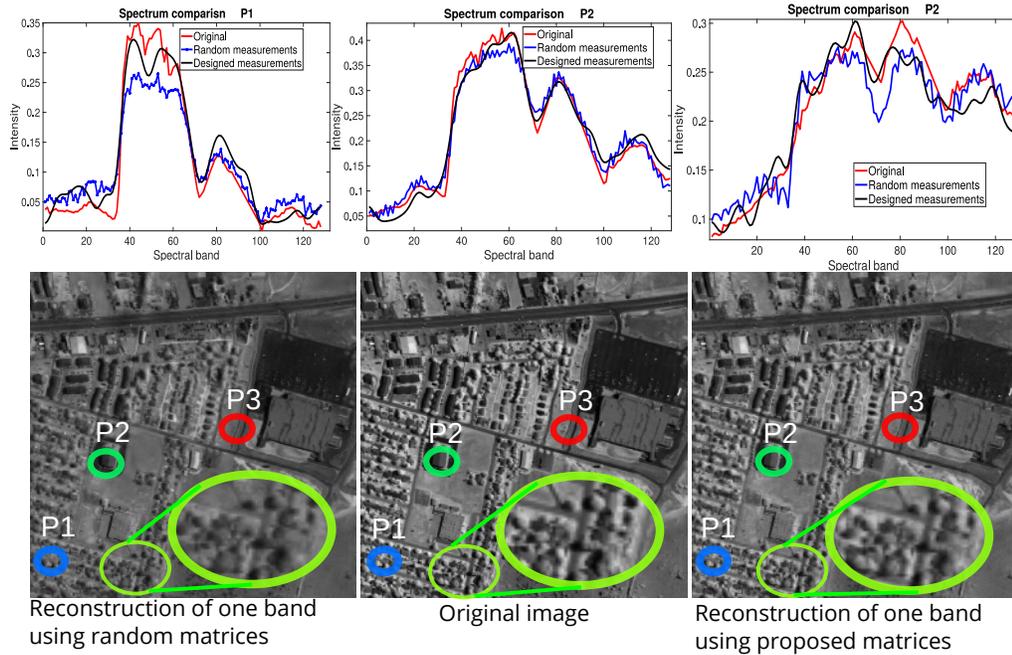


Figura 6.4: Comparación visual de la reconstrucción de algunos píxeles del cubo de datos usando 26 adquisiciones (20,31 % de los datos)

6.2. IMAGEN ESPECTRAL STANFORD LANDSCAPE

La segunda imagen utilizada fue un paisaje de la universidad de Stanford[37]. Esta imagen hiperespectral tiene 512×512 píxeles de resolución espacial y $l = 148$ bandas espectrales. Una banda espectral y tres diferentes píxeles se muestran en la Fig. 6.5. Esta imagen se divide en $p = 148$ subconjuntos.

Al igual que en la imagen anterior se probó el comportamiento de las matrices solucionando el problema de la Ec. 4.2 con un valor de $\tau = 0$. Una comparación visual de una firma espectral se muestra en la Fig. 6.6

Numéricamente, el desempeño sigue siendo superior al alcanzado con matrices aleatorias, la Tabla 6.2

Tabla 6.2: Desempeño de la reconstrucción usando como métrica PSNR y MSE

| | Aleatorias | Estimado Σ | Conocida a priori Σ |
|---|------------|-------------------|----------------------------|
| $\ \mathbf{F} - \tilde{\mathbf{F}}\ _2$ | 341.60 | 95.40 | 83.20 |
| PSNR (dB) | 20.225 | 31.469 | 31.916 |

Al igual que en la imagen anterior en el proceso de adquisición, el número de

Imagen Stanford landscape

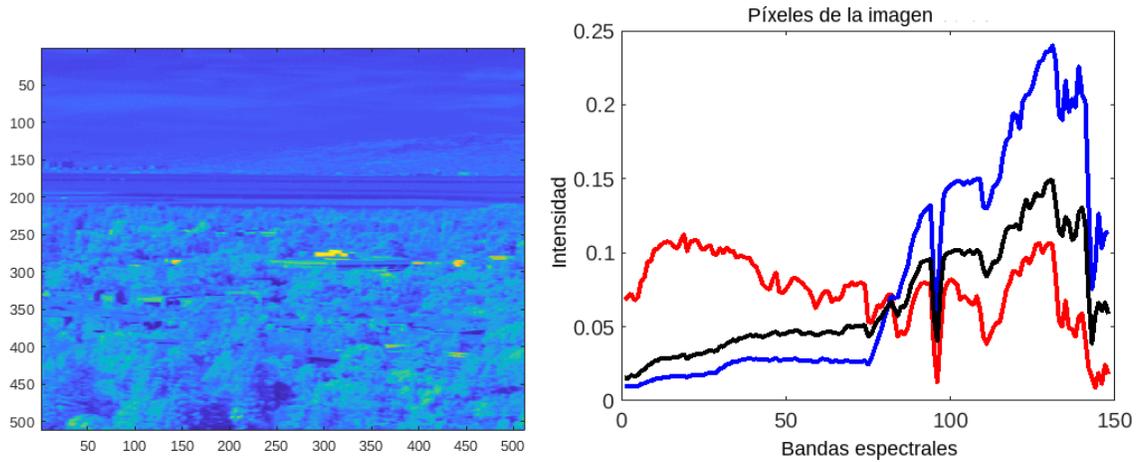


Figura 6.5: Stanford, Segundo dataset usado en simulaciones, Izquierda: distribución espacial en la 100-ésima banda espectral, derecha: 3 firmas espectrales en diferentes píxeles de la imagen

capturas varía desde 14 hasta 26. En cada caso algunas capturas fueron generadas aleatoriamente y otra parte fue diseñada siguiendo la ecuación $\text{round}(\rho v / \log l)$ con $\rho = 1$. Los Resultados usando PSNR como métrica se muestran en la Fig. 6.7. Tres diferentes escenarios se muestran: Primero, los resultados usando las matrices diseñadas imponiendo solo la restricción binaria, donde se ve que estas matrices logran una mejora de hasta 2 dB en comparación con medidas aleatorias. Cuando adicionalmente se imponen las restricciones de la arquitectura DD-CASSI en el problema, los resultados son similares a los de la primera parte. Finalmente, usando la condiciones de SSCSI la reconstrucción alcanzada utilizando las matrices diseñadas superan a las aleatorias por alrededor de 5 dB.

Comparación de firmas espectrales - Stanford landscape

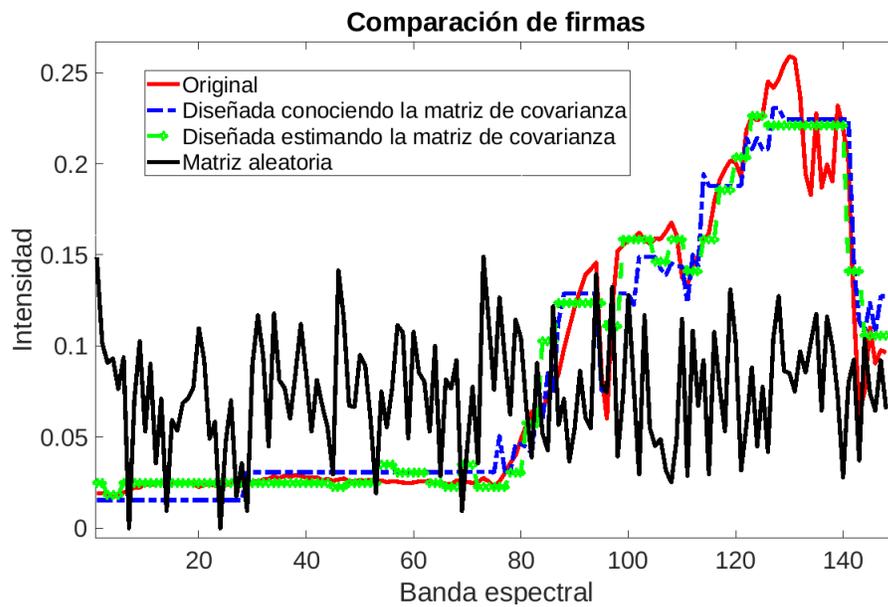


Figura 6.6: Comparación de una firma espectral de la aproximación de la imagen haciendo una pseudo-inversa con capturas 8 diseñadas y aleatorias.

Comparación del PSNR en las reconstrucciones - Stanford landscape

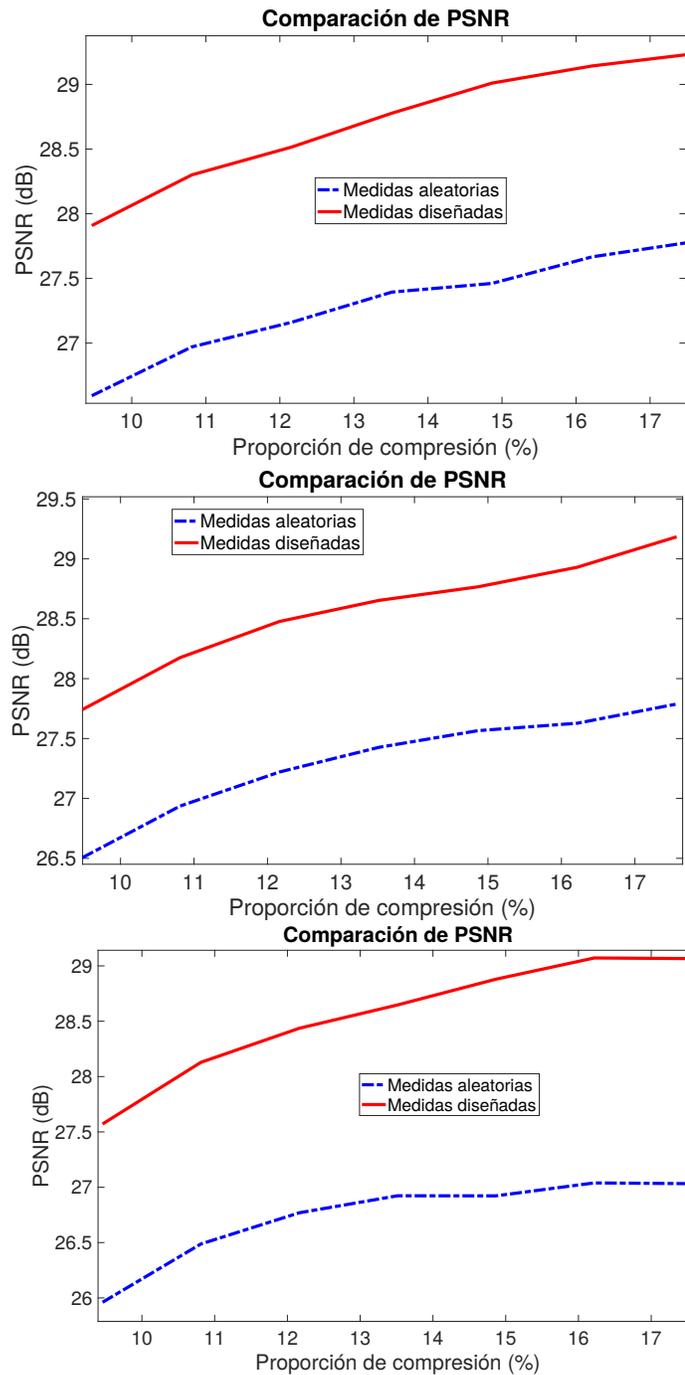


Figura 6.7: PSNR de la imagen hiperespectral reconstruida para varias tasas de compresión. Arriba: Comparación del PSNR en la reconstrucción usando matrices diseñadas y aleatorias, usando solo la restricción binaria. Medio: Comparación del PSNR en la reconstrucción usando las restricciones binaria y de la arquitectura DD-CASSI. Abajo: Comparación del PSNR de la reconstrucción usando la restricción binaria y de la arquitectura SSCSI.

Capítulo 7

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

7.1. CONCLUSIONES

Se propuso un modelo matricial para el muestreo de imágenes espectrales en arquitecturas ópticas CSI, la cual permite extraer información de forma rápida de las medidas comprimidas. Adicionalmente, el enfoque propuesto puede ser implementado en arquitecturas ópticas existentes como DD-CASSI y SSCSI para su validación.

Se diseñó un algoritmo para diseñar las matrices de muestreo basándose en PCA, se evidenció que utilizando esta estrategia se logra una mejora en la reconstrucción de hasta 5 dB en algunas imágenes espectrales. Además, este algoritmo tiene una complejidad computacional $O(dl^3)$ lo que permite implementarlo en una configuración adaptativa. El algoritmo propuesto para diseñar los vectores binarios comprime de mejor manera ya que preserva la estructura de los datos en comparación con las matrices aleatorias, esto se evidenció en la prueba donde se realiza una pseudo-inversa donde las matrices propuestas doblan en calidad a las matrices aleatorias.

Se realizaron simulaciones computacionales en dos imágenes espectrales donde se evidenció que las matrices propuestas mejoran los resultados de la reconstrucción en comparación con matrices aleatorias entre 2 y 5 dB.

7.2. TRABAJO FUTURO

El trabajo aquí presentado se validó mediante simulaciones computacionales. Sin embargo, este se puede implementar en el laboratorio para así dar mayor validez a los resultados y corroborar su efectividad ante presencia de ruido.

Adicionalmente, la estimación de la matriz de covarianza es un paso fundamental en el diseño de la matriz de sensado y también puede ser usada en para recuperar la señal directamente de las medidas comprimidas por lo que se requiere estudiar

diferentes maneras de estimar esta matriz.

Apéndice

PRUEBA DE LA COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL

Analicemos la complejidad computacional involucrada en el cálculo de la función

$$\frac{\mathbf{t}_i^T}{\|\mathbf{t}_i\|} \Sigma \frac{\mathbf{t}_i}{\|\mathbf{t}_i\|}, \quad (7.1)$$

que se usa en cada iteración en el Algoritmo 1. La complejidad $O(l^2)$ debe ser reducida pues este cálculo se hace en cada iteración. Una reducción de complejidad puede ser obtenida reutilizando el resultado de la última iteración. Primero, definamos $\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_i^{1:k-1} + \mathbf{t}_i^k$ como el vector en la k -ésima iteración lo que significa que \mathbf{t}_i tiene k unos, $\mathbf{t}_i^{1:k-1}$ tiene $k-1$ unos en posiciones seleccionadas en las $k-1$ iteraciones, y \mathbf{t}_i^k tiene solamente un uno cuya posición está en consideración. Entonces la k -ésima iteración puede ser calculada como

$$\begin{aligned} c_k &= (\mathbf{t}_i^{1:k-1} + \mathbf{t}_i^k)^T \Sigma (\mathbf{t}_i^{1:k-1} + \mathbf{t}_i^k) \\ &= c_{k-1} + 2(\mathbf{t}_i^{1:k-1})^T \Sigma \mathbf{t}_i^k + (\mathbf{t}_i^k)^T \Sigma \mathbf{t}_i^k. \end{aligned} \quad (7.2)$$

sea $\mathbf{t}_i^{1:k-1} = [t_1, t_2, \dots, t_l]$, $\mathbf{t}_i^k = [0, 0, \dots, e_k, \dots, 0, 0]$ con $t_k = 1$ y

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1^1 & \Sigma_2^1 & \dots & \Sigma_l^1 \\ \Sigma_1^2 & \Sigma_2^2 & \dots & \Sigma_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_1^l & \Sigma_2^l & \dots & \Sigma_l^l \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

El producto $\mathbf{t}_i^T \Sigma \mathbf{t}$ se puede escribir como

$$c \leftarrow \sum_{r=1}^l e_r \sum_{j=1}^l t_j \Sigma_j^r \quad (7.4)$$

El producto es solamente diferente de cero cuando $r = k$, y así el producto puede ser re-escrito como

$$c \leftarrow \sum_{j=1}^l t_j \Sigma_j^k. \quad (7.5)$$

Este producto toma solo $O(l)$.

CITAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Arce, G. R., Brady, D. J., Carin, L., Arguello, H., and Kittle, D. S. (2014). Compressive coded aperture spectral imaging: An introduction. 31(JANUARY):105–115.
- [2] Arguello, H. (2013). *CODED APERTURE OPTIMIZATION IN COMPRESSIVE SPECTRAL IMAGING*. PhD thesis, University of Delaware.
- [3] Arguello, H. and Arce, G. (2012). Restricted isometry property in coded aperture compressive spectral imaging. *2012 IEEE Statistical Signal Processing Workshop, SSP 2012*, 0:716–719.
- [4] Arguello, H. and Arce, G. R. (2013). Rank Minimization Code Aperture Design for Spectrally Selective Compressive Imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 22(3):941–954.
- [5] Arguello, H. and Arce, G. R. (2014). Colored coded aperture design by concentration of measure in compressive spectral imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23(4):1896–1908.
- [6] Bioucas-Dias, J. M., Cohen, D., and Eldar, Y. C. (2014). Covalsa: Covariance estimation from compressive measurements using alternating minimization. In *2014 22nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 999–1003.
- [7] Bruce, L., Koger, C., and Jiang Li (2002). Dimensionality reduction of hyperspectral data using discrete wavelet transform feature extraction. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 40(10):2331–2338.
- [8] Candes, E. and Wakin, M. (2008). An Introduction To Compressive Sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2):21–30.
- [9] Candès, E. J. (2008). The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathématique*, 346(9-10):589–592.

-
- [10] Candes, E. J., Romberg, J., and Tao, T. (2006). Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(2):489–509.
- [11] Candes, E. J. and Tao, T. (2005). Decoding by linear programming. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 51(12):4203–4215.
- [12] Candes, E. J. and Tao, T. (2006). Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(12):5406–5425.
- [13] Correa, C. V., Arguello, H., and Arce, G. R. (2016). Spatiotemporal blue noise coded aperture design for multi-shot compressive spectral imaging. *J. Opt. Soc. Am. A*, 33(12):2312–2322.
- [14] Craig, R. and Shan, J. (2002). Principal component analysis for hyperspectral image classification. *Surveying and Land Information Science*, 62(2):115.
- [15] Deepa, P. and Thilagavathi, K. (2015). Feature extraction of hyperspectral image using principal component analysis and folded-principal component analysis. In *2015 2nd International Conference on Electronics and Communication Systems (ICECS)*, number Icecs, pages 656–660. IEEE.
- [16] Donoho, D. L. (2006). Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(4):1289–1306.
- [17] Donoho, D. L. and Huo, X. (2001). Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(7):2845–2862.
- [18] Duarte, M. F. and Baraniuk, R. G. (2012). Kronecker compressive sensing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 21(2):494–504.
- [19] Figueiredo, M., Nowak, R., and Wright, S. (2007). Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems. *IEEE Journal of Selected Topics Signal Process*, 1(4):586–597.
- [20] Fowler, J. (2009). Compressive-Projection Principal Component Analysis. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(10):2230–2242.

-
- [21] Frentress, Z., Young, L. C., and Edwards, H. D. (1964). Field photometer with nine-element filter wheel. *Appl. Opt.*, 3(2):303–308.
- [22] Gehm, M. E., John, R., Brady, D. J., Willett, R. M., and Schulz, T. J. (2007). Single-shot compressive spectral imaging with a dual-disperser architecture. *Optics Express*, 15(21):14013–14027.
- [23] Gehm, M. E., Kim, M. S., Fernandez, C., and Brady, D. J. (2008). High-throughput, multiplexed pushbroom hyperspectral microscopy. *Opt. Express*, 16(15):11032–11043.
- [24] Guan, Y., Guo, S., Xue, Y., Liu, J., and Zhang, X. (2004). Application of airborne hyperspectral data for precise agriculture. In *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2004. IGARSS '04. Proceedings. 2004 IEEE International*, volume 6, pages 4195–4198 vol.6.
- [25] Jing Wang and Chein-I Chang (2006). Independent component analysis-based dimensionality reduction with applications in hyperspectral image analysis. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 44(6):1586–1600.
- [26] Ke, J., Ashok, A., and Neifeld, M. A. (2010). Object reconstruction from adaptive compressive measurements in feature-specific imaging. *Applied optics*, 49(34):H27–H39.
- [27] Ke, J. and Lam, E. Y. (2016). Fast compressive measurements acquisition using optimized binary sensing matrices for low-light-level imaging. *Optics Express*, 24(9):9869.
- [28] Li, W. and Fowler, J. E. (2011). Decoder-side dimensionality determination for compressive-projection principal component analysis of hyperspectral data. In *2011 18th IEEE International Conference on Image Processing*, number 2, pages 321–324. IEEE.
- [29] Lin, X., Liu, Y., Wu, J., and Dai, Q. (2014). Spatial-spectral encoded compressive hyperspectral imaging. *ACM Trans. Graph.*, 33(6):233:1–233:11.
- [30] Malloy, M. L. and Nowak, R. D. (2013). Near-Optimal Adaptive Compressed Sensing. *CoRR*.

-
- [31] Martín, G., Bioucas-Dias, J. M., and Plaza, A. (2015). Hyca: A new technique for hyperspectral compressive sensing. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 53(5):2819–2831.
- [32] Masiero, R., Quer, G., Munaretto, D., Rossi, M., Widmer, J., and Zorzi, M. (2009). Data Acquisition through Joint Compressive Sensing and Principal Component Analysis. In *GLOBECOM 2009 - 2009 IEEE Global Telecommunications Conference*, pages 1–6. IEEE.
- [33] Nyquist, H. (2002). Certain topics in telegraph transmission theory. *Proceedings of the IEEE*, 90(2):280–305.
- [34] Pearlman, J. S., Barry, P. S., Segal, C. C., Shepanski, J., Beiso, D., and Carman, S. L. (2003). Hyperion, a space-based imaging spectrometer. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 41(6):1160–1173.
- [35] Qi, H. and Hughes, S. M. (2012). Invariance of principal components under low-dimensional random projection of the data. *Proceedings - International Conference on Image Processing, ICIP*, pages 937–940.
- [36] Shannon, C. (1998). Communication In The Presence Of Noise. *Proceedings of the IEEE*, 86(2):442–446.
- [37] Skauli, T. and Farrell, J. (2013). A collection of hyperspectral images for imaging systems research. In *Proc. SPIE 8660, Digital Photography IX*, page 86600C.
- [38] Smith, W. L., Zhou, D. K., Harrison, F. W., Revercomb, H. E., Larar, a. M., Huang, H. L., and Huang, B. (2001). Hyperspectral Remote Sensing of Atmospheric Profiles from Satellites and Aircraft. *Second International Asia-Pacific Symposium on Remote Sensing of the Atmosphere, Environment, and Space*, (October):94–102.
- [39] Zhang, Y., D’Aspremont, A., and El Ghaoui, L. (2012). Sparse PCA: Convex relaxations, algorithms and applications. *International Series in Operations Research and Management Science*, 166:915–940.
- [40] Zhu, F., Wang, Y., Xiang, S., Fan, B., and Pan, C. (2014). Structured sparse method for hyperspectral unmixing. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 88:101–118.