CONSTRUYENDO LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA ADITIVO CON LA AYUDA DE LA MATEMÁTICA FORMAL Y LA MATEMÁTICA INFORMAL EN LOS NIÑOS DE PRIMER GRADO

DIANA MARCELA SERRANO RODRÍGUEZ
CAMILO RAMÍREZ MALUENDAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008

CONSTRUYENDO LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA ADITIVO CON LA AYUDA DE LA MATEMÁTICA FORMAL Y LA MATEMÁTICA INFORMAL EN LOS NIÑOS DE PRIMER GRADO

DIANA MARCELA SERRANO RODRÍGUEZ

CAMILO RAMÍREZ MALUENDAS

Trabajo de Grado para obtener el título de Licenciado(a) en Matemáticas

DIRECTOR:

CRISTIAN COGOLLO GUEVARA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2008

A mis padres.
Con su esfuerzo y dedicación,
fue posible realizar esta meta.
Ddianita.

A mis padres,
me enseñaron que los sueños,
no se sueñan,
se construyen para hacerse realidad.
Cami.

AGRADECIMIENTOS

A Leidy, Daniela, Karen, Carolina, Pilar, Juliana, y Santiago; sus deseos de aprender, hicieron posible esta investigación.

A la profesora Isa Inés; por su paciencia e interés fue posible entrar al mundo de los niños.

A Cristian Cogollo, nuestro director de proyecto, por sus orientaciones.

A nuestros padres; por el apoyo incondicional, acompañándonos en el camino que labramos para nuestro futuro.

Al grupo Edumat, especialmente Semillero Matemático, por todas las experiencias y enseñanzas compartidas.

A los profesores; por sus enseñanzas impartidas en nuestra formación.

Al profesor Gilberto Arenas, por su paciencia y comprensión en los días de trabajo.

A la profesora Diana Jaramillo, por ser fuente de inspiración y modelo a seguir.

A nuestros amigos; quienes con su apoyo y compañía, hicieron amena la vida universitaria.

A Astrid Carolina, Oscar Iván y Fadb, mis mejores amigos, por su compañía, apoyo y cariño.

A Daniel y Andrés Páez, que con sus alegrías y tristezas lograron mostrarme la fragilidad de la vida.

A Daniel Núñez, por su compañía y apoyo, durante la realización de la tesis.

A Diana y Camilo, por la amistad y ternura de muchos años compartidos, esperando sean muchos más.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	**1**
1. EMPEZANDO EL CAMINO	**5**
2. RELATANDO LA EXPERIENCIA	**16**
3. CATEGORIAS PARA EL ANÁLISIS	**84**
3.1. MATEMÁTICA INFORMAL	**85**
3.2. MATEMÁTICA FORMAL	**100**
3.3. RELACIÓN ENTRE LA MATEMÁTICA INFORMAL Y LA MATEMÁTICA FORMAL	**110**
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES FINALES	**122**
REFERENCIAS	**126**

RESUMEN

TÍTULO: CONSTRUYENDO LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA ADITIVO CON LA AYUDA DE LA MATEMÁTICA FORMAL Y LA MATEMÁTICA INFORMAL EN LOS NIÑOS DE PRIMER GRADO[*].

AUTOR: DIANA MARCELA SERRANO RODRÍGUEZ Y CAMILO RAMÍREZ MALUENDAS[**].

PALABRAS CLAVES:
1. Matemática formal. 2. Matemática informal. 3. Problemas aditivos. 4. Estrategias de tipo aditivo.

Esta investigación en el aula, se realizó en el colegio Liceo Patria, con 36 alumnos de primero primaria. En él aplicamos cinco actividades donde proponemos problemas de tipo aditivo; esas actividades son tres talleres, una carta que recibe cada niño, y una "Sala de juegos". Para poder realizar un análisis detallado de las estrategias empleadas, decidimos tomar un pequeño grupo piloto de 7 estudiantes.

La pregunta que dio origen a esta investigación es: Cuando los niños se enfrentan a situaciones problemas de tipo aditivo, ¿existirá alguna relación entre el conocimiento formal e informal del niño, y cómo se refleja en las estrategias utilizadas para resolver problemas? Para tratar de dar una respuesta acertada nos fijamos tres objetivos que son: Identificar las estrategias utilizadas por los niños al presentarles situaciones problema de tipo aditivo; analizar la relación existente entre el conocimiento formal e informal, a través de las estrategias utilizadas por los niños al resolver situaciones problema de tipo aditivo, basándonos en la teoría cognitiva; y formular unas posibles categorías donde podamos clasificar las estrategias utilizadas por los niños al resolver situaciones de tipo aditivo.

Mediante el análisis de los datos, el aporte de los autores leídos, y nuestra interpretación, proponemos unas categorías para el análisis. A través de éstas, manifestamos que la matemática informal de los niños es la base para aprender de manera significativa los algoritmos enseñados en la escuela, y éstos, a su vez, son una herramienta para interpretar y modelar las estrategias informales empleadas por ellos.

[*] Trabajo de Grado.
[**] Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas.
Director: Cristian Cogollo Guevara, Especialista en Educación Matemática.

SUMMARY

TITLE: BUILDING THE SOLUTION OF A PROBLEM ADDITIVE WITH THE HELP OF THE FORMAL MATHEMATICS AND INFORMAL MATHEMATICS IN CHILDREN OF FIRST GRADE*.

AUTHOR: DIANA MARCELA SERRANO RODRÍGUEZ Y CAMILO RAMÍREZ MALUENDAS**.

KEY WORDS:
1. Formal Mathematics. 2. Mathematical informally. 3. Problems additives 4. Strategies type additive.

This investigation in the classroom was carried out in the school Liceo Patria, with 36 students. In this we apply five activities where we propose problems additive type; those activities are three workshops, a letter that each child, and a “Room of games”. In order to perform this research we decided to take a small pilot group of 7 students.

The question that originated this investigation is: When children are facing problems of additive type, is there any relationship between formal and informal knowledge of the child, and how is it reflected in the strategies used to solve problems? To attempt to give an accurate answer we set the following three objectives: to identify the strategies used by children when presenting problem situations of additive type; to analyze the relationship between formal and informal knowledge through the strategies used by children when solving problems of additive type based on the cognitive theory; and finally, to formulate a few possible categories that allow us to classify the strategies used by children when resolving situations of additive type.

Through data analysis, the contribution of the authors, and our interpretation, we propose some categories for analysis. Through these, we manifest that the mathematical informal of the children is the basis for learning algorithms significantly taught in school and they, in turn, are a tool for interpreting and informal modeling strategies employed by them.

* Degree Project.
** College of Science, School of Mathematics, Bachelor’s Degree in Mathematics.
Director: Cristian Cogollo Guevara, Specialist in Mathematics Education.

INTRODUCCIÓN

La época escolar es muy divertida, en ella el niño es curioso del mundo, desea con ansias conocerlo y explorarlo. Él siente que la forma más sencilla de conocerlo, es tal vez, en compañía de otros como él, es en ese momento cuando surgen los amigos de la infancia, el grupo de aventuras y travesuras.

Con los amigos nace el juego y empieza a desarrollarse la imaginación. En algún momento, el pequeño grupo de amigos decide arriesgarse y tomar el rol de aventureros, se pintan una gran incursión por la selva, atravesando peligros inimaginados. Miremos el momento en que la pandilla de niños decide construir una casita, la cual será club y lugar de reuniones secretas; el niño en afán de hacer su fachada, se empeña incansablemente en buscar el sitio de construcción, los materiales adecuados, el diseño, y en últimas pone en juego toda su creatividad para llevar a cabo tan importante tarea. Al momento de construir, todos son unos arquitectos y diseñadores; es agradable observar cómo se conjugan todos sus conocimientos, actitudes y habilidades para dar solución a este tipo de problema.

Esta pequeña situación nos muestra que los niños tienen anhelos en cada momento de su vida, donde se ven envueltos en diferentes situaciones problemas. Nuestros propios recuerdos de la niñez exhiben las dificultades a las que estuvimos dispuestos a darles solución, demostrando que en nuestra curiosidad también ha existido una conducta que nos lleva a esforzarnos por superar los diferentes obstáculos. Abordemos uno en especial que involucra a los maestros de matemáticas. Imaginemos a la profesora preguntándole a Daniel: *"Si tu mamá te da para el descanso $1.000 y tu tenías $300, ¿cuánto dinero tienes ahora?"*, él responde: *"$1.300 profesora"*. Ahora, *"si tu hermana tiene $2.600, ¿cuánto dinero, más que tú, tiene tu hermana?"* -dice la profesora-. Ante esta nueva pregunta, Daniel debe buscar por medio de los conocimientos que ha adquirido una respuesta lógica que responda a la situación planteada por su profesora.

Esta pequeña historia nos demuestra que la escuela primaria es una gran fuente de exploración e investigación. En nuestro “Servicio Social Educativo y Práctica Docente I”[1] los niños nos motivaron e hicieron despertar diferentes inquietudes frente a nuestra labor como docentes. Entre todos los interrogantes surgidos, uno en especial atrajo nuestra atención; el cual es el responsable del surgimiento de nuestra experiencia y es la base de esta investigación: **Cuando los niños se enfrentan a situaciones problemas de tipo aditivo, ¿existirá alguna relación entre el conocimiento formal e informal[2] del niño, y cómo se refleja en las estrategias utilizadas para resolver problemas?**

Somos concientes que las estrategias que emplean nuestros estudiantes nos abren un sin fin de aspectos por analizar, porque cada estrategia es un proceso y una actividad mental utilizada por el niño para dar solución a una tarea propuesta; por esta razón, nuestro trabajo estará orientado por los siguientes objetivos, los cuales guiarán la escritura y el análisis de las observaciones y los datos descubiertos.

> Identificar las estrategias utilizadas por los niños al presentarles situaciones problema de tipo aditivo.
>
> Analizar la relación existente entre el conocimiento formal e informal, a través de las estrategias utilizadas por los niños al resolver situaciones problema de tipo aditivo, basándonos en la teoría cognitiva.

[1] Materia de la carrera Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, en la cual se realiza una práctica docente durante 4 meses.
[2] Según Baroody se define conocimiento formal como aquel que es impartido en la escuela, en nuestra área de investigación, la matemática simbólica y escrita. Y el conocimiento informal es el impreciso y concreto que el niño va desarrollando en la experiencia e interacción en el mundo.

Formular unas posibles categorías donde podamos clasificar las estrategias utilizadas por los niños al resolver situaciones de tipo aditivo.

Buscando cumplir estos objetivos, en la experiencia de aula, la cual fue la fuente principal para la recolección de datos, realizamos diferentes actividades. En ellas se encontraban implícitos problemas matemáticos aditivos, éstos fueron resueltos por los niños, quienes disfrutaron de completa libertad de solucionarlos, según la estrategia que consideraban conveniente. Cabe resaltar que todos tuvieron la oportunidad de desarrollarlos, pero nosotros escogimos entre ellos una pequeña muestra piloto de siete estudiantes, quienes fueron los que observamos con mayor interés, y de ellos resultó este informe de investigación.

Para finalizar, contaremos brevemente cómo está estructurado el trabajo escrito.

En el primer capítulo: *"EMPEZANDO EL CAMINO"* mostraremos detalladamente el devenir de la pregunta que dio origen a esta investigación, junto con la importancia que implica trabajar este tema en la enseñanza de la matemática. Además, comentaremos la metodología empleada, las actividades propuestas y como se llevó a cabo la recolección de datos y el análisis posterior de los mismos.

En el segundo capítulo: *"RELATANDO LA EXPERIENCIA"*, el lector conocerá las actividades realizadas, las cuales fueron base fundamental para la observación y toma de datos de esta investigación. En éste narraremos los tres talleres planteados, las actividades que denominamos "Carta a un amiguito" y "Sala de juegos". En cada una de ellas identificamos y describimos algunas de las estrategias empleadas por los niños en la solución de éstas.

El tercer capítulo: *"CATEGORIAS PARA EL ANÁLISIS"*, es un pequeño aporte a nuestra formación profesional. A través de tres categorías de análisis, recogemos la experiencia desarrollada en el aula de clase. En ellas realizamos el análisis de los datos recolectados, basándonos en los diferentes aportes de los autores leídos y nuestras propias interpretaciones.

En el cuarto capítulo: *"CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES FINALES"*, plasmamos todos los pensamientos y aportes que consideramos importantes, surgidos durante la investigación; esperando sea de gran utilidad, en búsqueda de una enseñanza y aprendizaje significativos.

Este trabajo está escrito en primera persona del plural; en lo posible tratamos de escribirlo de manera narrativa para que los lectores lo encuentren ameno e interesante y así, en alguna forma, vivan nuestra experiencia.

1. EMPEZANDO EL CAMINO

Durante nuestro “Servicio Social Educativo y Práctica Docente I” emprendimos el camino hacía la docencia; con diferentes experiencias, tanto laborales como personales, comenzamos a escribir nuestra historia profesional y a vivenciar todas las enseñanzas aprendidas en la carrera Licenciatura en Matemáticas; es preciso recordar, aquellas que nos mostraban la importancia de ser conscientes de las diferencias individuales de nuestros estudiantes, la motivación como pieza fundamental para la predisposición al aprendizaje y el gusto hacía la matemática, la relación que se establece con los estudiantes, la preparación y el trabajo que se debe llevar a cada clase, entre otras.

Es con esas experiencias que logramos observar diferentes destrezas en nuestros niños, los cuales permitieron el desarrollo ameno y continuo de las actividades programadas, pero, de igual manera, percibimos ciertas falencias que impedían, de una u otra forma, continuar con la planeación de la clase.

Uno de los factores que permitió el desarrollo agradable en las clases, fue los saberes adquiridos por el niño en el ambiente donde se desenvolvía, los cuales fueron demostrados a través de las actividades planteadas. Por medio de ellos, comprobamos que cuando enseñábamos algún concepto matemático, no era necesario partir de cero, pues los niños poseían conocimientos previos de lo que queríamos enseñar, facilitando así la enseñanza y el aprendizaje; éstos fueron más significativos, a medida que presentábamos situaciones cotidianas y familiares con las que lograba relacionarse.

En una ocasión, nos encontrábamos evaluando: *“Suma con decenas”*, en esta evaluación se encontraban tanto operaciones aritméticas, como situaciones problema. Al momento de calificarla, observamos que en algunas respuestas correctas los niños utilizaron estrategias informales, como el conteo; para nosotros ésta era acertada y la calificamos como tal, pero al momento de mostrarle las evaluaciones a la profesora, ella consideraba que esta estrategia era incorrecta, ya que no se expresaba el algoritmo de la suma, y por lo tanto la calificaba como errónea.

Al observar que algunos niños lograban modelar matemáticamente la solución, mientras que otros no, surgieron en nosotros interrogantes que apuntaban a la construcción que debía llevar un niño para poder pasar de las estrategias informales, como el conteo, al algoritmo que se desea enseñar. Pero, sin embargo, observamos a través de todas las actividades realizadas, que los niños que empleaban el algoritmo, también se basaban del conteo para poder explicar, comprender y formularlo. Así, nació en nosotros la idea de que existía una posible relación entre el conocimiento formal e informal.

Luego de observar que no era necesario partir desde cero para enseñar un concepto matemático debido a los presaberes que el niño poseía, y que existía una posible relación entre las estrategias informales y formales, decidimos indagar un poco más. En esta búsqueda Baroody (2000, p. 46) fue un gran aporte para esta investigación. Él afirma que: *"La matemática informal de los niños es el paso intermedio crucial entre su conocimiento intuitivo, limitado e impreciso y basado en su percepción directa, y la matemática poderosa y precisa basa en símbolos abstractos que se imparte en la escuela"*.

Además, los aportes de Thornton (1998, p.16) nos llevaron a comprobar la importancia de trabajar las situaciones problemas, ya que: *"El proceso de resolver problemas surge como una parte central de nuestra vida cotidiana. Comprender la resolución de problemas es arrojar una luz no sólo sobre la naturaleza de la inteligencia humana como un todo, sino sobre el núcleo mismo de la inteligencia humana".* Incluso, fue mediante las estrategias empleadas por los alumnos que logramos observar la posible relación entre los métodos informales con las enseñanzas que se desean impartir en la escuela, por esto, Kamii (1993, p.26) también fue una base en el origen de esta investigación, ella afirma que: *"Nuestras ideas sobre la enseñanza de la aritmética dependerán de cómo entendemos que los niños aprenden. En la medida en que comprendamos cómo aprenden, podremos intentar facilitar su aprendizaje".*

Con las lecturas realizadas y las experiencias vividas en clase, nos planteamos la siguiente pregunta:

Cuando los niños se enfrentan a situaciones problemas de tipo aditivo, ¿existirá alguna relación entre el conocimiento formal e informal del niño, y cómo se refleja en las estrategias utilizadas para resolver problemas?

Como mencionamos anteriormente, esta pregunta puede ser abordada o enfocada desde diferentes aspectos. Nosotros nos basamos en los siguientes objetivos para darle una solución. Estos guiaron la escritura, el análisis de las observaciones y los datos descubiertos.

Identificar las estrategias utilizadas por los niños al presentarles situaciones problema de tipo aditivo.

Analizar la relación existente entre el conocimiento formal e informal, a través de las estrategias utilizadas por los niños al resolver situaciones problema de tipo aditivo, basándonos en la teoría cognitiva.

Formular unas posibles categorías donde podamos clasificar las estrategias utilizadas por los niños al resolver situaciones de tipo aditivo.

En el "Servicio Social Educativo y Práctica Docente I", logramos observar que mediante las situaciones problema, fue que el estudiante demostraba el conocimiento lógico-matemático que hasta el momento ha adquirido tanto en su vida escolar como social. Según Kamii (1993, p.23) los conocimientos lógico-matemáticos son las relaciones creadas sobre los objetos por cada individuo, por lo tanto no son conocimientos empíricos, porque sus fuentes se encuentran en la mente de los individuos. Es por esto que, buscando observar, analizar y aportar al conocimiento lógico-matemático de nuestros estudiantes, nuestra investigación consiste en indagar sobre las estrategias que usan los niños de seis a siete años, al momento de resolver problemas de tipo aditivo.

Consideramos que es importante abordar los conceptos matemáticos a través de situaciones problema, ya que en nuestro presente, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) plantean a los docentes trabajar la resolución de problemas matemáticos, enfocando así una enseñanza para la vida diaria, formulando situaciones que el estudiante reconozca y pueda aplicar a su diario vivir.

> *"El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en practica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas".* (Lineamientos Curriculares, 1998, p. 41).

Pensamos que al observar y reconocer las estrategias de nuestros estudiantes, les permitimos construir su propio conocimiento y lo desligamos de ese aprendizaje tradicionalista que desaprueban los Lineamientos Curriculares (1998). Igualmente Kamii (1993) afirma:

> *"Los procedimientos que los niños inventan surgen de lo más profundo de su intuición y de su manera natural de pensar. Si favorecemos que ejerciten su forma genuina de pensar, en lugar de exigirles que memoricen reglas que para ellos carecen de sentido, desarrollarán una base cognitiva más sólida y una mayor seguridad".* (Kamii, 1993, p. 33).

Además, consideramos que si el docente descubre por medio del trabajo de sus estudiantes el razonamiento lógico que utilizan, entonces no parará su búsqueda en situaciones óptimas que permitirán al niño avanzar en los procesos de apropiación de nuevos conceptos, compartiendo así la idea de Baroody (2000, p.20) al decir, que la comprensión del proceso de aprendizaje puede ayudar a decidir cómo presentar un tema y hacer que los niños lleguen a dominarlo. Incluso, si el docente está dispuesto a comprender el proceso de aprendizaje de sus estudiantes, puede encontrar las falencias y así buscar diferentes métodos de aprendizaje que permitan al alumno superar o mejorar la falencia observada. Como Baroody (2000) refiere:

> *"El conocimiento del niño puede ayudar a los educadores a prever cuándo y por qué encontrará dificultades y cómo evitarlas o subsanarlas".* (Baroody, 2000, p. 20).

Una ventaja de conocer las estrategias que emplean los estudiantes para resolver problemas, es que el profesor conociendo éstas, podrá ayudar al niño a ir paso a paso, mediante actividades previamente planteadas, en la adquisición de nuevos conceptos, transformación de conocimientos existentes, y estrategias que llevarán a la comprensión, aprehensión y aplicación del modelo matemático formal. Ante esto, Baroody (2000) argumenta:

> "*Puesto que el aprendizaje implica una construcción a partir de conocimientos anteriores, el conocimiento informal desempeña un papel crucial en el aprendizaje significativo de la matemática formal. Como el aprendizaje es un proceso activo de asimilar nueva información a lo que ya se conoce, el conocimiento informal es una base fundamental para comprender y aprender las matemáticas que se imparten en la escuela".* (Baroody, 2000, p. 46).

Así, esta investigación se desarrolló en el colegio Liceo Patria Quinta Brigada con los niños de primero primaria. En este grado se encontraban 37 estudiantes, 18 niños y 19 niñas entre 6 y 7 años, donde su estrato socioeconómico, en su mayoría, era de clase media.

Somos conscientes que para el desarrollo de la investigación, debemos plantear una metodología que dé solución a la pregunta planteada bajo los objetivos propuestos. Por esta razón, la metodología que empleamos para llevar a cabo el proyecto es “investigación en el aula”, la cual, según Bastidas mencionado en Munévar, (2006), es el proceso sistemático, creativo y crítico, fruto del análisis y la reflexión de los propios docentes sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje que ocurren en el salón de clases, con miras a resolver problemas que surgen de la misma práctica.

Consideramos que este tipo de investigación nos permitió indagar, conjeturar y evaluar los problemas que surgieron del proceso enseñanza-aprendizaje; porque es en el aula donde logramos observar directamente el trabajo, las ideas, actitudes y aptitudes de nuestros estudiantes frente a la realización de las actividades planteadas.

Para esta ardua tarea nos concentramos en realizar una serie de actividades para los niños de primero primaria del Colegio Liceo Patria; con ellas buscábamos observar las diferentes destrezas y estrategias en la resolución de situaciones problemas de tipo aditivo. Todos tuvieron la oportunidad de desarrollar los talleres planteados, pero nosotros escogimos entre ellos un pequeño grupo piloto[3] de siete estudiantes, los cuales fueron elegidos después de observar tres factores que consideramos importantes para la realización de las actividades:

> Tener buen dominio de la lectura y escritura. Ya que en la realización de las actividades esperamos que el niño se desenvuelva sólo en cada taller presentado, y plasme con sus palabras las estrategias utilizadas.

> Tener un buen desempeño en la clase de matemáticas. La pregunta apunta a observar la relación entre el conocimiento matemático informal

[3] El objetivo de este grupo es describir sus estrategias empleadas en las actividades realizadas; en ningún momento buscamos realizar una comparación entre ellos y los demás niños del salón de clase.

y formal; como bien es sabido el primero es adquirido por cada niño en su interacción social y el segundo es el que se enseña en la escuela; por esto escogimos los niños que demostraron en el "Servicio Social Educativo y Práctica Docente I" un buen dominio y manejo de los dos conocimientos mencionados.

Disponibilidad al trabajo en clase, para llevar con agrado el cumplimiento en la realización de los talleres planteados.

Otros factores individuales, de cada uno de los siete niños que observamos, también influyeron en la elección de nuestro grupo piloto; estos los presentamos a continuación con la descripción de cada niño, buscando acercar un poco más al lector a la personalidad e historia que nos brindaron a través de nuestra práctica[4].

Es importante mencionar que cada una de las aficiones que mostramos de los niños, fueron conocidas a través de la actividad "Carta a un amiguito" la cual el lector conocerá en el capítulo II. En ella el niño debía comentarnos si gustaba o no de la matemática, el porqué, su afición, y diferentes aspectos generales, como el nombre de sus padres, ocupación, entre otros.

Karen: Tenía 7 años y le gustaban las matemáticas. Ella hacía parte del grupo de danzas del colegio, por lo que también le gustaba bailar y los deportes como el patinaje. Ella era una niña a la que le gustaba participar en clase y siempre buscaba responder a las preguntas planteadas en las actividades desarrolladas. Le agradaba trabajar en grupo y consideramos que era, en los trabajos grupales, en que se desenvolvía y aportaba más en la interacción de las respuestas.

[4] Debido a las sugerencias dadas por la directora de este salón, los nombres de los estudiantes en el presente trabajo fueron modificados para conservar la privacidad de los mismos.

Carolina: Tenía 7 años y le gustaban las matemáticas, porque según ella le encantaba la suma y la resta. También le fascinaba hacer tareas, ver televisión y jugar con sus amigos. Participaba poco en clase, pero en las preguntas que normalmente hacíamos, siempre buscaba una respuesta y realizaba aportes valiosos. Notamos que construyó una buena amistad con Karen, permitiéndoles realizar con agrado y eficiencia los trabajos propuestos en clase; así, sus aportes y respuestas, fueron un gran aporte durante la interacción de las actividades.

Leidy: Tenía 6 años, le gustaba la matemática y hacer las tareas que le dejaban en el Colegio. También le agradaba ayudarle a mamá en casa y ver televisión. Le llamaba la atención las actividades que planteábamos y estaba dispuesta a desarrollarlas con gusto. Siempre quería ser la primera en resolver las situaciones propuestas, y preguntaba constantemente, si lo que estaba realizando era correcto, o no.

Juliana: Tenía 6 años, le gustaban las matemáticas, jugar con su hermano menor y viajar con su papá, un comerciante de la ciudad. Era una niña que buscaba ser la "excelente"[5] del salón; siempre hacía las tareas, en las evaluaciones le iba bien, era ordenada y aplicada en el salón. A pesar de esto, había una niña que era considerada la "excelente" por parte de la profesora; razón por la cual, Juliana se esforzaba más por lograrlo, por lo que su disposición para el trabajo era agradable y sus aportes eran buenos. Ella cometía errores al querer ser la primera en terminar, eso le molestaba mucho; igualmente el no avanzar en los temas; ella decía: *"eso ya lo vimos, pasemos a otra cosa"*, pero esta dificultad se convertía en una virtud, al querer explicarle e interactuar con sus compañeros, para poder avanzar en las actividades que se desarrollaban.

[5] Al final de año, en el Colegio Liceo Patria Quinta Brigada, se escogía un estudiante por curso quien era considerado "excelente", por su buen desempeño académico y disciplinario durante todo el año escolar.

Daniela: Tenía 7 años, le gustaban las matemáticas porque, según ella aprendía muchas cosas. Le agradaba ir a la Iglesia con su mamá, y jugar con sus amigos. Ella era una niña muy participativa, siempre buscaba dar respuesta a las preguntas planteadas, analizaba detalladamente las situaciones y compartía con sus compañeros las respuestas que creía correctas, y cuando estaba segura que su análisis era el adecuado, le agradaba explicárselo a sus compañeros y pasar al tablero.

Santiago: Tenía 7 años, le gustaban las matemáticas porque le fascinaba sumar, restar y las clases que compartía con nosotros. Le gustaban los deportes, el fútbol era su favorito. Tenía una gran agilidad mental para las operaciones aritméticas, sumaba y restaba sin mayor dificultad. Le gustaba participar en clase, aunque en ocasiones no lo hacía de la mejor manera, porque, como la mayoría de los niños, lo hacía en desorden, o sus comentarios eran inadecuados, ya que en varias ocasiones le escuchamos decir: *"eso es una bobada, es muy fácil"*, aún cuando la mayoría del salón no había comprendido la solución del problema.

Pilar: Tenía 6 años, le gustaban las matemáticas porque, según ella aprendía a sumar, restar y hacer problemas. Su sueño era aprender a tocar guitarra, y ser la mejor en patinaje. Ella era considerada por la profesora la niña "excelente" del salón, y pensamos que no se equivocaba, porque además de tener un buen rendimiento académico, su disciplina y actitud llevaban a realizar un trabajo agradable. Junto con Daniela, hacía un buen equipo, y siempre se apoyaban la una en la otra en la realización de las actividades.

Cada taller fue aplicado con una duración de 2 horas los días miércoles, durante 3 semanas. Estos talleres se realizaron teniendo en cuenta los seis tipos de problemas aditivos propuestos por Vergnaud, mencionados en Gadino (1996, p.42-43). Ellos fueron abordados en los talleres de la siguiente manera:

TALLER 1.	**Tipo a:** Dos estados fijos se unen en un tercer estado fijo. **Tipo b:** Una transformación actúa sobre un estado fijo para llevarlo a otro estado fijo.
TALLER 2.	**Tipo c:** Una comparación se establece entre dos estados fijo o medidas. **Tipo d:** Dos transformaciones se componen en una transformación total.
TALLER 3.	**Tipo e:** Una transformación opera sobre un estado relativo para originar otro estado relativo. **Tipo f:** Dos estados relativos se componen para originar un nuevo estado relativo.

TABLA 1. Distribución de los tipos de problemas aditivos en los talleres.

En la cuarta semana realizamos la actividad “Carta de un amiguito”. En ella planteamos una historia donde cada niño recibía una carta de “algún niño del mundo” que necesitaba ayuda para resolver un problema matemático; la tarea de cada uno de ellos era resolverla y explicarla con sus propias palabras, de la mejor manera posible, y así poder enviársela por correspondencia a su amiguito. En ésta, también debían realizar una presentación corta donde debían escribir quiénes eran sus padres y ocupación, sus aficiones, el gusto hacía la matemática, en fin, podían narrar todo lo que quisieran contarnos sobre sí mismos.

En la quinta semana terminamos nuestra etapa de observación y recolección de datos con una actividad lúdica que implicaba juegos matemáticos, ésta se llamó: “Sala de juegos”. Se realizaron cuatro juegos y en cada uno de ellos se trabajó un tipo de problema aditivo de los ya mencionados. Es importante mencionar que en la planeación de la actividad se habían propuesto seis juegos, uno para cada tipo de problema, pero por cuestiones de tiempo, debimos modificar la actividad trabajando sólo cuatro tipos de problemas aditivos. Cabe resaltar, que las actividades realizadas en la cuarta y quinta semana, sólo se llevaron a cabo con los siete niños del grupo piloto.

Siendo extensos y muy valiosos los aportes dados por nuestros estudiantes y las actividades planteadas, consideramos pertinente llevar durante todas las clases un diario de campo, en el cual plasmamos las reflexiones, observaciones, los interrogantes que nos surgieron en la relación con nuestros estudiantes, comentarios y diferentes situaciones que nacieron en la realización de éstas. Consideramos que éste nos permitió desarrollar cierta capacidad de observación y retomar, en el momento de llevar a cabo la redacción, las situaciones que vivimos con los niños en la interacción y realización de las actividades.

También nos apoyamos de la entrevista semiestructurada. Con ella logramos formularles a los niños las diferentes inquietudes no previstas que nos surgieron en la interacción con ellos. Creemos que fue la manera más apropiada de observar las estrategias de nuestros estudiantes, debido a los aportes dados por Bermejo. Él afirma que:

> *"El método que normalmente se sigue para evaluar los procesos que los niños ponen en marcha para solucionar las tareas de adición o sustracción consiste en analizar las estrategias y los errores infantiles. A través de las entrevistas individuales el investigador puede determinar la estrategia correcta o errónea empleada por el niño, observando sus acciones con respecto a objetos o sus dedos, vigilando atentamente el modo de contar, o bien pidiendo al niño que explique cómo ha realizado la tarea".* (Bermejo, 1990, p. 127).

Para finalizar este capítulo, el análisis que realizamos a los datos fue de orden interpretativo; llevando a cabo una triangulación de datos, para ello utilizamos diferentes fuentes de información sobre el tema de nuestra investigación, con el propósito de contrastar la información recabada, y claro está, nuestras propias interpretaciones, llegando así a utilizar unas categorías emergentes para el análisis de los datos, las cuales presentamos en el tercer capítulo.

2. RELATANDO LA EXPERIENCIA

Ahora que hemos explicado la pregunta que dio origen a la investigación, los objetivos y la metodología a seguir para llevar a cabo ésta; damos inicio a las diferentes situaciones vividas en cada una de las actividades planteadas, las cuales fueron base fundamental en la observación e interacción con los estudiantes. Cabe resaltar que cada una de estas actividades se realizó con un objetivo, el cual mencionaremos con mayor énfasis en la descripción respectiva de cada una de ellas.

La experiencia de este proyecto se basó en 3 talleres, planeados y realizados, según los tipos de problemas aditivos propuestos por Vergnaud, mencionados en la Tabla 1, que se encuentra en la página 14. Además, con el ánimo de llamar un poco más la atención de nuestros estudiantes, realizamos dos actividades. Una de ellas fue “Carta a un amiguito”; la otra, una actividad lúdica la cual llamamos “Sala de juegos”.

Consideramos, al igual que Thornton (1998, p.26), que en los niños la resolución de problemas es más difícil, incluso para un adulto, en situaciones que son ajenas y desconocidas para ellos. Por esta razón, estas actividades se planearon teniendo en cuenta situaciones que considerábamos, no le eran desconocidas al niño; creando historias, situaciones y preguntas que no estuvieran fuera de su contexto.

A modo de resumen, nuestras actividades las podemos enumerar de la siguiente manera. Cabe resaltar que el orden en que el lector las lee, es la secuencia en la que se vino aplicando en el aula de clase.

Taller 1: *HOLA AMIGUITOS*.

Taller 2: *VAMOS A JUGAR FÚTBOL*.

Taller 3: *SEMBREMOS CON ANDRÉS*.

CARTA A UN AMIGUITO.

SALA DE JUEGOS.

Con los niños tuvimos la oportunidad de reunirnos los días miércoles, siendo este día en el cual compartíamos las experiencias. Esta situación surgió porque era el único día de la semana en el que los niños tenían dos bloques[6] seguidos de matemáticas; el encuentro comenzaba a las 12:40 p.m. y finalizaba a las 2:20 p.m. En ocasiones se presentaban inconvenientes, porque los niños no alcanzaban a finalizar las actividades, frente a esto, la profesora nos permitía unos minutos para no dejar inconclusos los talleres.

Anteriormente mencionamos, que el objetivo de este capítulo, es narrar las diferentes situaciones vividas en la experiencia con los estudiantes, por esta razón en los siguientes párrafos contaremos las estrategias empleadas por los niños en la solución de las actividades, y diferentes anécdotas de nuestra práctica, vividas durante la realización de éstas.

Comencemos por el primer taller: “Hola amiguitos”. Éste se realizó el 24 de octubre de 2007. En él, abordamos situaciones teniendo en cuenta los dos primeros tipos de problemas aditivos, propuestos por Vergnaud, mencionados en Gadino (1996, p. 42).

Cabe mencionar que Vergnaud, citado en Gadino (1996, p.42), enuncia la *ley de composición interna*, la cual se refiere a la composición de dos números de la misma naturaleza. Él afirma que esta ley es insuficiente, porque no puede caracterizar diferentes relaciones numéricas que conciernen a la suma; por

[6]En el colegio la jornada escolar está constituida por 6 bloques. Cada uno de ellos tiene una duración de 50 minutos.

esta razón reconoce, en diferentes situaciones aditivas, transformaciones, comparaciones y estados fijos y relativos, que intervienen en los problemas aditivos. Así, propone los seis tipos de estructuras aditivas.

Después de observar la clasificación realizada por Vergnaud, reconocimos que el nivel de dificultad en los problemas aditivos va aumentando, por esta razón decidimos abordarlos en orden. Por lo tanto, este taller se basó en los siguientes tipos de problemas aditivos:

Tipo a: *Dos estados fijos se unen en un tercer estado fijo.*

Tipo b: *Una transformación actúa sobre un estado fijo para llevarlo a otro estado fijo*.

Para observar las estrategias del tipo aditivo **a)**; formulamos las siguientes situaciones:

> En el parqueadero de mi colegio hay 4 motos, 5 carros y 6 camionetas. ¿Cuántos vehículos hay en el parqueadero de mi colegio?
>
> Natalia se disfrazó el día de las brujitas. Al salir a la calle, la tía Mery le regaló 8 caramelos, en la casa 23 del barrio recogió 5 colombinas, y la vecina Sara le dio 12 chocolates. Como ya es de noche, Natalia se va a la casa y allí sus padres le dan 4 galletas.
>
> ¿Cuántos chocolates y galletas recogió Natalia?
> ¿Cuántas colombinas y caramelos recogió Natalia?
> ¿Cuántos dulces recogió Natalia en todo el día de las brujitas?

Los “estados fijos”, mencionados en los tipos de problemas citados, son valores exactos, que no dependen de otra cantidad para ser hallado.

En el tipo aditivo **a)** podemos trabajar con diferentes estados fijos, siempre y cuando la transformación apunte a la unión de ellos; así, por ejemplo, en la primera situación, cada estado fijo es la cantidad de motos, carros y camionetas. La pregunta: *¿Cuántos vehículos hay en el parqueadero de mi Colegio?*, lleva a unir todos los estados fijos, para formar uno nuevo, que en esta situación, es la cantidad de vehículos.

En la segunda situación, cada estado fijo es la cantidad de galletas, chocolates, caramelos y colombinas. La pregunta: *¿Cuántos dulces recogió Natalia en todo el día de las brujitas?*, da paso a unir todos los estados fijos, para conocer el nuevo estado, que es la cantidad de dulces.

En cada uno de los problemas presentados, subrayamos los estados fijos. La pregunta realizada, en cada situación, da pie a unirlos, para llegar así a otro estado fijo.

Para observar las estrategias del tipo aditivo **b)**; formulamos las siguientes situaciones:

> La profesora Isa se encontró el lunes 6 colores; el martes 4 colores y 10 colores el miércoles. ¿Cuántos colores encontró la profesora Isa en los tres días?
>
> Sebastián fue ayer con su papá a ver el partido de baloncesto entre los Arrieros de Medellín, y los Leopardos de Bucaramanga. El primer tiempo el marcador fue 23-14 a favor de los Leopardos. En el segundo tiempo Leopardo hizo 21 cestas y Arrieros 22. En el tercer tiempo Arrieros hizo 20 cestas y Leopardos 23. En el último tiempo Leopardos hizo 27 cestas y Arrieros 28. ¿Quién ganó el partido? ¿Cuál fue el resultado final?

En el tipo aditivo **b)** la transformación debe actuar sobre un único estado fijo. Así, la transformación que opera, en la primera situación, es el hecho de *"encontrar colores"* que lleva a modificar el estado fijo, que en este caso, son los 6 colores encontrados el primer día. En la segunda situación, el estado fijo son los resultados del primer tiempo; la transformación, son los puntos o cestas, que hacen cada equipo en los siguientes tres tiempos mencionados. La pregunta realizada, en cada situación, lleva a tener en cuenta las transformaciones para llegar así, a otro estado fijo.

En cada uno de los problemas, subrayamos las transformaciones y el estado fijo que actúan en las situaciones.

Esta actividad sirvió también como diagnóstico. Con ella puesta en escena y analizando sus resultados, aparecieron los actores principales del grupo piloto.

La realización de esta experiencia apuntaba a reconocer la motivación que los niños demostraban durante su desarrollo y el gusto con el que la realizaban. Es claro que otro papel que desempeñó este taller, fue observar las diferentes estrategias que los niños desarrollaban en la resolución de problemas de tipo aditivo. La motivación que queríamos despertar en los niños, con esta y las otras actividades, era, como afirma Thornton (1998 p.11), buscar una concentración total, crear una intensa excitación y entusiasmo que pudiera ser difícil persuadirles de que abandonaran la actividad, generando indisciplina.

A continuación compartiremos con el lector el taller "Hola amiguitos" que recibieron los niños[7].

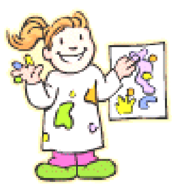
[7] Aclaramos al lector, que todos los talleres y las cartas sufrieron unos cambios en los espacios entre los párrafos, con el fin de crear una armonía en su presentación en la investigación.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO TRABAJO DE GRADO II

NOMBRE:____

HOLA AMIGUITOS.
En la clase de hoy vamos a ayudar a nuestros amigos a resolver las situaciones que ellos nos presentan.
Si no logras solucionarlos, escribe las dificultades que tuviste para resolverlo.
¡VAMOS A TRABAJAR!

En el parqueadero de mi Colegio hay 4 motos, 5 carros y 6 camionetas. ¿Cuántos vehículos hay en el parqueadero de mi Colegio?



La profesora Isa se encontró el lunes 6 colores; el martes 4 colores y 10 colores el miércoles. ¿Cuántos colores se encontró la profesora Isa en los tres días?

Natalia se disfrazó el día de las brujitas. Al salir a la calle, la tía Mery le regaló 8 caramelos, en la casa 23 del barrio recogió 5 colombinas, y la vecina Sara le dio 12 chocolates. Como ya es de noche, Natalia se va a la casa y allí sus padres le dan 4 galletas.

¿Cuántos chocolates y galletas recogió Natalia?
¿Cuántas colombinas y caramelos recogió Natalia?
¿Cuántos dulces recogió Natalia en todo el día de las brujitas?

Sebastián fue ayer con su papá a ver el partido de baloncesto entre los Arrieros de Medellín, y los Leopardos de Bucaramanga. El primer tiempo el marcador fue 23-14 a favor de los Leopardos. En el segundo tiempo Leopardo hizo 21 cestas y Arrieros 22. En el tercer tiempo Arrieros hizo 20 cestas y Leopardos 23. En el último tiempo Leopardos hizo 27 cestas y Arrieros 28. ¿Quién ganó el partido? ¿Cuál fue el resultado final?

Siendo uno de los objetivos, describir las estrategias empleadas por los niños, queremos mostrar al lector algunas de las respuestas presentadas en los talleres, sin realizar algún análisis detallado sobre ellas.

A medida que los niños trabajaban en los talleres, nosotros interactuábamos constantemente con ellos para poder observar, escuchar y analizar, sus ideas, opiniones y estrategias empleadas. Así, para dar cumplimiento al primer objetivo planteado: “Identificar las estrategias utilizadas por los niños al presentarles situaciones problema de tipo aditivo” nos apoyamos en la elaboración de las tablas que el lector podrá observar en la solución presentada en cada taller, en ellas damos una clasificación de las estrategias empleadas por los niños.

Es importante mencionar que en cada una de las tablas presentamos la cantidad de niños, tanto del grupo piloto como del resto del salón, que emplearon la estrategia mencionada. El objetivo de esta cuantificación no es comparar o contrastar el trabajo, las estrategias o el rendimiento del grupo piloto con los demás niños con quienes realizamos las diferentes actividades; sino mostrar grosso modo el trabajo efectuado por todos los niños; creemos que así, podrá observar cuál es la estrategia predilecta, si las estrategias informales o el algoritmo; o cuál estrategia es la menos empleada, en fin, estos son sólo unos posibles análisis que podría realizar el lector, al observar el trabajo realizado en el aula por todos los niños.

En la primera situación consideramos que la respuesta es fácil de hallar. Con el fin de indagar un poco decidimos preguntar a los niños las estrategias que emplearon para obtener la solución. Quisimos dar una clasificación a las respuestas dadas por ellos en cada pregunta del taller, por esta razón decidimos reunir los datos en la siguiente tabla.

Estrategia.	Grupo piloto	Todos - G.P[8].
Representación visual o concreta.	1	9
Representación visual y algoritmo.	4	10
Algoritmo.	2	0
Sin respuesta.	0	10

Tabla 2. Estrategias empleadas en el primer punto, taller "Hola amiguitos".

Como observamos, la tabla está representada por cuatro niveles. En el primer nivel "Representación visual o concreta", se clasifican los niños que hicieron uso de técnicas como contar con los dedos, palitos, carritos o cualquier clase de objetos, con el propósito de hallar respuesta acertada al problema.

Muchos niños para dar solución a esta situación, representaban por medio de un palito cada vehículo (ver Figura 1), es decir, hacían una relación unívoca, por un vehículo contado, se trazaba un palito.

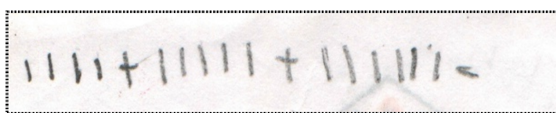


Figura 1. ("Hola amiguitos", oct. 24 de 2007).

Logramos observar que entre los niños esta estrategia era la más utilizada, ya que les proporcionaba un método eficiente para hallar la solución al problema. De igual manera como lo afirma Baroody (2000, p.130) los niños emplean objetos concretos para calcular la suma.

Un niño aplicó este mismo planteamiento; sólo que en lugar de palitos, dibujó las motos, carros y camionetas, mencionadas en la situación (ver Figura 2). Cabe resaltar, que a pesar de este procedimiento, el niño no logró dar una solución a esta pregunta; mostrando así una de las etapas mencionadas, en la

[8] Se refiere a los niños del salón con excepción del grupo piloto.

resolución de problemas por medio de dibujos, por Ignez y Stocco (2001, p.126), la cual consiste en: *“El resolvente utiliza un dibujo para representar aspectos de las situaciones presentadas en el texto, más no expresa relaciones que identifiquen las transformaciones numéricas o que indique que estuviese resolviendo un problema a través del dibujo”[9].*

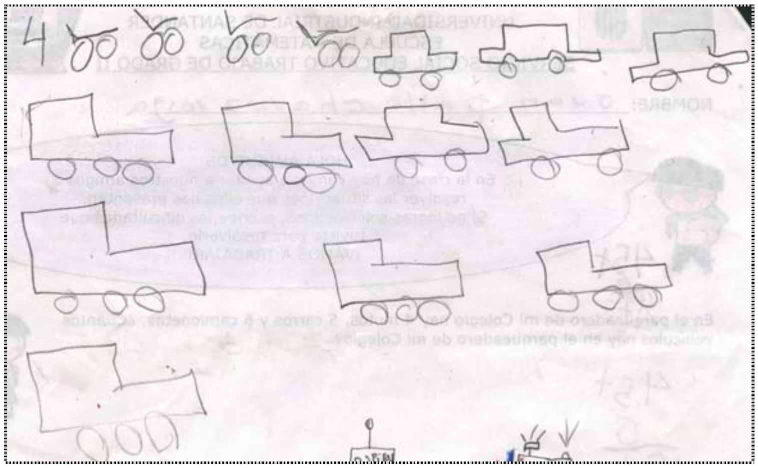


Figura 2. (“Hola amiguitos”, oct. 24 de 2007).

“Representación visual con algoritmo”, es el nivel donde clasificamos los niños que hicieron uso de una representación visual y también del algoritmo de la suma, para dar la solución; es decir, los niños partían de palitos, contar con sus dedos, o bolitas, para comprender la situación y obtener una respuesta. Después de ejecutar esta estrategia, procedían a escribir el algoritmo de la suma que modelaba la construcción realizada para hallar la solución.

Para ejemplificar esta estrategia empleada, mostramos el trabajo realizado por Carolina en la primera situación.

---

[9] El texto es traducido del portugués al español por los investigadores; por lo tanto no tiene revisión técnica.

Ella primero realizó la siguiente estrategia:

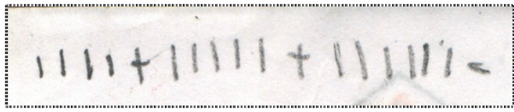


Figura 3. (Carolina, “Hola amiguitos”, oct. 24 de 2007).

Luego de realizar la representación visual de la situación, logró modelar por medio del algoritmo la estrategia y solución hallada de ésta (ver Figura 4).

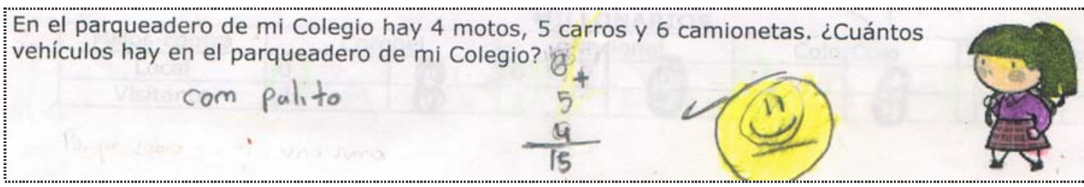


Figura 4. (Carolina, “Hola amiguitos”, oct. 24 de 2007).

“Algoritmo” es el nivel donde se encuentran los niños que solamente modelaron la situación, haciendo uso del algoritmo de la suma.

Santiago, tenía escrita una suma de manera vertical, dijo: *“4 más 5 da 9, y 9 más 6 da 15”.* Esta suma la realizó por medio del cálculo mental; daba la impresión que el resultado de estos números los tenía memorizados. Pero al comparar las palabras de Santiago con su procedimiento formal, encontramos unas coincidencias interesantes.

Él, para poder hallar la suma de manera formal, tenía que escribir dos sumandos, hallaba la suma y después de obtener el resultado, agregaba el tercer sumando (ver Figura 5). Como se puede observar, para realizar el cálculo mental y escrito, utilizaba la misma estrategia, agrupaba los sumandos en parejas y realizaba la operación, en otras palabras, sumaba paso a paso.

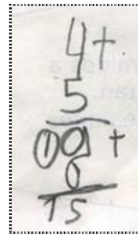


Figura 5. (Santiago, "Hola amiguitos", oct. 24 de 2007).

Por otro lado, Pilar había escrito la suma horizontalmente. Al preguntarle: *¿Cómo llevaste a cabo esa suma?*, ella respondió: *"con los dedos",* al decir esto tomó cuatro de sus dedos de la mano derecha y cinco de su mano izquierda, al contarlos todos obtuvo nueve. Ahora debía agregar *"6"*, el cual descompuso de la siguiente manera: **6=5+1** para poder realizar la siguiente estrategia: Al *"9"* que había obtenido en la suma 5+4, le agregó un dedo para obtener diez, luego tomó todos los dedos de una de sus manos, los agregó al resultado anterior para, por medio del conteo, conocer el resultado. Frente a esta estrategia, queremos resaltar la necesidad de descomponer el *"6"* en sumandos, 6=5+1, y de este modo por medio del conteo poder completar la decena, y así resolver fácilmente la suma, es decir, consideramos que para ella resultaba más eficiente sumar 10+5, que 9+6.

En esta situación, observamos también que Pilar realiza el algoritmo, pero para poder explicar el proceso efectuado, utilizaba estrategias informales, como lo es el conteo con los dedos. Consideramos que éstas, generaban en ella seguridad y le permitían mostrar que el algoritmo planteado era válido, porque lo explicaba mediante objetos concretos.

En la siguiente "Tabla 3" veremos los resultados obtenidos en la segunda pregunta: *"La profesora Isa se encontró el lunes 6 colores; el martes 4 colores y 10 colores al miércoles. ¿Cuántos colores se encontró la profesora Isa en los tres días?"*

El análisis de las respuestas de los niños, se realizó teniendo en cuenta la clasificación mencionada anteriormente.

Estrategia	Grupo piloto	Todos – G.P.
Representación visual.	1	9
Representación visual con algoritmo.	3	9
Algoritmo.	3	5
Sin respuesta.	0	6

Tabla 3. Estrategias empleadas en el segundo punto, taller "Hola amiguitos".

Sobre las soluciones dadas en este punto, comentaremos algunas que hacen parte de la estrategia "Algoritmo", dado que hablar de las otras estrategias, sería repetir lo mencionado en el primer punto.

Veamos, por ejemplo, la solución dada por Daniela. Ella escribió la siguiente suma:

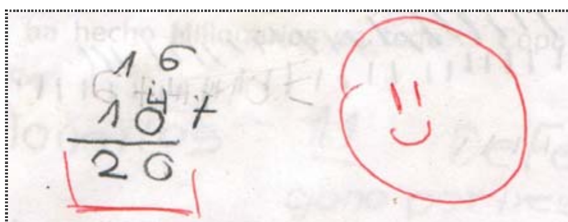


Figura 6. (Daniela, "Hola amiguitos", oct.24 de 2007).

Al momento de observar la respuesta, notamos que es correcta pues ese es el resultado de los colores encontrados, pero *¿por qué 16+4+10 da como respuesta 20?* Si observamos solamente el algoritmo en la Figura 6, podríamos decir que el proceso efectuado es erróneo y que el análisis realizado al problema también lo es, ya que el problema no menciona el valor *"16"*. Antes de dar cualquier juicio pensamos en analizar con mayor atención la respuesta dada, mejor aún, decidimos pedirle a Daniela que nos explicara el proceso efectuado en la realización del algoritmo, porque así podíamos descartar el hecho de haberle copiado a algún compañero. Ella nos dijo lo siguiente: *"6+4 es 10"* y al momento de decir esto, señaló el *"1"* que acompaña al *"6"*. En ese instante observamos que Daniela realmente comprendía el algoritmo de la suma, puesto que ese *"1"* que estaba generando malas interpretaciones, hacía parte del proceso a seguir para realizar correctamente la suma planteada.

En esta situación, queremos resaltar la importancia de observar, analizar y permitirle al niño expresar sus estrategias, porque mediante ellas, podemos distinguir los conceptos que son significativos para él; comprender cómo abordan un problema; y las estrategias empleadas, ya sean formales o informales; además, como afirma Baroody (2000, p.73), *"El examen de las estrategias empleadas por un niño puede indicar si en realidad entiende o no un procedimiento empleado correctamente, o incluso si usa un procedimiento correcto para obtener respuestas correctas".*

No todos los niños dieron respuestas correctas; algunos produjeron inconsistencias y errores en la aplicación del algoritmo de la suma. Veamos algunas de esas equivocaciones cometidas en el desarrollo de los talleres.

En la interacción con todos los niños, uno de ellos produjo la siguiente suma:

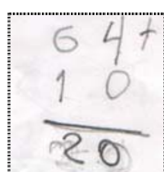


Figura 7. ("Hola amiguitos", oct. 24 de 2007).

Este error lo observamos en los niños que buscaban escribir el algoritmo de la suma para presentar su respuesta, aún cuando habían utilizado estrategias informales para dar solución a esta situación.

También encontramos que algunos de ellos escribían la suma de manera vertical, pero se les olvidaba escribir el signo más "+" (ver Figura 8). Esto se debía a que ellos querían trabajar con rapidez para mostrarnos su procedimiento y obtener una "carita feliz"; esta carita les permitía continuar resolviendo el siguiente problema. Como afirma Baroody (2000, p.55) *"muchos niños realizan las matemáticas escolares a la ligera".*

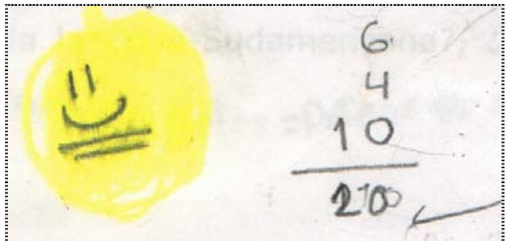


Figura 8. (Carolina, "Hola amiguitos", oct. 24 de 2007).

Podemos decir que los niños tienden a olvidar ciertos detalles que son importantes para el cálculo escrito, ya que si omiten en la escritura, dígitos o signos, otras personas podrían mal interpretar la respuesta dada, pensando que el niño no comprende el empleo del algoritmo.

Una vez más, mediante los dos ejemplos anteriores, queremos destacar la importancia de escuchar e interactuar con los estudiantes en las estrategias empleadas, dado que, nuevamente, si observábamos en el primer ejemplo, solamente el algoritmo planteado, podíamos concluir que el niño no comprendió la situación y que el proceso o la solución de la suma era errónea, porque si realizamos la operación, como el niño la planteó, el resultado debería ser *"74".* Luego de interactuar con él, nos explicó el algoritmo de la siguiente manera: *"6+4 es 10 y 10 da 20".* A pesar que, formalmente, el algoritmo planteado es erróneo y observamos que el niño no percibe la importancia de la posicionalidad, porque consideraba el *"6"* escrito en la posición de las decenas, como 6 unidades; sí queremos mostrar la importancia de dejar que los niños empleen sus propias estrategias e inventen métodos para dar solución a las diferentes situaciones planteadas, ya que poco a poco, por medio de la interacción con sus compañeros, profesores y demás, y por medio de las diferentes actividades que resolverá tanto en el aula como en su diario vivir, podrá mejorar, evolucionar y cambiar las herramientas existentes en su banco de estrategias. Esta es una de las concepciones de la enseñanza y el aprendizaje, bajo los cuales Kamii (1995, p.47) argumenta que, es importante, que los niños reinventen la aritmética; ella afirma que: *"Los primeros métodos de los niños son indiscutiblemente ineficaces. Sin embargo, cuando los niños tienen libertad para pensar por su cuenta, inventan procedimientos cada vez más eficaces (...). Cuando tratamos de que los niños pasen por alto el proceso constructivo, les impedimos comprender la aritmética".*

Frente a esto, queremos mostrar el ejemplo de otro niño que escribió el algoritmo de igual manera pero con diferente resultado. Él sumó y obtuvo 74 (ver figura 9).

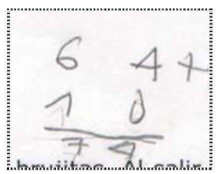


Figura 9. ("Hola amiguitos", oct. 24 de 2007).

Después de interactuar con él, y preguntarle si era posible obtener ese resultado, el *"74"*, el niño dijo: *"No, porque es un número muy grande"*¸ luego de comprender y haber caído en cuenta de su error, recontó por medio de sus dedos y obtuvo la respuesta correcta, es decir, comprendió que la estrategia empleada no era adecuada pues lo había llevado a cometer un error, razón por la cual decidió cambiar su estrategia, basándose en el conteo, una estrategia informal, para obtener así la respuesta correcta. El objetivo de este ejemplo, es mostrar que realmente el niño después de interactuar, reflexionar y analizar las estrategias, procesos, y soluciones planteadas, puede mejorar, cambiar y evolucionar los procesos de construcción y análisis de una situación problema.

A medida que los niños trabajaban nos acercábamos a ellos, en una ocasión le preguntamos a Pilar: *¿por qué haces una suma?*, ella respondió: *"porque yo ya he hecho problemas de estos, y sé que es así".* Pensamos, al igual que

Thornton (1998, p.67) "*Sí una persona puede reconocer que un problema actual es análogo a otro que ya sabe cómo resolver, puede solucionar el nuevo abordándolo con las mismas estrategias que utilizó para el antiguo".*

Para la tercera pregunta quisimos plantear un problema más estructurado, donde los niños tuvieran que clasificar la información, y de ese modo descubrir los datos relevantes e importantes de la situación. Para llevar a cabo esta idea decidimos introducir un dato numérico sin importancia alguna sobre los demás.

Recordemos la tercera situación planteada:

Natalia se disfrazó el día de las brujitas. Al salir a la calle, la tía Mery le regaló 8 caramelos, en la casa 23 del barrio recogió 5 colombinas, y la vecina Sara le dio 12 chocolates. Como ya es de noche, Natalia se va a la casa y allí sus padres le dan 4 galletas.

¿Cuántos chocolates y galletas recogió Natalia?
¿Cuántas colombinas y caramelos recogió Natalia?
¿Cuántos dulces recogió Natalia en todo el día de las brujitas?

En el aula de clase los niños no sabían cómo proceder a esta situación; la mayoría se encontraban sumando todos los valores numéricos dados en el problema. Esto se debió porque no leyeron la situación completamente; ninguno de ellos reconoció que después de narrar la situación, venía un espacio, y que después de éste, se encontraban las preguntas correspondientes a la situación. Esto nos pareció extraño, por lo tanto preguntamos a Leidy: *¿por qué estás sumando todos los valores numéricos que se encuentran en el problema?;* ella nos respondió*, "Profesores, porque en los dos ejercicios anteriores sumamos, entonces en este también hay que sumar, y el taller que estamos realizando es completamente de suma".* Thornton (1998, p.87) afirma que cuanto más éxito haya tenido una estrategia en una situación, lo más probable es que el niño escoja de nuevo esa estrategia. Lamentablemente en esta ocasión, esta estrategia los llevaba a un error.

Afortunadamente notamos que los niños no estaban atentos al taller, porque no leían completamente el enunciado del problema, procedieron de esa manera porque no encontraban las preguntas a continuación del punto final. Una niña se nos acercó y preguntó: *¿Qué hay que hacer?*

En la Tabla 4 queremos mostrar los resultados de los niños que sumaron los datos encontrados en el problema, sin haber comprendido la situación, es decir, no habían leído las preguntas, para mostrarle al lector que realmente esta falencia produjo inconsistencia y errores en la resolución de esta pregunta.

	Grupo piloto.	Todos-Grupo piloto.
Resolución del ejercicio sin leerlo y dejándose llevar por el anterior.	7	15
No abordaron la situación.	0	14

Tabla 4. Error cometido en la tercer pregunta, taller “Hola amiguitos”.

Cuando caímos en cuenta de esta situación, decidimos intervenir. Primero leímos todo el problema y les hicimos notar las tres preguntas que se encontraban un poco abajo del párrafo, explicándoles que ellas hacían parte de la situación.

Con esta pequeña explicación, los niños nos dieron pauta para realizar una nueva tabla de datos; en ella se plasma la cantidad de niños que corrigieron y no, el anterior error cometido. En ésta sólo se encuentran los 22 niños que sí abordaron la situación, mencionados en la Tabla 4.

	Grupo-grupo piloto	Grupo Piloto
Corrigieron	8	7
No corrigieron	7	0

Tabla 5.

Leidy dio como respuesta *"16"* al primer interrogante. Ella reconoció que Natalia tenía 12 chocolates y 4 galletas, y la pregunta apuntaba a observar estos dos valores. La suma la realizó por medio de sus dedos, dijo: *"12"*, luego mostró cuatro de sus dedos y empezó a contar *"13, 14, 15 y 16"* (ver Figura 10), a medida que pronunciaba un número iba escondiendo un dedo de su mano.

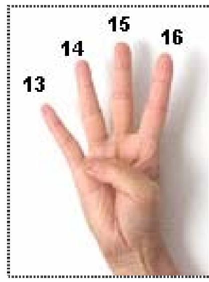


Figura 10.

Para la tercera pregunta realizada en esta situación, Juliana comprendió que para obtener una respuesta correcta, tendría que sumar los dulces, aquí percibió que el número 23 no tenía ninguna relación con la cantidad de dulces. Por eso, sólo tomó el *"16"* y el *"13"*, que fueron las soluciones de las dos primeras preguntas, y las sumó; de ese modo obtuvo la respuesta correcta. Juliana no manejaba muy bien el algoritmo para sumar con dos cifras, así la mejor manera que encontró para realizar la suma fue con palitos; dibujó 16 palitos y luego 13 para al final contarlos todos.

Para la última situación los niños necesitaban sumar; ordenar y clasificar la información. A través de ésta, queríamos observar la forma en que usaban el razonamiento argumentativo; y para ello, la primera pregunta no apuntaba a un valor numérico, sino que debían dar una afirmación, donde su argumento era el valor encontrado.

Recordemos el cuarto punto:

Sebastián fue ayer con su papá a ver el partido de baloncesto entre los Arrieros de Medellín, y los Leopardos de Bucaramanga. El primer tiempo el marcador fue 23-14 a favor de los Leopardos. En el segundo tiempo Leopardo hizo 21 cestas y Arrieros 22. En el tercer tiempo Arrieros hizo 20 cestas y Leopardos 23. En el último tiempo Leopardos hizo 27 cestas y Arrieros 28. ¿Quién ganó el partido? ¿Cuál fue el resultado final?

Los niños se dieron cuenta que este problema implicaba mucho esfuerzo; unos se despreocuparon y recurriendo a la “ley del menor esfuerzo”: adivinar la respuesta, y a partir de ella argumentar. Esto lo reconocimos inmediatamente cuando preguntamos al grupo: *¿Cuál equipo ganó el juego?*, un niño respondió, *“los Leopardos profesor”*, cuando preguntamos el porqué, absolutamente ningún niño logró argumentar. De igual manera Thornton (1998, p.77) afirma: *“Adivinar puede ser igual de útil. Factores como éste pueden explicar por qué los niños pequeños planearán en situaciones simples pero actuarán impulsivamente sin recurrir a ello en situaciones más complejas”.*

En la siguiente tabla queremos mostrar la cantidad de niños que buscaron resolver la situación bajo una argumentación razonable, diferente a la de adivinar.

	Grupo piloto	Todos-Grupo Piloto
Niños que intentaron resolver el problema.	5	9
Niños que no intentaron resolver el problema	2	19

Tabla 6. Niños que buscaron resolver la cuarta situación, del taller “Hola amiguitos”.

Algunos niños emplearon estrategias interesantes, veamos algunas.

Pilar tomó dos colores diferentes, al equipo de Leopardo lo subrayó de verde junto con los puntos hechos por él durante cada tiempo, de igual manera lo hizo para los Arrieros utilizando el color naranja (ver Figura 11). De este modo la niña podía reconocer los puntos hechos por cada equipo y no confundirse en la suma. Al sumar los puntos de cada equipo reconoció que los Leopardos habían hecho más puntos. Esta fue la estrategia empleada por la niña, para afirmar que habían ganado los Leopardos.

> Sebastián fue ayer con su papá a ver el partido de baloncesto entre los Arrieros de Medellín, y los Leopardos de Bucaramanga. El primer tiempo el marcador fue 23-14 a favor de los Leopardos. En el segundo tiempo Leopardo hizo 21 cestas y Arrieros 22. En el tercer tiempo Arrieros hizo 20 cestas y Leopardos 23. En el último tiempo Leopardos hizo 27 cestas y Arrieros 28. ¿Quién ganó el partido? ¿Cuál fue el resultado final? 94 – 97

Figura 11. (Pilar, "Hola amiguitos", oct. 24 de 2007).

Por el contrario, Juliana identificó los puntos obtenidos por cada equipo y los escribió de manera horizontal; para poder encontrar la suma recurrió al método de dibujar palitos. Algunos niños reconocieron que esta estrategia era tediosa, porque estimaron y comprendieron que obtendrían un número grande[10]; por esto, prefirieron evitar hacer una cantidad enorme de palitos y se inclinaron por representar la situación por medio del algoritmo de la suma. Concordamos con Baroody (2000, p.45) al afirmar que la matemática formal permite abordar con mayor facilidad los problemas donde intervienen números grandes.

Con estas pequeñas muestras finalizamos el Taller 1 y damos comienzo al Taller 2.

En el segundo taller, buscamos la manera de motivar a los niños creando situaciones que no fueran ajenas a ellos y que hicieran parte de las aficiones que hasta el momento habíamos observado; razón por la cual decidimos usar los deportes, apoyándonos en el fútbol. Durante esa semana este deporte tenía propaganda con el equipo de Millonarios en los medios de comunicación, debido a la "Copa Sudamericana"; por consiguiente creímos pertinente realizar una actividad que se basara en este tema.

Para la elaboración del taller tuvimos en cuenta los siguientes tipos de problemas aditivos propuestos por Vergnaud y mencionados en Gadino (1996, p.42).

[10] Hace referencia a la cantidad del número.

Tipo c: *Una comparación se establece entre dos estados fijos o medidas*.

Tipo d: *Dos transformaciones se componen en una transformación total.*

Cabe destacar que las preguntas:

> ¿Por cuántos puntos le va ganando el primer equipo de la tabla al último?
>
> ¿Cuántos puntos necesita Júnior para igualar al Nacional?
>
> Si el equipo de Cali quisiera quedar en el quinto puesto, ¿Cuántos puntos necesita para llegar allí?
>
> ¿Cómo va el equipo de Bucaramanga?-¿Qué necesita para llegar al primer puesto?

Hacen referencia al tipo aditivo **c)**, porque como se puede observar, éstas se establecen en comparación de cantidades, que en esta situación, son los puntos que cada equipo tiene, los cuales son los estados fijos.

Las otras preguntas:

> ¿Cuántos goles ha hecho Millonarios en toda la Copa-Sudamericana?, ¿Cuántos goles ha hecho Defensor?
>
> ¿Cuántos goles ha recibido en contra el Millonarios?, ¿Cuántos goles ha recibido Defensor?

Fueron realizadas teniendo en cuenta el tipo de problema aditivo **d)**, siendo los goles, las transformaciones que se componen en una nueva transformación.

El taller realizado lleva por título “Vamos a jugar fútbol” y lo presentamos a continuación:

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO TRABAJO DE GRADO II

VAMOS A JUGAR FÚTBOL

En una reunión de padres de familia, el papá de Diego se encontró con el papá de Kevin; ellos son muy buenos amigos y fanáticos al fútbol. El papá de Diego es hincha de Millonarios, y el papá de Kevin es hincha de Defensor. Cada uno de ellos dice que su equipo a sido el mejor en toda la Copa-Sudamericana.
Para saber quién dice la verdad, observemos estas tablas que muestran el resultado de todos los partidos jugados y así poder decir

¡QUIÉN ES EL MEJOR EQUIPO!

MILLONARIOS

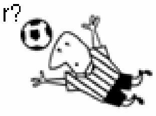
Millos-contra	Coronel		Nacional		Colo-Colo		Sao Paulo	
Local	0	1	0	0	1	1	2	0
Visitante	2	0	3	2	2	1	1	0

DEFENSOR

Defensor-contra	Libertad		Taguarí		Nacional		River	
Local	2	1	3	0	3	0	2	2
Visitante	2	2	1	1	0	2	1	0

¿Cuántos goles ha hecho Millonarios en toda la Copa-Sudamericana?, ¿Cuántos goles ha hecho Defensor?

¿Cuántos goles ha recibido en contra el Millonarios?, ¿Cuántos goles ha recibido Defensor?



Ahora si dime... ¿Cuál es el mejor equipo? - ¿Por cuántos goles?

Discutiendo ahora por los equipos de fútbol colombianos, deciden observar la siguiente tabla.
Entre ellos nacen las siguientes preguntas ¡Ayúdalos a resolverlas!

Posición	Equipos	Puntos
1	La Equidad	30
2	Nacional	28
3	América	27
4	Cúcuta	26
5	Tolima	26
6	Once Caldas	24
7	Chicó	23
8	Pasto	22
9	Medellín	21
10	Júnior	17
11	Huila	15
12	Cali	14
13	Quindío	14
14	Millonarios	14
15	Pereira	13
16	Cartagena	12
17	Bucaramanga	11
18	Santa Fe	10

¿Por cuántos puntos le va ganando el primer equipo de la tabla al último?

¿Cuántos puntos necesita Júnior para igualar al Nacional?

Si el equipo de Cali quisiera quedar en el quinto puesto, ¿Cuántos puntos necesita para llegar allí?

¿Cómo va el equipo de Bucaramanga?-¿Qué necesita para llegar al primer puesto?

Durante la puesta en marcha del taller asistió un profesor de la Universidad Industrial de Santander, quien muy amablemente quiso acompañarnos después de comentarle que, en el anterior taller, todos los niños querían acaparar nuestra atención, razón por la cual descuidábamos un poco al grupo piloto, en el cual queríamos centrar toda nuestra atención. Así, los niños que no hacían parte del grupo piloto, podrían acercarse a él para responder a sus inquietudes.

Esta actividad fue realizada el día miércoles 7 de noviembre. Coincidencialmente los niños tenían programada una actividad deportiva, todos iban con una camiseta roja; algunos llevaban puesta la del equipo de América de Cali. Ellos estaban emocionados porque el taller estaba relacionado con el fútbol, actividad que luego realizarían en clase de educación física.

Los niños presentaron dificultad en la resolución de las dos primeras preguntas, pues el análisis de ellas se centraba en la interpretación de la tabla. Los niños no lograban distinguir los goles hechos, y recibidos en contra, de cada equipo. Por consiguiente empezamos a interactuar con ellos. Cada uno de nosotros era "hincha" de algún equipo, explicando así la tabla del equipo al cual apoyábamos. Luego de esta explicación, los niños del grupo piloto empezaron a resolver la situación, mientras que algunos niños del salón aún se encontraban confundidos; frente a esto, el profesor que nos acompañaba sugirió encerrar de diferentes colores los goles realizados por Millonarios y Defensor, para ayudarlos a clasificar la información. Este consejo nos pareció pertinente, pero claro está, después de observar las estrategias que empleaban los niños del grupo piloto.

Aunque para nosotros la realización y concepción de la tabla era clara, los niños nos demostraron que la interpretación producía ambigüedades, llevando a una mala comprensión de los datos presentados. Ante esta situación, observamos la necesidad como maestros de plantear y presentar la información, de tal manera que se adecue a las herramientas que disponen nuestros estudiantes, para que de esa forma comprendan las ideas que se desean transmitir por medio de las situaciones; así, consideramos que es a través de la observación constante y continua de las estrategias que emplean, que podemos conocer las herramientas que disponen.

Luego de observar las estrategias empleadas por algunos niños del grupo piloto; consideramos utilizar la estrategia de los colores, buscando que todos los niños lograran ser parte de la actividad y dar solución a la primera situación. En cada tabla encerraron de color verde los goles realizados, y de morado los goles recibidos. A pesar de las explicaciones dadas a los niños, muchos continuaban confundidos y no concebían el cómo darle solución a las preguntas planteadas. Esta situación mejoró cuando los niños comenzaron a apoyarse y explicarse entre sí; mostrando así la importancia de la interacción social en la construcción de un razonamiento un poco más avanzado, o en la consideración de ideas que antes no tenían en cuenta. Piaget (1980), en Kamii (1995, p.53), resalta la importancia de los intercambios entre los niños, como una pieza indispensable en la elaboración del pensamiento lógico.

Después de dar un tiempo prudente para la solución de las dos primeras preguntas, observamos diferentes estrategias empleadas que se basaban primordialmente en la ayuda que les brindamos para la comprensión de la primera situación. Por esta razón queremos mostrar la siguiente tabla donde mostramos la influencia de nuestra ayuda en las estrategias y actuaciones de los niños.

Estrategia	Grupo Piloto.	Todos-G. P.
Representación visual (gráfico).	2	3
Representación visual (digital).	5	9
Sin respuesta.	0	12

Tabla 7. Estrategias empleadas en el primer punto, taller “Vamos a jugar fútbol”.

Representación visual (gráfico): Son aquellos niños que basaron sus estrategias, después de la explicación dada.

Representación visual (digital): Son los niños que trabajaron la situación, antes de recibir alguna indicación de nuestra parte. Esta estrategia recibió este nombre, porque todos ellos no realizaron algún algoritmo para dar solución a la situación, sino que se apoyaron de estrategias informales para llegar a ella.

A continuación, comentaremos diferentes vivencias compartidas en el salón de clase, y algunas estrategias utilizadas por los niños que se basaron en la "Representación visual (digital)".

En nuestro grupo de interés, Santiago fue el niño que más se entusiasmó con este tema; se mantuvo entretenido y fascinado, pues él era fanático del fútbol, por lo cual no se le hizo extraño reconocer y comprender la tabla, manipulando así fácilmente los datos encontrados en ella. Él, al igual que la mayoría de los niños, utilizó como estrategia de clasificación y conteo, la utilización de palitos. Basándose en estos pudo dar una respuesta acertada.

Otros niños escribieron de manera ordenada y a parte, los datos de cada equipo. Uno de ellos, lo realizó de la siguiente manera:

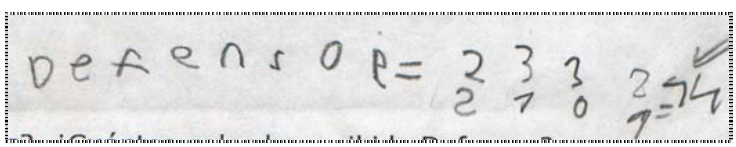


Figura 12. ("Vamos a jugar fútbol" nov. 7 de 2007).

DEFENSOR								
Defensor-contra	Libertad		Taguarí		Nacional		River	
Local	2	1	3	0	3	0	2	2
Visitante	2	2	1	1	0	2	1	0

Figura 13. Tabla de los partidos jugados por el equipo Defensor. Taller "Vamos a jugar fútbol".

Como se puede observar en la Figura 13 y en la respuesta dada (ver Figura 12), él tomó sólo los goles del equipo Defensor, los escribió de manera ordenada y a parte, con el fin de identificar y clasificar los goles realizados por dicho equipo, y así poder realizar la operación correspondiente para dar solución a la pregunta planteada.

Es importante mencionar que, aunque la mayoría de los datos de la tabla son reales, nosotros modificamos algunos goles para poder obtener un empate entre los dos equipos. Esto con el objetivo de observar si los niños percibían la incidencia de los goles recibidos, que afectaba los goles realizados, y por lo tanto el puntaje total.

Sobre este objetivo, sólo Leidy concluyó que los equipos se encontraban empatados; para dar esta respuesta, se basó del empleo de los dedos. Ella, tomaba los goles en contra, y con los dedos completaba hasta llegar a la cantidad de goles a favor. Por ejemplo con el equipo de Millonarios, ella partió de los *"5"* goles en contra, mostrando un dedo contaba: *"seis",* luego mostraba otro dedo y contaba: *"siete"* así sucesivamente hasta llegar a *"11"* y concluir que el puntaje total de Millonarios, era: *"seis".* Esta estrategia también la llevó a cabo con el equipo de Defensor, partió de *"8"* que eran los goles en contra, y contando nuevamente con sus dedos hasta llegar a *"14",* que eran los goles a favor, concluyó que Defensor tenía: *"seis puntos"*; así logró comparar estos dos resultados y dar como respuesta que el puntaje de estos dos era igual, como se observa en su respuesta dada:

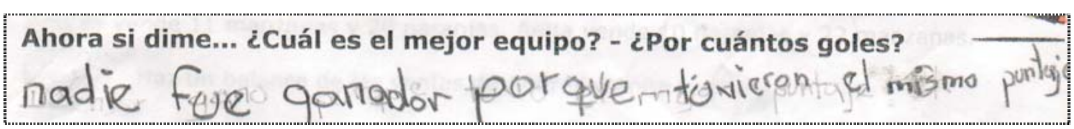

Ahora si dime... ¿Cuál es el mejor equipo? - ¿Por cuántos goles?
nadie fue ganador porque tuvieron el mismo puntaje

Figura 14. (Leidy, "Vamos a jugar fútbol", nov. 7 de 2007).

Daniela concluyó que Defensor era el mejor equipo, porque fue el que obtuvo mayor puntaje, al preguntarle el porqué de su respuesta, dado que no observábamos ningún algoritmo o valor numérico que la sustentara, nos dijo: *"Aquí Defensor tiene más puntos"* –señalando los goles realizados que eran 14; *"Y aquí también"* –señalando los goles en contra que eran 8; *"Entonces en todo también va a tener más puntos".* A pesar de no lograr entender la influencia negativa que tienen los goles en contra sobre el puntaje total, queremos rescatar el análisis numérico que hizo a los datos, al no necesitar un proceso matemático, para comprender ciertas propiedades y relaciones numéricas en el algoritmo de la suma; es decir, el comprender que si $a \geq b$ y $c \geq d$, entonces $a + c \geq b + d$; que en esta situación, sería de la siguiente manera:

$$\boxed{14 \geq 11, \text{ y, } 8 \geq 5 \quad \text{entonces } 14 + 8 \geq 11 + 5}$$

Frente a esta estrategia que se basa en el cálculo mental, específicamente en las estimaciones, Baroody (2000, p. 229) propone crear actividades que ejercite de una u otra manera la comprensión de estas técnicas, ya que éste puede llevar al niño a explorar y descubrir relaciones importantes de la matemática, como en el ejemplo mencionado.

La mayoría de los niños, en este punto, requirieron solamente de los goles recibidos por cada equipo para comparar y concluir, sin mayor dificultad, que Defensor era el mejor equipo, porque fue el que más goles realizó.

Al pasar a la segunda situación. Decidimos desde el inicio dar una explicación pausada de la tabla, para que los niños no confundieran la posición de los equipos, con los puntajes de cada uno.

Sobre las estrategias empleadas por los niños en la búsqueda de la respuesta del cuarto punto, realizamos la siguiente tabla. En ella queremos mostrar la cantidad de niños que utilizaron estrategias formales e informales de solución.

Estrategia.	Grupo piloto	Todos-G.P.
Estrategia informal.	3	0
Algoritmo Estrategia formal.	3	2
Respuesta sin argumentación	1	13
Sin respuesta	0	11

Tabla 8. Estrategias empleadas en el cuarto punto, taller “Vamos a jugar fútbol”.

En ésta Pilar respondió acertadamente sin ningún cálculo escrito aparente. Solamente -basándose en el cálculo mental y en propiedades, que creemos, ha construido a través de la interacción y la práctica de las matemáticas- logró responder rápidamente: *“Le va ganando por 20 puntos”*. Al momento de escuchar esto, decidimos no afirmar que esa era la respuesta, porque sabíamos que los otros niños se limitarían a copiarla, y no buscarían bajo sus propias estrategias, una respuesta que creyeran adecuada para esa situación. Desafortunadamente, la mayoría de los niños copiaron inmediatamente esta respuesta. Al preguntarles cómo lo habían resuelto o cómo sabían que era correcta, guardaban silencio y no podían argumentarnos la respuesta dada; de ahí nace la estrategia: “Respuesta sin argumentación”.

En la solución de este punto, Pilar interactuó bastante con sus compañeros, mostrándoles y explicándoles la estrategia empleada para llegar a la respuesta correcta. Por ejemplo, cuando nos acercamos a Juliana para preguntarle el porqué de su respuesta, nos dijo: *“Pilar me explicó que a 10 cuánto le faltaba para ser 30. Son 20, y así lo entendí”.* Ante esta situación queremos enfatizar nuevamente la importancia de la interacción entre los compañeros, en especial, la manera como se expresan, explican, y comunican sus estrategias; como una herramienta para entender y comprender mejor la solución de las situaciones planteadas.

Una estrategia que queremos mostrar es la utilización del algoritmo de la resta, para dar solución a problemas de tipo aditivo. Veamos, por ejemplo el algoritmo realizado por Santiago (ver Figura 15). En esta respuesta, logró utilizar las enseñanzas adquiridas en la escuela, las cuales hacen parte de las estrategias formales, para traerlas a esta situación y de ese modo darle solución.

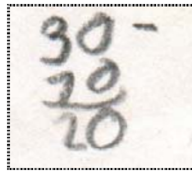


Figura 15. (Santiago, “Vamos a jugar fútbol”, nov. 7 de 2007).

En cuanto a las estrategias informales; deseamos comentar la realizada por Leidy. Ella, basándose en el empleo de sus dedos, la resolvió completando; es decir, partiendo del número 10, comenzó a completar con sus dedos hasta llegar al número 30 de la siguiente manera: Empezó el conteo en 10, luego contaba: *“once”* y mostraba un dedo, *“doce”* y mostraba otro dedo, de esa manera continuo hasta llegar a *“20”*, completando así 10 dedos; guardando este dato en su memoria continuó el conteo hasta llegar al número *“30”*, y completar nuevamente 10 dedos, los cuales sumó con los 10 que había conservado anteriormente, y así concluir que faltaban 20 puntos. Un comentario curioso a mencionar en esta situación, es que Leidy dedicó bastante tiempo en este punto; al momento de entregar la solución del taller, escribió como respuesta: *“Le faltan 16 puntos”.* Creemos que este error cometido, fue a causa de una de las limitaciones de la matemática informal, mencionadas por Baroody (2000, p.45), él afirma que: *“A medida que los números aumentan, los métodos informales se van haciendo cada vez más propensos al error”.*

Para la quinta pregunta, realizamos la siguiente tabla.

Estrategia.	Grupo piloto	Todos-G. P.
Estrategia informal.	3	0
Algoritmo Estrategia formal.	4	0
Respuesta sin argumentación	0	7
Sin respuesta	0	21

Tabla 9. Estrategias empleadas en la quinta pregunta, taller “Vamos a jugar fútbol”.

La elección de estos equipos (Júnior y Nacional), para la realización de la pregunta, radicaba en los puntos que tenían; puesto que, siendo el objetivo observar las estrategias formales o informales utilizadas, debíamos proponer situaciones donde los niños dispusieran de herramientas para resolver la situación de cualquier manera. Como a los niños aún no se les había enseñado “resta prestando”, no era conveniente presentar una situación donde no pudieran utilizar sus estrategias formales. Es decir, donde debieran realizar una operación, por ejemplo, de la siguiente manera: 21-13, que son los puntos del equipo de Medellín y Pereira.

Como observamos en las cinco preguntas formuladas para trabajar este tipo de problema, todas podían ser resueltas de dos maneras; por medio de la adición o de la sustracción. Buscando explicar un poco más esta idea tomamos la quinta pregunta: *“¿Cuántos puntos necesita Júnior para igualar al Nacional?”.* El puntaje de Júnior era 17 y del Nacional 28.

Esta situación podía ser resuelta, mediante el algoritmo, de dos maneras:

$$\begin{array}{r} 28- \\ \underline{17} \\ 11 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 17+ \\ \underline{11} \\ 28 \end{array}$$

Para no redundar en las estrategias utilizadas en el quinto punto, con las mostradas en el cuarto, queremos mostrar la diferencia que radicaba en las estrategias formales e informales, en este tipo de problema aditivo.

Como bien ya mostramos que los problemas que conforman el tipo aditivo de comparación de cantidades pueden ser resueltos de dos maneras; la diferencia en las estrategias radicaba en la operación a utilizar; es decir, los niños que se apoyaban en sus estrategias informales, resolvían las situaciones completando con la ayuda de sus dedos, en otras palabras, por medio de la adición. Mientras que los que utilizaban estrategias formales, se basaban en el algoritmo de la resta para dar solución a estas situaciones.

Daniela y Carolina observaron la respuesta de Pilar, la cual era correcta. Empezaron a manipular los números para obtener así la respuesta acertada.

Daniela tomó el 17 y el 28; mediante la exploración de la matemática formal, concluyó que la respuesta correcta era:

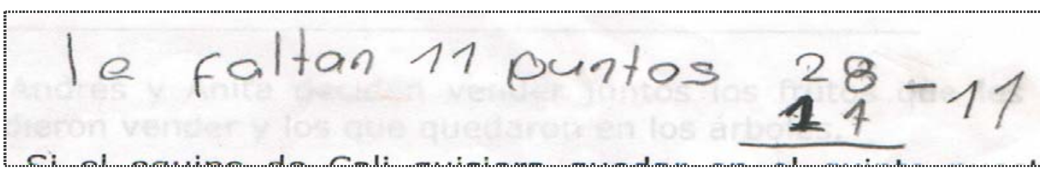


Figura 16. (Daniela, “Vamos a jugar fútbol”, nov. 7 de 2007).

En cambio Carolina argumentó la respuesta de la siguiente manera: *“Resté. A 17 le quité 6”*. Al preguntarle el porqué del número *“6”*, nos dijo *“Porque es lo que necesito para que me de 11”.* A pesar de que ella se desligó por completo de la situación, el punto que queremos rescatar, es el procedimiento numérico que realizó a través de estrategias formales, el algoritmo, para dar respuesta a esta situación. Utilizando uno de los datos del problema, el *“17”*, y reconociendo la respuesta, *“11”*; realizó el siguiente procedimiento:

$$17 \ \square \ \square \ = 11$$

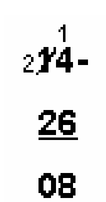
Siendo los espacios en blanco, lo faltante en el algoritmo para obtener la respuesta, es decir, la operación y el segundo factor. Así, utilizando estrategias informales, el conteo mediante los dedos, concluyó que era de la siguiente manera: **17- 6 = 11.**

Para mostrar las estrategias empleadas en la sexta pregunta, realizamos la siguiente tabla.

Estrategia.	Grupo piloto	Todos-G. P.
Estrategia informal.	4	0
Algoritmo Estrategia formal.	3	0
Respuesta sin argumentación	0	2
Sin respuesta	0	26

Tabla 10. Estrategias empleadas sexta pregunta, taller “Vamos a jugar fútbol”.

Santiago tenía escrito en su hoja *“Le faltan 7 casillitas para llegar al quinto puesto”,* al decirle que debía fijarse en el puntaje más no en la posición de los equipos, observó los puntajes de cada uno de ellos y dijo: *“El quinto puesto son 26 y Cali son 14, entonces son 12”*; al pedirle que nos explicara un poco más su respuesta dijo: *“Porque 26-14 es 12”*; realizando esta operación completando con sus dedos, es decir, partía del número 14 y contando con sus dedos hasta 26, concluye que la respuesta era 12. Después de decir esto, escribió en su hoja lo siguiente:



Ante esta situación observamos, cómo el niño en afán de utilizar las enseñanzas impartidas en la escuela, cambia la respuesta acertada, al creer que sólo mediante la matemática formal se pueden obtener respuestas correctas; es decir, el niño desconfió de sus estrategias informales porque, probablemente, consideraba que estas estrategias no eran válidas en la aplicación de actividades escolares.

A pesar de que esta situación la observamos sólo en Santiago, somos conscientes de que esta concepción sobre las estrategias informales se pueden repetir en otros niños; además, Baroody (2000, p. 83) comenta que cuando el docente, familiares y amigos, no tienen una actitud receptiva frente a las estrategias informales de los niños, ellos tienden a ocultarlas o disimularlas. Frente a este problema, él aconseja a los maestros tres aspectos:

Tener en cuenta la capacidad y el valor de este conocimiento.

Ayudar a desarrollar una perspectiva de la matemática informal.

Adoptar una actitud receptiva ante la matemática informal.

Por último presentamos esta tabla donde se encuentran las estrategias empleadas en la solución de la séptima pregunta.

Estrategia.	Grupo piloto	Todos-G.P.
Estrategia informal.	2	0
Algoritmo Estrategia formal.	2	0
Respuesta sin argumentación	1	3
Sin respuesta	2	25

Tabla 11. Estrategias empleadas en la séptima pregunta, taller “Vamos a jugar fútbol”.

Cabe aclarar que en el desarrollo de las preguntas muchas estrategias se repitieron. Nosotros mostramos aquellas que llamaron más nuestra atención.

Santiago partió nuevamente de las casillas, dijo: *"Le faltan 16 casillas para llegar al primer puesto"*. Nuevamente nosotros le sugerimos leer atentamente el enunciado. Después de observar que debía considerar los puntos, partió del *"16"* que había respondido anteriormente, y por medio del ensayo y error, empezó a manipular los valores, completando cantidades de la siguiente manera:

		1
11+	11+	11+
<u>16</u>	<u>18</u>	<u>19</u>
27	29	30

Este juego que realizó con los números llamó nuestra atención, ya que él partió de un error, el *"16"*, y por medio del algoritmo y de relaciones numéricas, descubrió que debía ser un número mayor la respuesta para que la suma llegará a ser 30; sumándole a *"11"* valores mayores de *"16"*.

Con esta situación terminamos la experiencia del taller **"Vamos a jugar fútbol"** y damos inicio al tercero, llamado: **"Sembremos con Andrés"**. La intención de este taller era observar cómo los estudiantes resolvían situaciones aditivas basadas en los dos últimos tipos de problemas aditivos, propuestos por Vergnaud.

Tipo e: *Una transformación opera sobre un estado relativo para originar otro estado relativo*.

Para éste, formulamos las siguientes situaciones:

> Andrés es un niño agricultor. Su papá le regaló unas semillas; al sembrarlas nacieron dos grandes árboles de naranjas. El primer árbol dio 21 naranjas y el segundo 28 naranjas. Andrés muy contento decidió venderlas para tener algo de dinero y poderse comprar una cicla que tanto quiere. Así fue que consiguió dos cajas, en la primera caja caben

15 naranjas y en la segunda 23. ¿Cómo le aconsejarías a Andrés?, para poder llenar las cajas con las naranjas de la cosecha.

El estado relativo es el resultado de una relación. En la situación anterior, aquel estado es la cosecha de naranjas que se originó por las semillas que el papá le regaló. La transformación, es el repartir las naranjas en las cajas; siendo así, el nuevo estado relativo, las naranjas que sobraron en los árboles.

El vecino Don Antonio se acerca y les pide 20 naranjas y 18 manzanas. ¿Será posible cumplir el pedido de Don Antonio con la cantidad de naranjas y manzanas que tienen? Explícame por qué.

El estado relativo lo originan las naranjas y manzanas que sobraron de la cosecha y la venta en el mercado. La transformación que actúa sobre éstas, es el pedido que Don Antonio les hace. El nuevo estado relativo, lo origina la respuesta, es decir, si es posible o no realizar la venta.

Tipo f: *Dos estados relativos se componen para originar un nuevo estado relativo.*

Para éste, formulamos las siguientes situaciones:

Si llena las cajas, ¿cuántas naranjas le sobran?

Los dos estados relativos en este caso, son las naranjas que sobraron en cada uno de los árboles; siendo así la pregunta, el paso para componer estos valores, generando el nuevo estado relativo de la cantidad total de naranjas sobrantes.

Andrés y Anita deciden compartir su cosecha. Cada uno le regala al otro la caja pequeña. ¿Fue un cambio justo? Dime por qué.

Los dos estados relativos en esta situación, son el cambio de cajas que realizan los hermanos. La pregunta da paso a pensar en quién dio más, o menos, generando así, un nuevo estado relativo.

> Andrés vende 11 manzanas y 20 naranjas. Anita vende 10 naranjas y 22 manzanas. Haz un balance de las ventas de Andrés y Anita. ¿A cuál de los dos hermanos le fue mejor?, ¿por qué?

Los estados relativos en este caso son las ventas realizadas de las naranjas y las manzanas de cada uno de ellos. La pregunta realizada, lleva a pensar en componer los dos estados relativos, para crear un nuevo estado relativo, el cual es el hecho que algunos de ellos, vendió más frutas que el otro.

Esta actividad se llevó a cabo el día 14 de noviembre de 2007.

Un punto importante a mencionar, es que en la realización de este taller, a los niños ya les habían enseñado y evaluado "restas prestando", por esta razón, esta ya no era una limitación en cuanto a los valores a escoger en las situaciones planteadas.

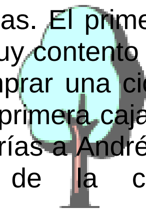
Iniciamos la actividad leyendo entre todos el taller; a medida en que se iba narrando la situación, realizábamos la representación gráfica de ésta. Así, en el primer punto, dibujamos dos árboles, en cada uno la cantidad de naranjas indicadas; y dos cajas, donde sólo colocamos el valor de la cantidad posible a guardar en cada una de ellas. Luego de interactuar con los niños de esta manera, dimos paso a la resolución del taller.

El taller presentado a los niños, es el siguiente:

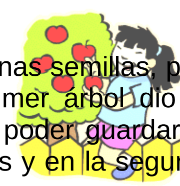
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO TRABAJO DE GRADO II

SEMBREMOS CON ANDRÉS

Andrés es un niño agricultor. Su papá le regaló unas semillas, al sembrarlas nacieron dos grandes árboles de naranjas. El primer árbol dio 21 naranjas y el segundo 28 naranjas. Andrés muy contento decidió venderlas para tener algo de dinero y poderse comprar una cicla que tanto quiere. Así fue que consiguió dos cajas, en la primera caja caben 15 naranjas y en la segunda 23. ¿Cómo le aconsejarías a Andrés, para poder llenar las cajas con las naranjas de la cosecha



Si llena las cajas, ¿cuántas naranjas le sobran?



Anita es la hermana menor de Andrés. Su padre también le regaló unas semillas, pero al sembrarlas nacieron dos grandes árboles de manzanas. El primer árbol dio 26 manzanas y el segundo 24. Ella también consigue dos cajas para poder guardar su cosecha y así poder venderla. En la primer caja caben 18 manzanas y en la segunda 26.

Andrés y Anita deciden compartir su cosecha. Cada uno le regala al otro la caja pequeña. ¿Fue un cambio justo? Dime por qué

Ya en el mercado, Andrés vende 11 manzanas y 20 naranjas. Anita vende 10 naranjas y 22 manzanas.

Haz un balance de las ventas de Andrés y Anita

¿A cuál de los dos hermanos le fue mejor?, ¿por qué?

Para no perder la cosecha, Andrés y Anita deciden vender juntos los frutos que les había sobrado, los que no pudieron vender y los que quedaron en los árboles.

El vecino Don Antonio se acerca y les pide 20 naranjas y 18 manzanas. ¿Será posible cumplir el pedido de Don Antonio con la cantidad de naranjas y manzanas que tienen? Explícame por qué.

Realmente fueron pocos los que al principio lograron entender y solucionar el problema; varios niños se acercaban a preguntarnos *“¿Debo hacer una suma?”*; cuando aún no lograban comprender la situación. Como el objetivo era observar las estrategias y herramientas que los niños empleaban, especialmente los del grupo piloto, nos abstuvimos de dar “pistas” o indicaciones que le mostraran al niño lo que debía realizar.

Para mostrar grosso modo las estrategias empleadas por los niños, en las dos primeras preguntas, presentamos la siguiente tabla:

Estrategia	Grupo piloto	Todos-Grupo piloto
Representación gráfica	3	2
R. gráfica – Algoritmo	2	8
Operaciones aritméticas	2	1
Sin respuesta.	0	17

Tabla 12. Estrategias empleadas en la primera y segunda pregunta, taller “Sembremos con Andrés”.

La estrategia: “Representación gráfica”, que se encuentra en la tabla, hace referencia a aquellos niños que se basaron del dibujo realizado en el tablero. Es decir, nosotros después de haber considerado que había transcurrido un tiempo prudente para darle espacio, a los niños del grupo piloto, para resolver solos las situaciones; y después de observar que varios niños del salón no lograban entender y empezar una solución para este problema; decidimos dar una ayuda.

Para mostrar la manera en que fue realizada la explicación, presentamos el trabajo de Daniela (ver Figura 17), quien lo resolvió utilizando esta estrategia.

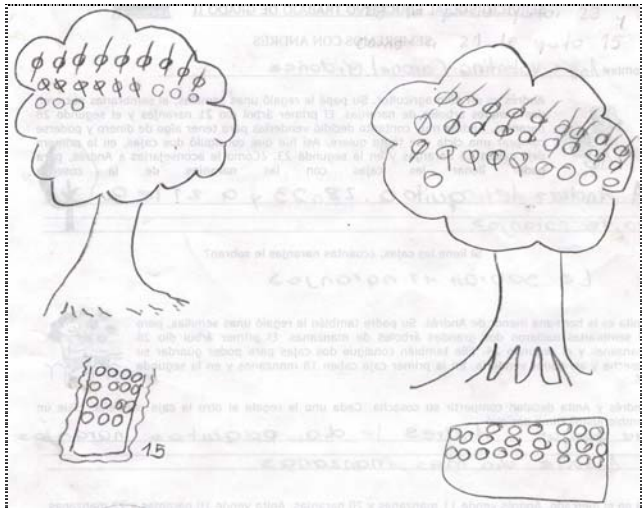


Figura 17. (Daniela, “Sembremos con Andrés”, nov. 14 de 2007).

Cabe precisar, que nosotros sólo mostramos que una naranja menos en el árbol, podría ser una naranja en una caja; así, los niños llenaron la primera caja “quitando” naranjas del primer árbol, y de igual manera para la segunda. Ellos partieron del primer árbol, a éste le iban tachando una a una las naranjas que se depositaban en la primera caja, de ese modo tacharon 15 naranjas que eran las necesarias para llenar ésta. Los niños que hicieron uso de esta estrategia, llenaron de igual manera la segunda caja, tomando como referencia el segundo árbol. Por ejemplo, Daniela, respondió de la siguiente manera: *“A 28 le quito 23, porque en una caja caben 23, y a esos 28 le puedo quitar 23; así como a 21 le quité 15”.*

Al preguntarles a los niños que utilizaron esta estrategia, por las naranjas sobrantes, contaban solamente las que no habían sido tachadas en los árboles, para encontrar la respuesta, así Daniela concluyó: *“Sobran 11 naranjas”.*

Con esta situación, los niños aplicaron toda su pericia e imaginación para repartir las naranjas en las cajas dadas, conociendo que las naranjas que no se podían introducir en las cajas, debían quedar en los árboles, ya que sólo se podían quitar de ellos los suficientes frutos que les permitiera llenar dichas cajas.

En “R. gráfica – Algoritmo”, comprendemos a los niños que se apoyaron de la representación gráfica realizada, para formular un algoritmo que diera solución a la situación. Viendo así nuevamente, cómo los niños se basan de estrategias informales, para modelar matemáticamente una solución o estrategia empleada.

En “Operaciones aritméticas”, incluimos a los niños que solamente utilizaron el algoritmo, estrategia formal, para dar solución a la pregunta planteada.

Carolina y Karen trabajaron juntas en esta situación. Al tener la solución, nos acercamos a ellas para que nos explicaran el proceso que habían realizado. La situación presentada fue la siguiente:

Karen: *Del primer árbol voy a arrancar las 15 naranjas que me caben acá* – señalando la primera caja.
Docente: *¿Entonces llenas una caja?*
Carolina: *Si, la primera. Y me quedan naranjas en el árbol.*
Docente: *¿Cuántas?*
Después de decir esto, Karen realizó el siguiente algoritmo:

$$\begin{array}{r} 21- \\ \underline{15} \end{array}$$

Al empezar a resolverlo…

Karen: *Las unidades le prestan a las decenas*
Carolina: *¡No, así no es!*

(Diario de campo, taller “Sembremos con Andrés”, nov. 14 de 2007)

Entre ellas empezaron a interactuar, argumentando cada una su opinión. Nosotros decidimos no intervenir, pero en un momento le preguntamos a Karen el porqué estaba tan segura que era así, nos dijo: *“Porque la profesora me lo enseñó así”*. Luego de decir esto, continuar debatiendo, y caer en varios errores, decidieron dar solución al ejercicio apoyándose de estrategias informales, el conteo con los dedos, para concluir que sobraban 6 naranjas.

Para llenar la segunda caja realizaron el mismo procedimiento; primero escribieron el algoritmo, *"28-23"*, y luego le dieron solución a través de sus dedos. Así concluyeron que sobraban *"5"* naranjas, y *"6"* que quedaban del otro árbol, entonces eran *"11"* naranjas en total las que quedaban aún en los árboles.

En esta situación vemos nuevamente, cómo las estrategias formales e informales, van trabajando conjuntamente en las herramientas que tienen los niños para dar solución a situaciones problemas; además, consideramos que el niño al lograr relacionar, el conocimiento informal que posee, con las enseñanzas impartidas en la escuela, puede llegar a una comprensión significativa de los algoritmos, porque consigue relacionarlos con situaciones, estrategias y herramientas que no son ajenas a ellos. Esta relación que los niños logran comprender, hace parte de uno de los grandes aportes de la teoría cognitiva, mencionada por Baroody (2000), en la cual él afirma que:

> *"La enseñanza de las matemáticas consiste en traducirlas a una forma que los niños puedan comprender, ofrecer experiencias que permitan a los niños descubrir relaciones y construir significados, y crear oportunidades para desarrollar y ejercer el razonamiento matemático y las aptitudes para la resolución de problemas".* (Baroody, 2000, p.51)

Leidy y Santiago, también hacen parte de "Operaciones aritméticas". Ellos realizaron el algoritmo para buscar la solución (ver Figura 18 y Figura 19).

Figura 18. (Leidy, "Sembremos con Andrés", nov. 14 de 2007).

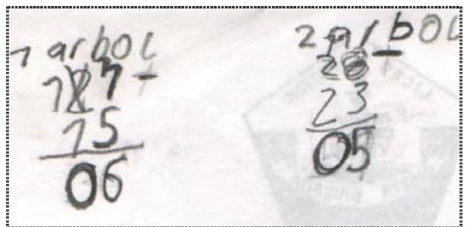


Figura 19. (Santiago, "Sembremos con Andrés", nov. 14 de 2007).

Al pasar a la situación de Anita, formulamos la misma pregunta que en la situación de Andrés. Les preguntamos: *"¿Cómo llenarían las cajas que tiene Anita?"* Esta pregunta no fue realizada en el taller por el espacio que éste implicaba, además queríamos formular diferentes preguntas para abordar los tipos de problemas aditivos implicados, mencionados anteriormente.

En esta situación, también dibujamos los dos árboles, en cada árbol se encontraba la cantidad de manzanas planteadas en la situación, es decir, en un árbol dibujamos 18 manzanas, y en el otro 24.

Para dar respuesta a esta situación, interactuamos con los niños, así este punto fue resuelto de manera grupal. Ellos debían decirnos el proceso o la estrategia que se debía utilizar; por ejemplo Karen nos sugirió: *"Saque 18 del primer árbol y guárdelas en la primera caja"*, así, tachando una a una las 18 manzanas mencionadas, llenamos la primera caja. Luego dijo *"Saque 26…"* – guardó silencio- *"¡Ay no se puede!"*; Daniela interrumpió diciendo: *"A 26 le* *resto 18, pero a 24 no le puedo restar 26"*, ante esto, Santiago dijo: *"Pues eche 24 de ese árbol, y saque 2 del otro"*, los niños guardaron silencio viéndose inconformes con esta respuesta, entonces Daniela volvió a opinar diciendo: *"Mejor a 26 le resto 26 y a 24 le resto 18"*. Algunos niños exclamaron que era mejor resolverlo así.

Algo importante a mencionar de esta situación, es la forma en la que se expresan los niños. Es agradable observar cómo empiezan a opinar sus ideas matemáticamente, es decir, a explicar sus estrategias en base de la matemática formal. Esa transición de "quitar, sacar" a "restar".

Para la tercera pregunta, presentamos la siguiente tabla. En ella queremos mostrar las respuestas dadas por los niños. Precisando que, cuando respondían que sí era justo, sólo consideraban el acto de compartir la cosecha; cuando respondían que no lo era, fue porque tuvieron en cuenta las cantidades implicadas en el compartir.

Respuesta	Grupo piloto	Todos-Grupo piloto
Justo	1	7
No es justo	6	10
Sin respuesta	0	11

Tabla 13. Respuesta dada en la tercera pregunta, taller "Sembremos con Andrés".

Al principio los niños se mostraban confundidos porque no entendían lo que significaba ser "justo". Nosotros en la elaboración del taller decidimos utilizar esta palabra, pues éramos conscientes de que la palabra "equitativo" no la conocían y los niños no iban a comprender la pregunta; infortunadamente esta dificultad se nos presentó también con la forma en que la enunciamos.

Para explicar el significado de esta palabra, decidimos dar el siguiente ejemplo: *"Si yo le regalo 5 naranjas y usted me da 4, ¿es justo el cambio?"* algunos niños comprendieron la relación equitativa que queríamos mostrar en el compartir de Andrés y Anita; otros sin embargo dijeron que si era justo, por esta razón dimos el siguiente ejemplo *“Si yo le doy 5 naranjas, y usted me da 10, ¿es justo el cambio?”,* luego de esto, los niños dijeron *“¡Ay no, no es justo!”.* Después de observar que la mayoría comprendió la pregunta, dieron las respuestas que se encuentran en la Tabla 13.

En esta pregunta, Daniela interactuó bastante con sus compañeros, explicando lo que era justo y no. Ella manipulaba útiles escolares para realizar esta explicación. En una ocasión, al interactuar con Pilar, tomó 8 colores y le dijo: *“Si yo le doy 3 colores, pero usted me da 5, ¿es justo?”*; con esta situación Pilar entendió el significado de esta palabra, al igual que otros compañeros, como Karen, quien al preguntarle el porqué de su respuesta dijo: *“Daniela me explicó y así entendí. Porque la caja chiquita de Andrés tiene menos que la caja chiquita de Anita, entonces no es justo porque deja con poquitas a Anita”*.

Consideramos que esta interacción entre los compañeros, es un aporte muy importante en la construcción del aprendizaje en los niños; relación que Joseph, mencionada en Kamii (1993, p. 99), consideraba como uno de los 4 principios de enseñanza, que llevaba en su clase de matemáticas. Ella considera importante: *“Potenciar el intercambio de puntos de vista entre los niños”,* esto con el fin de poder estimular la construcción del pensamiento lógico-matemático en ellos.

Los niños para explicar que el cambio no era justo, se basaban en el concepto que construyeron, “mayor” o “menor” cantidad. Ninguno de ellos lo explicó mencionando, por ejemplo, que Anita le dio 3 frutas de más.

En la siguiente tabla queremos mostrar las estrategias empleadas en la cuarta pregunta.

Estrategia	Grupo piloto	Todos-Grupo piloto
Algoritmo	4	3
Cálculo mental	2	2
Respuesta sin argumentación.	1	8
Sin respuesta.	0	15

Tabla 14. Respuestas dadas en la cuarta pregunta, taller “Sembremos con Andrés”.

Los niños que se encuentran en “Algoritmo”; fueron los que se basaron de estrategias formales para dar solución a la situación planteada.

Karen y Carolina, por ejemplo, lo resolvieron de la siguiente manera:

Figura 20. (Karen, “Sembremos con Andrés”, nov. 14 de 2007).

Pilar, también lo hizo mediante su matemática formal. La explicación la realizó de igual manera, (ver Figura 21).

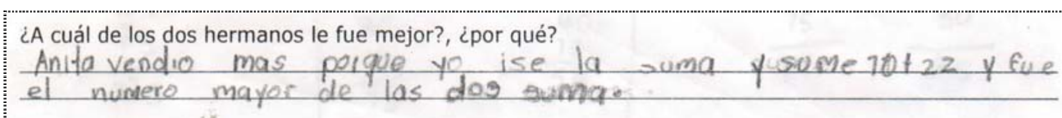


Figura 21. (Pilar, “Sembremos con Andrés”, nov. 14 de 2007).

Los niños que hacen parte de “cálculo mental”, son aquellos que argumentaron el porqué a Anita le fue mejor en la venta, pero no se encuentra ningún cálculo aparente.

Santiago lo resolvió de la siguiente manera: *“Diez y veinte, treinta, y uno, treinta y uno”* –para solucionar la adición *“11+20”*. Luego dijo, *“Anita es la mejor, porque vendió 32 frutas y Andrés vendió 31 frutos, entonces ella vendió más”.*

Los niños que pertenecen a "Respuesta sin argumentación", son aquellos que escribieron, por ejemplo, *"Anita es la mejor"*, pero no escribieron el porqué; además, no observamos un algoritmo o proceso que mostrara la construcción de la solución presentada. Es posible que estos niños lo hayan resuelto mediante el cálculo mental, pero como no observamos argumentación alguna, hacen parte de esta clasificación realizada en la tabla.

Por último, llegamos a la quinta pregunta. En ésta no tenemos registro alguno de las respuestas o estrategias dadas por los niños, ya que cuando dimos inicio a ella, el tiempo para llevar a cabo la actividad había terminado.

Foto 1. Interactuando con los niños en la solución del taller "Sembremos con Andrés".

Podemos resumir diciendo, que las estrategias más empleadas por los niños, en la realización de los tres talleres, fueron las siguientes:

Estrategias informales, como la representación gráfica y el empleo de material concreto.

Estrategias informales y algoritmo.

Algoritmo.

La primera consistía en el empleo de palitos, dibujos, bolitas, o el uso de los dedos, para de ese modo poder llevar el conteo y dar solución a la situación planteada. Esta estrategia les permitió calcular sumas que implicaban pequeños valores, generalmente menores de 20. En ocasiones llevó a los niños a cometer errores, especialmente cuando implicaban grandes cantidades. También, fue empleada como estrategia de clasificación e interpretación de algunas situaciones planteadas. En unos problemas, sin realizar ningún proceso aritmético, sólo bastó el dibujo para poder realizar el conteo y encontrar la solución.

La segunda estrategia, hace referencia al empleo de estrategias informales, especialmente la representación gráfica, que llevaba a los niños a comprender y plantear un algoritmo que modelara el proceso efectuado para dar solución a los problemas propuestos. Consideramos que esta estrategia muestra un grado de abstracción más compleja en comparación con la anterior, ya que el niño logra modelar formalmente, las estrategias informales que está empleando en la resolución de los problemas.

Por último, la tercera estrategia consistía en el empleo del algoritmo para dar solución a la situación propuesta. Los niños por medio de éste presentaban de manera abstracta la construcción mental realizada para dar solución a la situación; esta estrategia, en comparación con las mencionadas, les permitía abordar de manera rápida y precisa, los problemas propuestos; además, permitía manipular con facilidad y agilidad los números sin importar su cantidad.

Para finalizar comentaremos las dos últimas actividades, “Carta a un amiguito” y “Sala de juegos”. Estas actividades las realizamos el 27 y 29 de noviembre respectivamente. En la semana que comprende estos días, los niños se encontraban en la “Semana de nivelación”[11]. Para estas actividades, sólo estábamos interesados en los niños del grupo piloto, tanto por la disponibilidad

[11] En esta semana el Colegio brindaba la oportunidad de presentar recuperaciones a aquellos niños que no lograron alcanzar diferentes indicadores de logro en el año escolar.

de tiempo que tenían, porque ninguno de ellos debía recuperar, como por el tamaño de los juegos. El grupo piloto se dirigió hacia el “Aula Múltiple”[12], allí se realizaron las actividades mencionadas.

La “Carta a un amiguito” consistía en que cada uno recibía una carta de un niño que se encontraba en algún lugar del mundo. Cada personaje se presentaba y le comentaba alguna situación la cual no sabía cómo abordar, así, el niño del Liceo Patria debía ayudarlo, resolviendo la situación y explicándosela.

Pensamos que la última actividad escrita con los niños debía ser totalmente diferente a las anteriores, con la condición de que en ella se debían involucrar todos los tipos de problemas aditivos leídos, ya que esa era la metodología que habíamos tenido en cuenta en la realización de los talleres. Por esta razón elaboramos siete cartas totalmente diferentes, cada niño recibió un personaje distinto. En cada carta se aplicaba un tipo aditivo de los antes mencionados. Además de responder a la situación problema que se les planteaban, debían explicar con sus propias palabras el procedimiento y método empleado en la solución de dicho problema. Al mismo tiempo, cada uno debía escribir y enviar una nueva carta, donde realizaba una pequeña presentación de sí mismo, buscando recoger información personal de cada uno; ésta la enviaba junto con la solución del problema en un sobre que él mismo decoraba y sellaba.

Foto 2. Resolviendo la carta de cada amiguito.

[12] El “Aula Múltiple”, es un espacio relativamente amplio destinado por el Colegio para los actos culturales.

De manera aleatoria y por azar tomamos los seis tipos de problemas aditivos, acordamos que cada niño debía enfrentarse a uno de ellos, con la excepción de dos niños a quienes correspondía abordar un mismo tipo de problema aditivo por la cantidad de niños del grupo piloto. Las siete cartas eran totalmente diferentes, con el fin de observar minuciosa y detalladamente las estrategias empleadas por cada niño en la solución a determinada situación.

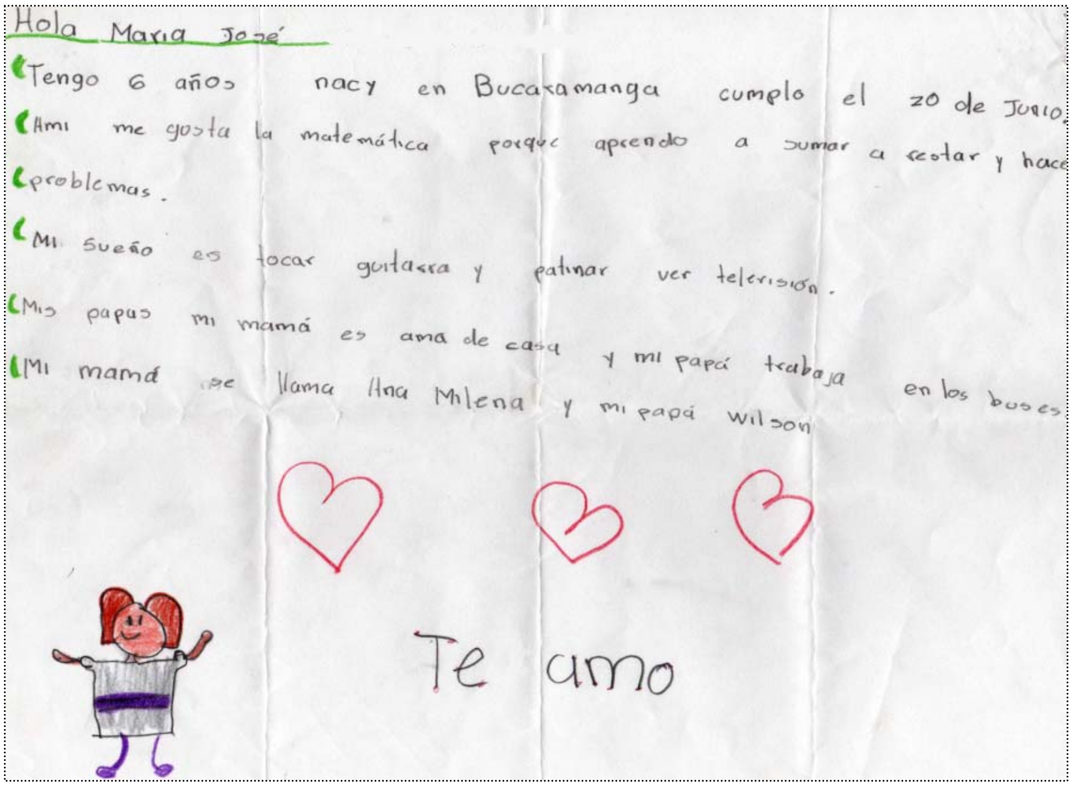
Por un lado, Camila y Leidy respondieron la carta que se estructuró bajo el tipo de problema aditivo **a)**; Juliana desarrolló la carta con el tipo de problema aditivo **b)**; Pilar mantuvo su atención contestando la carta con situaciones problemas de tipo **c)**; Karen dio solución a la carta con problemas de tipo **d)**; Santiago se enfrentó al tipo aditivo **d)**; y finalmente Daniela trabajó en la carta de tipo aditivo **e)**.

Como se puede observar en cada carta, formulamos dos preguntas. En la primera buscamos que la incógnita se situara en el resultado. En la segunda, situamos la incógnita en uno de los sumandos; esto con el objetivo de elevar el nivel de dificultad y así observar las estrategias empleadas por ellos. Esta manera de replantear las situaciones, fue tomada por los aportes obtenidos de Bermejo (1990, p.113), él afirma que:

> *"El grado de dificultad depende también del lugar ocupado por la incógnita. En general, el éxito de los niños es mayor, cuando la incógnita o término desconocido se sitúa en el resultado, independientemente del tipo de problema planteado. En cambio, la dificultad aumenta cuando la incógnita se sitúa en el conjunto de partida (...) o cuando la incógnita se sitúa en uno de los sumando"* (Bermejo, 1990, p. 113)

Nosotros dispusimos los pupitres de los niños, de manera que con ellos pudiéramos formar una mesa redonda, para interactuar y crear un ambiente más ameno. El objetivo consistió, en que valiéndose de sus propias estrategias, y sin ayuda de los profesores, debían solucionar los problemas. Esta carta fue resuelta individualmente por cada uno; algunos presentaron dudas respecto a las situaciones; así, teniendo cuidado en no decir cómo resolverlas, los ayudamos a despejar sus inquietudes.

A continuación, presentamos la descripción realizada por uno de ellos (ver Figura 22), la carta que cada niño recibió, y la solución de una de ellas (ver Figura 23).


Hola Maria José

Tengo 6 años nacy en Bucaramanga cumplo el 20 de Junio.

Ami me gosta la matemática porque aprendo a sumar a restar y hace problemas.

Mi sueño es tocar guitarra y patinar ver televisión.

Mis papas mi mamá es ama de casa y mi papá trabaja en los buses

Mi mamá se llama Ana Milena y mi papá wilson

Te amo

Figura 22. (Pilar, “Carta a un amiguito”, nov. 27 de 2007).

Hola Carolina:

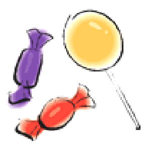
Yo soy Iván, tengo 7 años y vivo en el Polo Norte. Te cuento que aquí hace mucho frío, por eso debemos estar siempre abrigados y tomando chocolate caliente todo el tiempo.

También curso el primer grado, y mi materia favorita es la matemática; aunque ahora tengo un problema con una tarea que no he podido resolver.

¿Será que me puedes ayudar?

La situación es la siguiente:

"En una bolsa hay 20 caramelos de naranja, 16 de limón, 13 de fresa y 12 de piña. ¿Cuántos caramelos hay en la bolsa?"__________________



Por favor escribe cómo lo resolviste:

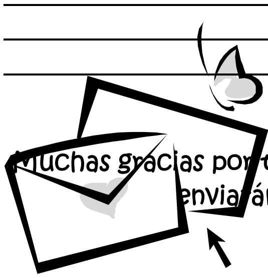
____
____
____

Después de resolver esa situación, debo realizar esta.

"Si ahora en la bolsa se han agregado caramelos de mora, y hay en total 73 caramelos. ¿Cuántos caramelos de mora se agregaron a la bolsa?"______________

Por favor escribe cómo lo resolviste:

____
____
____



Muchas gracias por tu ayuda. Por favor dale la respuesta a tus profesores. Ellos me la enviarán por correo y así podré presentar mis cuentas solo.

Hola Leidy:

Yo me llamo Sergiño, tengo 7 años y soy de Brasil.
Te cuento que acá hace mucho calor y me gusta mucho bailar zamba.
Te cuento que mi papá le gusta sembrar café.
Yo le ayudo a recogerlo todas las mañanas. Es muy divertido. Imagínate que el lunes pasado recogí 8 cajas de café, el miércoles recogí 9 y el viernes recogí solo 5 cajas.

Me pregunto, ¿cuántas cajas recogí?______________

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo solo.

____

____

____

Cuando yo le entregué las cajas a mi papá, él me felicitó. Me llevó al granero donde tenía todas las cajas que había recogido durante un mes. Allí saqué tres bolsitas para darles pepitas de café a mis amigos. En la primera metí 45 pepitas, en la segunda 35 pepitas, y en la tercera 30 pepitas.

¿Cuántas pepitas les di a mis amigos?

____

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo solo.

____

____

____

Muchas gracias por tu ayuda. Por favor dale la respuesta a tus profesores. Ellos me la enviarán por correo y así podré aprender a llevar mis cuentas solo.

Hola Juliana:

Yo soy Chela la gitana, tengo 7años y me fascina bailar.
Vivo con mis padres en una aldea y nos gusta mucho leer el futuro de nuestros amigos.

Ayer salí al pueblo y les leí el futuro a 5 personas. Yo tenía 12 monedas, y cada una de ellas me dio lo siguiente:

Don Jaime	7 monedas
Señora Juana	11 monedas
Doña Pepa	8 monedas
Señor Hugo	15 monedas
La tendera Alicia	10 monedas

Por favor ayúdame a llevar las cuentas. ¿Cuántas monedas recolecté ese día?___________

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo sola.

____
____
____

Con las monedas que reuní ¿me alcanza para pagarle a mi hermano 45 monedas que le debía?__________________ ¿Me sobran o me faltan monedas?______________ ¿Cuántas? ________________

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo sola.

____
____
____
____

Muchas gracias por tu ayuda. Por favor dale la respuesta a tus profesores. Ellos me la enviarán por correo y así podré aprender a llevar mis cuentas sola.

Hola Pilar:

Yo me llamo Maria José, tengo 6 años y me encanta bailar flamenco que es el baile típico de mi país España.
Soy muy buena bailando, por eso ayer competí contra Valentina, ella también tiene 6 años y le gusta mucho este baile.
En el concurso fueron 6 competencias. A la ganadora de cada competencia se le daban los puntos de la siguiente manera:

Competencia	**Puntos**
Primera	15
Segunda	15
Tercera	25
Cuarta	30
Quinta	25
Sexta	20

Ella ganó la primera, segunda y cuarta. Yo gané la tercera, quinta y sexta.
Gana la niña que más puntos tenga.

¿Quién ganó?___________________ ¿Por cuántos puntos?_______________

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo sola.
____
____
____

El premio fue una bolsa que tenía 100 chocolates, y decidí compartirlos. A Valentina le di 30 chocolates, 15 chocolates menos que la cantidad que les di a mis papás. ¿Cuántos chocolates les di a mi papás?__________ ¿Cuántos chocolates quedaron para mí?__________

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo sola.
____
____
____

Muchas gracias por tu ayuda. Por favor dale la respuesta a tus profesores. Ellos me la enviaran por correo y así podré aprender a llevar mis cuentas sola.

Hola Karen:

Yo me llamo Josué, tengo 7 años y soy de la India. Acá hace mucho calor y me gusta mucho montar en elefante.

Te cuento que estoy ahorrando para poder comprarme una bicicleta, como en las calles hay poquitos carros, los niños podemos jugar en ellas sin ningún peligro.

Yo tengo una alcancía con monedas. Por la mañana metí 20 monedas que mi padre me regaló. Por la tarde me dieron ganas de comer helado y saqué 7 monedas para poder comprarlo.
Al llegar la noche conté las monedas. ¿Tenía más monedas o menos monedas que ayer?_______________ ¿Cuántas?_______________

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo solo.

____
____
____

Pasados los días, volví a contar las monedas; tengo 63 en total. Por la mañana salí a ayudar a mis padres y como pago me dieron 16 monedas. Por la tarde salí a jugar con mis amigos y nos gusta apostar con las monedas que todos ahorramos. Cuando llegó la noche, llegué a mi casa y las conté nuevamente; tenía 70. ¿Qué pasó en la tarde?, ¿Perdí o gané monedas?______________________ ¿Cuántas?___________________

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo solo.

____
____

Muchas gracias por tu ayuda. Por favor dale la respuesta a tus profesores. Ellos me la enviarán por correo y así podré aprender a llevar mis cuentas solo.

Hola Santiago:

Yo soy Akisha, tengo 6 años y soy de Japón.

Te cuento que aquí nos gusta mucho comer arroz y el traje que llevo puesto se llama Kimono.

También nos gusta mucho la matemática y somos muy buenos utilizando el ábaco.

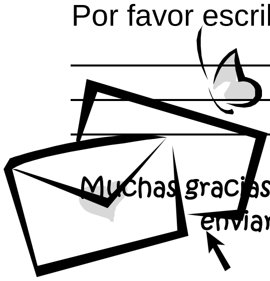
Tus profesores de matemáticas me han contado que eres muy bueno en esta materia. Por eso quisiera darte una situación para que me ayudes a resolverla.

Quiero comprar una muñeca que me gusta mucho. Como no tengo todo el dinero, el señor Yamasaki me deja pagarle poco a poco. Para comprar la muñeca necesito 80 monedas, pero sólo puedo darle 45. ¿Cuántas monedas quedo debiéndole al señor Yamasaki?____________

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo sola.

Para terminar de pagar la muñeca, después de mucho ahorrar le di una cantidad de monedas y el señor Yamasaki me dio de vueltos 12 monedas. ¿Cuántas monedas le di al señor Yamasaki?__________

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo sola.



Muchas gracias por tu ayuda. Por favor dale la respuesta a tus profesores. Ellos me la enviarán por correo y así podré aprender a llevar mis cuentas sola.

Hola Daniela:

Yo soy Guarú, tengo 8 años y soy de África.
Vivo en una aldea con mi familia y mi padre me está enseñando a cazar para poder llevarle comida a mi familia. Mis hermanas se encargan de la cosecha, como el maíz y el fríjol.
Para poder tener muchos alimentos, compartimos la cosecha con nuestros amigos de otras aldeas.
Ayer fuimos a la aldea vecina e hicimos los siguientes cambios:

Nosotros les dimos 35 bolsas de maíz, y ellos nos dieron 47 bolsas de trigo.	Nosotros les dimos 10 bolsas de tomate, y ellos nos dieron 8 bolsas de naranjas.	Nosotros les dimos 33 bolsas de fríjol y ellos nos dieron 28 bolsas de arroz

Realmente no sé si fue un cambio justo.
¿Podrías ayudarme y decirme si fue un cambio justo o no?, ¿por qué?

____

____

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo solo.

____

____

____

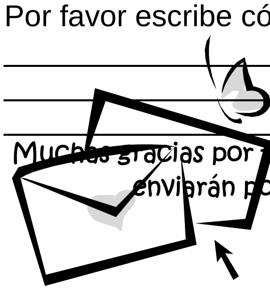
Al regresar, mi padre recordó que le debía a otra aldea vecina unas bolsas de arroz. Con las bolsas que nos habían dado logramos pagar la deuda y nos quedaron 13 bolsas de arroz. Podrías decirme ¿Cuántas bolsas de arroz debía mi padre?____________

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo solo.

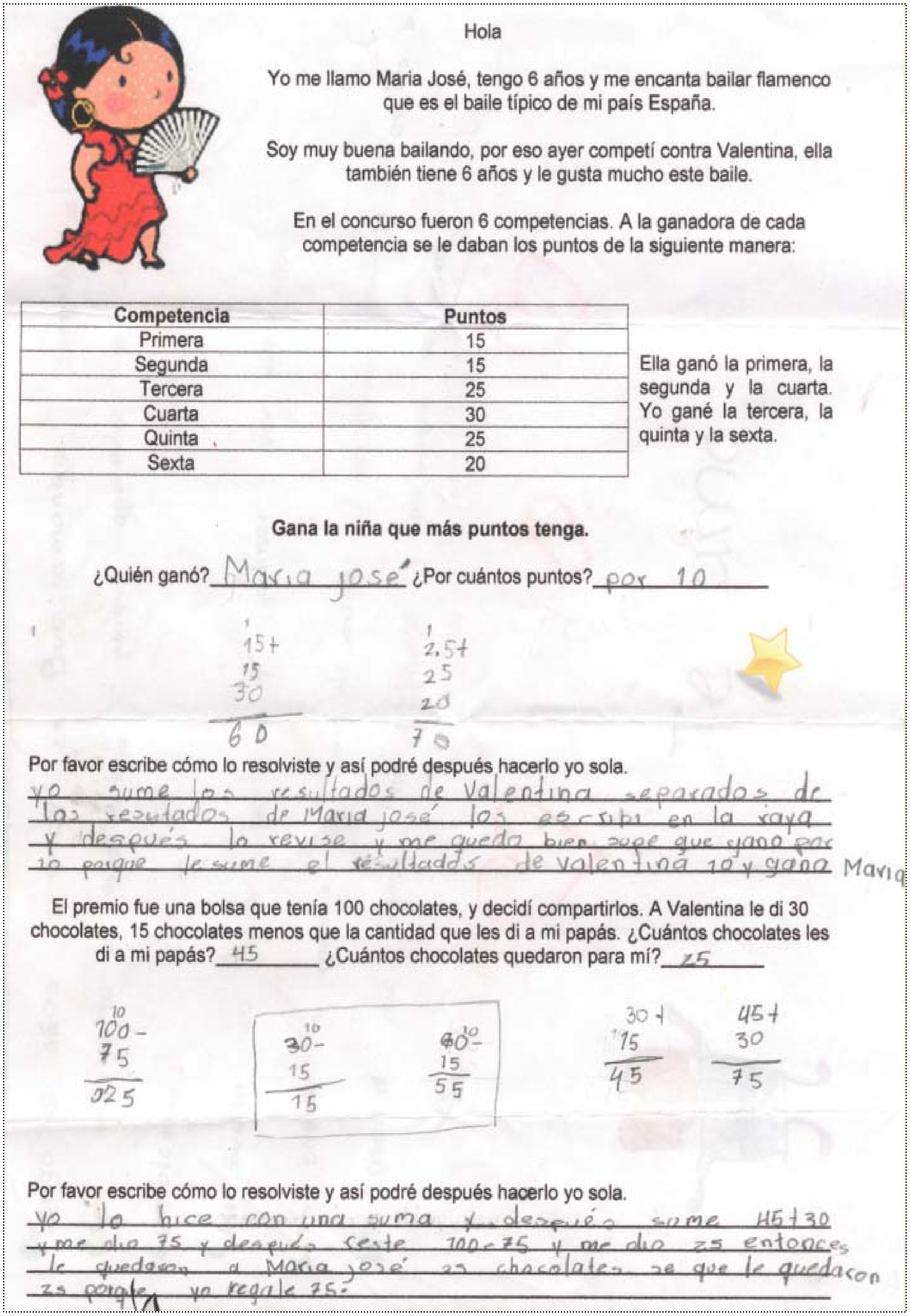
____

____

____



Muchas gracias por tu ayuda. Por favor dale la respuesta a tus profesores. Ellos me la enviarán por correo y así podré aprender a llevar mis cuentas solo.



Hola

Yo me llamo Maria José, tengo 6 años y me encanta bailar flamenco que es el baile típico de mi país España.

Soy muy buena bailando, por eso ayer competí contra Valentina, ella también tiene 6 años y le gusta mucho este baile.

En el concurso fueron 6 competencias. A la ganadora de cada competencia se le daban los puntos de la siguiente manera:

Competencia	Puntos
Primera	15
Segunda	15
Tercera	25
Cuarta	30
Quinta	25
Sexta	20

Ella ganó la primera, la segunda y la cuarta. Yo gané la tercera, la quinta y la sexta.

Gana la niña que más puntos tenga.

¿Quién ganó? Maria josé ¿Por cuántos puntos? por 10

15 + 15 + 30 = 60

25 + 25 + 20 = 70

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo sola.

yo sume los resultados de valentina separados de los resultados de Maria josé los escribi en la raya y después lo revise y me quedo bien supe que gano por 10 porque le sume el resultados de valentina 10 y gana Maria

El premio fue una bolsa que tenía 100 chocolates, y decidí compartirlos. A Valentina le di 30 chocolates, 15 chocolates menos que la cantidad que les di a mi papás. ¿Cuántos chocolates les di a mi papás? 45 ¿Cuántos chocolates quedaron para mí? 25

100 − 75 = 025

30 − 15 = 15

40 − 15 = 55

30 + 15 = 45

45 + 30 = 75

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo sola.

yo lo hice con una suma y después sume 45+30 y me dio 75 y después reste 100-75 y me dio 25 entonces le quedaron a Maria josé 25 chocolates se que le quedaron 25 porque yo regale 75.

Figura 23. (Pilar, "Carta a un amiguito", nov. 27 de 2007).

Cuando planeamos los juegos, pensamos que lograrían mejores resultados, porque los niños podían observar que lo aprendido puede ser más significativo. Como afirma Kamii (1995, p.125) *"Los juegos también son mejores que los ejercicios porque la retroalimentación es inmediata y procede de los compañeros. La retroalimentación inmediata es evidentemente más efectiva que una reacción que se produzca al día siguiente, cuando los niños ya no se preocupan más por lo que sucedió".*

Además, mediante los juegos, los niños interactuarían entre ellos, con el fin de dar origen a nuevas y mejores estrategias. Como afirma Thornton (1998, p.125):

> *"Dos niños que trabajan juntos en un problema pueden tener niveles distintos de comprensión del mismo, o un conocimiento de fondo y unos supuestos diferentes. Esto puede llevar a un conflicto de pareceres, en el que las percepciones y la estrategia de un niño cuestionen directamente las del otro. Estos conflictos deben ejercer sobre los niños una presión poderosa para que cambien sus concepciones y desarrollen nuevas estrategias".* (Thornton, 1998, p.125)

Los juegos planteados los pensamos con el fin, que cada uno, perteneciera a un tipo de problema aditivo propuesto por Vergnaud.

A continuación enunciaremos el nombre de los juegos, ¿cómo se jugó?, el tipo de problema al que pertenece, y sucesos ocurridos durante su desarrollo.

SUMA 10 CON LAS CARTAS

Este juego lo hicimos sentados alrededor de una mesa, para éste nos valimos de la ayuda de un naipe, con las cartas del "As" hasta el 9. Les explicamos que la carta "As" tenía el valor "1".

Este juego es de tipo aditivo **e)**: *"Una transformación opera sobre un estado relativo para originar otro estado relativo"*. En este caso el estado relativo es la primera carta obtenida, sobre ella debe actuar una transformación, que es la segunda carta; al destapar las dos cartas, el nuevo estado relativo, es la cantidad de puntos obtenidos; así, los niños interactuaban diciendo, por ejemplo al destapar las cartas 5 y 7, *"Se pasó, sacó 2 puntos de más".*

En los juegos que propone Kamii (1993, p.128), encontramos *"Sumar 10 con dos números"*, nosotros tomamos este juego y lo denominamos: "Sumar 10 con las cartas". Éste lo encontramos adecuado para realizarlo con los niños, ya que es fácil de jugar y, según la experiencia de la autora, lo recomienda a los maestros. Kamii (Ibíd., p.127) argumenta diciendo: *"Es determinante el empleo que los juegos comercializados y de los inventados para estimular y desarrollar la habilidad de los niños para pensar"*.

Este juego, además de ayudar a los niños a repasar las posibles combinaciones con la suma, para obtener 10, ayuda a desarrollar la agilidad de la memoria, porque también tiene como estrategia recordar en dónde se encontraban las cartas ya descubiertas por los otros adversarios.

Cómo lo jugamos.

Se colocaron todas las cartas sobre la mesa boca abajo, separadas a una distancia considerable. Cada niño, por turnos, debía descubrir dos cartas, la suma de ellas debía ser 10. Una vez se formaba una dupla de cartas que su suma fuera 10, estas salían del juego. Cada par obtenido otorgaba cinco puntos al niño que las había encontrado, además tenía la oportunidad de un nuevo turno. Si se descubrían dos cartas que al sumar su puntaje fuera diferente a 10, estas cartas volverían a la posición como las encontró el jugador.

En este juego los niños tuvieron varios inconvenientes; el primero de ellos consistió en la poca atención que prestaban a las cartas que destapaban los otros jugadores, ya que no lograban recordar en qué posición se encontraban las cartas anteriormente destapadas. Esta situación llevó a los niños a destapar cartas que ya habían sido descubiertas, pero que no eran las indicadas para completar la pareja. El segundo inconveniente al que se enfrentaron, fue el poco cálculo mental que manejaban para encontrar el otro número que se debía destapar, tomando como referencia la primera carta descubierta; este factor llevó a que el juego tomara demasiado tiempo.

En el desarrollo del juego solo dos niños manejaron un formidable uso del cálculo mental, Santiago y Carolina, ellos lograban reconocer rápidamente el valor que se debía obtener en la segunda carta a destapar, teniendo en cuenta el valor de la primera. Tomemos como ejemplo la siguiente situación: Karen destapó la carta con el número *"2"*, Carolina inmediatamente le dijo: *"Le faltan 8 para completar la pareja"*. Esta respuesta de Carolina fue dada en un periodo de tiempo muy corto. Inmediatamente después de escuchar la respuesta dada por su compañera, Karen se dedicó a comprobar la veracidad de dicha respuesta, para eso tomaba sus dedos y comenzaba a contar desde el número *"2"*, cuando pronunciaba: *"tres"*, mostraba un dedo; seguidamente decía: *"cuatro"*, y mostraba otro dedo, así sucesivamente hasta completar el conteo llegando a 10; seguidamente, contó los dedos que mostraban sus dos manos, comprobando que efectivamente faltaban *"8"* puntos para completar 10 y que debía buscar una carta con este número.

Frente a esta situación, queremos resaltar la importancia de emplear el cálculo mental y la agilidad que conlleva el uso de éste, dado que permite resolver problemas en la vida cotidiana de manera práctica y rápida. Por esta razón, consideramos importante proponer actividades en el aula, donde involucremos situaciones, como lo son los juegos, donde el niño pueda ejercitar el cálculo mental.

Foto 5. Jugando “Suma 10 con las cartas”.

BALONCESTO

Para este juego utilizamos una cesta y pimpones, en ellos, escribimos números del 1 al 10.

Consideramos que el baloncesto es un deporte divertido, y que podía encantar a los niños, así, pensamos buscar una fusión entre el deporte y las destrezas en la solución de problemas, para que de eso modo mostraran sus estrategias, a medida que lo jugaban.

En él buscamos trabajar el tipo aditivo **b)**: *“Una transformación actúa sobre un estado fijo para llevarlo a otro estado fijo”*. Los estados fijos son los pimpones obtenidos por el niño al momento de extraerlos de la bolsa. Así, la transformación que ocurre sobre estos estados, es el acto de encestar o no el pimpón, porque el niño obtenía los puntos si lograba introducirlo en la cesta, y más aún, cuando lograba encestar los tres pimpones, ya que la transformación actuaba sobre el primer pimpón encestado. Esta transformación consistía en sumar los puntos obtenidos.

Cómo lo jugamos.

En una bolsa grande se encontraban muchos pimpones, cada uno tenía marcado un número cualquiera del 1 al 10. Cada niño introducía la mano en la bolsa, retirando un pimpón; después de retirado debía lanzarlo para encestarlo en la canasta, y de ese modo, obtener los puntos de éste. El niño podía introducir tres veces la mano en la bolsa, y obtener para sí mismo tres pimpones.

Cuando comenzó el juego, tuvimos la mala suerte que ninguno de los niños logró encestar algún pimpón; como consecuencia, no alcanzamos a observar estrategia alguna empleada en el desarrollo de la actividad.

Foto 3. Jugando “Baloncesto”.

VEINTIUNA

Para esta actividad usamos todas las cartas del póquer. Dimos la aclaración de que el “As” de la baraja podía tomar el valor de “11” o “1”; y las cartas “J, Q, K” tomaban el valor de “10”.

Este juego de cartas es del tipo aditivo **d)**: *“Dos transformaciones se componen en una transformación total”*. Éste comienza cuando a cada niño se le da una carta, esa es la primera transformación; al darle la segunda carta ocurre otra transformación. El niño bajo sus estrategias decide si recibir una nueva carta o no; ésta produce otra transformación.

Este juego nos pareció pertinente presentarlo a los niños, porque a partir de dos cartas que se reparten por azar, deben buscar bajo sus estrategias, hazañas para ganar a sus adversarios. Además, éste los lleva a pensar en probabilidades, porque tienen que encontrar un argumento razonable que les permita decidir, pedir o no, una nueva carta para alterar el juego con el que cuentan, y de ese modo, poder ganarlo. Por ejemplo, si un niño tiene 15 puntos, debe pensar en las cartas que podrían acercarlo o llegar a *"21"*, así, las posibles cartas son las que tienen los números *"6, 5, 4, 3, 2, As"*. Él debe pensar en la posibilidad de sacar alguna de éstas, o de obtener una que lo lleva inmediatamente a perder el juego, como lo son las cartas *"7, 8, 9, 10"* , de ese modo el niño mira qué tan viable es pedir o no otra carta.

Consideramos que estábamos conduciendo al niño al sendero de la probabilidad y el análisis, mediante las preguntas, ¿qué sucedería si me dan otra carta?, ¿es mejor pedirla?, ¿puedo ganarles a mis otros adversarios con las cartas que poseo? Pensamos que ellas podían desarrollar en el niño una actitud de reflexión, además, logramos observar las estrategias empleadas. También, el juego desarrolla el criterio del niño, porque al pedir o no una carta, depende de la seguridad y la confianza que proporcionó aquel razonamiento lógico que realizó, para llegar a aquella decisión.

Cómo lo jugamos.

Cada niño recibía una carta boca abajo y otra boca arriba, la idea era sumar los valores de las dos cartas para aproximarse al número veintiuno. Claro está que si él tenía un valor bastante pequeño, tenía la oportunidad de pedir una carta más, o las que deseará, al director del juego, que en este caso éramos nosotros. Si un niño sobrepasaba el valor pedido, automáticamente perdía el juego y debía esperar la siguiente ronda. El puntaje más cercano a veintiuno o con este valor, ganaba la partida. Si había dos niños con igual marcador, se declaraba un empate.

Después de explicar las reglas, repartimos a cada niño una carta cubierta, y a continuación la carta descubierta. Carolina miró sus cartas, pidió otra mas y dijo: *"no quiero más porque estoy segura que me paso"*. Consideramos que su estrategia la llevó a pensar que la posibilidad de obtener una carta, que le permitiera seguir en el juego, era muy pequeña, entonces no pidió otra porque quizá perdería. Como afirma Thornton (1998, p.25) *"Los niños pequeños pueden extraer inferencias bastantes complejas en algunos contextos".*

Cuando Leidy recibía sus cartas, las tomaba con una sola mano, luego con un dedo señalaba los dibujos que estaban marcados sobre cada carta, cada uno de ellos era contado con el fin de hallar el puntaje. Luego, contando por medio de sus dedos, lo restaba a 21, y decía: *"me faltan..."* y callaba.

Foto 6. Jugando "Veintiuna".

Este juego sólo logramos realizarlo dos veces, ya que los niños debían salir al descanso.

BOLOS

Para desarrollar este juego utilizamos seis pinos. A cada uno le fijamos un número, del 1 al 6. Pensamos que no sería desconocido para el grupo piloto, porque es un juego muy común en los niños de corta edad.

El juego de los bolos es un problema aditivo de tipo **a)**: *"Dos estados fijos se unen en un tercer estado fijo"*. En éste, los estados fijos son los puntos obtenidos al momento de lanzar los pinos, estos debían ser sumados para conocer el puntaje, así, el resultado es el tercer estado fijo.

Cómo lo jugamos.

Los pinos se ubicaban de manera ordenada; el niño se situaba frente a ellos con una bola en la mano, a una distancia considerable, y lanzarla para tratar de derribarlos. Él tenía tres intentos para tumbar la mayor cantidad de pinos; el puntaje que alcanzaba era la suma de los pinos caídos. Si en el primer o segundo turno, lograba derribarlos todos, estos se pondrían nuevamente para darle así la oportunidad de realizar los turnos designados.

Para hacer más participes a los niños en el juego, todos calculaban el puntaje de los pinos derribados, por cada jugador. Así, cada vez que un niño lanzaba, tomábamos los pinos derrumbados, se los mostrábamos, y ellos sumaban mentalmente el puntaje acumulado, algunos realizaban esta suma en voz alta interactuando con otro compañero; de ese modo conocíamos el puntaje de cada jugador.

Para este ejercicio Santiago logró contestar con bastante agilidad y precisión, no se equivocó en los cálculos; él fue el más ágil en comparación a sus compañeros, parecía que el resultado de estas sumas, lo tenía memorizado. Mientras él se concentraba para dar la respuesta, nosotros veíamos a otros niños tratando de encontrarla con los dedos o mentalmente, pero tomaban más tiempo en comparación con el que usaba Santiago.

Foto 4. Jugando "Bolos".

El puntaje total de los niños al momento de finalizar los juegos, fue el siguiente:

Leidy	3+13+10+5+5= 36
Juliana	11+5= 16
Karen	7+4+5+5+5+5= 31
Daniela	14+5+5+5+5+5+5+5=49
Pilar	12+5+5= 22
Carolina	9+4+5+5+5= 28
Santiago	6+16+9+5= 36

Pese a que, en los talleres realizados, buscamos involucrar al niño creando situaciones que fueran familiares, fue mediante los juegos que logramos observar con más detalle, cómo el desarrollo de las estrategias hacen parte de su cotidiano, ya que en la **"Sala de juegos"**, los niños se desprendieron e ignoraron por completo la formalidad que implicaba trabajar en la clase de matemáticas, es decir, en las actividades que realizábamos en el aula, en varias ocasiones observamos que el niño utilizaba la matemática porque se encontraba en esa clase, por ejemplo Leidy en el taller **"Hola amiguitos"** dijo: *"Debo hacer una suma porque este taller es de sumas"*; mientras que en esta actividad los niños hacían uso de ésta, porque las situaciones los conducían a emplear la matemática de manera natural.

En la interacción con los juegos, logramos reconocer que los niños utilizaban tanto estrategias formales como informales para dar solución a las situaciones que se iban presentando. Observamos, que entre las estrategias informales, predominó el conteo con los dedos, pues éste era el medio más asequible y práctico, como empleo de material concreto. Por otro lado, entre las estrategias formales, predominó el cálculo mental; por medio de éste, los niños encontraron de manera rápida y eficiente el resultado de las sumas planteadas.

3. CATEGORIAS PARA EL ANÁLISIS

La importancia de este capítulo, nace al buscar y dar solución coherente y razonable, a uno de los objetivos propuestos; el cual es formular posibles categorías, donde podamos clasificar las estrategias utilizadas por los niños al resolver situaciones de tipo aditivo.

Por medio de las categorías formuladas, buscamos mostrar la relación existente entre la matemática formal e informal, como pieza fundamental, tanto en las estrategias utilizadas por los estudiantes en la resolución de situaciones problema, como en la incidencia e importancia de esta relación en la labor del docente.

Las categorías que se encuentran a continuación, surgen de la observación minuciosa de los datos, la interacción, y aportes que nos brindaron los estudiantes en el aula; además, los libros consultados fueron una base significativa en la formulación y análisis de dichas categorías, porque las investigaciones realizadas, brindaron un sustento y un aporte al análisis de los datos.

Para su formulación, nos basamos en la matemática formal e informal, que observamos en la realización de las actividades. En cada una de ellas, mostramos las estrategias que tratan de explicar el actuar y pensar de los niños.

3.1. MATEMÁTICA INFORMAL

"Yo lo hice con palitos y sumé"
(Pilar, "Hola amiguitos", oct. 2007).

La matemática informal a la que nos referimos, concuerda con la definición de Baroody (2000, p.41): *"Es aquella que es adquirida por el niño en el ambiente que reside y se desarrolla en las necesidades prácticas y las experiencias concretas del niño"*. La matemática informal hace parte de los principios de la teoría cognitiva, mencionada en Baroody (2000, p.34), pues ésta afirma que los niños no llegan a la escuela como pizarras en blanco, sino antes de empezar la escolarización formal, la mayoría de los niños adquiere unos conocimientos considerables sobre contar, el número y la aritmética. Además, una de las implicaciones educativas dada por esta teoría, nombrada en Baroody (2000, p. 46), es: que la matemática informal es el paso intermedio crucial entre el conocimiento intuitivo, limitado e impreciso y basado en la percepción directa, y la matemática poderosa y precisa basada en símbolos abstractos que se imparte en la escuela.

Estos conocimientos adquiridos por los niños en la vida cotidiana, fueron base fundamental en las estrategias empleadas, para dar solución a los problemas planteados, de éstas, nace esta categoría; en ella pretendemos mostrar las herramientas utilizadas por los niños durante la realización de las actividades propuestas en clase; además, queremos dar a conocer la importancia de la matemática informal, como un aporte en la labor del docente.

Por medio de las diferentes actividades y experiencias, mostraremos las estrategias que hacen parte de la matemática informal. Éstas se apoyaban principalmente en el conteo, tanto con representaciones visuales, como concretas, empleando los dedos; y en las estrategias adquiridas en el ambiente.

Es claro, que cuando nacemos, los principales actuantes en nuestra vida son nuestros padres, de ellos aprendemos diferentes actitudes y hábitos que poco a poco forman parte de nuestro ser, como la forma de expresarnos, o los gestos de tristeza, alegría, sorpresa, entre otros.

Observamos que en los niños, algunas de sus estrategias empleadas, estaban relacionas con las enseñanzas que habían adquirido del ambiente donde se desarrollaban, especialmente en casa. Por tanto, mostraremos las siguientes situaciones vividas en el aula.

A Karen por ejemplo, en el taller **"Vamos a jugar fútbol"** [13], le preguntamos cómo había resuelto el primer punto, dado que no observábamos una representación gráfica o algoritmo que mostrara de dónde había obtenido el valor. La tarea consistía en sumar *"2+3"* que eran algunos de los goles hechos por Millonarios. Ella colocó sus manos en la cabeza y dijo: *"Mi mamá me enseñó que me pongo 2 en la cabeza y luego con los dedos"*. Mientras pronunciaba estas palabras, señaló 3 dedos, que era la cantidad a agregar; después empezó a contar desde el número que había "guardado" en su cabecita, *"3, 4 y 5",* guardando uno a uno los dedos que había mostrado.

Frente a esta situación, queremos resaltar la importancia e influencia que tienen los padres sobre el actuar y pensar de los niños, como un aporte significativo durante el desarrollo de las destrezas para el aprendizaje. Thornton (1998, p.122) afirma que:*"La ayuda del adulto estructura el trabajo y guía al niño, permitiéndole realizar algo que está más allá de su capacidad individual"*.

[13] Ver página 21.

Sin embargo, no sólo las enseñanzas provenientes de casa intervienen de manera significativa en las estrategias de los niños; también la cultura y la seguridad que éste entorno les brinda frente a la resolución de situaciones problemas. A Pilar, por ejemplo, para dar explicación a alguna estrategia empleada le es suficiente decir: "*Yo con mi mami ya he hecho problemas de estos y sé que es así*"

Como mencionamos anteriormente, los niños antes de recibir una instrucción matemática formal en la escuela, han adquirido ciertas bases que hacen parte de la matemática informal, que les permite dar solución a situaciones de su vida práctica. Éstas provienen generalmente de sus padres, amigos, familiares, en otras palabras, el entorno en el que ha crecido el niño. Como afirma Baroody (2000, p.46): *"Los preescolares aprenden mucha matemática informal de la familia, los compañeros, la televisión y los juegos antes de llegar a la escuela"*.

Siendo conscientes de esta concepción sobre la enseñanza de la matemática, consideramos que la ayuda y guía de un adulto, en especial alguien muy cercano a él, podrá producir más confianza en las estrategias empleadas, porque a medida que el niño interactúa con ellos, reconoce cuáles son viables o erróneas en la búsqueda de una solución a una tarea planteada.

Otra herramienta que observamos en los niños al momento de resolver algunas situaciones aritméticas, fue el **conteo**. Este instrumento fue pieza clave para la enseñanza de las operaciones aritméticas (suma y resta), en el "Servicio Social Educativo y Práctica Docente I", como afirma Baroody (2000, p.128) *"Los niños desarrollan una comprensión fundamental de la aritmética mucho antes de llegar a la escuela a partir de sus primeras experiencias de contar",* convirtiéndose así el conteo, en una herramienta fundamental en las estrategias empleadas por los niños al momento de solucionar los problemas propuestos.

Consideramos que los niños lograron resolver las diferentes situaciones por medio de la matemática informal, en especial del conteo, porque utilizaron objetos concretos y emplearon estrategias de solución, que modelaban directamente su comprensión de la adición y la sustracción.

Así, notamos que los niños utilizaban como herramienta de material concreto, el empleo de los dedos, porque era el mejor objeto de disponibilidad inmediata, para resolver operaciones aritméticas que implicaban valores pequeños, generalmente, menores que 20.

Esta estrategia permitía a los niños llevar el conteo y solucionar los problemas planteados. Observamos diferentes estrategias, las cuales describimos a continuación.

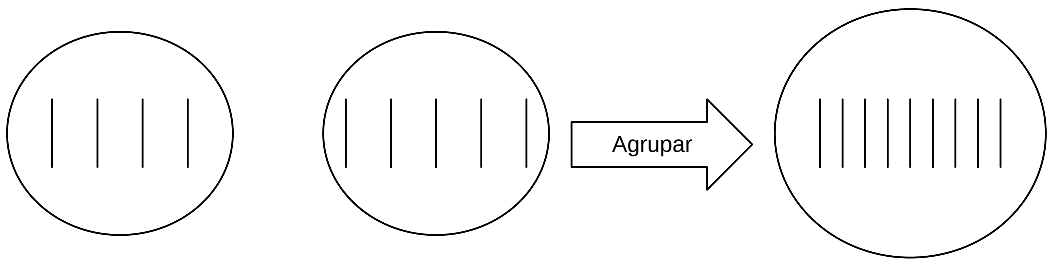
Conteo de la representación de los sumandos, y contar a partir de 1.

En el taller **"Hola amiguitos"**, los niños nos sorprendieron con sus estrategias. Por ejemplo, en la primera situación: *"En el parqueadero de mi Colegio hay 4 motos, 5 carros y 6 camionetas. ¿Cuántos vehículos hay en el parqueadero de mi Colegio?"*

Juliana lo desarrolló representando el número 4 con los dedos de su mano derecha, luego representaba el número 5 con todos los dedos de su mano izquierda, y contaba todos los dedos mostrados. Este conteo lo realizó empezando la secuencia desde *"1"* y escondía un dedo; a medida que iba agregando un número en la secuencia, continuaba escondiendo un dedo; así, hasta ocultar todos los dedos de sus manos y concluir que el último número contado, era la respuesta correcta, que en este caso, era *"9"*.

Bermejo (1990, p. 127), menciona entre las *"Estrategias Infantiles",* una en especial que se relaciona con el ejemplo mencionado. Él afirma que *"La* *estrategia <u>Contar todo con modelos</u> (…) consiste simplemente en representar ambos conjuntos mediante objetos físicos o los dedos y recontar después estos objetos".*

Consideramos que los niños que utilizaban esta estrategia concebían la suma como "juntar", "unir", "agrupar", porque tomaban las cantidades propuestas en los problemas, las reunían en un sólo grupo, y después de realizar esta acción, contaban todos los elementos. Para explicar mejor esta idea, mostramos el siguiente gráfico donde el lector podrá observar la posible acción realizada por el niño, al resolver el primer punto del taller **"Hola amiguitos"**.



Representa las 4 motos. Representa los 5 carros.

Representa la unión y por lo tanto la respuesta.

Conteo a partir de la representación de los sumandos, contando desde el primero.

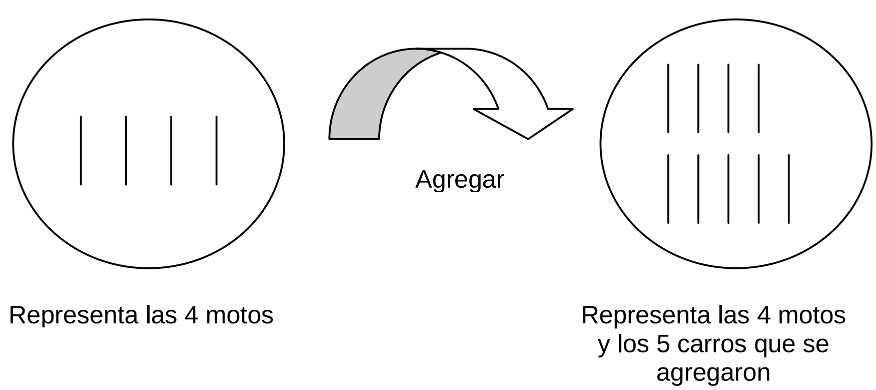
Bermejo (1990, p.128), retoma las estrategias de conteo mencionadas por Baroody (1987). Menciona once estrategias, entre las cuales queremos resaltar las que fueron observadas en nuestra investigación. Él afirma que: *"(…) los niños representan ambos conjuntos con los dedos, pero en vez de recontar los dos conjuntos, inicia el recuento a partir del cardinal del primer conjunto".*

Por ejemplo, Leidy, a medida que iba leyendo el problema y encontraba los valores, los iba representando con sus dedos. Así, en la primera situación del taller **"Hola amiguitos"**, tomaba primero el número 4, luego representaba el número 5 mediante todos los dedos de una de sus manos, y contaba agregando, es decir, partía del número 4 y escondiendo uno a uno sus dedos, iba contando *“5, 6, 7, 8, y 9”,* obteniendo de ese modo el resultado. Este procedimiento lo repitió para hallar la suma *“9+6”*.

Para que los niños logren utilizar esta estrategia, deben conocer el siguiente de un número cualquiera, es decir, poder llevar la secuencia en el conteo, sin la necesidad de empezar desde uno.

A medida que el niño hace uso de esta estrategia, reconoce que no necesita representar todas las cantidades mediante objetos concretos, porque sabe que la cantidad de un conjunto, es la etiqueta que dio al último número que contó en éste. Así, el niño descubre que su estrategia es exitosa, porque ahorra procesos mentales que ya comprende.

Sobre esta estrategia, consideramos que los niños conciben o comprenden la suma como un proceso de “agregar”, ya que partiendo de un conjunto, agregan otra cantidad, para así, obtener el resultado. Para expresar mejor esta idea, mostramos el siguiente gráfico donde el lector podrá observar la posible acción realizada por el niño, al resolver el primer punto del taller **“Hola amiguitos”,** mediante esta estrategia.



Conteo a partir de la representación de los sumandos, iniciando desde la mayor cantidad.

Retomando el primer punto del taller **“Hola amiguitos”**. Karen, tomaba el número 6, a partir de él comenzaba a sumar; representaba el número 5 con sus dedos y memorizaba el *“6”*, luego escondía un dedo y contaba: *“siete”*, ocultaba otro y contaba: *“ocho”*, así sucesivamente hasta esconder los cinco dedos que mostraban sus manos, y concluir que la respuesta era *“11”*.

Consideramos que esta estrategia muestra un nivel de comprensión del algoritmo más compleja; porque el niño a través de sus estrategias informales, reconoce una propiedad importante de la suma que es la conmutatividad, y a su vez, está inventando atajos que le permiten ahorrar un laborioso proceso, como lo es el representar todos los números con los dedos. Además, este atajo es significativo para el niño, porque lo entiende y le genera una respuesta exitosa.

Bermejo (1990, p.128) en las *“Estrategias de conteo”*, manifiesta que esta estrategia es la más evolucionada y más económica cognitivamente.

Foto 7. Contando con los dedos.

Conteo a partir de la representación de un sumando.

Frente a esta estrategia, observamos que la mayoría de las veces los niños tenían en cuenta el orden en que se presentaban los sumandos.

Observemos por ejemplo la solución dada por Santiago en el taller **"Hola amiguitos"**:

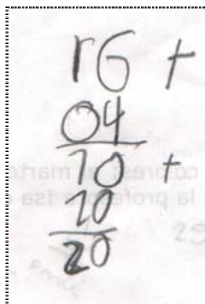


Figura 24. (Santiago, "Hola amiguitos", oct. 24 de 2007).

A pesar de que la respuesta dada fue mediante el algoritmo, el procedimiento para encontrar la solución al problema fue el conteo. Al preguntarle por la estrategia empleada, respondió: *"¡Pues… seis!"*, luego dijo: *"siete"* mostrando uno de sus dedos, *"ocho"* mostrando otro dedo, y así hasta completar cuatro dedos, que era la cantidad a agregar (ver Figura 25.).

"¡Pues... seis!"

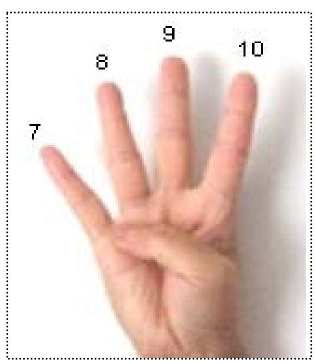


Figura 25.

Bermejo (1990), reconoce también esta estrategia. Él afirma que:

> *"La estrategia de* Contar a partir del primer sumando *consiste en comenzar la secuencia de conteo con el cardinal del primer sumando y continuar con el segundo, sin previa representación de los conjuntos. (…) los niños sólo utilizan los dedos para registrar los incrementos en el segundo sumando y poder finalizar así el conteo".* (Bermejo, 1990, p. 129).

Conteo completando cantidades.

Esta estrategia la observamos principalmente en los problemas de tipo aditivo que se basaban en la comparación de cantidades[14]. Por ejemplo, en el taller **"Sembremos con Andrés"**, cuando interactuábamos con los niños en el primer problema, se presentó la siguiente situación:

Docente: *¿Cuántas naranjas de más, tiene el segundo árbol en comparación con el primero?*[15]

Pilar: *7 naranjas*.

Docente: *¿Cómo lo resolviste?*

-Ella guardó silencio-

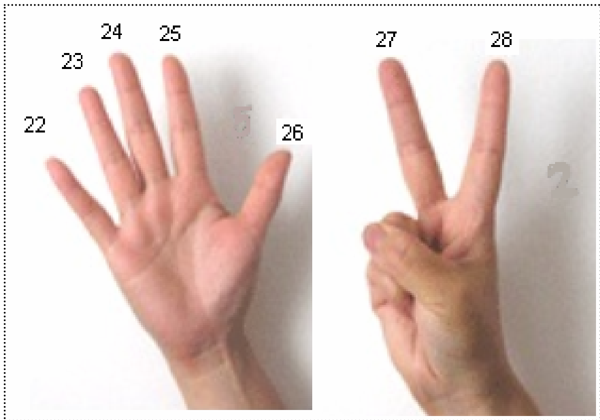
Karen -(Intervino)- *Pues mire*.

Mostrando sus manos de la siguiente manera (ver Figura 26) iba agregando. Al completar el conteo, dijo: *"Y eso me da siete".*

(Diario de campo, "Sembremos con Andrés", nov. 14 de 2007)

[14] Recordamos al lector: ver tipos de problemas aditivos propuestos por Vergnaud en la pág.14.

[15] Esta pregunta hace referencia a las 21 naranjas que se encontraban en el primer árbol, y las 28 del segundo.



"Y eso me da 7".

Figura 26.

Consideramos que esta estrategia, muestra una concepción de la suma como el "completar" cantidades; es decir, a pesar que estos problemas pueden ser resueltos por medio de la sustracción, los niños intuyen esa relación existente entre la suma y la resta, es decir:

A+B= C

C-B=A, ó, C-A=B

Para ampliar un poco más esta idea, retomamos nuevamente la situación mencionada.

Al realizar la pregunta: *¿Cuántas naranjas de más, tiene el segundo árbol en comparación con el primero?,* los niños sabían que en el primer árbol había 21 naranjas, y que en el segundo había 28. Siendo así, una posible solución para esta incógnita, el resolver la sustracción de la siguiente manera: **28-21=7**; pero los niños que se basaron en esta estrategia, comprendieron esta situación como un "completar" cantidades, llegando así a resolverla de la siguiente manera: **21+7=28.**

Un punto importante a resaltar, es la evolución que observamos en los niños en cuanto a las estrategias de conteo mencionadas; dado que en un principio (durante las primeras actividades), la mayoría de los niños utilizaban la estrategia: **“Conteo de la representación de los sumandos, y contar a partir de 1”,** pero poco a poco, fuimos observando diferentes estrategias que mostraban en el niño una evolución o cambio en el nivel de abstracción, llevándolo a reconocer, por ejemplo, que es más rápido contar a partir del mayor sumando, naciendo así la estrategia: **“Conteo a partir de la representación de los sumandos, iniciando desde la mayor cantidad”.** Frente a esta concepción, Thornton (1998, p. 91) afirma que cuando los niños descubren una estrategia acertada, tienden a alterarla y mejorarla para originar una nueva estrategia.

Otra herramienta, en la cual los niños se apoyaron para resolver las situaciones por medio del conteo, fue la representación visual. Es decir, los niños utilizaban palitos, bolitas, o dibujaban los objetos para representar la situación; y así, llevar a cabo el conteo y realizar la operación que creían conveniente, para dar solución al problema planteado.

Un punto que observamos, es que la mayoría de los niños que emplearon esta estrategia, anteriormente habían utilizado los dedos. La diferencia radicaba en que ésta fue usada para dar solución a problemas aditivos que involucraban grandes cantidades, generalmente, mayores que 10.

Tomemos por ejemplo la siguiente situación, trabajada en el taller **“Hola amiguitos”**: *La profesora Isa se encontró el lunes 6 colores; el martes 4 colores y 10 colores el miércoles. ¿Cuántos colores se encontró la profesora Isa en los tres días?* Carolina lo resolvió de la siguiente manera:

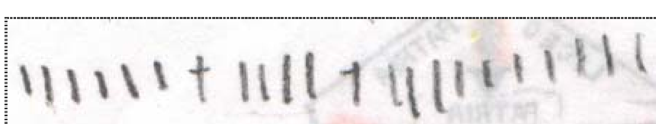


Figura 27. (Carolina, “Hola amiguitos”, oct. 24 de 2007).

Esta estrategia es similar a cómo los hombres llevaban el conteo en la antigüedad. Recordemos que: "*Sea un conjunto de cosas, animales, hombres u objetos, ¿Cómo memorizar cuántos hay sin tener idea alguna de su "número"? Haciendo una marca para cada cosa. (...) ¡Una cosa, una marca! (...) Ya sea en madera, hueso o piedra"* (Guedj, 1998, p.16). Mediante una relación unívoca, llevaban un conteo de los días que transcurrían, las ovejas que tenía un pastor, o la cosecha diaria. En este caso, los niños de igual manera llevaban esta relación, marcando un palito por cada color encontrado.

Sobre esta situación, vemos nuevamente la importancia del desarrollo histórico de las matemáticas en la enseñaza y el aprendizaje. De igual manera, Kamii (1995, p.47) afirma que: *"Los niños de hoy inventan los mismos tipos de procedimientos que inventaron nuestros antepasados y necesitan pasar por un proceso similar de construcción para llegar a ser capaces de comprender los algoritmos de los adultos"*. Esta "invención" que realizan los niños, y sobre la cual, según Kamii, deben ir los procesos de construcción para llegar a comprender los algoritmos, nosotros la relacionamos con la matemática informal del niño, ya que ésta proviene de las construcciones y relaciones mentales que él crea para lograr comprender y dar solución a las situaciones planteadas; razón por la cual, consideramos importante, relacionar y conectar la matemática escolar, con los preconceptos y las construcciones mentales que el niño ha realizado en la interacción del diario vivir.

Sobre la resolución de situaciones problema, basándose en las representaciones visuales que el niño realiza de éstas, Ignez y Stocco[16] (2001, p. 127) mencionan tres diferentes etapas. En este momento, mencionaremos la segunda, donde el niño consigue completar una resolución del problema utilizando solamente el dibujo, en el que muestra, que está explorando y significando las transformaciones presentes en el texto. Consideramos que la mencionada etapa, hace parte de esta categoría para el análisis, ya que el niño

[16] El texto es traducido del portugués al español por los investigadores; por lo tanto no tiene revisión técnica.

se basa de su matemática informal (el dibujo), para aplicar el conteo y así dar solución al problema.

En el taller **"Sembremos con Andrés"**, en la situación: *"Anita es la hermana menor de Andrés. Su padre también le regaló unas semillas, pero al sembrarlas nacieron dos grandes árboles de manzanas. El primer árbol dio 26 manzanas y el segundo 24. Ella también consigue dos cajas para poder guardar su cosecha y así poder venderla. En la primer caja caben 18 manzanas y en la segunda 26".* Los niños debían de igual manera, aconsejar a Anita a repartir las manzanas de los árboles en las cajas.

Santiago realizó el siguiente dibujo:

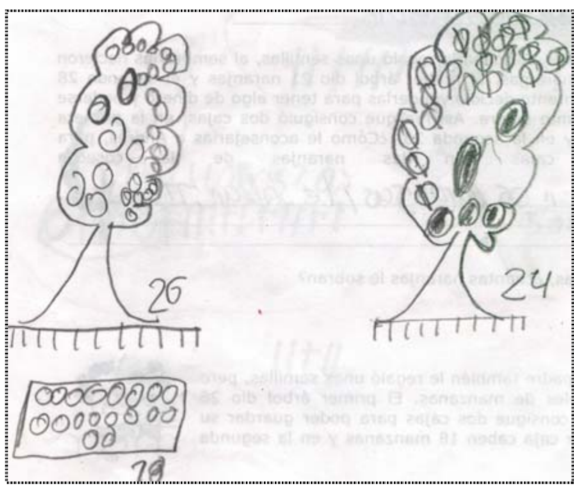


Figura 28. (Santiago, "Sembremos con Andrés", nov. 14 de 2007).

Al preguntarles a los niños *"¿Cuántas manzanas le sobran a Anita?"*, Santiago respondió inmediatamente: *"5".* Cuando nos acercamos a él para observar cómo lo había resuelto, se apoyó del dibujo para argumentarnos la respuesta dada. Él nos dijo: *"Sobran estas manzanas"* – señalando las 5 manzanas que no se encuentran tachadas del segundo árbol-. En el dibujo también observamos que en el primer árbol no hay ninguna manzana tachada y sin embargo no las tuvo en cuenta para dar su respuesta; creemos que, a pesar que no realizó el dibujo de la caja que podía contener 26 frutas, Santiago reconoció que las manzanas del primer árbol llenaban esta caja, y no creyó necesario dibujarla.

En esta situación observamos, cómo por medio solamente del dibujo, logró dar solución a la tarea propuesta; porque cada manzana tachada, era una menos en el árbol, pero una más en la caja. Nuevamente podemos observar cómo la matemática informal, mediante el dibujo y el conteo, llevó al niño a encontrar el éxito en la solución presentada.

Frente a este punto, queremos resaltar la importancia de observar y atender las estrategias utilizadas por nuestros niños en el aula de clases; pues somos conscientes, que si no nos hubiésemos acercado a Santiago para que nos explicara su solución al observar el dibujo, éste carecería de significado para nosotros. Se trata de tener una actitud receptiva frente a los aportes de los niños, para eliminar esa barrera existente entre el maestro y el alumno, y de ese modo, tener conocimiento de las estrategias informales que ellos emplean, a fin de enlazarlas con la matemática formal que se desea enseñar.

Por otro lado, esta estrategia también fue utilizada para clasificar y ordenar la información presentada en los talleres. Santiago, por ejemplo, utilizó la técnica de los palitos, en el taller **"Vamos a jugar fútbol"**, para llevar la cuenta de los goles hechos por Millonarios, y al mismo tiempo identificarlos en la tabla. Creemos que él no lograba coordinar estas dos tareas al mismo tiempo (clasificar y realizar la operación), por lo que tomó, como estrategia viable, la utilización de los palitos.

Podemos decir, que la estrategia informal más empleada, en búsqueda de la solución de problemas aditivos, fue el conteo. Éste se realizó, tanto por medio del material concreto, como por las representaciones visuales realizadas para comprender y analizar las situaciones.

Diferentes estrategias surgieron en el empleo del material concreto, la más utilizada fue, el uso de los dedos. Recordemos que unos partían desde *"1"* para realizar el conteo, luego de unir los sumandos implicados en la situación; otros lo iniciaban partiendo de uno de los sumandos, especialmente el primero encontrado en la lectura; algunos, un poco más ágiles, contaban a partir de la mayor cantidad para ahorrar tiempo y acortar el camino en la solución al problema; y otros mas, conociendo la respuesta y uno de los sumandos, partían de éste para hallar el sumando desconocido, completando cantidades.

Otra estrategia para realizar el conteo, fue las representaciones visuales. Ésta consistía en modelar las cantidades mediante palitos, bolitas u objetos que permitían al niño analizar la situación. Con ayuda de la representación visual, algunos niños lograron hacer uso del algoritmo, con el fin de modelar la estrategia informal empleada.

Podemos concluir que la utilización de dibujos, les sirve a los niños como un recurso de interpretación de los problemas, y a los maestros como registro de las estrategias que emplean en una situación dada. Cuando los niños dibujan, explican más fácilmente sus ideas, pensamientos, y operaciones, porque se están expresando en un lenguaje que les es familiar; además, el lenguaje de los dibujos puede ser una herramienta importante para fomentar la comunicación entre el maestro y el alumno.

Esta estrategia les fue muy útil a los niños, pero ¿qué sucede cuando los números son aún más grandes? ¿La estrategia es exitosa? ¿Será que los niños se inclinan por la matemática formal o siguen basándose en su matemática informal? Una posible respuesta es formulada más adelante, en la tercera categoría.

3.2. MATEMÁTICA FORMAL

"Así me lo enseñó la profesora".
(Juliana, "Vamos a jugar fútbol", nov. 4 de 2007).

La matemática formal que describimos, es aquella matemática que se basa en la escritura y simbología de los algoritmos; es decir, es aquella que se imparte en la escuela. Para definir mejor ésta, tomamos las palabras de Baroody (2000, p.46), al decir que la matemática formal, es aquella matemática poderosa y precisa basada en símbolos abstractos, que se enseña en la escuela. Según la teoría cognitiva, mencionada por Baroody (2000, p.45), ella supera las limitaciones de la matemática informal, pues *"Los procedimientos escritos proporcionan medios eficaces para realizar cálculos aritméticos con números grandes"*, además, esta matemática *"Permite a los niños pensar de una manera más abstracta y poderosa, y abordar con eficacia los problemas en los que intervienen números grandes".* Baroody (2000., p.183) afirma que la matemática escolar exige el empleo de símbolos escritos para representar los números, las operaciones aritméticas, y relaciones matemáticas esenciales, así una de las implicaciones educativas, dada por la teoría cognitiva mencionada por Baroody (2000, p.183), es el reconocer, leer y escribir los símbolos matemáticos como objetivo fundamental de la enseñanza formal.

A través de esta categoría queremos mencionar las estrategias donde los niños se apoyaron solamente de su matemática formal; sin olvidar que ésta tiene unas reglas en la escritura y en el procedimiento de las operaciones, con el fin de no producir ambigüedades en la solución presentada. Es decir, mostraremos cómo los niños al resolver las situaciones problemas utilizando el algoritmo, tenían, o no, presentes las reglas que conlleva emplear la matemática formal.

Mediante el cálculo escrito logramos observar detalladamente las reglas y procedimientos que el niño tiene en cuenta en la implementación de la matemática formal, siendo así uno de los factores más importantes para emplear éste, la comprensión que se tiene sobre el lenguaje de los signos matemáticos; como afirma Baroody (2000, p.183), la matemática formal es significativa para los niños cuando no desconocen los dígitos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) , y en especial los signos (+, -, =). Otro factor importante, en la realización del cálculo escrito, es la comprensión y ejecución de los procesos y reglas que se deben tener en cuenta para manipular y entender los algoritmos. Baroody (2000, p. 212) argumenta: *"El cálculo escrito exacto con números de varias cifras, depende de seguir con fidelidad una serie de pasos (reglas de procedimiento)"*; por esta razón queremos mostrar cómo el éxito del cálculo escrito depende de seguir una serie de pasos; con este fin, mostraremos una serie de soluciones y errores observados, dados por los niños, donde resaltaremos las reglas que tuvieron, o no, en cuenta.

Tomemos por ejemplo la siguiente solución dada por Juliana en la carta que le envío a su "amiguita".

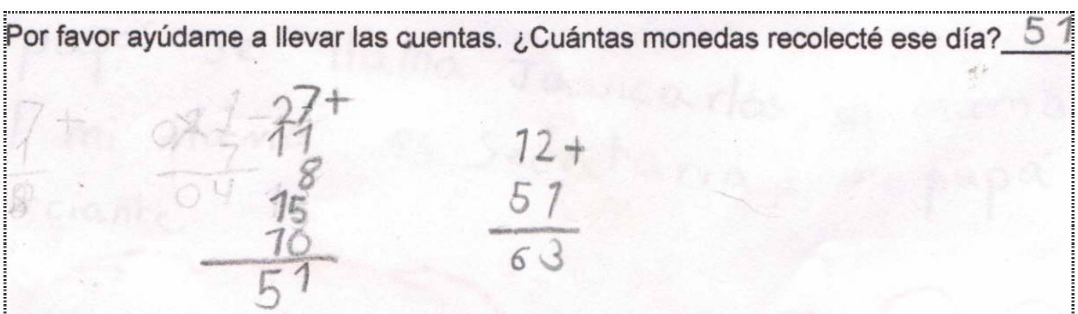


Figura 29. (Juliana, "Carta a un amiguito", nov. 27 de 2007).

El primer paso es el orden vertical en el que escribió los números, es decir, la comprensión que tuvo sobre la posicionalidad (unidades y decenas), como regla fundamental para la solución correcta del algoritmo. Baroody (2000, p.212) menciona entre las reglas de procedimiento en el cálculo escrito, la alineación de los números por la derecha para que las cifras de las unidades formen una columna y las cifras de las decenas otra columna.

Luego de ordenar y clasificar los valores, empezó a sumar de derecha a izquierda, es decir, abordando primero las unidades. Conociendo el sistema decimal, reconoció el proceso del “acarreo”, al escribir *“2”* junto al *“7”*, identificando que llevaba 2 decenas y 1 unidad. Como se puede observar, el *“2”* que escribió, puede interpretarse como “27”, y que hace parte de la suma. Al preguntarle a Juliana el significado de éste escrito, comprendimos que eran las 2 decenas que “llevaba” en la operación realizada.

Estas dos reglas, sumar a partir de las unidades, y el acarreo, también hacen parte del procedimiento en el cálculo escrito, mencionadas por Baroody (2000, p.212): *“(...) El procedimiento usual consiste en empezar realizando la operación indicada por las unidades. (...) Las reglas del acarreo incluyen la cifra que se debe acarrear, dónde colocarla y qué hacer con ella a continuación”.*

Recordemos que hay ciertos tipos de problemas aditivos que también pueden ser resueltos por medio de la sustracción, en especial, los tipos de problemas que se basan en la comparación de valores.

Tomemos la solución dada por Pilar en **“Carta de un amiguito”**.

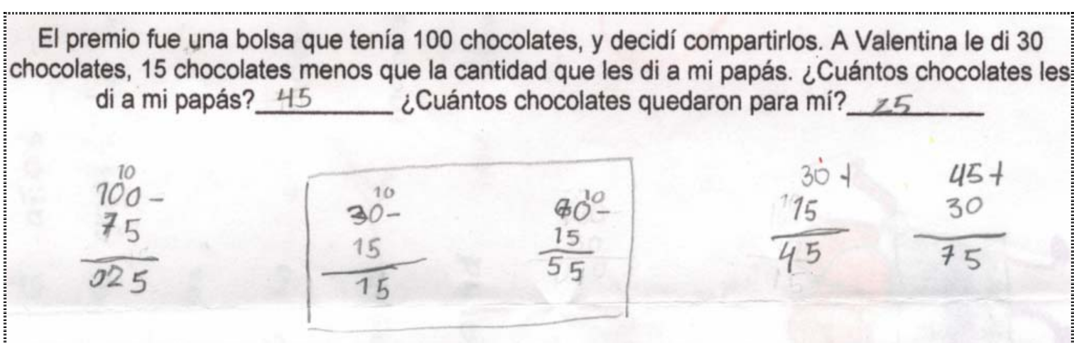


Figura 30. (Pilar, “Carta a un amiguito”, nov. 27 de 2007).

Puede que el planteamiento de las restas que se encuentran encerradas, no solucione la pregunta; pero, queremos rescatar, el proceso matemático formal que la niña empleó para solucionar las restas planteadas. A continuación describiremos el proceso empleado por Pilar.

Nuevamente observamos, cómo organizó los números ordenando las unidades y las decenas por columnas. Al momento de efectuar la resta, en la primera operación, cuando el *"3"* le presta al *"0"* , vemos cómo el *"3"* queda convertido en *"2",* y el *"0"* en *"10"*, para, de esta forma, poder efectuar la resta correspondiente, *"10-5"*.

En este procedimiento, percibimos que la niña comprendía las reglas que debía tener en cuenta para efectuar el algoritmo de la resta, al deducir que no podía realizarla como estaba planteada, sino que debía ejecutar el proceso de "prestar" para solucionarla.

En estos dos ejemplos observamos un buen empleo de los procedimientos y pasos que el niño debe ejecutar para la solución correcta de los algoritmos planteados; punto que es de gran importancia en el aprendizaje significativo de la matemática formal, al comprender las técnicas, conceptos y la conexión de los símbolos, en los procedimientos efectuados, sobre los conocimientos adquiridos.

Consideramos importante mencionar algunos errores cometidos por los niños, cuando emplearon el cálculo escrito. Es difícil mostrarle al lector los errores efectuados, porque los testimonios escritos fueron corregidos por ellos para que las respuestas fueran correctas, es decir, cada vez que notaban alguna equivocación, ya sea por nuestra intervención, la interacción con sus compañeros, o por ellos mismos, borraban la operación y corregían su falta.

Sobre los posibles errores que se pueden cometer en la ejecución de los algoritmos, Bermejo (1990, p. 134) comprende dos tipos. Uno que está relacionado con los factores sintácticos, los cuales son las reglas que rigen la actuación del algoritmo, como, por ejemplo, iniciar la suma en la columna derecha y continuar columna por columna. El otro error, está relacionado con los factores semánticos, los cuales son los conceptos implicados en la ejecución del algoritmo, como, por ejemplo, la comprensión del sistema decimal y la notación posicional.

En el taller **“Sembremos con Andrés”**, Karen realizó una sustracción de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} 21- \\ \underline{15} \\ 14 \end{array}$$

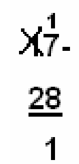
Como podemos observar, las “reglas” de la sustracción fueron mal aplicadas, ya que la niña resta siempre el número menor al mayor (5-1=4 y 2-1=1). Esto se debe, según Baroody (2000, p. 215), a que las reglas que no se comprenden, son percibidas en parte o de manera incorrecta; por esta razón, es que consideramos que realizó el algoritmo de la resta a la ligera, al no comprender la importancia de la posicionalidad y el proceso de “prestar”, en la ejecución del algoritmo. Consideramos que este error se debe a la mala comprensión de los factores semánticos, al no comprender la importancia y el significado de la posicionalidad en la resta planteada.

Cuando le preguntamos, si era posible obtener ese valor al realizar la sustracción, ella reconoció que ese no podía ser el resultado. Cuando empezó a verificar, comentaba lo siguiente: *“Las unidades le prestan a las decenas; así me lo enseñó la profesora”.* Comprendemos en esta situación, que ella conocía de memoria una de las reglas, pero no le era significativa, razón por la cual, a pesar de buscar corregir su respuesta seguía errónea, caía en una equivocación de los factores sintácticos, dado que hay un error en las reglas que rigen la actuación de la niña, para dar solución a la resta planteada.

En este ejemplo queremos mencionar que la niña logró dar una solución correcta a esta resta utilizando su matemática informal (trabajó con los dedos); razón por la cual observamos la relación entre la matemática formal e informal, de la cual hablaremos con más detalle en la tercera categoría.

Otro error que queremos comentar, debido a los factores sintácticos, fue el realizado por Juliana en el taller **"Vamos a jugar fútbol"**. Como mostraremos, ella olvidó, o confundió, las reglas correctas que rigen el algoritmo de la resta.

Durante el desarrollo de la siguiente situación: *"¿Cuántos puntos necesita Júnior para igualar al Nacional?*, ella observó la tabla y dijo: *"Pues restando, 17 menos 28",* después de decir esto, empezó a completar con sus dedos, *"18, 19, 20,…",* hasta llegar a 28, y concluir, que faltaban 11 puntos. Queriendo escribir formalmente la estrategia que había realizado dijo: *"Al menor le quito el mayor"* y escribió lo siguiente:



Por medio de su matemática informal, ella conoció que al realizar la resta, por medio del cálculo escrito, la respuesta debía dar 11. Observamos que, el proceso realizado en el algoritmo, reconoció la regla para realizar la operación correctamente, razón por la cual, efectuó el "préstamo" de las decenas a las unidades. Luego escribió el *"1"* que se encuentra en la respuesta. Al realizar la resta en las decenas, observó que el "*1"*, se había convertido en *"0"*, y no podía solucionar la operación *"0-2",* por esta razón comprendió que algo, en el proceso efectuado, estaba erróneo. Al analizar nuevamente el algoritmo escrito, dedujo que la regla correcta era, *"restarle el menor al mayor".*

Otra estrategia, que emplearon los niños, fue el cálculo mental de las diferentes operaciones propuestas; éste nos permitió observar la agilidad y destrezas adquiridas y aplicadas por los niños en las situaciones planteadas.

A continuación, comentamos las estrategias o procedimientos donde los niños dieron respuesta a problemas aditivos sin hacer uso del lápiz, papel, o material concreto; sólo utilizaron como herramienta, las estimaciones o la memoria.

Es claro que no disponemos de imágenes, o pruebas escritas, donde podamos mostrar cómo el niño resolvió una situación planteada; lo que haremos, es inferir e interpretar sobre las respuestas dadas por ellos, mediante sus expresiones y opiniones, en las situaciones donde observamos el cálculo mental como estrategia de solución. Para englobar esta idea, citamos a Thornton (1998):

> *"No podemos ver realmente los procesos mentales y las motivaciones implicadas en resolver problemas. Sólo podemos hacer inferencias sobre lo que está en la mente del niño. Sin embargo, a veces tenemos la impresión de que literalmente podemos ver el pensamiento de los niños a partir de la concentración de su rostro o la expresión curiosa de sus ojos".* (Thornton, 1998, p.13).

Algunos ejemplos sobre el cálculo mental, fueron observados en la "Sala de juegos"; en ésta salió a relucir la agilidad mental de algunos niños, como Santiago, Pilar y Carolina.

Queremos recordar que en el juego de los bolos, nosotros mostrábamos uno a uno los pinos caídos, los cuales daban el puntaje total. Los niños debían llevar la cuenta de los puntos obtenidos.

En este juego, Daniela lanzó la pelota derrumbando los pinos "*6, 3, 4"*, al mostrar los pinos caídos, Santiago fue el niño que resolvió, con mayor facilidad y rapidez, la suma necesaria para conocer el puntaje total. Esta herramienta le sirvió como estrategia, para conocer y llevar los cálculos necesarios, para obtener el triunfo; en una ocasión le escuchamos decir: *"Necesito 13 puntos para igualar a Daniela",* quien era la niña que iba ganando en esta actividad.

En el juego *"Veintiuna",* Pilar usó el cálculo mental al llevar como estrategia el conteo de las cartas exhibidas por cada oponente, y la estimación de la posible carta que se encontraba cubierta.

En una ocasión, nos encontrábamos repartiendo las cartas a Carolina, antes de que ella, y los otros compañeros, descubriera el puntaje de las cartas expuestas, Pilar dijo: *"Ya perdió, porque completó 21",* al revisar, notamos que las cartas descubiertas efectivamente sumaban 21 puntos. Destacamos, no sólo la agilidad mental con que resolvió la operación, sino también el reconocimiento, al decir: *"Si hace la suma se pasa de 21",* de la influencia de la carta cubierta en la suma de los puntos, que era mayor que 21, porque no existía en el juego una carta con valor "*0*".

Al cálculo mental también recurrió Pilar para hacer estimaciones, sobre los posibles valores que tenían sus compañeros, en la carta cubierta, porque cuando alguno de ellos se "plantaba" (que en el juego quiere decir: "no más cartas"), observaba el número de puntos que llevaba, luego calculaba el valor faltante para completar 21, y basándose en éste, estimaba sobre el posible valor que se encontraba en la carta cubierta.

En el juego, *"Sumemos 10 con las cartas",* Carolina ayudaba a sus compañeros a reconocer el número de la carta, que debía completar, para conformar la pareja. Por ejemplo, Leidy destapó la carta con el número *"7"*, seguidamente Carolina le dijo: *"Le faltan 3 para completar la pareja"*. Esta situación se repitió con el resto de sus compañeros.

Otro ejemplo que consideramos importante, y que hace parte de las estrategias infantiles, mencionadas por Bermejo (1990, p. 130), es la *"Estrategia de hechos numéricos",* la cual hace referencia a la memorización de hechos numéricos, que salen a relucir en el cálculo mental, sin un conteo aparente; por ejemplo, si un niño logra responder rápidamente a la suma *"15+6",* es porque guarda en su memoria un “hecho numérico”: *15+6*, que le permite solucionar mentalmente esta operación.

En el taller **“Vamos a jugar fútbol”**, realizamos la cuarta pregunta: *¿Por cuántos puntos le va ganando el primer equipo de la tabla al último?* Pilar rápidamente contestó: *“20”,* sin realizar ninguna operación escrita. Cuando nos acercamos a ella para que explicara su respuesta, dijo: *“Ya sé que 10+10+10 da 30, y como ya llevo 10, entonces de los 10 faltaban 20 para llegar a 30”.* Consideramos que Pilar, guardaba en su memoria cómo relacionar a 30, como sumandos de 10, 30=10+10+10, utilizando como estrategia esta herramienta para concluir que la respuesta es 20; así, comprendió nuevamente a 20, como sumandos de 10, es decir, 20=10+10. Éste es un aspecto importante a mencionar, ya que a parte de la memoria y la agilidad de Pilar, las relaciones y combinaciones numéricas que reconoció, le fueron significativas, porque hizo empleo de ellas como estrategia de solución.

La matemática formal que se enseña en la escuela, consiste en el aprendizaje y la comprensión de los dígitos, signos, reglas y procedimientos que se deben tener en cuenta en el empleo del algoritmo. Consideramos que, uno de los objetivos de la matemática formal, es proporcionar una respuesta correcta a través de un procedimiento que no produzca ambigüedades, modelando las soluciones de manera abstracta y precisa, mediante el cálculo escrito, el cual, fue empleado por los niños como una estrategia para solucionar las situaciones planteadas. De igual manera surgió otra estrategia, el cálculo mental, la cual consideramos importante, dado que lleva a los niños a pensar y a resolver problemas de una manera más flexible, además se trata de una técnica empleada en el quehacer cotidiano.

Consideramos que si el niño logra recordar los procesos, pasos y reglas que se deben tener en cuenta en la ejecución del algoritmo, obtendrá una respuesta exitosa. Además, creemos que el empleo de éste le proporciona pensar de una manera más abstracta, y abordar los problemas con mayor rapidez y exactitud.

Por otra parte, en comparación con las estrategias informales mencionadas, el algoritmo permite trabajar sin importar la magnitud de las cantidades.

Igualmente, pensamos que el cálculo mental es una estrategia de vital importancia que el niño debe desarrollar, porque ésta puede ser una vía que le permitirá deducir reglas de las matemáticas; inclusive, puede ser una herramienta primordial para labores cotidianas, pues no siempre el niño contará con papel y lápiz para resolver las situaciones que se encontrará en el cotidiano vivir.

3.3. RELACIÓN ENTRE MATEMÁTICA INFORMAL Y MATEMÁTICA FORMAL

A través de las diferentes actividades realizadas, logramos observar que existía un puente entre los preconceptos que tenían nuestros niños, con los conocimientos formales. Este puente lo interpretamos como la comprensión de los conocimientos formales, apoyándose en la matemática informal; y al mismo tiempo, el dar explicación a los conceptos o estrategias formales utilizadas, manejando la matemática informal como recurso de interpretación.

En esta categoría queremos mostrar la relación existente, entre la matemática informal y la matemática formal. En primera instancia, explicaremos la relación que se apoya, principalmente, en los niños que partieron de su matemática informal, para poder representar o modelar formalmente los problemas trabajados.

Tomemos por ejemplo las estrategias empleadas por Karen, para dar solución a la primera situación del taller **“Hola amiguitos”** (ver Figura 31). Ella realizó primero la siguiente estrategia:

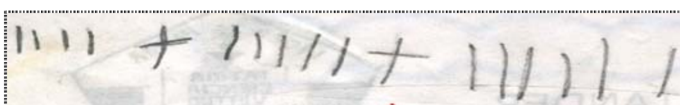


Figura 31. (Karen, “Hola amiguitos”, oct. 24 de 2007).

Como mencionamos en la categoría **“Matemática informal”**, ella realizó una relación unívoca, entre la cantidad de palitos con la cantidad de colores, para efectuar el conteo, y así llegar a la respuesta. Recordemos que ante esta relación, resaltamos la correlación existente entre la historia de las matemáticas y el aprendizaje de los niños, razón por la cual consideramos que la matemática informal, abre el camino hacía la comprensión, de las técnicas numéricas y aritméticas que se enseñan en la escuela, y que hacen parte de la matemática formal. Frente a esta relación presentada, entre la matemática informal como base fundamental para la comprensión de la matemática formal, Baroody (2000, p.41) afirma que: "*Como ocurrió en el desarrollo histórico, contar desempeña un papel esencial en el desarrollo de este conocimiento informal. A su vez, el conocimiento informal de los niños prepara el terreno para la matemática formal que se imparte en la escuela".*

Retomando la estrategia de Karen, una vez realizado el conteo, presentó su respuesta de la siguiente manera:

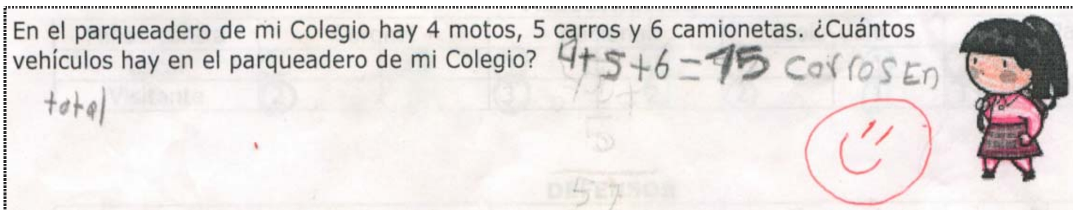


Figura 32. (Karen, "Hola amiguitos", oct. 24 de 2007).

En esta situación, queremos destacar cómo Karen, basándose en sus estrategias informales, logró modelar un problema aditivo, a través de la matemática formal. Pensamos que desempeñó una estrategia que comprendía y le era significativa, para partir de ella y comprender la matemática formal; es decir, conectó el algoritmo de la suma, con el pensamiento y las estrategias informales aplicadas al problema.

Frente a las estrategias adquiridas en el ambiente, Kamii (1993, p.33) afirma que las estrategias que inventan los niños, nacen en lo más profundo de su ser, por esta razón, es importante ejercitar la autonomía en ellos, en vez de exigirles que aprendan reglas que puedan carecer de sentido. De igual manera, queremos relacionar esas estrategias informales con el aprendizaje escolar, de ese modo, tomamos las palabras de Baroody (2000, p.46), al afirmar que el conocimiento informal, es una base fundamental para comprender la matemática escolar, la cual va a ser adquirida de manera memorística y sin sentido, si la enseñanza de ésta se introduce con demasiada rapidez y no se basa en el conocimiento informal.

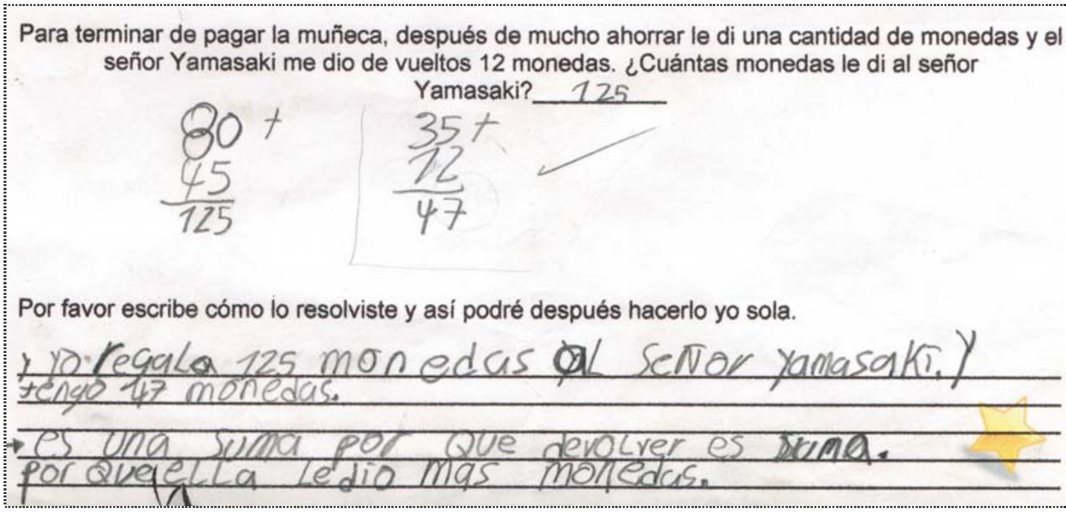
Consideramos que existe otra relación que hace parte de esta categoría; su fundamento son las palabras claves de las situaciones presentadas.

Sabemos que, a medida que crecemos y nos desarrollamos en un ambiente familiar, social, y cultural, aprendemos y relacionamos ciertas palabras con situaciones del diario vivir. Por ejemplo, cuando un niño juega con sus compañeros canicas, y gana, sabe que ahora tiene más canicas que antes; si un niño tiene en una bolsa cierta cantidad de dulces, y se come algunos de ellos, sabe que ahora tiene menos dulces que antes.

Reconocemos, debido a Kamii (1993, p.60), que: *"Los niños adquieren el conocimiento lógico-matemático mediante la interiorización a partir del ambiente",* razón por la cual, las palabras claves, mencionadas en las situaciones presentadas en los talleres, influyeron de forma significativa, porque el niño, mediante éstas, logró conectarlas con un símbolo matemático, ya sea "+", ó, "-", según la estrategia que creían conveniente.

Según Kamii (1995, p.17), el conocimiento lógico-matemático consiste en las relaciones creadas por cada individuo. En nuestro caso, estas relaciones se basaron en la influencia de las palabras claves, y en la elección del algoritmo a empleado, para resolver las situaciones planteadas. Para explicar esta relación, mencionamos algunas situaciones, donde los niños conectaron las palabras claves con los signos matemáticos.

Santiago, por ejemplo, en la **"Carta de un amiguito"**, escribió lo siguiente:



Para terminar de pagar la muñeca, después de mucho ahorrar le di una cantidad de monedas y el señor Yamasaki me dio de vueltos 12 monedas. ¿Cuántas monedas le di al señor Yamasaki? 125

80 +
45
125

35 +
12
47

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo sola.

y yo regala 125 monedas al señor yamasaki. y tengo 47 monedas.
es una suma por que devolver es suma. por que ella le dio mas monedas.

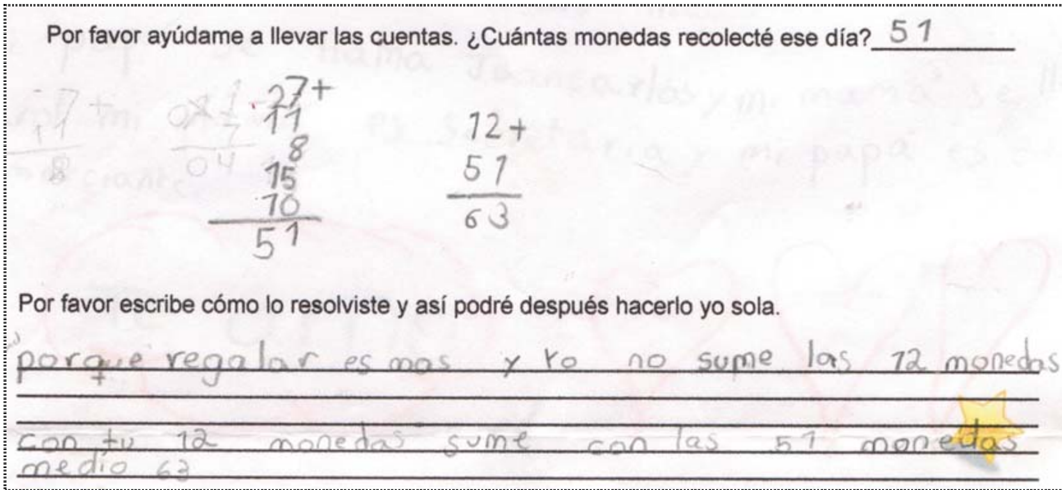
Figura 33. (Santiago, “Carta a un amiguito”, nov. 27 de 2007).

Antes de analizar esta respuesta, queremos recordar al lector que para dar solución a esta situación, Santiago debía tener resuelto los puntos anteriores a ésta, puesto que la pregunta dependía de la respuesta dada anteriormente.

En esta respuesta, observamos que para Santiago, la palabra *“devolver”* implicaba que Akisha, la niña del problema, *“le dio más monedas”* al señor Yamasaki, de las que debía, por tanto, conectó este hecho con la palabra suma, que a su vez, por la matemática formal del niño, modeló con el signo “+”.

Otra situación, fue la respuesta dada por Juliana en la **“Carta de un amiguito”** en el primer problema (ver Figura 34).

Consideramos que es clara la explicación de Juliana, para expresar el porqué utilizó el algoritmo de la suma, para dar solución a la situación; dado que ella expresó, la relación existente entre la palabra clave *“regalar”*, con el signo “+”, al escribir: *“Porque regalar es mas”*, siendo ese *“mas”* la operación a emplear, es decir, el algoritmo de la suma.



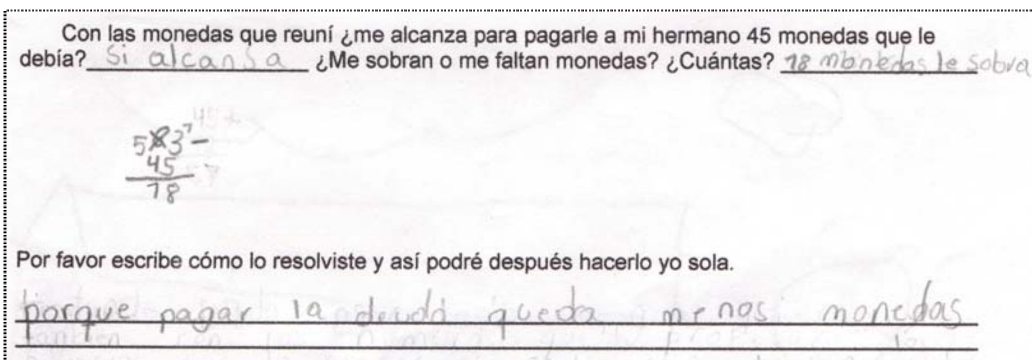
Por favor ayúdame a llevar las cuentas. ¿Cuántas monedas recolecté ese día? 51

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo sola.

porque regalar es mas y ro no sume las 12 monedas
con tu 12 monedas sume con las 51 monedas
medio 63

Figura 34. (Juliana, "Carta a un amiguito", nov. 27 de 2007).

Un último ejemplo, aunque no incluye el algoritmo de la suma, es la respuesta dada por ella, en la segunda situación (ver Figura 35).



Con las monedas que reuní ¿me alcanza para pagarle a mi hermano 45 monedas que le debía? Si alcansa ¿Me sobran o me faltan monedas? ¿Cuántas? 18 monedas le sobra

Por favor escribe cómo lo resolviste y así podré después hacerlo yo sola.

porque pagar la deudd queda menos monedas

Figura 35. (Juliana, "Carta a un amiguito", nov. 27 de 2007).

Nuevamente, podemos observar la influencia de las palabras claves y su conexión con la matemática formal, pues para ella, *"pagar la deuda",* significaba quedar con *"menos monedas"*, y por esta razón, logró modelar esta situación mediante el signo "-", es decir, el algoritmo de la resta.

Frente a esta relación existente, entre la matemática informal y la matemática formal, queremos recalcar la importancia de basar la enseñanza, de la matemática escolar, en los conocimientos informales e intuitivos que tienen los niños, antes de entrar a la escuela. Como observamos anteriormente, los niños pueden crear ese conocimiento lógico-matemático, a partir de las conexiones que adquiere en las situaciones cotidianas, para así, convertirlas en un aprendizaje significativo de la matemática formal. Frente a esta opinión, Baroody (2000, p. 46) afirma: *"El conocimiento informal es una base fundamental para comprender y aprender las matemáticas que se imparten en la escuela".*

También, logramos observar que los niños manejaban un lenguaje matemático que plasmaba de manera abstracta sus ideas, y que estaba relacionado con el algoritmo. Este lenguaje era explicado, de manera coherente y precisa, mediante la matemática informal.

Por ejemplo, en el taller **"Hola amiguitos"**, se presentó la siguiente situación: Daniela, después de clasificar y ordenar la información, tenía escrito en su hoja lo siguiente:

L: 23+21+20+27
A: 14+22+23+28

Ella estaba realizando esta operación por medio de palitos, dibujó 23, 21, 20 y 27 palitos (ver Figura 36), para dar solución a la primera suma planteada.

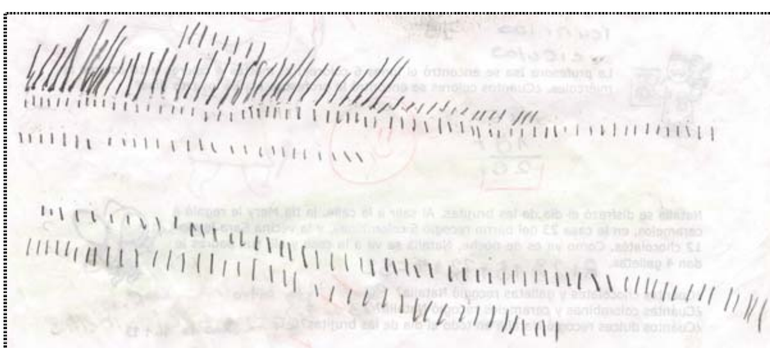


Figura 36. (Daniela, "Hola amiguitos", oct. 24 de 2007).

En esta situación observamos que, aunque modeló la situación matemáticamente, es decir, utilizó la matemática formal enseñada en la escuela, recurrió a su matemática informal, para solucionar al algoritmo escrito. Cuando nos acercamos a ella, notamos que estaba molesta, porque estaba recontando los palitos, y con tan mala suerte, que en dos ocasiones ya había perdido la cuenta; al notar esto, y ver el algoritmo que planteó, le preguntamos: *¿De qué otra forma puedes escribir esto?*-señalando la suma escrita horizontalmente- seguidamente dijo: *¡Pues así!*, e inmediatamente escribió las operaciones de la siguiente manera:

23	14
21 +	22 +
20	23
<u>27</u>	<u>28</u>

Luego de escribir esto dijo: *"¡Ay, pues así es más fácil, porque tengo que hacer menos palitos!"*

Consideramos que Daniela reconoció, que la estrategia empleada, era muy tediosa, y tenía poco éxito, para encontrar la suma con números grandes. Después de recordar y ejecutar el algoritmo de la suma, de la forma como lo aprendió en la escuela, reconoció un camino más corto y viable, para encontrar la solución (ver Figura 37).

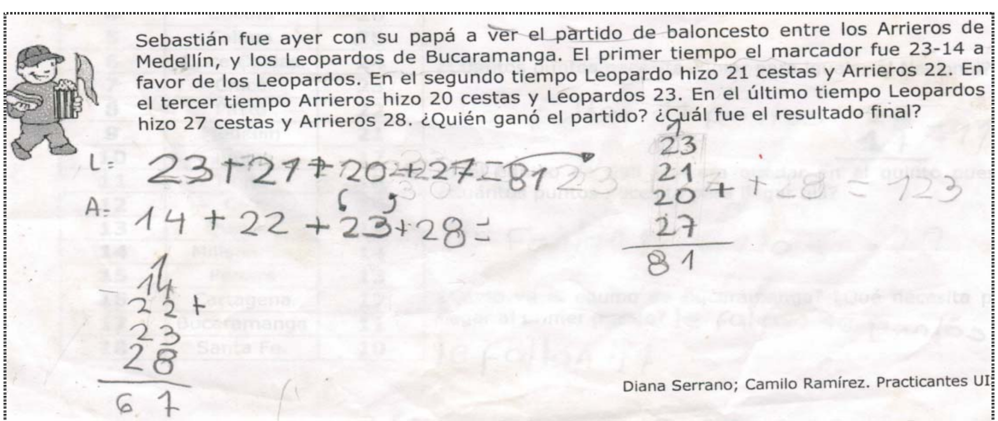


Figura 37. (Daniela, "Hola amiguitos", oct. 24 de 2007).

Ante esta situación, vemos la relación existente entre la matemática formal, con la matemática informal; porque ella partió del algoritmo de la suma (matemática formal), para modelar la situación, y tratar de dar solución al problema, pero, para resolverlo, recurrió a su matemática informal. Luego descubrió, que era más fácil utilizar lo aprendido en la escuela, reconociendo así una falencia en las estrategias informales que empleaba. Esta falencia hace parte de las limitaciones que Baroody (2000) menciona, acerca de la matemática informal; él afirma que:

> *"El contar y la aritmética informal se hacen cada vez menos útiles a medida que los números se hacen mayores. El tiempo y el esfuerzo mental requeridos para contar o calcular de una manera informal se hacen enormes y llegan a ser prohibitivos. A medida que los números aumentan, los métodos informales se van haciendo cada vez más propensos al error".* Baroody (2000, p.45).

Baroody (2000, p.155) afirma que cuando los niños están en la escuela, pueden dar diferentes significados, a los símbolos matemáticos y procedimientos formales de una operación (en nuestro caso la suma), haciendo una conexión con su conocimiento informal.

En la actividad "Carta a un amiguito", el procedimiento realizado por Carolina en la situación que se encuentra planteada, fue el siguiente:

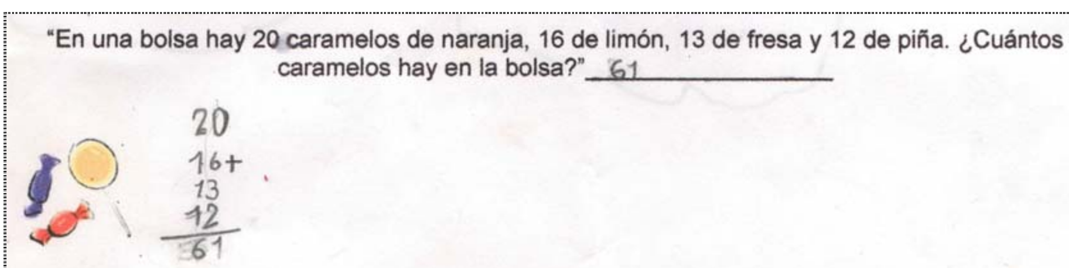


Figura 38. (Carolina, "Carta a un amiguito", nov. 27 de 2007).

Para argumentar el porqué de este procedimiento escribió:

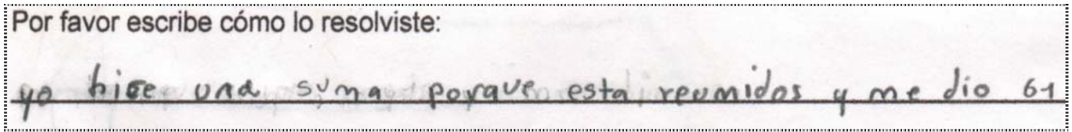

Por favor escribe cómo lo resolviste:
yo hise una suma porque esta reumidos y me dio 61

Figura 39. (Carolina, “Carta a un amiguito”, nov. 27 de 2007).

Para Carolina el símbolo “+” significaba suma, que a su vez significaba reunir. Consideramos que este algoritmo le fue significativo, porque lo estaba explicando a través de su matemática informal, el cual, es el camino más viable que encontró, para dar a entender, con pocas palabras, la construcción mental que realizó para emplear el algoritmo.

Somos conscientes que este ejemplo, es similar a los ya mencionados sobre las palabras claves; la diferencia radica en que los niños, de los ejemplos anteriores, se basaban en su matemática informal para comprender la situación, y luego dar solución utilizando el algoritmo. En cambio, el enfoque que queremos mostrar en esta situación, es que, en primera instancia, los niños resolvían el problema mediante su matemática formal, explicando después, con sus propias palabras, el significado del algoritmo planteado. Sobre esta relación mostrada, Baroody (2000, p.47) afirma que: *“Independientemente de cómo se introduzcan las técnicas, símbolos y conceptos matemáticos en la escuela, los niños tienden a interpretar y abordar la matemática formal en función de su matemática informal”.*

Retomando la situación mencionada, en las estrategias empleadas mediante el cálculo escrito, sobre el error efectuado por Karen, y el cual fue resuelto satisfactoriamente empleando matemática informal[17]; queremos mencionar la necesidad que vio de utilizar estrategias informales, para corregir su error. Consideramos que esta estrategia le fue significativa, porque le ofreció la oportunidad de redescubrir la regla del “préstamo”, de las decenas a las

[17] Ir a la página 104.

unidades, en el algoritmo de la resta, llegando así a la solución correcta del algoritmo.

En una ocasión, jugando *"Sumemos 10 con las cartas"*, Karen descubrió las cartas con los números *"9"* y *"6".* Santiago inmediatamente respondió: *"Perdió, sacó 15"*. Durante todo el juego, él realizó el cálculo de la suma, de las cartas de cada compañero, mediante el cálculo mental. Admirados por esa destreza en Santiago le preguntamos: *"¿Cómo sabes que esa es la respuesta"*, dijo: *"Pues 9..."*, y mostrando sus dedos de la manera como muestra la Figura 40, manifestó: *"Y eso da 15".*

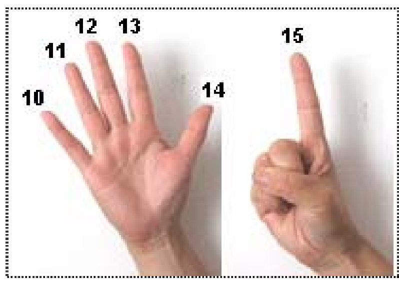


Figura 40.

Podemos observar, cómo Santiago hace uso de la matemática formal para dar la respuesta, pero, para argumentar y explicar el proceso realizado, hace uso del conteo a través de material concreto, el cual hace parte de la matemática informal.

Una vez más, mediante la situación anterior, vemos reflejada la necesidad que tienen los niños de utilizar la matemática informal, para explicar el proceso abstracto y simbólico de las estrategias formales. Resaltando así, una vez más, la relación existente entre matemática formal e informal.

Pilar, en el quinto punto del taller **"Vamos a jugar fútbol",** tenía escrito: *"Le faltan 12 puntos",* al pedirle una explicación del cómo había obtenido ese valor, nos dijo: *"Tengo que hacer una resta, 26-14"* y realizó esta operación obteniendo *"12"*. Luego, empezó a contar con los dedos *"15, 16, 17,..., 26",* comprobando que realmente faltaban 12 puntos. En esta situación observamos, cómo sus estrategias se basaban, tanto en la matemática formal como en la informal, porque interpretaba y resolvía la situación, mediante el modelo matemático, el algoritmo, pero comprobaba, el valor obtenido, mediante su matemática informal.

Algo interesante a mencionar, es que Pilar primero resolvía las operaciones en su pupitre, luego de comprobar la respuesta obtenida, procedía a escribir el resultado en el taller que se encontraba trabajando. Frente a esta situación, queremos destacar la necesidad que ve de utilizar estrategias informales, para sentirse segura del algoritmo realizado. Como afirma Baroody (2000, p.227) *"Como los niños están familiarizados con los procedimientos de la aritmética informal, se sienten cómodos utilizándolas y confían en ellas".*

Recordemos, en las estrategias empleadas en el segundo taller, la situación donde Carolina dio respuesta a la quinta pregunta de la siguiente manera: *"Resté. A 17 le quité 6".* Al preguntarle el porqué del número *"6",* dado que este no pertenecía al ejercicio, nos dijo: *"Porque es lo que necesito para que me de 11"* [18]. A pesar de que ella se desligó por completo de la situación, el punto que queremos resaltar, es el procedimiento numérico que realizó, a través de estrategias formales, el algoritmo, para dar respuesta a esta situación. Utilizando uno de los datos del problema, el *"17"*, y reconociendo la respuesta, *"11"*; realizó la siguiente construcción: **17** $\square$ $\square$ **= 11**, siendo los espacios en blanco lo faltante en el algoritmo para obtener la respuesta. Así, haciendo uso de estrategias informales, el conteo mediante los dedos, concluyó que era de la siguiente manera: **17- 6 = 11**

Ella reconoció, que por medio de la matemática formal podía modelar la situación. Para realizar el algoritmo, utilizó el conteo con sus dedos, y de ese modo, descubrió los valores que le permitirían escribirlo correctamente.

[18] Ir a la página 46.

Nuevamente, vemos cómo los niños aún partiendo de estrategias formales, se basan y utilizan herramientas informales para hallar la solución, y comprender el proceso numérico expresado, a través del algoritmo.

A través de todas las experiencias y estrategias relatadas, podemos decir que existe una correlación entre la matemática formal e informal. Mediante las estrategias informales, el niño lograba comprender, modelar y formular el algoritmo de la suma. Estas estrategias informales se basaban principalmente en la representación visual de las situaciones propuestas, mediante ésta, daba uso y significado al algoritmo de la suma. Además, por medio de las palabras, que hacían parte de su cotidiano, lograba plantear y explicar las operaciones matemáticas.

Otra relación importante, es el análisis, interpretación y descripción del uso de la matemática formal, a través de la matemática informal; es decir, cuando los niños empleaban el algoritmo para dar solución a los problemas, utilizaban estrategias informales, como el conteo con los dedos y palabras claves, para explicar y sustentar el porqué del uso y planteamiento de dicho algoritmo.

A través de la narración de las situaciones vividas en la práctica, el análisis realizado a los datos y las diferentes consideraciones sobre la enseñanza, esperamos que el lector considere la relación existente entre la matemática formal e informal y valide la importancia de ésta, ya que creemos, puede ser una herramienta útil en la enseñanza y el aprendizaje significativo de la matemática formal. Como afirma Baroody (2000, p.46) *"El conocimiento informal es una base fundamental para comprender y aprender las matemáticas que se imparten en la escuela".*

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES FINALES

Buscando mostrar la relación existente entre la matemática formal e informal; presentamos las siguientes ideas surgidas a través de toda la experiencia en el aula.

Después de analizar, por medio de las categorías formuladas en el Capítulo 3, las estrategias observadas en los niños al resolver situaciones problemas de tipo aditivo, concluimos:

> Los niños adquieren destrezas numéricas antes de llegar a la escuela. Estas destrezas se fundamentan principalmente en el **conteo**, mediante la utilización de material concreto. A medida que el niño va utilizando estas estrategias, en situaciones planteadas en la escuela, e interactúa con sus compañeros, compartiendo y adquiriendo nuevas herramientas, mejora y transforma las destrezas mencionadas.
>
> Si el niño no tiene la oportunidad de compartir un espacio, donde pueda interactuar con sus familiares, o amigos, mostrando las herramientas para solucionar situaciones problemas, le será difícil adquirir y desarrollar destrezas útiles, relacionadas con la matemática informal. Así, es importante el aporte y la influencia que éstos tienen sobre el actuar y pensar de los niños, como un aporte significativo durante el desarrollo de las destrezas para el aprendizaje.
>
> La **representación visual**, como estrategia de solución, brinda a los niños herramientas para comprender, interpretar, y analizar, las situaciones problemas. Cuando los niños dibujan, explican con claridad sus ideas, pues lo hacen a través de un lenguaje que para ellos es

familiar. Además, en algunas ocasiones, este lenguaje, es útil para expresar estrategias formales empleadas.

Una herramienta útil para modelar, abreviar y realizar con mayor exactitud y rapidez, la construcción y el análisis realizado para dar solución a un problema, es el **cálculo escrito**. Ésta es exitosa cuando los niños logran comprender, significativamente, los procesos y reglas que deben seguir en la realización del algoritmo.

El **cálculo mental**, es un instrumento que permite a los niños realizar cálculos aritméticos con agilidad y rapidez, además permite descubrir propiedades y relaciones numéricas. Esta estrategia, lleva al niño a pensar de manera más flexible, permitiéndole dar solución e interactuar en labores cotidianas, ya que no siempre contará con lápiz y papel.

La matemática informal permite al niño comprender, de manera significativa el algoritmo enseñado en la escuela, ayudándole a descubrir las reglas y procesos de éste. Además, ésta nace de las construcciones e interpretaciones que el niño hace, a través del ambiente en el que se desarrolla, por esto, las estrategias empleadas son importantes en la comprensión de la matemática formal, donde logra asimilar y relacionar, de manera significativa, los símbolos matemáticos con situaciones cotidianas.

La matemática formal permite a los niños ahorrar procesos, y explicar de manera abstracta y exacta, los pensamientos e ideas que surgen como estrategia, para la solución de una situación problema.

Frente a todas las estrategias y herramientas que dispone el niño para dar solución a situaciones problemas aditivos, consideramos importante presentar, mediante esta investigación, diferentes consideraciones en la labor del maestro, para que pueda construir una enseñanza y aprendizaje significativos.

Es importante crear actividades que sean agradables y que no se encuentren fuera del contexto del niño. Los juegos pueden ser un medio, en el cual aprendan y se diviertan, y de ese modo, el aprendizaje puede ser más significativo, sirviendo al mismo tiempo, para que los maestros observen las diferentes habilidades, estrategias y pensamientos que emplean.

Es necesario que brindemos la oportunidad a los niños de explicar sus estrategias, dado que a veces no son minuciosos en el desarrollo y presentación de las misma, por esta razón, si no damos oportunidad para desarrollar este espacio, no conoceremos y entenderemos lo que están pensando y realizando los niños. Además, al permitirle expresar sus ideas, interactuar con sus compañeros, familiares y amigos, podrá transformar y construir nuevas herramientas de solución.

Como bien es sabido, los niños a menudo olvidan las reglas que rigen los algoritmos. Frente a esto, consideramos que si el docente las introduce de tal modo que ellas puedan hacer una conexión con la matemática informal, aprendida en la vida cotidiana, estos algoritmos serán más sencillos de recordar. Es decir, si el maestro conoce la matemática informal que domina el niño, ésta puede servir como punto de partida para ofrecer un aprendizaje significativo, frente a los algoritmos que propone el currículo de cada escuela.

Al mismo tiempo, la errada comprensión de los algoritmos y de las reglas que ellos implican, talvez se deba a una desorientada conexión entre la matemática informal y matemática formal por parte del niño. Por esto, el papel del maestro debe incidir en auxiliar al niño para que dé coherencia y buena interpretación a las dos matemáticas anteriormente mencionadas.

Es preciso que los niños entiendan y comprendan, que los conocimientos de la escuela llegan a ser útiles en la vida cotidiana, al igual que su matemática informal; ya que los algoritmos proporcionan procesos cortos y económicos, pueden sacar de apuros en situaciones en las que se cuentan con poco tiempo, y es un lenguaje que permite mostrar el proceso realizado, sin dar pie a ambigüedades.

Observamos que algunos niños encuentran más viable el uso de la matemática informal, pues ésta genera confianza y seguridad, en comparación a la matemática aprendida en la escuela. Por esta razón, consideramos importante que el maestro permita la implementación de estas estrategias informales, para que el niño poco a poco pueda relacionarlas con la matemática formal, y así adquirirlas como nuevas estrategias en la solución de problemas. Es decir, pensamos que es indispensable que los niños analicen y reflexionen de manera flexible acerca de las técnicas que están empleando, para lograr una comprensión y conexión de sus ideas con la matemática formal.

Consideramos que esta experiencia de aula, puede enriquecer la metodología empleada por el docente, ya que, como mostramos, es útil la realización de talleres que involucren situaciones de la vida cotidiana de nuestros estudiantes; así, pueden sentirse identificados, realizando actividades que no carecen de sentido para ellos.

Además, creemos importante observar, analizar y permitir a los estudiantes, explicar y expresar las estrategias empleadas, ya que es a través de ellas que el docente puede descubrir las falencias y potencialidades del concepto que están aplicando.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baroody, A. (2000) *El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial* (Sánchez, G. Trad.) Madrid, España: Ed. Visor Dis. (Trabajo original publicado en 1988).

Bermejo, V. (1990) *El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas.* Barcelona, España: Ed. Paidos Ibérica S.A.

Gadino, A. (1996) *Las operaciones aritméticas, los niños y la escuela.* Buenos Aires, Argentina: Ed. Magisterio del Río de la Plata.

Guedj, D. (1998). *El imperio de las cifras y los números.* Barcelona, España: Ediciones B.

Kamii, C. (1993) *Reinventado la aritmética II.* Madrid, España: Ed. Visor Distribuciones, S. A.

Kamii, C. (1995) *Reinventado la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid, España: Ed. Visor Distribuciones, S. A.

Ministerio de Educación Nacional. (1998) Lineamientos Curriculares. Santa Fé de Bogotá: Ed. Nomos Impresores S.A.

Munévar, R., Quintero, J., & Yepes, J. (2006) *¿Qué significa aula investigativa?* Recuperado el 10 de Octubre de 2007 de http://www.educrea.cl/joomla/aprendizaje/aprendizaje/aula-investigativa-un-espacio-para-construir-saber-pedagogico.html

NCTM, *National Council of Teachers of Mathematics* (2000). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* (Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. Trads.) *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla, España: Ed. Servicio de publicaciones de la S.A.E.M. Thales.

Stocco, K., e Ignez, M., (2001). *Ler, escrever e resolver problemas.* Porto Alegre, Brasil: Ed. Artmed.

Thornton, S. (1998) *La resolución infantil de problemas.* Madrid, España: Ed. Morata, S.L.