Estudio de razones trigonométricas para atender características de aprendizaje de estudiantes de décimo grado

Daniela Alejandra Rueda Afanador

Trabajo de grado para optar el título de Licenciada en Matemáticas

Directora

Sandra Evely Parada Rico

Doctora en Ciencias en la especialidad de Matemática educativa

Codirector

Ronald Eduardo Paternina Salguedo

Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

A mi hermosa y bella tía Clara:

Tía, gracias por consentirme y quererme tanto, por ser una gran amiga, por haber sido una persona tan bondadosa y pura, es complejo para mi explicar con palabras lo valiosa que fuiste en todos los momentos de mi vida, las llamadas constantes en cada cumpleaños y la fortaleza que me dabas para seguir estudiando. Sentir el vacío de tu ausencia aún me cuesta superar, te extraño demasiado. Gracias, mi dulce y querida tía, te llevaré en mi corazón por el resto de mi vida. Te dedico este logro con mucho amor.

Agradecimientos

A Dios por ser la fortaleza y guía en cada paso que doy.

A mi familia, a mis padres Janneth y Cesar por ser mi apoyo en todo momento, gracias por enseñarme a no rendirme a pesar de las dificultades.

A mi hermanita Sofía por ser mi motor.

A mi pareja Sergio, por todo lo que eres y todo lo que soy cuando estoy contigo.

A mis amigos y compañeros que me acompañaron y apoyaron durante mi carrera y el desarrollo de este trabajo: Fercho, Mafe, Lucho, Stick, Daniela, Angelica V, Ana, Ingrid, Sebastián, Cristian, Jeffrey.

A la profesora Sandra Evely por su dedicación y compromiso, por ser una gran persona, motivar y enseñar lo valioso de esta labor.

A la Universidad Industrial de Santander por darme la oportunidad de estudiar y crecer como persona.

Y a todos los que estuvieron para mi durante todo mi proceso académico,

Muchas gracias.

Agradecimiento Especial

La publicación de este trabajo de investigación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia - MINCIENCIAS, quien financió el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código 1115-852-70767, con su respectivo proyecto Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores, código 70783, con recursos del PATRIMONIO AUTÓNOMO FONDO NACIONAL DE FINANCIAMIENTO PARA LA CIENCIA, LA TECNOLOGÍA Y LA INNOVACIÓN FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS, contrato CT 183-2021.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

Lista de Tablas

Pág.

Lista de Figuras

Pág.

Lista de Apéndices

Pág.

Resumen

Título: Estudio de razones trigonométricas para atender características de aprendizaje de estudiantes de décimo grado. *

Autor: Daniela Alejandra Rueda Afanador**

Palabras Clave: Necesidades Educativas Especiales (NEE), Razón trigonométrica, procesos matemáticos.

Descripción: El estudio que aquí se reporta, se propuso responder a la pregunta *¿Cómo atender las características particulares de los estudiantes en décimo grado cuando estudian las razones trigonométricas?* Para ello, fue necesario hacer uso de elementos histórico- epistemológico de la trigonometría y recursos fundamentados en el diseño universal de aprendizaje (DUA). El estudio se realizó bajo la metodología de diseño curricular propuesto por Díaz-Barriga, que básicamente consistió en la construcción del diseño, y su valoración (desde una rubrica de evaluación y un pilotaje de implementación). Los datos obtenidos tras la valoración por rúbrica y pilotaje permitieron evidenciar que el uso de los aspectos históricos en los diseños favoreció las múltiples formas de implicación de los estudiantes, además sugiere que la mayoría de las formas de representación y expresión fueron las palabras y dibujos con propósitos comunicativos, también se evidenció que sin importar las diferentes características particulares de cada alumno el trabajo colaborativo es necesario. Otros datos indicaron que el diseño presenta una desconexión relacionada con la idea de mezclar diferentes tipos de representaciones de las razones trigonométricas. La valoración de la rúbrica permitió el mejoramiento del diseño y una futura exploración para analizar sus alcances de uso.

---

* Proyecto de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en matemáticas. Directora: Sandra Evely Parada Rico Dra. En Ciencias Especialidad Educativa. Codirector: Ronald Eduardo Paternina Dr. En matemática.

Abstract

Title: Study of trigonometry ratios for atend the diferente learning characteristics of tenth grade students. *

Author: Daniela Alejandra Rueda Afanador**

Keywords: Special Education Needs(NEE), trigonometric ratios, mathematical processes..

Description: The study reported here proposed to answer the question: How to attend to the particular characteristics of tenth grade students when they study trigonometric ratios? For this, it was necessary to make use of historical-epistemological elements of trigonometry and resources based on the universal learning design (DUA). The study was carried out under the curricular design methodology proposed by Díaz-Barriga, which basically consisted in the construction of the design, and its evaluation (from an evaluation rubric and an implementation pilot). The data obtained after the evaluation by rubric and piloting made it possible to show that the use of historical aspects in the designs favored the multiple forms of student involvement, also suggesting that the majority of the forms of representation and expression were words and drawings with communicative purposes, it was also evidenced that regardless of the different particular characteristics of each student, collaborative work is necessary. Other data indicated that the design presents a disconnect related to the idea of mixing different types of representations of the trigonometric ratios. The evaluation of the rubric allowed the improvement of the design and a future exploration to use.

---

* Degree Project

** Faculty of Sciences. School of Mathematics.. Director: Sandra Evely Parada Rico Dr. In Sciences Specialty Educational Mathematics Co-Director Ronald Eduardo Paternina Dr. in Mathematics.

FENÓMENO DE ESTUDIO

Los profesores de matemáticas reconocen la enorme dificultad que encierra acercar el contenido matemático a sus estudiantes, pero cuando se trabaja en las clases se recae en los procesos tradicionales y homogeneizadores que afectan especialmente a los estudiantes con necesidades educativas especiales (NEE).

Frente a la atención a la diversidad en el aula y la inclusión educativa, el Estado colombiano garantiza desde la constitución política vigente la educación como un derecho fundamental con igualdad de acceso a las instituciones y oportunidades de aprendizaje en el aula. Sin embargo, la educación inclusiva presenta grandes dificultades en su adecuación en el aula de clase, y más para los docentes de matemáticas como lo resaltan Bermúdez et al., (2018).

En cuanto al marco legal internacional, la ONU (2008) en la convención sobre los derechos de las personas con NEE, en el artículo 24 menciona: el derecho a la educación inclusiva, donde las personas con discapacidad tienen un reconocimiento en las políticas internacionales, además son sujetos de derecho, a quienes se debería proporcionar igualdad de oportunidades y una educación de calidad libre de discriminación.

Adicionalmente, la UNESCO en el foro mundial sobre educación llevado a cabo del 19 al 22 de mayo del 2015, establece una visión común para la educación 2030, discutiendo y analizando diversas estrategias políticas y condiciones que permitan disminuir los índices de analfabetismo, la baja calidad educativa, el difícil acceso y participación de las poblaciones más vulnerables.

Así mismo en Paris, la UNESCO (2017) emite el informe de seguimiento de la educación en el mundo (Informe GEM) índica que tras múltiples años y esfuerzos realizados a nivel mundial en los diferentes países enfocados hacía una educación para todos, las cifras son desalentadoras y aún persisten la exclusión, condiciones de inequidad a personas con algún tipo de necesidad especial, personas que viven en situaciones de conflicto, desplazados, personas con alguna discriminación social, política, personal y cultural.

En el ámbito nacional, además de algunos problemas de cobertura, encontramos que hacer efectiva la inclusión dentro del sistema educativo colombiano es complejo, tal vez porque las instituciones no flexibilizan su contenido para atender los casos con necesidades especiales. Al respecto el Ministerio de educación nacional MEN (2012) considera que:

> Es importante respetar y valorar la diversidad de formas de aprendizaje y los múltiples intereses y motivaciones que presentan los adolescentes y jóvenes en la educación media. Para esto, se espera que los establecimientos educativos EE (Establecimientos educativos) promuevan los principios de la educación inclusiva, expuestos en el Decreto 1421 de 2017 en los PEI, PMI, manuales de convivencia y los programas de orientación socio ocupacional. (p. 88)

Por otro lado, las investigaciones han evidenciado que el aprendizaje relativo a las razones trigonométricas es un proceso complejo para los adolescentes. Por ejemplo, Fiallo (2010), señala que debido a la desconexión entre las diferentes formas de ver las razones trigonométricas; primero como razones entre los lados de un triángulo, otra como coordenadas del círculo trigonométrico y finalmente como distancias y funciones (p. 17).

Gutiérrez (2019), destaca algunas dificultades en el proceso de aprendizaje de las razones trigonométricas; dificultades en el razonamiento proporcional, en la comprensión del concepto razón, e insuficiencia en el manejo numérico del algebra (p. 18).

Se puede así destacar dos situaciones problematizadoras, primero la falta de apoyo a los estudiantes con NEE y segundo los obstáculos epistemológicos y didácticos que tienen los alumnos al introducir el concepto de razón trigonométricas. Por lo anterior, nos preguntamos en el trabajo de grado que aquí se reporta: *¿Cómo atender las características particulares de los estudiantes en décimo grado cuando estudian las razones trigonométricas?* Pregunta que se responderá con el objetivo de investigación: *Construir diseños didácticos para posibilitar el aprendizaje de las razones trigonométricas teniendo en cuenta las características particulares de los estudiantes que cursan décimo grado.*

2. ANTECEDENTES

En este apartado rescatamos algunos estudios previos sobre los temas de la educación inclusiva y la enseñanza de las razones trigonométricas, de modo que una primera revisión bibliográfica se pueda identificar elementos teóricos que nos ofrezcan orientaciones para el diseño y análisis de los resultados de su implementación.

Este capítulo está organizado por tres incisos, empezando por los aspectos legales sobre educación inclusiva en el marco nacional e internacional; seguidos de estudios previos sobre las dificultades y propuestas de aprendizaje de las razones trigonométricas finalizando con investigaciones que relacionan la educación matemática dentro de un marco inclusivo.

2.1 Aspectos legales sobre la educación inclusiva.

Para favorecer la igualdad de oportunidades y de derechos sobre educación en todas las personas sin establecer distinción, las diferentes naciones del mundo han planteado una serie de reflexiones que han quedado plasmadas en diferentes leyes, normas y decretos. A continuación, se mencionan algunas de ellas.

2.1.1. Orientaciones Internacionales

A nivel internacional las discusiones sobre la educación inclusiva han sido tema central de muchos entes gubernamentales. Entre estas, Parra (2010) resalta la declaración de Salamanca (España, 1994), el movimiento de Educación Para Todos (EPT, Tailandia, 1990), la conferencia mundial sobre Educación superior de París y la UNESCO, sugieren los siguiente:

La Declaración de Salamanca (1994) no define exactamente qué es educación inclusiva. Sin embargo, da atención a los diferentes colectivos de niños con necesidades educativas especiales (NEE) evidenciando que las prestaciones educativas especiales son un problema, por ello sugieren nuevas políticas sociales y económicas, para una nueva reforma educativa que beneficie a todos por igual.

El movimiento EPT en la conferencia de Jomtien en Tailandia en 1990, diagnosticaron tres problemas acerca de la educación tradicional: oportunidades limitadas, la educación básica limitada a la enseñanza del cálculo y la alfabetización, ignorando los aprendizajes de la vida cotidiana y grupos de personas marginados por su necesidad particular (personas con discapacidad, grupos étnicos y minorías lingüísticas, etc.…, Tiempo después en el foro que se realizó en Dakar, Senegal en abril del 2000, se llegó a unos objetivos comunes entre diferentes países para corregir los problemas mencionados, por lo que promovieron marcos de acción para cumplir esos objetivos y actuar alrededor del mundo.

La declaración mundial sobre la educación superior UNESCO (2019) realizada en París, fue uno de esos resultados del foro de Dakar, donde se comprometieron a garantizar la igualdad de grupos, minorías, personas con discapacidad y trabajadores. Adoptando la educación inclusiva como:

> Un proceso de fortalecimiento de la capacidad del sistema educativo para llegar a todos los educandos; por lo tanto, puede entenderse como una estrategia clave para alcanzar la (EPT). Como principio general, debería orientar todas las políticas y prácticas educativas, partiendo del hecho de que la educación es un derecho humano básico y el fundamento de una sociedad más justa e igualitaria. (Parra, 2010, p. 80)

Las reflexiones mencionadas fueron parte de la construcción del concepto de educación inclusiva, evidencia el dar prioridad a los derechos de las personas con necesidades especiales, con el fin de que ellas tengan las mismas experiencias que el resto de las personas en un entorno educativo.

2.1.2. Orientaciones Nacionales

En Colombia, desde la Constitución Política (1991), se establece que la educación es un derecho para todas las personas. Por consiguiente, conforme al decreto 1421 de 2017 define educación inclusiva como:

> La educación inclusiva es un proceso permanente que reconoce, valora, y responde de manera pertinente a la diversidad de características, intereses, posibilidades y expectativas de los niños, niñas y adolescentes, jóvenes y adultos, cuyo objetivo es promover su desarrollo, aprendizaje y participación, con pares de su misma edad, en un ambiente de aprendizaje común, sin discriminación o exclusión alguna, y que garantiza, en el marco de los derechos humanos, los apoyos y los ajustes razonables requeridos en su proceso educativo, a través de prácticas, políticas y culturas que eliminan las barreras existentes en el entorno educativo. (p. 5)

Como la educación media como servicio público es obligatoria según lo reglamentado en la constitución política colombiana en su artículo 67, de ella se espera tener una sociedad más educada, más justa, y por ello es un compromiso eliminar las barreras desde las instituciones educativas y generar oportunidades para todos por igual. Además, también se tiene la Ley general de educación 115 (Congreso de la República de Colombia, 1994) donde se presentan objetivos para que los jóvenes cumplan los requisitos de la educación media y el decreto1421 de 2017 por el cual se reglamenta el marco de la educación inclusiva, que trata de garantizar una educación de calidad para todos (MEN, 2017).

Asimismo, el Ministerio de educación Nacional de Colombia se acoge a los lineamientos de la UNESCO sobre la inclusión, donde sugiere que se trabaje sobre el Plan de Mejoramiento Institucional para la educación media, de tal manera que, desde el establecimiento educativo se comparta información a la secretaria de educación acerca de los posibles obstáculos y las posibles facilidades que tienen para trabajar sobre décimo y undécimo grado, además de mencionar los programas de articulación que manejen. Como programa de articulación se encuentran las metodologías del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA), el desarrollar currículos flexibles para promover el acceso a la población con necesidades particulares. Para favorecer la articulación en la educación media para jóvenes con necesidades particulares el MEN (2020) sugiere que:

> En los procesos de tránsito de la educación básica a media, es importante tener en cuenta las estrategias de aprendizaje desde el plan de estudios y los planes de área y aula, para así eliminar las barreras para el aprendizaje presentadas. En el caso en que sea necesario se recomienda elaborar el PIAR[5] del adolescente o

[5] PIAR: Plan Individual de ajustes razonables

> Joven y que este se ajuste o actualice a partir de los procesos pedagógicos y técnicos que se realizan en la media. De igual manera, se sugiere que las entidades articuladas identifiquen los apoyos para promover la participación de la población con discapacidad y así, establecer acuerdos de manera conjunta sobre qué y quién garantiza el apoyo y la gestión de este. (p. 38)

En las orientaciones para promover la trayectoria educativa desde la educación superior, en el marco de la educación inclusiva el MEN (2018) describe una guía para orientar el proceso de fortalecimiento en la trayectoria educativa de la población con necesidades particulares que cursa grado 10° y 11° compuesto de un marco contextual, donde mencionan políticas inclusivas tales como el proyecto educativo institucional (PEI) y el plan de Mejoramiento institucional (PMI) y el Diseño Universal de aprendizaje (DUA), aludiendo a las diferentes trayectorias educativas y cómo es el debido proceso de articulación. Hablar de culturas inclusivas implica tomar conciencia de los actores que hacen parte de la comunidad educativa, sobre imaginarios de las expectativas y oportunidades en la formación y finalizan comentando algunas prácticas inclusivas de valoración pedagógica, de competencias socioemocionales, sobre la flexibilización curricular y socio ocupacional.

Beltrán et al., (2015) en su artículo sobre el sistema educativo colombiano en el camino hacia la inclusión, realizan una comparación entre Colombia y España sobre los avances y retos respecto a la educación inclusiva categorizándola en nueve enfoques a saber. Uno es el enfoque de educación inclusiva, los grupos de atención prioritaria, responsables y recursos, estrategias de enseñanza, formación docente, diseño curricular, niveles educativos, participación de la comunidad y evaluación, del análisis de cada una. Por ello, es necesario garantizar las condiciones de permanencia de los alumnos, cuestionando políticas sociales y ubicando al docente como aquel que tiene el papel fundamental en el proceso de esa transformación social e inclusión.

2.2 Dificultades en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

Desde una perspectiva internacional, diferentes autores mencionan algunas dificultades presentadas al momento de enseñar las razones trigonométricas:

Rodríguez y Sgreccia (2021) evidencia en su estudio, que, al analizar la resolución de problemas trigonométricos en el nivel de secundaria, los estudiantes responden con base en una figura dada, también a la definición de razón trigonométrica y pueden determinar posiciones de objetos a partir de la observación, pero todos presentan dificultades para determinar ángulos específicos y las ecuaciones matemáticas asociadas.

Téllez y Juárez (2021) menciona que al aplicar una de sus tareas se presentó dificultades al momento de usar instrumentos de medición, los estudiantes se sintieron distraídos por cómo utilizar el medidor de ángulos y el telémetro, por de ello, sintieron la necesidad de aprender a cómo usarlos, generando otra actividad del cómo aprender a usar las diferentes herramientas.

Machuca (2015) dice que sus estudiantes tienen poco interés en la lectura, y esto es causante de que tengan gran dificultad al momento de aprender las razones trigonométricas debido a que, al no leer comprensivamente, se les dificulta razonar lo leído de tal manera que afecta el desarrollo estratégico en la resolución del problema. También, el autor explica que otra dificultad encontrada en relación con las dificultades para comprender la trigonometría es el escaso manejo de la geometría, que es necesaria para el entendimiento de los problemas.

Kusmayadi (2017) comenta que, la trigonometría es uno de los temas más complicados para explicar en el aula, esto dicho por experiencias de diferentes docentes, ya que mostró que había dificultades para comprender las funciones trigonométricas por medio de una explicación estándar, como también el resolver problemas rutinarios y no rutinarios, por ello, el autor se enfoca en el uso de las representaciones matemáticas y cómo estas afectan la resolución de problemas trigonométricos.

En Colombia, es representativo el trabajo de Fiallo (2010), que habla del aprendizaje de las razones trigonométricas y desconexión entre lo geométrico, métrico, algebraico, analítico y funcional, lo que probablemente ha generado dificultades en comprensión de los conceptos. Por lo anterior, el autor hace una propuesta basaba en cuatro ejes, el conceptual, referente al aprendizaje del concepto, el curricular, referido a los contenidos curriculares sugeridos y la incorporación de procesos de razonamiento, el metodológico dirigido al enfoque geométrico y su uso como herramienta para la enseñanza de las razones trigonométricas, y el formativo, relacionado a la habilidad de demostración matemática.

Además, Gutiérrez (2019), en su experiencia como educador concluye que:

> Los estudiantes cuando llegan a décimo grado presentan obstáculos epistemológicos de lo aritmético a lo algebraico y su comprensión del concepto razón, como también, dificultades básicas en múltiples aspectos:
>
> -Poca disposición a la argumentación.
>
> -Debilidades en el razonamiento proporcional por prevalencia del razonamiento aritmético.
>
> -Dificultades con el manejo numérico.
>
> -Insuficiencia en los dominios del álgebra. (p. 32)

De lo mencionado anteriormente, su propuesta presenta la visión histórica como parte del aprendizaje activo, es decir, la intervención de la historia permite extraer de ella la matemática y sus problemas originales, de tal forma que los estudiantes puedan redescubrir el concepto de las razones trigonométricas.

Sánchez (2018), expone que uno de los problemas radica en el contenido de la trigonometría, ya que a los estudiantes se les dificulta el relacionar los conceptos algebraicos y geométricos con la trigonometría, por ejemplo, al cambiar del estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo al plano cartesiano, debido a que se hace cambio de una definición sintética a una definición analítica, ya que se cambia al momento de analizar los valores de los lados del triángulo rectángulo, para analizar los valores de las coordenadas del plano y el radio de la circunferencia. Por ello, el autor sugiere el uso del modelo de Van Hiele para estructurar por fases diferentes actividades donde el estudiante pueda dar pasos en su construcción de niveles de razonamiento, es decir, el modelo permitirá la evolución del razonamiento geométrico al analítico por medio de estrategias y métodos que favorecen el aprendizaje de la trigonometría.

Así mismo, en los documentos sugeridos por el MEN, específicamente en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, se observa que no proponen cómo abordar las razones trigonométricas pero, específicamente para grado décimo y undécimo sugieren los siguientes estándares tomados del MEN (2006) donde se reportan como competencias a desarrollar: “Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas”, y “Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas”(p. 89).

Es notorio que los estándares conceden mayor importancia a la formación de conceptos y al desarrollo de habilidades dentro de la resolución de problemas en diferentes contextos, pero se evidencia que el concepto de razón trigonométrica no es sugerido directamente. Sin embargo, los Derechos Básicos de Aprendizaje, muestran para cada grado distintos ejemplos y evidencias de aprendizaje, bajo el derecho de aprendizaje "Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones. Sugiere varias evidencias y una de ellas es: Reconoce el significado de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo para ángulos agudos, en particular seno, coseno y tangente" (MEN, 2016, p. 76).

2.3 Educación matemática y atención a la diversidad

El interés de este proyecto es plantear diseños didácticos que favorezcan el aprendizaje de las razones trigonométricas en personas con características particulares, por ende, se mencionarán algunas investigaciones que presentan adaptaciones curriculares donde se considere la educación matemática y la atención a la diversidad.

Alves (2013) propone mostrar que bajo un marco histórico se fomente la inclusión de los jóvenes en la educación básica en Brasil, pues propone una presentación de diferentes contenidos matemáticos para niños con discapacidad visual y también para jóvenes de zonas rurales, entre los que se encuentran temas de trigonometría y geometría en el espacio, con el objetivo de fortalecer la abstracción (respecto a propiedades u estructuras relacionadas) y las representaciones formales.

Arouxét et al. (2019) describen todo el proceso que transitaron para trabajar la enseñanza de las matemáticas en aulas de nivel universitario que incluyen estudiantes sordos, las autoras comentan que la institución brinda intérpretes en lengua de señas quienes acompañan a los alumnos durante las clases, pero especifican que esto no es suficiente para lograr la retención respecto a la construcción de aprendizajes matemáticos, de tal forma que su propuesta va centrada en ampliar el espacio institucional que permita la identificación de las barreras(respectivas al desarrollo cognitivo) al momento de aprender matemáticas.

Da silva et al. (2020), consideran un escenario en el que se encuentren investigaciones referentes a la enseñanza de las matemáticas en la educación de personas sordas, para ese propósito utilizaron una metodología de revisión para la selección y análisis de artículos disponibles en diferentes bases de datos como: Scopus, Scielo, etc. a través de descriptores como: sordo, matemáticas, lenguaje de señas, tecnología y bilingüismo. Los resultados de las búsquedas constataron que entre los factores que más influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son el desarrollo de herramientas visuales y la construcción de un ambiente accesible para ellos.

Vale la pena mencionar que, en la búsqueda realizada, fueron muy pocas investigaciones donde se plantea la enseñanza de la trigonometría en contextos de inclusión.

3. ASPECTOS TEORICOS Y CONCEPTUALES

En este capítulo se detallan los elementos teóricos que sustentan el proyecto de investigación que aquí se reporta. En la primera parte, explicamos los fundamentos teóricos que tuvimos en cuenta para los diseños didácticos: los aspectos históricos y didácticos de las razones trigonométricas, junto con lo que plantean las políticas del MEN para la enseñanza de las razones trigonométricas. En la segunda parte, consideraremos las necesidades educativas especiales de los estudiantes, por lo tanto, se explicará en qué consiste el DUA y cómo este ofrece sugerencias a los docentes para flexibilizar y adaptar el currículo a las necesidades de los estudiantes, y para finalizar se acogerá la estructura metodológica de los talleres que propone el proyecto 70783 en el que se planea desarrollar el diseño en cuatro momentos y los cuatro niveles de profundidad. Con esta se busca alcanzar el objetivo de investigación: *Construir diseños didácticos para posibilitar el* *aprendizaje de las razones trigonométricas teniendo en cuenta las características particulares de los estudiantes que cursan décimo grado.*

3.1. Aspectos históricos asociados a las razones trigonométricas

El contexto histórico de las razones trigonométricas y la trigonometría en general comienza en las primeras civilizaciones con los babilónicos, y su aproximación de las medidas de ángulos y longitudes de triángulos, de igual manera, los egipcios en su papiro de Rhind, documento donde se encuentran diferentes problemas matemáticos, muestran los inicios de algunas ternas pitagóricas.

> Los estudios históricos sobre la trigonometría se dividen en dos momentos, el de sus inicios prácticos y el de sus fundamentos teóricos. Los inicios prácticos pueden encontrarse en actividades desarrolladas en diferentes culturas y que no son consideradas actividad matemática en sentido estricto de la palabra. Las actividades que inician los estudios sobre la trigonometría son en esencia la medición y la astronomía. (Montiel, 2005, p. 67)

Los griegos retoman ideas propuestas por los egipcios y trabajaron con la geometría ideas enfocadas en los triángulos y ángulos. Una de las grandes ideas fue la de Tales de Mileto que consistió en reflexionar sobre cómo podría ser la altura de la pirámide del rey Keops, y producto de ello configuró un método para calcular la altura de cualquier pirámide, midiendo su sombra y estableciendo una proporción, mientras que en términos geométricos Tales descubrió su famoso teorema cuando investigaba la condición del paralelismo entre dos rectas y su principal aplicación se da en la semejanza de triángulos.

La astronomía fue una de las ciencias pioneras en el origen de la trigonometría, en la que situaciones como el querer predecir la periodicidad de ocurrencia de algunos fenómenos naturales. (por ejemplo, el determinar las épocas apropiadas de siembra, la navegación marítima y lo relacionado con cuerpos celestes).

El primero en usar la geometría con enfoque trigonométrico, fue Aristarco con su idea de que la media luna tenía que ser el vértice de un ángulo recto formado por las líneas Sol-Luna y Luna-Tierra, de alguna manera fue un precursor del modelo heliocéntrico. Es decir, suponía que la tierra órbita el sol.

> Aristarco encontró que el ángulo α, que forman los rayos del sol que abarcan la órbita de la luna, tiene que ser igual a la diferencia angular entre la disposición de la media luna. Si llamamos A la distancia de la tierra a la luna y B a la distancia de la luna al sol, resulta que hay una sencilla razón entre A y B y el ángulo α, que hoy conocemos como tangente (Montiel, 2005, p. 72).

Eratóstenes descubrió que en los solsticios de verano en Siena durante el medio día no se producía ninguna sombra a diferencia de Alejandría, pues allí si se proyectaban sombras, de ello concluyó que la tierra era redonda y además de comprobar la distancia entre siena y Alejandría, también aproximó la circunferencia total de la tierra.

En lo matemáticamente estricto, se construyó la noción de proporción expresada como razón entre los lados de un triángulo, luego Hiparco de Nicea introduce la primera tabla trigonométrica gracias a las observaciones planetarias que realizó. Ptolomeo en su obra el Almagesto, da a conocer métodos para construir su famosa tabla de cuerdas, esta obra no usaba lenguaje trigonométrico, sin embargo, se considera que fue una de las aproximaciones hechas al concepto función trigonométrica.

De acuerdo con Mateus (2013)

> Posterior a la tabla de cuerdas, Ptolomeo dedica una sección del capítulo I del Almagesto a los lemas y teoremas previos para demostrar el teorema de Menelao,

> pues su estudio en términos modernos corresponde a las bases de la trigonometría esférica y, por tanto, a las aplicaciones de ésta en la astronomía. (p. 39)

Abonia et al. (2017) citan a Bond (1921) para señalar el origen de los nombres tomados para el seno y coseno, esto teniendo en cuenta la apreciación de tales por las sombras que se formaban al medir la altura de la pirámide.

> El cambio que aporta la matemática árabe, respecto a las razones trigonométricas, al tomar el radio del círculo como la unidad, la razón del seno de un arco es el seno de su complemento(coseno) es las tangentes (primera sombra) y la razón del seno del complemento(coseno) al seno del arco es la cotangente (segunda sombra). (Bond, 1921, p. 62)

De lo anterior, se reconoce que no solo esas prácticas son aplicables a cualquier rama de las matemáticas, aquí habría que rescatar que aparecen nociones de trigonometría que poco a poco encontraron su lugar en un sentido práctico y a su vez en su sentido matemático, asunto que no solo hacen los griegos, sino que babilonios y culturas orientales también logran y destacan.

3.2. Aspectos curriculares asociados a las razones trigonométricas

Los lineamientos curriculares, fueron diseñados sobre las preguntas ¿Qué enseñar? ¿Cómo enseñar? ¿Qué aprender?, bajo la estructura curricular de procesos, conocimientos básicos y contexto. Respecto al área de matemáticas el MEN (2006) estructura los contenidos por cinco pensamientos y sistemas, para los grados de 10° y 11°, cuando se habla de trigonometría, sugieren los siguientes estándares.

> Desde el pensamiento espacial y sistemas geométricos: Describo y modelos fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.

> Desde el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos: Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas (MEN, 2006, pp. 88 - 89).

Por otra parte, orientados por los derechos básicos de aprendizaje, estructurado por tres componentes; un enunciado como orientador pedagógico, evidencias de aprendizaje y un ejemplo. Para el grado décimo, el enunciado cuarto dice: “comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifico soluciones” MEN (2016). Sugiriendo evidencias de aprendizajes relacionadas con las razones trigonométricas como:

> Reconocer el significado de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo para ángulos agudos, de igual forma calcular valores usando el seno y el coseno, para ángulos no agudos, específicamente para ángulos inscritos en un círculo unitario. También identificar algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación. (MEN, 2016, p. 76)

Los dos documentos mencionados, ponen en la educación colombiana la enseñanza de la trigonometría cómo un objeto de estudio dirigido para grado décimo, de allí que los docentes a través de los años han seguido la idea de que la trigonometría es un contenido no genérico (contrario a contenido genérico que son los conocimientos matemáticos indispensables para que una persona pueda interactuar con la sociedad).

3.3. Aspectos didácticos asociados a las razones trigonométricas

Los diseños que se van a plantear concuerdan con ideas sugeridas por los siguientes autores:

Fiallo (2010), sugiere que, gracias a la dualidad de la trigonometría, en la que se relaciona lo espacial (geométrico) con lo teórico (algebraico), se puede hacer uso de sistemas de geometría dinámica (SGD) como herramienta que permite el integrar diferentes concepciones que conlleven establecer conexiones entre las diferentes definiciones, relaciones y propiedades de las razones trigonométricas.

Así mismo, Guacaneme (2016) expone que:

> Es primordial que el docente tenga un conocimiento acerca de la epistemología de un objeto matemático y de la evolución del pensamiento matemático de los individuos, ya que esto le permitirá orientar sus acciones y decisiones didácticas para interpretar y analizar dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. (p. 222).

Considerando lo anterior, Gutiérrez (2019) propone que se rescate el aspecto histórico-epistemológico, teniendo en cuenta la historia de la matemática como recurso didáctico enfocándolo en tres formas distintas, la historia de las matemáticas como uso, es decir, incluir anécdotas o referencias históricas. La historia como integración y la historia como permeador, es decir, la historia es empleada como orientador para estructurar actividades. Además, agrega criterios sobre qué es ser un ciudadano matemáticamente competente, estableciendo tres componentes, el Saber-ser, Saber-hacer y Saber-saber.

3.4. Atención a las NEE y el DUA.

Hernández et al., (2019), describen que en Colombia (según la encuesta nacional de calidad de vida de 2012)de la población con discapacidad en edades de 18 a 39 años, sólo el 23,6% puede terminar la educación media y que en ellos el índice de analfabetismo es tres veces mayor (22,5%) frente a la cifra nacional (7%). Además, en la encuesta antes mencionada se concluye que solo el 5,4% de las personas con algún tipo de discapacidad termina el bachillerato.

Por otro lado, según las orientaciones para promover la trayectoria educativa de la educación media para un marco inclusivo MEN (2010) propone el Diseño Universal de aprendizaje (DUA), de forma que sea usado para el proceso formativo como el proceso evaluativo.

Morocho (2020) define al DUA como:

> (…) herramienta para organizar la enseñanza a través de múltiples opciones que optimicen el funcionamiento cognitivo de nuestros estudiantes desde una perspectiva de potenciación, logrado después de que el docente conoce cuales son las fortalezas de sus alumnos y las barreras en la enseñanza y como actúa en consecuencia. (p. 22)

El DUA propone tres principios para estructurar un diseño de contenidos, la selección de materiales didácticos y evaluación de los aprendizajes.

Principio I. Proporcionar múltiples formas de representación.

Pautas:

1) Proporcionar diferentes opciones para percibir la información.

2) Proporcionar múltiples opciones para el lenguaje y los símbolos.

3) Proporcionar opciones para la comprensión.

Principio II. Proporcionar múltiples formas de acción y expresión.

Pautas:

1) Proporcionar múltiples medios físicos de acción.

2) Proporcionar opciones para la expresión y hacer fluida la comunicación.

3) Proporcionar opciones para las funciones ejecutivas.

Principio III. Proporcionar múltiples formas de implicación.

Pautas:

1) proporcionar opciones para captar el interés.

2) Proporcionar opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia.

3) proporcionar opciones para la autorregulación. (Morocho, 2020, p.26)

El DUA ofrece unas dimensiones que de acuerdo con la caracterización del estudiantado considera si se necesita más o menos apoyos, para así, poder estructurar una planificación adecuada. Al respecto, Velasco (2022) caracteriza significados en términos de aprendizaje construidos por la comunidad de práctica donde resalta las dificultades al promover la actividad matemática dentro un marco inclusivo, por lo que propone dos categorías de análisis sobre el principio I y principio II de DUA.

Sánchez (2020) referenciando a Meyer (2014), propone un sistema de apoyo que responde a ciertos componentes de un currículo, por ejemplo, si dentro de la caracterización del alumno se necesita más apoyos en la percepción, sugiere abordarlo desde varias alternativas que permitan múltiples formas de representar la información a tratar, para esto se concentran en los materiales y métodos, referidos al cómo y por qué se enseña el contenido.

3.5. Estructura metodológica del diseño.

Parada (2022), propone construir diseños didácticos diferenciados alrededor de un objeto matemático, pero, con cuatro niveles de profundidad, con el fin de que en el aula se ofrezcan herramientas que permitan que cada estudiante de acuerdo con sus características tenga un acercamiento diferenciado al objeto matemático de estudio, a saber:

- Diseños de profundidad 1: Las actividades de este diseño deben proporcionar múltiples representaciones del objeto matemático de estudio, especialmente representaciones concretas que permitan evidenciar atributos de los números y de las formas. Las situaciones problemas para este nivel deberán llevar instrucciones sencillas, que preferiblemente tengan poco texto, con mayor contenido visual, auditivo y que inviten a la manipulación de material concreto (geoplanos, regletas, papel, plastilinas, *stickers*, etc.). Además, el diseño debe proporcionar múltiples formas de acción y expresión como el uso de palabras claves mediante texto alternativo (imágenes, tablas, bits de información, video, fotografía, material físico o digital, títeres, etc.) con el fin de activar la percepción auditiva, visual, táctil de los estudiantes y así promover actividad matemática en ellos. De igual manera, en este diseño se requiere del acompañamiento permanente del profesor, fundamentalmente, para que puedan apoyar al estudiante en la medida que lo necesite, por ejemplo, ayudándolo a hacer conexiones y recordándoles reiterativamente información. Es importante posibilitar en los diseños de este nivel, diferentes formas de implicación, a través trabajo colaborativo con pares y de socialización permanente de sus avances frente al grupo, esto mediante el tratamiento de situaciones y necesidades cotidianas.
- Diseño de profundidad 2: Para este nivel de profundidad es necesario presentar múltiples formas de expresión y comunicación priorizando actividades de resolución de problemas que impliquen la interpretación de información presentada de forma verbal, numérica o gráfica, mediante material visual, auditivo y concreto. El diseño debe proporcionar múltiples

formas de acción y expresión al utilizar situaciones culturalmente significativas de los estudiantes. Las situaciones problemas para este nivel deberán llevar instrucciones sencillas con texto moderado que impliquen la conexión de información para comprender y resolver una situación. El diseño debe proporcionar, para este nivel, variadas formas de acción y expresión dando lugar a las expresiones orales, gestuales, pictóricas, entre otras posibilidades de producción.

De igual manera en este diseño se propone la mediación del docente que permita ir valorando el paso a paso, para dar nuevas instrucciones hasta el logro del propósito previsto. En este nivel sigue siendo importante el trabajo colaborativo con pares y de socialización permanente de sus avances frente al grupo, no obstante, se requiere ir dando autonomía para ir fortaleciendo el uso de los conocimientos aprendidos en la solución de situaciones y necesidades cotidianas. Para ello, el profesor puede dar apoyo con material o representaciones concretas (tapas, ábaco, software, etc.) que puede ir retirando en la medida que el estudiante avanza.

- Diseño de profundidad 3: Para este nivel de profundidad es necesario presentar múltiples formas de expresión y comunicación priorizando actividades de resolución de problemas que impliquen la abstracción de interpretación presentada de forma verbal, numérica, grafica, tabular con diversas y variadas tecnologías (como pueden ser los entornos virtuales interactivos o software.) permitiendo la manipulación, variedad de *feedback*, y estrategias de resolución de problemas. Las actividades están mayormente diseñadas para que los estudiantes construyan expresiones numéricas o algebraicas que permitan modelar una situación problema del contexto. De igual manera, en este nivel las actividades deben posibilitar el desarrollo de procesos matemáticos abstractos y con un lenguaje matemático preciso. El diseño debe proporcionar, para este nivel, variadas formas de acción y expresión haciendo uso del lenguaje matemático acorde con el objeto matemático de estudio. De igual manera en este diseño el docente asumirá la postura de mediación coadyuvando al estudiante para que se acerque y construya los objetos matemáticos según el propósito establecido. En este nivel es importante posibilitar variadas formas de implicación permitiéndole al estudiante mantenerse atento y motivado al resolver y discutir sobre situaciones del contexto matemático y cotidiano.

- Profundidad 4: Para este nivel de profundidad es necesario presentar múltiples formas de expresión, comunicación y argumentación priorizando actividades de resolución, deducción y planteamiento de conjeturas matemáticas con el uso de lenguaje matemático formal. Se sugiere promover la resolución de problemas con la mediación de diversas y variadas tecnologías (como pueden ser los entornos virtuales interactivos o software) permitiendo la visualización, variedad de *feedback*, argumentación y desarrollo de estrategias de resolución de problemas.

Las actividades están mayormente diseñadas para que los estudiantes modelen situaciones del contexto (matemático y no matemático). Justificando y argumento sus procedimientos y deducciones. El diseño debe proporcionar, para este nivel, variadas formas de acción y expresión, haciendo uso del lenguaje matemático formal propio del objeto matemático de estudio. De igual manera en este diseño el docente asumirá la postura de mediador, coadyuvando al estudiante para que acerque y profundice en los objetos de estudio hasta donde su interés, motivación y creatividad se lo permita, de esta forma se da lugar a las múltiples formas de implicación, siempre invitándolo a discutir y exponer avances con sus pares académicos y la comunidad educativa.

Los autores además proponen una estructura didáctica para cada diseño, que cuenta con cuatro momentos para su desarrollo:

- Momento 1, Este es el espacio introductorio respecto a un nuevo objeto de estudio, de forma motivadora, lúdica, notas históricas, etc.…
- Momento 2, En este momento se posibilita la matematización del objeto de estudio, además requerirá intervenciones mediadoras por parte del docente.
- Momento 3, esta es la parte práctica donde los estudiantes afirman los saberes construidos hasta el momento.
- Momento 4, es la parte final que hace una mirada retrospectiva a lo aprendido que determine el desempeño del alumno.

El objetivo del trabajo que aquí se reporta es plantear diseños didácticos dirigidos a estudiantes con NEE que se encuentran en la profundidad 2 ,3 y 4, descartando el nivel 1, por la baja y casi mínima posibilidad de encontrar estudiantes con dificultades severas en la educación media, por lo que solo se trabaja con estudiantes que padecen dificultades leves; la estructura de estos diseños estará comprendido por los cuatro momentos sugeridos en el proyecto 70783 del MEN.

4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.

Para dar cumplimiento al objetivo: *Construir diseños didácticos para posibilitar el aprendizaje de las razones trigonométricas teniendo en cuenta las características particulares de los estudiantes que cursan décimo grado*, se realizó un estudio guiado por la metodología de Díaz-Barriga (1990). El auto, señala la importancia de los elementos necesarios al construir un diseño curricular, para esto se tuvo en cuenta distintas referencias y opiniones de profesionales que aportaron a la adecuación y reestructuración de las actividades derivadas del marco teórico descrito con anterioridad, se plantearon cinco fases que se desarrollan iniciando con la revisión de los estándares básicos de competencias y DBA(Derechos básicos de aprendizaje), seguida una revisión del DUA, la tercera fase fue la construcción del diseño para dar paso a la fase de revisión por rúbrica y finalizar con una prueba piloto.

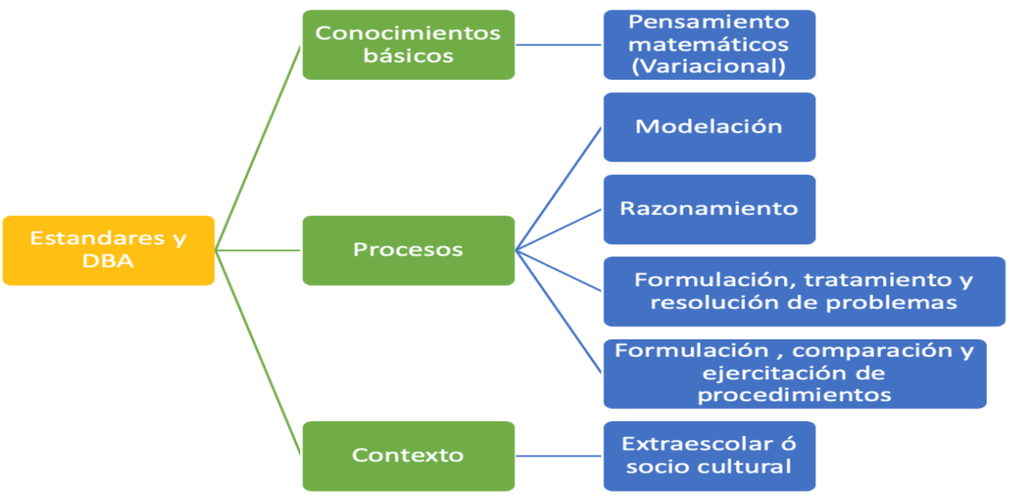
4.1 Fase 1: Revisión Estándares básicos de competencias y DBA

En el transcurso de la revisión de los estándares básicos de competencias se encontraron dos que se relacionan con la trigonometría mencionados anteriormente en la sección 4.2.

En los derechos básicos de aprendizaje DBA, las razones trigonométricas hacen parte de las evidencias correspondientes al derecho 4 del volumen 2 de matemáticas para grado 10°, también mencionado en la sección 4.2. De acuerdo con los dos documentos antes mencionados, el diseño se ubica curricularmente como se muestra en la Figura 1.

Figura 1.

Componentes curriculares

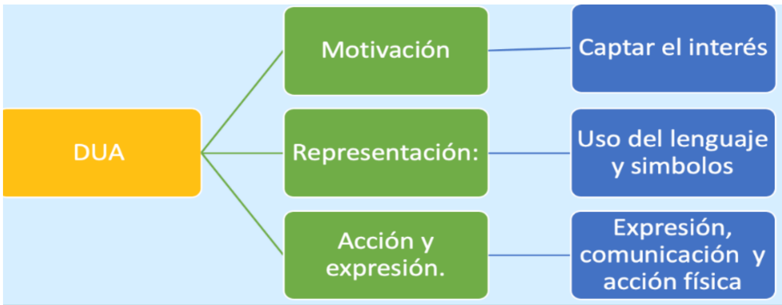


4.2 Fase 2: Sobre la revisión al DUA:

El DUA es la herramienta que personaliza el recorrido de cada nivel de aprendizaje aportando diferentes tipos de recursos centrados en las características particulares de los estudiantes (ver Figura 2). Se tienen en cuenta los tres principios para la planificación del diseño; la motivación y el compromiso, este se relaciona con las redes afectivas y el ¿Por qué? Del aprendizaje, las representaciones son las redes de conocimiento siendo el ¿Qué? Del aprendizaje, y la expresión y acción son el ¿Cómo? Del aprendizaje.

Figura 2.

DUA



4.3 Fase 3: Construcción del diseño didáctico.

El diseño se construyó inicialmente planteando la malla curricular, posteriormente estructurando la hoja de trabajo del estudiante y por último escribiendo las orientaciones para el profesor.

4.3.1 Malla Curricular

La malla curricular hace referencia al esquema mental que organiza los niveles desarrollados por pregunta problematizadora, haciendo visible los procesos matemáticos relacionados al nivel de dificultad sea nivel 2, 3 o 4, proporcionando una coherencia horizontal. Por otro lado, también se prioriza la secuenciación vertical jerarquizando los procesos cognitivos desarrollados por cada nivel, permitiendo la debida evaluación bajo el análisis de evidencias (Ver Apéndice A).

Los propósitos están relacionados con un componente especifico del pensamiento matemático y los descriptores están asociados a los debidos procesos matemáticos, los niveles que construirán el objeto matemático: Razones trigonométricas fue problematizado por la pregunta ¿Cómo podemos medir las sombras? Dirigido al grado décimo atendiendo las características de los estudiantes.

La intención se plantea según el nivel de profundidad, por ello se proponen distintas actividades que pueden acercar el concepto razón trigonométrica, ofreciendo recursos matemáticos (que pueden ser conceptos, procedimientos, algunas relaciones, etc.) como también estrategias cognoscitivas (ensayo y error).

Cada nivel se propuso de la siguiente forma:

- Nivel de profundidad 2: Propone un diseño con actividades que presentan diferentes tipos de representaciones, para promover el razonamiento matemático mediante la exploración de ejemplos, casos particulares, relacionar y listar lo relacionado a tratar.
- Nivel 3: Propone un diseño con actividades para ser desarrolladas en un aula regular. En términos de procesos matemáticos se espera que además de explorar ejemplos y casos particulares pueda describir, modelar y explicar lo observado.
- Nivel 4: Las actividades de este diseño buscan desarrollar habilidades para argumentar situaciones y procesos con un lenguaje más riguroso y formal.

4.3.2 Construcción de los diseños didácticos

La estructura de los tres diseños didácticos busca responder a la pregunta problematizadora **¿Cómo podemos medir las sombras?,** siguiendo una ruta dividida en cuatro momentos que permiten propiciar un dialogo entre docente y estudiante con el fin de situarlos dentro de un contexto que permita el aprendizaje de las razones trigonométricas.

En esta sección se describe primero el diseño nivel 3, con su respectivo propósito y referencias teóricas que sustenten los problemas planteados. Luego se describen los diseños nivel 2 y nivel 4, ya que sus propósitos presentan leves modificaciones que se realizaron respecto al nivel 3 teniendo en cuenta las posibles adaptaciones curriculares que considere las diferentes características particulares de los estudiantes.

4.3.2.1 Diseño para el nivel de profundidad 3

Partiendo de un problema de sombras este diseño tiene el objetivo de acercar el concepto de la razón trigonométrica partiendo de la relación entre las medidas lineales y medidas angulares agudas de un triángulo rectángulo a partir de un problema de sombras.

Los pasos de la ruta didáctica para el diseño se plantean en cuatro momentos como muestra la Tabla 1. (Ver diseño en el Apéndice C).

Tabla 1.

Ruta vertical diseño nivel 3

Momento 1	En el momento inicial es un espacio introductorio respecto a la razón geométrica propuesta por Tales de Mileto y la altura de la pirámide de Keops haciendo uso de una historieta y un Applet desarrollado en GeoGebra para la profundización de este concepto y el de proporción.
Momento 2	En este momento se posibilita la matematización de las razones trigonométricas como aquella razón entre medidas lineales dependientes del comportamiento de los ángulos.
Momento 3	Esta parte se considera el momento donde se pone en práctica y se afianza la comparación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y los ángulos, respectivamente. Esto es, relacionado con la longitud de la sombra y su relación con el ángulo de elevación debido a la posición del sol a lo largo del día. Se desarrollo un Applet que representa la situación a observar. Se sugiere el trabajo colaborativo como mediación metodológica.
Momento 4	Este momento trata de valorar lo aprendido hasta el momento de tal forma que el estudiante ponga en juego sus aprendizajes y logre un aprendizaje significativo.

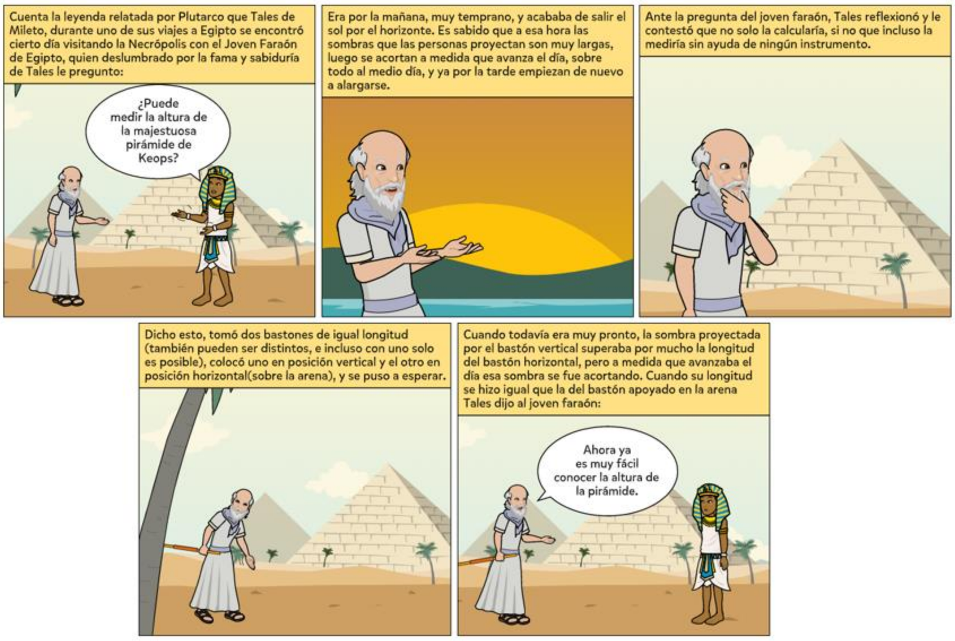
A continuación, se describe como consolido la construcción del diseño:

Momento 1: El diseño comienza con el propósito de reforzar los conceptos de razón geométrica y proporción, para esto se muestra una historieta que describe la leyenda de Tales y la medición de la altura de la pirámide de Keops. Gutiérrez (2019) considera importante este episodio histórico como motivación y además propicia al estimular el razonamiento proporcional mediante la construcción de graficas a escala (Véase Figura 3.).

En este primer momento se sugiere tener cuidado con la definición de razón, teniendo en cuenta la idea de Freudenthal (1983) quien plantea un estatuto lógico de la razón, en cuanto a concepto e incluso como objeto mental, y que requiere un nivel de desarrollo considerablemente alto. Dicho esto, la razón geométrica facilita la comprensión de las razones trigonométricas, tomando la razón como la relación entre los lados de un triángulo rectángulo. Alrededor de este primer paso se realizan distintas preguntas orientadoras con el fin de que se consulte y tengan ideas que introduzcan el concepto de razón.

Figura 3.

Historieta propia de Tales y la pirámide basada en Gutiérrez (2019, p 59).



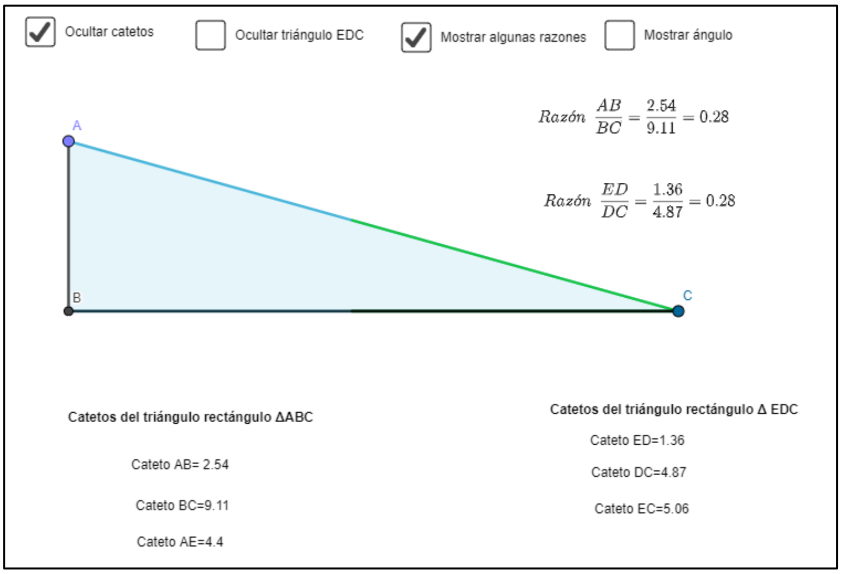
Luego haciendo uso de un Applet de GeoGebra (Ver Figura 4.) el estudiante puede observar el comportamiento de los lados de un triángulo rectángulo y su relación con los ángulos internos del triángulo específicamente los complementarios, e inferir un razonamiento que permita explicar los esquemas de coordinación, compensación y conservación necesarios en el reconocimiento de los patrones de variación proporcional de los lados y ángulos sugeridos. El Applet cuenta con cuatro comandos que cumplen las siguientes funciones:

- Ocultar Catetos: Esta opción oculta el texto inferior donde se encuentran las medidas de los catetos de los dos triángulos semejantes y sus magnitudes correspondientes, las cuales cambiaran de acuerdo con el movimiento de los Puntos A y D.
- Ocultar Triángulo ΔEDC: Esta opción ocultara el triángulo rectángulo ΔEDC. Esta opción permite observar solo el triángulo rectángulo ΔABC.

- Mostrar algunas razones: Esta opción permite que se muestren algunas razones entre los lados de los triángulos rectángulos propuestos.
- Mostrar ángulo 1: la opción muestra al ángulo alfa. Esta opción permitirá que el alumno relacione el cambio entre las razones con el ángulo.

Figura 4.

Applet 1. de GeoGebra



Se proponen tres preguntas al momento de usar el Applet donde se cuestiona ¿Qué sucede con los lados de los triángulos rectángulos al mover los puntos A y D? (Ver Figura 5). Luego activar la opción **Mostrar algunas razones**, de forma que se mostrarán dos razones que comparen un par de lados de cada triángulo rectángulo.

Al hacer clic en mostrar algunas razones se vuelve a preguntar ¿Qué sucede con los lados de los triángulos rectángulos al mover los puntos A y D? Alrededor de ello, se pide observar que al cambiar longitudes la proporción se conserve. Siendo estos dos momentos uno antes y uno después.

Figura 5.

Preguntas orientadoras al usar el Applet

(ACTIVE COMANDO CATETOS) De acuerdo con lo observado responda.

Si mueve el punto A, ¿qué cambia?

____

Si mueve el punto D, ¿qué cambia?

____

(ACTIVE COMANDO RAZONES) De los triángulos rectángulos ΔABC y ΔEDC, establezca algunas razones diferentes a las sugeridas entre los lados correspondientes del triángulo en GeoGebra.

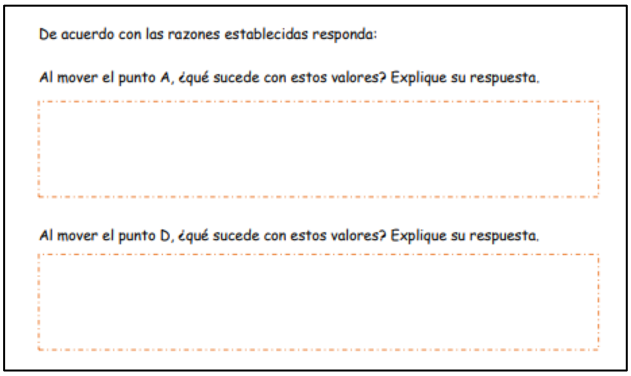
Entre las razones sugeridas del Applet están las siguientes: $\frac{AB}{AC}, \frac{ED}{EC}, \frac{BC}{AC}, \frac{DC}{EC}$ pues estas representan las razones que se relacionan con el Seno del ángulo y el Coseno del ángulo. Sin embargo, para este nivel no hay problema con trabajar las razones ya sugeridas.

Por otro lado, históricamente en algunos textos egipcios se conocían los ángulos midiéndolos con nudos (El Papiro de Ahmes comparte la geometría desarrollada en el antiguo Egipto), pero es muy raro que Tales no los haya usado para resolver el problema de la pirámide, por ese motivo está la **opción ángulo**.

Esta acción permitirá profundizar en la reflexión alrededor de la relación entre los catetos de los triángulos y sus ángulos internos, junto con lo más importante de esta síntesis inicial es observar lo que ocurre con las razones de los lados del triángulo respecto al ángulo.

Figura 6.

Preguntas reflexivas alrededor de las condiciones observadas


De acuerdo con las razones establecidas responda:

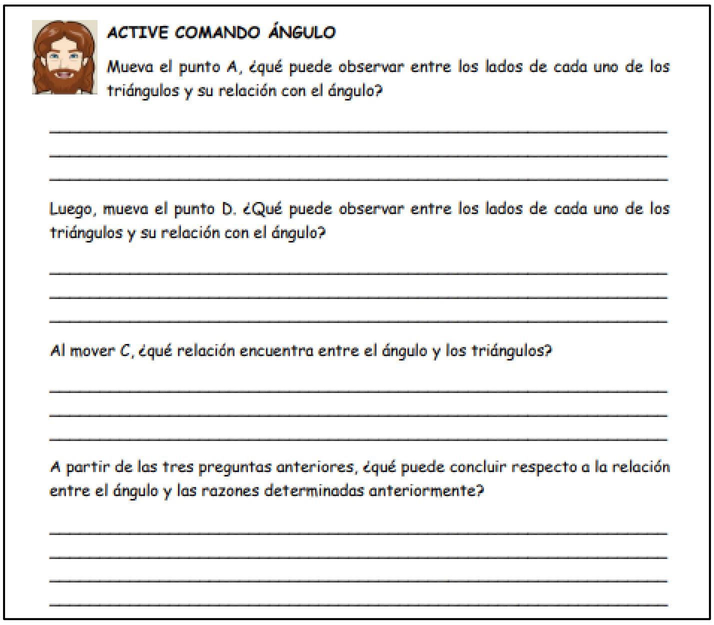
Al mover el punto A, ¿qué sucede con estos valores? Explique su respuesta.

Al mover el punto D, ¿qué sucede con estos valores? Explique su respuesta.

De esta forma se espera que para finalizar el primer momento se proceda a relacionar la definir las razones trigonométricas como la relación que hay entre la comparación de los lados de un triángulo rectángulo y sus ángulos agudos internos. Tal como se puede ver en la Figura 7.

Figura 7.

Preguntas M1


ACTIVE COMANDO ÁNGULO

Mueva el punto A, ¿qué puede observar entre los lados de cada uno de los triángulos y su relación con el ángulo?

Luego, mueva el punto D. ¿Qué puede observar entre los lados de cada uno de los triángulos y su relación con el ángulo?

Al mover C, ¿qué relación encuentra entre el ángulo y los triángulos?

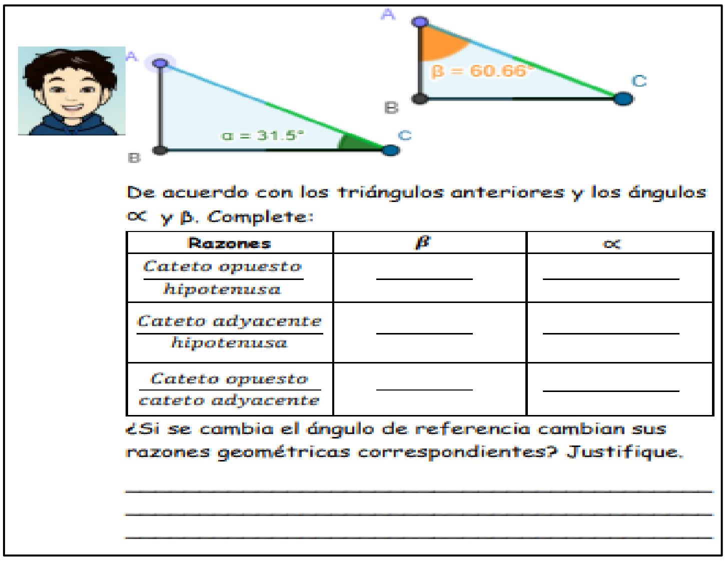
A partir de las tres preguntas anteriores, ¿qué puede concluir respecto a la relación entre el ángulo y las razones determinadas anteriormente?

Momento 2.: La idea fundamental del momento 2, es conceptualizar las razones trigonométricas y para ello se inicia recordando los elementos del triángulo rectángulo referentes a sus lados y sus ángulos como por ejemplo que los catetos son dos lados del triángulo que forman un ángulo recto; que la hipotenusa es el lado mayor del triángulo ubicado en el lado opuesto al ángulo de 90°, y que los otros dos ángulos faltantes son menores de 90°.

Debido a que un triángulo rectángulo tiene tres lados, se pueden establecer seis razones, dos entre cada pareja de estos lados. Las razones trigonométricas de definen en un triángulo rectángulo dependiendo de cada ángulo agudo. Es posible que entre las diferentes modalidades de intervención didáctica al enseñar este tema surja la monotonía de presentar las razones trigonométricas de un solo ángulo agudo ignorando los restantes. Astolfi (1999), propone una tipología de errores que surgen de este tipo de modalidades de implementaciones didácticas, una de ellas, son los errores que provienen de las costumbres escolares que derivan a concepciones no adecuadas del objeto matemático tratado y perduran a lo largo de su escolaridad, tal como se muestra en la Figura 8.

Figura 8.

Cambio en las razones trigonométricas

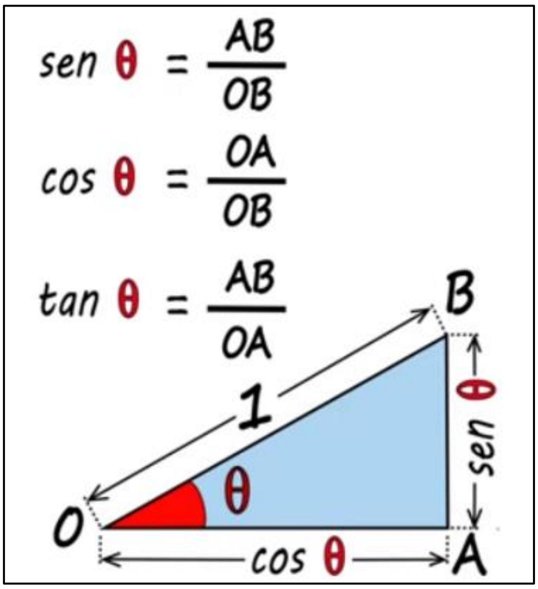


Para establecer que las razones cambian respectivamente al ángulo que usen como referencia es necesario aclarar, Así, se puede ayudar a evitar caer en el error que describe causado por el hábito de trabajar con un solo ángulo especifico, ignorando el hecho de cada ángulo interno de un triángulo rectángulo es referente de sus propias razones trigonométricas evitando errores debidos a los procesos adoptados.

Posteriormente, se procede a hacer una construcción haciendo uso de la regla y el compás en diferentes pautas este tipo de representación geométrica se basa en el enfoque de Gutman (2003) citado por Fiallo (2010) les da a los valores de los ángulos relación directa a las medidas de segmentos en la circunferencia unitaria hablando del lado seno y lado coseno. La construcción será explicada de la siguiente forma. De acuerdo con esta instrucción se debe agarrar el triángulo rectángulo ΔOAB y suponer que el segmento $\overline{OB} = 1$ unidad. Como lo sugiere la Figura 9.

Figura 9.

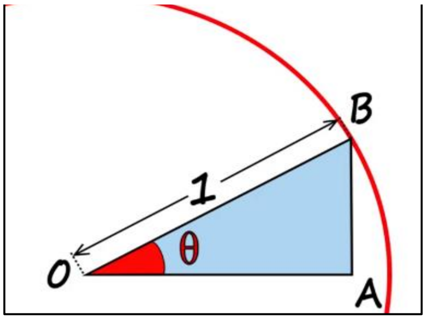
Información dada



Sin embargo, ¿Qué ocurre con el segmento que representa la tangente? Esto no es muy sencillo de ver, ya que la tangente vendría siendo un valor real, por ese motivo se procede a realizar la construcción. El paso inicial surge al trazar una circunferencia con centro en 0 que pase por B. Ver Figura 10.

Figura 10.

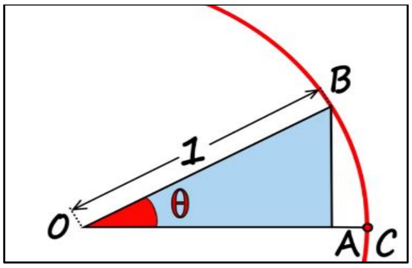
Paso 1



Se procede a prolongar el segmento $\overline{OA}$ hasta cortar la circunferencia llamando al punto de corte C, como se ve la Figura 11.

Figura 11.

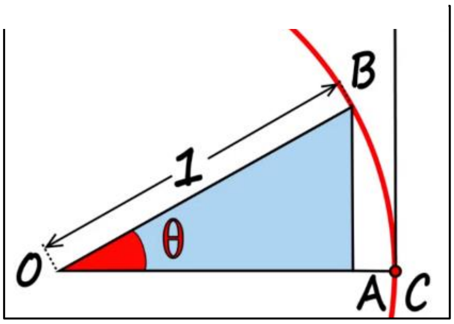
Paso 2.



Luego se traza una recta perpendicular a $\overline{OA}$ que pase por el punto C. Figura 12.

Figura 12.

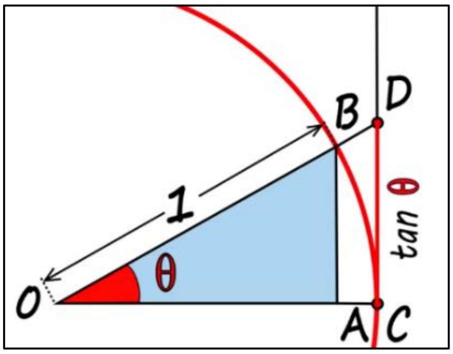
Paso 3.



Para finalizar se prolonga el segmento $\overline{OB}$ hasta cortar la recta perpendicular en D. Ver Figura 13

Figura 13.

Paso 4



Hasta aquí solo se ha construido el segmento que define la tangente es $\overline{CD}$, más no se busca demostrar que segmento representa la tangente, ya que se trata es de evidenciar distintos tipos de representación propiciando el principio I del DUA, además se da libertad para una posible comprobación numérica al momento del ejercicio en la práctica. Ya que el momento 2 se enfoca más en la conceptualización de las razones trigonométricas proporcionada desde una representación algebraica y geométrica.

Momento 3: Para este momento se espera que el alumno acerque un poco más el termino de razón trigonométrica y relacione sus características empleando la herramienta TIC en GeoGebra, Gutiérrez (2019) propone una experiencia donde se "precisa la comparación entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo ya que pueden resultar medidas irracionales o racionales" p.65.

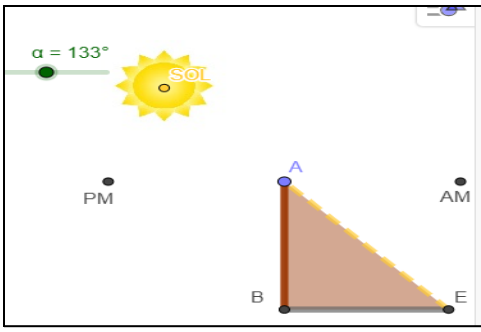
Espinoza et al (2018) realiza análisis temático sobre la medición de distancias inaccesibles en la obra de Stöffler de 1513 donde se propone un método de medición que permite llegar mediante la simplificación de los cálculos, usando el "gnomon" como herramienta. La técnica consiste en hallar una altura inaccesible utilizando la sombra generada por la luz del sol, considerando una altura perpendicular al piso y cuya sombra esté proyectada sobre una superficie plana. Similarmente, sucede con la situación observada por Tales al tratar de medir la altura de la pirámide Stöffler en este caso considera que el ángulo de elevación será de 45 grados, por lo que la medida de la sombra es igual a la medida de la altura buscada.

Teniendo en cuenta las anteriores referencias se planteó la actividad *midiendo las sombras* en un Applet de GeoGebra como se puede ver en la Figura 14. Propone de forma hipotética como sería el movimiento del sol durante el día y cómo varía la longitud de la sombra respecto al bastón.

Las preguntas alrededor del uso de este Applet las cuales se pueden ver en la Figura 15, buscan una puesta en común sobre lo interpretado y trabajado. Se espera que ellos se den cuenta de que cuando la posición del sol y su ángulo de inclinación cambia. Además, se espera que noten que los valores de las razones están directamente relacionados con el valor del ángulo.

Figura 14.

Midiendo Sombras



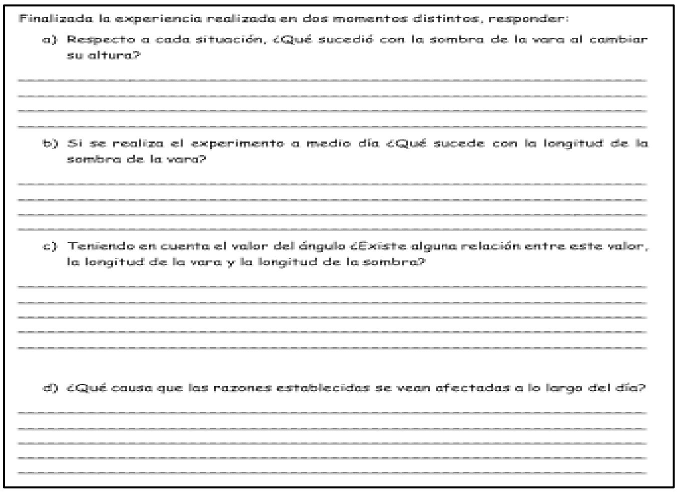
1	Hora	Angulo
2	7 am	15°
3	8 am	30°
4	9 am	45°
5	10 am	60°
6	11 am	75°
7	12 m	90°
8	1 pm	105°
9	2 pm	120°
10	3 pm	135°
11	4 pm	150°
12	5 pm	165°
13	6 pm	180°
14		

Y para finalizar, después de que los estudiantes reflexionen alrededor de las preguntas de forma que noten las variaciones que se dan en las diferentes medidas y su relación con el objeto matemático, se espera que afiance más su habilidad para comunicarse matemáticamente describiendo y relacionando con un contexto cotidiano.

Momento 4: Para Montiel (2005) "la actividad matemática consiste entonces en el planteamiento de problemas sobre un movimiento particular, su estudio y su modelación". Así, las actividades pretenden valoran lo mencionado por Montiel.

Figura 15.

Momento 3



Finalizada la experiencia realizada en dos momentos distintos, responder:

a) Respecto a cada situación, ¿Qué sucedió con la sombra de la vara al cambiar su altura?

b) Si se realiza el experimento a medio día ¿Qué sucede con la longitud de la sombra de la vara?

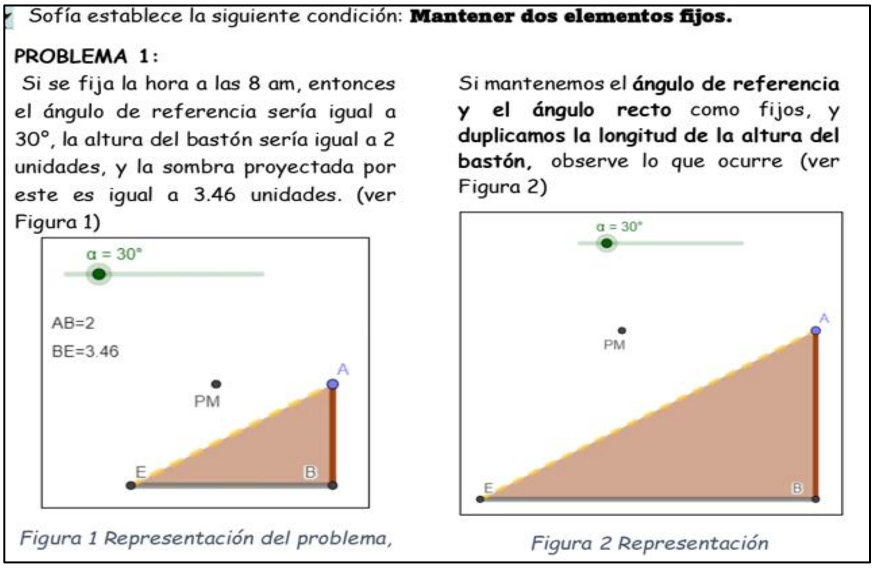
c) Teniendo en cuenta el valor del ángulo ¿Existe alguna relación entre este valor, la longitud de la vara y la longitud de la sombra?

d) ¿Qué causa que las razones establecidas se vean afectadas a lo largo del día?

La primera condición sugiere mantener fijo el ángulo de referencia y duplicar la altura del bastón, como se puede ver Figura 16. De esto se plantea un primer problema donde se espera que el alumno logre aproximar la longitud de la sombra, de forma que pueda llegar a confirmar que al duplicar la longitud del bastón se duplica la longitud de la sombra.

Figura 16.

Problema 1. Momento 4.

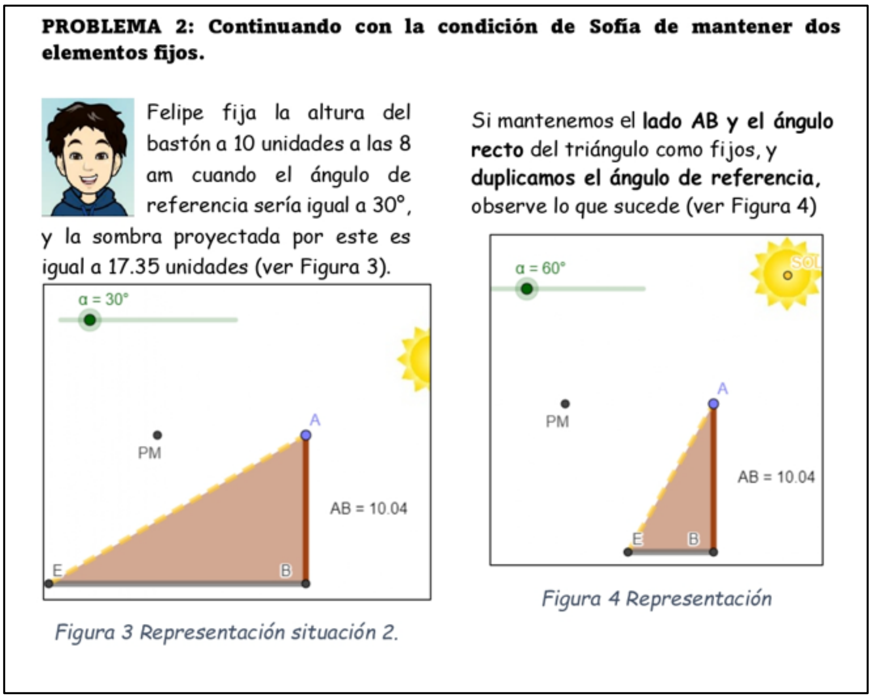


La condición 2 sugiere mantener el lado AB y el ángulo recto fijos, como se muestra en la Figura 17, mientras se duplica el ángulo de referencia. Por ese motivo se toma un ángulo con medida de 30°, y al duplicarlo a 60°, se observa que la longitud de la sombra se hace más pequeña.

Dado otras preguntas orientadoras y sugerencias para el docente, probablemente el estudiante advierta algunas relaciones entre las dos condiciones anteriores con las razones trigonométricas Seno y Coseno.

Figura 17.

Problema 2. Momento 4.



4.3.2.2 Diseño nivel de profundidad 2

Este diseño presenta adaptaciones curriculares realizadas al nivel de profundidad 3 descrito anteriormente, considerando a Van Garderen (2015) quien menciona que los estudiantes con algún tipo de necesidad no suelen hacer representaciones visuales precisas, ni tienen claridad de cómo usarlas de forma estratégica para resolver problemas. Se prioriza entonces en el nivel de profundidad 2, el ofrecer estructuras y esquemas más específicos de las relaciones entre los elementos a partir de imágenes, de forma que se favorezca la comprensión, el uso de lenguaje y símbolos. La ruta vertical del diseño esta descrita en la Tabla 2.

Tabla 2.

Ruta vertical diseño nivel 2

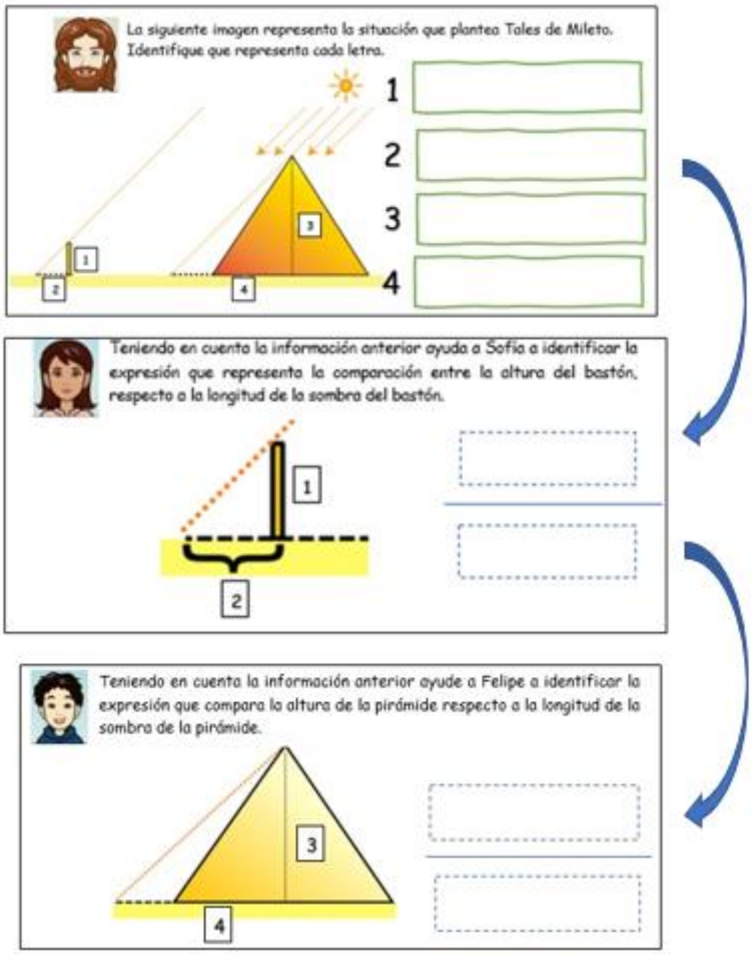
Momento 1	En el momento inicial es un espacio introductorio respecto a la razón geométrica propuesta por Tales de Mileto y la altura de la pirámide de Keops, en la cual se espera que el estudiante identifique los elementos implicados que establecen el concepto de la razón geométrica bajo el contexto de la historieta.
Momento 2	En este momento se espera que se reconozca las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo con sus ángulos agudos internos respectivamente.
Momento 3	Esta parte, al igual que el nivel 3, se pone en práctica y se afianza la comparación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y los ángulos respectivamente esto relacionado con el comportamiento del sol. Se desarrollo un Applet que representa la situación a observar. Se sugiere en este momento como metodología realizar trabajo colaborativo.
Momento 4	Este momento trata de valorar lo aprendido hasta el momento de tal forma que el estudiante ponga en juego sus aprendizajes y logre un aprendizaje significativo.

El diseño nivel de profundidad 2 se estructuro en los siguientes cuatro momentos (Ver Apéndice B).

Momento 1: Para el **nivel de profundidad 2** se espera que el estudiante sea capaz de listar, identificar y relacionar la razón y la proporción teniendo en cuenta el paso histórico de tales de Mileto al medir la altura de la pirámide. Por lo tanto, después de leer la historieta, el alumno debe relacionar cada nombre del elemento con el número correspondiente como se puede ver Figura 18, donde 1 es el bastón, 2 es la sombra del bastón, 3 la altura de la pirámide y 4 la sombra de la pirámide.

Figura 18.

Nivel 2. Apoyos referidos al principio de representación.



Se adaptaron las actividades de este nivel, básicamente en la hoja de trabajo se agregaron ilustraciones y símbolos para hacer la comparación del bastón y su respectiva sombra, junto con la altura de la pirámide y su respectiva sombra.

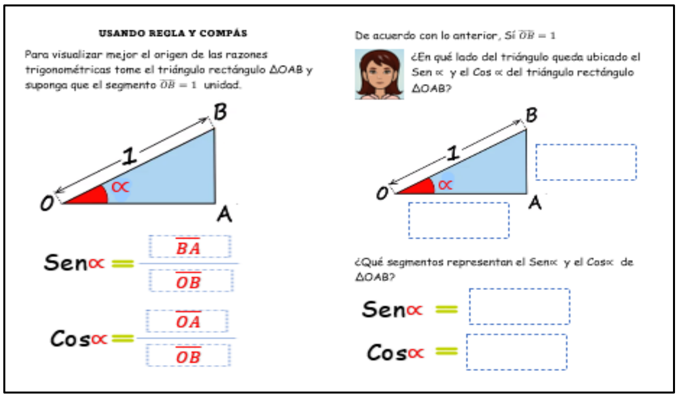
Al hacer uso del recurso de GeoGebra en el nivel 2 descrito en el nivel 3, la hoja de trabajo y las preguntas que orientan esta actividad, son modificadas, siendo menos estrictas y enfocadas más en el proceso de reconocer y clasificar que lados del triángulo rectángulo se están comparando ¿Por qué se comparan? ¿Para qué?... Así como aseguran Fiallo y Parada (2018) “genera en los estudiantes el sentimiento de estar trabajando con objetos concretos que puede manejar por medio de las nuevas representaciones digitales”

(p. 31). Por lo que al describir lo que sucede si se mueve el punto A y el punto D, el uso del Applet resulta ser un recurso de apoyo para la percepción, al modificar y variar, observando que la razón se ve afectada por al ángulo y esto se evidencia el momento de variar los puntos A, D y C.

Momento 2: Para este momento se tuvo en cuenta lo que dice Sánchez (2020) Cuando menciona los indicadores de necesidades de apoyo referidos al principio de acción y expresión, se debe facilitar la gestión de información y de recursos ya que si el estudiante logra identificar y organizar internamente la información necesaria para dar cumplimiento a la tarea propuesta , se definen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente siendo este concepto asociado del momento 1 con el ángulo, el triángulo rectángulo, la razón y la proporción. Además, al presentar las razones trigonométricas, seno y coseno, como se ve en la Figura 19 , se reconocen también elementos y simbología como lo es la notación de segmento, el conocer el triángulo rectángulo y sus partes, la razón como la comparación de magnitudes, etc.

Figura 19.

Razón de Seno y Coseno N2.M2

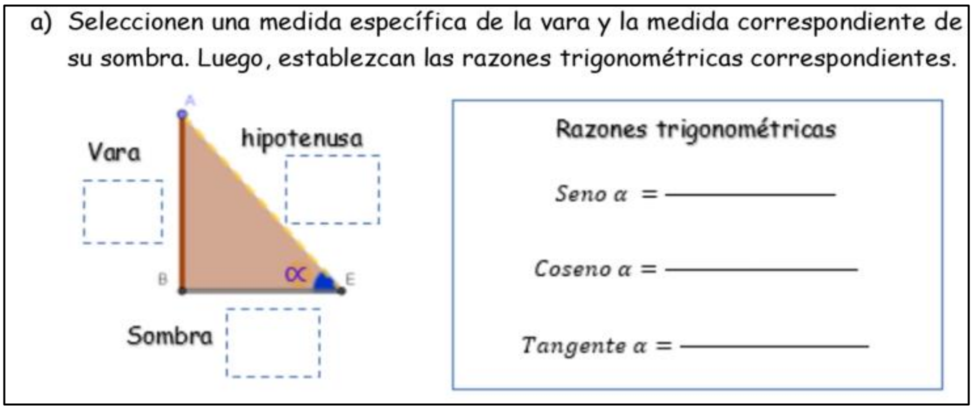


Momento 3: Análogamente al nivel 3, en este momento tanto *el nivel de profundidad 2* y *nivel de profundidad 4*, se mantiene la misma actividad ver 4.3.2.1.

(Diseño para el nivel de profundidad 3). Los cambios visibles están relacionados en la hoja trabajo como lo muestra la Figura 20 donde para **el nivel 2** se facilita una ayuda visual como estrategia a diferencia del *nivel 3***.**

Figura 20.

Ayuda visual para nivel 2



Momento 4: Este momento para *el nivel de profundidad 2* se adapta la idea del diseño nivel 3, sobre trabajar las dos condiciones Estos cambios se evidencian en las preguntas junto con recordatorios como ejemplo el mostrado en la Figura 21 y otros elementos visuales de los temas que puede usar para tratar de resolver el problema, junto con preguntas más sencillas.

Figura 21.

Momento 4. nivel 2

RECUEDE QUE… Las razones trigonométricas son las relaciones entre los lados del triángulo rectángulo y sus ángulos referentes, pero en este caso tomemos el ángulo ∝ como referencia:

$$Seno\ \alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$Coseno\ \alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$Tangente\ \alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Se espera que en este nivel el estudiante permita realizar interpretaciones sencillas de la situación general. También es posible que la mayoría de sus respuestas sean dadas de forma escrita y descriptiva, gráfica o representativa.

4.3.2.3 Diseño nivel de profundidad 4

¿Cómo los estudiantes con mayores habilidades abordan las distintas preguntas?, ¿Qué tipo de reflexión y argumentación o dudas podrían encontrarse al dar respuesta a las distintas preguntas? La capacidad de comunicar y expresar los argumentos en este nivel debe ser mayor, por lo que del diseño nivel 4 a diferencia del nivel 3, se realizan leves cambios, como alguna pregunta extra que evidencie un razonamiento matemático más profundo, pero todo bajo la misma pregunta problematizadora y mismo esquema de momentos descritos de manera general en la Tabla 3.

Tabla 3.

Ruta vertical diseño nivel 4

Momento 1	En el momento inicial es un espacio introductorio respecto a la razón geométrica propuesta por Tales de Mileto y la altura de la pirámide de Keops, en la cual se espera que el estudiante sea capaz de comprender, plantear e interpretar qué, de la razón y la proporción, está Tales trabajando y cómo lo está haciendo...
Momento 2	En este momento se espera que se construya las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo con sus ángulos agudos internos respectivamente teniendo en cuenta las indicaciones de su demostración geométrica.
Momento 3	Esta parte al igual que el nivel 3, se pone en práctica y se afianza la comparación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y los ángulos respectivamente esto relacionado con el comportamiento del sol. Se desarrollo un Applet que representa la situación a observar. Como metodología se sugiere el trabajo colaborativo en este momento.
Momento 4	Este momento trata de valorar lo aprendido de tal forma que el estudiante ponga en juego sus aprendizajes y logre un aprendizaje significativo.

El diseño nivel de profundidad 4 se estructuró en los siguientes cuatro momentos. (Ver Apéndice V).

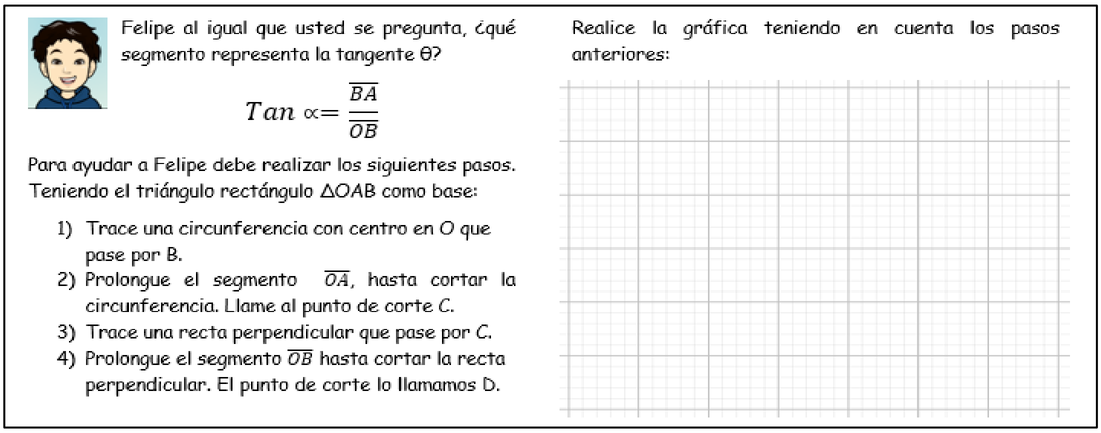
Momento 1: Para *el nivel de profundidad 4* se plantea una finalidad similar sobre considerar apoyos sobre la representación y motivación. La historieta promueve expectativas de forma que se facilita su confianza en la capacidad de comprender el objeto propuesto, por lo que se espera un nivel de formalismo mayor que en los otros dos niveles, respecto al uso de lenguaje y simbología matemática. De la situación planteada por Tales de Mileto en el momento inicial se espera que el alumno modele y explique cuáles fueron los pasos que realizó para encontrar la altura de la pirámide realizando un modelo de lo sucedido y reflexionar alrededor de ello.

Momento 2: De manera similar al nivel 2 y 3 para *el nivel de profundidad 4*, se da al estudiante más independencia al comunicar la interpretación de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, de manera que pueda expresar de forma representativa la notación introducida por el docente.

Para este nivel, se hace uso de material concreto (regla y compas), si bien, a partir del triángulo rectángulo que se plantea de base, se sugiere realizar una construcción geométrica ver Figura 22, similar al nivel 3.

Figura 22.

Construcción nivel 4



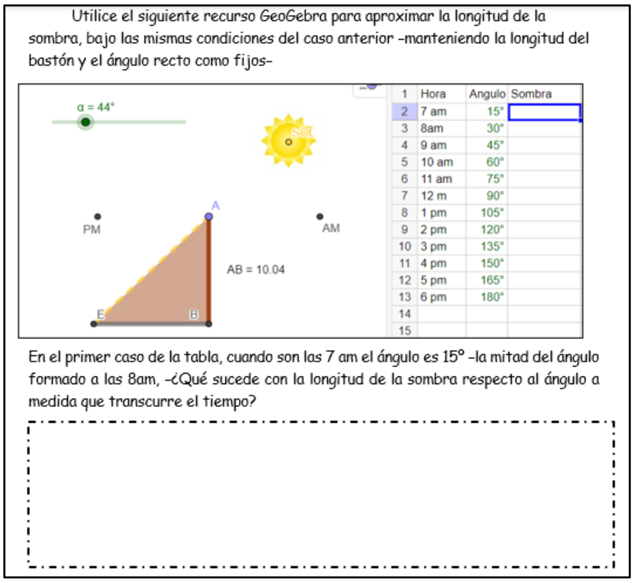
Aclaración: la notación de la tangente es el cociente entre magnitudes numéricas, no entre objetos geométricos. La intención de la expresión usada es con el fin de evocar el lenguaje simbólico de la tangente con la construcción a realizar.

Momento 3: Análogamente *al nivel 2 y 3,* se mantiene la misma actividad (ver 4.3.2.1. Diseño para el nivel de profundidad 3). Los cambios visibles están relacionados a una mayor cantidad de preguntas que se relacionan con las comparaciones entre los datos tomados durante la actividad.

Momento 4: Para *el nivel de profundidad 4***,** de manera similar al diseño nivel 3, pero con la diferencia de que para este nivel se sugiere manipular en GeoGebra la app Midiendo las Sombras (link: https://www.geogebra.org/material/copy/id/dgkzatvv) , para que el alumno pueda, comparar y ejercitar procedimientos relacionados con las razones trigonométricas y pueda analizar la variación dada, al condicionar el movimiento del sol, la sombra y el bastón. Como por ejemplo la pregunta descrita en la Figura 23.

Figura 23.

Ejemplo de pregunta nivel 4



4.4 Fase 4: Valoración por Rúbrica

Después de realizado el diseño se aplica una rúbrica evaluativa en el marco del proyecto 707983 mencionado anteriormente. Esta rúbrica determina el alcance del diseño respecto a su coherencia vertical, coherencia horizontal y con los principios del DUA. La primera parte evalúa la malla curricular según propósitos y descriptores propuestos, ver Figura 24. Se describe un puntaje de 1 a 5, en donde 5 considera si se tuvo mayor adecuación al diseño según el principio observado y 1 no uso de recursos del DUA.

Figura 24.

Valoración de propósitos y descriptores

PROYECTO MINISTERIO
"Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores"

VALORACIÓN DISEÑOS DIDÁCTICO 10º a 11º

1. Valoración de las tablas con propósitos y desempeños

I1. Coherencia horizontal (Por diseño)

Según los propósitos (pensamientos)

P.P.2. ¿Cómo se pueden medir las sombras? **Pensamiento variacional**	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
Los propósitos están ajustados al nivel de conceptualización, según cada nivel de profundidad.				X		Revisar el propósito del nivel 3, comprender no es una acción que por sí sola se pueda verificar. Teniendo en cuenta la Taxonomía de Bloom y las habilidades de proceso ajusta este propósito.
Los propósitos están vinculados estrechamente con la pregunta problematizadora y con el contexto					X	
El propósito se relaciona con estándares específicos para el grupo de grados					X	
El propósito, en cada nivel, comprende el mismo objeto matemático					X	

Según los descriptores (procesos)

P.P.2. ¿Cómo se pueden medir las sombras? **Pensamiento variacional**		Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
¿Los descriptores están *ajustados* a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad?	Comunicación			X			Lo planteado no está en relación con las habilidades para este proceso. Se sugiere revisar el documento de Parada y Fiallo (2018)
	Modelación	X					No se plantean descriptores en todos los niveles para este proceso y por el contexto planteado y las actividades observadas sí se podrían proponer descriptores alrededor de este proceso.
	Razonamiento			X			Lo planteado no está en relación con las habilidades para este proceso. Se sugiere revisar el documento de Parada y Fiallo (2018)

En un segundo momento se valora el diseño de la hoja de trabajo del estudiante, de forma que se garantice el desarrollo progresivo en las actividades desde una coherencia vertical como horizontal.

La rúbrica de evaluación del diseño revisa si las orientaciones para el docente son claras y si están acordes con el propósito de este. La valoración finaliza analizando sobre el cumplimiento de los principios sugeridos por el diseño universal de aprendizaje DUA.

4.5 Fase 5: Pilotaje

Para llevar a cabo el pilotaje se presentó el respectivo diseño didáctico a profesores de una comunidad de práctica que participa de actividades de formación en la institución donde se desarrolla el trabajo de grado que aquí se reporta (UIS). En esta comunidad participaban profesores de décimo y undécimo grado, una de ellas, la profesora Sofía (pseudónimo) eligió el diseño propuesto en este trabajo, el cual fue implementado en una institución rural de Girón, Santander.

La profesora implementó el diseño con un grupo de 17 estudiantes (en una edad cronológica entre los 14 y 18 años,), en una institución rural en Girón. Ella inició realizando un proceso de caracterización guiado por un instrumento construido por la directora del trabajo que aquí se presenta (instrumento aún no publicado). Entre los datos que se solicitaron se encuentra la pregunta ¿Los estudiantes reciben alguna terapia o atención especializada por parte de la EPS? ¿o algún servicio médico? Como respuesta ninguno de los estudiantes presenta ningún tipo de terapia o enfermedad cognitiva.

De acuerdo con los datos recolectados en la caracterización, la docente asignó los niveles de profundidad a cada uno de los estudiantes y después de haber realizado la puesta en escena, la docente propone otras observaciones y sugerencias para tener en cuenta para un posible rediseño.

5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN AMBIENTE DE INCLUSIÓN

Para dar respuesta a la pregunta de investigación: *¿Cómo atender las características particulares de los estudiantes en décimo grado cuando estudian las razones trigonométricas?*, se presenta aquí un análisis de resultados en torno a dos aspectos: 1) incluyendo los aspectos históricos asociados a *las razones trigonométricas* como un contexto de interés para los estudiantes; 2) atendiendo los principios y pautas del DUA. Al final de este capítulo, se reportan los ajustes realizados al diseño a partir lo sugerido por la valoración.

5.1 La historia de las razones trigonométricas como contexto

Este apartado presenta resultados del análisis de la construcción del diseño y la valoración. Valoración emergente de un análisis mediante rúbrica y las percepciones de una docente que hizo un pilotaje inicial de la misma.

El análisis mediante la rúbrica permitió evidenciar que el uso de la historia como herramienta didáctica es un factor favorable para captar el interés de los estudiantes, tal como lo sugería Gutiérrez (2019). En los comentarios generales sobre el diseño, se consideró que la articulación del paso histórico de Tales permite la aparición de los conceptos matemáticos que acercan la noción razón trigonométrica.

De igual forma se aprecia positivamente que el planteamiento de actividades relacionadas con la variación en historia permite el esbozo de conjeturas y generalizaciones respecto a las razones trigonométricas abordadas. Como evidencia a la coherencia del diseño (Ver Figura 25), se muestra la valoración hecha mediante la rúbrica al considerar el desarrollo progresivo de las actividades que permite atender las características de los estudiantes de acuerdo con el nivel de profundidad construido sobre un contexto histórico.

Figura 25.

Valoración diseño por coherencia horizontal.

2. Valoración de la hoja de trabajo del estudiante

III1. **Coherencia horizontal (Por diseño)**
¿Se observa un desarrollo progresivo en las actividades de cada momento, de cada nivel de profundidad?

Indicador	P1					P2						
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
Se ajusta cada actividad a los momentos de cada diseño, según el nivel de profundidad.					X							

La docente en su papel como mediadora expresaba que, para lograr el objetivo de implementar el diseño, se dispuso a enriquecer sus conocimientos sobre lo relacionado con quiénes eran Tales de Mileto y Plutarco, además del paso histórico tratado en el material de clase suministrado. Respecto a la intención de la docente, es conveniente mencionar que al apropiarse de supuestos y problemas matemáticos que insertan la cultura y su historia responde a lo que sugiere el MEN (2006), para con ello, llevar la actividad matemática al aula escolar. Además, durante el desarrollo del diseño empezó a dar significado lo que Tales había hecho al observar las sombras respecto al comportamiento del sol.

Por otra parte, mencionaba que evidenció en sus estudiantes la dificultad de no comprender la relación que existe entre las sombras generadas por un cuerpo al exponerse al sol, tal como evidencia en el episodio 1 de la clase:

“Al parecer los estudiantes no se han fijado en las sombras que diariamente se forma cuando caminan al aire libre, pues algunos, sin importar el diseño no logran dibujar la sombra de forma horizontal respecto al suelo, aunque cabe resaltar que otros si pudieron hacer una aproximación cercana”

Esto se presenta posiblemente por las pocas oportunidades que se proporciona a los estudiantes relacionar las situaciones de la cotidianidad y las matemáticas, lo cual nos lleva a relacionar lo que plantea Gutiérrez (2019) sobre la importancia de la historia en la enseñanza actual, de forma que se considera un acierto el uso del Paso de Tales al medir las sombras.

Para superar la dificultad mencionada el diseño promovió en el momento 3, donde se reflexiona sobre la altura y longitud de la sombra, los estudiantes comenzaron a medir y comparar las sombras generadas por palos y hasta sus propias sombras. Asimismo, se considera que el diseño favorece el trabajo en equipo tal como se muestra en la (Figura 26).

Durante un momento de su clase, la docente suministró a los estudiantes unas autoevaluaciones de las qué se concluye:

- Sofía: Las autoevaluaciones me dejaron ver lo que ellos habían aprendido. La mayoría de ellos escribieron que había sido interesante medir sombras pues desconocían que estas fueran medibles y que con elementos básicos pudiesen hacerlo. Para mí fue claro que la competencia comunicativa e interpretativa fue puesta en juego para los estudiantes, y en cada grupo de preguntas que se proponían en los diferentes momentos tuvo mayor participación de los estudiantes. Validaron sus respuestas y las de sus compañeros, que, aunque con expresiones con poco contenido matemático daban muestra de estar realizando comparaciones entre variables.

Figura 26.

Momento 3 durante implementación

De esta manera se evidencia la importancia de usar del contexto histórico al considerarse problemas actuales, utilizando herramientas del pasado para resolverlas permitiendo que el estudiante valore la genialidad y creatividad que tuvieron esas personas en el pasado reconociendo su potencial matemático.

5.2 Atendiendo los principios y pautas del DUA

El diseño tiene la intención de acercar el objeto de la razón trigonométrica, teniendo en cuenta los principios y pautas del diseño universal de aprendizaje (DUA), con el fin de atender las características particulares de los estudiantes. Por ello, esta categoría de análisis se ha organizado en los resultados emergentes: de la valoración bajo la rúbrica y la segunda de las percepciones de la profesora que hizo el pilotaje.

5.2.1 Valoración por Rúbrica de los principios del DUA.

La valoración por rúbrica realiza un análisis sobre los diseños a priori al pilotaje, evaluando el manejo de las tres dimensiones del DUA en la construcción del diseño, de acuerdo con ello, se dirán cuales estrategias fueron adecuadas o cuales deben ser modificadas.

5.2.1.1 Principio I: Múltiples formas de representación

El diseño didáctico ofrece diferentes formas de representación, Machuca (2015) considera primordial apropiarse de los elementos que introducen la trigonometría partiendo del concepto de la razón, la proporción, los triángulos rectángulos y por último los ángulos. En el momento 1, en los tres niveles de profundidad se presenta una situación donde muestra una relación de comparación, para trabajar la razón y proporción, de forma que se representa la razón como número fraccionario y decimal que permite satisfacer la *pauta 3: Proporcionar opciones para la comprensión*.

Además, según la idea de Fiallo (2010) sobre la importancia del uso de tecnología como herramienta propicia para el aprendizaje de objetos geométricos, se resalta el uso de GeoGebra para interactuar con un problema de sombras, del cual, trata de introducir las razones trigonométricas seno, coseno y tangente como razones entre los lados del triángulo rectángulo. Logrando así satisfacer la pauta 1 de este principio.

Sin embargo, la rúbrica considera necesario mencionar que el diseño de nivel de profundidad 2, busca ayudar a los estudiantes a procesar información vía la conceptualización ya que ofrece alternativas para la interpretación de la información, pero, el nivel de profundidad 4, no tanto. Por lo demás, sí se observa el uso de diferentes recursos para la visualización e interpretación de las situaciones planteadas. Tal como lo muestra la evidencia. (Ver Figura 27).

Figura 27.

Valoración Principio I del DUA

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona diferentes opciones para percepción.				X	
Pauta 2. Proporciona múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y simbólicas					X
Pauta 3. Proporciona opciones para la comprensión					X

5.2.1.2 Principio II: Múltiples formas de acción y expresión.

Este principio fue revisado desde la versión docente según la rúbrica, del cual concluye que el diseño didáctico tuvo la intención de promover actividades que no tengan un único método de respuesta. En el diseño se sugieren espacios para obtener distintas opciones de registros (gráfico, algebraico o formal, y lenguaje natural), favoreciendo así los fines comunicativos por medio de algunas representaciones semióticas que aportan en desarrollo de la actividad matemática. Sin embargo, la valoración mostró que es necesario enfatizar en las orientaciones sobre la flexibilidad al momento de ponerlo en escena para favorecer las pautas 5 y 6 (Ver valoración en Figura 28).

Figura 28.

Valoración de Principio II del DUA

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Pauta 4. Proporciona opciones para la interacción física.					X
Pauta 5. Proporciona opciones para la expresión y la comunicación.				X	
Pauta 6. Proporciona opciones para las funciones ejecutivas.				X	

5.2.1.3 Principio III: Múltiples formas de implicación.

La valoración por rúbrica (Ver Figura 29), menciona que, en la versión para el docente, aparecen pocas recomendaciones para trabajo en el aula de clase. Lo que sugiere mejorar ese aspecto, agregando orientaciones que inviten al docente promover la participación y experimentación, como también que tenga en cuenta los ritmos de trabajo individuales y grupales de los estudiantes.

Figura 29.

Valoración Principio III del DUA

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Pauta 7. Proporciona opciones para captar el interés				X	
Pauta 8. Proporciona opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia.				X	
Pauta 9. Proporciona opciones para la autorregulación.				X	

5.2.2 Valoración de los principios del DUA según la docente.

La percepción de la docente también permitió realizar un análisis del uso del DUA, que da respuesta a lo acertado que fueron los recursos, materiales y estrategias sugeridos por el diseño para atender las características de sus estudiantes durante el pilotaje.

5.2.2.1 Principio I: Múltiples formas de representación.

La docente en su informe final menciona que los apoyos para la *pauta 1: ofrecer diferentes opciones para que el estudiante perciba la información*, usadas en el diseño eran al tamaño de letra y cantidad de preguntas a solucionar, descriptores de texto como recordatorios o notas para tener en cuenta, uso de gráficas y Applets de GeoGebra que permiten la visualización de los objetos trabajados, también permite el uso de herramientas (transportador y regla). Tal como se puede ver en la Figura 30.

Figura 30.

Percibir la información

También se debe mencionar que una de las dificultades para favorecer la pauta 2 de este principio, sucede cuando al tratar de introducir una construcción geométrica en el momento 2 del diseño 3 y 4 implementados, con la intención de visualizar la tangente, se está indirectamente incluyendo la circunferencia unitaria y esto presentó dificultad en los estudiantes, corroborando lo que dice Fiallo (2010) sobre una de las complejidades de la enseñanza de la trigonometría es la debida desconexión entre las diferentes formas de ver las razones trigonométricas, ya que al introducir el circulo se deja de lado el triángulo rectángulo base que se está trabajando desde el inicio, así, se resulta ser un poco ambicioso, y no necesaria esta construcción, por lo que el momento 2, en los diseños debe ser mejorado. La docente de acuerdo con lo implementado sugiere cambiar ese momento y considerar la circunferencia trigonométrica como tema para introducir las funciones trigonométricas en un diseño posterior.

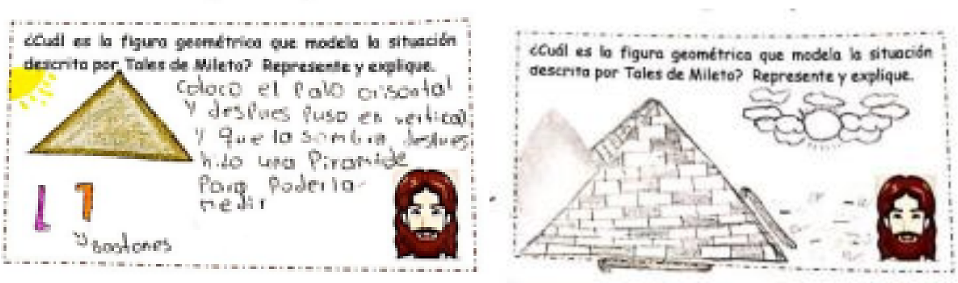
5.2.2.2 Principio II: Múltiples formas de acción y expresión.

La docente considera que los apoyos más usados y sugeridos que ofrece el diseño, para favorecer este principio, son las actividades que pueden ser dirigidas por medio de la participación de forma oral y también el uso de lenguaje descriptivo y gráfico como evidencia lo mencionado por la docente y la Figura 31 a continuación.

- Sofía: Para el caso del momento 1, del diseño 3, ¿Cuál es la figura geométrica que modela la situación descrita por Tales de Mileto? Represente y explique" los estudiantes no tenían claro cuál figura geométrica debían escribir, pues algunos manifestaron que podría ser el palo, preguntando si el bastón era o no una figura geométrica (discusión que nos llevó a caracterizar las figuras geométricas planas y tridimensionales), la pirámide, el sol, pero no lograban vincular todos los elementos en un solo dibujo.

Figura 31.

Formas de expresión 1



Por otro lado, una de las dificultades que la docente expresaba fue el uso de los recursos tecnológicos para la implementación del diseño, ya que la puesta en escena se realizó en una institución rural, no se permitía el uso de alguna sala de cómputo, así que también se proporcionó una idea distinta de favorecer la *pauta 5: proporcionar opciones para la expresión y la comunicación.*

Para superar esta dificultad la docente se permitió dar a los alumnos la oportunidad de mediar y acompañarlos durante los momentos donde se requería uso de las herramientas tecnológicas (ver **Figura 32**). Así, haciendo uso de la reinvención guiada como el proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento atreves de la mediación tal como lo sugiere la educación matemática realista de Freudenthal (1973).

Figura 32.

Formas de expresión 2

5.2.2.3 Principio III: Múltiples formas de implicación

Para este principio, se considera que una forma de captar el interés fue optimizando la elección individual y autónoma del estudiante, ya que el docente expresó lo siguiente:

- Sofía: El momento 1, según la planeación era la lectura a viva voz de la historieta, y como era la misma para todos no habría ningún inconveniente. Revisamos los personajes y asignamos roles. Esta tarea resultó muy interesante, pues los estudiantes asumieron su rol.

La experiencia, favorece la participación y disminuyendo distracciones, ya que al permitir que cada estudiante elija un role da oportunidad para que establezca diversas opiniones sobre lo leído. Además, tal como sugiere el DUA se permite establecer unos objetivos con retos cognitivos que se resuelven por medio de la comunicación y colaboración.

5.3 Ajustes para rediseño.

Respecto a la valoración por rúbrica se sugieren unos cambios en la malla propuesta como evidencia la *Figura 33*, puesto que en algunos descriptores se espera una cosa y otras para la hoja de trabajo, alejándose de las habilidades de proceso.

Figura 33.

Sugerencias para corregir en la Malla

Según los propósitos (pensamientos)

P.P.2. ¿Cómo se pueden medir las sombras? **Pensamiento variacional**	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
Los propósitos están ajustados al nivel de conceptualización, según cada nivel de profundidad.				X		Revisar el propósito del nivel 3, comprender no es una acción que por sí sola se pueda verificar. Teniendo en cuenta la Taxonomía de Bloom y las habilidades de proceso ajusta este propósito.
Los propósitos están vinculados estrechamente con la pregunta problematizadora y con el contexto					X	
El propósito se relaciona con estándares específicos para el grupo de grados					X	
El propósito, en cada nivel, comprende el mismo objeto matemático					X	

Las sugerencias dadas por la docente, relacionado con los diseños elegidos nivel 3 y nivel 4, se sugirieron modificaciones sobre correcciones ortográficas, disminuir preguntas para disminuir cantidad de hojas de trabajo, cambios del tipo estructural (margen de la hoja estrecho, tipo de letra, gráficas). Sugiere también un cambio en la estructura de los momentos respecto al diseño original.

Los cambios para realizar son:

Del *momento 1*, solo trabajar el paso histórico de tales para reforzar la razón geométrica y la proporción. Para el *momento 2*, trabajar alrededor del Applet sobre la semejanza de triángulos, teorema de tales, los ángulos, para concluir definiendo las razones trigonométricas y su demostración geométrica. Para *el momento 3*, no se realizan cambios respecto a la propuesta del diseño inicial. Para el momento 4, modificar la estructura, quitar todas las imágenes que dan forma al cuarto momento, solo dejando las preguntas correspondientes. (Ver Apéndice E).

6 CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las reflexiones finales que dan cuenta del logro del objetivo de investigación: *Construir diseños didácticos para posibilitar el aprendizaje de las razones trigonométricas teniendo en cuenta las características particulares de los estudiantes que cursan décimo grado*, consolidadas a partir de las categorías establecidas.

En este trabajo se construyeron diseños didácticos con un enfoque histórico, didáctico y curricular que permitieron comprender en cierta medida el concepto de razón trigonométrica . La valoración del diseño mostró el uso del contexto histórico para captar el interés y articular los conceptos necesarios de una forma diferente a lo normal, siendo evidente la falta de reconocimiento de matemáticos importantes en la historia y sus aportes se hace una propuesta que permite al estudiante sentir curiosidad y cuestionar sobre aquello que surgió en épocas pasadas y aún se consideran importantes. Además, teniendo en cuenta las percepciones positivas tanto de la docente como de la rúbrica se puede asegurar sobre el valioso potencial que tiene la historia como un contexto útil para poder atender las características de los estudiantes dentro del aula de clase, también se reconoció la importancia de innovar la enseñanza de las matemáticas y resaltar el uso de la historia de las matemáticas en diferentes propuestas educativas.

En cuanto a la aplicación de la rúbrica sobre el cumplimiento de los principios del DUA en los diseños, se valora que el instrumento permitió identificar aspectos para la mejora en cada uno de ellos.

La valoración de los principios DUA por parte de la docente permitió evidenciar la importancia de reflexión sobre la práctica ya que tuvo la oportunidad de visualizar las diferentes dificultades asociadas al contexto y mejorar la flexibilidad del diseño.

La valoración tanto por rúbrica como por las percepciones de la docente permitieron realizar ajustes al diseño, tanto de forma (ortografía, redacción, tamaño y tipo de letra, edición de graficas e imágenes, edición en general), como de fondo, atendiendo los aspectos teóricos que lo fundamentaron También permitieron dar cuenta de la flexibilidad del diseño, de forma que se considera necesario tener en cuenta los entornos donde se va a implementar un diseño didáctico para el momento de su construcción, puesto que el lugar donde se realizó el pilotaje evidenció algunas limitantes, respecto al uso de tecnologías y por ello algunas actividades fueron modificadas respecto a la intención del diseño original.

Analizado el diseño a la luz de profesor metodológico propuesto por Díaz-Barriga, se pudo evidencia que fue acertado la elección del modelo curricular seguido, porque permitió integrar elementos como el contexto asociado a un contenido.

Lo planteado en este trabajo despierta interés sobre las posibilidades de disminuir las dificultades encontradas en un aula tradicional dentro de un marco inclusivo. A lo largo del proceso de construcción y valoración de los diseños quedan pendientes análisis sobre los productos obtenidos de los alumnos, lo que lleva a preguntar a manera de cierre para un posible trabajo a posterior. ¿Qué procesos de aprendizaje sobre razones trigonométricas posibilitaron los diseños en los estudiantes según sus características?.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abonia, L. y Miranda, W. (2017). *Un acercamiento histórico a las razones trigonométricas seno y coseno para la implementación de una actividad en el aula*. Tesis de pregrado, Universidad del Valle. Funes-Repositorio digital de documentos en educación matemática.

Aldana, E., Gutiérrez, H., y Wagner, G. (2018). Formación de profesores para una educación matemática en y para la diversidad. *Sophia*, *14*(1), 65-74. https://doi.org/10.18634/sophiaj.14v.1i.823

Alves, M. (2013). *Um olhar sobre a Educação Inclusiva de Deficientes Visuais Estratégias de Ensino de Trigonometria e Geometria Espacial*. [Tesis de maestría]. Universidad Federal de Piauí.

Arouxét, M., Cobeñas, P., y Grimaldi, V. (2019). Aportes para pensar la inclusión de alumnos sordos en aulas de Matemática de la educación superior. *Revista de educación matemática, 34 (1), 31-51.*

Astolfi, J. (1999). *El error, un medio para enseñar.* Sevilla: Diada.

Beltrán, Y., Martínez, Y., y Vargas, A. (2015). El Sistema Educativo Colombiano en el Camino a la Inclusión: Avances y Desafíos. *Educación y Educadores*, 18 (1), 62-75.

Constitución Política de Colombia [Const]. C. P. (1991). *Art.67*. 7 de julio de 1991 (Colombia).

Díaz-Barriga, F., Lule, M., Pacheco, D., Rojas, S., y Saad, E. (1990). *Metodología de diseño curricular para educación superior.* Trillas.

Espinoza, R., Vergara, G. y Valenzuela, Z. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *21*(3), 247-274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* [Tesis de doctorado]. Universidad de Valencia.

Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación. Curso de precálculo mediado por Geogebra.* Ediciones UIS.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Reidel.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporciónen la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas*. [Tesis doctoral]. Universidad del Valle.

Gutiérrez, J. (2019). *La Historia y la Epistemología en la Formación de un Ciudadano Matemáticamente Competente: un Acercamiento Desde el Estudio de la Trigonometría*. [Tesis de Maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Hernández, O. y Oviedo, M. (2019). La educación inclusiva para el colectivo docente es un reto que se asume en soledad. *Revista logos, ciencia & tecnología*, 113-125.

Kusmayadi, T. y Sujadi, I. (2017). Representaciones matemáticas de estudiantes de secundaria en la resolución de problemas trigonométricos. *Journal of Physics: Conference Series, 855 (1)*,12 - 21.

Machuca, R. (2015). *Lectura como estrategia para el aprendizaje de la trigonometría en estudiantes de secundaria de la institución educativa "San Agustín" de Cajas*. [Tesis de maestría]. Universidad Nacional Del Centro Del Perú.

Mateus, K. (2013). *Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo*. [Tesis de maestría]. Universidad Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de competencias en matemáticas.* MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje.* MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2020). *Orientaciones para promover la trayectoria educativa desde la educación media a la educación superior, en el marco de la educación inclusiva.* MEN.

MEN. (29 de agosto de 2017a) Por el cual reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. [Decreto 1421 de 2017].

Montiel, G. (2005). *Estudio Socio epistemológico de la función trigonométrica.* [Tesis de doctorado]. Instituto Politécnico Nacional CICATA.

Morocho, N. (2020). *Diseño Universal para el aprendizaje en el proceso de enseñanza-aprendizaje de matemática para el noveno año de educación general básica*. [Tesis de maestría]. Universidad Nacional de Educación.

Convención sobre los derechos de las personas con discapacidad. [ONU]. Art. 24. 1 de Julio de 2008. (Nueva York y Ginebra).

Oviedo, L. y Kanashiro, A. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 29 - 36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Parada, S. (2022). Educadores matemáticos que reflexionan sobre la atención a la diversidad en el aula. Conferencia presentada en el Foro EMAD 2022. Transmitida el 15 de noviembre. https://www.youtube.com/watch?v=mhGg9HbeSro

Parra, D. (2010). "Educación inclusiva: un modelo de educación para todos". *Revista ISEES*, 73-84.

Pastor, C. (2012). *Aportaciones del Diseño Universal para el Aprendizaje y de los materiales digitales en el logro de una enseñanza accesible.* [Archivo PDF] https://www.educadua.es/doc/dua/dua_pautas_intro_cv.pdf.

Peralta, M. (2022). Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores. Diplomado Comunidad de práctica en matemáticas.

Perilla, J. (2018). *La educación inclusiva: Una estrategia de transformación social*. Universidad Sergio Arboleda.

Rodríguez, G., y Sgreccia, N. (2021). Predisposición y comprensión de estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas trigonométricos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 108*, 119-148.

Rutz da Silva, S., Midori Shimazaki, E., y Da Silva Dessbesel, R. (2020). Una visión general de la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en la educación de los estudiantes sordos. *Paradigma ,41*, 168-189.

Sánchez-Gómez, V. y López, M. (2020). Entendiendo el Diseño Universal desde el Paradigma de Soporte: UDL como Sistema de Soporte para el Aprendizaje. *Revista latinoamericana de educación inclusiva*, *14* (1), 143-160. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-73782020000100143

Téllez, G., Nolasco, G., Juárez, J., y Juárez, E. (2021). Experiencias de estudiantes de bachillerato al resolver una tarea de libro de texto y una tarea auténtica de trigonometría. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 108,* 7-25.

UNESCO. (2017). *Compromiso de Cali sobre equidad e inclusión*. Cali: UNESCO.

UNESCO. (2017). *Informe GEM.* http://gem-report-2017.unesco.org/es/inicio/.

UNESCO. (2019), Declaración mundial sobre la educación superior en el siglo XXI: visión y acción. *Revista Educación Superior y Sociedad (ESS*),9(2), 97-113. https://www.iesalc.unesco.org/ess/index.php/ess3/article/view/171

Van Garderen, D. & Scheuermann, A. (2015). Diagramming word problems: A strategic approach for instruction. *Intervention School and Clinic, 50(5),* 282-290.

Velasco, A. (2022). *Profesores de matemáticas en ejercicio que reflexionan sobre la atención a la diversidad en clase de matemáticas.* [Tesis de maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Zárate Paz, J. (2017). *La importancia de la autenticidad de un problema de Matemáticas a nivel medio superior*. Coloquio sobre buenas prácticas docentes en el proceso de enseñanza, aprendizaje de las ciencias básicas, Puebla, México.

https://repositorio.iberopuebla.mx/bitstream/handle/20.500.11777/2587/ZARATE_licencia.pdf?sequence=6

Apéndice A. Malla Curricular

	NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
Pregunta problematizadora	**Propósito**	**Descriptores**	**Propósito**	**Descriptores**	**Propósito**	**Descriptores**
1 **¿Cómo se pueden medir las sombras?**	**Pensamiento variacional** Reconoce el concepto de razón trigonométrica partiendo de la relación entre las medidas lineales y medidas angulares de un triángulo rectángulo. .	**La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos** Lista, identifica y relaciona la razón y la proporción teniendo en cuenta el paso histórico de Tales de Mileto.	**Pensamiento variacional** Comprende el concepto de razón trigonométrica partiendo de la relación entre las medidas lineales y medidas angulares de un triángulo rectángulo a partir de un problema de sombras. .	**La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos** Establece, comprende e interpreta la razón y la proporción teniendo en cuenta el paso histórico de Tales de Mileto. Selecciona, compara y analiza las características de una razón trigonométrica	**Pensamiento variacional** Analiza y construye el concepto de razón trigonométrica partiendo de la relación entre las medidas lineales y medidas angulares de un triángulo rectángulo a partir de un problema de sombras.	Comprende, plantea e interpreta la razón y la proporción teniendo en cuenta el paso histórico de Tales de Mileto al medir su sombra. Completa y analiza las características de una razón trigonométrica
		Comunicativo Reconoce las características de una razón trigonométrica.		**Razonamiento** Clasifica y relaciona las características de una razón trigonométrica empleando la herramienta TIC en GeoGebra.		**Razonamiento** Clasifica y relaciona las características de una razón trigonométrica empleando GeoGebra.
		Razonamiento Relaciona las características de una razón trigonométrica a una situación real.		**Modelación** Relaciona lo aprendido de las razones trigonométricas y propone soluciones a diferentes problemas planteados.		Relaciona lo aprendido de las razones trigonométricas y propone soluciones a diferentes problemas planteados.


¿Cómo podemos medir las sombras?
Momento 1
Sofía y Felipe viajan a la antigua Grecia. En su caminata ven a un filósofo muy concentrado en sus pensamientos por lo que deciden acercarse y saludar
Hola señor filosofo!
¿Qué lo tiene tan pensativo?
Mis amigos y yo tenemos una duda por resolver
¿Duda?¿Sobre qué?
Nos preguntamos ¿Cómo podemos medir con las sombras?
El filósofo les cuenta por que la sombra es importante
Los cuerpos celestes proyectan sombras y estas pueden ser herramientas para medir lo que nos rodea
¿Qué características deben tener las sombras para usarlas como herramienta de medición?
Para unos cuantos de mis amigos, las sombras son elementos para medir al mundo, para conocer algo más de él.
Desde épocas antiguas, la observación de las sombras se ha utilizado para conocer distancias, alturas e incluso la circunferencia de la Tierra.
Sofía, Felipe y su nuevo amigo filosofo viajan al Antiguo Egipto a conocer a uno de sus amigos...
¿Quién es su amigo?
Vamos a conocerlo, ¡Síganme!
Mi amigo, TALES DE MILETO (639-548 a.C.): Fue el primero a quien se llamó gran "sabio". Era un político geómetra, astrónomo y pensador de Mileto.


¿Cómo podemos medir las sombras?
Cuenta la leyenda relatada por Plutarco que Tales de Mileto, durante uno de sus viajes a Egipto se encontró cierto día visitando la Necrópolis con el Joven Faraón de Egipto, quien deslumbrado por la fama y sabiduría de Tales le pregunto:
¿Puede medir la altura de la majestuosa pirámide de Keops?
Era por la mañana, muy temprano, y acababa de salir el sol por el horizonte. Es sabido que a esa hora las sombras que las personas proyectan son muy largas, luego se acortan a medida que avanza el día, sobre todo al medio día, y ya por la tarde empiezan de nuevo a alargarse.
Ante la pregunta del joven faraón, Tales reflexionó y le contestó que no solo la calcularía, si no que incluso la mediría sin ayuda de ningún instrumento.
Dicho esto, tomó dos bastones de igual longitud (también pueden ser distintos, e incluso con uno solo es posible), colocó uno en posición vertical y el otro en posición horizontal(sobre la arena), y se puso a esperar.
Cuando todavía era muy pronto, la sombra proyectada por el bastón vertical superaba por mucho la longitud del bastón horizontal, pero a medida que avanzaba el día esa sombra se fue acortando. Cuando su longitud se hizo igual que la del bastón apoyado en la arena Tales dijo al joven faraón:
Ahora ya es muy fácil conocer la altura de la pirámide.

Apéndice B. Diseño nivel 2

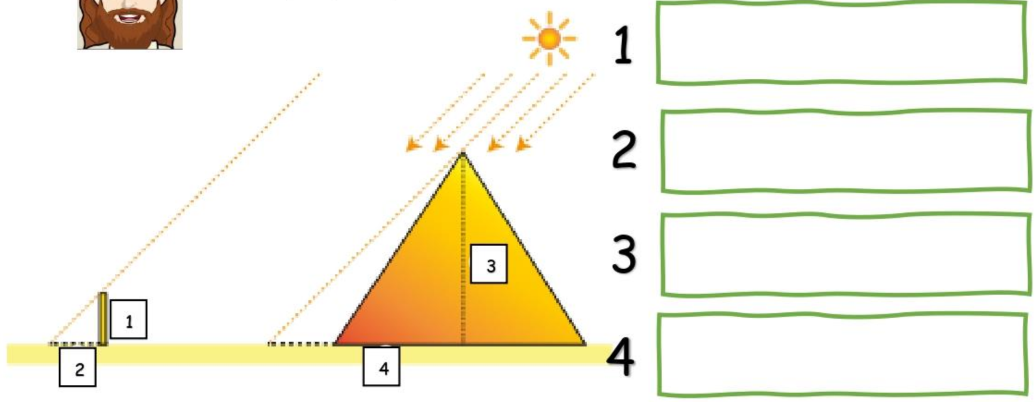
¿Cómo podemos medir las sombras?

NOMBRE: ____

Fecha: ____________________ Colegio: ____________________

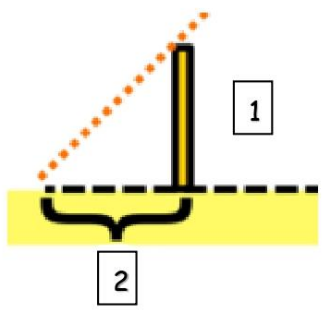
¿Cómo podemos medir las sombras?

La siguiente imagen representa la situación que plantea Tales de Mileto. Identifique qué representa cada letra.



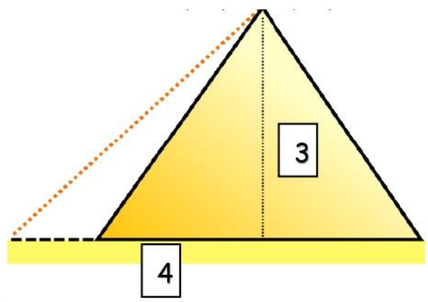
RECUERDA QUE: Razón geométrica, es la comparación entre dos magnitudes por medio de la razón o el cociente.

Teniendo en cuenta la información anterior, ayude a Sofía a identificar la expresión que compara la altura del bastón, respecto a la longitud de la sombra del bastón.



¿Cómo podemos medir las sombras?

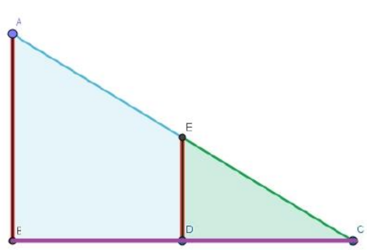
Teniendo en cuenta la información anterior ayude a Felipe a identificar la expresión que compara la altura de la pirámide respecto a la longitud de la sombra de la pirámide.



¿Falta algún dato en la historia de Tales que no se haya tenido en cuenta? Justifique su respuesta.

____
____
____
____
____

Sabías qué...



Una proporción es la igualdad entre dos o más razones, por ejemplo, si observamos la imagen de los triángulos ΔABC y ΔEDC podemos comparar la longitud del $\overline{AB}$ con la longitud del $\overline{ED}$ (Segmentos rojos) y la longitud del $\overline{BC}$ y la longitud de $\overline{DC}$ (Segmentos morados)

Simbólicamente

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$

¿Cómo podemos medir las sombras?

El archivo de GeoGebra representa geométricamente los triángulos semejantes formados en la situación de Tales y la pirámide. **ACTIVE LA OPCIÓN CATETOS.**

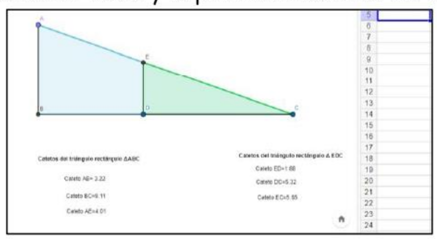


Ilustración 1. Actividad GeoGebra 1

¿Qué cambios ocurren en la gráfica al mover los puntos A y D?

A

D

Defina algunas razones de acuerdo con los triángulos rectángulos ΔABC y ΔEDC. (**ACTIVE OPCIÓN RAZONES**).

De acuerdo con las razones propuestas, ¿qué pasa con las razones al mover los puntos A y D?

A

D

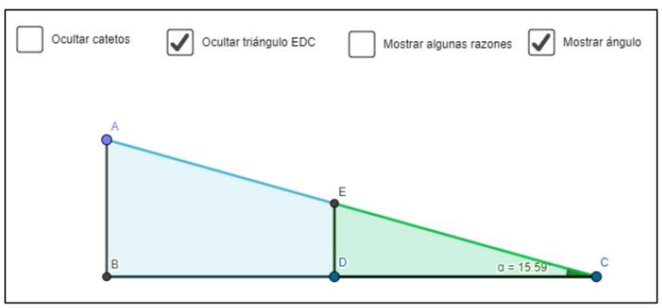
¿Cómo podemos medir las sombras?

Teniendo en cuenta lo anterior, proponga dos proporciones entre los lados correspondientes de los triángulos rectángulos ΔABC y ΔEDC.

Ésta relación se conoce como **TEOREMA DE TALES**.

Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados o con sus prolongaciones otro triángulo que es semejante al triángulo dado.

ACTIVE LA OPCIÓN ÁNGULO.



Al mover los puntos A y D, ¿qué ocurre con los lados de los dos triángulos y el ángulo?

A

D

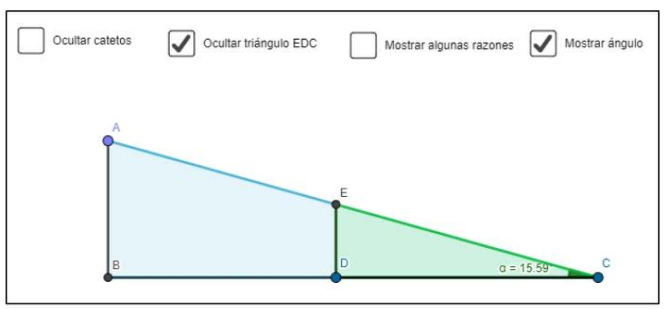
¿Cómo podemos medir las sombras?

Teniendo en cuenta lo anterior, proponga dos proporciones entre los lados correspondientes de los triángulos rectángulos ΔABC y ΔEDC.

Ésta relación se conoce como **TEOREMA DE TALES**.

Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados o con sus prolongaciones otro triángulo que es semejante al triángulo dado.

ACTIVE LA OPCIÓN ÁNGULO.



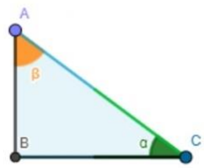
Al mover los puntos A y D, ¿qué ocurre con los lados de los dos triángulos y el ángulo?

A

D

Momento 2

¿Cómo podemos medir las sombras?



¿Si se cambia el ángulo de referencia, cambian sus razones correspondientes? Justifique.

____
____
____

De acuerdo con el triángulo anterior y los ángulos ∝ y β. Complete:

Razones	∝	$\boldsymbol{\beta}$
$\frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	______	______
$\frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	______	______
$\frac{Cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	______	______

Definamos las razones trigonométricas como el cociente entre dos medidas de acuerdo a un ángulo dado. En este caso tomemos el ángulo ∝ como referencia:

$$Seno\ \alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

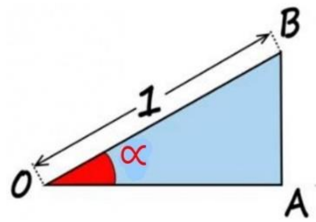
$$Coseno\ \alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$Tangente\ \alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

¿Cómo podemos medir las sombras?

USANDO REGLA Y COMPÁS

Para visualizar mejor el origen de las razones trigonométricas, tome el triángulo rectángulo ΔOAB y suponga que el segmento $\overline{OB} = 1$ unidad.

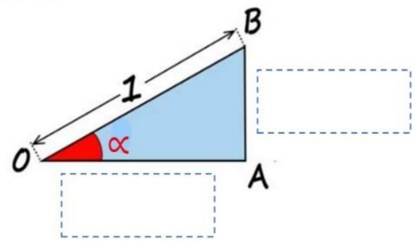


$$\text{Sen}\propto = \frac{\overline{BA}}{\overline{OB}}$$

$$\text{Cos}\propto = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

De acuerdo con lo anterior, si $\overline{OB} = 1$

¿En qué lado del triángulo queda ubicado el Sen ∝ y el Cos ∝ del triángulo rectángulo ΔOAB?



¿Qué segmentos representan el Sen∝ y el Cos∝ de ΔOAB?

$$\text{Sen}\propto = \boxed{}$$

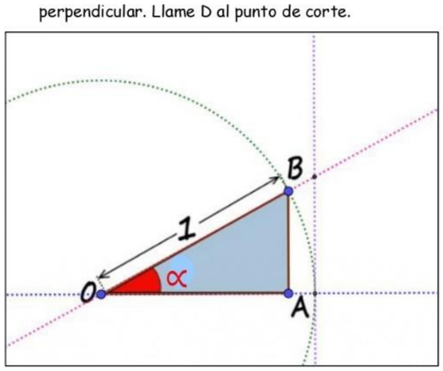
$$\text{Cos}\propto = \boxed{}$$

¿Cómo podemos medir las sombras?

Felipe al igual que usted se pregunta, ¿con qué segmento se puede identificar la tangente ∝?

Para ayudar a Felipe, debe realizar los siguientes pasos. Teniendo el triángulo rectángulo ΔOAB:

1) Trace una circunferencia con centro en O que pase por B.
2) Prolongue el segmento $\overline{OA}$ hasta cortar la circunferencia. Llame al punto de corte *C*.
3) Trace una recta perpendicular que pase por *C*.
4) Prolongues el segmento $\overline{OB}$ hasta cortar la recta perpendicular. Llame D al punto de corte.



Si toma en cuenta el teorema de Tales y la gráfica realizada anteriormente, junto con Felipe, se tiene que:

$$\text{Tan}\propto = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$$

¿Qué segmento representa la tangente? ¿Por qué?

$$\text{Tan}\propto = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \boxed{}$$

____
____
____
____
____

¿Cómo podemos medir las sombras?

Momento 3

MIDIENDO SOMBRAS

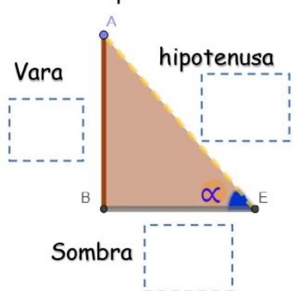
Sofía y Felipe, toman 4 varas de diferentes longitudes manteniéndolas en posición perpendicular al suelo y luego miden la longitud de su sombra. En equipos ayuden a Sofía y Felipe a completar los datos empleando el programa de *GeoGebra*.

1. Se tomará la medida a las 9 am

Altura de la vara	Longitud de la sombra	Hipotenusa

Respecto a los datos recolectados en la hora determinada, responda:

a) En equipo seleccionen una medida específica de la vara y la medida correspondiente de su sombra. Luego, establezcan las razones trigonométricas correspondientes.



Razones trigonométricas

$Seno\ \alpha\ =$ ____________

$Coseno\ \alpha =$ ____________

$Tangente\ \alpha =$ ____________

b) De acuerdo con las razones trigonométricas, ¿qué relación pueden establecer entre la altura del bastón y su respectiva sombra? Utilicen los datos obtenidos en el paso anterior.

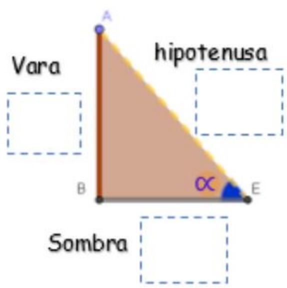
¿Cómo podemos medir las sombras?

Repitan la situación, pero con una hora diferente. La que prefieran.

Hora: _______ Ángulo: _________

Altura de la vara	Longitud de la sombra	Hipotenusa

a) Seleccionen una medida específica de la vara y la medida correspondiente de su sombra. Luego, establezcan las razones trigonométricas correspondientes.



Razones trigonométricas

$Seno\ \alpha =$ ______________

$Coseno\ \alpha =$ ______________

$Tangente\ \alpha =$ ______________

b) De acuerdo con las razones trigonométricas, ¿hay alguna relación entre la altura del bastón y su sombra?

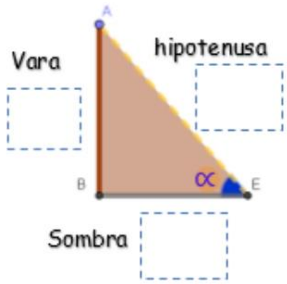
¿Cómo podemos medir las sombras?

Repitan la situación, pero con una hora diferente. La que prefieran.

Hora: _______ Ángulo: _________

Altura de la vara	Longitud de la sombra	Hipotenusa

a) Seleccionen una medida específica de la vara y la medida correspondiente de su sombra. Luego, establezcan las razones trigonométricas correspondientes.



Razones trigonométricas

$Seno\ \alpha =$ ____________

$Coseno\ \alpha =$ ____________

$Tangente\ \alpha =$ ____________

b) De acuerdo con las razones trigonométricas, ¿hay alguna relación entre la altura del bastón y su sombra?

Momento 4

¿Cómo podemos medir las sombras?

Sofía y Felipe discuten sobre lo que ocurre con la longitud de la sombra si se fijan algunas condiciones.

Sofía establece la siguiente condición: **Mantener dos elementos fijos.**

PROBLEMA 1

Si se fija la hora a las 8 am, entonces el ángulo de referencia sería igual a 30°, la altura del bastón sería igual a 2 unidades, y la sombra proyectada por este es igual a 3 unidades. (ver Figura 1)

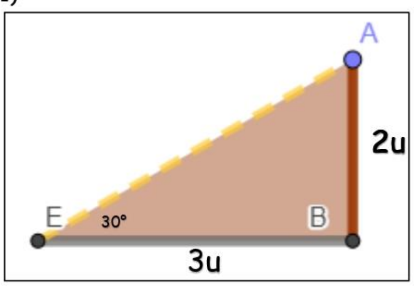


Figura 1 . Caso 1

Si mantenemos el **ángulo de referencia y el ángulo recto** como fijos, y **duplicamos la longitud de la altura del bastón,** observe lo que sucede (ver Figura 2)

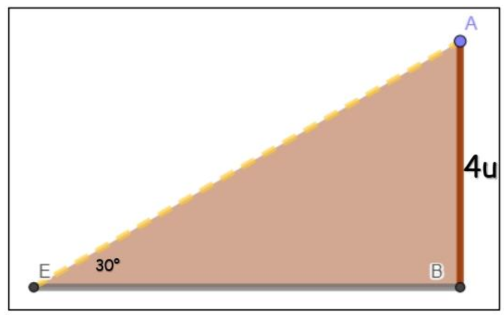


Figura 2. Caso 2.

RECUERDE QUE: Razón geométrica, es la comparación entre dos cantidades por medio de la razón o el cociente.

$$\frac{A}{B}$$

RECUERDE QUE: La proporción es la igualdad de dos razones de la misma clase.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Teniendo en cuenta el concepto de razón y proporción, ¿podría encontrar la longitud de la sombra del bastón? Justifique.

¿Cómo podemos medir las sombras?

PROBLEMA 2: Continuando con la condición de Sofía de mantener dos elementos fijos.

PROBLEMA |2

Felipe fija la altura del bastón a 10 unidades a las 8 am cuando el ángulo de referencia sería igual a 30°, y la sombra proyectada por este es igual a 8 unidades. Observe (ver
Figura 3).

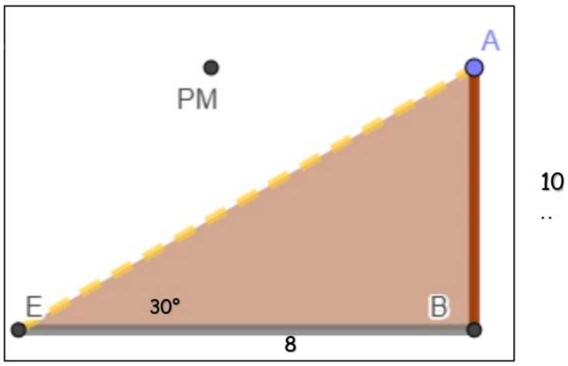


Figura 3 Representación situación 2.

RECUEDE QUE... Las razones trigonométricas son las relaciones entre los lados del triángulo rectángulo y sus ángulos referentes, pero en este caso tomemos el ángulo ∝ como referencia:

$$Seno\ \alpha\ = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

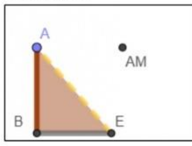
$$Coseno\ \alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$Tangente\ \alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

¿Qué razón trigonométrica podría usarse para encontrarla medida del segmento $\overline{AE}$?

¿Cómo podemos medir las sombras?

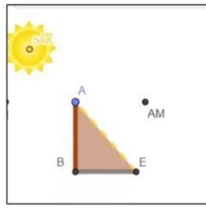
-Manteniendo fijo el ángulo recto y el ángulo de referencia. -



5	Baston AB	sombra BE
6	5	4
7	10	8
8	15	13
9		
10		

Cuando la longitud del bastón $\overline{AB}$ es 5 unidades y se duplica a 10 unidades, ¿qué sucede con $\overline{BE}$? Explique lo sucedido.

-Manteniendo la longitud del bastón y el ángulo recto fijos-



2	7 am	15°	18
3	8 am	30°	8
4	9 am	45°	5
5	10 am	60°	2
6	11 am	75°	1
7	12 m	90°	0
8	1 pm	105°	1
9	2 pm	120°	2
10	3 pm	135°	5
11	4 pm	150°	8
12	5 pm	165°	18

Cuando son las 7 am y el ángulo es 15° –la mitad del ángulo formado a las 8 am– ¿qué sucede con la longitud de la sombra respecto al ángulo a medida que transcurre el tiempo?

¿Qué relación que encuentra entre **los ángulos y la longitud de la sombra** en el triángulo estudiado?

Apéndice C. Diseño nivel 3

¿Cómo podemos medir las sombras?

NOMBRE: ____

Fecha: ____________________ Colegio: ______________________


¿Cómo podemos medir las sombras?
Momento 1
Sofía y Felipe viajan a la antigua Grecia. En su caminata ven a un filósofo muy concentrado en sus pensamientos por lo que deciden acercarse y saludar
Hola señor filosofo!
¿Qué lo tiene tan pensativo?
Mis amigos y yo tenemos una duda por resolver
¿Duda?¿Sobre qué?
Nos preguntamos ¿Cómo podemos medir con las sombras?
El filósofo les cuenta por que la sombra es importante
Los cuerpos celestes proyectan sombras y estas pueden ser herramientas para medir lo que nos rodea
¿Qué características deben tener las sombras para usarlas como herramienta de medición?
Para unos cuantos de mis amigos, las sombras son elementos para medir al mundo, para conocer algo más de él.
Desde épocas antiguas, la observación de las sombras se ha utilizado para conocer distancias, alturas e incluso la circunferencia de la Tierra.
Sofía, Felipe y su nuevo amigo filosofo viajan al Antiguo Egipto a conocer a uno de sus amigos...
¿Quién es su amigo?
Vamos a conocerlo, ¡Síganme!
Mi amigo, TALES DE MILETO (639-548 a.C.): Fue el primero a quien se llamó gran "sabio". Era un político geómetra, astrónomo y pensador de Mileto.


¿Cómo podemos medir las sombras?
Cuenta la leyenda relatada por Plutarco que Tales de Mileto, durante uno de sus viajes a Egipto se encontró cierto día visitando la Necrópolis con el Joven Faraón de Egipto, quien deslumbrado por la fama y sabiduría de Tales le pregunto:
¿Puede medir la altura de la majestuosa pirámide de Keops?
Era por la mañana, muy temprano, y acababa de salir el sol por el horizonte. Es sabido que a esa hora las sombras que las personas proyectan son muy largas, luego se acortan a medida que avanza el día, sobre todo al medio día, y ya por la tarde empiezan de nuevo a alargarse.
Ante la pregunta del joven faraón, Tales reflexionó y le contestó que no solo la calcularía, si no que incluso la mediría sin ayuda de ningún instrumento.
Dicho esto, tomó dos bastones de igual longitud (también pueden ser distintos, e incluso con uno solo es posible), colocó uno en posición vertical y el otro en posición horizontal(sobre la arena), y se puso a esperar.
Cuando todavía era muy pronto, la sombra proyectada por el bastón vertical superaba por mucho la longitud del bastón horizontal, pero a medida que avanzaba el día esa sombra se fue acortando. Cuando su longitud se hizo igual que la del bastón apoyado en la arena Tales dijo al joven faraón:
Ahora ya es muy fácil conocer la altura de la pirámide.

¿Cómo podemos medir las sombras?

¿Cuál es la figura geométrica que modela la situación descrita por Tales de Mileto? Represente y explique.

RECUERDA QUE: Razón geométrica, es la comparación entre dos cantidades por medio de la razón o el cociente.

Sofía toma el bastón y compara la longitud de la sombra del bastón, respecto a su altura, ¿qué ocurre en el instante en que la longitud de la sombra es la misma a la altura del bastón? Justifique su respuesta.

____

____

____

____

____

Felipe se pregunta, ¿será que Tales pudo haber medido la altura de la pirámide en cualquier momento del día?

____

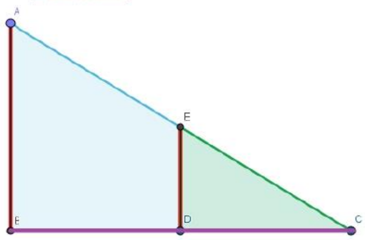
____

____

____

¿Cómo podemos medir las sombras?

Sabías qué…



Una proporción es la igualdad entre dos o más razones, por ejemplo, si observamos la imagen de los triángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta EDC$ podemos comparar la longitud del $\overline{AB}$ con la longitud del $\overline{ED}$ (Segmentos rojos) y la longitud del $\overline{BC}$ y la longitud de $\overline{DC}$ (Segmentos morados)

Simbólicamente

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$

Al comparar la altura del bastón respecto a la longitud de su sombra en el instante mencionado por Tales, ¿qué se puede afirmar respecto a la altura de la pirámide y longitud de su sombra? Explique su respuesta.

____

____

____

____

____

Sofía piensa: ahora, si la longitud de la sombra del bastón hubiese medido el doble que la altura del bastón, ¿qué se puede afirmar respecto a la altura y longitud de la sombra de la pirámide? Explique su respuesta.

____

____

____

____

____

¿Cómo podemos medir las sombras?

El archivo de *GeoGebra* representa geométricamente los triángulos semejantes formados en la situación de Tales y la pirámide.

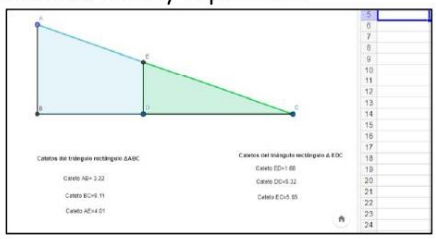


Ilustración 1. Actividad GeoGebra 1

(ACTIVE COMANDO CATETOS) De acuerdo con lo observado responda.

Si mueve el punto A, ¿qué cambia?

____
____
____
____

Si mueve el punto D, ¿qué cambia?

____
____
____
____

(ACTIVE COMANDO RAZONES) De los triángulos rectángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta EDC$, establezca algunas razones diferentes a las sugeridas entre los lados correspondientes del triángulo en *GeoGebra*.

¿Cómo podemos medir las sombras?

De acuerdo con las razones establecidas responda:

Al mover el punto A, ¿qué sucede con estos valores? Explique su respuesta.

Al mover el punto D, ¿qué sucede con estos valores? Explique su respuesta.

Establezca algunas proporciones entre los lados correspondientes de los triángulos rectángulos ΔABC y ΔEDC. ¿Qué sucede con estas proporciones? Explique su respuesta.

Esta relación se conoce como **TEOREMA DE TALES**.

Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados o con sus prolongaciones otro triángulo que es semejante al triángulo dado.

¿Cómo podemos medir las sombras?

ACTIVE COMANDO ÁNGULO

Mueva el punto A, ¿qué puede observar entre los lados de cada uno de los triángulos y su relación con el ángulo?

Luego, mueva el punto D. ¿Qué puede observar entre los lados de cada uno de los triángulos y su relación con el ángulo?

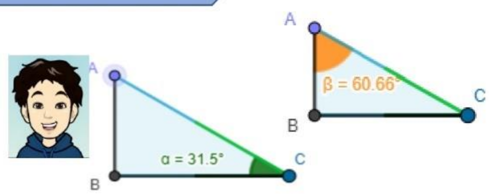
Al mover C, ¿qué relación encuentra entre el ángulo y los triángulos?

A partir de las tres preguntas anteriores, ¿qué puede concluir respecto a la relación entre el ángulo y las razones determinadas anteriormente?

Si un triángulo rectángulo tiene dos de sus lados con igual medida, ¿cuánto miden sus ángulos internos?

Momento 2

¿Cómo podemos medir las sombras?



De acuerdo con los triángulos anteriores y los ángulos ∝ y β. Complete:

Razones	β	∝
$\frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	________	__________
$\frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	________	__________
$\frac{Cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	________	__________

¿Si se cambia el ángulo de referencia cambian sus razones geométricas correspondientes? Justifique.

____
____
____

Definamos las razones trigonométricas como el cociente entre dos medidas respecto a un ángulo. En este caso tomemos el ángulo ∝ como referencia:

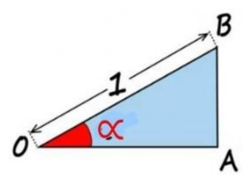
$$Seno\ \alpha\ = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$Coseno\ \alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$Tangente\ \alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

USANDO REGLA Y COMPÁS

Para visualizar mejor el origen de las razones trigonométricas, tome el triángulo rectángulo ΔOAB y suponga que el segmento $\overline{OB} = 1$ unidad.



¿Cómo podemos medir las sombras?

De acuerdo con lo anterior, sí $\overline{OB} = 1$

¿En qué lado del triángulo rectángulo ΔOAB queda ubicado el Sen ∝ y el Cos ∝ ?

Grafique y justifique su respuesta.

¿Qué segmentos representan el Sen∝ y el Cos∝ de ΔOAB?

¿Qué segmento podría representar la tangente?

Felipe al igual que usted se pregunta, ¿qué segmento representa la tangente θ?

$$Tan \propto = \frac{\overline{BA}}{\overline{OB}}$$

Para ayudar a Felipe debe realizar los siguientes pasos. Teniendo el triángulo rectángulo ΔOAB como base:

1) Trace una circunferencia con centro en O que pase por B.
2) Prolongue el segmento $\overline{OA}$, hasta cortar la circunferencia. Llame al punto de corte, C.
3) Trace una recta perpendicular que pase por C.
4) Prolongue el segmento $\overline{OB}$ hasta cortar la recta perpendicular. El punto de corte llámelo D.

¿Cómo podemos medir las sombras?

Realice la gráfica teniendo en cuenta los pasos anteriores:

¿Qué puede afirmar?

¿Qué segmento representa la tangente? ¿Por qué? Justifique su respuesta.

Si toma en cuenta el teorema de Tales y la gráfica realizada anteriormente junto con Felipe, se tiene que:

$$Tan \propto = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$$

¿Cómo podemos medir las sombras?

Momento 3

MIDIENDO SOMBRAS

Sofía y Felipe, toman 4 varas de diferentes longitudes manteniéndolas en posición perpendicular al suelo y luego miden la longitud de su sombra. En equipos ayuden a Sofía y Felipe a completar los datos empleando el programa de *GeoGebra*.

1. Se tomará la medida a las 9 am

Altura de la vara	Longitud de la sombra	Hipotenusa

Respecto a los datos recolectados en la hora determinada, responda:

a) En equipo seleccionen una medida específica de la vara, y dibujen un triángulo a escala que modele dicha altura y sus sombras. Luego, establezcan las razones trigonométricas correspondientes.

b) De acuerdo con las razones trigonométricas, ¿qué relación pueden establecer entre la altura del bastón y su respectiva sombra? Utilicen los datos obtenidos en el paso anterior.

____

____

____

¿Cómo podemos medir las sombras?

Repitan la situación, pero con una hora diferente. La que prefieran.

Hora: _______ Ángulo: _________

Altura de la vara	Longitud de la sombra	Hipotenusa
2 cm		
4 cm		
6 cm		
8 cm		

a) En equipo seleccionen una medida específica del bastón y la medida correspondiente de su sombra. Luego, establezca las razones trigonométricas correspondientes.

b) De acuerdo con las razones trigonométricas, ¿qué relación pueden establecer entre la altura del bastón y su respectiva sombra? Utilicen los datos obtenidos en el paso anterior.

____
____
____
____

Finalizada la experiencia realizada en dos momentos distintos, responda:

¿Cómo podemos medir las sombras?

a) Respecto a cada situación, ¿qué sucedió con la sombra de la vara al cambiar su altura?

____
____
____
____

b) Si se realiza el experimento a medio día, ¿qué sucede con la longitud de la sombra de la vara?

____
____
____
____

c) Teniendo en cuenta el valor del ángulo, ¿existe alguna relación entre este valor, la longitud de la vara y la longitud de la sombra?

____
____
____
____
____

d) ¿Cuál es la causa que lleva a que las razones establecidas se vean afectadas a lo largo del día?

____
____
____
____
____

¿Cómo podemos medir las sombras?

Momento 4

Sofía y Felipe discuten sobre lo que ocurre con la longitud de la sombra si se fijan algunas condiciones.

Sofía establece la siguiente condición: **Mantener dos elementos fijos.**

PROBLEMA |1

Si se fija la hora a las 8 am, entonces el ángulo de referencia sería igual a 30°, la altura del bastón sería igual a 2 unidades, y la sombra proyectada por este es igual a 3.46 unidades. (ver Figura 1)

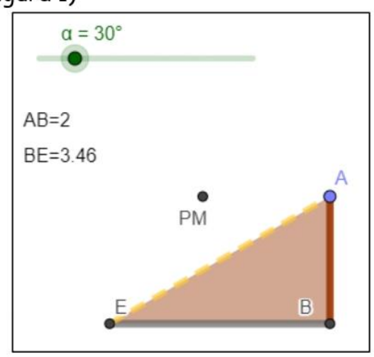


Figura 1 Representación del problema,

Si mantenemos el **ángulo de referencia y el ángulo recto** como fijos, y **duplicamos la longitud de la altura del bastón,** observe lo que ocurre (ver Figura 2)

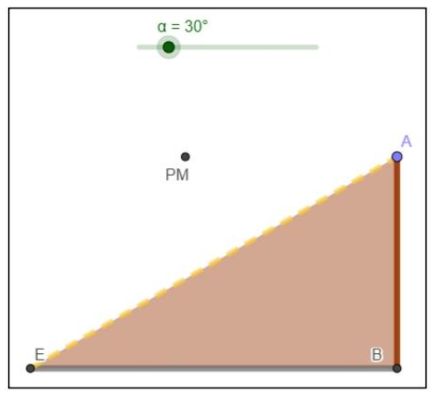
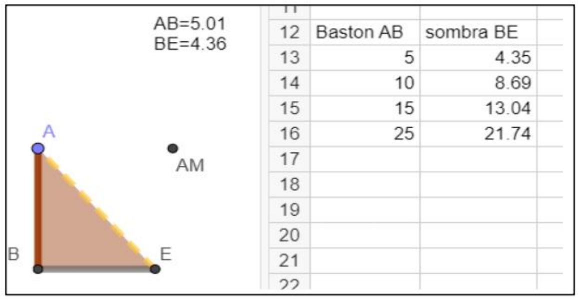


Figura 2 Representación

¿Cuál es la longitud de la sombra del bastón para el segundo caso? Justifique.

¿Cómo podemos medir las sombras?

Cuando la longitud del bastón $\overline{AB}$ es 5 unidades Y se duplica a 10 unidades ¿qué sucede con $\overline{AE}$? ¿La longitud de la sombra $\overline{BE}$ también se duplica? Explique lo sucedido.



Cuando la longitud del bastón $\overline{AB}$ es 15 unidades (el triple de la longitud del caso inicial), ¿qué sucede con $\overline{AE}$? ¿La longitud de la sombra $\overline{BE}$ también se triplica?, Explique lo sucedido.

De acuerdo con los casos analizados en las preguntas anteriores, ¿cómo describe la relación que se establece entre la **longitud del bastón y la longitud de la sombra** respecto al ángulo en el triángulo rectángulo estudiado? Justifique.

¿Cómo podemos medir las sombras?

PROBLEMA 2: Continuando con la condición de Sofía de mantener dos elementos fijos.

Felipe fija la altura del bastón a 10 unidades a las 8 am cuando el ángulo de referencia sería igual a 30°, y la sombra proyectada por este es igual a 17.35 unidades (ver Figura 3).

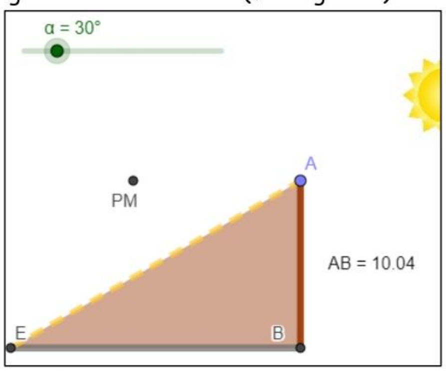


Figura 3 Representación situación 2.

Si mantenemos el **lado AB y el ángulo recto** del triángulo como fijos, y **duplicamos el ángulo de referencia,** observe lo que sucede (ver Figura 4)

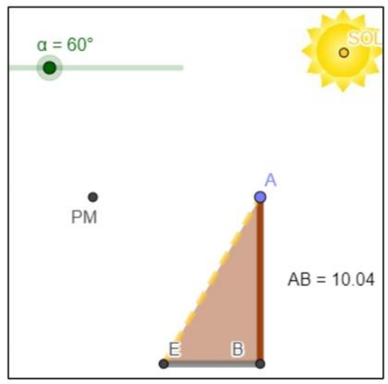
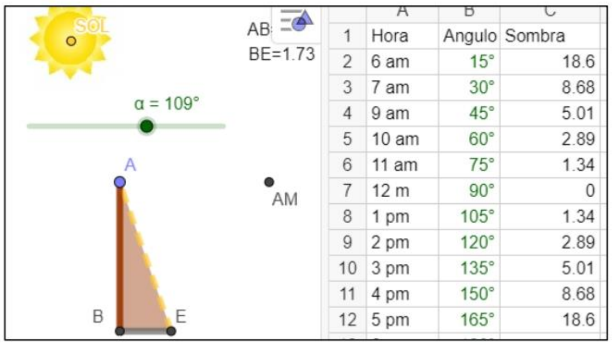


Figura 4 Representación

¿Cuánto mide la sombra? ¿por qué?

¿Cómo podemos medir las sombras?



	A	B	C
1	Hora	Angulo	Sombra
2	6 am	15°	18.6
3	7 am	30°	8.68
4	9 am	45°	5.01
5	10 am	60°	2.89
6	11 am	75°	1.34
7	12 m	90°	0
8	1 pm	105°	1.34
9	2 pm	120°	2.89
10	3 pm	135°	5.01
11	4 pm	150°	8.68
12	5 pm	165°	18.6

Utilice el siguiente recurso GeoGebra para aproximar la longitud de la sombra, manteniendo la longitud del bastón y el ángulo recto como fijos–

En el primer caso de la tabla, cuando son las 7 am el ángulo es 15° –la mitad del ángulo formado a las 8am, –¿Qué sucede con la longitud de la sombra respecto al ángulo a medida que transcurre el tiempo?

A la luz de los casos analizados, ¿cómo describe usted la relación que se establece entre **los ángulos y la longitud de la sombra** en el triángulo estudiado? Justifique.

Apéndice V. Diseño nivel 4

¿Cómo podemos medir las sombras?

NOMBRE: ____

Fecha: ____________________ Colegio:_____________________


¿Cómo podemos medir las sombras?
Momento 1
Sofía y Felipe viajan a la antigua Grecia. En su caminata ven a un filósofo muy concentrado en sus pensamientos por lo que deciden acercarse y saludar
Hola señor filósofo!
¿Qué lo tiene tan pensativo?
Mis amigos y yo tenemos una duda por resolver
¿Duda?¿Sobre qué?
Nos preguntamos ¿Cómo podemos medir con las sombras?
El filósofo les cuenta por que la sombra es importante
Los cuerpos celestes proyectan sombras y estas pueden ser herramientas para medir lo que nos rodea
¿Qué características deben tener las sombras para usarlas como herramienta de medición?
Para unos cuantos de mis amigos, las sombras son elementos para medir al mundo, para conocer algo más de él.
Desde épocas antiguas, la observación de las sombras se ha utilizado para conocer distancias, alturas e incluso la circunferencia de la Tierra.
Sofía, Felipe y su nuevo amigo filosofo viajan al Antiguo Egipto a conocer a uno de sus amigos...
¿Quién es su amigo?
Vamos a conocerlo, ¡Síganme!
Mi amigo, TALES DE MILETO (639-548 a.C.): Fue el primero a quien se llamó gran "sabio". Era un político geómetra, astrónomo y pensador de Mileto.


¿Cómo podemos medir las sombras?
Cuenta la leyenda relatada por Plutarco que Tales de Mileto, durante uno de sus viajes a Egipto se encontró cierto día visitando la Necrópolis con el Joven Faraón de Egipto, quien deslumbrado por la fama y sabiduría de Tales le pregunto:
¿Puede medir la altura de la majestuosa pirámide de Keops?
Era por la mañana, muy temprano, y acababa de salir el sol por el horizonte. Es sabido que a esa hora las sombras que las personas proyectan son muy largas, luego se acortan a medida que avanza el día, sobre todo al medio día, y ya por la tarde empiezan de nuevo a alargarse.
Ante la pregunta del joven faraón, Tales reflexionó y le contestó que no solo la calcularía, si no que incluso la mediría sin ayuda de ningún instrumento.
Dicho esto, tomó dos bastones de igual longitud (también pueden ser distintos, e incluso con uno solo es posible), colocó uno en posición vertical y el otro en posición horizontal(sobre la arena), y se puso a esperar.
Cuando todavía era muy pronto, la sombra proyectada por el bastón vertical superaba por mucho la longitud del bastón horizontal, pero a medida que avanzaba el día esa sombra se fue acortando. Cuando su longitud se hizo igual que la del bastón apoyado en la arena Tales dijo al joven faraón:
Ahora ya es muy fácil conocer la altura de la pirámide.

¿Cómo podemos medir las sombras?

Modele la situación planteada por Tales. Explique cuáles fueron los pasos que realizó Tales para encontrar la altura de la pirámide.

PASOS

¿Cómo podemos medir las sombras?

Sofía toma el bastón y compara la longitud de la sombra del bastón con su altura. ¿Qué ocurre en el instante en el que la longitud de la sombra es la misma que la altura del bastón? Justifique su respuesta.

Al comparar la altura del bastón respecto a la longitud de su sombra en el instante mencionado por Tales, ¿qué se puede afirmar respecto a la altura de la pirámide y la longitud de su sombra? Explique su respuesta.

Sofía piensa que: ahora, si la longitud de la sombra del bastón hubiese medido el doble que la altura del bastón, ¿qué se puede afirmar respecto a la altura y longitud de la sombra de la pirámide? Explique su respuesta.

¿Cómo podemos medir las sombras?

El archivo de GeoGebra representa geométricamente los triángulos semejantes formados en la situación de Tales y la pirámide.

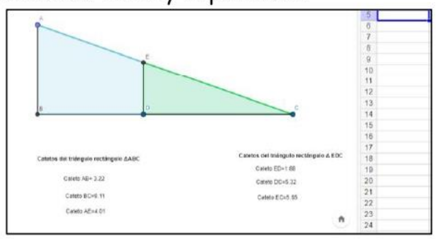


Ilustración 1. Actividad GeoGebra 1

(ACTIVE COMANDO CATETOS) De acuerdo con lo observado responda. Si mueve el punto A, ¿qué cambia?

Si mueve el punto D, ¿qué cambia?

(ACTIVE COMANDO RAZONES) De los triángulos rectángulos ΔABC y ΔEDC, establezca algunas razones diferentes a las sugeridas entre los lados correspondientes del triángulo en GeoGebra.

¿Cómo podemos medir las sombras?

De acuerdo con las razones establecidas responda:

Al mover el punto A y D, ¿qué sucede con estos valores? Explique su respuesta.

Establezca algunas proporciones entre los lados correspondientes de los triángulos rectángulos $\Delta ABC \; y \; \Delta EDC$. ¿Qué sucede con estas proporciones al mover el punto A y D? Explique su respuesta.

ACTIVE COMANDO ÁNGULO

Mueva el punto A, D y C. ¿Qué relación encuentra entre el ángulo y los triángulos?

¿Cómo podemos medir las sombras?

¿Qué sucede con los valores de las razones cuando el ángulo varía entre 0° y 90°? Explique su respuesta.

Si un triángulo rectángulo tiene dos de sus lados con igual medida, ¿cuánto miden sus ángulos internos?

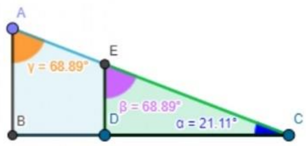
FALSO O VERDADERO. Justifique.

En un triángulo rectángulo la medida de la hipotenusa es el doble de la medida de uno de sus catetos.

____
____
____
____
____

Momento 2

¿Cómo podemos medir las sombras?



De acuerdo con los triángulos anteriores y los ángulos $\propto$, β y γ . Complete:

Razones	β	$\propto$	γ
$\frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	______	______	______
$\frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	______	______	______
$\frac{Cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	______	______	______

Si se cambia el ángulo de referencia, ¿cambian sus razones correspondientes? Justifique.

____
____
____

Definamos las razones trigonométricas como los siguientes cocientes de acuerdo con cualquier ángulo, pero en este caso tomemos el ángulo $\propto$ como referencia:

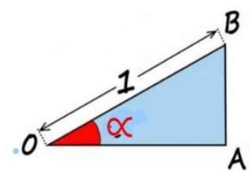
$$Seno\ \alpha\ = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$Coseno\ \alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$Tangente\ \alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

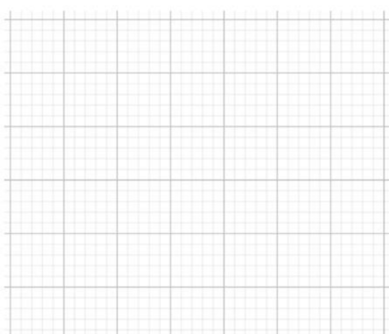
USANDO REGLA Y COMPÁS

Para visualizar mejor el origen de las razones trigonométricas tome el triángulo rectángulo ΔOAB y suponga que el segmento $\overline{OB} = 1$ unidad.



¿Cómo podemos medir las sombras?

Realice la gráfica teniendo en cuenta los pasos anteriores:



¿Qué segmento representa la tangente? ¿por qué? Justifique matemáticamente su respuesta.

Felipe tiene que:

$$Tan\ \propto = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$$

¿Cómo podemos medir las sombras?

Momento 3

MIDIENDO SOMBRAS

Sofía y Felipe toman 4 varas de diferentes longitudes manteniéndolas en posición perpendicular al suelo y luego miden la longitud de su sombra. En equipos ayuden a Sofía y Felipe a completar los datos empleando el programa de GeoGebra.

1. Se tomará la medida a las 9 am

Altura de la vara	Longitud de la sombra	Hipotenusa

Respecto a los datos recolectados en la hora determinada, responda:

a) En equipo seleccionen una medida específica de la vara, y dibujen un triángulo a escala que modele dicha altura y sus sombras. Luego, establezca las razones trigonométricas correspondientes.

b) De acuerdo con las razones trigonométricas, ¿qué relación pueden establecer entre la altura del bastón y su respectiva sombra? Utilicen los datos obtenidos en el paso anterior.

¿Cómo podemos medir las sombras?

Repitan la situación, pero con una hora diferente. La que prefieran.

Hora: _______ Ángulo: _________

Altura de la vara	Longitud de la sombra	Hipotenusa

a) En equipo seleccionen una medida específica del bastón y la medida correspondiente de su sombra. Luego, establezcan las razones trigonométricas correspondientes.

b) De acuerdo con las razones trigonométricas, ¿qué relación pueden establecer entre la altura del bastón y su respectiva sombra? Utilicen los datos obtenidos en el paso anterior.

¿Cómo podemos medir las sombras?

Finalizada la experiencia realizada en dos momentos distintos, responda:

a) Respecto a cada situación, ¿qué sucedió con la sombra de la vara al cambiar su altura?

____

____

____

____

b) Si se realiza el experimento a medio día, ¿qué sucede con la longitud de la sombra de la vara?

____

____

____

____

c) Teniendo en cuenta el valor del ángulo, ¿existe alguna relación entre este valor, la longitud de la vara y la longitud de la sombra?

____

____

____

____

____

d) ¿Cuál es la causa que lleva a que las razones establecidas se vean afectadas a lo largo del día?

____

____

____

____

____

¿Cómo podemos medir las sombras?

Momento 4

Sofía y Felipe discuten sobre lo que ocurre con la longitud de la sombra si se fijan algunas condiciones.

Sofía establece la siguiente condición: **Mantener dos elementos fijos.**

PROBLEMA 1:

Si se fija la hora a las 8 am, entonces el ángulo de referencia sería igual a 30°, la altura del bastón sería igual a 2 unidades, y la sombra proyectada por este es igual a 3.46 unidades. (ver Figura 1)

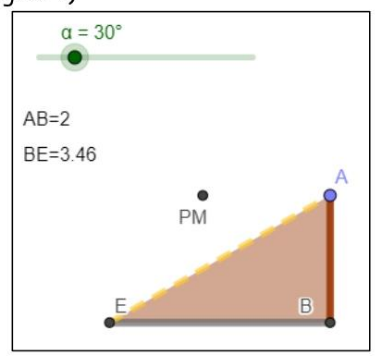


Figura 1 Representación del problema,

Si mantenemos el **ángulo de referencia y el ángulo recto** como fijos, y **duplicamos la longitud de la altura del bastón,** observe lo que ocurre (ver Figura 2)

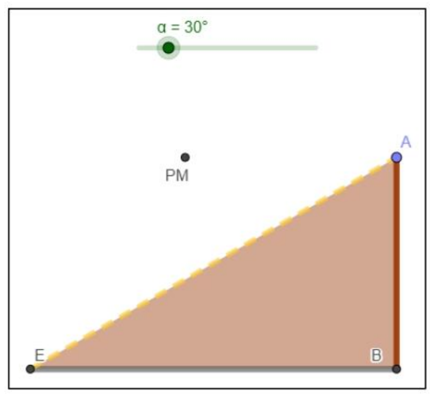
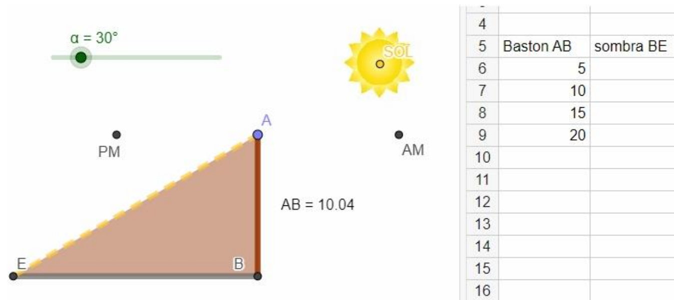


Figura 2 Representación

¿Cuál es la longitud de la sombra del bastón para el segundo caso? Justifique.

¿Cómo podemos medir las sombras?



Cuando la longitud del bastón $\overline{AB}$ es 5 unidades y se duplica a 10 unidades, ¿qué sucede con $\overline{AE}$? ¿La longitud de la sombra $\overline{BE}$ también se duplica? Explique lo sucedido.

En el caso cuando la longitud del bastón $\overline{AB}$ es 15 unidades (el triple de la longitud del caso inicial), ¿qué sucede con $\overline{AE}$? ¿La longitud de la sombra $\overline{BE}$ también se triplica? Explique lo sucedido.

De acuerdo con los casos analizados en las preguntas anteriores, ¿cómo describe la relación que se establece entre la **longitud del bastón y la longitud de la sombra** respecto al ángulo en el triángulo rectángulo estudiado? Justifique.

¿Cómo podemos medir las sombras?

PROBLEMA 2: Continuando con la condición de Sofia de mantener dos elementos fijos.

Felipe fija la altura del bastón a 10 unidades a las 8 am cuando el ángulo de referencia sería igual a 30°, y la sombra proyectada por este es igual a 17.35 unidades (ver Figura 3).

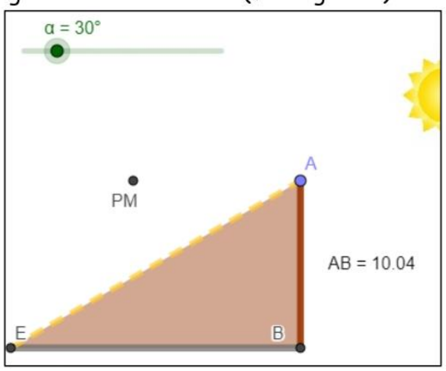


Figura 3 Representación situación 2.

Si mantenemos el **lado AB y el ángulo recto** del triángulo como fijos, y **duplicamos el ángulo de referencia,** observe lo que sucede (ver Figura 4)

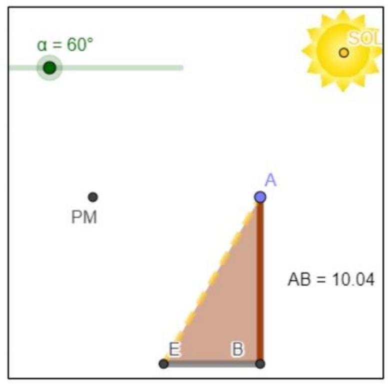
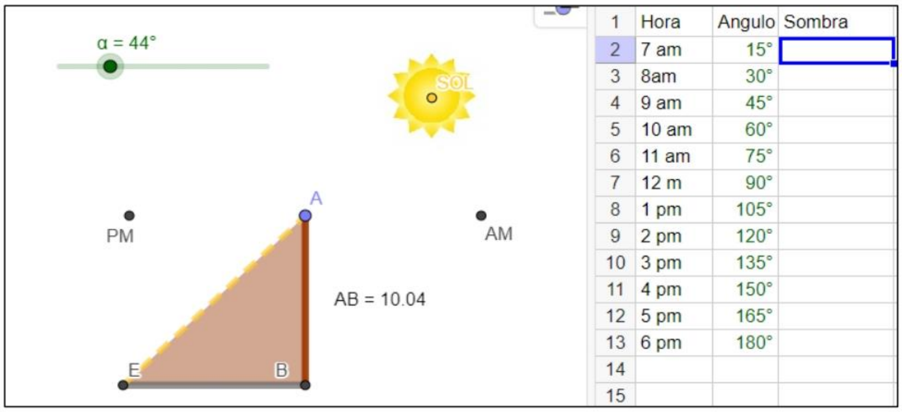


Figura 4 Representación

¿Cuánto mide la sombra? ¿por qué?

¿Cómo podemos medir las sombras?

Utilice el siguiente recurso GeoGebra para aproximar la longitud de la sombra, bajo las mismas condiciones del caso anterior –manteniendo la longitud del bastón y el ángulo recto como fijos–



En el primer caso de la tabla, cuando son las 7 am el ángulo es 15° –la mitad del ángulo formado a las 8am, –¿Qué sucede con la longitud de la sombra respecto al ángulo a medida que transcurre el tiempo?

A la luz de los casos analizados, ¿cómo describe usted la relación que se establece entre **los ángulos y la longitud de la sombra** en el triángulo estudiado? Justifique.

Apéndice W. Diseño nivel 3 ajustado

¿Cómo podemos medir las sombras?

NOMBRE: ____

Fecha: ______________________ Colegio: ______________________


¿Cómo podemos medir las sombras?
Momento 1
Sofía y Felipe viajan a la antigua Grecia. En su caminata ven a un filósofo muy concentrado en sus pensamientos por lo que deciden acercarse y saludar
Hola señor filosofo!
¿Qué lo tiene tan pensativo?
Mis amigos y yo tenemos una duda por resolver
¿Duda?¿Sobre qué?
Nos preguntamos ¿Cómo podemos medir con las sombras?
El filósofo les cuenta por que la sombra es importante
Los cuerpos celestes proyectan sombras y estas pueden ser herramientas para medir lo que nos rodea
¿Qué características deben tener las sombras para usarlas como herramienta de medición?
Para unos cuantos de mis amigos, las sombras son elementos para medir al mundo, para conocer algo más de él.
Desde épocas antiguas, la observación de las sombras se ha utilizado para conocer distancias, alturas e incluso la circunferencia de la Tierra.
Sofía, Felipe y su nuevo amigo filosofo viajan al Antiguo Egipto a conocer a uno de sus amigos...
¿Quién es su amigo?
Vamos a conocerlo, ¡Síganme!
Mi amigo, TALES DE MILETO (639-548 a.C.): Fue el primero a quien se llamó gran "sabio". Era un político geómetra, astrónomo y pensador de Mileto.


¿Cómo podemos medir las sombras?
Cuenta la leyenda relatada por Plutarco que Tales de Mileto, durante uno de sus viajes a Egipto se encontró cierto día visitando la Necrópolis con el Joven Faraón de Egipto, quien deslumbrado por la fama y sabiduría de Tales le pregunto:
¿Puede medir la altura de la majestuosa pirámide de Keops?
Era por la mañana, muy temprano, y acababa de salir el sol por el horizonte. Es sabido que a esa hora las sombras que las personas proyectan son muy largas, luego se acortan a medida que avanza el día, sobre todo al medio día, y ya por la tarde empiezan de nuevo a alargarse.
Ante la pregunta del joven faraón, Tales reflexionó y le contestó que no solo la calcularía, si no que incluso la mediría sin ayuda de ningún instrumento.
Dicho esto, tomó dos bastones de igual longitud (también pueden ser distintos, e incluso con uno solo es posible), colocó uno en posición vertical y el otro en posición horizontal(sobre la arena), y se puso a esperar.
Cuando todavía era muy pronto, la sombra proyectada por el bastón vertical superaba por mucho la longitud del bastón horizontal, pero a medida que avanzaba el día esa sombra se fue acortando. Cuando su longitud se hizo igual que la del bastón apoyado en la arena Tales dijo al joven faraón:
Ahora ya es muy fácil conocer la altura de la pirámide.

¿Cómo podemos medir las sombras?

¿Cuál es la figura geométrica que modela la situación descrita por Tales de Mileto? Represente y explique.

RECUERDE QUE: Razón geométrica, es la comparación entre dos cantidades.

Antecedente→ $\dfrac{A}{B} = k$ ← Razón Geométrica.
Consecuente→

Sofía toma el bastón y compara la longitud de la sombra del bastón, respecto a su altura, ¿qué ocurre en el instante en que la longitud de la sombra es la misma a la altura del bastón? Justifique su respuesta.

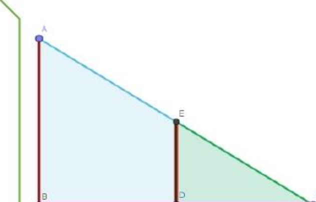
Felipe se pregunta, ¿será que Tales pudo haber medido la altura de la pirámide en cualquier momento del día?

Al comparar la altura del bastón respecto a la longitud de su sombra en el instante mencionado por Tales, ¿qué se puede afirmar respecto a la altura de la pirámide y longitud de su sombra? Explique su respuesta.

Sofía piensa: ahora, si la longitud de la sombra del bastón hubiese medido el doble que la altura del bastón, ¿qué se puede afirmar respecto a la altura y longitud de la sombra de la pirámide? Explique su respuesta.

Sabías que... Una proporción es la igualdad entre dos o más razones. En los triángulos ΔABC y ΔEDC podemos comparar la longitud del $\overline{AB}$ con la longitud del $\overline{ED}$ (Segmentos rojos) y la longitud del $\overline{BC}$ y la longitud de $\overline{DC}$ (Segmentos morados). Simbólicamente

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$



¿Cómo podemos medir las sombras?

Momento 2

El archivo de GeoGebra representa geométricamente los triángulos semejantes formados en la situación de Tales y la pirámide. De acuerdo con lo observado responda.

Si mueve el punto A, ¿qué cambia?

Si mueve el punto D, ¿qué cambia?

De los triángulos rectángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta EDC$, establezca algunas razones diferentes a las sugeridas entre los lados correspondientes del triángulo en GeoGebra.

De acuerdo con las razones establecidas responda: al mover el punto A, ¿qué sucede con estos valores? Explique su

Si mueve el punto A, ¿qué cambia?

Si mueve el punto D, ¿qué cambia?

Establezca algunas proporciones entre los lados correspondientes de los triángulos rectángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta EDC$. ¿Qué sucede con estas proporciones? Explique su respuesta.

Esta relación se conoce como **TEOREMA DE TALES**.

Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados o con sus prolongaciones otro triángulo que es semejante al triángulo dado.

¿Cómo podemos medir las sombras?

ACTIVE LA OPCIÓN ÁNGULO.

Al mover los puntos A y D, ¿qué ocurre con los lados de los dos triángulos y el ángulo?

A

D

ACTIVAR: MOSTRAR RAZONES

Al mover los puntos A, D y C, ¿qué relación encuentra entre el ángulo y las razones propuestas?

A

D

C

A partir de las tres preguntas anteriores, ¿qué puede concluir respecto a la relación entre el ángulo y las razones determinadas anteriormente? ____________________

____

____

Si un triángulo rectángulo tiene dos de sus lados con igual medida, ¿cuánto miden sus ángulos internos?

____

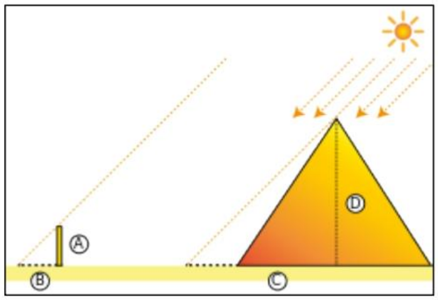
____

____

¿Cómo podemos medir las sombras?

Observa la siguiente imagen De acuerdo con los triángulos formados con el bastón, la pirámide y sus respectivas sombras. Identifica respecto a sus ángulos ∝ y β. Complete:

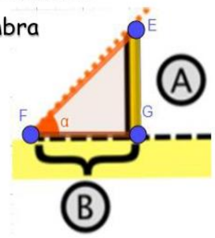
Razones	β	∝
$\frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	________	________
$\frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	________	________
$\frac{Cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	________	________



A=altura del Bastón

B=sombra

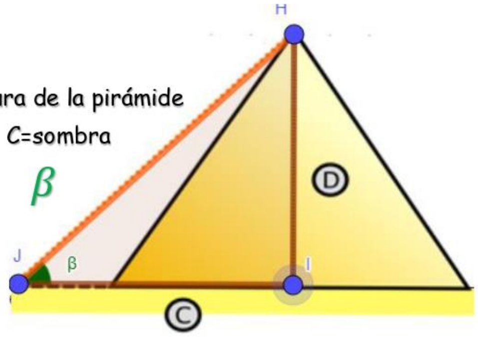
∝



D=altura de la pirámide

C=sombra

β



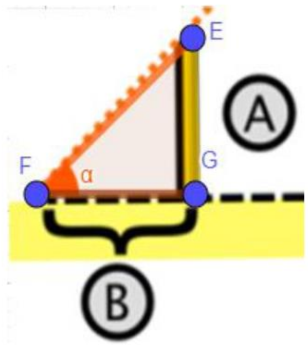
¿Si se cambia el ángulo de referencia, cambian sus razones correspondientes? Justifique.

Definamos las razones trigonométricas como el cociente entre dos medidas de acuerdo con un ángulo dado. En este caso tomemos el ángulo ∝ como referencia:

$Seno\ \alpha\ = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$ $Coseno\ \alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$ $Tangente\ \alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$

¿Cómo podemos medir las sombras?

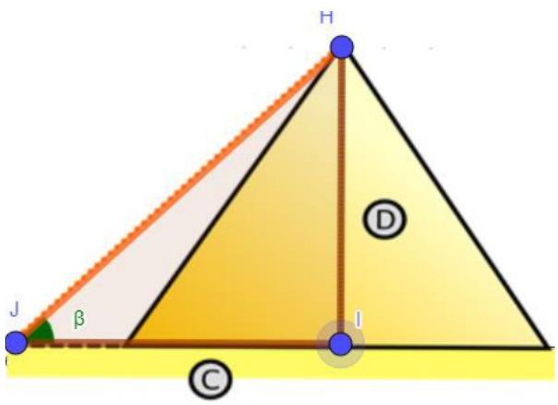
De acuerdo con la definición Identifica:



$\text{Sen}\alpha = \frac{\square}{\square}$

$\text{Cos}\alpha = \frac{\square}{\square}$

$\text{Tan}\alpha = \frac{\square}{\square}$



$\text{Sen}\beta = \frac{\square}{\square}$

$\text{Cos}\beta = \frac{\square}{\square}$

$\text{Tan}\beta = \frac{\square}{\square}$

¿Si se asignará el valor numérico de 45° a ambos ángulos α y β que crees que ocurriría con las sombras de la pirámide y del bastón? Justifique.

¿Cómo podemos medir las sombras?

Momento 3

MIDIENDO SOMBRAS

Sofía y Felipe, toman 4 varas de diferentes longitudes manteniéndolas en posición perpendicular al suelo y luego miden la longitud de su sombra. En equipos ayuden a Sofía y Felipe a completar los datos empleando el programa de GeoGebra.

1. Se tomará la medida a las 9 am

Altura de la vara	Longitud de la sombra	Hipotenusa	Ángulo

Respecto a los datos recolectados en la hora determinada, responda:

a) En equipo seleccionen una medida específica de la vara, y dibujen un triángulo a escala que modele dicha altura y sus sombras. Luego, establezcan las razones trigonométricas correspondientes.

b) De acuerdo con las razones trigonométricas, ¿qué relación pueden establecer entre la altura del bastón, su respectiva sombra y los ángulos? Utilicen los datos obtenidos en el paso anterior.

____
____
____
____

¿Cómo podemos medir las sombras?

Repitan la situación, pero con una hora diferente. La que prefieran.

Hora: _______ Ángulo: _________

Altura de la vara	Longitud de la sombra	Hipotenusa
2 cm		
4 cm		
6 cm		
8 cm		

a) En equipo seleccionen una medida específica del bastón y la medida correspondiente de su sombra. Luego, establezca las razones trigonométricas correspondientes.

b) De acuerdo con las razones trigonométricas, ¿qué relación pueden establecer entre la altura del bastón, su respectiva sombra y la variación de los ángulos? Utilicen los datos obtenidos en el paso anterior.

____
____
____
____
____

¿Cómo podemos medir las sombras?

Finalizada la experiencia realizada en dos momentos distintos, responda:

a) Respecto a cada situación, ¿qué sucedió con la sombra de la vara al cambiar su altura?

b) Si se realiza el experimento a medio día, ¿qué sucede con la longitud de la sombra de la vara?

c) Teniendo en cuenta el valor del ángulo, ¿existe alguna relación entre este valor, la longitud de la vara y la longitud de la sombra?

d) ¿Cuál es la causa que lleva a que las razones establecidas se vean afectadas a lo largo del día?

¿Cómo podemos medir las sombras?

Momento 4

De acuerdo **GEOGEBRA: MIDIENDO LAS SOMBRAS**

Sofía y Felipe discuten sobre lo que ocurre con la longitud de la sombra si se fijan algunas condiciones.

Sofía establece la siguiente condición: **Mantener dos elementos fijos.**

PROBLEMA |1

Si se fija la hora a las 8 am, entonces el ángulo de referencia sería igual a 30°, la altura del bastón sería igual a 2 unidades, y la sombra proyectada por este es igual a 3.46 unidades. Si mantenemos el **ángulo de referencia y el ángulo recto** como fijos, y **duplicamos la longitud de la altura del bastón**, observe lo que ocurre.

¿Cuál es la longitud de la sombra del bastón para el segundo caso? Justifique.

Cuando la longitud del bastón $\overline{AB}$ es 5 unidades Y se duplica a 10 unidades ¿qué sucede con $\overline{AE}$? ¿La longitud de la sombra $\overline{BE}$ también se duplica? Explique lo sucedido.

Cuando la longitud del bastón $\overline{AB}$ es 15 unidades (el triple de la longitud del caso inicial), ¿qué sucede con $\overline{AE}$? ¿La longitud de la sombra $\overline{BE}$ también se triplica?, Explique lo sucedido.

De acuerdo con los casos analizados en las preguntas anteriores, ¿cómo describe la relación que se establece entre la **longitud del bastón y la longitud de la sombra** respecto al ángulo en el triángulo rectángulo estudiado? Justifique.

¿Cómo podemos medir las sombras?

PROBLEMA 2: Continuando con la condición de Sofía de mantener dos elementos fijos.

Felipe fija la altura del bastón a 10 unidades a las 8 am cuando el ángulo de referencia sería igual a 30°, y la sombra proyectada por este es igual a 17.35 unidades

Si mantenemos el **lado AB y el ángulo recto** del triángulo como fijos, y **duplicamos el ángulo de referencia,** observe lo que sucede.

¿Cuánto mide la sombra? ¿Por qué?

Utilice el siguiente recurso GeoGebra para aproximar la longitud de la sombra, manteniendo la longitud del bastón y el ángulo recto como fijos– En el primer caso de la tabla, cuando son las 7 am el ángulo es 15° –la mitad del ángulo formado a las 8 am, ¿qué sucede con la longitud de la sombra respecto al ángulo a medida que transcurre el tiempo?

A la luz de los casos analizados, ¿cómo describe usted la relación que se establece entre **los ángulos y la longitud de la sombra** en el triángulo estudiado? Justifique.